



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

**Superfícies Translacionais Mínimas em Espaços
Homogêneos**

Lucas Quaresma de Negreiros

Teresina - 2016

Lucas Quaresma de Negreiros

Dissertação de Mestrado:

Superfícies Translacionais Mínimas em Espaços Homogêneos

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Newton Luis Santos

Teresina - 2016

N244s Negreiros, Lucas Quaresma de.
 Superfícies translacionais mínimas em espaços homogêneos.
 / Lucas Quaresma de Negreiros. – 2016.
 88 f.

 Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em
 Matemática, Universidade Federal do Piauí, 2016.
 “Orientação: Prof. Dr. Newton Luis Santos”

1. Geometria. 2. Superfícies Translacionais Mínimas. 3. Espaço
Hiperbólico. I. Título.

CDD: 516

*Dedico este trabalho à minha avó Maria das Dores e
à minha mãe Iraneide Quaresma.*

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus por ter me dado saúde, por ter me dado força para superar as dificuldades, por me amparar nos momentos difíceis, por mostrar os caminhos nas horas incertas e me suprir em todas as minhas necessidades.

Agradeço a toda a minha família que sempre me apoiou no caminho do estudo, principalmente meus pais, em especial à minha mãe Iraneide Quaresma, por todo o seu esforço durante esses anos e à minha avó Maria das Dores Quaresma por me dar amor incondicional, por estar sempre ao meu lado, incentivando, passando valores e princípios que hoje levo em minha vida, pelo exemplo de vida, por sempre acreditar e confiarem em mim. Também agradeço o apoio do meu tio Rivaldo, à minha tia Ivaneide e ao meu irmão Moacir.

Agradeço à Fabiane Thalita, por está sempre ao meu lado todos esses anos, por me apoiar sempre que precisei, pela sua compreensão e carinho em momentos difíceis e por me proporcionar momentos inesquecíveis de alegria ao seu lado (Amo você).

Aos professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Piauí pela matemática que aqui aprendi, tanto na graduação quanto no mestrado.

Meus sinceros agradecimentos ao professor Newton Luis pela importante ajuda nestes últimos tempos, por acreditar em mim e pela sua magnífica orientação, pela tão boa escolha do tema a ser trabalhado e por me ter me dado uma outra visão da Geometria.

Aos professores Barnabé Pessoa Lima e Gregório Pacelli Feitosa Bessa por terem aceitado o convite de participar da minha banca de defesa.

Agradeço aos colegas de mestrado em especial aos amigos Lucas Vidal, Alberone, Andreino, Victor, Fernando Gomes, Raphael, Bruno, Fernando Lima, Sandoel, Lívio, Ray, Lucas Machado, Pádua e todos os meus amigos que convivem diretamente comigo. Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

“Não é o conhecimento, mas o ato de aprender, não a posse mas o ato de chegar lá, que concede a maior satisfação.”

Carl Friedrich Gauss.

Resumo

Nesta dissertação são obtidas famílias de exemplos de superfícies translacionais mínimas nos espaços homogêneos tridimensionais, hiperbólico e solúvel (Sol_3). Efetivamente, são resolvidas as equações de superfícies mínimas em cada caso. Os resultados apresentados neste trabalho são extraídos dos artigos de López (2011), *Minimal Translation Surfaces in Hyperbolic Space*, e Munteanu e López (2012), *Minimal Translation Surfaces in Sol_3*

Abstract

In this dissertation it is obtained families of examples of minimal translational surfaces in three-dimensional homogeneous spaces, hyperbolic and solvable (\mathbf{Sol}_3). Effectively, it is solved the equations of minimal surface in each case. The results here presented were extracted from the papers of López (2011), *Translation Minimal surfaces in hyperbolic space*, and López and Munteanu (2012), *Minimal translation surfaces in \mathbf{Sol}_3*

