



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

Fernando da Costa Gomes

**A Curvatura Média Total de Subvariedades do Espaço
Euclidiano**

**Teresina
2016**

Fernando da Costa Gomes

Dissertação de Mestrado:

A Curvatura Média Total de Subvariedades do Espaço Euclidiano

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Newton Luís Santos

Teresina

2016

A Curvatura Média Total de Subvariedades do Espaço Euclidiano

Fernando da Costa Gomes

Dissertação submetida à Comissão de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal do Piauí, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Prof. Dr. Newton Luís Santos (Orientador).
Universidade Federal do Piauí (UFPI)

Prof. Dr. Leandro de Freitas Pessoa
Universidade Federal do Piauí (UFPI)

Prof. Dr. Gregório Pacelli Feitosa Bessa
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Teresina - 2016

FICHA CATALOGRÁFICA
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial do CCN

G633c Gomes, Fernando da Costa.
A curvatura média total de subvariedades do espaço euclidiano / Fernando da Costa Gomes. – Teresina, 2016.
74 f.:il

Dissertação (Mestrado) – , Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática, 2016.

Orientador: Prof. Dr. Newton Luís Santos

1. Geometria. 2. Geometria Riemanniana. I. Título

CDD 516.373

Dedico este trabalho ao meu querido tio Ernesto Gomes (In memoriam).

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pelo dom da vida e por Ele ter permitido que eu chegasse até aqui.

Ao meu pai Pedro Gomes e à minha mãe Lenilda da Costa, pela excelente educação que eles me deram.

Aos meus irmãos Carlos Adriano e Maria Fernanda e aos demais familiares, por todo o apoio e carinho.

A todos os meus professores, desde a educação infantil até o ensino superior;

Ao professor Newton Luís, por toda a paciência, compreensão e principalmente por toda a dedicação que ele teve para comigo;

Ao professor Wilbertt Moura, por ter me ajudado incondicionalmente para que eu fosse aprovado no vestibular;

A todos os meus amigos do Piauí, Maranhão e de outros estados;

À minha amiga e amada Daiana Brito Castro, por todo o carinho e por sempre estar ao meu lado nos momentos bons (quantas gargalhadas!) e nos momentos difíceis. Obrigado por existir em minha vida. Eu te amo;

Aos professores Gregório Pacelli e Leandro Pessoa, por comporem a banca e contribuírem para a conclusão deste trabalho;

Por fim, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

“Se não houver a gratidão, a harmonia da família, a fidelidade dos amigos, o amor a Deus e ao semelhante, nenhum título acadêmico terá valor”.

Autor desconhecido.

Resumo

Neste trabalho, apresentamos uma descrição do comportamento das α -ésimas curvaturas escalares de uma variedade M^n imersa em um espaço Euclidiano E^{n+p} e obtemos algumas de suas aplicações. Apresentamos uma estimativa da curvatura média total para subvariedades fechadas em E^{n+p} com curvatura escalar normalizada R não negativa. A partir de tal estimativa, obtemos, ainda, resultados de classificação para M^n nas condições acima. A principal referência para esta dissertação é o artigo *The Total Mean Curvature of Submanifolds in a Euclidean Space* de Zhong-Hua Hou [16].

Palavras-chave: Curvatura média total; α -ésima curvatura escalar, k -ésima curvatura absoluta total.

Abstract

In this paper, we present a description of the behavior of the α th scalar curvatures of a manifold M^n immersed in a Euclidean space E^{n+p} and we obtain some applications of them. We provide an estimative of the total mean curvature for closed submanifolds in E^{n+p} with nonnegative normalized scalar curvature R . From such estimative, we present classification results for M^n in the above conditions. The paper *The Total Mean Curvature of Submanifolds in a Euclidean Space* due to Zhong-Hua Hou [16] is our main reference.

Keywords: Total mean curvature; α th scalar curvatures; k th total absolute curvature.

Sumário

Resumo	iv
Abstract	v
1 Introdução	1
2 Noções Preliminares	5
2.1 Método do referencial móvel de Cartan	5
2.2 Subvariedades em um espaço Euclidiano.	11
3 A Curvatura Média Total	19
3.1 As α -ésimas curvaturas escalares de M^n	19
3.2 Uma estimativa da curvatura média total	29
A Função Gama	36
A.1 Produtos de Weierstrass	36
A.2 A Função Gama	39
B Homologia	45
B.1 Complexos Simpliciais	45
B.2 Espaços de Cadeia e Homologia Simplicial	47
C Teoria Elementar de Pontos Críticos	52
C.1 Funções de Morse	52
C.2 As Desigualdades de Morse	54
Referências Bibliográficas	61

Capítulo 1

Introdução

A noção de curvatura em uma variedade Riemanniana foi introduzida em 1854 pelo matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) em sua famosa palestra "Über die Hypothesen, Welche der Geometrie zu Grundle liegen" [26]. Tal noção constitui um dos invariantes geométricos básicos e, assim, ganha um papel de destaque na geometria Riemanniana.

Além das curvaturas clássicas (seccional, Ricci, escalar), outros tipos de curvaturas foram (e ainda são) introduzidos na literatura com o intuito de se obter resultados topológicos, geométricos e de classificação das variedades Riemannianas. No que segue, todas as variedades e subvariedades serão supostas suaves de classe C^∞ .

Seja M^2 uma variedade 2-dimensional imersa em um espaço Euclidiano E^{2+p} de dimensão $2 + p$. Em 1966, Ōtsuki [23] introduziu, para M^2 em E^{2+p} , as curvaturas

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p,$$

que estão definidas continuamente em toda a variedade M^2 e podem ser usadas para se estudar a geometria de superfícies em espaços Euclidianos de dimensão mais alta. A partir dessas curvaturas, Shiohama [27] provou que uma superfície orientada completa em E^{2+p} com $\lambda_\alpha = 0$ ($1 \leq \alpha \leq p$) é um cilindro. Chen [5] classificou superfícies orientadas compactas em E^{2+p} com $\lambda_p \geq 0$.

Seja M^n uma subvariedade n -dimensional em um espaço Euclidiano E^{n+p} de dimensão $n + p$. Chen [7] introduziu, para M^n em E^{n+p} , a noção das α -ésimas curvaturas escalares $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$ e encontrou uma relação entre estas e a curvatura escalar de M^n . Cada λ_α ($1 \leq \alpha \leq p$) está definida continuamente em toda a variedade M^n e, quando $n = 2$, isto se reduz ao caso que foi introduzido por Ōtsuki [23].

Chen [7] também provou que se M^n ($n \geq 3$) é uma subvariedade fechada (isto é, compacta e sem bordo) em E^{n+p} com

$$\int_{M^n} (\lambda_1)^{n/2} dV = c_n \quad \text{e} \quad \lambda_\alpha = 0 \quad (2 \leq \alpha \leq p),$$

então M^n está mergulhada como uma hipersfera em um subespaço $(n+1)$ -dimensional de E^{n+p} . Na igualdade acima, c_n é o volume da n -esfera e dV denota o elemento de volume de M^n .

Denotaremos por R a curvatura escalar normalizada e por H a curvatura média de M^n . Suponha que M^n seja fechada em E^{n+p} . A curvatura média total de M^n é definida como sendo a integral

$$\int_{M^n} H^n dV.$$

Um problema interessante é o de encontrar o melhor limite inferior desta integral em termos dos invariantes geométricos e topológicos de M^n . Um caso especial deste problema é a famosa conjectura de Willmore [29], que foi demonstrada por Codá e Neves [15].

Neste trabalho, apresentaremos uma descrição do comportamento das α -ésimas curvaturas escalares e obteremos algumas de suas aplicações. Por exemplo, daremos uma estimativa da curvatura média total para subvariedades fechadas em E^{n+p} com $R \geq 0$. A partir de tal estimativa, apresentaremos, ainda, resultados de classificação para M^n nas condições acima. Nossa principal referência é o artigo *The Total Mean Curvature of Submanifolds in a Euclidean Space* de Zhong-Hua Hou [16].

Nosso trabalho está organizado da seguinte forma: No capítulo 2 estabelecemos a notação a ser usada e os pré-requisitos necessários à abordagem dos problemas tratados neste trabalho. No capítulo 3 introduzimos, inicialmente, a k -ésima curvatura média $K_k(x, e)$ em $(x, e) \in B_\nu = \{(p, \nu(p)); p \in M^n \text{ e } \nu(p) \in N_p M^n\}$ definida por

$$\det(\delta_{ij} + tA_{ij}) = 1 + \sum_k \binom{n}{k} K_k(x, e) t^k,$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker; t é um parâmetro e (A_{ij}) é a matriz do operador de forma A_e de M^n com relação ao vetor normal $e \in N_x M^n$.

De posse dessa definição, consideramos a seguinte média

$$K_k^*(x) := \int_{S_x^{p-1}} |K_k(x, e)|^{n/k} d\sigma_{p-1}(e)$$

na esfera normal S_x^{p-1} de $|K_k(x, e)|^{n/k}$ e a chamamos de k -ésima curvatura absoluta total de M^n em x .

Seja $f : M^n \rightarrow E^{n+p}$ uma imersão. É uma consequência do teorema da função inversa que, para todo $q \in M^n$, existe uma vizinhança $U \subset M^n$ de q tal que a restrição $f|_U$ de f a U é injetiva. Seja $V \subset E^{n+p}$ uma vizinhança de $f(q)$ em E^{n+p} de tal modo que $V \supset f(U)$. Admitamos V suficientemente pequeno para que exista um referencial móvel $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{n+p})$ em V com a propriedade que, quando restritos a $f(U)$, os vetores e_1, \dots, e_n sejam tangentes a $f(U)$ e os vetores e_{n+1}, \dots, e_{n+p} sejam normais a $f(U)$. Um tal referencial é dito *adaptado* a f .

Escolhendo-se um referencial $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^{n+p}$ adaptado a f , denotemos $\Pi = (\Pi_{\alpha\beta})_{p \times p}$, onde

$$\Pi_{\alpha\beta} = \frac{1}{n(n-1)} \cdot \sum_{i,j} (h_{ii}^{n+\alpha} h_{jj}^{n+\beta} - h_{ij}^{n+\alpha} h_{ij}^{n+\beta})$$

e $(h_{ij}^r)_{n \times n}$ é a matriz do operador de forma A_{e_r} ($n+1 \leq r \leq n+p$) com relação à base $\{e_1, \dots, e_{n+p}\}$.

Podemos mostrar que

$$K_e(x, e) = \sum_{\alpha\beta} \Pi_{\alpha\beta} y_\alpha y_\beta,$$

onde $e = \sum_{\alpha} y_\alpha e_{n+\alpha}$.

Aos autovalores λ_α ($1 \leq \alpha \leq p$) de Π , damos o nome de α -ésima curvatura escalar de M^n em E^{n+p} . Com relação às α -ésimas curvaturas escalares temos os seguintes resultados, devidos a Hou [16].

Proposição 1.1. *Seja M^n ($n \geq 2$) uma subvariedade em E^{n+p} com $p \geq 2$. Suponhamos que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$ sejam as α -ésimas curvaturas escalares de M^n . Então,*

$$0 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$$

em todo ponto de M^n .

Proposição 1.2. *Seja M^n ($n \geq 2$) uma subvariedade fechada em E^{n+p} com $R \geq 0$. Então,*

$$\int_{M^n} \lambda_1^{n/2} dV \geq \frac{\kappa_n c_{n-1}}{c_{n+p-1}} \int_{M^n} K_2^*(x) dV + \left\{ 1 - 2\kappa_n \left(\frac{c_{n-1}}{c_n} \right) \right\} \int_{M^n} R^{n/2} dV, \quad (1.1)$$

onde $\kappa_n = (\sqrt{\pi}/4) \Gamma(\frac{n}{4}) / \Gamma(\frac{n+2}{4})$. Além disso, se a igualdade em (1.1) ocorre, então $\lambda_\alpha = 0$ ($2 \leq \alpha \leq p-1$) em M^n .

A partir dessas desigualdades, obtemos o principal resultado deste trabalho, a saber, uma estimativa da curvatura média total para subvariedades fechadas em E^{n+p} com $R \geq 0$. De modo mais preciso, temos o seguinte teorema.

Teorema 1.1. *Seja M^n uma subvariedade fechada em E^{n+p} com $R \geq 0$. Então,*

$$\int_{M^n} H^n dV \geq 2\kappa_n c_{n-1} + \left\{ 1 - 2\kappa_n \left(\frac{c_{n-1}}{c_n} \right) \right\} \int_{M^n} R^{n/2} dV,$$

onde $\kappa_n = (\sqrt{\pi}/4) \cdot \Gamma(\frac{n}{4}) / \Gamma(\frac{n+2}{4})$. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, M^n está imersa como uma hiperesfera em um subespaço linear $(n+1)$ -dimensional de E^{n+p} .

Ainda como aplicação da Proposição 1.2 temos o seguinte resultado.

Proposição 1.3. *Seja M^n uma subvariedade fechada em E^{n+p} com $R \geq 0$. Suponha que $\{\lambda_\alpha\}$ sejam as α -ésimas curvaturas escalares de M^n . Então,*

$$\int_{M^n} H^n dV \geq \frac{\kappa_n c_{n-1}}{c_{n+p-1}} \int_{M^n} K_2^*(x) dV + \left\{ 1 - 2\kappa_n \left(\frac{c_{n-1}}{c_n} \right) \right\} \int_{M^n} R^{n/2} dV, \quad (1.2)$$

onde $\kappa_n = (\sqrt{\pi}/4) \Gamma(\frac{n}{4}) / \Gamma(\frac{n+2}{4})$. Além disso, a igualdade em (1.2) ocorre se, e somente se, ou (a) M^n está mergulhada como uma hiperesfera em um subespaço linear $(n+1)$ -dimensional de E^{n+p} ou (b) M^n é pseudo-umbílico com $R = 0$ e $\lambda_\alpha = 0$ ($2 \leq \alpha \leq p-1$).

Por fim, apresentamos nos Apêndices os principais resultados citados bem como os enunciados e demonstrações de teoremas importantes que foram usados ao longo do nosso texto.

No Apêndice A recordamos as principais propriedades da função gama. O Apêndice B é um resumo do que se necessita de Homologia, mais precisamente, a computação dos números de Betti de algumas superfícies fechadas bidimensionais. As conhecidas desigualdades de Morse são deduzidas no Apêndice C.

Capítulo 2

Noções Preliminares

Neste capítulo fixaremos a notação a ser usada e apresentaremos alguns conceitos e resultados necessários para o desenvolvimento do nosso trabalho. Salientamos que o objetivo deste capítulo é apenas revisar algumas definições e resultados clássicos da literatura. Desse modo, algumas demonstrações serão omitidas e, neste caso, indicaremos a referência para se obter tais demonstrações.

2.1 Método do referencial móvel de Cartan

As definições e os resultados obtidos nesta seção e na Seção 2.2 foram extraídos da referência [2].

Sejam \mathbf{U} um aberto do \mathbb{R}^n e $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ campos diferenciáveis de vetores definidos em \mathbf{U} de tal modo que, para todo $\mathbf{q} \in \mathbf{U}$, se tenha $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle_{\mathbf{q}} = \delta_{ij}$, onde $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$, com $i, j = 1, \dots, n$. Um tal conjunto de campo de vetores é chamado um *referencial ortonormal móvel* em \mathbf{U} e será denotado por $\{\mathbf{e}_i\}$. Doravante, omitiremos os adjetivos ortonormal e móvel, isto é, todos os referenciais serão ortonormais.

A partir do referencial $\{\mathbf{e}_i\}$ podemos definir formas diferenciais lineares $\omega_1, \dots, \omega_n$ pela condição $\omega_i(\mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$; em outras palavras, em cada ponto $\mathbf{q} \in \mathbf{U}$, a base $\{(\omega_i)_{\mathbf{q}}\}$ é a base dual de $\{(\mathbf{e}_i)_{\mathbf{q}}\}$. O conjunto das formas diferenciais $\{\omega_i\}$ é chamado o *correferencial* associado ao referencial $\{\mathbf{e}_i\}$.

Cada campo \mathbf{e}_i pode ser pensado como uma aplicação diferenciável $\mathbf{e}_i : \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. A diferencial $(d\mathbf{e}_i)_{\mathbf{q}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, em $\mathbf{q} \in \mathbf{U}$, é uma aplicação linear. Portanto, para todo

$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, podemos escrever

$$(\mathbf{d}\mathbf{e}_i)_q(\mathbf{v}) = \sum_j (\omega_{ij})_q(\mathbf{v}) \mathbf{e}_j.$$

As expressões $(\omega_{ij})_q(\mathbf{v})$, acima definidas, dependem linearmente de \mathbf{v} e diferenciavelmente de q . Portanto, $(\omega_{ij})_q$ é uma forma linear em \mathbb{R}^n . Como \mathbf{e}_i é um campo diferenciável, então ω_{ij} é uma forma diferenciável linear. Com estes significados em mente, escreveremos

$$\mathbf{d}\mathbf{e}_i = \sum_j \omega_{ij} \mathbf{e}_j \quad (2.1)$$

como definição das formas ω_{ij} , que são chamadas *formas de conexão* do \mathbb{R}^n no referencial $\{\mathbf{e}_i\}$.

Diferenciando a expressão $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle_q = \delta_{ij}$, obtemos

$$0 = \langle \mathbf{d}\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle_q + \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{d}\mathbf{e}_j \rangle_q = \omega_{ij} + \omega_{ji},$$

isto é, as formas de conexão ω_{ij} são antissimétricas nos índices i, j . O ponto fundamental no método do referencial móvel é que as formas ω_i, ω_{ij} satisfazem as chamadas equações de estrutura de Elie Cartan.

Teorema 2.1. (*Equações de Estrutura do \mathbb{R}^n*) *Seja $\{\mathbf{e}_i\}$ um referencial em um aberto $\mathbf{U} \subset \mathbb{R}^n$. Sejam $\{\omega_i\}$ o correferencial associado a $\{\mathbf{e}_i\}$ e ω_{ij} as formas de conexão de \mathbf{U} no referencial \mathbf{e}_i . Então,*

$$\mathbf{d}\omega_i = \sum_k \omega_k \wedge \omega_{ki}, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{d}\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.3)$$

Demonstração: Sejam $\mathbf{a}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $\mathbf{a}_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ a base canônica do \mathbb{R}^n e $x_i : \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}$ a função que faz corresponder a cada ponto $q = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{U}$ a sua i -ésima coordenada. Então, $\mathbf{d}x_i$ é uma forma diferencial em \mathbf{U} e, como $\mathbf{d}x_i(\mathbf{a}_j) = \delta_{ij}$, concluímos que $\{\mathbf{d}x_i\}$ é o correferencial associado ao referencial $\{\mathbf{a}_i\}$. O referencial dado se exprime em termos dos \mathbf{a}_i por

$$\mathbf{e}_i = \sum_j \beta_{ij} \mathbf{a}_j, \quad (2.4)$$

onde os β_{ij} são funções diferenciáveis em \mathbf{U} e, para cada $q \in \mathbf{U}$, a matriz $(\beta_{ij}(q))$ é uma matriz ortogonal. Como $\omega_i(\mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$, temos

$$\omega_i = \sum_j \beta_{ij} \mathbf{d}x_j. \quad (2.5)$$

Diferenciando (2.4), obtemos

$$de_i = \sum_k d\beta_{ik} a_k = \sum_k d\beta_{ij} \sum_j \beta_{jk} e_j.$$

Como $de_i = \sum_j \omega_{ij} e_j$, concluímos que

$$\omega_{ij} = \sum_k d\beta_{ik} \beta_{jk}, \quad (2.6)$$

ou seja,

$$\sum_j \omega_{ij} \beta_{js} = \sum_{jk} d\beta_{ik} \beta_{jk} \beta_{js} = d\beta_{is}, \quad s = 1, \dots, n. \quad (2.7)$$

Por fim, diferenciando exteriormente (2.5) e usando (2.7), obtemos

$$d\omega_i = \sum_j d\beta_{ij} \wedge dx_j = \sum_{jk} \omega_{ik} \beta_{kj} \wedge dx_j = \sum_k \omega_k \wedge \omega_{ki},$$

que é a primeira equação de estrutura (2.2).

