



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

**Matrizes de norma mínima satisfazendo certas
restrições do tipo banda e espectrais – caracterização
extrema do operador Laplaciano discreto e periódico.**

Lívio Leandro Avelino de Oliveira

Teresina - 2016

Lívio Leandro Avelino de Oliveira

Dissertação de Mestrado:

Matrizes de norma mínima satisfazendo certas restrições do tipo banda e espectrais – caracterização extrema do operador Laplaciano discreto e periódico.

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Marcos Vinício Travaglia

Teresina - 2016

FICHA CATALOGRÁFICA

Serviço de Processamento Técnico da UFPI

Biblioteca Setorial do CCN

O48m Oliveira, Lívio Leandro Avelino de.

Matrizes de norma mínima satisfazendo certas restrições do tipo banda e espectrais – caracterização extrema do operador Laplaciano discreto e periódico / Lívio Leandro Avelino de Oliveira – Teresina: 2016.

58f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática, 2016.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Vinício Travaglia.

1. Álgebra Linear. 2. Matriz. I. Título

CDD 512.5

A todos que acreditaram na realização deste trabalho.

Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer a Deus por me manter de pé por toda essa caminhada que foi o mestrado e especialmente pela realização deste trabalho.

Gostaria de agradecer a toda minha família que esteve sempre ao meu lado e foi o meu grande apoio, meus pais Ludimar e Fátima, que são minha fortaleza, meus irmãos Katiúscia, Karla, Luiz, Iully e Edivaldo, que compartilham do meu cotidiano. Agradeço também minhas Tias Rita e Conceição, aos meus primos, meus cunhados Raimundo e Leandro e meus sobrinhos Maria Helena, Ícaro e Miguel, que fazem o meu dia mais feliz. Agradeço a minha namorada Débora Layne e sua família que também me deram muito apoio. Agradeço e dedico esse trabalho a grande matriarca da família minha vó Odinea, que este ano completa 80 anos, amo você.

Agradeço também a todos os professores que desde o ensino básico vem construindo uma base para que eu possa progredir nos estudos. Agradeço aos professores que me ajudaram na graduação aos professores Alessandro Wilker, José Arimatéa, Cícero Aquino, Juscelino, Jefferson entre outros professores da Universidade Estadual do Piauí e Universidade Federal do Piauí.

Gostaria de agradecer também aos professores a quem tive o prazer aprender durante o mestrado ao professor Jurandir, Rondinelle, Barnabé, Marcondes, José Francisco. Agradeço aos professores que aceitaram fazer parte da banca, lendo e contribuindo com esse trabalho, professores Roger, Isaías e Jurandir. Em especial agradeço o meu orientador, professor Marcos Vinício Travaglia, a quem tenho muito estima e levarei seu exemplo de generosidade e ensinamentos por toda a minha vida.

Agradeço a todos que tive a oportunidade de conviver durante o mestrado entre eles Andreilino, Bruno, Quaresma, Fernando Gomes, Fernando Santana, Ray Victor, Lucas, Rafael, Pádua, Jonathan, Jaciel, Raul, Antônio Aguiar, Tiago e Hércules pela ajuda nos

estudos e nas diversões que encaramos durante todo o tempo que durou mestrado e que suas amizades levarei comigo sempre.

Agradeço ao EJC da paróquia São Paulo, Família Maranathá e Comunidade Católica ORE a qual sou servo, por toda orientação espiritual e oração além dos muitos amigos que partilham dessa experiência comigo. Agradeço aos meus amigos de infância que cultivo ainda hoje, que já não estão tão presentes em minha vida, mas que torcem pelo meu sucesso.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

“E ainda que tivesse o dom de profecia, e conhecesse todos os mistérios e toda a ciência, e ainda que tivesse toda a fé, de maneira tal que transportasse os montes, e não tivesse amor, nada seria.”

1 Coríntios 13:2.

Resumo

O operador Laplaciano discreto e periódico que denotaremos por \mathcal{L} é definido como a matriz circulante $n \times n$ cuja primeira linha é dada pelo vetor $(2, -1, 0, \dots, 0, -1)$. Considerando $n \geq 4$ e par, temos como propriedades imediatas de \mathcal{L} as seguintes: **P1:** \mathcal{L} é uma matriz tridiagonal (periodicamente estendida); **P2:** \mathcal{L} é uma matriz semi-definida positiva; **P3:** \mathcal{L} possui os dois seguintes autopares (autovetor, autovalor): $(\mathbf{e}, 0)$ e $(\mathbf{f}, 4)$, ou seja, $\mathcal{L}\mathbf{e} = 0$ e $\mathcal{L}\mathbf{f} = 4\mathbf{f}$, onde os vetores \mathbf{e} e \mathbf{f} são, respectivamente, o vetor de 1's e o vetor que alterna 1's e -1 's. Uma propriedade menos evidente de \mathcal{L} é **P4 (caracterização extrema):** \mathcal{L} possui norma Euclidiana mínima dentre todas as matrizes satisfazendo as propriedades P1, P2 e P3. Motivados por esta peculiaridade da matriz \mathcal{L} abordamos neste trabalho a seguinte questão (problema de minimização): Mantendo-se as propriedades P2 e P3 qual é a matriz de norma Euclidiana mínima se P1 (largura de banda $\mathbf{b} = 3$) for substituída por largura de banda pentadiagonal ($\mathbf{b} = 5$), heptadiagonal ($\mathbf{b} = 7$), \dots , $\mathbf{b} = n + 1$? Primeiramente, mostra-se que a matriz solução deste problema para uma largura de banda \mathbf{b} qualquer (entre 3 e $n + 1$) é também circulante. Depois disto, prova-se que a determinação de primeira linha desta matriz circulante consiste em resolver um problema de mínimos quadrados tendo $\frac{n}{2} - 1$ variáveis que devem ser não negativas (ou seja, restritas ao primeiro ortante) e sujeitas a $\frac{n+1-\mathbf{b}}{2}$ equações lineares. Soluções exatas deste problema de minimização são dadas para os casos especiais $\mathbf{b} = 3$ (Laplaciano), $\mathbf{b} = 5$ e $\mathbf{b} = n + 1$. A solução para o caso pentadiagonal ($\mathbf{b} = 5$) pode ser fisicamente interpretada como um problema (inverso) de encontrar dois valores k_1 e k_2 de rigidez de um sistema massa-mola circular que seja estável e com soma do quadrado dos autovalores mínima possuindo dois tipos de molas. Tipo 1: liga vizinhos próximos com rigidez k_1 ; Tipo 2: liga vizinhos de vizinhos mais próximos com rigidez k_2 . Interessantemente, obtém-se $k_2 < 0$ (negative stiffness). Um algoritmo MatLab é implementado e soluções numéricas são ilustradas por gráficos para os seis casos ($\mathbf{b} = 3, 5, 7, 9, 11$ e 13)

que correspondem a $n = 12$.

Abstract

By the discrete and periodic Laplacian operator we mean the \mathbf{n} by \mathbf{n} circulant matrix whose first row is given by $(2, -1, 0, \dots, 0, -1)$. Denoting it by \mathcal{L} and considering \mathbf{n} even and greater or equal to 4, \mathcal{L} has the following three immediate properties: **P1:** The operator \mathcal{L} is a tridiagonal (periodic extended); **P2:** \mathcal{L} is a positive semi-definite matrix; **P3:** \mathcal{L} has eigenpairs (eigenvector, eigenvalue): $(\mathbf{e}, 0)$ and $(\mathbf{f}, 4)$. That means $\mathcal{L}\mathbf{e} = 0$ and $\mathcal{L}\mathbf{f} = 4\mathbf{f}$, where \mathbf{e} and \mathbf{f} are, respectively, the vector of 1's and the vector alternating 1's and -1 's. A less immediate property of \mathcal{L} is **P4 (extremal characterization):** \mathcal{L} has minimum norm among all matrices satisfying the properties P1, P2, and P3. Motivating by this peculiarity of \mathcal{L} , we address the following question (minimization problem): Which is the minimum-norm matrix if we keep the properties P2 and P3 but replace P1 (bandwidth $\mathbf{b} = 3$) by bandwidth $\mathbf{b} = 5$ (pentadiagonal), bandwidth $\mathbf{b} = 7$ (heptadiagonal), \dots , $\mathbf{b} = \mathbf{n} + 1$? First, we easily show that the solution of this problem must still be a circulant matrix. Then the determination of the first row of this circulant matrix consists in solving a least-squares problem having $(\mathbf{n} - 2)/2$ nonnegative variables (Nonnegative Orthant) subject to $(\mathbf{n} + 1 - \mathbf{b})/2$ linear equations. Exact solutions for this minimization problem are given for the special cases of $\mathbf{b} = 3$ (Laplacian), $\mathbf{b} = 5$, and $\mathbf{b} = \mathbf{n} + 1$. The solution for the particular case of $\mathbf{b} = 5$ can be physically interpreted as the (inverse) problem of finding the stiffnesses \mathbf{k}_1 and \mathbf{k}_2 of a ring-like spring-mass system (with two types of springs) having minimum square sum of eigenvalues and satisfying the properties P1 with $\mathbf{b} = 5$ instead of $\mathbf{b} = 3$ (springs of type 1 link the nearest neighbors point masses whereas those of type 2 links next-nearest neighbors ones), P2 (stability of the system) and P3 (two vibrational modes are fixed). Interestingly, we obtain $\mathbf{k}_2 < 0$ (negative stiffness). A Matlab algorithm is presented and used to get numerical illustration of the six cases ($\mathbf{b} = 3$, $\mathbf{b} = 5$, $\mathbf{b} = 7$, $\mathbf{b} = 9$, $\mathbf{b} = 11$, and $\mathbf{b} = 13$) corresponding to $\mathbf{n} = 12$.

Sumário

Resumo	v
Abstract	vii
1 Noções Preliminares	9
1.1 Análise convexa	9
1.2 Operadores auto-adjuntos e Matrizes Circulantes	12
1.3 Decomposição de Matrizes Circulantes	14
2 O operador Laplaciano discreto e periódico	16
2.1 Formulação do Problema	21
3 Propriedades imediatas da matriz mínima	23
3.1 Conjunto dos pontos viáveis \mathbb{X} é não vazio	23
3.2 Unicidade de solução	24
3.3 Caso Tridiagonal ($r = 1$)	26
4 Transformada de Fourier discreta para matrizes circulantes simétricas	28
4.1 Autovalores de uma matriz circulante simétrica	29
4.2 Problema de mínimos quadrados com restrições	33
5 O caso $r = 2$ (Matriz Pentagonal)	35
5.1 Bi-Laplaciano	38
5.2 Distribuição de autovalores	39
6 Resultados numéricos usando o MATLAB	41
6.1 Gráficos para o caso $n = 12$ e $r = 1, \dots, 6$	42
6.2 Algoritmo MatLab	43

7	Conclusão e trabalhos futuros	46
A	Demonstrações Omitidas no Capítulo 3	49
A.1	Demonstração da Afirmação 3.1	49
A.2	Demonstração da Afirmação 3.2	49
A.3	Propriedades do conjunto viável $\mathbb{X}^{(r)}$	50
B	Demonstrações Omitidas no Capítulo 4	55
B.1	Demonstração da Afirmação 4.2	55
	Referências Bibliográficas	58

Índice de Símbolos

n	Número natural e par maior ou igual a 4 ($n \in 2\mathbb{N}$, $n \geq 4$).
\mathbb{R}^n	Produto cartesiano de n cópias dos números reais \mathbb{R} . Quando $x \in \mathbb{R}^n$ subentende-se $x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})^T$.
e	Vetor de \mathbb{R}^n com todas suas entradas iguais a 1. Isto é, $e = (1, 1, \dots, 1)^T$.
f	Vetor de \mathbb{R}^n com entradas alternando 1 e -1 . Isto é, $f = (1, -1, 1, \dots, -1)^T$.
$\mathbb{R}^{n \times n}$	Conjuntos das matrizes (quadradas) $n \times n$ com entradas reais. Quando $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ subentende-se que $X = \{x_{ij}\}$ com $i, j = 0, 1, \dots, n-1$.
$S(f)$	Conjunto de pontos mínimos de uma função f . Também denotado por argmin .
argmin	O(s) elemento(s) no conjunto viável que minimiza(m) a função objetivo.
$\#S(f)$	Cardinalidade do conjunto de pontos mínimos de f .
$B[0, R_1]$	Bola fechada centrada na origem de raio R_1 .
$\text{cis}(\theta)$	Denota o número complexo $\cos(\theta) + i \sin(\theta)$.
$\mathbb{B}^{(r)}$	Conjunto das matrizes quadradas com banda de largura $2r + 1$.
\mathbb{S}_+	Conjunto das matrizes simétricas semi-definidas positivas.
(x, α)	Autopar de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Isto é, $Ax = \alpha x$ onde $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$.
$\mathbb{E}^{(\beta)}$	Conjunto das matrizes que possuem os auto pares $(e, 0)$ e (f, β) .
\mathbb{X} ou $\mathbb{X}^{(r)}$	Conjunto dos pontos viáveis o qual é definido pela interseção $\mathbb{B}^{(r)} \cap \mathbb{S}_+ \cap \mathbb{E}^{(\beta)}$. Propriedade: $\mathbb{X}^{(r_1)} \subset \mathbb{X}^{(r_2)}$, quando $r_1 \leq r_2$.
$\ \cdot\ $	Norma de Frobenius (Euclidiana para matrizes). Isto é, $\ X\ := \sqrt{\sum_{i,j=0}^{n-1} x_{ij}^2}$.
\bar{X}	Matriz solução do problema de minimização.
$\text{Circ}(x)$	Matriz circulante cuja primeira linha é o vetor $x^T \in \mathbb{R}^n$. Isto é, $\text{Circ}(x)$ é gerada pelo vetor x .
$\text{Scirc}(y)$	Matriz circulante gerada pelo vetor $y^T \in \mathbb{R}^{\frac{n}{2}+1}$.

\bar{x}	Vetor solução de um problema de minimização. Subentende-se $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\text{Circ}(\bar{x}) = \bar{X}$.
$\bar{\lambda}$	Vetor solução de um problema de minimização. Subentende-se $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ cujas componentes são autovalores de \bar{X} .
$\langle x, z \rangle$	Produto interno de \mathbb{R}^n entre $x, z \in \mathbb{R}^n$.
\mathbb{I}	Operador identidade.
\mathbb{T}	Operador up-shift definido por $\mathbb{T} := \text{Circ}\left((0, 1, 0, \dots, 0)^T\right)$. Propriedades $\mathbb{T}^{-1} = \mathbb{T}^T$ (down-shift), \mathbb{T} é unitária e $\mathbb{T}^n = \mathbb{I}$.
X_{mc} ou $G(X)$	Média circulante da matriz X definida por $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{T}^j X \mathbb{T}^{-j}$.
\mathcal{L}	Operador Laplaciano discreto e periódico que é definido por $\mathcal{L} = \text{Circ}\left((2, -1, 0, \dots, 0, -1)^T\right)$. Vale $\mathcal{L} = -\mathbb{T} + 2\mathbb{I} + \mathbb{T}^{-1}$.
$\stackrel{\text{def.}}{=} \text{ ou } :=$	Igual por definição.
$\stackrel{\text{Af.}}{=}$	Igual por Afirmação.
\mathcal{C}	Conjunto das matrizes circulantes.

Introdução

Denotando por $\mathbb{R}^{n \times n}$ o conjunto das matrizes n por n com entradas reais dizemos que uma matriz $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é circulante se ela for da forma

$$\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & & c_0 \end{bmatrix},$$

onde c_0, c_1, \dots, c_{n-1} são números reais dados. Uma forma compacta de denotar a matriz acima é $\text{Circ}(c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$. A natureza periódica destas matrizes permite de modo geral aproximar um problema difícil por um mais fácil. Devido a isto matrizes circulantes possuem muitas aplicações como por exemplo em Análise Numérica, Teoria dos Grafos e Criptografia.

Note que uma matriz circulante C possui todas as suas linhas geradas a partir da primeira delas através de permutações cíclicas. Em particular, todas as suas linhas possuem a mesma soma. Isto pode ser traduzido na linguagem de autovetor e autovalor dizendo que C satisfaz $C\mathbf{e} = \alpha\mathbf{e}$, onde \mathbf{e} é o vetor de \mathbb{R}^n com todas as entradas iguais a 1, ou seja, $\mathbf{e} = (1, \dots, 1)^T$, e $\alpha = \sum_{i=0}^{n-1} c_i$. Podemos resumir esta informação dizendo que (\mathbf{e}, α) é um autopar da matriz C .

A seguinte matriz circulante particular $\text{Circ}(2, -1, 0, \dots, 0, -1)$ que denotaremos por \mathcal{L} será o cerne da motivação do presente trabalho. Chamamos a matriz \mathcal{L} de operador Laplacino discreto e periódico pois tal matriz surge quando discretizamos o problema unidimensional da equação de Laplace/Poisson $(-\frac{d^2}{dt^2}x = g)$ com condição de fronteira periódica (período $\tau > 0$):

$$\begin{cases} -\frac{d^2}{dt^2}x(t) = g(t), \\ x(t) = x(t + \tau) \quad \text{com } t \in [0, \tau]. \end{cases}$$

O operador \mathcal{L} é uma matriz tridiagonal (na verdade, tridiagonal *periódica* devido aos dois -1 's localizados, respectivamente, no topo direito e no fundo esquerdo desta matriz) que é também simétrica semi-definida positiva e seus autovalores são ordenados da seguinte forma:

$$0 = \alpha = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{n-1} = \beta = 4.$$

Note que além de $(\mathbf{e}, 0)$ ser um autopar temos também que $(\mathbf{f}, 4)$ é também um autopar de \mathcal{L} , onde $\mathbf{f} = (1, -1, \dots, 1, -1)^\top$ – assumiremos por isto que a ordem n das matrizes quadradas é par e maior ou igual a 4, caso contrário \mathbf{f} deixa de ser autovetor. É interessante notar que para \mathcal{L} os vetores \mathbf{e} e \mathbf{f} correspondem, respectivamente, ao menor e ao maior autovalor.

O operador Laplaciano discreto (periódico ou com outras condições de fronteira) aparece em várias áreas distintas como Sistemas Vibratórios (ondas), Ciência dos Materiais (Física do Estado Sólido), Modelos de Difusão (calor, gases), Finanças, Processamento de Sinais e de Imagens, Redes Neurais etc.

No contexto de sistemas vibratórios nós podemos interpretar as três propriedades acima

P1: \mathcal{L} é tridiagonal periódica,

P2: \mathcal{L} é simétrica positiva semi-definida, e

P3: \mathcal{L} possui autopares $(\mathbf{e}, 0)$ e $(\mathbf{f}, 4)$,

se considerarmos um sistema de massas e molas disposto circularmente. Tal sistema possui n massas pontuais (com todas as massas idênticas $\mathbf{m} = 1$) e n molas (idênticas com rigidez $k_1 = -c_1 = 1$). As molas ligam apenas massas vizinhas. Neste sistema a energia potencial (total) armazenada em suas molas para um dado vetor $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ de deslocamentos (das posições de equilíbrio) é igual ao valor $\frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathcal{L} \mathbf{d}$. Devido a estabilidade do sistema não pode ocorrer energia potencial estritamente negativa e por isto é esperado que \mathcal{L} seja uma matriz positiva semi-definida. De fato, para o Laplaciano \mathcal{L} temos $\frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathcal{L} \mathbf{d} = \frac{1}{2} (\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_0)^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\mathbf{d}_j - \mathbf{d}_{j-1})^2$ o qual é uma soma de quadrados; portanto não negativa. Além disto o autovetor \mathbf{e} corresponde ao seguinte movimento do sistema: Cada massa é deslocada de uma mesma quantidade no sentido horário. Note que neste movimento não há contrações ou distensões de mola alguma (ocorre apenas um movimento rígido), e, portanto, a energia potencial é zero. Em contrapartida para o autovetor \mathbf{f} temos a

seguinte interpretação: As massas localizadas nas posições ímpares são deslocadas no sentido horário e aquelas localizadas nas posições pares são deslocadas no sentido anti-horário. Neste caso o sistema possui energia potencial máxima igual ao autovalor $\beta = 4 > 0$ multiplicada por $\frac{1}{2}\|f\|^2 = \frac{n}{2}$.