Conteúdo

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
1 Introdução	1
2 Noções Preliminares	5
2.1 Variedades Diferenciáveis	5
2.2 Métricas Riemannianas	11
2.3 Conexões Afins; Conexão Riemanniana	12
2.4 Geodésicas	14
2.5 A segunda forma fundamental	16
2.6 Grupos de Lie	21
3 Superfícies Translacionais Mínimas no Espaço Hiperbólico	28
3.1 Conceitos Básicos no Espaço Hiperbólico	28
3.2 Superfícies do tipo I	32
3.3 Superfícies do tipo II	36
4 Superfícies Translacionais Mínimas em Sol_3	45
4.1 O grupo Sol_3 e sua métrica invariante à esquerda	45
4.2 A conexão de Levi-Civita do grupo Sol_3	49
4.3 Superfícies mínimas no grupo Sol_3	50
4.4 Superfícies do tipo I.	52
4.5 Superfícies do tipo II.	64

4.6 Superfícies do tipo III.	73
--------------------------------------	----

Referências Bibliográficas	87
-----------------------------------	-----------

Capítulo 1

Introdução

O estudo de superfícies mínimas tem atraído o interesse de matemáticos e cientistas de diversas áreas desde longa data. De fato, os primeiros trabalhos tratando desta classe de superfícies datam do século XVIII com os estudos de Euler, Lagrange e Meusnier, os quais também deram os primeiros exemplos de tais superfícies, além dos planos: os catenoides (as únicas superfícies mínimas de rotação) e os helicoides. Outra família importante de exemplos são as superfícies de Scherk as quais apareceram pela primeira vez em um artigo publicado por ele em 1835 (Vide [4]), o qual diz que as únicas superfícies translacionais mínimas, além dos planos, são as superfícies dadas por

$$z = \frac{1}{\mathbf{a}} \log \left| \frac{\cos(\mathbf{a}x)}{\sin(\mathbf{a}y)} \right| = \frac{1}{\mathbf{a}} \log |\cos(\mathbf{a}x)| - \frac{1}{\mathbf{a}} \log |\sin(\mathbf{a}y)|$$

onde \mathbf{a} é uma constante não nula.

Neste trabalho é obtido exemplos de superfícies translacionais mínimas nos espaços homogêneos hiperbólico (\mathbb{H}^3) e solúvel (Sol_3) os quais são dois dos oito modelos das geometrias de Thurston, a saber

$$\mathbb{R}^3, \mathbb{S}^3, \mathbb{H}^3, \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}, \text{ e } \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R},$$

juntamente com os Grupos de Lie tri-dimensionais

$$\tilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R}), \text{Nil} \text{ e } \text{Sol}_3,$$

onde $\tilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$ é o recobrimento universal de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$, com certas métricas invariantes à esquerda.

No capítulo 2, apresentamos algumas noções básicas da geometria Riemanniana, notações a serem utilizadas ao longo do nosso trabalho e alguns dos pré-requisitos para o bom entendimento dos capítulos seguintes.

O foco do nosso estudo está nos capítulos 3 e 4, que consistem no estudo dos artigos *Minimal translation surfaces in hyperbolic space* [9] de Rafael López e *Minimal translation surfaces in Sol_3* [10] de Rafael López e Marian Ioan Munteanu. Na seção 3.1, apresentamos noções básicas da geometria do espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 , referente ao modelo de semi-espaço $\mathbb{R}_+^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z > 0\}$, onde é apresentada a expressão para a curvatura média deste espaço.

Na seção 3.2 é dada a definição das superfícies do tipo I em \mathbb{H}^3 as quais são parametrizadas por uma imersão $X: \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^3$ definida por

$$X(x, y) = (x, y, f(x) + g(y)), \quad (x, y) \in \mathbf{U}$$

onde f e g são funções suaves em abertos de \mathbb{R} com, $f(x) + g(y) > 0, \quad \forall x, y$. Neste caso obtemos a seguinte equação de minimalidade:

$$(f + g) \left(\frac{f''}{1 + f'^2} + \frac{g''}{1 + g'^2} \right) = -2 \frac{1 + f'^2 + g'^2}{(1 + f'^2)(1 + g'^2)},$$

onde consideramos as possíveis soluções e concluímos o seguinte

Teorema: Não existem superfícies translacionais mínimas do tipo I em \mathbb{H}^3 .