Diferenciando (2.6) e usando (2.7), obtemos

$$\begin{aligned} d\omega_{ij} &= - \sum_k d\beta_{ik} \wedge d\beta_{jk} \\ &= - \sum_k \left\{ \left(\sum_{l=1}^n \omega_{il} \beta_{lk} \right) \wedge \left(\sum_s \omega_{js} \beta_{sk} \right) \right\} \\ &= - \sum_s \omega_{is} \wedge \omega_{js} \\ &= \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

que é a segunda equação de estrutura (2.3). ■

De modo inteiramente análogo ao que foi feito em \mathbb{R}^n , podemos definir, mais geralmente, um referencial ortonormal móvel em um aberto U de uma variedade Riemanniana M^n qualquer. Para finalizarmos esta seção, apresentaremos o importante lema de Cartan e demonstraremos a existência e unicidade das formas de conexão.

Lema 2.1. (Cartan) *Sejam V um espaço vetorial de dimensão n e $\omega_1, \dots, \omega_r : V \rightarrow \mathbb{R}$, $r \leq n$, formas lineares de V linearmente independentes. Suponhamos que existam formas lineares $\theta_1, \dots, \theta_r : V \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo a seguinte condição,*

$$\sum_{i=1}^r \omega_i \wedge \theta_i = 0.$$

Então,

$$\theta_i = \sum_j a_{ij} \omega_j, \quad i, j = 1, \dots, r, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Demonstração: Completamos as formas $\omega_1, \dots, \omega_r$ em uma base $\omega_1, \dots, \omega_r, \omega_{r+1}, \dots, \omega_n$ de V^* (espaço dual de V) e escrevamos

$$\theta_i = \sum_{j=1}^r a_{ij} \omega_j + \sum_{l=r+1}^n b_{il} \omega_l.$$

Basta agora observarmos que a condição $\sum_i \omega_i \wedge \theta_i = 0$ implica em

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^r \omega_i \wedge \theta_i \\ &= \sum_{i=1}^r \omega_i \wedge \sum_{j=1}^r a_{ij} \omega_j + \sum_{i=1}^r \omega_i \wedge \sum_{l=r+1}^n b_{il} \omega_l \\ &= \sum_{i<j} (a_{ij} - a_{ji}) \omega_i \wedge \omega_j + \sum_{i<l} b_{il} \omega_i \wedge \omega_l. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Como os $\omega_k \wedge \omega_s$, $k < s$, $k, s = 1, \dots, n$, são linearmente independentes, concluímos que $a_{ij} = a_{ji}$ e $b_{il} = 0$. ■

Lema 2.2. *Sejam M^n uma variedade Riemanniana, $q \in M^n$ e $U \subset M^n$ uma vizinhança de q . Sejam (e_1, \dots, e_n) um referencial móvel em U e $\omega_1, \dots, \omega_n$ o correferencial associado a $\{e_i\}$. Suponha que exista em U um conjunto de 1-formas diferenciais ω_{ij} satisfazendo as condições*

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji} \quad e \quad d\omega_j = \sum_k \omega_k \wedge \omega_{kj}.$$

Então um tal conjunto é único.

Demonstração: Suponhamos que exista outro conjunto de formas $\bar{\omega}_{ij}$ com

$$\bar{\omega}_{ij} = -\bar{\omega}_{ji}, \quad d\omega_j = \sum_k \omega_k \wedge \bar{\omega}_{kj}.$$

Então, $\sum_k \omega_k \wedge (\bar{\omega}_{kj} - \omega_{kj}) = 0$ e, pelo lema de Cartan,

$$\bar{\omega}_{kj} - \omega_{kj} = \sum_i B_{ki}^j \omega_i, \quad B_{ki}^j = B_{ik}^j.$$

Observemos que,

$$\bar{\omega}_{kj} - \omega_{kj} = \sum_i B_{ki}^j \omega_i = -(\bar{\omega}_{jk} - \omega_{jk}) = -\sum_i B_{ji}^k \omega_i$$

e, como os ω_i são linearmente independentes, então $B_{ki}^j = -B_{ji}^k$. Usando as simetrias obtidas, concluímos que

$$B_{ji}^k = -B_{ki}^j = -B_{ik}^j = B_{jk}^i = B_{kj}^i = -B_{ij}^k = -B_{ji}^k = 0,$$

ou seja, $\bar{\omega}_{kj} = \omega_{kj}$. ■

Lema 2.3. *Escolhido um referencial $\{e_i\}$ em um aberto $U \subset M^n$ de uma variedade Riemanniana M^n , existe em U um conjunto de formas diferenciais ω_{ij} que satisfazem*

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji} \text{ e } d\omega_j = \sum_k \omega_k \wedge \omega_{kj}. \quad (2.10)$$

Demonstração: Dado um ponto $q \in M^n$, o conjunto $\{\omega_i \wedge \omega_j; i < j, i, j = 1, \dots, n\}$ forma uma base para o espaço $\Lambda^2(T_q M^n)^*$ das formas bilineares alternadas de $T_q M^n \times T_q M^n$. Assim, podemos escrever

$$d\omega_j = \sum_{k < i} A_{ki}^j \omega_k \wedge \omega_i; \text{ com } A_{ki}^j = -A_{ik}^j. \quad (2.11)$$

Queremos determinar funções $C_{kj}^i = -C_{jk}^i$ tais que as formas diferenciais

$$\omega_{kj} = \sum_i C_{kj}^i \omega_i \quad (2.12)$$

satisfaçam (2.10). Se tais formas existirem, então de (2.10) e (2.11) teremos

$$\begin{aligned} d\omega_j &= \sum_{k < i} A_{ki}^j \omega_k \wedge \omega_i = \sum_k \omega_k \wedge \left(\sum_i C_{kj}^i \omega_i \right) \\ &= \sum_{k < i} (C_{kj}^i - C_{ij}^k) \omega_k \wedge \omega_i. \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes de termos correspondentes nas equações acima, obtemos

$$\begin{aligned} A_{ki}^j &= C_{kj}^i - C_{ij}^k \\ A_{ij}^k &= C_{ik}^j - C_{jk}^i \\ A_{kj}^i &= C_{ki}^j - C_{ji}^k. \end{aligned}$$

Adicionando membro a membro as igualdades acima, encontraremos a seguinte condição necessária para a existência dos C_{kj}^i ,

$$C_{kj}^i = \frac{1}{2}(A_{ki}^j + A_{ij}^k + A_{kj}^i). \quad (2.13)$$

Então, basta definirmos C_{kj}^i como em (2.13) e as formas ω_{ij} por (2.12). ■

Sejam M^n uma variedade diferenciável n -dimensional e E^{n+p} um espaço Euclidiano de dimensão $n + p$. (De agora em diante, usaremos um índice superior quando quisermos indicar a dimensão de uma variedade). Dizemos que uma aplicação diferenciável $f : M^n \rightarrow E^{n+p}$ é uma *imersão* se a diferencial $(df)_q : T_q M^n \rightarrow T_{f(q)} E^{n+p}$ é injetiva

em todo ponto $q \in M^n$. O número $p = (n + p) - n$ é chamado *codimensão* de f . Para cada $q \in M^n$, o espaço gerado pelos vetores de E^{n+p} que são normais a $(df)_q(T_q M^n)$ é chamado *espaço normal da imersão* f em q e será indicado por $N_q M^n$. Ao espaço

$$NM^n = \coprod_{q \in M} N_q M^n$$

munido de sua estrutura usual de variedade diferenciável chamaremos *fibrado normal*.

A ideia básica do método do referencial móvel pode ser descrita da maneira seguinte. Seja $f : M^n \rightarrow E^{n+p}$ uma imersão. Pelo teorema da função inversa existe, para todo $q \in M^n$, uma vizinhança $U \subset M^n$ de q tal que a restrição $f|_U$ de f a U é injetiva. Seja $V \subset E^{n+p}$ uma vizinhança de $f(q)$ em E^{n+p} de tal modo que $V \supset f(U)$. Admitamos V suficientemente pequeno para que exista um referencial móvel $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{n+p})$ em V com a propriedade que, quando restritos a $f(U)$, os vetores e_1, \dots, e_n sejam tangentes a $f(U)$ e os vetores e_{n+1}, \dots, e_{n+p} sejam normais a $f(U)$. Um tal referencial é dito *adaptado a f* .

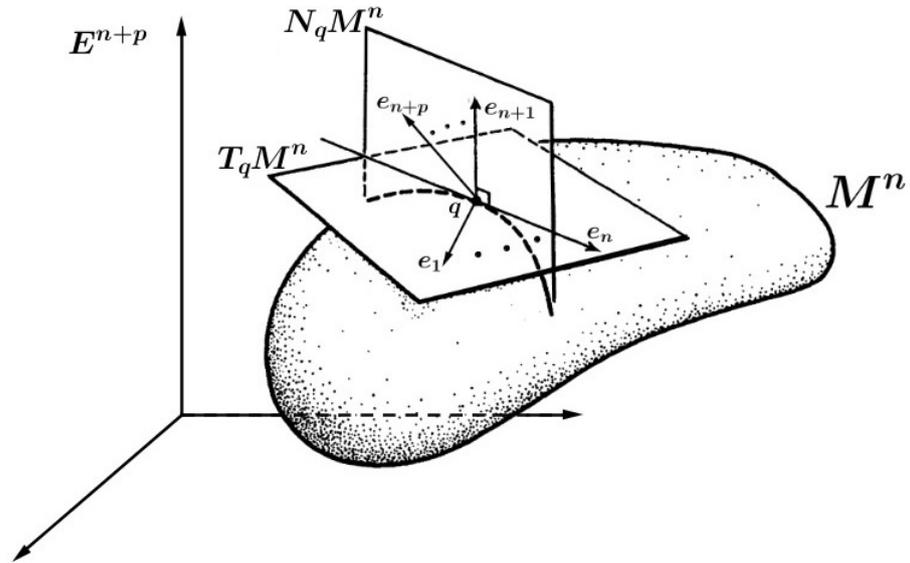


Figura 1. Um referencial móvel adaptado a f em uma vizinhança do ponto q .

A existência de um referencial adaptado a f pode ser provada do seguinte modo. Se V é suficientemente pequeno, então existe um difeomorfismo $g : V \rightarrow V$ tal que $g(f(U))$ é um aberto de uma subvariedade linear de dimensão n de E^{n+p} . A existência de um referencial $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n, \bar{f}_{n+1}, \dots, \bar{f}_{n+p}$ adaptado a $g(f(U))$ em $g(V)$ é imediata. A imagem inversa $(dg)^{-1}(\bar{f}_1), \dots, (dg)^{-1}(\bar{f}_{n+p})$ de um tal referencial pode não ser ortonormal. Usaremos então o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt em cada ponto de V . Observando

que os vetores obtidos por um tal processo "variam diferenciavelmente" com os vetores dados, obteremos em V um referencial ortonormal adaptado a $f(U)$.

2.2 Subvariedades em um espaço Euclidiano.

Seja $f : M^n \rightarrow E^{n+p}$ uma imersão e consideremos uma vizinhança U de $q \in M$ na qual a restrição $f|_U$ seja injetiva. Seja V uma vizinhança de $f(q)$ em E^{n+p} de tal modo que $f(U) \subset V$ e que em V esteja definido um referencial $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{n+p})$ adaptado a f . Pensaremos em f como uma inclusão de U em $V \subset E^{n+p}$ e usaremos a mesma notação para campos de vetores em V ou a sua restrição a U . De agora por diante, esta convenção será usada sem maiores comentários. Ao longo desta seção, usaremos os seguintes tipos de índices: $1 \leq A, B, C, \dots \leq n+p$; $1 \leq i, j, k, \dots \leq n$; $n+1 \leq \alpha, \beta, \gamma, \dots \leq n+p$.

Dado o referencial $\{e_A\}$ em U , definiremos o correferencial $\{\omega_A\}$ e as formas de conexão ω_{AB} em V por

$$df = \sum \omega_A e_A, \quad (2.14)$$

$$de_A = \sum \omega_{AB} e_B. \quad (2.15)$$

As formas ω_A e ω_{AB} satisfazem as equações de estrutura

$$d\omega_A = \sum \omega_B \wedge \omega_{BA}, \quad (2.16)$$

$$d\omega_{AB} = \sum \omega_{AC} \wedge \omega_{CB}. \quad (2.17)$$

As restrições das formas ω_A, ω_{AB} a $U \subset V$ satisfazem ainda as equações (2.16) e (2.17) com a relação adicional $\omega_\alpha = 0$, para todo α . Esta última relação provém do fato que os vetores e_α são normais a U e, portanto, para todo $q \in U$ e todo $v = \sum_i v_i e_i \in T_q M^n$, tem-se

$$\omega_\alpha(v) = \omega_\alpha \left(\sum_i v_i e_i \right) = 0.$$

No que segue, só usaremos formas restritas a U . Como $\omega_\alpha = 0$, temos

$$0 = d\omega_\alpha = \sum \omega_B \wedge \omega_{B\alpha} = \sum \omega_\beta \wedge \omega_{\beta\alpha} + \sum \omega_i \wedge \omega_{i\alpha} = \sum \omega_i \wedge \omega_{i\alpha}.$$

Pelo lema de Cartan,

$$\omega_{i\alpha} = \sum_j h_{ij}^\alpha \omega_j, \quad h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha.$$

A forma quadrática

$$\text{II}^\alpha = \sum_i \omega_i \omega_{i\alpha} = \sum_{ij} h_{ij}^\alpha \omega_i \omega_j$$

é chamada a segunda forma quadrática de f na direção e_α .

Um campo diferenciável de vetores normais é uma aplicação diferenciável

$$\nu : M^n \rightarrow \text{NM}^n \subset \text{TE}^{n+p}$$

com $\nu(q) \in N_q M^n$, $q \in M^n$. Dado um campo diferenciável de vetores normais unitários $\nu : U \subset M^n \rightarrow \text{NM}^n$, em uma vizinhança U suficientemente pequena de q , podemos escolher um referencial adaptado $\{e_\lambda\}$ em U de tal modo que $e_{n+1} = \nu$. A segunda forma quadrática II^{n+1} é chamada segunda forma quadrática de f na direção de ν e indicada por II^ν . Vamos mostrar agora que II^ν não depende do referencial escolhido. Para tanto, diferenciamos a expressão

$$0 = \langle df, \nu \rangle = \langle df, e_{n+1} \rangle,$$

obtendo

$$\begin{aligned} \langle df^2, \nu \rangle &= \langle df, de_{n+1} \rangle = -\left\langle \sum_i \omega_i e_i, \sum_j \omega_{n+1,j} e_j + \sum_\beta \omega_{n+1,\beta} e_\beta \right\rangle \\ &= -\sum_i \omega_i \omega_{n+1,i} = \sum_i \omega_i \omega_{i,n+1} = \text{II}^{n+1} = \text{II}^\nu. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Portanto, se $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ é uma curva em M^n parametrizada pelo comprimento de arco s , com $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = w$, teremos

$$\text{II}^\nu(w, w) = \langle d^2 f(w, w), \nu \rangle = \left\langle \left(\frac{d^2 \alpha}{ds^2} \right)_{s=0}, \nu \right\rangle.$$

O último membro das desigualdades acima é a componente do vetor curvatura de α segundo o vetor unitário ν . Decorre daí que II^α é independente da escolha do referencial.

Como a toda forma quadrática em um espaço vetorial está associada uma aplicação linear auto-adjunta, então para todo $q \in M^n$ e todo vetor normal unitário $\nu \in N_q M^n$, existe uma transformação linear auto-adjunta $A_q^\nu : T_q M^n \rightarrow T_q M^n$, tal que

$$\text{II}_q^\nu(w) = -\langle A_q^\nu(w), w \rangle,$$

para todo $w \in T_q M^n$. Por (2.18), segue que

$$\langle A_q^\nu(w), w \rangle = \langle d\nu(w), df(w) \rangle$$

e que a matriz de A^ν em um referencial adaptado a f com $e_{n+1} = \nu$ é dada por $(-h_{ij}^{n+1})$.

Às vezes é conveniente usar a aplicação bilinear $B_q : T_q M^n \times T_q M^n \rightarrow N_q M^n$ dada por

$$\langle B_q(X, Y), \nu_q \rangle_q = -\langle A_q^\nu(X), Y \rangle_q, \quad X, Y \in T_q M^n, \quad \nu \in N_q M^n.$$

Em termos de um referencial local adaptado a f , temos a seguinte expressão para B ,

$$B(X, Y) = \sum_{\alpha} \left(\sum_{ij} h_{ij}^{\alpha} \omega_i(X) \omega_j(Y) \right) e_{\alpha}, \quad (2.19)$$

o que mostra que B é uma aplicação bilinear simétrica. Como já vimos, II^ν independe do referencial escolhido. Usando este fato e a igualdade em (2.19), concluímos que $B(X, Y)$ também independe do referencial normal $\{e_{\alpha}\}$. O traço de B em q , isto é,

$$\sum_{\alpha} \left(\sum_i h_{ii}^{\alpha} \right) e_{\alpha} = nH_q$$

dá origem a um vetor normal H_q chamado o *vetor curvatura média* em q .

Vamos agora escrever as equações de estrutura (2.16) e (2.17) tendo o cuidado de separar as partes tangenciais e normais. Obteremos as equações,

$$d\omega_i = \sum_j \omega_j \wedge \omega_{ji}, \quad (2.20)$$

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \sum_{\alpha} \omega_{i\alpha} \wedge \omega_{\alpha j}, \quad (2.21)$$

$$d\omega_{i\alpha} = \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_{j\alpha} + \sum_{\beta} \omega_{i\beta} \wedge \omega_{\beta\alpha}, \quad (2.22)$$

$$d\omega_{\alpha\beta} = \sum_j \omega_{\alpha j} \wedge \omega_{j\beta} + \sum_{\gamma} \omega_{\alpha\gamma} \wedge \omega_{\gamma\beta}. \quad (2.23)$$

Observe que a equação (2.21) é semelhante à equação de estrutura de um espaço Euclidiano, com um "termo de correção" dado por

$$\sum_{\alpha} \omega_{i\alpha} \wedge \omega_{\alpha j} = \Omega_{ij}, \quad \Omega_{ij} = -\Omega_{ji}.$$

Para esclarecer o significado das 2-formas Ω_{ij} , notemos que a imersão $f : M^n \rightarrow E^{n+p}$ determina uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em M^n dada por

$$\langle \nu_1, \nu_2 \rangle_q = \langle df_q(\nu_1), df_q(\nu_2) \rangle, \quad q \in M, \quad \nu_1, \nu_2 \in T_q M^n,$$

onde o produto interno do segundo membro é o produto interno usual do E^{n+p} . A métrica Riemanniana em M^n é chamada *métrica induzida por f* . A métrica induzida e a parte

tangente $\{e_i\}$ do referencial determinam as formas ω_i e, por conseguinte, as formas $d\omega_i$. Pelo Lema 2.2 as formas ω_{ij} ficam então inteiramente determinadas e o mesmo se verifica para as formas

$$\Omega_{ij} = d\omega_{ij} - \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}.$$

Portanto, a matriz antissimétrica de 2-formas (Ω_{ij}) depende apenas da métrica induzida (e da escolha do referencial). Isto sugere que a matriz (Ω_{ij}) é uma espécie de medida do quanto a métrica induzida deixa de ser Euclidiana. (Ω_{ij}) é chamada a *matriz das formas de curvatura* no referencial $\{e_i\}$.

Observe que se $M^n = \mathbb{R}^n$, $\Omega_{ij} = 0$. Além disso, se $x : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ então

$$\Omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2,$$

onde K é a curvatura Gaussiana. Isso mostra que (Ω_{ij}) é uma generalização de tal curvatura.

Exemplo 2.1. *Seja $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a esfera unitária centrada na origem. Escolhendo um referencial adaptado $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$ em $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, teremos*

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \omega_{i,n+1} \wedge \omega_{n+1,j}, \quad i, j, k = 1, \dots, n,$$

donde

$$\Omega_{ij} = \omega_{i,n+1} \wedge \omega_{n+1,j}.$$

Como podemos pensar em $x = e_{n+1}$ como vetor posição da esfera S^n em \mathbb{R}^{n+1} , teremos

$$dx = \sum \omega_i e_i = de_{n+1} = \sum \omega_{n+1,i} e_i,$$

donde $\omega_i = \omega_{n+1,i}$. Decorre daí que $\Omega_{ij} = -\omega_i \wedge \omega_j$, isto é, S^n tem curvatura constante igual a 1.