O artigo [10], no qual a presente dissertação é baseada, teve como ponto de partida a seguinte propriedade menos evidente de \mathcal{L} :

P4 (caracterização extrema): \mathcal{L} possui norma Euclidiana mínima dentre todas as matrizes satisfazendo as propriedades P1, P2 e P3 acima.

Motivados por esta peculiaridade da matriz \mathcal{L} abordamos neste trabalho a seguinte questão:

Problema (de minimização de matrizes): Mantendo-se as propriedades P2 e P3 qual é a matriz de norma Euclidiana mínima se P1 (largura de banda $\mathbf{b} = 3$) for substituída por largura de banda pentadiagonal ($\mathbf{b} = 5$), heptadiagonal ($\mathbf{b} = 7$), \dots , $\mathbf{b} = \mathbf{n} + 1$?

Observamos que muitas vezes será conveniente usar o parâmetro $\mathbf{r} \in \{1, 2, 3, \dots, \frac{\mathbf{n}}{2}\}$ ao invés de $\mathbf{b} \in \{3, 5, 7, \dots, \mathbf{n} + 1\}$ para os possíveis valores da largura da banda de uma matriz quadrada. A relação entre tais parâmetros é $\mathbf{b} = 2\mathbf{r} + 1$, ou equivalentemente, $\mathbf{r} = (\mathbf{b} - 1)/2$. A interpretação do parâmetro \mathbf{r} é a seguinte: se uma entrada da matriz possuir distância $\mathbf{d}_n(i, j)$ (módulo \mathbf{n}) da diagonal principal estritamente maior que \mathbf{r} então tal entrada é zero.

Esta dissertação está dividida da seguinte forma:

No Capítulo 1 são apresentados resultados necessários para os demais capítulos. Mais detalhadamente, tratam-se de resultados sobre Análise Convexa do \mathbb{R}^n , Operadores auto-adjuntos em dimensão finita, e a teoria básica e imediata de Matrizes Circulantes.

No Capítulo 2, após definido o operador \mathcal{L} , são provadas em detalhes as suas propriedades P1, P2 e P3 descritas acima, bem como, as suas respectivas interpretações no contexto do sistema circular de massas e molas. Depois é formulado em detalhes o problema de minimização acima definido a sua função objetivo (estritamente convexa e coerciva) e o seu conjunto viável \mathbb{X} (convexo e fechado, mas nem sempre limitado).

No Capítulo 3, após mostrarmos que \mathbb{X} é não vazio, convexo e fechado, e que o problema de minimização acima possui existência e unicidade de solução \bar{X} , provamos que a matriz solução deste problema para uma largura de banda \mathbf{b} qualquer (entre 3 e $\mathbf{n} + 1$) é também circulante. Aqui utilizamos que a média circulante (que será introduzida nesse capítulo) tem como ponto fixos matrizes circulantes e que a função objetivo não cresce ao operarmos tal média. Tal resultado nos permite reduzir o problema de minimização com conjunto viável de matrizes a de um problema (equivalente) que tem como conjunto viável um subconjunto de \mathbb{R}^{r+1} ; neste caso procura-se agora $\bar{x} = (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r)$ cuja relação com \bar{X} é $\bar{X} = \text{Circ}(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r, 0, \dots, 0, \bar{x}_r, \dots, \bar{x}_2, \bar{x}_1)$. Mais precisamente,

Problema (de minimização de vetores; variável $x \in \mathbb{R}^{r+1}$): *Encontre*

$$\bar{x}(\mathbf{n}, r, \beta) := \operatorname{argmin} \left\{ \begin{array}{l} \text{Circ}(x_0, x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0, x_r, x_{r-1}, \dots, x_1) \in \mathbb{S}_+, \\ x_0^2 + 2x_1^2 + \dots + 2x_r^2 : \quad x_0 + 2x_1 + \dots + 2x_r = 0, \text{ e} \\ \quad x_0 - 2x_1 + 2x_2 \dots + 2(-1)^r x_r = \beta. \end{array} \right\},$$

onde \mathbb{S}_+ denota o conjunto de todas as matrizes $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ que são simétricas positivas semi-definidas. A notação $\operatorname{argmin}\{f(x) : x \in \mathbb{S}\}$ retorna o ponto \bar{x} que minimiza $f(x)$ sobre o conjunto \mathbb{S} .

Como consequência imediata desta formulação ao tomarmos $r = 1$ prova-se a propriedade P4 do operador \mathcal{L} . Ou seja, $\frac{1}{4}\mathcal{L}$ é a solução do problema de minimização quando $r = 1$ (ou equivalentemente, $\mathbf{b} = 3$, tridiagonal) e $\beta = 1$ (ou invés de $\beta = 4$).

No Capítulo 4 aplicamos a Transformada de Fourier Discreta para matrizes circulantes que são simétricas. Isto irá nos permitir, similarmente ao caso contínuo em $\mathbb{R} \lambda(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i s t} x(t) dt$, transformar o problema acima na variável x para a variável λ que no caso pertence ao espectro da matriz X . Mais precisamente, iremos obter o seguinte problema de mínimos quadrados tendo $\frac{\mathbf{n}}{2} - 1$ variáveis que devem ser não negativas (ou seja, restritas ao primeiro ortante) e sujeitas a $\mathbf{n}/2 - r$ equações lineares.

Problema (de minimização de vetores; variável $\lambda \in \mathbb{R}^{\frac{n}{2}-1}$): *Encontre*

$$(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_{\frac{n}{2}-1}) = \operatorname{argmin} \left\{ \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} \lambda_j^2 : \lambda_j \geq 0 \text{ e } A\lambda = \mathbf{b} \right\},$$

onde a matriz $A \in \mathbb{R}^{(\frac{n}{2}-r) \times (\frac{n}{2}-1)}$ e o vetor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{\frac{n}{2}-r}$ são dadas por

$$A_{kj} := 2 \cos\left(\frac{2\pi}{n}(k+r)j\right), \quad k = 1, \dots, \frac{n}{2} - r \quad \text{e} \quad j = 1, \dots, \frac{n}{2} - 1,$$

e

$$\mathbf{b}_k := (-1)^{k+r+1}, \quad k = 1, \dots, \frac{n}{2} - r,$$

respectivamente.

Como consequência desta formulação, obtém-se solução do caso onde $r = n/2$ e $\beta = 1$ que é

$$\bar{X}(n, r = n/2, \beta = 1) = \operatorname{Circ}\left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right).$$

Em [10] também foi obtida através desta formulação a solução exata do problema de minimização para o caso de $r = n/2 - 1$ mas que não será apresentada aqui por questão de tempo e para não perdermos o foco desta dissertação cuja principal aplicação é o caso $r = 2$ (pentadiagonal) que é tratado no próximo capítulo.

No Capítulo 5 é obtida a solução exata (explícita) do problema de minimização no caso onde $r = 2$ (pentagonal $\mathbf{b} = 5$). Podemos interpretar tal solução como um problema (inverso) de encontrar dois valores $k_i = -\bar{x}_1$ e $w_i = -\bar{x}_2$ de rigidez de um sistema massa-mola circular que seja estável (semi-definida positiva) e com soma do quadrado dos autovalores mínima possuindo dois tipos de molas. Tipo 1: liga vizinhos próximos com rigidez k_i ; Tipo 2: liga vizinhos de vizinhos mais próximos com rigidez w_i . Interessantemente, obtém-se $w_i < 0$ (negative stiffness). Também é obtida a distribuição dos autovalores desta matriz solução, mostrando que ela é não decrescente. Um contribuição que não foi tratada em [10] é que no caso de $r = 2$ e $\beta = 1$ a solução exata tende a $(\frac{1}{4}\mathcal{L})^2 = \frac{1}{4}\mathcal{L}(\frac{1}{4}\mathcal{L})$ à medida que n tende a infinito. Esta última matriz é chamada de Bi-Laplaciano por ser a composição do Laplaciano com ele mesmo. Este fato, nos levou a perguntar se o operador $(\frac{1}{4}\mathcal{L})^r$ não seria a matriz solução do problema de minimização quando n tende ao infinito para qualquer banda r dada. No capítulo seguinte é feita uma investigação numérica testando esta conjectura.

No Capítulo 6 apresentamos o código de um algoritmo Matlab que foi por nós implementado. Soluções numéricas são ilustradas por gráficos para os seis casos ($r = 1, 2, 3, 4, 5$ e 6) que correspondem a $n = 12$.

Finalmente, no Capítulo 7 na forma de conclusão são recapitulados os principais resultados e propostos trabalhos futuros.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Nesse primeiro capítulo apresentaremos alguns resultados básicos essenciais para o desenvolvimento deste trabalho. Dividiremos em seções, as quais trazem resultados e definições de análise convexa, teoria de matrizes, operadores auto-adjuntos e por fim matrizes circulares.

1.1 Análise convexa

Nessa seção, trabalharemos com funções definidas em conjuntos convexos, e no caso especial de funções convexas, temos o principal resultado desta seção que mostra que sobre as restrições de ser a função estritamente convexa e coerciva temos a existência de um único minimizador.

Definição 1.1 (Conjunto convexo). *Um conjunto $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$ é dito **convexo** quando para todo $x, y \in \mathbb{X}$ temos que $(1 - t)x + ty \in \mathbb{X}$ com $t \in [0, 1]$.*

Definição 1.2 (Função convexa). *Seja $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$ convexo. Uma função $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita **convexa** quando para quaisquer $x, y \in \mathbb{X}$ e $t \in [0, 1]$ vale a desigualdade*

$$f((1 - t)x + ty) \leq (1 - t)f(x) + tf(y).$$

*Chamamos f de **função estritamente convexa** quando temos*

$$f((1 - t)x + ty) < (1 - t)f(x) + tf(y)$$

para todo $t \in (0, 1)$ e quaisquer x e $y \in \mathbb{X}$ com $x \neq y$.

Definição 1.3 (Função coerciva). *Seja $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que f é **coerciva** se*

$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$. Em outras palavras, para todo $M > 0$, existe (raio) $R > 0$, tal que $f(x) > M$ sempre que $\|x\| > R$.

Observação 1.1. *Caso \mathbb{X} for limitado, f é automaticamente coerciva, pois é impossível provar que ela não seja coerciva.*

Definição 1.4 (Ponto de mínimo). *Dada uma função $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ dizemos que um ponto $x_{\min} \in \mathbb{X}$ é **ponto de mínimo** de f em \mathbb{X} quando para todo $x \in \mathbb{X}$ valer $f(x_{\min}) \leq f(x)$.*

Definição 1.5 (Problema de minimização e seu conjunto solução). *Dada uma função $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ o **problema de minimização** de f consiste em encontrar todos os pontos de mínimo de f em \mathbb{X} . O conjunto de tais pontos de mínimo é chamado **conjunto solução do problema de minimização** e é denotado por $S(f)$.*

Lema 1.1. *Seja $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$ não vazio e fechado. Se $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e coerciva então temos que $\#S(f) \geq 1$, isto é, a função f assume o valor mínimo em pelo menos um elemento do domínio.*

Demonstração. Como \mathbb{X} é não vazio isto nos permite tomar $x_1 \in \mathbb{X}$. Seja $M = f(x_1)$. Pela definição de coercividade existe $R_1 > 0$ tal que

$$f(x) > M = f(x_1), \quad \text{sempre que } x \in \mathbb{X} \text{ e } \|x\| > R_1. \quad (1.1)$$

Defina $B_X = B[0, R_1] \cap \mathbb{X}$, onde $B[0, R_1]$ é a bola fechada do \mathbb{R}^n . Desta forma o conjunto B_X é limitado e fechado em \mathbb{X} . Usando a continuidade da f temos que o conjunto $f(B_X)$ é compacto de \mathbb{R} assumindo, portanto, máximo e mínimo. Seja x_2 um tal ponto de mínimo, isto é, seja $x_2 \in B_X$ tal que

$$f(x_2) \leq f(x) \quad \text{para todo } x \in B_X. \quad (1.2)$$

De (1.1) e (1.2) vale

$$\min\{f(x_1), f(x_2)\} \leq \begin{cases} f(x_1) < f(x) & \text{se } x \in \mathbb{X} \setminus B_X; \\ f(x_2) \leq f(x) & \text{se } x \in B_X. \end{cases}$$

Desta expressão acima segue que x_1 e/ou x_2 são pontos de mínimo de f em \mathbb{X} . Portanto $\#S(f) \geq 1$. □

Lema 1.2. *Se $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo e $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ é estritamente convexa, então temos que $\#S(f) \leq 1$. Isto é, a função f assume o valor mínimo em apenas um ponto ou em nenhum.*

Demonstração. Vamos supor por absurdo que exista $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$, com $x_1 \neq x_2$ tal que,

$$f(x_1) = f(x_2) = \min_{x \in \mathbb{X}} f(x) \quad (1.3)$$

Como f é estritamente convexa e tomando $t = \frac{1}{2}$, temos:

$$f\left(\left(1 - \frac{1}{2}\right)x_1 + \frac{1}{2}x_2\right) < \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2) \stackrel{(1.3)}{=} f(x_1) \stackrel{(1.3)}{=} \min_{x \in \mathbb{X}} f(x),$$

o que é um absurdo, pois $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \in \mathbb{X}$ e $f(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2)$ é estritamente menor que o menor valor possível. Portanto não pode haver mais de um minimizador de f , isto é $\#S(f) \leq 1$. □

Teorema 1.1. *Se \mathbb{X} é um conjunto fechado e convexo e $f : \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função coerciva e estritamente convexa, então $\#S(f) = 1$. Isto é, existe um e apenas um minimizador x_0 para a função f em \mathbb{X} .*

Demonstração. De fato, basta combinar os dois lemas anteriores. Note que \mathbb{X} e f estão dentro das hipóteses de ambos, e portanto temos que valem as teses que $\#S(f) \geq 1$ e $\#S(f) \leq 1$. Logo $\#S(f) = 1$. □

Observação 1.2. *O Teorema 1.1 não exige que o conjunto \mathbb{X} seja limitado.*

Definição 1.6 (Conjunto de pontos fixos). *Dada uma função $G : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ dizemos que um ponto $x \in \mathbb{X}$ é ponto fixo de G quando x satisfaz $G(x) = x$. O conjunto dos pontos fixos de G é denotado por $\text{Fix}(G)$.*

Definição 1.7 (Função f -não-crescente). *Considere uma função $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que uma função $G : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ é **f -não-crescente** quando para todo $x \in \mathbb{X}$ vale que $f(G(x)) \leq f(x)$.*

Corolário 1.1. *Sejam \mathbb{X} um conjunto fechado e convexo, $f : \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função coerciva e estritamente convexa, e $G : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ de forma que o conjunto $\text{Fix}(G) = \{x \in \mathbb{X}; G(x) = x\} \neq \emptyset$. Se $f(G(x)) \leq f(x)$, para todo $x \in \mathbb{X}$ (G é f -não-crescente), então $S(f) = \{x_0\}$ e $G(x_0) = x_0$, isto é, existe um único minimizador de f e este é ponto fixo de G .*

Demonstração. Pelo teorema anterior, sabemos que existe apenas um minimizador de f , que vamos chamar de x_1 . Então vamos supor por absurdo que $x_1 \notin \text{Fix}(G)$, ou seja, $x_1 \neq G(x_1)$. Disto segue da unicidade do minimizador x de f que $f(x_1) < f(G(x_1))$. Como $f(G(x)) \leq f(x)$ para todo $x \in X$ então:

$$x_1 \neq G(x_1) \Rightarrow f(x_1) < f(G(x_1)) \leq f(x_1) \Rightarrow f(x_1) < f(x_1) \quad (\text{Absurdo!}).$$

Portanto, $S(f) = \{x_0\}$ e x_0 é tal que $G(x_0) = x_0$. □

1.2 Operadores auto-adjuntos e Matrizes Circulantes

Definição 1.8. Um operador linear $A : X \rightarrow X$, num espaço vetorial X munido de produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, chama-se **auto-adjunto** quando $A = A^*$, isto é, quando $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ para quaisquer $x, y \in X$.

Definição 1.9. Um vetor $x \neq 0$ em X chama-se um **autovetor** do operador $A : X \rightarrow X$ quando existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que

$$Ax = \lambda x.$$

Neste caso dizemos que λ é o **autovalor** do operador A , associado ao autovetor x . O par (x, λ) será chamado de **autopar**.

Definição 1.10. Um operador linear $A : X \rightarrow X$ é dito **semi-definido positivo** se $\langle x, Ax \rangle \geq 0$ para todo $x \in X$. Denotaremos isto por $A \geq 0$.

Teorema 1.2 (Teorema Espectral). Para todo operador auto-adjunto $A : X \rightarrow X$, num espaço vetorial de dimensão finita munido de produto interno, existe uma base ortonormal $\{u_1, \dots, u_n\} \subset X$ formada por autovetores de A .

Demonstração. Consultar [6] ou [11]. □

Corolário 1.2. Um operador auto-adjunto $A : X \rightarrow X$ é semi-definido positivo se, e somente se, seus autovalores são não negativos.

Demonstração. **Parte (\Rightarrow).** Seja $x \in X \setminus \{0\}$ autovetor de A com correspondente autovalor λ , isto é, $Ax = \lambda x$. Segue de A ser semi-definido positivo que

$$\langle Ax, x \rangle \geq 0 \Leftrightarrow \langle \lambda x, x \rangle \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \langle x, x \rangle \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \|x\|^2 \geq 0.$$

Portanto temos $\lambda \geq 0$.

Parte (\Leftarrow). Pelo Teorema 1.2 temos uma base ortonormal de autovetores $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$, com $A\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i$, de forma que para todo vetor $\mathbf{x} \in X$, tem-se $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n$, daí

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i A\mathbf{u}_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{u}_j \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \mathbf{u}_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{u}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2.$$

Note que na última igualdade usamos que \mathbf{u}_i 's são base ortonormal. Como temos que todo $\lambda_i \geq 0$, segue que $A \geq 0$.

□

Definição 1.11 (Matriz Ciculante). Dado o vetor $(\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, define-se a seguinte matriz quadrada M de ordem n , chamada de **Matriz Ciculante** gerada pelo vetor $(\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$:

$$M = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_0 & \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{c}_{n-1} \\ \mathbf{c}_{n-1} & \mathbf{c}_0 & \mathbf{c}_1 & \cdots & \mathbf{c}_{n-2} \\ \mathbf{c}_{n-2} & \mathbf{c}_{n-1} & \mathbf{c}_0 & \cdots & \mathbf{c}_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 & \cdots & \mathbf{c}_0 \end{bmatrix}.$$

A matriz M acima é denotada por $\text{Circ}(\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_{n-1})$.

Definição 1.12. Denotaremos por T o operador "up-shift" que é definido como

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.4}$$

Note que $T = \text{Circ}(0, 1, 0, \dots, 0)$, além disso dado $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, aplicando T em \mathbf{x} temos:

$$T \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_0 \end{bmatrix}. \tag{1.5}$$

Devido a (1.5) o operador T é chamado de up-shift (deslocamento superior).