Na seção 3.3 definimos as superfícies do tipo II em \mathbb{H}^3 as quais são dada por uma imersão $X: \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^3$ definida por

$$X(x, z) = (x, f(x) + g(z), z), \quad (x, z) \in \mathbf{U}$$

onde f e g são funções suaves em abertos de \mathbb{R} . Neste caso obtemos a equação de minimalidade

$$z \left(\frac{f''}{1 + f'^2} + \frac{g''}{1 + g'^2} \right) = 2g' \frac{1 + f'^2 + g'^2}{(1 + f'^2)(1 + g'^2)}.$$

Observamos também que em [9], Lópes provou que as únicas superfícies translacionais mínimas do tipo II em \mathbb{H}^3 eram os planos totalmente geodésicos. Entretanto, há uma lacuna em sua prova que leva a uma má conclusão. No entanto, usando seus argumentos, SEO em [13] caracteriza as superfícies translacionais mínimas como segue abaixo.

Teorema: Seja $M \subset \mathbb{H}^3$ uma superfície translacional mínimas do tipo II dada por $X(x, z) = (x, f(x) + g(x), z)$. Então as funções f e g são dadas por

$$\begin{aligned} f(x) &= ax + b \\ g(z) &= \sqrt{1 + a^2} \int \frac{cz^2}{\sqrt{1 - c^2z^4}} dz, \end{aligned}$$

onde a , b e c são constantes.

No capítulo 4, fazemos um estudo das superfícies translacionais mínimas em Sol_3 , o qual se trata de um grupo de Lie simplesmente conexo homogêneo que tem grupo de isometria de dimensão 3. Nas seções (4.4) e (4.5) basicamente definimos as superfícies do tipo I e do tipo II e obtemos em seguida suas equações de minimalidade dadas respectivamente por

$$-f''g'^3 - e^{2g}(f''g' + f'g'^2 + f'^3g'') + e^{-2g}f'^3(g'^2 - g'') = 0$$

e

$$-f''g'^3 + e^{-2g}(f'^2(g'' - g'^2) - f''g') + e^{2g}(g'' + g'^2) = 0$$

Donde concluímos os seguintes resultados

Teorema: As únicas superfícies translacionais mínimas em Sol_3 do tipo I são os planos $y = y_0$, os planos $x = x_0$, os planos $z = z_0$ e as superfícies parametrizadas por

$$x(s, t) = \alpha(s) * \beta(t) = (s + t, f(s), g(t))$$

Com $f(s) = as + b$ $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e

$$g(t) = \frac{1}{2}I^{-1}(ct) + m, \quad I(t) = \int^t \sqrt{\cosh \tau} d\tau, \quad c > 0, \quad e^{4m} = a^2.$$

Teorema: As únicas superfícies translacionais mínimas em Sol_3 do tipo II são os planos $x = x_0$, os planos $z = z_0$ e as superfícies parametrizadas por $x(s, t) = (s, t + f(s), g(t))$ com

(1) $f(s) = a$ e $g(t) = \log |t + \lambda| + \mu$, onde $a, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(2) $f(s) = as + b$, $a \neq 0$ e $g(t) = \frac{1}{2}I^{-1}(ct) + m$, com

$$I(t) = \int^t \sqrt{\cosh \tau} d\tau, \quad c > 0, \quad e^{4m} = a^2.$$

Na seção 4.6 são definidas as superfícies do tipo III é obtida a equação de minimalidade para esta classe dada por

$$\begin{aligned} & -e^{2(f+g)}(g'' + g'^2) + e^{-2g}(t^2 f'^2 g'^2 + f'^2 - t^2 f'^2 g'' - 3t f'^2 g' + t f'' g' - f'') \\ & -2f'^2 g'^2 + t f'^2 g'^3 + t f'' g'^3 - f'' g'^2 - f'^2 g'' = 0 \end{aligned}$$

Para esta classe nós só daremos exemplos. A dificuldade deste processo reflete a ausência de simetrias do espaço Sol_3 , em particular, está no fato de os três eixos coordenados não serem permutáveis. Obtemos assim o seguinte