Se M^n for orientada, então a n -forma diferencial $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n = \nu$ não depende da escolha do referencial $\{e_i\}$, contanto que tomemos sempre referenciais na orientação de M^n . Com efeito, o valor de ν nos vetores $\nu_i = \sum a_{ij} e_j$, $i, j = 1, \dots, n$ é dado por

$$\begin{aligned} & (\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_n) \left(\sum_j a_{1j} e_j, \dots, \sum_j a_{nj} e_j \right) \\ &= \det(a_{ij}) \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n(e_1, \dots, e_n) = \det(a_{ij}) \end{aligned}$$

que é igual ao volume do paralelepípedo orientado formado pelos vetores v_i . A forma ν é chamada *forma de volume* de M^n . Por exemplo, a forma de volume da esfera S^n no referencial do Exemplo 2.1 é dada por

$$\nu = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_n = \omega_{n+1,1} \wedge \dots \wedge \omega_{n+1,n}. \quad (2.24)$$

Para associar um significado geométrico à matriz das formas de curvatura, precisamos verificar como elas variam com uma mudança da parte tangente do referencial $\{e_i\}$ (a parte normal $\{e_\alpha\}$ do referencial não afeta as formas Ω_{ij}). Para isto, será conveniente usar a seguinte notação matricial.

As matrizes das formas ω_{ij} e Ω_{ij} serão indicadas por W e Ω , respectivamente, e o vetor coluna das formas ω_i , por ω . As equações de estrutura (2.20) e (2.21) se escrevem, pois, como

$$\begin{aligned} d\omega &= W \wedge \omega, \\ dW &= W \wedge W + \Omega. \end{aligned}$$

Uma mudança na parte tangente $\{e_i\}$ do referencial será dada por $e_i = \sum u_{ij} \bar{e}_j$, onde $(u_{ij}) = U$ é uma matriz de funções diferenciáveis em M . Além disso, U é ortogonal, isto é, $U \cdot U^* = \text{identidade}$, onde U^* indica a matriz transposta de U .

Lema 2.4. *Por uma mudança do referencial tangente $\{e_i\}$ dada por $e_i = \sum_j u_{ij} \bar{e}_j$, a matriz das formas de conexão W muda por*

$$W = dU U^* + U \bar{W} U^*, \quad (2.25)$$

e a matriz das formas de curvatura Ω muda por

$$\Omega = U \bar{\Omega} U^*, \quad (2.26)$$

onde uma barra indica a entidade correspondente no referencial $\{\bar{e}_i\}$.

Demonstração: Vide ([2]). ■

Decorre do lema que, fixado $q \in M^n$, quando mudamos o referencial tangente $\{e_i\}$, a matriz de formas $((\Omega_{ij})_q)$ muda como a matriz de uma transformação linear em $T_q M^n$. Portanto, fixados dois vetores $X, Y \in T_q M^n$, a matriz numérica $\{(\Omega_{ij})_q(X, Y)\}$ representa uma transformação linear em $T_q M^n$, que indicaremos por

$$(R_{XY}) : T_q M^n \rightarrow T_q M^n,$$

e que não depende do referencial tangente. R_{XY} é chamado o *operador de curvatura* da métrica induzida.

Passemos agora a analisar a equação (2.23). Inicialmente, vamos escrevê-la na forma

$$d\omega_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma} \omega_{\alpha\gamma} \wedge \omega_{\gamma\beta} + \Omega_{\alpha\beta},$$

onde

$$\Omega_{\alpha\beta} = \sum_i \omega_{\alpha i} \wedge \omega_{i\beta} = -\Omega_{\beta\alpha}.$$

Vemos que elas possuem uma certa analogia formal com as equações de estrutura de um espaço Euclidiano com um "termo de correção" $\Omega_{\alpha\beta}$. Por um raciocínio inteiramente análogo ao lema (2.4) verificamos que a matriz de formas $(\omega_{\alpha\beta}) = W^\perp$ e a matriz de formas $(\Omega_{\alpha\beta}) = \Omega^\perp$ se transformam, por uma mudança da parte normal $\{e_\alpha\}$ do referencial, de modo semelhante às formas W e Ω , respectivamente. Por esta razão, chamaremos $\omega_{\alpha\beta}$ as *formas de conexão normal* e $\Omega_{\alpha\beta}$ as *formas da curvatura normal*.

É claro que, fixados $q \in M^n$ e dois vetores $X, Y \in T_q M^n$, a matriz $\{(\Omega_{\alpha\beta})_q(X, Y)\}$ determina uma transformação linear $(R_{XY}^\perp)_q : N_q M^n \rightarrow N_q M^n$, chamada *operador de curvatura normal* da imersão f .

As equações de definição

$$\Omega_{ij} = \sum_{\alpha} \omega_{i\alpha} \wedge \omega_{\alpha j}, \quad \Omega_{\alpha\beta} = \sum_i \omega_{\alpha i} \wedge \omega_{i\beta}$$

relacionam as formas de curvatura da métrica induzida e as formas da curvatura normal com as segundas formas quadráticas de imersão da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \Omega_{ij} &= -\sum_{\alpha} \left\{ \sum_l h_{il}^{\alpha} \omega_l \wedge \sum_k h_{jk}^{\alpha} \omega_k \right\} \\ &= \sum_{k < l} \left\{ \sum_{\alpha} (h_{il}^{\alpha} h_{jk}^{\alpha} - h_{ik}^{\alpha} h_{jl}^{\alpha}) \right\} \omega_k \wedge \omega_l \end{aligned} \quad (2.27)$$

e

$$\begin{aligned} \Omega_{\alpha\beta} &= -\sum_i \left\{ \sum_k h_{ik}^{\alpha} \omega_k \wedge \sum_l h_{il}^{\beta} \omega_l \right\} \\ &= \sum_{k < l} \left\{ \sum_i (h_{ki}^{\alpha} h_{il}^{\beta} - h_{ki}^{\beta} h_{il}^{\alpha}) \right\} \omega_k \wedge \omega_l. \end{aligned} \quad (2.28)$$

As equações (2.27) e (2.28) são chamadas as *equações de Gauss* e as *equações de Ricci*, respectivamente.

Como as formas Ω_{ij} são de grau dois e o conjunto $\{\omega_i \wedge \omega_j, \ i < j, \ i, j = 1, \dots, n\}$ forma uma base para o espaço $\Lambda^2 V^*$ das formas bilineares alternadas de $V \times V$, então podemos escrever

$$\Omega_{ij} = -\frac{1}{2} \sum_{k,l} R_{ijkl} \omega_k \wedge \omega_l. \quad (2.29)$$

As funções R_{ijkl} são chamadas as componentes do *tensor curvatura* de M . Da equação de Gauss e de (2.29) temos

$$R_{ijkl} = -\Omega_{ij}(e_k, e_l) = \sum_{\alpha} (h_{ik}^{\alpha} h_{jl}^{\alpha} - h_{il}^{\alpha} h_{jk}^{\alpha}). \quad (2.30)$$

No caso particular em que $k = i$ e $l = j$, R_{ijij} é chamado de *curvatura seccional* no plano $\text{span}\{e_i, e_j\}$. Em algumas situações é conveniente, ainda, introduzir a noção de *curvatura escalar normalizada* R , dada por

$$R = \sum_{i,j} \frac{R_{ijij}}{n(n-1)}. \quad (2.31)$$

Para finalizar esta seção, apresentaremos um exemplo que ilustra como funciona o método do referencial móvel.

Exemplo 2.2. (*Toro de Clifford*) *Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma aplicação diferenciável dada por $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\cos(\mathbf{u}), \sin(\mathbf{u}), \cos(\mathbf{v}), \sin(\mathbf{v}))$, $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2$. Como*

$$df = (-\sin(\mathbf{u}) \, d\mathbf{u}, \cos(\mathbf{u}) \, d\mathbf{u}, -\sin(\mathbf{v}) \, d\mathbf{v}, \cos(\mathbf{v}) \, d\mathbf{v})$$

teremos

$$df \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \right) = (-\sin(\mathbf{u}), \cos(\mathbf{u}), 0, 0) \quad e \quad df \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) = (0, 0, -\sin(\mathbf{v}), \cos(\mathbf{v})),$$

e portanto f é uma imersão. Como $f(\mathbf{u} + 2n\pi, \mathbf{v} + 2m\pi) = f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, para n e m inteiros, então a imagem $f(\mathbb{R}^2)$ é um toro $S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^4$. Para estudar a geometria deste toro, escolhamos um referencial ortonormal e adaptado

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (-\sin(\mathbf{u}), \cos(\mathbf{u}), 0, 0), \\ \mathbf{e}_2 &= (0, 0, -\sin(\mathbf{v}), \cos(\mathbf{v})), \\ \mathbf{e}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(\mathbf{u}), \sin(\mathbf{u}), \cos(\mathbf{v}), \sin(\mathbf{v})), \\ \mathbf{e}_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos(\mathbf{u}), -\sin(\mathbf{u}), \cos(\mathbf{v}), \sin(\mathbf{v})). \end{aligned}$$

Como $df = \sum_i \omega_i e_i$, concluímos que

$$\omega_1 = \langle df, e_1 \rangle = du, \quad \omega_2 = dv, \quad \omega_3 = \omega_4 = 0.$$

Para o cálculo das ω_{ij} , calcularemos primeiro

$$\begin{aligned} de_1 &= (-\cos(u) du, -\sin(u) du, 0, 0), \\ de_2 &= (0, 0, -\cos(v) dv, -\sin(v) dv), \\ de_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin(u) du, \cos(u) du, -\sin(v) dv, \cos(v) dv), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \omega_{12} &= \langle de_1, e_2 \rangle = 0, \\ \omega_{13} &= \langle de_1, e_3 \rangle = -du, \\ \omega_{14} &= \langle de_1, e_4 \rangle = du, \\ \omega_{23} &= \langle de_2, e_3 \rangle = -dv, \\ \omega_{24} &= \langle de_2, e_4 \rangle = -dv, \\ \omega_{34} &= \langle de_3, e_4 \rangle = 0. \end{aligned}$$

De $\omega_{12} = 0$, concluímos que a curvatura Gaussiana da métrica induzida é zero. De $\omega_{34} = 0$, concluímos que a curvatura normal da imersão também é zero. Para o cálculo das segundas formas quadráticas nas direções e_3 e e_4 , faremos

$$\omega_{13} = h_{11}^3 \omega_1 + h_{12}^3 \omega_2 \quad e \quad \omega_{23} = h_{21}^3 \omega_1 + h_{22}^3 \omega_3,$$

donde

$$h_{11}^3 = -1, \quad h_{12}^3 = h_{21}^3 = 0, \quad h_{22}^3 = -1,$$

isto é,

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Analogamente,

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Observe que $e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}f$ habita uma esfera unitária, pois $|f| = \sqrt{2}$. Portanto, $f(S^1 \times S^1)$ está contida na esfera $S^3_{(\sqrt{2})}$ de raio $\sqrt{2}$ de \mathbb{R}^4 e o referencial e_1, e_2, e_4 é tangente a esta esfera com e_3 normal a $f(S^1 \times S^1)$. Como imersão, $f: S^1 \times S^1 \rightarrow S^3_{(\sqrt{2})}$ descreve o chamado toro de Clifford.

Capítulo 3

A Curvatura Média Total

A teoria da curvatura média total consiste no estudo da integral da n -ésima potência da curvatura média H de uma subvariedade M^n em um espaço Euclidiano E^{n+p} e suas aplicações. Neste capítulo descreveremos, inicialmente, o comportamento das α -ésimas curvaturas escalares e, como aplicação, daremos uma estimativa da curvatura média total para subvariedades fechadas M^n em E^{n+p} com $R \geq 0$. A partir de tal estimativa, apresentaremos, ainda, resultados de classificação para M^n nas condições acima.

3.1 As α -ésimas curvaturas escalares de M^n

Seja $f : M^n \rightarrow E^{n+p}$ uma imersão de uma variedade suave compacta sem bordo n -dimensional M^n em um espaço Euclidiano E^{n+p} de dimensão $n + p$.

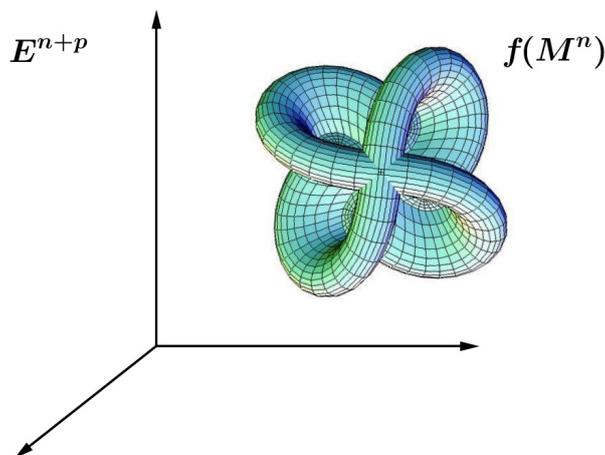


Figura 2. Imagem imersa de uma variedade fechada M^n em um espaço Euclidiano E^{n+p} .

Ao longo deste capítulo, identificaremos M^n com sua imagem imersa e convencionaremos os seguintes domínios de índices: $1 \leq i, j, k \leq n$; $1 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq p$; $n+1 \leq r, s, t \leq n+p$; $1 \leq A, B, C \leq n+p$.

Consideremos em $T(E^{n+p})$ um referencial ortonormal local (e_1, \dots, e_{n+p}) adaptado a f e seja $(\omega_1, \dots, \omega_{n+p})$ seu respectivo correferencial. Como vimos na Seção 2.1, existe uma única 1-forma de conexão, (ω_{AB}) , a forma de conexão de Levi-Civita, tal que

$$d\omega_A = \sum_B \omega_{AB} \wedge \omega_B, \quad \omega_{AB} + \omega_{BA} = 0, \quad d\omega_{AB} = \sum_C \omega_{AC} \wedge \omega_{CB}.$$

Restringindo estas formas a M^n , temos $\omega_r = 0$, para todo r . Assim,

$$0 = d\omega_r = \sum_i \omega_{ri} \wedge \omega_i, \quad \forall r.$$

Pelo lema de Cartan, temos

$$\omega_{ri} = \sum_j h_{ij}^r \omega_j, \quad h_{ij}^r = h_{ji}^r, \quad \forall i, j, r.$$

Além disso, da Seção 2.2 segue que a primeira e a segunda forma fundamental são, respectivamente, dadas por

$$I = \sum_i (\omega_i)^2 \quad \text{e} \quad II = \sum_{i,j,r} h_{ij}^r \omega_i \omega_j e_r.$$

O operador de forma A_e de M^n com relação ao vetor normal $e \in N_q M^n$ é o operador auto-adjunto em $T_q(M^n)$ correspondente à forma quadrática $II_e = \langle II, e \rangle$. A matriz de A_{e_r} com relação à base adaptada $\{e_1, \dots, e_{n+p}\}$ é $L_r = (h_{ij}^r)_{n \times n}$.

Utilizando-se as equações (2.30) e (2.31) da Seção 2.2 podemos representar o campo vetor curvatura média ξ , a curvatura média H e o comprimento ao quadrado da segunda forma fundamental S da seguinte maneira

$$\xi = \sum_r H_r e_r, \quad H = |\xi|, \quad S = \sum_{i,j,r} (h_{ij}^r)^2,$$

onde $H_r = \frac{1}{n} \sum_i h_{ii}^r$ para todo r .

No que segue, iremos mostrar que é válida a seguinte igualdade

$$R = \frac{n^2 H^2 - S}{n(n-1)}.$$

Pela equação (2.31) é suficiente provar que

$$\sum_{i,j} R_{ijij} = n^2 H^2 - S. \tag{3.1}$$

Da equação (2.30), segue que

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} R_{ijij} &= \sum_{i,j} \left\{ \sum_r [h_{ii}^r h_{jj}^r - (h_{ij}^r)^2] \right\} \\ &= \sum_{i,j,r} h_{ii}^r h_{jj}^r - \sum_{i,j,r} (h_{ij}^r)^2 \\ &= \sum_{i,j,r} h_{ii}^r h_{jj}^r - S. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Agora observe que,

$$\sum_{i,j,r} h_{ii}^r h_{jj}^r = n^2 H^2. \quad (3.3)$$

A equação (3.1) segue, então, das equações (3.2) e (3.3).

Denotemos por B_ν o fibrado normal unitário de $f(M^n)$ em E^{n+p} , isto é,

$$B_\nu = \{(x, \nu(x)) \mid x \in M^n \text{ e } \nu(x) \in N_{f(x)}(f(M^n)), \text{ com } \langle \nu(x), \nu(x) \rangle = 1\}.$$

Notemos que B_ν é localmente um fibrado de esferas $(p-1)$ -dimensionais sobre $f(M^n)$ e é localmente uma variedade diferenciável de dimensão $n+p-1$.

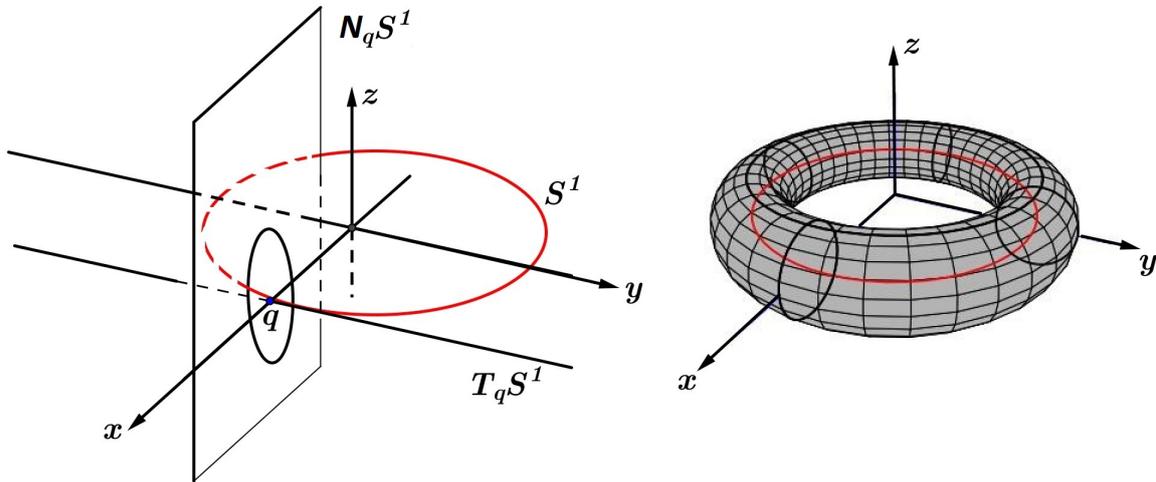


Figura 3. Visualização do toro como um fibrado normal unitário.

Existe uma forma diferenciável $d\sigma_{p-1}$ de grau $p-1$ em B_ν tal que, quando restrita a uma fibra, é o elemento de volume da esfera de vetores normais e unitários em um ponto $x \in M^n$, denotada por S_x^{p-1} .

Com efeito, podemos pensar em $f = e_{n+p}$ como vetor posição da esfera S_x^{p-1} . Assim,

das equações (2.14) e (2.15) obtemos

$$df = \sum_{\alpha=1}^{p-1} \omega_{n+\alpha} e_{n+\alpha} \quad e \quad de_{n+p} = \sum_{\alpha=1}^{p-1} \omega_{n+p,n+\alpha} e_{n+\alpha},$$

donde segue que,

$$\omega_{n+p,n+\alpha} = \omega_{n+\alpha}.$$

Desse modo, o elemento de volume de S_x^{p-1} no referencial acima é dado pela $(p-1)$ -forma

$$d\sigma_{p-1} = \omega_{n+1} \wedge \cdots \wedge \omega_{n+p-1} = \omega_{n+p,n+1} \wedge \cdots \wedge \omega_{n+p,n+p-1}.$$

Por outro lado, segue da equação (2.24) que o elemento de volume de M^n pode ser representado pela n -forma $dV = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n$. Como B_v é uma variedade diferenciável $(n+p-1)$ -dimensional, então a $(n+p-1)$ -forma dada por

$$dV \wedge d\sigma_{p-1} = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n \wedge \omega_{n+1} \wedge \cdots \wedge \omega_{n+p}$$

pode ser considerada como o elemento de volume de B_v .