1.3 Decomposição de Matrizes Circulantes

A seguir mostraremos que a matriz circulante T definida em (1.12) nos permite obter uma decomposição para uma matriz circulante M qualquer, como um polinômio tendo T como variável. Além disto, a matriz M possui a mesma base de autovetores que T possui. Isto permitirá calcular facilmente os autovalores de M a partir dos autovalores de T .

Teorema 1.3. *Sejam $(c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, $M = \text{Circ}(c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$ e $w \in \mathbb{C}$ dado por $w = e^{\frac{i2\pi}{n}}$. Então valem as seguintes relações:*

(a) $Tu_k = w^k u_k$; $k = 0, 1, \dots, n-1$ onde $u_k = (1, w^k, w^{2k}, \dots, w^{(n-1)k})^T$ é autovetor de T e w^k é o autovalor associado;

(b) $M = c_0.I + c_1.T + c_2.T^2 + \dots + c_{n-1}.T^{n-1}$.

Demonstração. Prova de (a). Basta aplicar (1.5) com o vetor u dado acima no lugar de x . De fato,

$$\begin{aligned} Tu_k &= (w^k, w^{2k}, \dots, w^{(n-1)k}, 1) \\ &= w^k (1, w^k, w^{2k}, \dots, w^{(n-1)k}) \\ &= w^k u_k. \end{aligned}$$

Portanto, $Tu_k = w^k u_k$.

Prova de (b). Note que

$$TM = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_0 & \cdots & c_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{n-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_0 & \cdots & c_{n-3} \\ c_{n-3} & c_{n-2} & c_{n-1} & c_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \end{bmatrix},$$

ou seja, aplicando T em uma matriz quadrada, ela faz apenas um movimento nas linhas; um deslocamento superior (circulante). Assim sabendo, quando aplicando nela própria teremos:

$$\begin{aligned} T^2 &= TT &= \text{Circ}(0, 0, 1, 0, \dots, 0); \\ T^3 &= TT^2 &= \text{Circ}(0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0); \\ &\vdots \\ T^{(n-1)} &= TT^{(n-2)} &= \text{Circ}(0, 0, \dots, 0, 1). \end{aligned}$$

Além disto, $T^n = \mathbb{I}$. Agora fica fácil ver que a Matriz M é gerada por soma de potências de T , pois

$$M = \text{Circ}(x_0, 0, \dots, 0) + \text{Circ}(0, x_1, 0, \dots, 0) + \dots + \text{Circ}(0, \dots, 0, x_{n-1})$$

e assim,

$$M = c_0\mathbb{I} + c_1T + c_2T^2 + \dots + c_{n-1}T^{n-1}.$$

□

Capítulo 2

O operador Laplaciano discreto e periódico

Neste capítulo apresentaremos o operador Laplaciano discreto e periódico que é o exemplo de matriz circulante central em nossa dissertação. Explicamos a versão contínua deste operador ($-\frac{d^2}{dt^2}$) da qual vem o nome Laplaciano. Uma interpretação física da versão discreta deste operador como um sistema mola-massa é apresentada como motivação. Terminaremos este capítulo com a formulação do problema central desta dissertação.

Definição 2.1 (Operador Laplaciano Discreto). *Um exemplo simples e importante de matriz circulante é o operador Laplaciano discreto e periódico, denotado por \mathcal{L} , e definido por*

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Podemos simplesmente escrever $\mathcal{L} = \text{Circ}(2, -1, 0, \dots, 0, -1)$.

Observação 2.1. *O operador \mathcal{L} é uma matriz simétrica e circulante, além disso, é também uma matriz de banda tridiagonal estendida periodicamente*¹.

¹Note que \mathcal{L} não é apenas tridiagonal mas sim TRIDIAGONAL estendida periodicamente pois temos que levar em conta o “-1” no canto superior direito e o “-1” no canto inferior esquerdo da sua representação matricial. Em outras palavras, \mathcal{L} possui três diagonais: a diagonal principal (n-elementos), a

Observação 2.2. Este operador \mathcal{L} surge quando discretizamos a seguinte equação diferencial com condição de fronteira periódica de período τ :

$$\begin{cases} -\frac{d^2}{dt^2}x(t) = g(t) \\ x(t) = x(t + \tau) \text{ com } t \in [0, \tau]. \end{cases}$$

Tal discretização consiste em dividir o intervalo $[0, \tau]$ em n subintervalos de tamanho $\Delta t = \tau/n$. Ou seja, temos $[0, \tau] = [t_0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \dots \cup [t_{n-1}, t_n]$, onde t_n é identificado com t_0 . Introduzindo a notação $x(t_i) = x_i$ e $g(t_i) = g_i$ que são componentes dos vetores x e g respectivamente. Usando a expansão de Taylor (veja detalhes em [1]) pode-se mostrar que a equação diferencial acima deixa-se aproximar neste esquema de discretização (diferenças finitas) como

$$\frac{-x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1}}{(\Delta t)^2} = g_i.$$

Isto é,

$$\frac{1}{(\Delta t)^2} \mathcal{L}u = g. \tag{2.1}$$

Definição 2.2 (Autopares $(e, \lambda_e = 0)$ e $(f, \lambda_f = 4)$). Quando assumimos n par e $n \geq 4$, de fato, por toda essa dissertação teremos o n a priori nessas condições. Entre os autovalores temos o $\lambda_e := 0$, onde o autovetor correspondente é $e := (1, 1, \dots, 1)^T$, e o $\lambda_f := 4$ onde o autovetor correspondente é $f := (1, -1, \dots, 1, -1)^T$. Esquemáticamente, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}e = (0, 0, \dots, 0)^T = \lambda_e e &\Rightarrow \lambda_e = 0; \\ \mathcal{L}f = (4, -4, \dots, 4, -4)^T = \lambda_f f &\Rightarrow \lambda_f = 4. \end{aligned}$$

As equações acima são referidas como $(e, 0)$ e $(f, 4)$ serem autopares do operador \mathcal{L} .

Observação 2.3. Uma interpretação física dessas propriedades, é se consideramos um sistema mola-massa circular com n pontos de massa, todos esses pontos com massa $m = 1$, e ligados por uma mola aos seus vizinhos mais próximos, essas molas com rigidez positiva ($k_1 = k_2 = \dots = k_n = -c_1 = 1$); (veja a Figura 2.1). Dentro deste contexto físico, para um determinado vetor $d \in \mathbb{R}^n$ – deslocamento das massas da posição de equilíbrio – temos que a energia potencial armazenada nas molas é $\frac{1}{2}d^T \mathcal{L}d$.

subdiagonal ($(n-1)$ -elementos, mas estendida possui também n -elementos e similarmente a superdiagonal.

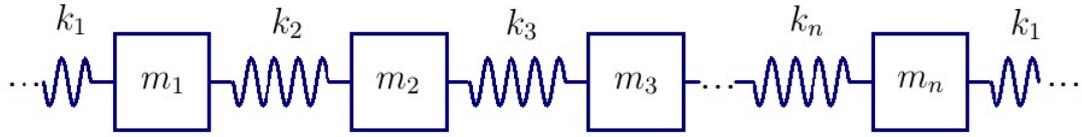


Figura 2.1: Sistema ou Cadeia Circular de molas (idênticas) e massas (idênticas). Os pontinhos nos extremos da figura significam que se trata de uma mesma mola.

Afirmção 2.1. *Temos que \mathcal{L} é um operador auto-adjunto, isto é, $\mathbf{y}^\top \mathcal{L} \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \mathcal{L} \mathbf{y}$ para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Seja

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^\top \mathcal{L} \mathbf{x} &= \mathbf{y}_1(-x_n + 2x_1 - x_2) + \mathbf{y}_2(-x_1 + 2x_2 - x_3) + \cdots + \mathbf{y}_n(-x_{n-1} + 2x_n - x_1) \\ &= x_1(-y_n + 2y_1 - y_2) + x_2(-y_1 + 2y_2 - y_3) + \cdots + x_n(-y_{n-1} + 2y_n - y_1) \\ &= \mathbf{x}^\top \mathcal{L} \mathbf{y}. \end{aligned}$$

Portanto, \mathcal{L} é auto-adjunto. □

Afirmção 2.2. *O operador \mathcal{L} é semi-definido positivo, isto é, $\mathbf{x}^\top \mathcal{L} \mathbf{x} \geq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. De fato, note que $\mathcal{L} \mathbf{x} = (2x_1 - x_2 - x_n, 2x_2 - x_3 - x_1, \dots, 2x_n - x_1 - x_{n-1})$.

Multiplicando este vetor com $\mathbf{x}^\top = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^\top \mathcal{L} \mathbf{x} &= 2x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_n + 2x_2^2 - x_2x_3 - x_2x_1 + 2x_3^2 - x_3x_2 \cdots + 2x_n^2 - x_nx_1 - x_nx_{n-1} \\ &= x_1^2 - x_1x_n + \underbrace{x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - x_2x_1}_{\text{}} + \cdots + \underbrace{x_{n-1}^2 - x_{n-1}x_n + x_n^2 - x_nx_{n-1}}_{\text{}} - x_nx_1 + x_n^2 \\ &= (x_n - x_1)^2 + (x_1 - x_2)^2 + \cdots + (x_{n-1} - x_n)^2. \end{aligned}$$

Portanto $\mathbf{x}^\top \mathcal{L} \mathbf{x} \geq 0$. □

Como falamos anteriormente, a matriz \mathcal{L} possui autovalores $\lambda_e = 0$ e $\lambda_f = 4$. Mais que isso, temos que λ_e e λ_f são o menor e maior autovalor de \mathcal{L} respectivamente. Sabendo que $\mathcal{L} \geq 0$, segue do Corolário 1.2 que de fato λ_e é o menor dos autovalores pois todos os demais são não-negativos. Agora vamos mostrar que λ_f é o maior autovalor de \mathcal{L} . A estratégia é considerarmos o operador $\mathbf{A} = 4\mathbb{I} - \mathcal{L}$ no lugar de \mathcal{L} . Como \mathbf{A} é auto-adjunto, se mostrarmos que este é semi-definido positivo, então todos os autovalores são não-negativos, e conseqüentemente $\lambda_i(\mathbf{A}) \geq 0$, o que é equivalente a $\lambda_i(\mathcal{L}) \leq 4$.

Afirmção 2.3. O operador $A = (4\mathbb{I} - \mathcal{L})$ é semi-definido positivo.

Demonstração. De fato, note que $A = \text{Circ}(2, 1, 0, \dots, 0, 1)$ e mais $Ax = (2x_1 + x_2 + x_n, 2x_2 + x_3 + x_1, \dots, 2x_n + x_1 + x_{n-1})$ com, $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ então:

$$\begin{aligned} x^T Ax &= 2x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_n + 2x_2^2 + x_2x_3 + x_2x_1 + 2x_3^2 + x_3x_2 \cdots + 2x_n^2 + x_nx_1 + x_nx_{n-1} \\ &= x_1^2 + x_1x_n + \underbrace{x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_2x_1}_{\dots} + \underbrace{x_{n-1}^2 + x_{n-1}x_n + x_n^2 + x_nx_{n-1}}_{\dots} + x_nx_1 + x_n^2. \\ &= (x_n + x_1)^2 + (x_1 + x_2)^2 + \cdots + (x_{n-1} + x_n)^2 \end{aligned}$$

Portanto $A \geq 0$. □

Afirmção 2.4. O valor $\lambda_f = 4$ é o maior autovalor de \mathcal{L} .

Demonstração. Para provar isso vamos considerar o operador $4\mathbb{I} - \mathcal{L}$ que também é auto-adjunto e semi definido positivo.

$$x^T(4\mathbb{I} - \mathcal{L})x \geq 0 \Rightarrow x^T \mathcal{L}x \leq 4x^T x.$$

Se consideramos $x \in \mathbb{R}^n$ com $\|x\| = 1$ temos

$$x^T \mathcal{L}x \leq 4. \tag{2.2}$$

Pelo Teorema 1.2 (teorema espectral), sendo \mathcal{L} auto-adjunto, então possui uma base ortonormal de autovetores. Seja $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ uma tal base ortonormal de autovetores e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ seus respectivos autovalores. Sendo $\{u_1, \dots, u_n\}$ uma base e $\|x\| = 1$ temos que existe coeficientes $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que, $x = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$ e $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1$. Assim,

$$\begin{aligned} x^T \mathcal{L}x &= (\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) \mathcal{L}(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) \\ &= (\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n)(\alpha_1 \lambda_1 u_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n u_n) \\ &= \lambda_1 \alpha_1^2 + \dots + \lambda_n \alpha_n^2. \end{aligned}$$

Vamos tomar λ_n como sendo o maior autovalor, ou seja, $\lambda_n = \max\{\lambda_i : i = 1, \dots, n\}$. Então temos devido a $\alpha_i^2 \geq 0$ e $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1$ que

$$x^T \mathcal{L}x = \lambda_1 \alpha_1^2 + \dots + \lambda_n \alpha_n^2 \leq \lambda_n (\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2) = \lambda_n. \tag{2.3}$$

Vamos mostrar que $\lambda_n \leq 4$, daí podemos concluir que λ_f é o maior autovalor. De fato, tomado $x = u_n$, temos $\|x\| = 1$ e $\mathcal{L}(u_n) = \lambda_n u_n \Rightarrow u_n^T \mathcal{L}u_n = \lambda_n$. Assim o valor de λ_n é

uma cota superior para $\mathbf{x}^\top \mathcal{L} \mathbf{x}$ que é assumida. Entretanto, o valor 4 é simplesmente uma cota superior (veja (2.2)). Consequentemente, $\lambda_n \leq 4$. Por outro lado, $\frac{\mathbf{f}^\top}{\|\mathbf{f}\|} \mathcal{L} \frac{\mathbf{f}}{\|\mathbf{f}\|} = 4$ (pois $\mathcal{L} \mathbf{f} = 4\mathbf{f}$). Deste fato e de (2.3) segue que $4 \leq \lambda_n$. Portanto $\lambda_n = 4 = \lambda_{\mathbf{f}}$, ou seja, $\lambda_{\mathbf{f}} = 4$ é o maior autovalor. \square

Voltando a interpretação física, temos que o movimento aplicado nas massas com o vetor deslocamento $\mathbf{d} = \mathbf{e}$ faz com que cada massa seja deslocada pela mesma quantidade, no sentido positivo (anti-horário) fazendo assim que o sistema tenha a menor energia potencial $\mathbf{e}^\top \mathcal{L} \mathbf{e} = 0$ – como vemos na Figura 2.2 –. Note que não há contração nem extensão de qualquer mola (Energia Potencial mínima (zero)). Enquanto que com $\mathbf{d} = \mathbf{f}$ – (veja a Figura 2.3) – temos que no sistema os pontos de massa localizados nas posições ímpares são deslocados no sentido positivo e os localizados nas posições pares no sentido negativo (horário). Neste caso, temos que a energia potencial máxima é $\frac{1}{2} \mathbf{f}^\top \mathcal{L} \mathbf{f} = \frac{1}{2} 4 \mathbf{f}^\top \mathbf{f} = 2\mathbf{n}$.

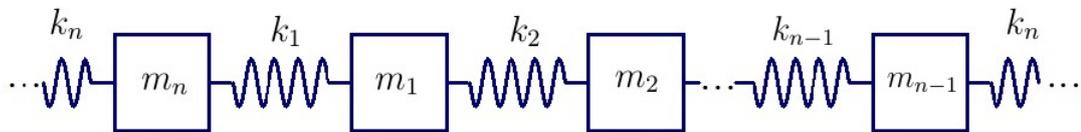


Figura 2.2: Aplicando o deslocamento $\mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)$ no sistema mola-massa.

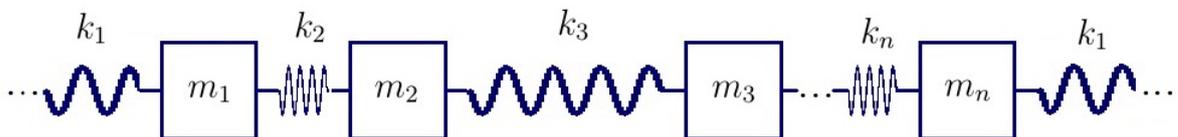


Figura 2.3: Aplicando o deslocamento $\mathbf{f} = (1, -1, \dots, 1, -1)$ no sistema mola-massa.

2.1 Formulação do Problema

Motivados por essas peculiaridades da matriz do operador Laplaciano, propomos o seguinte problema de norma mínima de matriz. Sejam $n \geq 4$ par e uma dada largura de banda $2r + 1$ com $r \in \{1, 2, \dots, \frac{n}{2}\}$ e $\beta > 0$, encontrar o seguinte minimizador, ou seja a solução de norma mínima:

$$\bar{X}(n, r, \beta) := \operatorname{argmin}\{\|X\|^2 : X \in \mathbb{B}^{(r)} \cap \mathbb{S}_+ \cap \mathbb{E}^{(\beta)}\}, \quad (2.4)$$

onde os conjuntos $\mathbb{B}^{(r)}$, \mathbb{S}_+ e $\mathbb{E}^{(\beta)}$ são subconjuntos de $\mathbb{R}^{n \times n}$ que definiremos abaixo.

Definição 2.3. Denotamos por $\mathbb{B}^{(r)}$ o conjunto de todas as matrizes quadradas de ordem n com banda periódica, de largura $2r + 1$, isto é;

$$\mathbb{B}^{(r)} := \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} : x_{ij} = 0 \text{ se } d_n(i, j) > r\},$$

onde $d_n(i, j)$ mede a distância periódica da posição do elemento x_{ij} à diagonal principal. Mais precisamente, define-se

$$d_n(i, j) := \min\{(j - i) \bmod(n), (i - j) \bmod(n)\}.$$

Exemplo 2.1. Se $n = 6$, $r = 1$ e $X = \{x_{ij}\}_{i,j=0,1,\dots,5}$ segue que

$$d_6(0, 2) = \min\{(2 - 0) \bmod(6), (0 - 2) \bmod(6)\} = \min\{2, 4\} = 2 > 1,$$

assim $x_{0,2} = 0$. Também temos que

$$d_6(0, 5) = \min\{(5 - 0) \bmod(6), (0 - 5) \bmod(6)\} = \min\{5, 1\} = 1,$$

logo $x_{0,5}$ não é obrigatoriamente nulo, pois $d_6(0, 5) = 1 = r$. Então ilustramos

$$X = \begin{bmatrix} x_{00} & x_{01} & 0 & 0 & 0 & x_{05} \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{21} & x_{22} & x_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{32} & x_{33} & x_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{50} & 0 & 0 & 0 & x_{54} & x_{55} \end{bmatrix}.$$

Observação 2.4. Note que de acordo com a definição anterior vale que $\mathbb{B}^{r_1} \subset \mathbb{B}^{r_2}$ quando $r_1 \leq r_2$, onde $r_1, r_2 \in \{1, \dots, \frac{n}{2}\}$.

Definição 2.4. Denotamos por \mathbb{S}_+ o conjunto de todas as matrizes quadradas de ordem n que são simétricas e semi-definidas positivas.

Definição 2.5. Denotamos por $\mathbb{E}^{(\beta)}$, o conjunto das matrizes quadradas de ordem n possuindo os autopares $(e, 0)$ e (f, β) , onde $e, f \in \mathbb{R}^n$ (foram introduzidos na Definição 2.1) e $\beta \in \mathbb{R}_+$, isto é;

$$\mathbb{E}^{(\beta)} := \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} : Xe = 0 \text{ e } Xf = \beta f\}.$$

Por fim definiremos a norma que é utilizada por todo esse trabalho.