Teorema: Exemplos de superfícies translacionais mínimas em Sol_3 do tipo III são os planos $z = z_0$, os planos $x = x_0$ e as superfícies parametrizada por $x(s, t) = (s, te^f, f(s) + g(t))$ com

1) $f(s) = a$ e $g(t) = \log |t + \lambda| + \mu$; $a, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

2) $f(s) = -\log |s + \lambda| + \mu$ e $g(t) = a$; $a, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

3) $g(s) = \log |t| + \mu$ e f é uma função arbitrária

Capítulo 2

Noções Preliminares

Neste capítulo apresentamos as noções básicas de geometria Riemanniana e, para este fim, adotamos, principalmente as referências [1] e [2]. Apresentaremos vários de seus resultados e conceitos que são de grande importância para o nosso estudo. Algumas demonstrações dos resultados listados, neste capítulo, são omitidas e podem ser encontradas em [1] e [2].

2.1 Variedades Diferenciáveis

A noção de variedade diferenciável é de grande importância em Geometria Diferencial, pois ela permite estender o Cálculo Diferencial a espaços mais gerais que o \mathbb{R}^n . A definição de variedade diferenciável permite estender o conceito de superfície de uma forma intrínseca, isto é, sem a necessidade de um espaço ambiente.

Definição 2.1. *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $\chi_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ de abertos U_α de \mathbb{R}^n em M tais que:*

- (1) $\bigcup_\alpha \chi_\alpha(U_\alpha) = M$;
- (2) *Para todo par α, β , com $\chi_\alpha(U_\alpha) \cap \chi_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $\chi_\alpha^{-1}(W)$ e $\chi_\beta^{-1}(W)$ são abertos em \mathbb{R}^n e as aplicações $\chi_\beta^{-1} \circ \chi_\alpha : \chi_\alpha^{-1}(W) \rightarrow \chi_\beta^{-1}(W)$ são difeomorfismos;*
- (3) *A família $\{(U_\alpha, \chi_\alpha)\}$ é máxima relativamente às condições (1) e (2).*

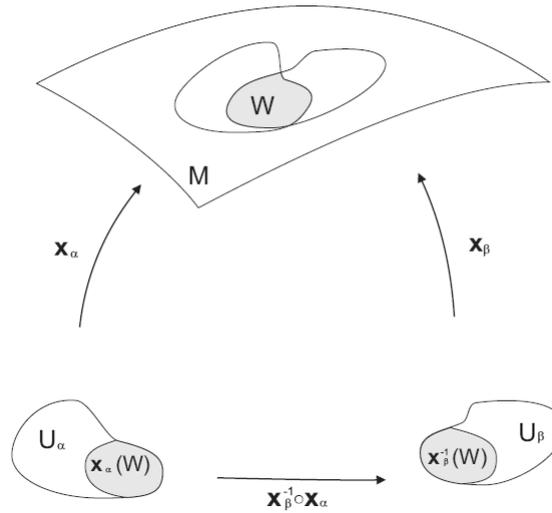


Figura 2.1: Mudança de Parametrização

A aplicação x_α com $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ é chamada uma parametrização (ou sistema de coordenadas) de M em p ; $x_\alpha(U_\alpha)$ é então chamada uma vizinhança coordenada em p . Uma família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ satisfazendo as condições (1) e (2) é chamada uma estrutura diferenciável em M .

Observe que a condição (3) aparece por razões técnicas e que uma estrutura diferenciável induz de uma maneira natural uma topologia em M . Basta definir que $A \subset M$ é um aberto de M se $x_\alpha^{-1}(A \cap x_\alpha(U_\alpha))$ é um aberto do \mathbb{R}^n para todo α .

Exemplo 2.1. *O espaço Euclidiano \mathbb{R}^n com a estrutura diferenciável dada pela identidade é um exemplo trivial de variedade diferenciável.*

Exemplo 2.2. *Considere o conjunto $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, dado por*

$$S^n = \{(y_1, y_2, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{n+1}^2 = 1\},$$

e a aplicação $\pi_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n - \{N\}$, dada por

$$\pi_1(x) = \left(\frac{2x_1}{|x|^2 + 1}, \dots, \frac{2x_n}{|x|^2 + 1}, \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1} \right),$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)$ e N denota o pólo norte de S^n . De maneira análoga, podemos definir a aplicação $\pi_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n - \{S\}$, que cobre S^n menos o polo sul S .