Em um ponto arbitrário $(x, e) \in B_v$, denotemos $A_e = (A_{ij})$. Definimos a k -ésima curvatura média $K_k(x, e)$ em (x, e) por

$$\det(\delta_{ij} + tA_{ij}) = 1 + \sum_k \binom{n}{k} K_k(x, e) t^k,$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, t é um parâmetro e

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Quando $k = n$, a k -ésima curvatura média coincide com a curvatura de Lipschitz-Killing em (x, e) . Chamamos a integral

$$K_k^*(x) := \int_{S_x^{p-1}} |K_k(x, e)|^{n/k} d\sigma_{p-1}(e),$$

média na esfera normal S_x^{p-1} de $|K_k(x, e)|^{n/k}$, a k -ésima curvatura absoluta total de M^n em x . A k -ésima curvatura absoluta total com relação a f é definida por

$$TA_k(f) := \frac{1}{c_{n+p-1}} \int_{M^n} K_k^* dV.$$

Estabeleceremos, a seguir, um limite inferior para $TA_n(f)$ em termos do número de Morse $\mu(M^n)$ e dos i -ésimos números de Betti $\beta_i(M^n)$ de M^n (veja o Apêndice B para a definição de $\beta_i(M^n)$ e confira o Apêndice C para a definição de $\mu(M^n)$).

Lema 3.1. *Seja $f : M^n \rightarrow E^{n+p}$ uma imersão de uma variedade fechada em E^{n+p} . Então,*

$$TA_n(f) \geq \mu(M^n) \geq \beta(M^n),$$

onde $\mu(M^n)$ é o número de Morse, $\beta_i(M^n)$ é o i -ésimo número de Betti e $\beta(M^n) = \sum_{i=0}^n \beta_i(M^n)$.

Demonstração: Veja [14] ou [25]. ■

Lema 3.2. *Seja $f : M^n \rightarrow E^{n+p}$ uma imersão de uma variedade fechada em E^{n+p} . Então,*

$$TA_k(f) \geq 2, \quad k = 1, \dots, n.$$

A igualdade acontece se, e somente se, M^n está imersa ou como uma hiperesfera se $k < n$ ou como uma hipersuperfície convexa se $k = n$, em um subespaço linear $(n + 1)$ -dimensional de E^{n+p} .

Demonstração: Veja as referências [6] e [13]. ■

Para descrever como $K_2(x, e)$ depende de e , escolhamos, em uma vizinhança de x , um referencial ortonormal local $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^{n+p}$ adaptado a f . Então, o vetor normal e e o operador de forma A_e podem ser representados como

$$e = \sum_{\alpha} y_{\alpha} e_{n+\alpha} \quad e \quad A_e = \sum_{\alpha} y_{\alpha} L_{n+\alpha},$$

onde $\sum_{\alpha} y_{\alpha}^2 = 1$. Neste caso, $K_2(x, e)$ é dado por

$$K_2(x, e) = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{i < j} (A_{ii}A_{jj} - A_{ij}^2).$$

Exemplo 3.1. *Seja M^2 uma 2-superfície no espaço Euclidiano E^3 . Escolhamos, em uma vizinhança do ponto $x \in M^2$, um referencial ortonormal $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^3$ tal que e_1, e_2 sejam tangentes a M^2 . Então, a matriz do operador de forma A_{e_3} com relação à base adaptada (e_1, e_2, e_3) é*

$$L_3 = \begin{pmatrix} h_{11}^3 & h_{12}^3 \\ h_{21}^3 & h_{22}^3 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\det(\delta_{ij} + t h_{ij}^3) = 1 + (h_{11}^3 + h_{22}^3)t + (h_{11}^3 h_{22}^3 - h_{12}^3 h_{21}^3)t^2.$$

Neste caso, temos

$$K_2(x, e_3) = h_{11}^3 h_{22}^3 - (h_{12}^3)^2$$

e

$$K_1(x, e_3) = \frac{(h_{11}^3 + h_{22}^3)}{2}.$$

Denotemos $\Pi = (\Pi_{\alpha\beta})_{p \times p}$, onde

$$\Pi_{\alpha\beta} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j} (h_{ii}^{n+\alpha} h_{jj}^{n+\beta} - h_{ij}^{n+\alpha} h_{ij}^{n+\beta}) \quad (3.4)$$

para todo α e β . Então, $K_2(x, e)$ pode ser expressado como

$$K_2(x, e) = \sum_{\alpha\beta} \Pi_{\alpha\beta} y_\alpha y_\beta. \quad (3.5)$$

Da igualdade em (3.4) segue que Π é simétrica. Assim, podemos escolher um referencial ortonormal local $\{\bar{e}_{n+\alpha}\}_{\alpha=1}^p$ tal que $K_2(x, e)$ pode ser reescrito como

$$K_2(x, e) = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \bar{y}_{\alpha}^2, \quad (3.6)$$

onde $e = \sum_{\alpha} \bar{y}_{\alpha} \bar{e}_{n+\alpha}$ e $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$ são os autovalores de Π . Chamamos um tal referencial $(x; e_1, \dots, e_n; \bar{e}_{n+1}, \dots, \bar{e}_{n+p})$ um *referencial de Frenet-Ötsuki* e chamamos λ_{α} ($\alpha = 1, \dots, p$) a α -ésima curvatura escalar de M^n em E^{n+p} . Por definição, vemos que λ_{α} está definida continuamente em M^n e são diferenciáveis em subconjuntos abertos nos quais $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_p$.

Proposição 3.1. (Chen, [7]) *A curvatura escalar normalizada R e as α -ésimas curvaturas escalares satisfazem a seguinte relação*

$$R = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}.$$

Demonstração: Das igualdades em (3.5) e (3.6) segue que

$$\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \bar{y}_{\alpha}^2 = \sum_{\alpha} \Pi_{\alpha\alpha} \bar{y}_{\alpha}^2 = \sum_{\alpha} \left\{ \frac{1}{n(n-1)} \cdot \sum_{i,j} [h_{ii}^{n+\alpha} h_{jj}^{n+\alpha} - (h_{ij}^{n+\alpha})^2] \right\} \bar{y}_{\alpha}^2.$$

Assim,

$$\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} = \sum_{i,j} \frac{1}{n(n-1)} \cdot \sum_{\alpha} [h_{ii}^{n+\alpha} h_{jj}^{n+\alpha} - (h_{ij}^{n+\alpha})^2] = \sum_{i,j} \frac{R_{ijij}}{n(n-1)} = R.$$

■

Observação 3.1. *Diagonalizando-se a matriz L_3 do Exemplo 3.1, obtemos*

$$\lambda_1 = h_{11}^3, \lambda_2 = h_{22}^3, h_{21}^3 = h_{12}^3 = 0.$$

Assim, $K_2(x, e_3)$ e $K_1(x, e_3)$ coincidem, respectivamente, com a curvatura de Gauss e a curvatura média de M^2 .

Escrevamos,

$$S_{n+\alpha, n+\beta} = \sum_{i,j} h_{ij}^{n+\alpha} h_{ij}^{n+\beta} \text{ e } S_{n+\alpha} = S_{n+\alpha, n+\alpha} = \sum_{i,j} (h_{ij}^{n+\alpha})^2,$$

para todo α e β . Então, $\Pi_{\alpha\beta}$ pode ser expressado como

$$\Pi_{\alpha\beta} = \frac{1}{n(n-1)} (n^2 H_{n+\alpha} H_{n+\beta} - S_{n+\alpha, n+\beta}), \quad (3.7)$$

para todo α e β . Como a matriz $(H_{n+\alpha} H_{n+\beta})_{p \times p}$ tem posto 1 e $(S_{n+\alpha, n+\beta})_{p \times p}$ é positivo semi-definido, segue da igualdade em (3.7) que existe pelo menos $(p-1)$ números dos autovalores de Π que são menores do que ou iguais a zero. Da definição de λ_α , obtemos a seguinte

Proposição 3.2. *Seja M^n ($n \geq 2$) uma subvariedade em E^{n+p} com $p \geq 2$. Suponhamos que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$ sejam as α -ésimas curvaturas escalares de M^n . Então,*

$$0 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$$

em todo ponto de M^n .

Seja M^n uma subvariedade fechada em E^{n+p} com $R \geq 0$. Chen [7] estabeleceu a seguinte igualdade para uma subvariedade M^{2m} em E^{2m+2} com $R = 0$.

Teorema 3.1. *Seja M^{2m} uma variedade fechada $2m$ -dimensional imersa em E^{2m+2} com curvatura escalar $R = 0$. Então,*

$$\int_{M^{2m}} (\lambda_1)^m dV = \frac{c_m}{2c_{m+1}} \int_{M^{2m}} K_2^* dV. \quad (3.8)$$

Nesta seção, provaremos uma desigualdade que generaliza esse resultado. Antes de iniciar nossa discussão, precisamos do seguinte lema.

Lema 3.3. *Seja c_n o volume da esfera unitária S^n . Se $n \geq 2$, então*

$$\frac{c_{n-1}}{c_n} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{4}\right)} < 0.$$

Demonstração: Considere as funções $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(u) = 2 \ln \Gamma(u) - \ln \Gamma(u - \frac{1}{4}) - \ln \Gamma(u + \frac{1}{4})$ e $\psi : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\psi(u) = \frac{d}{du}(\ln \Gamma(u))$. Do Apêndice A (Proposição A.1), sabemos que

$$\frac{d^2}{du^2} (\ln \Gamma(u)) = \frac{1}{u^2} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(u+n)^2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \psi''(u) &= \frac{d}{du} \left(\frac{1}{u^2} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(u+n)^2} \right) = -\frac{2}{u^3} + \sum_{n \geq 1} \frac{-2}{(u+n)^3} \\ &= -2 \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{(u+n)^3} \right), \end{aligned}$$

ou seja, $\psi''(u) < 0$ para $u > 0$. Isso mostra que $\psi(u)$ é uma função côncava para $u > 0$.

Então, para $u > 0$, temos

$$\psi \left((1-t) \left(u - \frac{1}{4} \right) + t \left(u + \frac{1}{4} \right) \right) \geq (1-t) \psi \left(u - \frac{1}{4} \right) + t \psi \left(u + \frac{1}{4} \right), \text{ com } t \in [0, 1].$$

Fazendo $t = 1/2$ nesta última desigualdade, obtemos

$$\psi \left(\frac{1}{2} \left(u - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} \left(u + \frac{1}{4} \right) \right) \geq \frac{1}{2} \psi \left(u - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} \psi \left(u + \frac{1}{4} \right)$$

isto é,

$$\psi(u) \geq \frac{1}{2} \left[\psi \left(u - \frac{1}{4} \right) + \psi \left(u + \frac{1}{4} \right) \right]. \quad (3.9)$$

Veja que,

$$\begin{aligned} F'(u) &= 2 \frac{d}{du} [\ln \Gamma(u)] - \frac{d}{du} [\ln \Gamma(u - 1/4)] - \frac{d}{du} [\ln \Gamma(u + 1/4)] \\ &= 2 \psi(u) - \psi(u - 1/4) - \psi(u + 1/4) \\ &= 2 \left[\psi(u) - \frac{1}{2} [\psi(u - 1/4) + \psi(u + 1/4)] \right]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Das desigualdades (3.9) e (3.10) segue $F'(u) \geq 0$, logo $F(u)$ é uma função monótona crescente para $u \geq 0$. Agora, observe que

$$\begin{aligned} F(1) &= 2 \ln \Gamma(1) - \ln \Gamma \left(1 - \frac{1}{4} \right) - \ln \Gamma \left(1 + \frac{1}{4} \right) \\ &= \ln \left[\Gamma \left(1 - \frac{1}{4} \right) \cdot \Gamma \left(1 + \frac{1}{4} \right) \right]^{-1} \\ &= \ln \left[\frac{\pi}{\Gamma(1/4) \cdot \sin(\frac{\pi}{4})} \cdot \frac{1}{4} \cdot \Gamma(1/4) \right]^{-1} \\ &> \ln \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right). \end{aligned}$$

Portanto, para $u \geq 1$, temos $F(u) \geq F(1) > \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Logo, $F(u) > \ln(\sqrt{2}/2)$, donde segue que

$$[\Gamma(u)]^2 > \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \Gamma\left(u - \frac{1}{4}\right) \cdot \Gamma\left(u + \frac{1}{4}\right). \quad (3.11)$$

Como $c_{n-1} = 2\pi^{n/2}/\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ ([3], p.114), então usando a fórmula de duplicação da função gama ([17], p.399) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{c_{n-1}}{c_n} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{4}\right)} &= \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\pi^{(n+1)/2}} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{4}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left[2\left(\frac{n+1}{4}\right)\right]}{\Gamma\left[2\left(\frac{n}{4}\right)\right]} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{4}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left[\frac{2^{(n+1)/2} \Gamma\left(\frac{n+1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{n+3}{4}\right)}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{2\sqrt{\pi}}{2^{(n/2)} \Gamma\left(\frac{n}{4}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n+2}{4}\right)} \right] - \\ &\quad - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{4}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{2} \cdot \Gamma\left(\frac{n+1}{4}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n+3}{4}\right)}{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{4}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n+2}{4}\right)} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{4}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{2} \cdot \Gamma\left(\frac{n+1}{4}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n+3}{4}\right) - 2 \left[\Gamma\left(\frac{n+2}{4}\right)\right]^2}{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{4}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n+2}{4}\right)}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Fazendo $u = \frac{n+2}{4} \geq 1$ (pois $n \geq 2$) na desigualdade (3.11), obtemos

$$2 \left[\Gamma\left(\frac{n+2}{4}\right) \right]^2 > \sqrt{2} \left[\Gamma\left(\frac{n+2}{4} - \frac{1}{4}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n+2}{4} + \frac{1}{4}\right) \right] = \sqrt{2} \left[\Gamma\left(\frac{n+1}{4}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n+3}{4}\right) \right],$$

ou seja,

$$\sqrt{2} \left[\Gamma\left(\frac{n+1}{4}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n+3}{4}\right) \right] - 2 \cdot \left[\Gamma\left(\frac{n+2}{4}\right) \right]^2 < 0. \quad (3.13)$$

Portanto, da igualdade (3.12) e da desigualdade (3.13) concluímos que

$$\frac{c_{n-1}}{c_n} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{4}\right)} < 0.$$

■

Usando a Proposição 3.2 e a Proposição 3.1, temos

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{K}_2(\mathbf{x}, \mathbf{e})|^{n/2} &= \left| \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \bar{y}_{\alpha}^2 \right|^{n/2} = |\lambda_1 \bar{y}_1^2 + \lambda_2 \bar{y}_2^2 + \cdots + \lambda_p \bar{y}_p^2|^{n/2} \\
 &= |[\mathbf{R} - (\lambda_2 + \cdots + \lambda_p)] \bar{y}_1^2 + \lambda_2 \bar{y}_2^2 + \cdots + \lambda_p \bar{y}_p^2|^{n/2} \\
 &= |\mathbf{R} \bar{y}_1^2 + \lambda_2 (\bar{y}_2^2 - \bar{y}_1^2) + \cdots + \lambda_p (\bar{y}_p^2 - \bar{y}_1^2)|^{n/2} \\
 &\leq (\mathbf{R} \bar{y}_1^2 - \lambda_2 |\bar{y}_2^2 - \bar{y}_1^2| - \cdots - \lambda_p |\bar{y}_p^2 - \bar{y}_1^2|)^{n/2} \\
 &\leq \lambda_1^{\frac{n}{2}-1} (\mathbf{R} |\bar{y}_1|^n - \lambda_2 |\bar{y}_2^2 - \bar{y}_1^2|^{n/2} - \cdots - \lambda_p |\bar{y}_p^2 - \bar{y}_1^2|^{n/2}), \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

onde usamos acima o fato de que a função $f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^{n/2}$ é convexa em $[0, +\infty)$.

Necessitamos das seguintes integrais esféricas

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbf{S}_x^{p-1}} |\bar{y}_1|^n \, d\mathbf{S}_{p-1} &= \frac{2\mathbf{c}_{n+p-1}}{\mathbf{c}_n} \\
 \int_{\mathbf{S}_x^{p-1}} |\bar{y}_r^2 - \bar{y}_1^2|^{n/2} \, d\mathbf{S}_{p-1} &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{4}\right)} \left(\frac{\mathbf{c}_{n+p-1}}{\mathbf{c}_{n-1}} \right),
 \end{aligned}$$

para $r = 2, \dots, p$, que podem ser encontradas em [9].

Integrando ambos os lados da desigualdade (3.14) com relação a \mathbf{e} em \mathbf{S}_x^{p-1} e usando as integrais esféricas acima, obtemos

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbf{S}_x^{p-1}} |\mathbf{K}_2(\mathbf{x}, \mathbf{e})|^{\frac{n}{2}} \, d\mathbf{S}_{p-1} &\leq \lambda_1^{\frac{n}{2}-1} \left[\mathbf{R} \int_{\mathbf{S}_x^{p-1}} |\bar{y}_1|^n \, d\mathbf{S}_{p-1} - \lambda_2 \int_{\mathbf{S}_x^{p-1}} |\bar{y}_2^2 - \bar{y}_1^2|^{\frac{n}{2}} \, d\mathbf{S}_{p-1} - \cdots - \right. \\
 &\quad \left. - \lambda_p \int_{\mathbf{S}_x^{p-1}} |\bar{y}_p^2 - \bar{y}_1^2|^{\frac{n}{2}} \, d\mathbf{S}_{p-1} \right] \\
 &= \lambda_1^{\frac{n}{2}-1} \left[2\mathbf{R} \frac{\mathbf{c}_{n+p-1}}{\mathbf{c}_n} - (\lambda_2 + \cdots + \lambda_p) \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{4}\right)} \left(\frac{\mathbf{c}_{n+p-1}}{\mathbf{c}_{n-1}} \right) \right] \\
 &= \lambda_1^{\frac{n}{2}-1} \left\{ (\mathbf{c}_{n+p-1}) \cdot \left[\frac{2\mathbf{R}}{\mathbf{c}_n} - \frac{(\mathbf{R} - \lambda_1)}{\mathbf{c}_{n-1}} \cdot \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{4}\right)} \right] \right\} \\
 &= \lambda_1^{\frac{n}{2}-1} \mathbf{c}_{n+p-1} \left\{ \lambda_1 \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{4}\right) \mathbf{c}_{n-1}} + \frac{2\mathbf{R}}{\mathbf{c}_{n-1}} \left[\frac{\mathbf{c}_{n-1}}{\mathbf{c}_n} - \frac{2\Gamma\left(\frac{n+2}{4}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n}{4}\right)} \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\frac{1}{\mathbf{c}_{n+p-1}} \mathbf{K}_2^*(\mathbf{x}) \leq \lambda_1^{\frac{n}{2}-1} \left\{ \lambda_1 \cdot \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{4}\right) \mathbf{c}_{n-1}} + \frac{2\mathbf{R}}{\mathbf{c}_{n-1}} \left[\frac{\mathbf{c}_{n-1}}{\mathbf{c}_n} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{4}\right)} \right] \right\}. \quad (3.15)$$

Da Proposição 3.2, temos $\lambda_1 \geq R \geq 0$, donde $R\lambda_1^{n/2-1} \geq R^{n/2}$. Portanto, segue do Lema 3.3 e da desigualdade (3.15) que

$$\frac{1}{c_{n+p-1}} K_2^*(x) \leq \lambda_1^{n/2} \cdot \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{4}\right) c_{n-1}} + \frac{2R^{n/2}}{c_{n-1}} \left[\frac{c_{n-1}}{c_n} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{4}\right)} \right]. \quad (3.16)$$

Então, podemos provar nossa próxima proposição.

Proposição 3.3. *Seja M^n ($n \geq 2$) uma subvariedade fechada em E^{n+p} com $R \geq 0$.*

Então,

$$\int_{M^n} \lambda_1^{n/2} dV \geq \frac{\kappa_n c_{n-1}}{c_{n+p-1}} \int_{M^n} K_2^*(x) dV + \left\{ 1 - 2\kappa_n \left(\frac{c_{n-1}}{c_n} \right) \right\} \int_{M^n} R^{n/2} dV, \quad (3.17)$$

onde $\kappa_n = (\sqrt{\pi}/4)\Gamma\left(\frac{n}{4}\right)/\Gamma\left(\frac{n+2}{4}\right)$. Além disso, se a igualdade em (3.17) ocorre, então $\lambda_\alpha = 0$ ($2 \leq \alpha \leq p-1$) em M^n .