Definição 2.6. Denotamos a **Norma de Frobenius** (ou norma euclidiana) de uma matriz $X = \{x_{ij}\}_{i,j=0,1,\dots,n-1}$ como sendo $\|X\| = \sqrt{\sum_{i,j=0}^{n-1} x_{ij}^2}$.

No capítulo seguinte veremos que esse problema de fato tem uma solução única e que a matriz $\frac{\beta}{4}\mathcal{L}$ é a solução para o problema no caso em que tomamos $r = 1$, isto é, uma matriz de banda tridiagonal periodicamente estendida.

Capítulo 3

Propriedades imediatas da matriz mínima

Neste capítulo vamos primeiramente mostrar que o domínio (conjunto dos pontos viáveis) de (2.4) é não vazio. Em seguida mostraremos que (2.4) possui solução única, e esta solução é uma matriz circulante e por fim, trataremos o caso tridiagonal, isto é, banda $r = 1$. Como falado anteriormente quando introduzimos o operador \mathcal{L} , agora vamos mostrar que a solução de (2.4) para o caso $r = 1$ é de fato $\frac{\beta}{4}\mathcal{L}$. Mas antes faremos algumas observações sobre o problema (2.4).

3.1 Conjunto dos pontos viáveis \mathbb{X} é não vazio

Neste capítulo e nos seguintes vamos chamar de \mathbb{X} o conjunto de todas as restrições para o problema (2.4), isto é, $\mathbb{X} = \mathbb{B}^{(r)} \cap \mathbb{S}_+ \cap \mathbb{E}^{(\beta)}$. De imediato temos que $\mathbb{X} \neq \emptyset$ pois $\frac{\beta}{4}\mathcal{L} \in \mathbb{X}$ para todo $n \geq 4$ par, todo $r \in \{1, 2, \dots, \frac{n}{2}\}$ e todo $\beta \geq 0$. Para ver isto, note que:

- i) $\frac{\beta}{4}\mathcal{L}$ é tridiagonal, isto é, pertence a $\mathbb{B}^{(1)}$ que por sua vez está contido em $\mathbb{B}^{(r)}$. Logo $\frac{\beta}{4}\mathcal{L} \in \mathbb{B}^{(r)}$.
- ii) Como vimos no capítulo anterior \mathcal{L} é semi-definido positivo. Como $\beta \geq 0$, temos que $\frac{\beta}{4}\mathcal{L}$ é semi-definido.
- iii) $\frac{\beta}{4}\mathcal{L} \in \mathbb{E}^{(\beta)}$, pois

$$\frac{\beta}{4}\mathcal{L}\mathbf{e} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\beta}{4}\mathcal{L}\mathbf{f} = \frac{\beta}{4} \cdot (4\mathbf{f}) = \beta\mathbf{f}.$$

3.2 Unicidade de solução

Sabendo que o conjunto \mathbb{X} é diferente de vazio. Nesta seção vamos mostrar que (2.4) admite única solução. Para isso vamos primeiramente mostrar que \mathbb{X} é um conjunto convexo e fechado (topologicamente). Depois vamos mostrar que a função objetivo é coerciva e estritamente convexa, o que permitirá utilizar o Teorema 1.1 que garante a existência e unicidade de um mínimo global.

Afirmção 3.1. *O conjunto \mathbb{X} é convexo e fechado.*

Demonstração. Ver Apêndice A. □

Definição 3.1. *Denotamos por $\|\cdot\|^2 : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ a **função norma ao quadrado** que leva a matriz $X \in \mathbb{X}$ em sua norma de Frobenius ao quadrado $\|X\|^2 = \sum_{i,j=0}^{n-1} x_{ij}^2$.*

Afirmção 3.2. *$\|\cdot\|^2$ é uma função coerciva e estritamente convexa.*

Demonstração. ver Apêndice A. □

Teorema 3.1. *O problema de minimização (2.4) possui uma única solução.*

Demonstração. Com essas afirmações podemos aplicar o Teorema 1.1, que vai nos garantir a existência de um único minimizador para o problema (2.4). □

O próximo passo é saber as características desta solução, isto é, em que classe de matrizes se encontra o ponto de mínimo.

Definição 3.2. *Denotamos por $G : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ o operador linear, chamado de **média circulante**, que leva uma matriz $X \in \mathbb{X}$ na matriz $G(X) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k X T^{-k}$, onde $T = \text{Circ}(0, 1, 0, \dots, 0)$ (veja Definição 1.12). Também denota-se $G(X)$ simplesmente por X_{mc} ; as letras “mc” abreviam “média circulante”.*

Observação 3.1. *Note que $G(X)$ é uma matriz circulante para toda $X \in \mathbb{X}$, pois G deixa todas as entradas de cada diagonal de X igual a média aritmética desta diagonal. Em outras palavras, $G(X)$ fica constante em cima de cada diagonal. Para ver isto note que $T X T^{(-1)}$ faz com que o elemento de X que está na posição (i, j) seja levado para a posição $(i + 1 \bmod(n), j + 1 \bmod(n))$. A aplicação G faz a média aritmética dos elementos da diagonal estendida, deixando iguais à média todos os elementos das posições $(i + 1 \bmod(n), j + 1 \bmod(n))$ com $k = 0, 1, \dots, n - 1$. Além disto, G está bem definida, ou*

seja, $G(\mathbb{X}) \subset \mathbb{X}$, pois $G(X)$ ainda satisfaz as condições de banda e espectro $G(X) \in \mathbb{B}^{(r)}$, $G(X) \in \mathbb{E}^{(\beta)}$ e $G(X) \in \mathbb{S}_+$, quando X o faz em cada um destes 3 casos.

O seguinte lema identifica as matrizes circulantes de \mathbb{X} com os pontos fixos da aplicação G .

Lema 3.1. *Uma matriz $X_0 \in \mathbb{X}$ é circulante, se e somente se, $G(X_0) = X_0$, ou seja, X_0 é ponto fixo de G .*

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que se X_0 for circulante então X_0 é ponto fixo de G . De fato, se X_0 é circulante podemos escrever $X_0 = \sum_{j=0}^{n-1} x_j T^j$, como na decomposição que vimos no Teorema 1.3. Aplicando a média circulante G em X_0 temos:

$$\begin{aligned} G(X_0) &= G\left(\sum_{j=0}^{n-1} x_j T^j\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k \left[\sum_{j=0}^{n-1} x_j T^j \right] T^{-k} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left[\sum_{k=0}^{n-1} T^k x_j T^{j-k} \right] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} x_j \left[\sum_{k=0}^{n-1} T^k T^{-k} \right] T^j = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} x_j n T^j \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} x_j T^j = X_0. \end{aligned}$$

Isso mostra que X_0 é ponto fixo de G .

Mostraremos agora a outra implicação. De acordo com a Observação 3.1 tem-se que $G(X)$ é sempre uma matriz circulante. Portanto, se $X_0 = G(X_0)$, então X_0 é circulante. \square

Teorema 3.2. *Se $\bar{X} \in \mathbb{X}$ é a matriz solução do problema de norma mínima (2.4), então \bar{X} é matriz circulante, isto é, $\bar{X} = \text{Circ}(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{(n-1)})$, para algum $\bar{x} = (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Como vimos na Seção 1.5, T apenas permuta as linhas da matriz X para cima (up-shift) quando age à esquerda de X . Por outro lado, T^{-1} permuta as colunas da matriz X para esquerda quando age à direita de X . Por isso as componentes da matriz X apenas mudam de posição (diagonal para cima) pela ação TXT^{-1} , e daí temos que $\|T^k X T^{-k}\| = \|X\|$ com $k = 0, 1, \dots, n-1$. Assim, usando a desigualdade triangular, temos a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} \|G(X)\| &= \left\| \frac{1}{n}X + \frac{1}{n}TXT^{-1} + \dots + \frac{1}{n}T^{(n-1)}XT^{-(n-1)} \right\| \\ &\leq \frac{1}{n}\|X\| + \frac{1}{n}\|TXT\| + \dots + \frac{1}{n}\|T^{(n-1)}XT^{-(n-1)}\| \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\leq \|X\|. \quad (3.2)$$

Com essa desigualdade, agora podemos aplicar o Corolário 1.1 tomando $f = \|\cdot\|^2$ (norma de Frobenius ao quadrado). Este corolário nos garante que existe um único ponto de mínimo para a função norma ao quadrado e que esse mínimo é alcançado num ponto fixo da aplicação G (média circulante). Pelo Lema 3.1 que acabamos de ver, temos então que de fato \bar{X} , solução de (2.4), é uma matriz circulante. \square

Agora podemos reescrever o problema de minimização de matriz (2.4), como um problema de minimização de vetor, ou seja, temos o seguinte teorema:

Teorema 3.3. *O problema (2.4) é equivalente a encontrar $\bar{x} = (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$, tal que*

$$\bar{x}(n, r, \beta) := \operatorname{argmin} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Circ}(x_0, x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0, x_r, x_{r-1}, \dots, x_1) \in \mathbb{S}_+, \\ x_0^2 + 2x_1^2 + \dots + 2x_r^2 : \\ \quad x_0 + 2x_1 + \dots + 2x_r = 0, \text{ e} \\ \quad x_0 - 2x_1 + 2x_2 \dots + 2(-1)^r x_r = \beta. \end{array} \right\}. \quad (3.3)$$

Além disso a solução de (2.4) $\bar{X}(n, r, \beta)$ e do problema acima estão relacionadas como

$$\bar{X}(n, r, \beta) = \operatorname{Circ}(\bar{x}(n, r, \beta)).$$

3.3 Caso Tridiagonal ($r = 1$)

Considerando o problema de minimização reformulado (3.3) e tomando $r = 1$, buscamos neste caso um vetor $\bar{x} = (\bar{x}_0, \bar{x}_1)$, tal que

$$\bar{x}(n, r = 1, \beta) := \operatorname{argmin} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Circ}(x_0, x_1, 0, \dots, 0, \dots, x_1) \in \mathbb{S}_+, \\ x_0^2 + 2x_1^2 : \\ \quad x_0 + 2x_1 = 0 \text{ e} \\ \quad x_0 - 2x_1 = \beta. \end{array} \right\}. \quad (3.4)$$

Agora resolvendo o sistema acima com 2 variáveis e 2 equações, obtemos $\bar{x}_0 = \frac{\beta}{2}$, e $\bar{x}_1 = -\frac{\beta}{4}$. Note que apenas pela condição dos dois autopares (duas últimas equações (3.4)), já conseguimos chegar em um único vetor: $\bar{x} = (\frac{\beta}{2}, -\frac{\beta}{4})$, o que nos leva à matriz $\bar{X}(\mathbf{n}, 1, \beta) = \text{Circ}(\frac{\beta}{2}, -\frac{\beta}{4}, 0, \dots, 0, -\frac{\beta}{4}) = \frac{\beta}{4}\mathcal{L}$. Coloquemos este resultado em forma de teorema.

Teorema 3.4. *Sejam $\mathbf{n} \geq 4$ par e $\mathbf{r} = 1$, então a solução do Problema (2.4), neste caso, é $\frac{\beta}{4}\mathcal{L}$.*

Observação 3.2. *A partir de agora iremos fixar o autovalor $\beta = 1$ ao invés de um $\beta > 0$ qualquer, pois sem perda de generalidade os vetores $\bar{x}(\mathbf{n}, \mathbf{r}, \beta)$ e $\bar{x}(\mathbf{n}, \mathbf{r}, 1)$ são relacionados pela seguinte equação $\bar{x}(\mathbf{n}, \mathbf{r}, \beta) = \beta \bar{x}(\mathbf{n}, \mathbf{r}, 1)$. A partir de agora vamos escrever os minimizadores $\bar{x}(\mathbf{n}, \mathbf{r})$ e $\bar{X}(\mathbf{n}, \mathbf{r})$ ao invés de $\bar{x}(\mathbf{n}, \mathbf{r}, \beta)$ e $\bar{X}(\mathbf{n}, \mathbf{r}, \beta)$ respectivamente. Em outras palavras dizemos que a solução escala linearmente com β . Mais precisamente $\bar{x}(\mathbf{n}, \mathbf{r}, \beta) = \bar{x}(\mathbf{n}, \mathbf{r}, 1\beta) = \beta \bar{x}(\mathbf{n}, \mathbf{r}, 1)$.*

Observação 3.3. *Neste caso $\mathbf{r} = 1$ não foi preciso impor a condição $\mathbf{X} \in \mathbb{S}_+$ (primeira condição em (3.4)) para resolver de forma única as duas últimas equações. Pode-se mostrar também que para $\mathbf{r} = 1$, temos que \mathbb{X} é limitado. Ao contrário deste, para os casos em que $\mathbf{r} \geq 2$, será necessário impor $\mathbf{X} \in \mathbb{S}_+$ e também o conjunto \mathbb{X} não será mais limitado (ver Apêndice A).*

Capítulo 4

Transformada de Fourier discreta para matrizes circulantes simétricas

Neste capítulo vamos utilizar a transformada de Fourier discreta para encontrar todos os autovalores de uma matriz circulante simétrica. Isto nos possibilitará reescrever o problema (3.3) como um problema de mínimos quadrados com $\frac{n}{2} - 1$ variáveis não-negativas (restrição ao 1º ortante) e $\frac{n}{2} - r$ restrições. Esta formulação do problema (2.4) corresponde ao Teorema 4.2 abaixo que servirá de base para encontrar a solução exata no caso particular de $r = \frac{n}{2}$ (veja Corolário 4.1) e implementar o algoritmo MatLab através do qual pode-se conjecturar o comportamento da solução para os casos $r = 3, 4, \dots$ quando n cresce indefinidamente.

Para provar o Teorema 4.2 vamos primeiro definir a Transformada de Fourier Discreta. Esse operador nos ajuda a encontrar os autovalores das matrizes circulantes, sua forma matricial é apresentada na definição a seguir.

Definição 4.1 (Transformada de Fourier Discreta [TFD]). *O operador $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ definido por*

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \dots & w^{n-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \dots & w^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & w^{n-1} & w^{2(n-1)} & \dots & w^{(n-1)^2} \end{bmatrix}, \text{ onde } w = e^{i\theta} \text{ com } \theta = \frac{2\pi}{n}$$

é chamado de Transformada discreta de Fourier.

Representando \mathbf{U} como $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_{ij}]$, $0 \leq i, j \leq n - 1$ temos, $\mathbf{u}_{ij} = w^{ij}$, onde w é raiz (primitiva) n -ésima de 1, ou seja $w = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Este número complexo também será denotado por $\text{cis}(\frac{2\pi}{n})$, devido a fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \text{sen}(\theta)$.

Note que cada linha da matriz \mathbf{U} se refere ao vetor \mathbf{u}_k^T da Seção 1.3, onde $k \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$ é a posição da linha.

Exemplo 4.1. Tomemos $n = 4$. Assim para obtermos a Transformada de Fourier $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ precisamos dos valores das potências de $w = e^{i\frac{2\pi}{n}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, os quais são $w^2 = -1$, $w^3 = -i$ e $w^4 = w^0 = 1$. Deste modo obtemos

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 & w^3 \\ 1 & w^2 & w^4 & w^6 \\ 1 & w^3 & w^6 & w^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}.$$

A seguir, veremos que os autovalores de uma matriz circulante podem ser obtidos com a ajuda da matriz \mathbf{U} . Note que em geral (com exceção de $n = 1, 2$) as entradas da matriz \mathbf{U} são complexas. Caso a matriz além de circulante for também simétrica, como veremos abaixo é possível encontrar seus autovalores (reais) com a ajuda de uma matriz \mathbf{V} (com entradas reais), a qual está relacionada com a matriz \mathbf{U} . Assim como no caso contínuo $\chi \in L^2(\mathbb{R})$ ao invés de $\chi \in \mathbb{R}^n$, quando χ é função par é conveniente usar a Transformada cosseno de Fourier. Vemos que \mathbf{V} corresponde a versão discreta da Transformada cosseno de Fourier.

Assim como o caso contínuo $\chi \in L^2(\mathbb{R})$, ao invés de $\chi \in \mathbb{R}^n$, quando χ é função par é conveniente usar a transformada cosseno de Fourier. Veremos que a matriz \mathbf{V} corresponde à versão discreta da transformada cosseno de Fourier.

4.1 Autovalores de uma matriz circulante simétrica

Nesta seção estudaremos os autovalores da matriz \mathbf{U} , para em seguida conseguir os autovalores de qualquer matriz circulante. Acrescentando a condição da matriz circulante ser simétrica, conseguimos não apenas que os autovalores são reais, mas também uma simetria na sua distribuição. Vejamos a seguinte afirmação.

Afirmção 4.1. *Temos que $\mathbf{U}\bar{\mathbf{U}} = n\mathbb{I}$, onde $\bar{\mathbf{U}}$ é a matriz conjugada de \mathbf{U} .*

Demonstração. O elemento s_{pq} de $\mathbf{U}\bar{\mathbf{U}}$ está na posição p, q e podemos escrevê-lo:

$$\begin{aligned} s_{pq} &= \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^{k(p-1)}) \overline{(\omega^{k(q-1)})} = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^{k(p-1)}) (\bar{\omega}^{k(q-1)}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^{k(p-1)}) (\omega^{-k(q-1)}) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k(p-q)}. \end{aligned}$$

Na diagonal principal de $\mathbf{U}\bar{\mathbf{U}}$, temos que $p = q$, logo

$$s_{pp} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^0 = n, \quad \text{para } p = 0, 1, \dots, n-1.$$

Para o caso de $p \neq q$, temos pela fórmula da soma da progressão geométrica de razão $\omega^{k(p-q)}$ que

$$s_{pq} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k(p-q)} = \frac{1 - \omega^{k(p-q)n}}{1 - \omega}.$$

Daí como $\omega^n = 1$, temos que $s_{pq} = 0$ para $p \neq q$ e concluímos a prova. \square

Com o resultado da Afirmção 4.1 temos que a matriz \mathbf{U} é inversível e a sua inversa é dada por

$$\mathbf{U}^{-1} = \frac{1}{n} \bar{\mathbf{U}}. \quad (4.1)$$

Agora vamos recorrer ao Teorema 1.3 que nos dá uma decomposição de qualquer matriz circulante em forma de combinação linear das potências de \mathbf{T} , e em seguida vamos calcular os seus autovalores. Pelo item a) do Teorema 1.3 temos que

$\mathbf{T}\mathbf{u}_k = \omega^k \mathbf{u}_k$ com $k = 0, 1, \dots, n-1$, onde $\mathbf{u}_k = (1, \omega^k, \omega^{2k}, \dots, \omega^{(n-1)k})^T$ é o k -ésimo vetor coluna da matriz \mathbf{U} . Assim as potências de \mathbf{T} satisfazem:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\mathbf{u}_k &= \omega^k \mathbf{u}_k; \\ \mathbf{T}^2 \mathbf{u}_k &= \mathbf{T}\omega^k \mathbf{u}_k = \omega^{2k} \mathbf{u}_k; \\ &\vdots \\ \mathbf{T}^{(n-1)} \mathbf{u}_k &= \mathbf{T}(\mathbf{T}^{(n-2)} \mathbf{u}_k) = \omega^{(n-1)k} \mathbf{u}_k. \end{aligned} \quad (4.2)$$

O seguinte teorema estabelece que os vetores coluna da matriz \mathbf{U} formam uma autobase, e nos fornece uma fórmula para cada um dos n autovalores de uma matriz circulante (não necessariamente simétrica).