A família $\{(\pi_i, \mathbb{R}^n)\}$, $i = 1, 2$, é uma estrutura diferenciável para S^n .

De fato, $\pi_1(\mathbb{R}^n) \cup \pi_2(\mathbb{R}^n) = \mathbb{S}^n$ e $\pi_1(\mathbb{R}^n) \cap \pi_2(\mathbb{R}^n) = \mathbb{S}^n - \{N, S\}$. Além disso $\pi_1^{-1} : \mathbb{S}^n - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dada por

$$\pi_1^{-1}(\mathbf{y}) = \left(\frac{y_1}{1 - y_{n+1}}, \dots, \frac{y_n}{1 - y_{n+1}} \right),$$

onde $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$. Assim, vemos que $\pi_1^{-1} \circ \pi_2$ e $\pi_2^{-1} \circ \pi_1$ são diferenciáveis, por exemplo, $\pi_1^{-1} \circ \pi_2 : \mathbb{R}^n - 0 \rightarrow \mathbb{R}^n - 0$ é dado por $\pi_1^{-1} \circ \pi_2(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2}$ que é C^∞ . Portanto, a esfera \mathbb{S}^n é uma variedade de dimensão n .

De agora em diante, quando indicarmos uma variedade por M^n , o índice superior n indicará a dimensão de M . A próxima definição estende a noção de diferenciabilidade às aplicações entre variedades.

Definição 2.2. *Sejam M^n e N^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\phi : M \rightarrow N$ é diferenciável em $\mathbf{p} \in M$ se dada uma parametrização $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow N$ em $\phi(\mathbf{p})$ existe uma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ em \mathbf{p} tal que $\phi(\mathbf{x}(U)) \subset \mathbf{y}(V)$ e a aplicação*

$$\mathbf{y}^{-1} \circ \phi \circ \mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

é diferenciável em $\mathbf{x}^{-1}(\mathbf{p})$. ϕ é diferenciável em um aberto de M se é diferenciável em todos os pontos desse aberto.

Decorre da condição (2) da definição (1.1) que a definição dada é independente da escolha das parametrizações.

Vamos estender às variedades diferenciáveis a noção de vetor tangente.

Definição 2.3. *Sejam M uma variedade diferenciável e $\mathbf{p} \in M$. Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ é chamada uma curva (diferenciável) em M . Suponha que $\alpha(0) = \mathbf{p} \in M$, e seja \mathcal{D} o conjunto das funções de M diferenciáveis em \mathbf{p} . O vetor tangente à curva α em $\mathbf{t} = 0$ é a função $\alpha'(0) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} \quad f \in \mathcal{D}.$$

Um vetor tangente em \mathbf{p} é o vetor tangente em $\mathbf{t} = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ com $\alpha(0) = \mathbf{p}$. O conjunto dos vetores tangentes a M será indicado por $T_{\mathbf{p}}M$.

Observe que a noção de vetor tangente não depende da particular curva escolhida.

A definição acima é motivada pela seguinte consideração. Seja $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva diferenciável de \mathbb{R}^n , com $\alpha(0) = \mathbf{p}$. Escreva

$$\alpha(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t)), t \in (-\epsilon, \epsilon), (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Então $\alpha'(0) = (x_1'(0), \dots, x_n'(0)) = \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Seja agora f uma função diferenciável definida em uma vizinhança de \mathbf{p} . Podemos restringir f à curva α e calcular a derivada direcional segundo o vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ como

$$\left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t_0} = \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{t=0} \left. \frac{dx_i}{dt} \right|_{t=0} = \left(\sum_i x_i'(0) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) f.$$

Portanto a derivada direcional segundo \mathbf{v} pode ser compreendido como um operador sobre funções diferenciáveis que depende unicamente de \mathbf{v} .