Demonstração: Como $\kappa_n = (\sqrt{\pi}/4)\Gamma\left(\frac{n}{4}\right)/\Gamma\left(\frac{n+2}{4}\right)$, então segue da desigualdade (3.16) que

$$\left(\frac{c_{n-1}}{c_{n+p-1}} \right) K_2^*(x) \leq \lambda_1^{n/2} \cdot \frac{1}{\kappa_n} + \left[2 \left(\frac{c_{n-1}}{c_n} \right) - \frac{1}{\kappa_n} \right] R^{n/2}.$$

Logo,

$$\lambda_1^{n/2} \geq \left(\frac{c_{n-1}}{c_{n+p-1}} \right) \kappa_n K_2^*(x) + \left[1 - 2\kappa_n \left(\frac{c_{n-1}}{c_n} \right) \right] R^{n/2}. \quad (3.18)$$

Integrando ambos os membros da desigualdade (3.18) em M^n , obtemos a desigualdade (3.17). Admitamos agora que a igualdade em (3.17) ocorra e ponhamos

$$P = \{x \in M^n \mid R(x) > 0\} \quad \text{e} \quad Q = \{x \in M^n \mid R(x) = 0\}.$$

Segue que $\lambda_1 = R$ em P , donde obtemos $\lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$ em P . Além disso, $M^n = P \cup Q$ e, da igualdade em (3.14), segue que no máximo um dos $\lambda_2, \dots, \lambda_p$ é não nulo em Q . Isto, junto com o fato $0 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$ implicam em $\lambda_2 = \dots = \lambda_{p-1} = 0$ em Q . Das deduções anteriores, temos $\lambda_2 = \dots = \lambda_{p-1} = 0$ em $P \cup Q = M^n$. Isso completa a demonstração. ■

3.2 Uma estimativa da curvatura média total

Seja $f : M^n \rightarrow E^{n+p}$ uma imersão da variedade fechada M^n em E^{n+p} . A curvatura média total de M^n com relação a f é definida por

$$TM(f) = \int_{M^n} H^n dV.$$

Um problema interessante é caracterizar as imersões que minimizam o funcional $TM(f)$. Vários resultados foram obtidos com relação a esse problema. Chen [8] provou que

$$\int_{M^n} H^n dV \geq c_n,$$

onde a igualdade ocorre se, e somente se, M^n está mergulhada como uma hiperesfera em um subespaço linear $(n + 1)$ -dimensional de E^{n+p} , com $n > 1$. Ele também obteve um limite inferior de $TM(f)$ em termos dos números de Betti de M^n para f com $R \geq 0$.

Nesta seção obteremos uma estimativa da curvatura média total de M^n em termos de R , onde $R \geq 0$.

Definição 3.1. *Uma subvariedade M^n de um espaço Euclidiano E^{n+p} diz-se umbílica em $x \in M^n$ na direção de $v \in N_x M^n$ se o operador de forma A_v for múltiplo da identidade em $T_p M^n$. No caso particular em que o vetor v tem a mesma direção do vetor curvatura média em x , a subvariedade M^n é chamada de pseudo-umbílica e x é chamado de ponto pseudo-umbílico. Além disso, se M^n é umbílica em toda direção normal, então dizemos que M^n é uma subvariedade totalmente umbílica de E^{n+p} .*

Exemplo 3.2. *Considere o toro de Clifford visto no Exemplo 2.2. Já vimos que as matrizes dos operadores de forma nas direções de e_3 e e_4 são dadas por*

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad e \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$h_{11}^3 = h_{22}^3 = -1; \quad h_{11}^4 = 1; \quad h_{22}^4 = -1.$$

O vetor curvatura média H do toro de Clifford tem a mesma direção de e_3 . Com efeito,

$$H = \frac{1}{2} \sum_{r=3}^4 \left(\sum_{i=1}^2 h_{ii}^r \right) e_r = \frac{1}{2} (h_{11}^3 + h_{22}^3) e_3 + \frac{1}{2} (h_{11}^4 + h_{22}^4) e_4 = (-1) e_3.$$

Desse modo, $A_H = (-1)Id$ e, portanto, o toro de Clifford é uma subvariedade pseudo-umbílica.

Lema 3.4. *Seja M^n uma subvariedade em E^{n+p} . Se $\lambda_1(x) \geq 0$ em um ponto $x \in M^n$, então $H^2(x) \geq \lambda_1(x)$, onde a igualdade ocorre em x se, e somente se, x é um ponto pseudo-umbílico de M^n .*

Demonstração: Seja $(x; e_1, \dots, e_n; \bar{e}_{n+1}, \dots, \bar{e}_{n+p})$ um referencial de Frenet-Ötsuki em uma vizinhança de x . Segue de (3.4) que

$$n(n-1)\lambda_\alpha = 2 \sum_{i < j} [h_{ii}^{n+\alpha} h_{jj}^{n+\alpha} - (h_{ij}^{n+\alpha})^2], \quad \forall \alpha.$$

Assim,

$$\sum_{\alpha > 1} \sum_{i, j} (h_{ij}^{n+\alpha})^2 = \sum_{\alpha > 1} (nH_{n+\alpha})^2 - n(n-1) \sum_{\alpha > 1} \lambda_\alpha.$$

Por outro lado, temos

$$\sum_i (h_{ii}^{n+1})^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum_{i < j} (h_{ii}^{n+1} - h_{jj}^{n+1})^2 + 2 \sum_{i < j} h_{ii}^{n+1} h_{jj}^{n+1} \right\}.$$

Portanto,

$$\sum_{i, j} (h_{ij}^{n+1})^2 = n\lambda_1 + \frac{1}{n-1} \sum_{i < j} (h_{ii}^{n+1} - h_{jj}^{n+1})^2 + \frac{2n}{n-1} \sum_{i < j} (h_{ij}^{n+1})^2.$$

Usando o fato $\sum_\alpha \lambda_\alpha = R$, obtemos

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i, j} (h_{ij}^{n+1})^2 + \sum_{\alpha > 1} \sum_{i, j} (h_{ij}^{n+\alpha})^2 \\ &= n^2\lambda_1 + \frac{2n}{n-1} \sum_{i < j} (h_{ij}^{n+1})^2 + \frac{1}{n-1} \sum_{i < j} (h_{ii}^{n+1} - h_{jj}^{n+1})^2 \\ &\quad + \sum_{\alpha > 1} (nH_{n+\alpha})^2 - n(n-1)R. \end{aligned}$$

Já sabemos que $n(n-1)R = n^2H^2 - S$. Portanto,

$$\begin{aligned} n^2H^2 &= n^2\lambda_1 + \frac{2n}{n-1} \sum_{i < j} (h_{ij}^{n+1})^2 \\ &\quad + \frac{1}{n-1} \sum_{i < j} (h_{ii}^{n+1} - h_{jj}^{n+1})^2 + \sum_{\alpha > 1} (nH_{n+\alpha})^2. \end{aligned} \quad (3.19)$$

De (3.19) temos $H^2 \geq \lambda_1$ e $H^2 = \lambda_1$ se, e somente se, $h_{ii}^{n+1} = h_{jj}^{n+1}$, $h_{ij}^{n+1} = 0$ para todo $i \neq j$, e $H_{n+\alpha} = 0$ para todo $\alpha > 1$. Desse modo,

$$\xi = \sum_{\alpha} H_{n+\alpha} e_{n+\alpha} = H_{n+1} e_{n+1}$$

e isso mostra que \bar{e}_{n+1} tem a mesma direção de ξ . Além disso, $\bar{L}_{n+1} = (h_{ij}^{n+1})_{n \times n}$ será uma matriz diagonal com elementos diagonais iguais a h_{11}^{n+1} . Como o referencial que estamos considerando é de Ötsuki-Frenet, então $h_{11}^{n+1} = \lambda_1$. Assim, $\bar{L}_{n+1} = \lambda_1 I_n = H^2 I_n$, onde I_n é a identidade de ordem n . Portanto, x é um ponto pseudo-umbílico. ■

Observação 3.2. *Chen [10] obteve o Lema 3.4 para $n = 2$.*

Usando a Proposição 3.3, o Lema 3.2 e o Lema 3.4, obtemos o principal resultado desse trabalho.

Teorema 3.2. *Seja M^n uma subvariedade fechada em E^{n+p} com $R \geq 0$. Então,*

$$\int_{M^n} H^n dV \geq 2\kappa_n c_{n-1} + \left\{ 1 - 2\kappa_n \left(\frac{c_{n-1}}{c_n} \right) \right\} \int_{M^n} R^{n/2} dV,$$

onde $\kappa_n = (\sqrt{\pi}/4) \cdot \Gamma(\frac{n}{4}) / \Gamma(\frac{n+2}{4})$. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, M^n está imersa como uma hiperesfera em um subespaço linear $(n+1)$ -dimensional de E^{n+p} .

Demonstração: Sabemos que $R = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$. Como, por hipótese, $R \geq 0$, então $\lambda_1 \geq -(\lambda_2 + \dots + \lambda_n)$. Pela Proposição 3.2, temos $0 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Assim, vemos que $\lambda_1 \geq 0$. Usando o Lema 3.4, temos $H^2 \geq \lambda_1$, logo $H^n \geq \lambda_1^{n/2}$. Integrando em M^n ambos os lados desta última desigualdade e usando o Lema 3.2, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{M^n} H^n dV &\geq \int_{M^n} \lambda_1^{n/2} dV \\ &\geq \frac{\kappa_n c_{n-1}}{c_{n+p-1}} \int_{M^n} K_2^*(x) dV + \left\{ 1 - 2\kappa_n \left(\frac{c_{n-1}}{c_n} \right) \right\} \int_{M^n} R^{n/2} dV \\ &\geq 2\kappa_n c_{n-1} + \left\{ 1 - 2\kappa_n \left(\frac{c_{n-1}}{c_n} \right) \right\} \int_{M^n} R^{n/2} dV, \end{aligned}$$

onde a igualdade ocorre se, e somente se, M^n está imersa como uma hiperesfera em um subespaço linear $(n+1)$ -dimensional de E^{n+p} . ■

Concluiremos esta seção dando outra aplicação da Proposição 3.3. Para tanto, necessitamos do seguinte lema.

Lema 3.5. *Seja M uma subvariedade totalmente umbílica em um espaço N . Se N tem curvatura constante, então M tem curvatura contante.*

Demonstração: Vide ([11], p.49). ■

Proposição 3.4. *Seja M^n uma subvariedade fechada em E^{n+p} com $R \geq 0$. Suponha que $\{\lambda_\alpha\}$ sejam as α -ésimas curvaturas escalares de M^n . Então,*

$$\int_{M^n} H^n dV \geq \frac{\kappa_n c_{n-1}}{c_{n+p-1}} \int_{M^n} K_2^*(x) dV + \left\{ 1 - 2\kappa_n \left(\frac{c_{n-1}}{c_n} \right) \right\} \int_{M^n} R^{n/2} dV, \quad (3.20)$$

onde $\kappa_n = (\sqrt{\pi}/4)\Gamma(\frac{n}{4})/\Gamma(\frac{n+2}{4})$. Além disso, a igualdade em (3.20) ocorre se, e somente se, ou (a) M^n está mergulhada como uma hiperesfera em um subespaço linear $(n+1)$ -dimensional de E^{n+p} ou (b) M^n é pseudo-umbílico com $R = 0$ e $\lambda_\alpha = 0$ ($2 \leq \alpha \leq p-1$).

Demonstração: A desigualdade em (3.20) segue utilizando-se os mesmos argumentos da demonstração do Teorema 3.2. Suponhamos que a igualdade em (3.20) ocorra. Então, da desigualdade (3.17) temos

$$\int_{M^n} H^n dV \leq \int_{M^n} \lambda_1^{n/2} dV. \quad (3.21)$$

Por outro lado, já vimos que $R \geq 0$ implica em $H^2 \geq \lambda_1$, donde $H^n \geq \lambda_1^{n/2}$. Assim,

$$\int_{M^n} H^n dV \geq \int_{M^n} \lambda_1^{n/2} dV. \quad (3.22)$$

De (3.21) e (3.22) obtemos

$$\int_{M^n} H^n dV = \int_{M^n} \lambda_1^{n/2} dV,$$

de onde concluímos que $H^2 = \lambda_1$. Do Lema 3.4 segue que M^n é pseudo-umbílica. Considere $M_0 = \{x \in M; R(x) > 0\}$. Da prova da Proposição 3.3, temos $\lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$ em M_0 . Assim, M_0 é totalmente umbílica. Do Lema 3.5, segue que toda componente conexa de M_0 tem curvatura constante. Assim, R é constante em M_0 . Portanto, $M_0 = M^n$ ou \emptyset , pois R é contínua em M^n . Se $M_0 = M$, então M^n tem curvatura constante. Assim, M^n está mergulhada como uma hiperesfera em um subespaço linear $(n+1)$ -dimensional de E^{n+p} . Se $M_0 = \emptyset$, então $R = 0$ em M^n . Além disso, segue da Proposição 3.3 que $\lambda_\alpha = 0$ ($2 \leq \alpha \leq p-1$) em M^n . A recíproca é imediata. Isso completa a demonstração.

■

Seja M^2 uma superfície fechada em E^{2+p} . Então, a curvatura escalar normalizada R é apenas a curvatura de Gauss e $TA_2(f)$ é precisamente a curvatura absoluta total. Usando a Proposição 3.4 e o Lema 3.1, podemos provar os seguintes corolários.

Corolário 3.1. *Seja M^2 uma superfície fechada em E^{2+p} com curvatura de Gauss não negativa. Se*

$$\int_{M^2} H^2 dV \leq (2 + \pi)\pi,$$

então M^2 é homeomorfa a uma esfera bidimensional.

Demonstração: Fazendo $n = 2$ na Proposição 3.4, temos

$$\begin{aligned} \int_{M^2} H^2 dV &\geq \frac{\kappa_2 c_1}{c_{p+1}} \cdot \int_{M^2} K_2^*(x) dV + \left\{ 1 - 2\kappa_2 \left(\frac{c_1}{c_2} \right) \right\} \cdot \int_{M^2} R dV \\ &= 2\pi \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4} \cdot \Gamma(1/2) \cdot \left(\frac{1}{c_{p+1}} \cdot \int_{M^2} K_2^*(x) dV \right) + \{1 - \kappa_2\} \cdot \int_{M^2} R dV \\ &= \frac{\pi^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{c_{p+1}} \cdot \int_{M^2} K_2^*(x) dV \right) + \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \int_{M^2} R dV, \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde a igualdade ocorre se, e somente se, M^2 está mergulhada como uma 2-esfera ou $R = 0$ em M^2 . Como, por hipótese, M^2 é uma superfície fechada, então a curvatura escalar normalizada R coincide com a curvatura de Gauss. Assim, do Lema 3.1 e da fórmula de Gauss-Bonnet, temos

$$\frac{1}{c_{p+1}} \cdot \int_{M^2} K_2^*(x) dV \geq \mu(M^2) \geq \beta(M^2) \quad \text{e} \quad \int_{M^2} R dV = 2\pi\chi(M^2). \quad (3.24)$$

Se $R > 0$, então da fórmula de Gauss-Bonnet segue que $\chi(M^2) > 0$. Logo, pelo teorema de classificação das superfícies fechadas (confira o Apêndice B) temos que M^2 deve ser homeomorfa a uma esfera unitária S^2 ou a um plano projetivo real $\mathbb{R}P^2$. Se M^2 fosse homeomorfa a $\mathbb{R}P^2$, então $\chi(M^2) = 1$ e $\mu(M^2) \geq 3$ (veja o Apêndice B). Das desigualdades em (3.23) e (3.24) teríamos

$$\int_{M^2} H^2 dV > 3 \cdot \frac{\pi^2}{2} + \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \cdot 2\pi = \pi(\pi + 2),$$

o que iria contradizer nossa hipótese. Logo, para $R > 0$, M^2 deve ser homeomorfa a uma 2-esfera.

Se $R = 0$, então com o mesmo raciocínio anterior, concluímos que M^2 deve ser homeomorfa a um toro T^2 ou a uma garrafa de Klein K^2 . Em ambos os casos, temos $\chi(M^2) = 0$ e $\mu(M^2) \geq 4$ (veja o Apêndice B). Novamente por (3.23) e (3.24) obtemos

$$\int_{M^2} H^2 dV \geq 2\pi^2 > \pi(\pi + 2),$$

o que mais uma vez contradiz nossa hipótese. Assim, M^2 não pode ser homeomorfa a T^2 nem a K^2 , donde segue o resultado. ■

Antes de demonstrarmos o próximo corolário, recordaremos o seguinte resultado devido a Chen.

Teorema 3.3. *Seja M^2 uma superfície pseudo-umbílica flat compacta em um espaço Euclidiano E^{n+p} . Então,*

$$\int_{M^2} H^2 dV \geq 2\pi^2. \quad (3.25)$$

A igualdade ocorre se, e somente se, M^2 está mergulhada como um toro de Clifford, isto é, M^2 é a superfície produto obtida de dois círculos planos com raios de mesma medida.

Demonstração: Vide [12]. ■

Corolário 3.2. *Seja M^2 uma superfície flat fechada em um espaço Euclidiano E^{n+p} com $p \geq 2$. Então,*

$$\int_{M^2} H^2 \, dV \geq 2\pi^2. \quad (3.26)$$

A igualdade ocorre se, e somente se, M^2 está mergulhada como um toro de Clifford $T^2 = S^1(\mathbf{a}) \times S^1(\mathbf{a}) \subset E^4 \subset E^{2+p}$, onde $S^1(\mathbf{a})$ é um círculo plano de raio \mathbf{a} .

Demonstração: Como por hipótese M^2 é flat, então $R = 0$. Com os mesmos argumentos da demonstração do Corolário 3.1, concluímos que $\int_{M^2} H^2 \, dV \geq 2\pi^2$. Agora, vamos demonstrar a segunda parte. Para tanto, suponhamos inicialmente que a igualdade em (3.26) ocorra. Como $R = 0$, então de (3.23) temos

$$\frac{1}{c_{p+1}} \cdot \int_{M^2} K_2^*(x) \, dV = 4. \quad (3.27)$$

Por outro lado, fazendo $m = 1$ em (3.8) e $p = 2$ em (3.27), obtemos

$$\int_{M^2} \lambda_1 \, dV = \frac{c_1}{2c_2} \cdot \int_{M^2} K_2^*(x) \, dV = \frac{c_1}{2c_2} \cdot 4c_3 = 2\pi^2,$$

donde segue que $\lambda_1 \geq 0$ e $\lambda_1 = H^2$. Então, pelo Lema 3.4, M^2 é pseudo-umbílica. Do Teorema 3.3 concluímos que M^2 está mergulhada como um toro de Clifford.

Reciprocamente, se M^2 está mergulhada como um toro de Clifford, então mais uma vez pelo Teorema 3.3 segue que $\int_{M^2} H^2 \, dV = 2\pi^2$. Isso completa a demonstração. ■

Observação 3.3. *Chen provou o Corolário 3.1 para $p = 2$ em [10] e para M^2 sendo pseudo-umbílica em [12].*

Apêndice A

Função Gama

Os resultados contidos neste apêndice foram extraídos da referência [22].

A.1 Produtos de Weierstrass

Sejam f, g funções inteiras com os mesmos zeros, nos quais eles tem as mesmas multiplicidades. Então f/g é uma função inteira sem zeros. Primeiro, analisaremos este caso.

Teorema A.1. *Seja f uma função inteira sem zeros. Então, existe uma função inteira h tal que*

$$f(z) = e^{h(z)}.$$

Demonstração: Como \mathbb{C} é simplesmente conexo e f não tem zeros, então existe $\log(f(z))$. Assim, basta tomar $h(z) = \log(f(z))$, pois $e^{\log(f(z))} = f(z)$. ■

Vemos que se f, g são duas funções com os mesmos zeros e mesma multiplicidades, então

$$f(z) = g(z)e^{h(z)}$$

para alguma função inteira $h(z)$. Reciprocamente, se $h(z)$ é inteira, então

$$g(z)e^{h(z)}$$

tem os mesmos zeros que g , contados com suas multiplicidades.