Teorema 4.1. *Dada uma matriz quadrada de ordem n e circulante $M = \text{Circ}(\mathbf{x})$, onde $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{(n-1)})$, temos que os n autovalores de M são da forma $\lambda_k = \sum_{j=0}^{n-1} w^{kj} x_j$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, isto é, $\lambda = U\mathbf{x}$, $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})^T$.*

Demonstração. É consequência direta do Teorema 1.3 item (b), que diz $\text{Circ}(\mathbf{x}) = x_0\mathbb{I} + \dots + x_{n-1}\Gamma^{n-1}$, logo por (4.2) tem-se:

$$\begin{aligned} M\mathbf{u}_k &= (x_0\mathbb{I} + x_1\Gamma + \dots + x_{n-1}\Gamma^{n-1})\mathbf{u}_k \\ &= (x_0\mathbf{u}_k + x_1w^k\mathbf{u}_k + \dots + x_{n-1}w^{(n-1)k}\mathbf{u}_k) \\ &= \left(\sum_{j=0}^{n-1} w^{kj}x_j\right)\mathbf{u}_k = \lambda_k\mathbf{u}_k. \end{aligned}$$

Como $\{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-1}\}$ é uma autobase para M , temos que os n autovalores da forma $\lambda_k = \sum_{j=0}^{n-1} w^{kj}x_j$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ de fato cobrem o conjunto de todos os autovalores de M . \square

No caso em que temos uma matriz circulante simétrica, vamos introduzir uma nova notação:

Para todo $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{\frac{n}{2}}) \in \mathbb{R}^{\frac{n}{2}+1}$, com n par, definimos a seguinte matriz.

$$\text{Scirc}(\mathbf{x}) := \text{Circ}(x_0, x_1, \dots, x_{\frac{n}{2}-1}, x_{\frac{n}{2}}, x_{\frac{n}{2}-1}, \dots, x_2, x_1) \quad (4.3)$$

Sabendo que $x_i = x_{n-i}$, podemos reescrever o Teorema 4.1 para o caso particular de matrizes simétricas circulantes. Se $M = \text{Scirc}(x_0, \dots, x_{\frac{n}{2}})$ temos:

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \sum_{j=0}^{n-1} w^{kj}x_j \\ &= x_0 + \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} (w^{kj} + w^{(n-k)j})x_j + (-1)^k x_{\frac{n}{2}} = x_0 + \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} (w^{kj} + w^{-kj})x_j + (-1)^k x_{\frac{n}{2}} \\ &= x_0 + \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} (w^{kj} + \overline{w^{kj}})x_j + (-1)^k x_{\frac{n}{2}} = x_0 + \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} 2\text{Re}(w^{kj})x_j + (-1)^k x_{\frac{n}{2}} \\ &= x_0 + \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} 2\cos\left(\frac{2\pi}{n}jk\right)x_j + (-1)^k x_{\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

Tomando $\theta = \frac{2\pi}{n}$ vamos ter a seguinte expressão para os autovalores de M :

$$\lambda_k = x_0 + \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} 2\cos(kj\theta)x_j + (-1)^k x_{\frac{n}{2}}. \quad (4.4)$$

Da expressão acima segue que (similar a $x_i = x_{n-i}$)

$$\lambda_k = \lambda_{n-k}. \quad (4.5)$$

Por isto não precisamos mais que o índice k varie entre 0 e $n-1$ mas apenas entre 0 e $\frac{n}{2}$. Devido a isto escrevemos

$$\left(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n/2}\right)^T = V \left(x_0, x_1, \dots, x_{n/2}\right)^T, \quad (4.6)$$

onde V é a seguinte matriz real quadrada de ordem $(\frac{n}{2} + 1) \times (\frac{n}{2} + 1)$:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \cos\left(\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta\right) & 1 \\ 1 & 2 \cos(\theta) & 2 \cos(2\theta) & \dots & 2 \cos\left(\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta\right) & -1 \\ 1 & 2 \cos(2\theta) & 2 \cos(4\theta) & \dots & 2 \cos\left(2\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta\right) & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 \cos\left(\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta\right) & 2 \cos\left(2\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta\right) & \dots & 2 \cos\left(\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta\right) & (-1)^{\frac{n}{2}-1} \\ 1 & -2 & 2 & \dots & 2(-1)^{\frac{n}{2}-1} & (-1)^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Ou seja, cada elemento da Matriz V é desta forma:

$$\{v_{kj}\}_{k,j=0}^{n/2} = \begin{cases} 1, & \text{se } j = 0, \\ 2 \cos(kj\theta), & \text{se } j = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1, \\ (-1)^k, & \text{se } j = n/2. \end{cases} \quad (4.8)$$

Para a matriz V temos um resultado similar ao que temos para U na Afirmação 4.1, mas como V é uma matriz real, temos que a conjugada $\bar{V} = V$, ou seja $\bar{V}V = V^2$.

Afirmação 4.2. Temos que $V^2 = nI$, isto é, $V^{-1} = \frac{1}{n}V$.

Demonstração. ver Apêndice B. □

Proposição 4.1. Sejam $x \in \mathbb{R}^n$ e $\text{Circ}(x)$ uma matriz quadrada de ordem n , simétrica e circulante. Por simplicidade, escrevemos $\lambda_k(x)$ o qual denota os autovalores $\lambda_k(\text{Scirc}(x))$.

Tem-se a seguinte **Identidade de Parseval**:

$$\lambda_0^2(x) + \lambda_1^2(x) + \dots + \lambda_n^2(x) = n(x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2) \quad (4.9)$$

E para o caso de $x \in \mathbb{R}^{\frac{n}{2}-1}$ e $\text{Scirc}(x)$, temos:

$$\lambda_0^2(x) + 2\lambda_1^2(x) + \dots + 2\lambda_{\frac{n}{2}-1}^2(x) + \lambda_{\frac{n}{2}}^2(x) = n(x_0^2 + 2x_1^2 + \dots + 2x_{\frac{n}{2}-1}^2 + x_{\frac{n}{2}}^2) \quad (4.10)$$

Demonstração. Podemos considerar o lado esquerdo da equação (4.9) como sendo $\langle \lambda, \lambda \rangle$ e pelo Teorema 4.1 temos que $\lambda = Ux$, daí notando que U é simétrica, $U^T = U$ e usando a Afirmação 4.1, temos

$$\langle \lambda, \lambda \rangle = \langle Ux, Ux \rangle = \langle x, \bar{U}^T Ux \rangle = \langle x, \bar{U} Ux \rangle = \langle x, nx \rangle = n \langle x, x \rangle.$$

Note que $n \langle x, x \rangle$ é igual ao lado direito de (4.9). A segunda equação segue da primeira e do fato de $\lambda_k = \lambda_{n-k}$ e $x_k = x_{n-k}$, com $k = 1, \dots, \frac{n}{2} - 1$. □

4.2 Problema de mínimos quadrados com restrições

Nesta seção vamos reescrever o problema (3.3) de minimização, como um problema de mínimos quadrados com $\frac{n}{2} - 1$ variáveis não-negativas (restrição do primeiro ortante) e $\frac{n}{2} - r$ restrições. Antes disso faremos a seguinte afirmação:

Afirmção 4.3. *Dado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\frac{n}{2}+1}$, considere a matriz $\mathbf{X} = \text{Scirc}(\mathbf{x})$ que foi definida em (4.3). Então \mathbf{X} é semi-definida positiva se, e somente se, todas as entradas do vetor $\mathbf{V}\mathbf{x}$ são não-negativas. Além disso, se $\mathbf{X} \in \mathbb{E}^{(1)}$, então seus autovalores $\lambda_0(\mathbf{x})$ e $\lambda_{\frac{n}{2}}(\mathbf{x})$ são respectivamente 0 e 1.*

Demonstração. A primeira afirmativa segue imediatamente da equação (4.6). Como $\mathbf{X} \in \mathbb{E}^{(1)}$ (ver Definição 2.5) temos que

$$x_0 + 2x_1 + \dots + 2x_{\frac{n}{2}-1} + x_{\frac{n}{2}} = 0 \text{ e } x_0 - 2x_1 + \dots + 2(-1)^{\frac{n}{2}-1}x_{\frac{n}{2}-1} + (-1)^{\frac{n}{2}}x_{\frac{n}{2}} = 1.$$

E novamente pela equação (4.6), obtemos

$$\lambda_0 = x_0 + 2x_1 + \dots + 2x_{\frac{n}{2}-1} + x_{\frac{n}{2}} = 0 \text{ e } \lambda_{\frac{n}{2}} = x_0 - 2x_1 + \dots + 2(-1)^{\frac{n}{2}-1}x_{\frac{n}{2}-1} + (-1)^{\frac{n}{2}}x_{\frac{n}{2}} = 1.$$

□

Teorema 4.2 (Problema de vetor de norma mínima). *Seja $n \geq 4$ um número par e $r = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$. Então o $\text{argmin}\{\|\mathbf{X}\| : \mathbf{X} \in \mathbb{B}^{(r)} \cap \mathbb{S}_+ \cap \mathbb{E}^{(1)}\}$, a solução de (2.4), é dada por*

$$\bar{\mathbf{X}}(n, r) = \frac{1}{n} \text{Circ} \left((V\bar{\lambda})_0, (V\bar{\lambda})_1, \dots, (V\bar{\lambda})_r, 0, \dots, 0, (V\bar{\lambda})_r, \dots, (V\bar{\lambda})_1 \right), \quad (4.11)$$

onde \mathbf{V} é a matriz definida em (4.7) e $\bar{\lambda} = (0, \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_{\frac{n}{2}-1}, 1)^T$ cujas $\frac{n}{2} - 1$ entradas $\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_{\frac{n}{2}-1}$ é solução do seguinte problema de mínimos quadrados com $\frac{n}{2} - r$ restrições:

Encontrar o vetor

$$(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_{\frac{n}{2}-1}) = \text{argmin} \left\{ \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} \lambda_j^2 : \lambda_j \geq 0 \text{ e } \mathbf{A}\lambda = \mathbf{b} \right\}, \quad (4.12)$$

onde a matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(\frac{n}{2}-r) \times (\frac{n}{2}-1)}$ e o vetor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{\frac{n}{2}-r}$ são dadas por

$$\mathbf{A}_{kj} := 2 \cos \left(\frac{2\pi}{n} (k+r)j \right), \quad k = 1, \dots, \frac{n}{2} - r \text{ e } j = 1, \dots, \frac{n}{2} - 1, \quad (4.13)$$

e

$$\mathbf{b}_k := (-1)^{k+r+1}, \quad k = 1, \dots, \frac{n}{2} - r, \quad (4.14)$$

respectivamente.

Demonstração. Neste teorema é apenas reescrito o problema (3.3). Mais precisamente, a expressão (4.11) segue da equação (4.6) e da inversa de \mathbf{V} dada pela Afirmação 4.2. Ou seja,

$$\bar{\lambda} = \mathbf{V}\bar{x} \Rightarrow \bar{x} = \frac{1}{n}\mathbf{V}\bar{\lambda}.$$

Como temos que $\bar{\mathbf{X}}(\mathbf{n}, r) = \text{Circ}(\bar{x}(\mathbf{n}, r))$, onde $\bar{x}(\mathbf{n}, r)$ é solução de (3.3) com $\beta = 1$, segue a equação (4.11).

Note agora que já temos que $\lambda_0 = 0$ e $\lambda_{\frac{n}{2}} = 1$ e utilizando a (identidade de Parseval), temos que minimizar $x_0^2 + 2x_1^2 + \dots + 2x_{\frac{n}{2}-2}^2 + x_{\frac{n}{2}}^2$, como no problema (3.3), é o mesmo que minimizar $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_{\frac{n}{2}-1}^2$ como em (4.12). Note que a condição $\lambda_j \geq 0$ vem do fato de $\bar{\mathbf{X}} \in \mathbb{S}_+$, e como temos que $\bar{\mathbf{X}} \in \mathbb{B}^r$, segue que $\bar{x}_{r+1} = \dots = \bar{x}_{\frac{n}{2}} = 0$. Sabendo que $(\mathbf{V}\lambda)_j$ é a j -ésima componente de $\mathbf{V}\lambda$, teremos pela definição da matriz \mathbf{V} em (4.7) e de que $\lambda_0 = 0$ e $\lambda_{\frac{n}{2}} = 1$ que para $k = 1, \dots, \frac{n}{2} - r$ que

$$(\mathbf{V}\bar{\lambda})_{r+k} = \bar{x}_{r+k} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} 2 \cos(\theta(r+k)j) \lambda_j + \lambda_{\frac{n}{2}} (-1)^{r+k} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} A_{kj} \lambda_j = (-1)^{r+k+1},$$

isto explica a equação $\mathbf{A}\lambda = \mathbf{b}$ em (4.12), e assim concluímos a demonstração. \square

Como consequência direta do teorema anterior, vemos qual é a matriz solução para o problema (2.4) no caso $r = \frac{n}{2}$.

Corolário 4.1 (Caso $r = \frac{n}{2}$). *Seja $n \geq 4$ um número par e $r = \frac{n}{2}$. Então $\text{argmin}\{\|\mathbf{X}\| : \mathbf{X} \in \mathbb{B}^{(r=\frac{n}{2})} \cap \mathbb{S}_+ \cap \mathbb{E}^{(1)}\}$ (a solução(2.4) com $\beta = 1$) é dado por*

$$\bar{\mathbf{X}}(\mathbf{n}, r = n/2) = \text{Circ}\left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right).$$

Demonstração. Com $r = n/2$, temos pelo teorema anterior que as restrições para o problema de minimização se resume apenas $\lambda_j \geq 0$. Neste caso, tomemos $0 = \bar{\lambda}_1 = \dots = \bar{\lambda}_{n/2-1}$ pois queremos minimizar a soma $\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \lambda_k^2$. Logo a solução é dada por $\bar{\lambda} = (0, 0, \dots, 0, 1)^T \in \mathbb{R}^{\frac{n}{2}-1}$. Agora por (4.11) $\bar{x}_k = \frac{1}{n}(\mathbf{V}\bar{\lambda})_k = \frac{1}{n}\mathbf{V}(0, 0, \dots, 0, 1)_k$, que por (4.7) nos dar $\bar{x}_k = \frac{1}{n}(-1)^k$. Daí chegamos que $\bar{x} = (\frac{1}{n}, \frac{-1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{-1}{n})$ e $\bar{\mathbf{X}} = \text{Circ}(\frac{1}{n}, \frac{-1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{-1}{n})$ por (3.3) \square

Capítulo 5

O caso $r = 2$ (Matriz Pentagonal)

Neste capítulo vamos buscar a solução para o problema (2.4) quando $r = 2$. Neste caso, na interpretação de um sistema massa-mola circular, ao contrário do exemplo do Laplaciano \mathcal{L} que possui ligação apenas com as duas massas vizinhas, teremos ligação com as 4 massas vizinhas mais próximas, como na Figura 5.1. Neste caso porém, as molas que ligam as vizinhas mais próximas têm rigidez $k_i = -\alpha_1$, e as demais têm rigidez $w_i = -\alpha_2$.

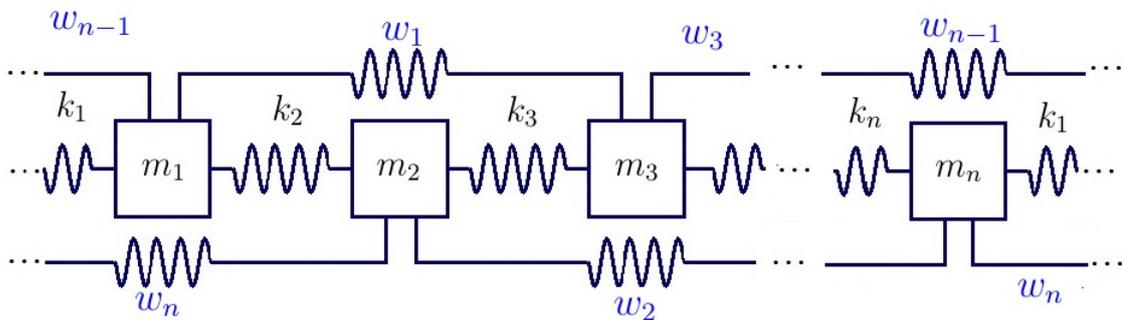


Fig 5.1

Um fato interessante sobre esse sistema é que ele pode ser estável, isto é, a energia potencial $U(\mathbf{d}) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{X} \mathbf{d}$ é não-negativa, que também é equivalente a dizer que \mathbf{X} é semi-definida positiva, até mesmo quando $w_i < 0$ (rigidez negativa). De fato, o resultado a seguir mostra que a solução $\bar{\mathbf{X}}$ para o problema (2.4), tem na interpretação do sistema massa-mola rigidez $w_i = -\alpha_2 < 0$.

Teorema 5.1. *Sejam $n \geq 6$ um número par e $r = 2$. Então $\operatorname{argmin} \{ \|\mathbf{X}\| : \mathbf{X} \in \mathbb{B}^{(r=2)} \cap \mathbb{S}_+ \cap \mathbb{E}^{(1)} \}$ é dado por*

$$\bar{\mathbf{X}}(n, r = 2) = \operatorname{Circ}(\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, 0, \dots, 0, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_1), \quad (5.1)$$

onde

i. $\bar{x}_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4[1+\cos(\frac{2\pi}{n})]} > 0;$

ii. $\bar{x}_1 = -\frac{1}{4} < 0$ que corresponde a $k_i = 1/4 > 0;$

iii. $\bar{x}_2 = \frac{1}{8[1+\cos(\frac{2\pi}{n})]} > 0$ que corresponde a $w_i < 0$ (rigidez negativa).

Demonstração. Primeiro relembremos que o minimizador \bar{X} é uma matriz circulante e simétrica como vimos no capítulo 3, ou seja, $\bar{X} = \text{Scirc}(\bar{x})$, $\bar{x} = (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{\frac{n}{2}})$. Pela restrição de banda, isto é, $\bar{X} \in \mathbb{B}^{(r=2)}$, temos que $\bar{x}_j = 0$ para $j = 3, \dots, \frac{n}{2}$, justificando assim os zeros na equação (5.1). Pela imposição $\bar{X} \in \mathbb{S}_+$, temos que $\bar{X} = \text{Scirc}(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, 0, \dots, 0)$ tem todos os autovalores não-negativos. Para explicitarmos esta condição lembramo-nos de (4.6) que

$$V(x_0, x_1, x_2, 0, \dots, 0)^T = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{\frac{n}{2}})^T.$$

Assim de acordo com as entradas da matriz V temos que a expressão

$$x_0 + \sum_{j=1}^{r=2} 2 \cos(\theta kj) x_j,$$

deve ser não-negativa para todo $k = 0, 1, \dots, \frac{n}{2}$ com $\theta = \frac{2\pi}{n}$.

Sabendo disto, vamos reescrever o problema (3.3) para o caso $r = 2$ como sendo:

$$(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2) = \operatorname{argmin} \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } x_0 + \sum_{j=1}^{r=2} 2 \cos(\theta kj) x_j \geq 0 \quad k = 1, \dots, n/2 - 1; \\ \text{b) } x_0 + 2x_1 + 2x_2 = 0 \quad (\text{corresponde a } k = 0); \\ \text{c) } x_0 - 2x_1 + 2x_2 = 1 \quad (\text{corresponde a } k = n/2). \end{array} \right\}, \quad (5.2)$$

Subtraindo a equação c) de b) em (5.2) obtemos:

$$4\bar{x}_1 = -1 \Rightarrow \bar{x}_1 = -\frac{1}{4}.$$

Agora somando as equações b) e c), poderemos escrever \bar{x}_0 em função de \bar{x}_2 :

$$\bar{x}_0 = \frac{1}{2} - 2\bar{x}_2. \quad (5.3)$$

Em seguida, iremos substituir $\bar{x}_1 = -1/4$ e \bar{x}_0 em (5.2), para chegarmos ao problema apenas na variável x_2 da seguinte forma:

$$\bar{x}_2 = \operatorname{argmin} \left\{ \left(\frac{1}{2} - 2x_2\right)^2 + \frac{1}{8} + 2x_2^2 : \left(\frac{1}{2} - 2x_2\right) - \frac{1}{2} \cos(\theta k) + 2x_2 \cos(2\theta k) \geq 0, k = 1, \dots, \frac{n}{2} - 1 \right\}.$$

Reescrevendo a função objetivo deste último, temos

$$\bar{x}_2 = \operatorname{argmin} \left\{ 6 \left(x_2 - \frac{1}{6} \right)^2 + 5/24 : \frac{1}{2} (1 - \cos(\theta k)) - 2(1 - \cos(2\theta k)) x_2 \geq 0, k = 1, \dots, \frac{n}{2} - 1 \right\}.$$

Note que $1 - \cos(2\theta k) > 0$ para $k = 1, \dots, n/2 - 1$ com $\theta = \frac{2\pi}{n}$ e $n \geq 6$. Agora usando a identidade trigonométrica

$$1 - \cos(2\theta) = 2(1 + \cos(\theta))(1 - \cos(\theta)), \quad (5.4)$$

obtemos

$$\bar{x}_2 = \operatorname{argmin} \left\{ \left(x_2 - \frac{1}{6} \right)^2 : x_2 \leq \frac{1}{8[1 + \cos(\theta k)]}, k = 1, \dots, \frac{n}{2} - 1 \right\}. \quad (5.5)$$

Relembramos que $\theta = \frac{2\pi}{n}$, temos que $\frac{1}{8[1 + \cos(\theta k)]} < \frac{1}{8[1 + \cos(\theta(k+1))]}$ pois a função cosseno é decrescente quando tomamos $k = 1, \dots, \frac{n}{2} - 2$. Por isso temos

$$\bar{x}_2 = \operatorname{argmin} \left\{ \left(x_2 - \frac{1}{6} \right)^2 : x_2 \leq \frac{1}{8[1 + \cos(\theta)]} \right\}. \quad (5.6)$$

Note agora que $\frac{1}{8[1 + \cos(\theta)]} < \frac{1}{6}$, com $\theta = \frac{2\pi}{n}$ e $n \geq 6$.

Concluimos que \bar{x}_2 procurado é dado por $\bar{x}_2 = \frac{1}{8[1 + \cos(\theta)]}$ e mais, por (5.3), temos $\bar{x}_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4[1 + \cos(\frac{2\pi}{n})]}$. Assim terminamos a demonstração. □

Observação 5.1. *Dos itens do Teorema 5.1 podemos obter diretamente o comportamento da solução de (2.4) para $r = 2$ quando fazemos n tender a infinito. Temos que $\bar{x}_0(n \rightarrow \infty, r = 2) = 3/8$, $\bar{x}_1(n \rightarrow \infty, r = 2) = -1/4$, e $\bar{x}_2(n \rightarrow \infty, r = 2) = 1/16$. Curiosamente, esta solução corresponde ao caso não-genérico $\mu = -1$ que aparece no estudo de cadeias infinitas apresentadas em [3]. Aqueles autores definiram o parâmetro μ como sendo $\mu := \alpha/(4\gamma)$, (ver equação (3.5) em [3] e também a matriz apresentada no apêndice daquele artigo) onde, na notação deles α e γ são respectivamente $-\bar{x}_1(n \rightarrow \infty, r = 2) = 1/4$ e $-\bar{x}_2(n \rightarrow \infty, r = 2) = -1/16$. Na seção seguinte esta solução para o caso $r = 2$ e $n \rightarrow \infty$ será obtida utilizando apenas o quadrado da solução do caso $r = 1$, (que é $\frac{1}{4}\mathcal{L}$). Ou seja, $\bar{X}(n \rightarrow \infty, r) = (\frac{1}{4}\mathcal{L})^2$.*

5.1 Bi-Laplaciano

Vimos no Capítulo 3 que a solução para o problema (2.4) no caso $r = 1$ é $\frac{1}{4}\mathcal{L}$, vamos ver nesta seção, como consequência do Teorema 5.1, que o Bi-Laplaciano $(\frac{1}{4}\mathcal{L})^2$ matriz de banda $r = 2$ será solução do problema (2.4) quando n tende a infinito.

Antes recordamos que podemos escrever $\mathcal{L} = \text{Circ}(2, -1, 0, \dots, 0, -1)$, ou como vimos ainda no primeiro capítulo que fala da decomposição de matrizes circulantes por combinação linear das potências do operador Shift T , podemos escrever:

$$\mathcal{L} = 2\mathbb{I} - T - T^{-1}.$$

Como consequência do Teorema 5.1 temos o seguinte resultado quando n tende a infinito.

Corolário 5.1. *Seja $\bar{X}(n \rightarrow \infty, r = 2)$ solução para o problema (2.4) quando tomamos n tendendo ao infinito, então $\bar{X}(n \rightarrow \infty, r = 2) = \frac{1}{16}\mathcal{L}^2$. Isto é, a solução quando n tende ao infinito do caso $r = 2$ é simplesmente o "quadrado" da solução para a caso $r = 1$.*

Demonstração. Vamos calcular o Bi-Laplaciano(\mathcal{L}^2):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^2 &= (2\mathbb{I} - T - T^{-1})(2\mathbb{I} - T - T^{-1}) \\ &= 4\mathbb{I} - 2T - 2T^{-1} - 2T + T^2 + \mathbb{I} - 2T^{-1} + \mathbb{I} - T^{-2} \\ &= 6\mathbb{I} - 4T + T^2 - 4T^{-1} + \mathbb{I}T^{-2} \\ &= 6\mathbb{I} - 4(T + T^{-1}) + 1(T^2 + T^{-2}) \\ &= \text{Scirc}(6, -4, 1, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados da expressão acima por $\frac{1}{16}$, segue que

$$\frac{1}{16}\mathcal{L}^2 = \text{Scirc}(3/8, -1/4, 1/16, 0, \dots, 0). \quad (5.7)$$

Note que $\frac{1}{16}\mathcal{L}^2$ é justamente a solução a que se refere a observação (5.1) com $\bar{x}_0(n \rightarrow \infty, r = 2) = 3/8$, $\bar{x}_1(n \rightarrow \infty, r = 2) = -1/4$, e $\bar{x}_2(n \rightarrow \infty, r = 2) = 1/16$. Portanto temos que $\bar{X}(n \rightarrow \infty, r = 2) = \frac{1}{16}\mathcal{L}^2$.

□

Observação 5.2. *Note que, ao contrário do caso $r = 2$, a solução para o caso $r = 1$ não depende de n . Mais precisamente, para todo $n \geq 4$ par e $r = 1$, a matriz $\frac{1}{4}\mathcal{L}$ é a solução de (2.4).*

Observação 5.3. Como vimos o Bi-Laplaciano (\mathcal{L}^2) é uma matriz de banda $r = 2$, usando que \mathcal{L} é auto-adjunto, temos \mathcal{L}^2 semi-definido positivo, pois:

$$\langle \mathcal{L}^2 \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathcal{L} \mathbf{x}, \mathcal{L} \mathbf{x} \rangle = \|\mathcal{L} \mathbf{x}\|^2 \geq 0.$$

Para a condição de espectro, note que também temos $\frac{1}{16} \mathcal{L}^2 \mathbf{e} = 0 \mathbf{e}$ e $\frac{1}{16} \mathcal{L}^2 \mathbf{f} = \mathbf{f}$. Assim portanto temos que $\frac{1}{16} \mathcal{L}^2$ pertence ao conjunto viável de (2.4) quando $r = 2$.

Observação 5.4. Diante deste resultado, nos perguntamos se o operador $(\frac{1}{4} \mathcal{L})^r$ seria a solução para o problema (2.4) quando n tende a infinito para qualquer banda r dada. No capítulo de conclusão (7) faremos estimativas numéricas investigando se essa conjectura é válida.

5.2 Distribuição de autovalores

Um resultado interessante sobre a matriz que minimiza o problema (2.4) quando tomamos uma matriz pentagonal ($r = 2$), é que os autovalores $\bar{\lambda}_k$ de $\bar{X}(n, r = 2)$ formam uma sequência monótona com relação aos índices $k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$. Este resultado pode ser enunciado como o seguinte teorema.

Teorema 5.2. Seja $\bar{X}(n, r = 2)$ nas condições do Teorema 5.1, então os autovalores $\bar{\lambda}_k$, $k = 0, 1, \dots, \frac{n}{2}$, de $\bar{X}(n, r = 2)$ possui uma distribuição monótona, isto é:

$$0 = \bar{\lambda}_0 = \bar{\lambda}_1 < \bar{\lambda}_2 < \dots < \bar{\lambda}_{\frac{n}{2}-1} < \bar{\lambda}_{\frac{n}{2}}. \quad (5.8)$$

Mais precisamente, a diferença entre dois autovalores ($\bar{\lambda}_k$'s) é dado pela seguinte fórmula:

$$\bar{\lambda}_k - \bar{\lambda}_{k-1} = \frac{2 \operatorname{sen}(2\pi/n)}{1 + \cos(2\pi/n)} \operatorname{sen}((2k-1)\pi/n) \operatorname{sen}(k\pi/n) \operatorname{sen}(k-1)\pi/n, \quad (5.9)$$

para $k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$.

Demonstração. Relembramos de (4.6) que $\bar{\lambda} = V\bar{x}$ e pelas restrições de espectro do problema (3.3) temos que $\bar{\lambda}_0 = 0$ e $\bar{\lambda}_{\frac{n}{2}} = 1$. Temos pela definição da matriz V em (4.8), que $v_{k,0} - v_{k-1,0} = 1 - 1 = 0$. Então temos

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_k - \bar{\lambda}_{k-1} &= \sum_{j=0}^{n/2} (v_{k,j} - v_{k-1,j}) \bar{x}_j \quad (\text{note que } 0 = \bar{x}_3 = \dots = \bar{x}_{\frac{n}{2}}) \\ &= [2 \cos(k\theta) - 2 \cos((k-1)\theta)] \bar{x}_1 + [2 \cos(2k\theta) - 2 \cos(2(k-1)\theta)] \bar{x}_2. \end{aligned}$$

Dos itens ii) e iii) do Teorema 5.1, temos que $\bar{x}_1 = -\frac{1}{4}$ e $\bar{x}_2 = \frac{1}{8[1+\cos(\theta)]}$, logo

$$\bar{\lambda}_k - \bar{\lambda}_{k-1} = \frac{1}{2} [\cos((k-1)\theta) - \cos(k\theta)] + \frac{1}{4[1+\cos(\theta)]} [\cos(2k\theta) - \cos(2(k-1)\theta)].$$

Usando agora a identidade trigonométrica $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$ duas vezes em cada termo da diferença $[\cos(2k\theta) - \cos(2(k-1)\theta)]$, vamos obter:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_k - \bar{\lambda}_{k-1} &= \frac{1}{2} \left\{ [\cos((k-1)\theta) - \cos(k\theta)] + \frac{1}{1+\cos(\theta)} [\cos^2(k\theta) - \cos^2((k-1)\theta)] \right\} \\ &= \frac{1}{2} [\cos((k-1)\theta) - \cos(k\theta)] \left\{ 1 - \frac{\cos((k-1)\theta) + \cos(k\theta)}{1+\cos(\theta)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\cos((k-1)\theta) - \cos(k\theta)}{1+\cos(\theta)} \right] \{ \cos(0) - \cos((k-1)\theta) + \cos(\theta) - \cos(k\theta) \}. \end{aligned}$$

Em seguida usaremos três vezes a identidade

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\beta-\alpha}{2} \right), \quad (5.10)$$

depois uma vez a identidade

$$\operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}(\beta) = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha-\beta}{2} \right) \quad (5.11)$$

e finalmente, uma vez a identidade $2 \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\alpha) = \operatorname{sen}(2\alpha)$, para obter:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_k - \bar{\lambda}_{k-1} &= \frac{\operatorname{sen} \left(\left(k - \frac{1}{2} \right) \theta \right) \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} \theta \right)}{1+\cos(\theta)} 2 \left\{ \operatorname{sen}^2 \left(\frac{k-1}{2} \theta \right) + \operatorname{sen} \left(\frac{k+1}{2} \theta \right) \operatorname{sen} \left(\frac{k-1}{2} \theta \right) \right\} \\ &= 2 \frac{\operatorname{sen} \left(\left(k - \frac{1}{2} \right) \theta \right) \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} \theta \right) \operatorname{sen} \left(\frac{k-1}{2} \theta \right)}{1+\cos(\theta)} \left\{ \operatorname{sen} \left(\frac{k-1}{2} \theta \right) + \operatorname{sen} \left(\frac{k+1}{2} \theta \right) \right\} \\ &= 4 \frac{\operatorname{sen} \left(\left(k - \frac{1}{2} \right) \theta \right) \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} \theta \right) \operatorname{sen} \left(\frac{k-1}{2} \theta \right)}{1+\cos(\theta)} \operatorname{sen} \left(\frac{k}{2} \theta \right) \cos \left(\frac{1}{2} \theta \right) \\ &= \frac{2}{1+\cos(\theta)} \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen} \left(\left(k - \frac{1}{2} \right) \theta \right) \operatorname{sen} \left(\frac{k-1}{2} \theta \right) \operatorname{sen} \left(\frac{k}{2} \theta \right). \end{aligned}$$

Para concluir, basta notar que a diferença tomando $k = 1$ é nula, e no caso de $k = 2, 3, \dots, n/2$, temos que os termos senos da equação são todos positivos, e assim chegamos à desigualdade (5.8) e concluímos a demonstração. \square

Observação 5.5. Apesar deste último resultado nos mostrar a monotonicidade dos autovalores de \bar{X} , solução de (2.4) para o caso de $r = 2$, tal monotonicidade não é válida, em geral, para $r > 2$. Veremos isso a seguir, por uma ilustração numérica da solução e seus autovalores, com $n = 12$ e $1 \leq r \leq 6$.

Capítulo 6

Resultados numéricos usando o MATLAB

Neste capítulo são obtidas numericamente as soluções do problema de minimização (4.12), usando o software MatLab. Na Seção 6.1 serão apresentados os gráficos para os casos e $r = 1, \dots, 6$ quando $n = 12$ usando um algoritmo escrito em MatLab; veja Seção 6.2.

O problema (4.12) consiste em obter um vetor de norma mínima $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^{\frac{n}{2}+1}$, no entanto como no problema inicial (2.4), as condições de espectro $\bar{\lambda}_0 = 0$ e $\bar{\lambda}_{\frac{n}{2}} = 1$ já são levados em conta, e por isso temos apenas $\frac{n}{2} - 1$ variáveis no conjunto viável em questão. Como dito na seção (4.2), caímos agora num problema de mínimos quadrados com restrições de igualdades e desigualdades lineares, o que nos permite usar a seguinte função da biblioteca do MatLab:

$$\text{lsqlin}(\mathbf{C}, \mathbf{d}, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{A}_{\text{eq}}, \mathbf{b}_{\text{eq}}, \mathbf{lb}, \mathbf{ub}).$$

Esta função soluciona numericamente o seguinte problema de norma mínima: Encontre $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^{\frac{n}{2}-1}$ dado por:

$$\operatorname{argmin}\{\|\mathbf{C}\lambda - \mathbf{d}\|^2 : \mathbf{A}\lambda \leq \mathbf{b}, \mathbf{A}_{\text{eq}}\lambda = \mathbf{b}_{\text{eq}} \text{ e } \mathbf{lb} \leq \lambda \leq \mathbf{ub}\}.$$

Note que o problema (4.12) correspondem à escolha $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ de ordem $\frac{n}{2} - 1$, $\mathbf{d} = 0 \in \mathbb{R}^{\frac{n}{2}-1}$, a matriz \mathbf{A} nula de ordem $\frac{n}{2} - 1 \times \frac{n}{2} - r$, $\mathbf{b} = 0 \in \mathbb{R}^{\frac{n}{2}-r}$, $\mathbf{lb} = 0 \in \mathbb{R}^{\frac{n}{2}-1}$, $\mathbf{ub} = +\infty \in \mathbb{R}^{\frac{n}{2}-1}$, e \mathbf{A}_{eq} e \mathbf{b}_{eq} respectivamente (4.13) e (4.14).

6.1 Gráficos para o caso $n = 12$ e $r = 1, \dots, 6$

A proposta desta seção é ilustrar os resultados que tivemos como solução para os casos de $r = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$, quando $n = 2$. Além das soluções exatas já mencionadas ($r = 1, 2$ e $\frac{n}{2}$), obtivemos também as soluções numéricas para $r = 3, 4$ e 5 .