No que segue, daremos uma forma canônica de uma função com zeros prescritos. Suponha que esses zeros estejam ordenados pelo valor absoluto crescente. Logo, z_1, z_2, \dots

forma uma sequência de números complexos não nulos satisfazendo

$$|z_1| \leq |z_2| \leq \dots$$

Assumamos que $|z_n| \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Se tentarmos definir a função pelo produto

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right),$$

então vemos imediatamente que este produto pode não convergir e, assim, temos que inserir um fator convergente. Não queremos que este fator introduza novos zeros, então o definimos por meio de uma exponencial. Desejamos que ele seja o mais simples possível, assim tomamos a exponencial de um polinômio, cujo grau dependerá da sequência z_n . Então, somos levados a considerar fatores da forma

$$E_n(z) = (1 - z)e^{z+z^2/2+\dots+z^{n-1}/(n-1)}.$$

O polinômio na exponencial é exatamente o que precisávamos para cancelar os n primeiros termos na expansão em série da função \log . Desse modo,

$$\begin{aligned} \log E_n(z) &= \log(1 - z) + z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^{n-1}}{n-1} \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{-z^k}{k}. \end{aligned}$$

Lema A.1. *Se $|z| \leq 1/2$, então*

$$|\log E_n(z)| \leq 2|z|^n.$$

Demonstração:

$$|\log E_n(z)| \leq \frac{|z|^n}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \leq 2|z|^n.$$

■

Dada uma sequência $\{z_n\}$, com $z_n \rightarrow \infty$, escolhamos inteiros k_n tais que as séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{|z_n|}\right)^{k_n}$$

convergem para todo positivo real R . Como $|z_n| \rightarrow \infty$ podemos encontrar k_n , por exemplo, $k_n = n$, tal que $(R/|z_n|)^n \leq 1/2^n$ para $n \geq n_0(R)$. Ponhamos

$$P_n = z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^{k_n-1}}{k_n-1}$$

e

$$E_n(z, z_n) = \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{P_n(z/z_n)}.$$

Note que,

$$P_n\left(\frac{z}{z_n}\right) = \frac{z}{z_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{k_n - 1}\left(\frac{z}{z_n}\right)^{k_n - 1}.$$

Teorema A.2. *O produto*

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_n(z, z_n) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{P_n(z/z_n)}$$

converge uniformemente e absolutamente em cada disco $|z| \leq R$ e define uma função inteira com zeros nos pontos da sequência $\{z_n\}$ e nenhum outro zero.

Demonstração: Fixemos R e seja N tal que

$$|z_N| \leq 2R < |z_{N+1}|.$$

Então, para $|z| \leq R$ e $n > N$, temos

$$\left|\frac{z}{z_n}\right| < \frac{1}{2},$$

e assim,

$$|\log E_n(z, z_n)| \leq 2\left(\frac{R}{|z_n|}\right)^{k_n}.$$

Portanto, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log E_n(z, z_n)$$

converge absoluta e uniformemente quando $|z| \leq R$, implicando na convergência absoluta e uniforme do produto exponenciado. A função limite tem obviamente a sequência $\{z_n\}$ como zeros, com a multiplicidade igual ao número de vezes que z_n é repetido na sequência. Devemos mostrar que a função limite não tem outros zeros. Para tanto, fixemos algum raio R e consideremos somente $|z| \leq R$. Dado ϵ , existe N_0 tal que se $N \geq N_0$, então

$$\left|\log \prod_{n=N_0}^N E_n(z, z_n)\right| = \left|\sum_{n=N_0}^N \log E_n(z, z_n)\right| < \epsilon,$$

pela convergência uniforme absoluta da sequência \log provada anteriormente. Assim, o produto

$$\prod_{N_0}^N E_n(z, z_n)$$

é aproximadamente igual a 1. Mas,

$$f(z) = \prod_{n=1}^{N_0-1} E_n(z, z_n) \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{N_0}^N E_n(z, z_n).$$

O primeiro produto no lado direito tem os zeros apropriados no disco $|z| \leq R$. O limite do segundo produto do lado direito é aproximadamente igual a 1 e, portanto, não tem zeros. Isso prova o teorema. ■

A sequência $\{z_n\}$ foi escolhida de modo que $z_n \neq 0$. É claro que uma função inteira pode ter um zero em 0. Para levar isso em conta, temos que tomar

$$z^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{P_n(z/z_n)}.$$

Esta função tem os mesmos zeros que o produto no Teorema (A.2) e mais um zero de ordem m na origem.

Exemplo A.1. *Afirmamos que,*

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z - n)^2}, \\ \pi \cot(\pi z) &= \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0}^{\infty} \left(\frac{1}{z - n} + \frac{1}{n} \right), \\ \sin(\pi z) &= \pi z \prod_{n \neq 0} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n} = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Demonstração: Vide [17] ■

A.2 A Função Gama

Nesta seção, definiremos e estudaremos algumas propriedades da função Gama, a qual é uma extensão da função fatorial $\Gamma(n) = (n - 1)!$. Os resultados apresentados a seguir foram extraídos da referência [22].

Consideremos o produto infinito

$$\phi(z) = z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) \cdot e^{-z/n}. \tag{A.1}$$

Lema A.2. *O produto (A.1) converge normalmente nas partes compactas de \mathbb{C} .*

Demonstração: Vide [22] ■

Observemos que

$$\phi(1) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + 1/n)e^{-1/n} \in (0, \infty).$$

Portanto, existe uma constante $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $\phi(1) = e^{-\gamma}$, ou seja, $e^{\gamma}\phi(1) = 1$.

Definição A.1. A função Gama é a função definida por

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{\phi(z)}$$

Teorema A.3. São válidas as seguintes propriedades:

1. Os polos de $\Gamma(z)$ são $0, -1, -2, \dots$, sendo todos de ordem 1.
2. $\Gamma(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$ e $\Gamma(x) > 0$ se $x > 0$.
3. $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$ para todo $z \in \mathbb{C} - \{0, -1, -2, \dots\}$.
4. $\gamma = \lim(1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n - \log(n + 1))$.

Demonstração: *Prova de (1)*- Pelo teorema 18, a função $\phi(z)$ definida em (A.1) se anula nos pontos $0, -1, -2, \dots$. Além disto, todos os seus zeros tem ordem 1. Por outro lado, $e^{-\gamma z}$ não se anula, logo os polos de $\Gamma(z)$ são $0, -1, -2, \dots$, sendo que todos eles são de ordem 1.

Prova de (2)- Utilizando-se (A.1) segue-se que $\phi(x) > 0$ se $x > 0$. Portanto,

$$\Gamma(x) = e^{-\gamma x} / \phi(x) > 0, \text{ se } x > 0.$$

Prova de (3) e (4)- Coloquemos

$$\begin{aligned} P_n(z) &= e^{\gamma z} z \prod_{j=1}^n (1 + z/j) e^{-z/j} \\ &= \frac{z(1+z) \cdots (z+n)}{n!} \exp((\gamma - (1 + \cdots + 1/n))z). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Da definição de $\Gamma(z)$ segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(z) = 1/\Gamma(z)$. Fazendo $z = 1$ em (A.2), obtemos

$$P_n(1) = (n + 1) \exp(\gamma - (1 + \cdots + 1/n)) = \exp(\gamma - \gamma_n),$$

onde $\gamma_n = 1 + \cdots + 1/n - \log(n + 1)$. Portanto,

$$1 = 1/\Gamma(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(\gamma - \gamma_n).$$

Como $\gamma_n, \gamma \in \mathbb{R}$ para todo $n \geq 1$, a última relação implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\gamma - \gamma_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \gamma \Rightarrow (4).$$

Por outro lado, (A.2) implica também que

$$\begin{aligned} \frac{P_n(z+1)}{P_n(z)} &= \frac{z+n+1}{z} \exp(\gamma - (1 + 1/2 + \dots + 1/n)) \\ &= \exp(\gamma - (1 + \dots + 1/n)) + \frac{1}{z} \exp(\gamma - \gamma_n). \end{aligned}$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} (\gamma - (1 + 1/2 + \dots + 1/n)) = -\infty$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} (\gamma - \gamma_n) = 0$, obtemos

$$\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n(z+1)}{P_n(z)} = \frac{1}{z}, \text{ se } z \in \mathbb{C} - \{0, -1, -2, \dots\}.$$

Logo, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, se $z \notin \{0, -1, -2, \dots\}$. ■

Uma das consequências do Teorema (A.3) é o seguinte

Corolário A.1. $\Gamma(n+1) = n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema A.4. A sequência de funções meromorfas

$$\Gamma_n(z) = \frac{n!n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}, \quad n \geq 1, \tag{A.3}$$

onde $n^z = \exp(z \log(n))$, converge uniformemente nas partes compactas de $\mathbb{C} - \{0, -1, -2, \dots\}$ para $\Gamma(z)$.

Demonstração: Se $P_n(z)$ é como em (A.2) e $\Gamma_n(z)$ como em (A.3), temos,

$$\begin{aligned} \Gamma_n(z)P_n(z) &= n^z \exp([\gamma - (1 + \dots + 1/n)]z) \\ &= \exp([\gamma - (1 + \dots + 1/n - \log(n))]z) \\ &= \exp([\gamma - \gamma_n + \log(1 + 1/n)]z) \\ &= \exp(s_n z), \end{aligned}$$

onde $s_n = \gamma - \gamma_n + \log(1 + 1/n)$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$, então a sequência $(\exp(s_n z))_{n \geq 1}$ converge uniformemente nas partes compactas de \mathbb{C} para 1. Por outro lado, a sequência $(1/P_n(z))_{n \geq 1}$ converge uniformemente nas partes compactas de $\mathbb{C} - \{0, -1, -2, \dots\}$ para $\Gamma(z)$, logo

$$\Gamma_n(z) = \exp(s_n z)/P_n(z) \rightarrow \Gamma(z) \text{ em } \mathbb{C} - \{0, -1, -2, \dots\}.$$

■

Corolário A.2. $\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \pi/\sin(\pi z)$, para todo $z \notin \mathbb{Z}$.

Demonstração: De (A.3), obtemos

$$\begin{aligned}\Gamma_n(1-z) &= \frac{n!n^{1-z}}{(1-z)(2-z)\cdots(n+1-z)} \\ &= \frac{n}{n+1-z} \cdot \frac{n^{-z}}{(1-z)(1-z/2)\cdots(1-z/n)}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma_n(z)\Gamma_n(1-z)} &= (1-z/n)\cdots(1-z)z(1+z)\cdots(1+z/n) \cdot \frac{n}{n+1-z} \\ &= \frac{n}{n+1-z} \cdot z \prod_{j=1}^n (1-z^2/j^2).\end{aligned}$$

■

Obtemos então dos teoremas 19 e 20 que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma_n(z)\Gamma_n(1-z)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1-z} \cdot z \prod_{j=1}^n (1-z^2/j^2) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi}.\end{aligned}\tag{A.4}$$

Exemplo A.2. Fazendo $z = 1/2$ no Corolário (A.2), obtemos $(\Gamma(1/2))^2 = \pi/\sin(\pi/2) = \pi$. Como $\Gamma(1/2) > 0$, então $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Corolário A.3. Seja $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

1. $f(1) = 1$.
2. $f(x+1) = xf(x)$ para todo $x \in (0, +\infty)$.
3. Para todo $x \in (0, 1)$ temos $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x+n+1)}{n^n n!} = 1$.

Então, $f(x) = \Gamma(x)$ para todo $x \in (0, +\infty)$.

Demonstração: Observemos em primeiro lugar que basta provarmos que $f|_{(0,1)} = \Gamma|_{(0,1)}$.

Com efeito, supondo este fato verdadeiro, fixemos $x \geq 1$. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in [n, n+1)$.

Podemos escrever $x = y + n$ com $y \in [0, 1)$. Por (2), temos

$$f(x) = f(y+n) = (y+n-1)\cdots(y+1) \cdot f(y+1).$$

Se $y = 0$, temos: $f(x) = f(n) = (n-1)! = \Gamma(n)$. Se $y \in (0, 1)$, podemos escrever

$$f(x) = (y+n-1)\cdots(y+1) \cdot y \cdot f(y) = (y+n-1)\cdots y \cdot \Gamma(y).$$

Como Γ também satisfaz (2), obtemos $\Gamma(x) = (y + n - 1) \cdots (y + 1) \cdot y \cdot \Gamma(y)$, portanto $f(x) = \Gamma(x)$. Provemos então que $f(x) = \Gamma(x)$, se $x \in (0, 1)$. Do que foi visto acima, temos

$$f(x + n + 1) = (x + n) \cdot (x + n + 1) \cdots (x + 1) \cdot x \cdot f(x).$$

Logo,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{f(x + n + 1)}{(x + n) \cdot (x + n - 1) \cdots (x + 1) \cdot x} \\ &= \frac{f(x + n + 1)}{n^{x+n}!} \cdot \frac{n^{x+n}!}{(x + n) \cdots (x + 1) \cdot x} \\ &= \frac{f(x + n + 1)}{n^{x+n}!} \cdot \Gamma_n(x). \end{aligned}$$

Portanto de (3), obtemos que

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(x) = \Gamma(x).$$

■

Definição A.2. *Seja $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, onde $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ é um convexo. Dizemos que f é convexa, se para quaisquer $z_1, z_2 \in \mathcal{U}$ e $t \in [0, 1]$ vale a desigualdade*

$$f((1 - t)z_1 + tz_2) \leq (1 - t)f(z_1) + tf(z_2). \quad (\text{A.5})$$

Corolário A.4. (*Bohr-Mollerup*). *Seja $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função tal que*

1. $f(1) = 1$ e $f(x) > 0$ para todo $x > 0$.
2. $f(x + 1) = x \cdot f(x)$ para todo $x > 0$.
3. $\log(f(x))$ é convexa.

Então, $f \equiv \Gamma|_{(0, +\infty)}$.

Demonstração: Basta verificar a hipótese (3) do Corolário (A.3). Vamos usar o seguinte resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em [22].

Lema A.3. *Seja $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo. Então g é convexa se, e somente se, para qualquer $x_0 \in I$, a função*

$$h_{x_0} = \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \quad x \in I - \{x_0\}$$

é não decrescente.

Para terminar a demonstração do corolário, observamos que o lema implica que para todo $x \in (0, 1)$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{\log(f(\mathbf{n})) - \log(f(\mathbf{n} + 1))}{\mathbf{n} - (\mathbf{n} + 1)} &\leq \frac{\log(f(x + \mathbf{n} + 1)) - \log(f(\mathbf{n} + 1))}{(x + \mathbf{n} + 1) - (\mathbf{n} + 1)} \\ &\leq \frac{\log(f(\mathbf{n} + 2)) - \log(f(\mathbf{n} + 1))}{(\mathbf{n} + 2) - (\mathbf{n} + 1)}. \end{aligned}$$

Decorre daí, que

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{f(\mathbf{n} + 1)}{f(\mathbf{n})}\right) - \log(\mathbf{n}) &\leq \frac{1}{x} \log\left(\frac{f(x + \mathbf{n} + 1)}{f(\mathbf{n} + 1)}\right) - \log(\mathbf{n}) \\ &\leq \log\left(\frac{f(\mathbf{n} + 2)}{f(\mathbf{n} + 1)}\right) - \log(\mathbf{n}). \end{aligned}$$

Pelo item (2) do Corolário de *Bohr-Mollerup*, temos

$$f(\mathbf{n} + 1) = \mathbf{n} \cdot f(\mathbf{n}) \text{ e } f(\mathbf{n} + 2) = (\mathbf{n} + 1) \cdot f(\mathbf{n} + 1).$$

Logo, a desigualdade acima também se escreve como

$$0 \leq \log\left(\frac{f(x + \mathbf{n} + 1)}{\mathbf{n}^x \mathbf{n}!}\right) \leq x \log(1 + 1/\mathbf{n}),$$

já que $f(\mathbf{n} + 1) = \mathbf{n}!$. Esta desigualdade implica que

$$\lim_{\mathbf{n} \rightarrow \infty} \log\left(\frac{f(x + \mathbf{n} + 1)}{\mathbf{n}^x \mathbf{n}!}\right) = 0 \Rightarrow \lim_{\mathbf{n} \rightarrow \infty} \frac{f(x + \mathbf{n} + 1)}{\mathbf{n}^x \mathbf{n}!} = 1.$$

■

Proposição A.1. *A função $\log(\Gamma(x))$ é convexa no intervalo $(0, +\infty)$.*

Demonstração: É suficiente mostrarmos que a segunda derivada de $\log(\Gamma(x))$ é maior do que ou igual a zero. Utilizando a Definição (A.1) e a fórmula na equação (A.1) temos

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2}(\log(\Gamma(x))) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\gamma - \frac{\phi'(x)}{\phi(x)}\right) \\ &= -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x} + \sum_{\mathbf{n}=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{\mathbf{n}} + \frac{1/\mathbf{n}}{1 + x/\mathbf{n}}\right]\right) \\ &= \frac{1}{x^2} + \sum_{\mathbf{n} \geq 1} \frac{1}{(x + \mathbf{n})^2} > 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\log(\Gamma(x))$ é convexa em $(0, +\infty)$.

■

Apêndice B

Homologia

As definições e os resultados obtidos neste apêndice foram extraídos das referências [1] e [20].

B.1 Complexos Simpliciais

Dizemos que $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$ em \mathbb{R}^n são *pontos independentes* quando os vetores

$$\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_r - \mathbf{a}_0$$

são linearmente independentes. Esta definição não depende da ordem em que os pontos foram listados inicialmente, como se vê sem dificuldade.

Exemplo B.1. *Dois pontos distintos são independentes. Três pontos são independentes quando são não-colineares e quatro pontos independentes são pontos não-coplanares. Se $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ é a base canônica do \mathbb{R}^n , então os pontos $0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ são independentes. O número máximo de pontos independentes em \mathbb{R}^n é $n + 1$.*

Uma *combinação afim* de pontos $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$ em \mathbb{R}^n é uma expressão do tipo

$$\mathbf{p} = \alpha_0 \cdot \mathbf{a}_0 + \alpha_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_r \cdot \mathbf{a}_r,$$

com $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_r = 1$. Se, além disto, tivermos $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_r \geq 0$, diremos que \mathbf{p} é uma *combinação convexa* dos pontos $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$.

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é convexo se, e somente se, toda combinação convexa de elementos de X ainda pertence a X .

O conjunto de todas as combinações convexas de um conjunto arbitrário $X \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo. Ele é chamado a *envoltória convexa* de X e está contido em qualquer conjunto convexo que contenha X . Neste sentido, a envoltória convexa de X é o menor conjunto convexo contendo X . Podemos descrevê-la como a interseção de todos os conjuntos convexas que contém X .

Sejam $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ pontos independentes em \mathbb{R}^n . O *simplexo k -dimensional* (ou *k -simplexo*) que tem estes pontos como vértices é o conjunto $\sigma = \langle \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \rangle$ de todas as combinações convexas $\mathbf{p} = \sum_{i=0}^k \alpha_i \mathbf{a}_i$, ou seja, é a envoltória convexa do conjunto $\{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$. O número k é chamado a *dimensão* do simplexo.

Fixado um subconjunto $\{i_0, i_1, \dots, i_j\} \subset \{0, 1, \dots, k\}$, o simplexo $\langle \mathbf{a}_{i_0}, \mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_j} \rangle$ é chamado uma *face* de σ . Em particular, cada vértice de σ é uma face de dimensão zero. Para cada $i = 0, \dots, k$, a face $\sigma_{(i)} = \langle \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \widehat{\mathbf{a}}_i, \dots, \mathbf{a}_k \rangle$ chama-se a face oposta ao vértice \mathbf{a}_i . Se τ é uma face de σ , escreveremos $\tau \preceq \sigma$.

Um *poliedro* é um subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$, no qual foi especificada uma coleção finita de simplexos de \mathbb{R}^n , chamados os simplexos de K , de modo que as condições abaixo são satisfeitas:

1. Todo ponto de K pertence a algum simplexo de K (ou seja, K é a reunião dos seus simplexos);
2. Toda face de um simplexo de K é ainda um simplexo de K ;
3. Se σ e ρ são simplexos de K , então $\sigma \cap \rho$ é vazio ou é uma face comum a σ e ρ (e portanto é um simplexo de K).

Exemplo B.2. *O poliedro mais simples é um simplexo, juntamente com suas faces. Em dimensões zero, um, dois e três são, respectivamente, um ponto, um segmento de reta, um triângulo e um tetraedro.*

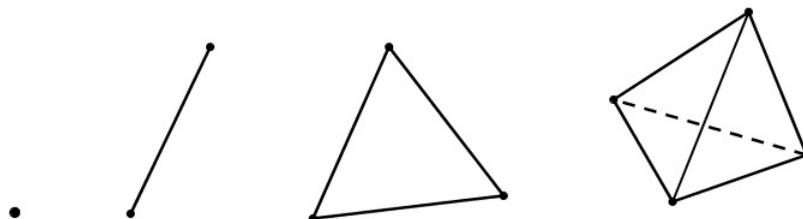


Figura 4. Da esquerda para a direita: Simplexos de dimensão zero, um, dois e três.

Consideremos um k -simplexo σ , o qual é a envoltória de um conjunto A de $k + 1$ pontos independentes $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_k$ ($d \geq k$) em algum espaço Euclidiano \mathbb{R}^d . Neste caso, dizemos que A gera o simplexo σ .