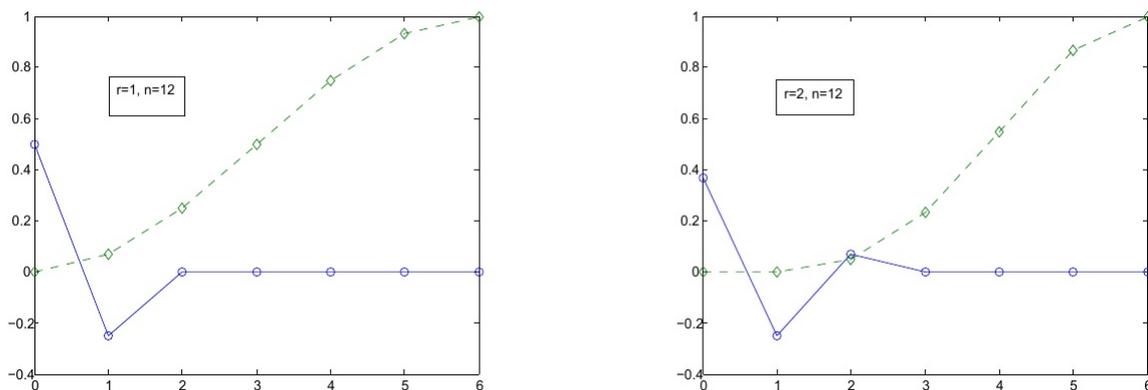


Figura 6.1

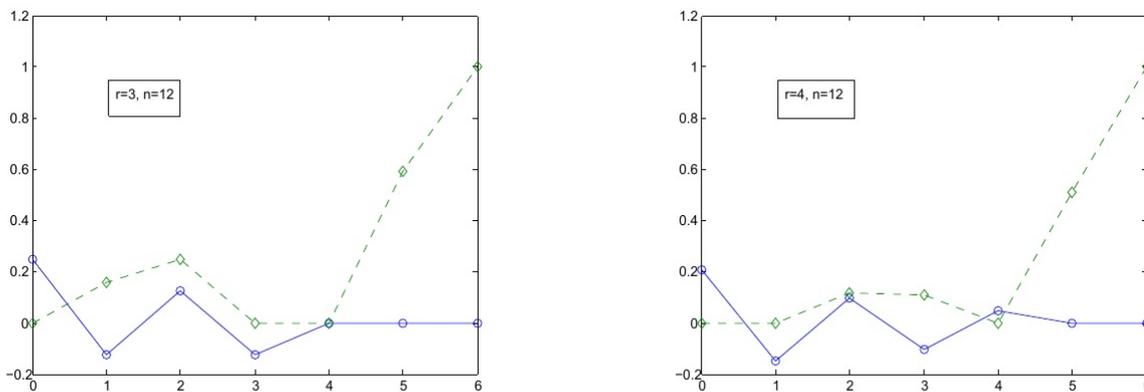


Figura 6.2

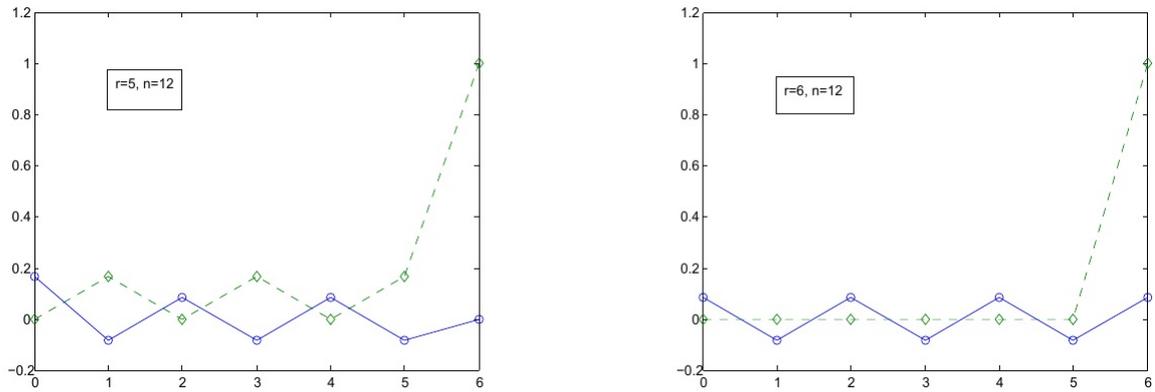


Figura 6.3

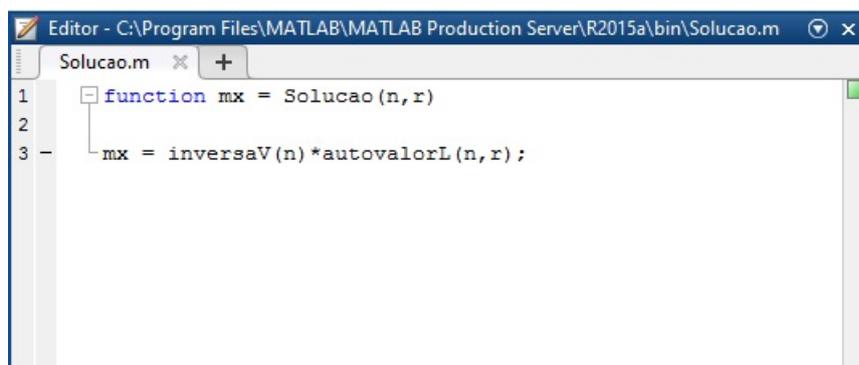
As figuras foram obtidas através da função `lsqlin` do MatLab, como falamos anteriormente. Nestas figuras são mostradas as entradas da primeira linha da matriz solução \bar{X} do problema (2.4), isto é, as componentes do vetor $\bar{x} = (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_6) \in \mathbb{R}^7$ onde $\bar{X} = \text{Scirc}(\bar{x})$. E a linha tracejada são os autovalores da matriz solução, isto é, $\bar{\lambda} = (0, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_5, 1)^\top = V(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_6)^\top$. Note que o caso $r = 1$, \bar{X} corresponde à $\frac{1}{4}\mathcal{L}$ e o caso $r = 2$ corresponde ao resultado do Teorema 5.1 e quanto ao caso $r = 6$ confirmamos o resultado do Corolário 4.1.

Um fato curioso é que ao contrário do caso $r = 2$, não vale a monotonicidade dos autovalores para o caso $n = 12$ e $r = 3, 4, 5$, como vemos nas Figuras 6.2 e 6.3.

Na seção seguintes explicitaremos os comandos e as funções utilizadas no MatLab para conseguir as soluções nas figuras, mais que isso, com a utilização do MatLab podemos conseguir para quaisquer n e r .

6.2 Algoritmo MatLab

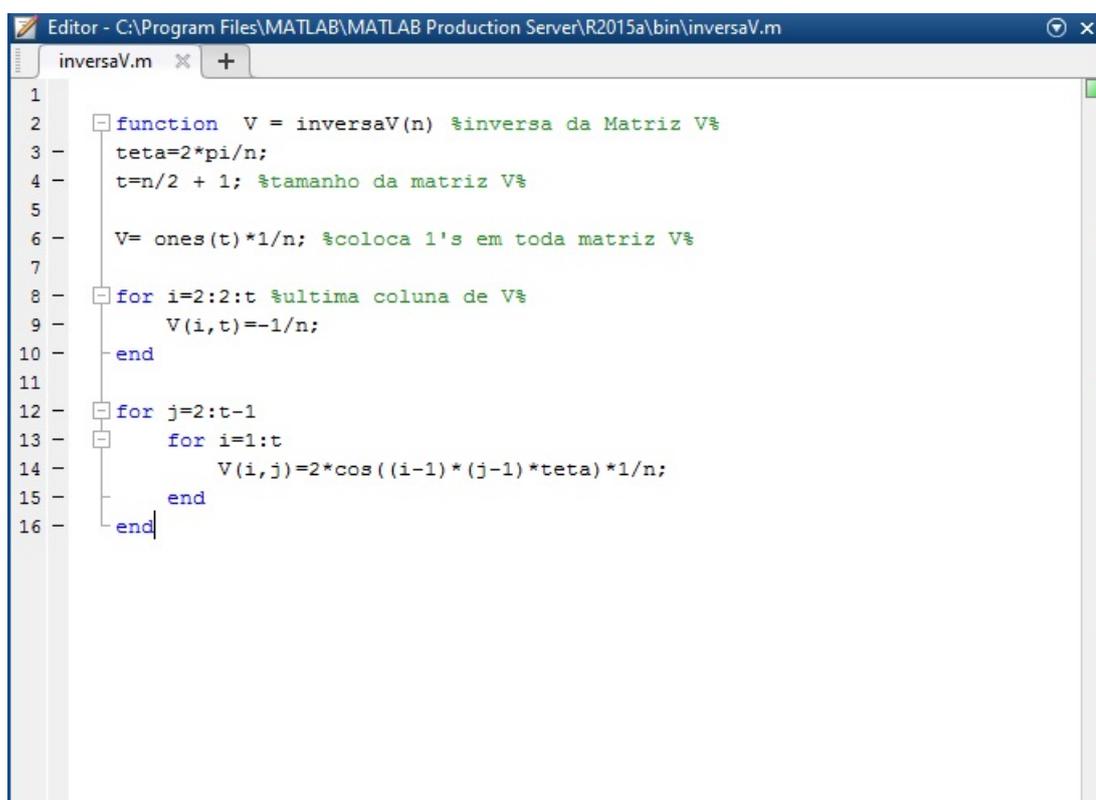
Nesta seção será apresentado o algoritmo na linguagem MatLab para resolver o problema (2.4) com $\beta = 1$. A parte principal deste algoritmo consiste na função `autovalorL(n, r)`, que retorna o vetor solução $\bar{\lambda} = (0, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_{\frac{n}{2}-1}, 1)$ do problema (4.12) usando para isto a função já pronta da biblioteca do MatLab `lsqlin`, veja linha 19 da Figura 6.6. A seguir é apresentado este algoritmo que compõe-se de três arquivos do tipo “m.file”.



```
Editor - C:\Program Files\MATLAB\MATLAB Production Server\R2015a\bin\Solucao.m
Solucao.m
1 function mx = Solucao(n,r)
2
3 mx = inversaV(n)*autovalorL(n,r);
```

Figura 6.4

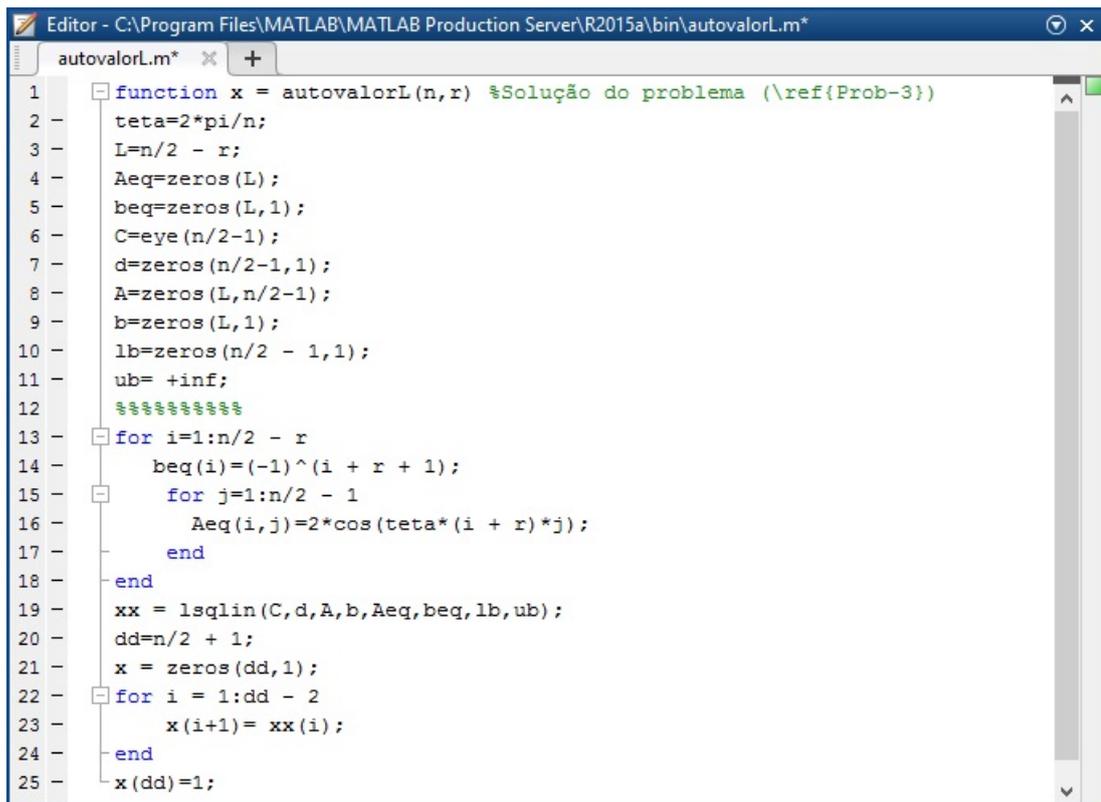
No arquivo acima (algoritmo cabeça) o vetor solução $\mathbf{mx} \in \mathbb{R}^{\frac{n}{2}-r}$ que corresponde às entradas da solução do problema (2.4) via $\bar{X}(n,r) = \text{Scirc}(\mathbf{mx})$ é implementado como função do MatLab com o nome “Solucao(n,r)”. Conforme a linha 3 do quadro acima a função $\text{Solucao}(n,r)$ é dada pelo produto de matriz $*$ de duas outras funções cujos nomes são $\text{inversaV}(n)$ e $\text{autovalorL}(n,r)$. A implementação de cada uma destas duas funções será apresentada nos dois quadros a seguir:



```
Editor - C:\Program Files\MATLAB\MATLAB Production Server\R2015a\bin\inversaV.m
inversaV.m
1
2 function V = inversaV(n) %inversa da Matriz V%
3 teta=2*pi/n;
4 t=n/2 + 1; %tamanho da matriz V%
5
6 V= ones(t)*1/n; %coloca 1's em toda matriz V%
7
8 for i=2:2:t %ultima coluna de V%
9     V(i,t)=-1/n;
10 end
11
12 for j=2:t-1
13     for i=1:t
14         V(i,j)=2*cos((i-1)*(j-1)*teta)*1/n;
15     end
16 end
```

Figura 6.5

No quadro acima é implementado a função $\text{inversaV}(n)$ que monta a matriz inversa de V para dado n conforme (4.6) e Afirmação 4.2. Compare a linha 14 deste arquivo com (4.8)



```
1 function x = autovalorL(n,r) %Solução do problema (\ref{Prob-3})
2     teta=2*pi/n;
3     L=n/2 - r;
4     Aeq=zeros(L);
5     beq=zeros(L,1);
6     C=eye(n/2-1);
7     d=zeros(n/2-1,1);
8     A=zeros(L,n/2-1);
9     b=zeros(L,1);
10    lb=zeros(n/2 - 1,1);
11    ub= +inf;
12    %%%%%%%%%%%
13    for i=1:n/2 - r
14        beq(i)=(-1)^(i + r + 1);
15        for j=1:n/2 - 1
16            Aeq(i,j)=2*cos(teta*(i + r)*j);
17        end
18    end
19    xx = lsqlin(C,d,A,b,Aeq,beq,lb,ub);
20    dd=n/2 + 1;
21    x = zeros(dd,1);
22    for i = 1:dd - 2
23        x(i+1)= xx(i);
24    end
25    x(dd)=1;
```

Figura 6.6

No arquivo acima é implementado a função `autovalorL(n,r)` que retorna o vetor $\bar{\lambda} = (0, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_{\frac{n}{2}-1}, 1)$ conforme o Teorema 4.2.

Capítulo 7

Conclusão e trabalhos futuros

Nesta dissertação de mestrado que teve como base o artigo [10] foi proposto um problema de encontrar a matriz de norma mínima a qual para o caso particular de $r = 1$ ($b = 3$) caracteriza o operador Laplaciano discreto e periódico. Obtivemos soluções exatas para outros casos especiais de $r = n/2$ ($b = n + 1$, veja Capítulo 4) e $r = 2$ ($b = 5$). A solução para o caso pentadiagonal ($b = 5$, veja Capítulo 5) pode ser fisicamente interpretada como um problema (inverso) de encontrar dois valores k_1 e k_2 de rigidez de um sistema massa-mola circular que seja estável (semi-definida positiva) e com soma do quadrado dos autovalores mínima possuindo dois tipos de molas. Tipo 1: liga vizinhos próximos com rigidez k_1 ; Tipo 2: liga vizinhos de vizinhos mais próximos com rigidez k_2 . Interessantemente, obtém-se $k_2 < 0$. (negative stiffness). Negative stiffness vem recebendo muita atenção pois permite a composição de materiais com um extremo amortecimento [7] e entre outras aplicações práticas como a construção de plataformas isoladas de vibrações para laboratórios (veja por exemplo: www.minusk.com/content/intl/index_pt.html) e na construção de dispositivos de proteção contra terremotos [9] (ou através do link www.academia.edu/download/30767398/12_b_Sarlis.pdf).

Em [10] também foi obtida a solução exata para o caso $r = n/2 - 1$ ($b = n - 1$). Comparando com [10], o que conseguimos fazer a mais foi, além de ampliar os detalhes de porquê as matrizes minimizadoras devem ser circulantes (veja Capítulo 3), conseguimos mostrar que a solução exata do caso $r = 2$ (pentadiagonal) converge para o Bi-Laplaciano $\frac{1}{4}\mathcal{L}(\frac{1}{4}\mathcal{L})$ à medida que a ordem da matriz n cresce. Note que no caso de $r = 1$ a solução será o Laplaciano $\frac{1}{4}\mathcal{L}$ não precisando para isto que $n \rightarrow \infty$. Isto parece que o Laplaciano de uma forma (sem precisar $n \rightarrow \infty$) ou de outra, potência dele e com $n \rightarrow \infty$, aparece

como solução de um problema de minimização! Devido a este resultado, formulou-se a seguinte conjectura.

A solução $\bar{X}(r, n)$ converge a $(\frac{1}{4}\mathcal{L})^r$ quando $n \rightarrow \infty$?

Implementamos um algoritmo MatLab que tem como ponto de partida a formulação equivalente do problema de minimização apresentado no Capítulo 4. Com ajuda deste algoritmo ilustramos através de gráficos as soluções para todo os casos ($r=1, 2, 3, 4, 5$ e 6) de $n = 12$. Também testamos a conjectura acima no caso $r = 3$ e $n = 100, 500$ e 1000 , resultando em

$$\left\| \bar{X}(n = 100, r = 3) - \left(\frac{1}{4}\mathcal{L}\right)^3 \right\| = 0.0817$$

$$\left\| \bar{X}(n = 500, r = 3) - \left(\frac{1}{4}\mathcal{L}\right)^3 \right\| = 0.0805$$

$$\left\| \bar{X}(n = 1000, r = 3) - \left(\frac{1}{4}\mathcal{L}\right)^3 \right\| = 0.0809.$$

Isto mostra que se a precisão do algoritmo foi levada em consideração e não houve acúmulos de erros de truncamento, a conjectura seria falsa. Ficaria, assim, como consolação mostrar que pelos menos $(\frac{1}{4}\mathcal{L})^r$ é uma boa aproximação para $\bar{X}(n, r)$ para n suficientemente grande. Em outras palavras, procuramos uma estimativa da forma $\left\| \bar{X}(r, n) - \left(\frac{1}{4}\mathcal{L}\right)^r \right\| \leq \gamma(r) + C(n)$ onde $C(n) \rightarrow 0+$ quando $n \rightarrow \infty$.

Um trabalho futuro seria perceber através do algoritmo Matlab se a distribuição dos autovalores da matriz solução para o caso de $r \geq 3$ fica monótona quando n é suficientemente grande.

Outro trabalho futuro seria tentar generalizar as soluções exatas obtidas para o caso de dimensão infinita, no sentido de substituir \mathbb{R}^n pelo espaço de Hilbert $H = \ell^2(\mathbb{Z}) := \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{a}_k^2 < \infty\}$ e conseqüentemente, substituiríamos $\mathbb{R}^{n \times n}$ (álgebra das matrizes quadradas) pelo espaço $B(H)$ (álgebra dos operadores limitados). Neste caso também o operador Laplaciano $\mathcal{L} = \text{Circ}(2, -1, 0, \dots, 0, -1) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ seria substituído $(\mathcal{L}_H \mathbf{a})_k := 2\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_{k-1} - \mathbf{a}_{k+1}$. O problema que surge nesta formulação de \mathbb{R}^n para H é de quem seria o conjunto viável \mathbb{X} e a função objetivo $N(\mathbf{X})$ (norma sobre \mathbb{X})? Pois queremos que $\mathcal{L}_H \in \mathbb{X}$ e que a função objetivo seja estritamente convexa (garantia de unicidade) para depois atingirmos nosso objetivo de mostrar que dentre todos os operadores de \mathbb{X} o que possui norma mínima é o \mathcal{L}_H . Se escolhermos $N(\mathbf{X})$ para sermos a norma de operador teremos que \mathcal{L}_H possui esta norma finita, mas neste caso $N(\mathbf{X})$ não é estritamente convexa. Por

outro lado, se escolhermos $\mathbf{N}(\mathbf{X})$ a norma Hilbert-Schmit ($\|\mathbf{X}\|_{\text{HS}}^2 := \text{Tr}(\mathbf{X}^*\mathbf{X})$ onde \mathbf{X}^* é o operador adjunto) teremos que $\mathbf{N}(\mathbf{X})$ será estritamente convexa, mas \mathcal{L}_{H} neste caso não terá tal norma finita.

Apêndice A

Demonstrações Omitidas no Capítulo 3

Neste capítulo apresentaremos as demonstrações omitidas dos resultados citados no Capítulo 3 afim de tornar a leitura daquele capítulo mais direta e agradável.

A.1 Demonstração da Afirmação 3.1

Afirmação 3.1. O conjunto \mathbb{X} é convexo e fechado.

Demonstração. Note que $\mathbb{X} = \mathbb{B}^{(r)} \cap \mathbb{S}_+ \cap \mathbb{E}^{(1)}$; assim para mostrar que \mathbb{X} é um conjunto convexo e fechado, basta mostrar que cada um desses conjuntos são convexos e fechados. Primeiro temos que $\mathbb{B}^{(r)}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^{n \times n}$, onde algumas das entradas estão fixadas como zero. Com relação a $\mathbb{E}^{(1)}$, temos que esse conjunto é um subespaço vetorial afim de $\mathbb{R}^{n \times n}$, pois as restrições que definem são lineares e afins. É sabido que tais restrições definem conjuntos convexos e fechados. E por fim \mathbb{S}_+ é um exemplo de cone convexo e fechado. Portanto concluímos que \mathbb{X} é convexo e fechado. \square

A.2 Demonstração da Afirmação 3.2

Afirmação 3.2. $\|\cdot\|^2$ é uma função coerciva e estritamente convexa.

Demonstração. Para garantir que é coerciva, basta notar que $\|\mathbf{x}\|^2 \geq \|\mathbf{x}\|$, para $\|\mathbf{x}\| \geq 1$. Para mostrar que é estritamente convexa, vamos primeiro calcular o produto escalar de

$(1 - t)x + ty$ consigo mesmo.

$$\begin{aligned} \|(1 - t)x + ty\|^2 &= \langle (1 - t)x + ty, (1 - t)x + ty \rangle \\ &= (1 - t)^2 \langle x, x \rangle + 2(t - 1)t \langle x, y \rangle + t^2 \langle y, y \rangle \\ &= (1 - 2t + t^2) \|x\|^2 + 2t(1 - t) \langle x, y \rangle + t^2 \|y\|^2. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Agora para mostrar que $\|\cdot\|^2$ é estritamente convexa, vamos tomar a diferença, entre $(1 - t)\|x\|^2 + t\|y\|^2$ e $\|(1 - t)x + ty\|^2$.

$$\begin{aligned} (1 - t)\|x\|^2 + t\|y\|^2 - \|(1 - t)x + ty\|^2 &\stackrel{(\text{A.1})}{=} t(1 - t) [\|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2] \\ &= t(1 - t) \|x - y\|^2. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Como $t \in (0, 1)$, isso mostra que o segundo membro da equação (A.2) é estritamente positivo quando $x \neq y$. Portanto temos que $\|\cdot\|^2$ é estritamente convexa. \square

A.3 Propriedades do conjunto viável $\mathbb{X}^{(r)}$

Denotaremos por $\mathbb{X}^{(r)}$ ao invés de \mathbb{X} para enfatizar a dependência do conjunto viável com a variação de banda r . Nesta seção mostraremos que o conjunto $\mathbb{X}^{(r)}$ é limitado quando $r = 1$ e nos demais casos de r , o conjunto $\mathbb{X}^{(r)}$ é ilimitado. No caso $r = 1$ vamos mostrar que existe um homeomorfismo entre $\mathbb{X}^{(r)}$ e um intervalo compacto da reta, e por isso é um conjunto limitado.

Proposição A.1. *Sejam $n \geq 4$, par e considere as seguintes matrizes A e $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definidas abaixo:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Então valem os seguintes itens:

- (a) O conjunto $\mathbb{B}^{(1)} \cap \mathbb{S} \cap \mathbb{E}^{(1)}$ é um subespaço afim unidimensional de $\mathbb{R}^{n \times n}$. Mais precisamente, $\mathbb{B}^{(1)} \cap \mathbb{S} \cap \mathbb{E}^{(1)} = \{\frac{1}{2}A + tB : t \in \mathbb{R}\}$.

Mostramos assim que é válida a inclusão $\mathbb{B}^{(1)} \cap \mathbb{S}_+ \cap \mathbb{E}^{(1)} \subset \left\{ \frac{1}{2}\mathbf{A} + t\mathbf{B}, t \in \mathbb{R} \right\}$, onde as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} são definidas em (A.3). Para verificar a outra inclusão, basta notar que as matrizes da forma $\frac{1}{2}\mathbf{A} + t\mathbf{B}$ ($t \in \mathbb{R}$ arbitrário) satisfazem $\left(\frac{1}{2}\mathbf{A} + t\mathbf{B}\right)\mathbf{e} = 0$ (pois $\mathbf{A}\mathbf{e} = 0$ e $\mathbf{B}\mathbf{e} = 0$) e $\left(\frac{1}{2}\mathbf{A} + t\mathbf{B}\right)\mathbf{f} = 1\mathbf{f}$ (pois $\mathbf{A}\mathbf{f} = 2\mathbf{f}$ e $\mathbf{B}\mathbf{f} = 0$), são simétricas e tridiagonais (tridiagonais periodicamente estendidas). Isto completa a prova do item (a).

Prova do item (b). Agora, devido ao item (a), fica fácil estabelecer que $\mathbb{X}^{(1)}$ é homeomorfo ao intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ se mostrarmos que

$$\frac{1}{2}\mathbf{A} + t\mathbf{B} \in \mathbb{S}_+ \quad \text{se, e somente se,} \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]. \quad (\text{A.6})$$

A prova de (A.6) consiste em mostrar as seguintes duas implicações:

1. Se $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ então $\frac{1}{2}\mathbf{A} + t\mathbf{B} \in \mathbb{S}_+$.

Primeiro temos que $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ é equivalente a $2t \in [0, 1]$. Vamos reescrever $\frac{1}{2}\mathbf{A} + t\mathbf{B}$ como

$$\frac{1}{2}\mathbf{A} + t\mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + 2t\mathbf{B}) = \frac{1}{2}[(1 - 2t)\mathbf{A} + 2t(\mathbf{A} + \mathbf{B})]. \quad (\text{A.7})$$

Como o conjunto \mathbb{S}_+ é um cone convexo, $(1 - 2t) \geq 0$ e $2t \geq 0$, a prova deste item segue se mostrarmos que tanto \mathbf{A} como $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ pertencem a \mathbb{S}_+ . Agora vamos mostrar estas duas inclusões. Segue diretamente da definição da matriz \mathbf{A} em (A.3) que seus autovalores são positivos, mais precisamente, são 0 e 2 (ambos com multiplicidade $n/2$). Para ver isso, note que os autovalores de \mathbf{A} são os mesmo da matriz $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, e a matriz \mathbf{A} é formada por $n/2$ blocos iguais à matriz 2 por 2 citada. Isso mostra que \mathbf{A} pertence a \mathbb{S}_+ .

Provaremos que $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ também pertence a \mathbb{S}_+ percebendo que vale a seguinte igualdade.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}. \quad (\text{A.8})$$

Pois neste caso $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ e \mathbf{A} teriam os mesmos autovalores, mais precisamente $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ e \mathbf{A} representam matricialmente uma mesma transformação linear (com bases diferentes). Para ver que (A.8) é verdadeira, nos lembramos a definição das matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} em (A.3), e o efeito de $\mathbf{T}\mathbf{X}\mathbf{T}^{-1}$ (conjugação unitária) em uma matriz \mathbf{X} . Tal efeito consiste em transladar para cima (periodicamente) as entradas de \mathbf{X} por uma

posição ao longo das diagonais. (Lembre-se que as diagonais são estendidas para o comprimento n). Portanto, os autovalores de $A + B$ são exatamente o mesmo que uma vez que a conjugação unitária preserva o polinômio característico. Isto mostra que $A + B$, também está em \mathbb{S}_+ pois já mostramos que $A \in \mathbb{S}_+$. A prova está completa.

2. Se $t \notin [0, \frac{1}{2}]$ então $\frac{1}{2}A + tB \notin \mathbb{S}_+$. Dividiremos esse caso em dois.

2.1. Se $t > \frac{1}{2}$ então $\frac{1}{2}A + tB \notin \mathbb{S}_+$.

A prova deste item segue pela escolha de um vetor de teste adequado. Tomando $w = (1, 0, \dots, 0, 1)^T$ obtem-se $w^T A w = 2$ e $w^T B w = -2$. Portanto, $w^T (\frac{1}{2}A + tB) w = \frac{1}{2}w^T A w + t w^T B w = \frac{1}{2}2 - 2t = 2(\frac{1}{2} - t)$. Isso prova que $\frac{1}{2}A + tB \notin \mathbb{S}_+$ se $t > \frac{1}{2}$.

2.2. Se $t < 0$ então $\frac{1}{2}A + tB \notin \mathbb{S}_+$.

A prova deste item segue a estratégia do item anterior. Escolhendo desta vez $u = (1, 1, 0, \dots, 0)^T$, segue que $Au = 0$ e $u^T B u = 2$. Portanto, $u^T (\frac{1}{2}A + tB) u = \frac{1}{2}u^T A u + t u^T B u = 2t$. Isto prova que $\frac{1}{2}A + tB \notin \mathbb{S}_+$ se $t < 0$.

□

Nossa estratégia para mostrar que $\mathbb{X}^{(r)} = \mathbb{B}^{(1)} \cap \mathbb{S}_+ \cap \mathbb{E}^{(1)}$ com r específico é ilimitado quando $r \geq 2$, é considerar um subconjunto de $\mathbb{X}^{(r)}$ e mostrar que esse subconjunto é ilimitado. Consequentemente $\mathbb{X}^{(r)}$ também será ilimitado.

Afirmção A.1. *Seja $n \geq 6$ um número par. Então o conjunto $\mathbb{X}^{(r)}$ é ilimitado sempre que tomamos $2 \leq r \leq \frac{n}{2}$.*

Demonstração. Primeiramente definimos $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ **conjunto das matrizes circulares** e $\mathcal{X} = \mathbb{B}^2 \cap \mathbb{E}^1 \cap \mathbb{S}_+ \cap \mathcal{C}$, lembramo-nos de que $\mathcal{X} \subset \mathbb{X}^{(2)}$ para $r \geq 2$. Vamos mostrar que \mathcal{X} é ilimitado e consequentemente o mesmo valerá para $\mathbb{X}^{(r)}$ quando $r \geq 2$ pois $\mathbb{X}^{(2)} \subset \mathbb{X}^{(r)}$ nestas condições. Temos que toda $X \in \mathcal{X}$ terá a forma

$$X = \text{Scirc}(x_0, x_1, x_3, 0, \dots, 0).$$

Como $X \in \mathbb{E}^{(1)}$, e $r = 2$ temos:

$$\begin{cases} x_0 + 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_0 - 2x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4} \text{ e } x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_0.$$

Agora considerando que $X \in \mathbb{S}_+$ segue que

$$x_0 + 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\frac{1}{4} + 2 \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right)\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}x_0\right) \geq 0 \text{ com } k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1.$$

Escolhendo $x_0 = t$ como parâmetro temos:

$$t + 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\frac{1}{4} + 2 \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right)\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}t\right) \geq 0 \Rightarrow t \geq \frac{-\frac{1}{2} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) - \frac{3}{2} \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right)}{1 - \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right)}$$

Portanto temos que o parâmetro t só tem limitação inferior, isto é, pode ser feito tão grande quanto se queira, e como $t = x_0$, temos que $\|X\|^2 \geq nt^2$. Daí segue que \mathcal{X} é ilimitado e concluímos que $\mathbb{X}^{(r)}$ é ilimitado para $r \geq 2$. \square

Apêndice B

Demonstrações Omitidas no Capítulo 4

B.1 Demonstração da Afirmação 4.2

Para a prova desta afirmação será necessário o uso repetidas vezes do seguinte resultado:

Lema B.1. *Seja $w \in \mathbb{C}$ tal que $w^n = 1$. Então para todo m -par e $m \neq n$ temos que*

$$\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} w^{mj} = -1. \quad (\text{B.1})$$

Demonstração. Como m é um número par, vamos tomar $m = 2k$, daí temos:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} w^{2kj} &= \frac{w^{2k} - w^{(\frac{n}{2}-1+1)2k}}{1 - w^{2k}} \\ &= \frac{w^{2k} - w^{kn}}{1 - w^{2k}} \\ &= \frac{w^{2k} - 1}{1 - w^{2k}} = -1. \end{aligned}$$

□

Afirmação 4.2. Temos que $V^2 = n\mathbb{I}$, isto é, $V^{-1} = \frac{1}{n}V$.

Demonstração. Sabemos que a matriz V não é simétrica, no entanto podemos pegar uma V_0 de ordem $\frac{n}{2}-1$ que é simétrica, onde $\{v_0\}_{ij} = 2 \cos(ij\theta)$, que são os termos do “meio” de V . Usaremos também que:

$$\cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta). \quad (\text{B.2})$$

Seja então $\langle \mathbf{V}_0^{(k)}, \mathbf{V}_0^{(\ell)} \rangle$, o produto da k -ésima coluna pela ℓ -ésima linha da matriz \mathbf{V}_0 , então vamos calcular:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{V}_0^{(k)}, \mathbf{V}_0^{(\ell)} \rangle &= \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} 2 \cos(kj\theta) 2 \cos(j\ell\theta) \\ &= 2 \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} [\cos((k-\ell)j\theta) + \cos((k+\ell)j\theta)]. \end{aligned}$$

Consideremos os três possíveis casos:

i) Quando $k = \ell$, então

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{V}_0^{(k)}, \mathbf{V}_0^{(k)} \rangle &= 2 \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} [\cos((k-k)j\theta) + \cos((k+k)j\theta)] \\ &= 2(\frac{n}{2} - 1) + 2 \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} \cos(2kj\theta) \\ &= n - 2 + \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} (\mathbf{w}^{2kj} + \bar{\mathbf{w}}^{2kj}) \\ &\stackrel{(B.1)}{=} n - 2 - 1 - 1 = n - 4. \end{aligned}$$

ii) Quando $k \neq \ell$, e k, ℓ com paridades iguais.

Temos que $k - \ell = m$, onde m é par,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{V}_0^{(k)}, \mathbf{V}_0^{(\ell)} \rangle &= 2 \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} [\cos(mj\theta) + \cos((m+2\ell)j\theta)] \\ &= \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} [(\mathbf{w}^{mj} + \bar{\mathbf{w}}^{mj}) + (\mathbf{w}^{(m+2\ell)j} + \bar{\mathbf{w}}^{(m+2\ell)j})] \\ &\stackrel{(B.1)}{=} -1 - 1 - 1 - 1 = -4. \end{aligned}$$

iii) Quando $k \neq \ell$, e k, ℓ com paridades diferentes.

Temos que $\mathbf{w}^{\frac{n}{2}} = \text{cis}(\frac{2\pi}{2}) = -1$, como m é ímpar tem-se

$$(\mathbf{w}^{\frac{n}{2}})^m = (-1)^m = -1, \quad (B.3)$$

e mais,

$$\frac{\mathbf{w}^m + 1}{1 - \mathbf{w}^m} + \frac{\bar{\mathbf{w}}^m + 1}{1 - \bar{\mathbf{w}}^m} = \frac{\mathbf{w}^m + 1 - \mathbf{w}^m \bar{\mathbf{w}}^m - \bar{\mathbf{w}}^m + \bar{\mathbf{w}}^m + 1 - \mathbf{w}^m \bar{\mathbf{w}}^m - \mathbf{w}^m}{(1 - \mathbf{w}^m)(1 - \bar{\mathbf{w}}^m)} = 0. \quad (B.4)$$

Agora vamos calcular

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{V}_0^{(k)}, \mathbf{V}_0^{(\ell)} \rangle &= 2 \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} [\cos(mj\theta) + \cos((m+2\ell)j\theta)] \\ &= \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} (\mathbf{w}^{mj} + \bar{\mathbf{w}}^{mj}) + \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} (\mathbf{w}^{(m+2\ell)j} + \bar{\mathbf{w}}^{(m+2\ell)j}) \\ &= \left(\frac{\mathbf{w}^m - \mathbf{w}^{\frac{n}{2}m}}{1 - \mathbf{w}^m} + \frac{\bar{\mathbf{w}}^m - \bar{\mathbf{w}}^{\frac{n}{2}m}}{1 - \bar{\mathbf{w}}^m} \right) + \left(\frac{\mathbf{w}^{m+2\ell} - \mathbf{w}^{\frac{n}{2}(m+2\ell)}}{1 - \mathbf{w}^{m+2\ell}} + \frac{\bar{\mathbf{w}}^{m+2\ell} - \bar{\mathbf{w}}^{\frac{n}{2}(m+2\ell)}}{1 - \bar{\mathbf{w}}^{m+2\ell}} \right) \\ &\stackrel{(B.3)}{=} \left(\frac{\mathbf{w}^m - (-1)}{1 - \mathbf{w}^m} + \frac{\bar{\mathbf{w}}^m - (-1)}{1 - \bar{\mathbf{w}}^m} \right) + \left(\frac{\mathbf{w}^{m+2\ell} - (-1)}{1 - \mathbf{w}^{m+2\ell}} + \frac{\bar{\mathbf{w}}^{m+2\ell} - (-1)}{1 - \bar{\mathbf{w}}^{m+2\ell}} \right) \\ &\stackrel{(B.4)}{=} 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Seja agora a Matriz V^2 , cada elemento representado por $\{r_{kj}\}$.

i*) Note que $r_{00} = \mathbf{n} = r_{(\frac{\mathbf{n}}{2})(\frac{\mathbf{n}}{2})}$ e para $k = j$ temos que:

$$r_{kj} = 1.2 + \langle V_0^{(k)}, V_0^{(j)} \rangle + (-1)^k 2(-1)^k = 2 + (\mathbf{n} - 4) + 2 = \mathbf{n}.$$

ii*) Quando $k \neq j$ e tem paridade iguais:

$$r_{kj} = 1.2 + \langle V_0^{(k)}, V_0^{(j)} \rangle + (-1)^k 2(-1)^j = 2 + (-4) + 2 = 0.$$

iii*) Quando $k \neq j$ e tem paridade diferentes:

$$r_{kj} = 1.2 + \langle V_0^{(k)}, V_0^{(j)} \rangle + (-1)^k 2(-1)^j = 2 + (0) - 2 = 0.$$

Assim mostramos que $V^2 = \mathbf{n}\mathbb{I}$, conseqüentemente $V^{-1} = \frac{1}{\mathbf{n}}V$. □

Referências Bibliográficas

- [1] BIEZUNER, R. J., *Notas de Aula Autovalores do Laplaciano*. Minas Gerais, 2006.
- [2] BIEZUNER, R. J., *Notas de Aula Métodos Numéricos para Equações Diferenciais Parciais Elípticas*. Minas Gerais, 2007.
- [3] CHARLOTTE, M., TRUSKIMOVSKY, L. Linear elastic chain with a hyper-prestress *J. Mech. Phys. Solids*, v.50, p.217–251, 2002.
- [4] GLADWELL, G. M. L. On isospectral spring-mass systems *J. Univ. of Waterloo*, 1994.
- [5] GLADWELL, G. M. L. Isospectral vibrating beams *The Royal Society*, 2002.
- [6] HORN, R. A., JOHNSON, C. R. Matrix analysis *Cambridge University Press*, USA, 1985.
- [7] LAKES, R. S., LEE, T., BERSIE, A., and WANG, Y. C., “Extreme damping in composite materials with negative stiffness inclusions”, *Nature*, v.410, p.565-567, 2001.
- [8] LIMA, E. L., *Álgebra linear*. 8.ed. Rio de Janeiro. IMPA, 2014.
- [9] SARLIS, APOSTOLOS A., et al. “Negative stiffness device for seismic protection of structures.” *Journal of Structural Engineering* 139, v.7, p.1124-1133, 2012.
- [10] TRAVAGLIA, M. V. Matrices of minimum norm satisfying certain prescribed band and spectral restrictions – an extremal characterization of the discrete periodic Laplacian. *Electronic Linear Algebra*, v.30, p.871-888, 2015.
- [11] ZHANG, F. Matrix Theory – Basic results and techniques *Spring Science*, USA, 2011.