Uma *orientação* de σ é induzida por uma ordenação de seus vértices, denotada por $\langle \mathbf{a}_0 \cdots \mathbf{a}_k \rangle$, como segue: Para qualquer permutação π de $0, \dots, k$, temos

$$\langle \mathbf{a}_{\pi(0)} \cdots \mathbf{a}_{\pi(k)} \rangle = (-1)^{\text{sign}(\pi)} \langle \mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_k \rangle,$$

onde o $\text{sign}(\pi)$ é o número de transposições de π (logo, cada simplexo tem duas orientações distintas). Um simplexo junto com uma escolha específica de orientação é chamado *simplexo orientado*.

Um *complexo simplicial* K é um conjunto finito de simplexos em algum espaço Euclidiano \mathbb{R}^n , tal que (i) se σ é um simplexo de K e τ é uma face de σ , então τ é um simplexo de K , e (ii) se σ e τ são simplexos de K , então $\sigma \cap \tau$ é ou vazia ou uma face comum de σ e τ . A dimensão de K é o máximo das dimensões de seus simplexos. Se d é a dimensão de K , diremos que K é um *d -complexo simplicial*. A união de todos os simplexos de K induzidos com a topologia subespaço de \mathbb{R}^m será denotada por $|K|$.

O *i -esqueleto* de K , denotado por K^i , é a união de todos os simplexos de K de dimensão no máximo i . Um *subcomplexo* L de K é um subconjunto de K que é um complexo simplicial. Uma *triangulação* de um espaço topológico X é um par (K, h) , onde K é um complexo simplicial e h é um homeomorfismo de $|K|$ em X .

A *característica de Euler* de um d -complexo simplicial K , denotada por $\chi(K)$, é o número

$$\sum_{i=0}^d (-1)^i \alpha_i,$$

onde α_i é o número de i -simplexos de K . Este importante número inteiro foi introduzido por Euler em 1758 sob a forma $\chi(K) = V - A + F$, onde V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces de um poliedro homeomorfo à esfera S^2 . Euler percebeu que, neste caso, tem-se sempre $\chi(K) = 2$.

B.2 Espaços de Cadeia e Homologia Simplicial

Seja K um complexo simplicial. Uma *k -cadeia simplicial* é uma soma formal do tipo $\sum_j \mathbf{a}_j \sigma_j$ sobre os k -simplexos orientados σ_j em K , com coeficientes \mathbf{a}_j no corpo \mathbb{Q} dos

números racionais. Além disso, por definição, $-\sigma = (-1)\sigma$ é o simplexo obtido de σ invertendo-se sua orientação.

Com as definições canônicas de adição e multiplicação por escalar, o conjunto de todas as cadeias k -simpliciais forma um espaço vetorial $C_k(K, \mathbb{Q})$, chamado *espaço vetorial de k -cadeias simpliciais* de K , que é o espaço vetorial livre gerado pelos k -simplexos. A dimensão desse espaço vetorial é igual ao número de k -simplexos de K . Portanto, a característica de Euler de um complexo simplicial d -dimensional K pode ser expressada como uma soma alternada das dimensões dos espaços de k -cadeias,

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^d (-1)^i \dim C_i(K, \mathbb{Q}). \tag{B.1}$$

Seja $\langle v_{i_0} \cdots v_{i_h} \cdots v_{i_k} \rangle$ um k -simplexo. Usaremos a notação $\langle v_{i_0} \cdots \hat{v}_{i_h} \cdots v_{i_k} \rangle$ para indicar a omissão do termo v_{i_h} .

O *operador de bordo* $\partial_k : C_k(K, \mathbb{Q}) \rightarrow C_{k-1}(K, \mathbb{Q})$ é definido como segue. Dado um único k -simplexo $\sigma = \langle v_{i_0} \cdots v_{i_k} \rangle$, $k > 0$, pomos

$$\partial_k \sigma = \sum_{h=0}^k (-1)^h \langle v_{i_0} \cdots \hat{v}_{i_h} \cdots v_{i_k} \rangle,$$

e então estendemos linearmente ∂_k pondo

$$\partial_k \left(\sum_j a_j \sigma_j \right) = \sum_j a_j \partial_k \sigma_j.$$

Por consistência definimos $C_{-1}(K, \mathbb{Q}) = 0$ e $\partial_0 : C_0(K, \mathbb{Q}) \rightarrow C_{-1}(K, \mathbb{Q})$ como sendo a aplicação nula. O operador de bordo é uma aplicação linear entre espaços vetoriais e satisfaz a relação $\partial_k \partial_{k+1} = 0$.

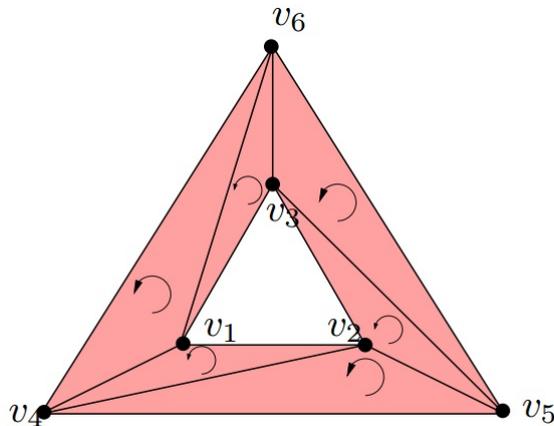


Figura 5. 2-Cadeias.

Exemplo B.3. No complexo simplicial da Figura 5 consideramos a 2-cadeia

$$\gamma = \langle v_1 v_4 v_2 \rangle + \langle v_2 v_4 v_5 \rangle + \langle v_2 v_5 v_3 \rangle + \langle v_3 v_5 v_6 \rangle + \langle v_1 v_3 v_6 \rangle + \langle v_1 v_6 v_4 \rangle.$$

Então, $\partial_2 \gamma = \alpha - \beta$, onde $\alpha = \langle v_4 v_5 \rangle + \langle v_5 v_6 \rangle - \langle v_4 v_6 \rangle$ e $\beta = \langle v_1 v_2 \rangle + \langle v_2 v_3 \rangle - \langle v_1 v_3 \rangle$.

Como $\partial_1 \alpha = 0$ e $\partial_1 \beta = 0$, segue-se que $\partial_1 \partial_2 \gamma = 0$.

O espaço vetorial $Z_k(\mathbb{K}, \mathbb{Q}) = \ker \partial_k$ é chamado espaço vetorial de *k-ciclos simpliciais*. O espaço vetorial $B_k(\mathbb{K}, \mathbb{Q}) = \text{im} \partial_{k+1}$ é chamado espaço vetorial de *k-bordos simpliciais*. Como o bordo de um bordo é 0, $B_k(\mathbb{K}, \mathbb{Q})$ é um subespaço de $Z_k(\mathbb{K}, \mathbb{Q})$.

O espaço vetorial quociente $H_k(\mathbb{K}, \mathbb{Q}) = Z_k(\mathbb{K}, \mathbb{Q})/B_k(\mathbb{K}, \mathbb{Q})$ é o *k-ésimo espaço vetorial de homologia* de \mathbb{K} . Dois *k-ciclos* α e β são *k-homólogos* se a diferença entre eles é um *k-bordo*, isto é, se existe uma $(k+1)$ -cadeia γ tal que $\alpha - \beta = \partial_{k+1} \gamma$. A classe de homologia de $\alpha \in Z_k(\mathbb{K}, \mathbb{Q})$ é denotada por $[\alpha]$.

Exemplo B.4. Considere o complexo simplicial \mathbb{K} da Figura 6. As 0-cadeias $\alpha = \langle v_6 \rangle$ e $\beta = \langle v_2 \rangle$ são 0-homólogas, já que $\alpha - \beta$ é o bordo da 1-cadeia $\gamma = -\langle v_1 v_2 \rangle + \langle v_1 v_4 \rangle + \langle v_4 v_6 \rangle$. Com efeito,

$$\partial_1 \gamma = -(\langle v_2 \rangle - \langle v_1 \rangle) + (\langle v_4 \rangle - \langle v_1 \rangle) + (\langle v_6 \rangle - \langle v_4 \rangle) = \alpha - \beta$$

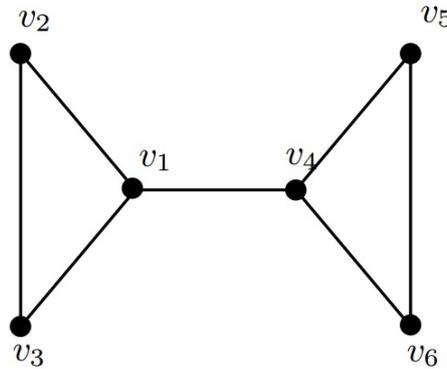


Figura 6. Zero-homologia de um grafo.

Exemplo B.5. As cadeias de bordo da Figura 5 são 1-homólogas. De fato, a diferença das cadeias de bordo $\alpha = \langle v_4 v_5 \rangle + \langle v_5 v_6 \rangle - \langle v_4 v_6 \rangle$ e $\beta = \langle v_1 v_2 \rangle + \langle v_2 v_3 \rangle - \langle v_1 v_3 \rangle$ é o bordo da 2-cadeia $\gamma = \langle v_1 v_4 v_2 \rangle + \langle v_2 v_4 v_5 \rangle + \langle v_2 v_5 v_3 \rangle + \langle v_3 v_5 v_6 \rangle + \langle v_1 v_3 v_6 \rangle + \langle v_1 v_6 v_4 \rangle$.

Os coeficientes de cadeias simpliciais que consideramos até agora foram os números racionais. Normalmente, esses coeficientes são tomados em um anel, como o conjunto

dos inteiros. Neste caso, obtêm-se grupos de homologia, em vez de espaços vetoriais de homologia. Assim, $H_k(K, \mathbb{Z})$ é chamado de *k-ésimo grupo de homologia* do complexo K .

O *k-ésimo número de Betti* de um complexo simplicial K , denotado por $\beta_k(K, \mathbb{Q})$, é a dimensão de $H_k(K, \mathbb{Q})$. Em particular,

$$\beta_k(K, \mathbb{Q}) = \dim Z_k(K, \mathbb{Q}) - \dim B_k(K, \mathbb{Q}). \tag{B.2}$$

Exemplo B.6. (*Números de Betti do toro*). O toro plano \mathbb{T}^2 pode ser pensado como o espaço quociente de um retângulo pela relação de equivalência que identifica cada lado com o lado oposto mantendo as orientações. O esquema indicado na Figura 3 mostra uma triangulação do toro que tem 7 vértices, 21 arestas orientadas e 14 faces orientadas.

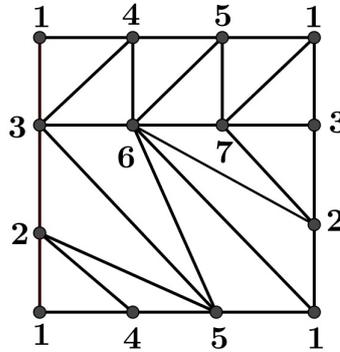


Figura 7. Uma triangulação do toro.

A matriz de ∂_2 com relação à base canônica de $C_1(K, \mathbb{Q})$ e $C_2(K, \mathbb{Q})$ é

∂_2	$\overline{142}$	$\overline{245}$	$\overline{253}$	$\overline{356}$	$\overline{165}$	$\overline{126}$	$\overline{276}$	$\overline{237}$	$\overline{173}$	$\overline{157}$	$\overline{475}$	$\overline{467}$	$\overline{134}$	$\overline{364}$
$\overline{12}$	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$\overline{13}$	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0
$\overline{14}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
$\overline{15}$	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
$\overline{16}$	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
$\overline{17}$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0
$\overline{23}$	0	0	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
$\overline{24}$	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\overline{25}$	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\overline{26}$	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0
$\overline{27}$	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0
$\overline{34}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1
$\overline{35}$	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\overline{36}$	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$\overline{37}$	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0
$\overline{45}$	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0
$\overline{46}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-1
$\overline{47}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0
$\overline{56}$	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\overline{57}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0
$\overline{67}$	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	0	0

A matriz de ∂_1 com relação às bases canônicas de $C_0(K, \mathbb{Q})$ e $C_1(K, \mathbb{Q})$ é obtida simi-
 larmente. Calculando as dimensões do kernel e da imagem desses operadores, finalmente
 encontramos

$$\beta_0(K, \mathbb{Q}) = 1, \quad \beta_1(K, \mathbb{Q}) = 2, \quad \beta_2(K, \mathbb{Q}) = 1 \quad (\text{B.3})$$

Exemplo B.7. (Números de Betti do espaço projetivo real). É possível mostrar, usando
 o complexo simplicial da Figura 8, que os números de Betti do espaço projetivo real \mathbb{P}^2
 são: $\beta_0 = 1, \beta_1 = 1, \beta_2 = 1$. A demonstração deste fato envolve técnicas avançadas como
 algoritmo incremental e colapso simplicial. Tais técnicas fogem do objetivo do nosso
 trabalho. Ao leitor interessado, recomendamos a referência [1].

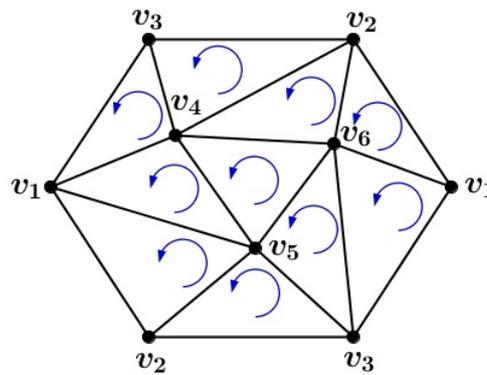


Figura 8. Uma triangulação do plano projetivo.

O teorema a seguir fornece uma classificação completa das superfícies bidimensionais
 compactas, conexas, sem bordo.

Teorema B.1. *Toda 2-superfície compacta, conexa e sem bordo é homeomorfa*

1. À esfera S^2
2. Ou a uma soma conexa de uma ou mais cópias de \mathbb{T}^2
3. Ou a uma soma conexa de uma ou mais cópias de \mathbb{P}^2 .

Demonstração: Vide [18].

■

Apêndice C

Teoria Elementar de Pontos Críticos

Neste apêndice faremos um breve resumo de alguns conceitos básicos da teoria de pontos críticos e demonstraremos as desigualdades de Morse. Maiores detalhes podem ser encontrados nas referências [19], [21], [24] e [28].

C.1 Funções de Morse

Funções diferenciáveis em uma subvariedade. Uma função $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ de uma subvariedade m -dimensional do \mathbb{R}^n é diferenciável em um ponto \mathbf{p} se existe uma parametrização $\varphi : U \rightarrow M^m \cap V$, onde U é um conjunto aberto em \mathbb{R}^m e V é um conjunto aberto em \mathbb{R}^n contendo o ponto \mathbf{p} , tal que a função $f \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável. Uma função definida em uma variedade é chamada diferenciável se for diferenciável em todo ponto da variedade.

Exemplo C.1. (*Função altura de uma superfície*). A função altura $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ de uma superfície S em \mathbb{R}^3 é definida por $h(x, y, z) = z$. Seja $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ um sistema de coordenadas local em um ponto da superfície, então $h \circ \varphi(u, v) = z(u, v)$ é diferenciável. Portanto, a função altura é uma função diferenciável em S .

Pontos críticos e regulares. Um ponto $\mathbf{p} \in M^m$ é um *ponto crítico* de uma função diferenciável $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ se existe uma parametrização local $\varphi : U \rightarrow M^m$ de M^m em \mathbf{p} , com $\varphi(0) = \mathbf{p}$ tal que 0 é um ponto crítico de $f \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ (isto é, a diferencial de $f \circ \varphi$ em 0 é a função nula em \mathbb{R}^m). Um número real $c \in \mathbb{R}$ é um *valor regular* de f se $f(\mathbf{p}) \neq c$ para todo ponto crítico de f . Caso contrário, chamamos c de *valor crítico*.

Exemplo C.2. (*Pontos críticos da função altura na esfera*). Considere a função altura da esfera unitária em \mathbb{R}^3 . As coordenadas esféricas definem uma parametrização $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ em cada ponto, exceto nos polos $(0, 0, \pm 1)$. Com relação a esta parametrização, a função altura h tem a expressão $\tilde{h}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = h(\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v})) = \sin(\mathbf{v})$, logo nenhum destes pontos é singular. Próximo dos polos consideramos a esfera como gráfico de uma função, correspondente à parametrização $\psi(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$. A função altura é expressada nestas coordenadas locais como $\tilde{h}(x, y) = h(\psi(x, y)) = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, assim os pontos singulares de h são $(0, 0, -1)$ e $(0, 0, 1)$.

Hessiana em um ponto crítico. Sejam M^m uma subvariedade de \mathbb{R}^n e $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. A hessiana de f em um ponto crítico \mathbf{p} é a forma quadrática $H_{\mathbf{p}}f$ em $T_{\mathbf{p}}M^m$ definida como segue. Dado $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}M^m$, seja $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M^m$ uma curva com $\alpha(0) = \mathbf{p}$ e $\alpha'(0) = \mathbf{v}$. Então,

$$H_{\mathbf{p}}f(\mathbf{v}) = \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} f(\alpha(t)).$$

O lado direito desta última igualdade não depende da escolha de α . Para ver isto, seja $\varphi : U \rightarrow M^m$ uma parametrização de M^m em \mathbf{p} , com $0 \in U$ e $\varphi(0) = \mathbf{p}$ e seja $\mathbf{v} = v_1\bar{e}_1 + \dots + v_n\bar{e}_m \in T_{\mathbf{p}}M^m$, onde $\bar{e}_i = d\varphi_0(e_i)$. Então

$$H_{\mathbf{p}}f(\mathbf{v}) = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2(f \circ \varphi)}{\partial x_i \partial x_j}(0) v_i v_j.$$

Em particular, a matriz de $H_{\mathbf{p}}f$ com relação a esta base é

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2(f \circ \varphi)}{\partial x_1^2}(0) & \dots & \frac{\partial^2(f \circ \varphi)}{\partial x_1 \partial x_m}(0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2(f \circ \varphi)}{\partial x_1 \partial x_m}(0) & \dots & \frac{\partial^2(f \circ \varphi)}{\partial x_m^2}(0) \end{pmatrix}.$$

Pontos críticos não degenerados. Um ponto crítico \mathbf{p} de $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ é dito *não-degenerado* se a hessiana $H_{\mathbf{p}}f$ é não-degenerada. O *índice* de um ponto \mathbf{p} não-degenerado é o número de autovalores negativos da hessiana em \mathbf{p} . Se M é 2-dimensional, então um ponto crítico de índice 0, 1 e 2 é chamado *mínimo*, *ponto de sela* e *máximo*, respectivamente.

Funções de Morse. Uma função diferenciável em uma variedade é uma *função de Morse* se todos os seus pontos críticos são não-degenerados. O k -ésimo número de Morse de uma função de Morse f , denotado por $\mu_k(f)$, é o número de pontos críticos de f de índice k .

Exemplo C.3. (Função quadrática do \mathbb{R}^m). A função $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x_1, \dots, x_m) = -x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_m^2$$

é uma função de Morse com um único ponto crítico $(0, \dots, 0)$. Este ponto é um ponto crítico não-degenerado, pois a matriz hessiana neste ponto é $\text{diag}(-2, \dots, -2, 2, \dots, 2)$, com k entradas na diagonal principal iguais a -2 . Em particular, o índice do ponto crítico é k .

C.2 As Desigualdades de Morse

Sejam X, Y espaços topológicos e $I = [0, 1]$. Duas aplicações contínuas $f, g : X \rightarrow Y$ são ditas *homotópicas* quando existe uma aplicação contínua

$$H : X \times I \rightarrow Y$$

tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$, para todo $x \in X$. A aplicação H é chamada *homotopia* entre f e g . Usamos a notação $H : f \simeq g$ ou simplesmente $f \simeq g$.

Para cada $t \in I$ a homotopia $H : f \simeq g$ define uma aplicação contínua $H_t : X \rightarrow Y$ dada por $H_t(x) = H(x, t)$. Isso significa que definir uma homotopia H é equivalente a prescrever uma família $(H_t)_{t \in I}$ a um-parâmetro de aplicações contínuas de X em Y , que depende continuamente do parâmetro. Temos $H_0 = f$ e $H_1 = g$; portanto a família $(H_t)_{t \in I}$ começa em f e termina em g .

Intuitivamente, o parâmetro t pode ser interpretado como sendo o tempo. A homotopia é considerada um processo de deformação contínua da aplicação f . Essa deformação ocorre durante uma unidade de tempo. No instante $t = 0$ temos f e para $t = 1$ temos g . Nos tempos intermediários, $0 < t < 1$, a aplicação H_t fornece os estágios intermediários da deformação.

Sejam X um espaço topológico e A um subespaço fechado de X . Uma *retração* de X em A é uma aplicação $r : X \rightarrow A$ que é a identidade em A . Se uma tal aplicação existir, chamaremos A de *retrato* de X . Se existir uma homotopia $\rho : X \times I \rightarrow X$ tal que ρ_0 é a aplicação identidade de X e $\rho_1 = r$, então chamamos ρ uma *retração de deformação* de X em A e chamamos A um *retrato de deformação* de X . Se, além disso, $\rho_t|_A$ é a aplicação identidade de A para todo t em I , então chamamos ρ uma *retração de deformação forte* e chamamos A um *retrato de deformação forte* de X .

Diremos que (X, A) é um *par* de espaços topológicos quando A for um subespaço de X . Dados os pares (X, A) e (Y, B) , uma aplicação contínua

$$f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$$

é uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ tal que $f(A) \subset B$.

Dadas as aplicações contínuas $g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$, uma *homotopia de pares* entre f e g é uma aplicação contínua

$$H : (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B)$$

tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$. Deve-se portanto ter $H_t(A) \subset B$ para todo $t \in I$.

Exemplo C.4. *A aplicação identidade $\text{id} : I \rightarrow I$ é homotópica a uma constante. Mas, considerando o subespaço $\partial I = \{0, 1\} \subset I$, a aplicação de pares $\text{id} : (I, \partial I) \rightarrow (I, \partial I)$ não é homotópica a uma constante. Isto significa que o intervalo I pode ser contraído continuamente a um ponto mas, durante a deformação, pelo menos um dos extremos deve passar pelo interior de I . Com efeito, qualquer homotopia H entre duas aplicações de pares $f, g : (I, \partial I) \rightarrow (I, \partial I)$ deve ser tal que $H_t(0) \in \partial I$ e $H_t(1) \in \partial I$ para todo $t \in I$. Como $\partial I = \{0, 1\}$ é discreto, segue-se que $H_t(0)$ e $H_t(1)$ não dependem de t , isto é, os pontos extremos de I ficam fixos durante toda a homotopia.*

Dadas $f, g : X \rightarrow Y$ contínuas, diz-se que f é homotópica a g *relativamente a um subespaço* $A \subset X$, e escreve-se

$$f \simeq g \text{ (rel. } A)$$

quando existe uma homotopia $H : f \simeq g$ tal que $H(x, t) = f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$.

Exemplo C.5. *A aplicação identidade de $\mathbb{R}^n - \{0\}$ é homotópica à aplicação $r : \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$ dada por $r(x) = x/|x|$, relativamente ao espaço S^{n-1} .*

Agora, consideremos uma aplicação contínua $G : D^k \rightarrow X$ do k -disco em outro subespaço fechado, e^k , de X . Escreveremos $X = A \cup_g e^k$ e diremos que X é obtido de A por uma colagem de uma k -célula com aplicação de colagem $g := G|_{S^{k-1}}$ se:

- (1) $X = A \cup e^k$,
- (2) G aplica $D^k \setminus S^{k-1}$ homeomorficamente a $e^k \setminus A$, e
- (3) g aplica S^{k-1} em $\partial e^k := e^k \cap A$.

A aplicação G é chamada *aplicação característica* da colagem. Em nossas aplicações G será, na verdade, um homeomorfismo de D^k em e^k . Note que X pode ser reconstruído a partir de A e da aplicação de colagem $g : S^{k-1} \rightarrow A$ tomando-se a soma topológica de D^k e A e identificando x em $S^{k-1} = \partial D^k$ com $g(x)$ em A .

Exemplo C.6. A n -esfera S^n pode ser obtida pela aplicação de colagem

$$\begin{aligned} g|_{\partial D^n} : \partial D^n &\rightarrow \{p\} \\ x &\mapsto p. \end{aligned}$$

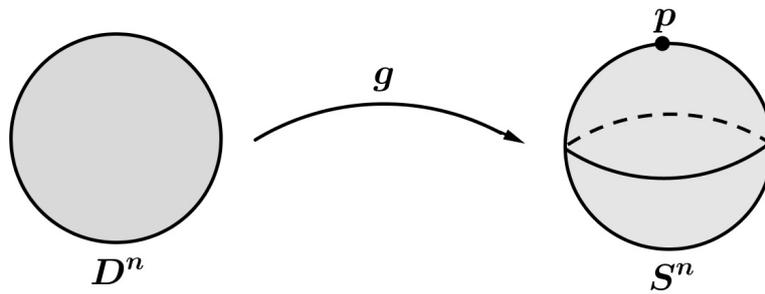


Figura 9. Esfera S^n obtida por um processo de colagem.

Como por (2) temos um homeomorfismo relativo dos pares de espaços (D^k, S^{k-1}) e $(e^k, \partial e^k)$, segue que os grupos de homologia $H_l(D^k, S^{k-1})$ e $H_l(e^k, \partial e^k)$ são isomorfos. Assim, temos a seguinte

Proposição C.1. ([24]) Se X é obtido de Y colando-se uma k -célula, então

$$\begin{aligned} H_l(X, Y) &\approx H_l(e^k, \partial e^k) \\ &\approx H_l(D^k, S^{k-1}) = \begin{cases} \mathcal{R}, & \text{se } l = k; \\ 0, & \text{se } l \neq k. \end{cases} \end{aligned}$$

Se, para $i = 1, 2$, X_i é um subespaço e A_i é um subespaço de X_i , então uma aplicação $f_1 : (X_1, A_1) \rightarrow (X_2, A_2)$ é chamada uma *equivalência homotópica* destes pares se existir uma aplicação $f_2 : (X_2, A_2) \rightarrow (X_1, A_1)$ tal que $f_1 \circ f_2$ e $f_2 \circ f_1$ são homotópicas (como aplicação de pares) às respectivas aplicações de identidade.

Sejam P e N variedades diferenciáveis com bordo, tendo a mesma dimensão $n = k + l$, onde P é uma subvariedade de N . Seja α um homeomorfismo de $D^l \times D^k$ em um subconjunto fechado \mathcal{H} de N . Diremos que N é obtido de P por uma *colagem de uma*

alça de índice k e co-índice l (ou uma alça de tipo (k, l)), com aplicação de colagem α , se:

- (1) $N = P \cup \mathcal{H}$,
- (2) $\alpha|_{(D^l \times S^{k-1})}$ é um difeomorfismo em $\mathcal{H} \cap \partial P$, e
- (3) $\alpha|_{(D^l \times D^k \setminus S^{k-1})}$ é um difeomorfismo em $N \setminus P$.

Note que $l = n - k$ é determinado por k . É comum falar, neste caso, simplesmente em colagem de uma alça de índice k .

O seguinte exemplo (com $k = l = 1$) ilustra bem um tipo de alça. P é o hemisfério inferior da esfera canônica S^2 em \mathbb{R}^3 (pense nela como uma cesta) e \mathcal{H} , a alça da cesta, é uma vizinhança tubular da parte de um grande círculo que pertence ao hemisfério superior.

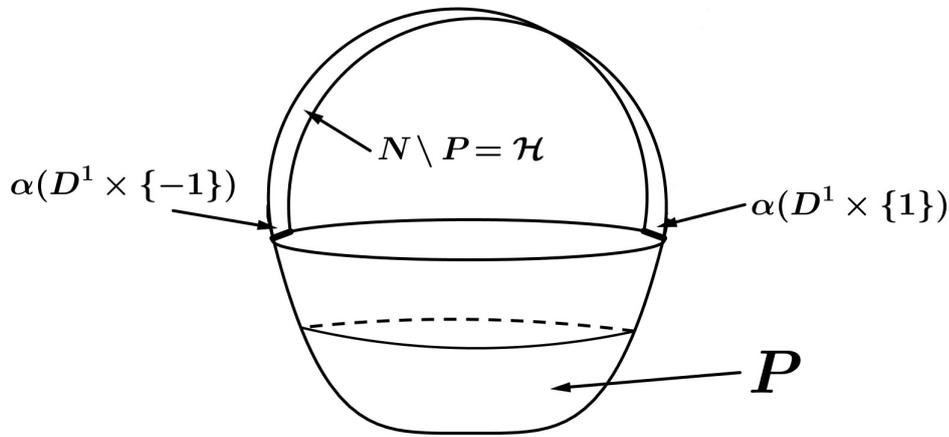


Figura 10. Uma alça de tipo $(1, 1)$.

Teorema C.1. ([24]) *Sejam N e P variedades diferenciáveis com bordo. Se N é obtido de P colando-se uma alça de tipo (k, l) , então N tem como retrato de deformação forte um subespaço fechado $X = P \cup_g e^k$, obtido de P colando-se uma k -célula e^k .*

Demonstração: Seja $\alpha : D^l \times D^k \approx \mathcal{H}$ a aplicação que cola a alça \mathcal{H} a P para obter N . Defina $G : D^k \approx e^k$ por $G := \alpha|_{(0 \times D^k)}$. A retração de deformação de $N = P \cup \mathcal{H}$ em $P \cup e^k$ é a aplicação identidade em P e é igual à aplicação $\alpha \circ r \circ \alpha^{-1}$ em \mathcal{H} , onde r é a retração de deformação forte $r : D^l \times D^k \rightarrow (0 \times D^k) \cup (D^l \times S^{k-1})$ definida por

$$r(x, y) = \begin{cases} \left(0, \frac{2\|y\|}{2-\|x\|} \right) & \text{se } \|y\| \leq 1 - \frac{\|x\|}{2}; \\ \left((\|x\| + 2\|y\| - 2) \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right) & \text{se } \|y\| > 1 - \frac{\|x\|}{2}. \end{cases}$$

■

Se N é obtido de P por colagem disjunta de alças de tipo $(k_1, l_1), \dots, (k_s, l_s)$, então,

mais geralmente, N tem como retrato de deformação forte um subespaço fechado

$$X = P \cup_{g_1} e^{k_1} \dots \cup_{g_s} e^{k_s},$$

obtido de P por colagem disjunta de células e^{k_1}, \dots, e^{k_s} . Suponha que tenhamos uma sequência de subespaços fechados X_i de X , $i = 0, \dots, n$, com

$$A = X_0 \subseteq X_1 \dots \subseteq X_n = X$$

e aplicações $g_i : S^{k_i-1} \rightarrow X_i$, $i = 0, \dots, n-1$, tal que $X_{i+1} \approx X_i \cup_{g_i} e^{k_i}$, isto é, X_{i+1} é homeomorfo a X_i com uma k_i -célula colada pela aplicação de colagem g_i . Neste caso, chamamos o par (X, A) um *complexo esférico* e a sequência de aplicações de colagem é chamada *decomposição celular* de (X, A) .

Se tivermos somente uma equivalência homotópica de X_{i+1} com $X_i \cup_{g_i} e^{k_i}$ então chamamos (X, A) de *complexo esférico homotópico* e chamamos a sequência dos g_i 's de *decomposição celular homotópica*. Caso contrário, dada uma decomposição celular ou uma decomposição celular homotópica denotaremos por ν_i o número de células $e^{k_0}, \dots, e^{k_{n-1}}$, com $k_j = i$. Em outras palavras, ν_i é o número total de células de dimensão i que adicionamos a A para obtermos X .

Seja $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse. Ao número de pontos críticos de f de índice k , $0 \leq \dots \leq k \leq \dim(M^m)$, damos o nome de *k-ésimo número de Morse* e o denotamos por $\mu_k(f)$. O *número de Morse* de M^n é, por definição, a soma

$$\mu(M^n) = \sum_k \mu_k(f).$$

Proposição C.2. *Toda variedade diferenciável compacta M^n é um complexo esférico homotópico e, além disso, dada qualquer função de Morse $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$, existe uma decomposição celular homotópica de M^n tal que $\nu_k = \mu_k(f)$.*

Demonstração: Vide ([24], p.216). ■

Enquanto o número ν_k de células de dimensão k em uma decomposição celular de um complexo esférico (X, A) não é, em geral, um invariante topológico, existem importantes relações entre ν_k e os invariantes topológicos de (X, A) . Em particular, temos as famosas *desigualdades de Morse* que relacionam certas somas alternadas de ν_k com correspondentes somas alternadas de números de Betti, os quais passaremos a definir.

No que segue, todos os pares de espaços (X, A) considerados serão supostos admissíveis, isto é, complexos esféricos homotópicos. Fixado um corpo F e, para quaisquer pares

admissíveis (X, A) e inteiro não-negativo k , definimos o k -ésimo número de Betti de (X, A) com relação a F como sendo a dimensão de $H_k(X, A; F)$ e o denotamos por β_k .

A característica de Euler de (X, A) , $\chi(X, A)$, é definida como sendo a seguinte soma alternada dos números de Betti

$$\sum_k (-1)^k \beta_k(X, A).$$

Para cada inteiro não-negativo k , definimos outro invariante topológico

$$S_k(X, A) = \sum_{m=0}^k (-1)^{k-m} \beta_m(X, A).$$

Assim,

$$\begin{aligned} S_0 &= \beta_0, \\ S_1 &= \beta_1 - \beta_0 = \beta_1 - S_0, \\ \dots &\dots \dots \\ S_k &= \beta_k - \beta_{k-1} + \dots \pm \beta_0 = \beta_k - S_{k-1}, \\ \chi &= \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 - \dots \end{aligned}$$

Proposição C.3. *A característica de Euler χ é aditiva e cada S_k é subaditiva. Isto é, dados*

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots \subseteq X_n,$$

com todos os pares (X_i, X_{i-1}) admissíveis, temos

$$\begin{aligned} S_k(X_n, X_0) &\leq \sum_{i=1}^n S_k(X_i, X_{i-1}), \\ \chi(X_n, X_0) &= \sum_{i=1}^n \chi(X_i, X_{i-1}). \end{aligned}$$

Demonstração: Vide ([24]). ■

Teorema C.2. ([24]) *Seja (X, A) um complexo esférico homotópico admitindo uma decomposição celular homotópica com ν_k células de dimensão k . Se $\beta_k = \beta_k(X, A)$ denota o k -ésimo número de Betti de (X, A) com relação a algum corpo fixado F , então*

$$\begin{aligned} \beta_0 &\leq \nu_0, \\ \beta_1 - \beta_0 &\leq \nu_1 - \nu_0, \\ \dots &\dots \dots \\ \beta_k - \beta_{k-1} + \dots \pm \beta_0 &\leq \nu_k - \nu_{k-1} + \dots \pm \nu_0. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\chi(X, A) := \sum_i (-1)^i \beta_i = \sum_i (-1)^i \nu_i.$$

Demonstração: Seja

$$A = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots \subseteq X_n = X$$

com $X_{i+1} = X_i \cup_{g_i} e^{k_i}$ a decomposição celular de (X, A) . Note que, $\beta_m(X_{i+1}, X_i) = \delta_{m, k_i}$ implica em

$$\sum_{i=0}^{n-1} \beta_m(X_{i+1}, X_i) = \nu_m.$$

Assim,

$$\begin{aligned} S_k(X, A) &\leq \sum_{i=0}^{n-1} S_k(X_{i+1}, X_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{m=0}^k (-1)^{k-m} \beta_m(X_{i+1}, X_i) \\ &= \sum_{m=0}^k (-1)^{k-m} \nu_m \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \chi(X, A) &= \sum_{i=0}^{n-1} \chi(X_{i+1}, X_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{m=0}^k (-1)^m \beta_m(X_{i+1}, X_i) \\ &= \sum_{m=0}^k (-1)^m \nu_m. \end{aligned}$$

Portanto, o resultado do teorema é imediato a partir da aditividade de χ e da subaditividade de S_k . ■

Da Proposição C.2 e do Teorema C.2, obtemos as conhecidas desigualdades de Morse,

$$\sum_k \beta_k \leq \sum_k \mu_k(f) = \mu(M^n).$$

Referências Bibliográficas

- [1] BOISSONAT, Jean Daniel; TEILLAUD, Monique. *Effective Computational Geometry for Curves and Surfaces*. New York: Springer-Verlag, 2007.
- [2] CARMO, Manfredo do. *O método do referencial móvel*. Rio de Janeiro: IMPA, 1976. (III Escola Latino Americana de Matemática).
- [3] CHAVEL, Isaac. *Riemannian Geometry: A modern introduction*. New York: Cambridge University Press, 1996. (Cambridge tracts in Mathematics).
- [4] CHEN, B. Y. *Total Mean Curvature and Submanifolds of Finite Type*. Singapore: World Scientific Publishing, 1984. v. 1. (Series in Pure Mathematics).
- [5] CHEN, B. Y. *Surfaces of curvature $\lambda_{\mathbb{N}} = 0$ in $\mathbb{E}^{2+\mathbb{N}}$* . Kodai Math. Sem. Rep., 21 (1969), 331-334.
- [6] CHEN, B. Y. *On the total curvature of immersed manifolds, I: An inequality of Fenchel-Borsuk-Willmore*. Amer. J. Math., 93 (1971), 148-162.
- [7] CHEN, B. Y. *On the scalar curvature of immersed manifolds*. Math. J. Okayama Univ., 15 (1971), 7-14.
- [8] CHEN, B. Y. *On the total curvature of immersed manifolds, I*. Amer. J. Math., 93 (1971), 148-162.
- [9] CHEN, B. Y. *On the total curvature of immersed manifolds, II: Mean Curvature and lenght of second fundamental form*. Amer. J. Math., 94 (1973), 799-809.
- [10] CHEN, B. Y. *On the total curvature of immersed manifolds, III*. Amer. J. Math., 95 (1973), 636-642.
- [11] CHEN, B. Y. *Geometry of submanifolds*. New York: Dekker, 1973.

-
- [12] CHEN, B. Y. *Total mean curvature of immersed surfaces in E^m* . Trans. Amer. Math. Soc., 218 (1976), 333-341.
- [13] CHERN, S. S; LASHOF, R. K. *On the total curvature of immersed manifolds*. Amer. J. Math., 79 (1957), 306-318.
- [14] CHERN, S. S; LASHOF, R. K. *On the total curvature of immersed manifolds, II*. Michigan. Math. J., 5 (1958), 5-12.
- [15] CODA, Fernando; NEVES, André. *Min-Max theory and the Willmore Conjecture*. Ann. of Math., 179 (2014), 683-782.
- [16] HOU, Zhong Hua. *The total mean curvature of submanifolds in a Euclidean Space*. Michigan Math. J., 45 (1998), 497-505.
- [17] LANG, Serge. *Complex Analysis*. 3. ed. New York: Springer Verlag, 1993. (Graduate Texts in Mathematics).
- [18] LEE, John M. *Introduction to Topological Manifolds*. 2. ed. New York: Springer Verlag, 2010. (Graduate Texts in Mathematics).
- [19] LIMA, Elon Lages. *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*. Rio de Janeiro: IMPA, 2006. (Coleção Projeto Euclides).
- [20] LIMA, Elon Lages. *Homologia Básica*. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. (Coleção Projeto Euclides).
- [21] MILNOR, J. *Morse Theory*. New Jersey: Princeton University Press, 1973. v. 1. (Annals of Mathematics Studies).
- [22] NETO, Alcides Lins. *Funções de uma variável complexa*. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005. (Projeto Euclides).
- [23] ÔTSUKI, T. *On the total curvature of surfaces in a Euclidean spaces*. Japan. J. Math., 35 (1966), 61-71.
- [24] PALAIS, R. S.; TERNG, Chuu-lian. *Critical Point Theory and Submanifolds Geometry*. New York: Springer-Verlag, 1988. v. 7. (Lectures Notes in Mathematics).

- [25] RODRIGUEZ, Lucio. *Geometria das Subvariedades*. Rio de Janeiro: IMPA, 1976. (Monografias de Matemática).
- [26] RIEMANN, B.; HOÜEL, G. J. *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie: mémoire posthume*. Lausana: Universität Lausanne, 1867. (Mémoires de la Société royale des sciences de Göttingue).
- [27] SHIOHAMA, K. *Cylinders in Euclidean space E^{2+N}* . Kodai Math. Sem. Rep., 19 (1967), 225-228.
- [28] TAVARES, Geovan. *Funções de Morse e Classificação das superfícies*. Rio de Janeiro: IMPA, 1979. (12º Colóquio Brasileiro de Matemática).
- [29] WILLMORE, T. J. *Note on embedded surfaces*. An. Sti. Univ. "Al. I. Cuza". Iasi Sect. I a Mat. (N. S.) 11 B (1965), 433-496.