Proposição 2.1. *Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis e seja $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ uma aplicação diferenciável. Para cada $\mathbf{p} \in M_1$ e cada $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}M_1$, escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M_1$ com $\alpha(0) = \mathbf{p}$, $\alpha'(0) = \mathbf{v}$. Faça $\beta = \varphi \circ \alpha$. A aplicação $d\varphi_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}M_1 \rightarrow T_{\varphi(\mathbf{p})}M_2$ dada por $d\varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) = \beta'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de α .*

Demonstração. Vide [1]. □

Definição 2.4. *A aplicação linear $d\varphi_{\mathbf{p}}$ dada pela (Proposição 1) é chamada diferencial de φ em \mathbf{p} .*

Definição 2.5. *Sejam M_1 e M_2 variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ é um difeomorfismo se ela é diferenciável, inversível e sua inversa φ^{-1} é diferenciável. φ é um difeomorfismo local em $\mathbf{p} \in M$ se existem vizinhanças U de \mathbf{p} e V de $\varphi(\mathbf{p})$ tais que $\varphi : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo.*

A demonstração do próximo teorema é uma aplicação imediata do teorema da função inversa no \mathbb{R}^n .

Teorema 2.1. *Seja $\varphi : M_1^n \rightarrow M_2^n$ uma aplicação diferenciável e seja $p \in M_1$ tal que $d\varphi_p : T_p M_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} M_2$ é um isomorfismo. Então φ é um difeomorfismo local em p .*

Demonstração. Vide [1]. □

Definição 2.6. *Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $\varphi : M \rightarrow N$ é uma imersão se $d\varphi_p : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} N$ é injetiva para todo $p \in M$. Se, além disto, φ é um homeomorfismo sobre $\varphi(M) \subset N$, onde $\varphi(M)$ tem a topologia induzida por N , diz-se que φ é um mergulho. Se $M \subset N$ e a inclusão $i : M \hookrightarrow N$ é um mergulho, diz-se que M é uma subvariedade de N .*

Observe que se $\varphi : M^m \rightarrow N^n$ é uma imersão, então $m \leq n$; a diferença $n - m$ é chamada a codimensão da imersão φ .

Exemplo 2.3. *Uma parametrização $x : U \rightarrow S$ de uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é por definição uma imersão*

Quando lidamos com situações de caráter estritamente local, em Geometria, é indiferente tratar como imersões ou mergulhos. Isso provém da seguinte proposição que mostra ser, toda imersão, localmente (no sentido abaixo explicitado) um mergulho.

Proposição 2.2. *Seja $\varphi : M_1^n \rightarrow M_2^m$, uma imersão da variedade M_1 na variedade M_2 . Para todo ponto $p \in M_1$, existe uma vizinhança $V \subset M_1$ de p tal que a restrição $\varphi|_V : V \rightarrow M_2$ é um mergulho.*

Demonstração. Vide [1]. □

Definição 2.7. (*Fibrado Tangente*) *Seja M^n uma variedade diferenciável. O fibrado tangente de M é o espaço $TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_p M\} = \bigcup_{p \in M} T_p M$. TM possui estrutura de variedade diferenciável. Seja $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ a estrutura diferenciável de M . Indicaremos por $(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha)$ as coordenadas de U_α e por $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha} \right\}$ bases associadas nos espaços tangentes de $x_\alpha(U_\alpha)$. Para cada α , defina*

$$y_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM,$$

por

$$\mathbf{y}_\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) = \left(x_\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha), \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha} \right), \quad (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Isto significa que tomamos como coordenadas de um ponto $(\mathbf{p}, \mathbf{v}) \in TM$ as coordenadas $x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha$ de \mathbf{p} junto com as coordenadas de \mathbf{v} na base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha} \right\}$.

Observamos que $\{(\mathbf{U}_\alpha \times \mathbb{R}^n, \mathbf{y}_\alpha)\}$ é uma estrutura diferenciável em TM .

Definição 2.8. Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto $\mathbf{p} \in M$ associa um vetor $X(\mathbf{p}) \in T_{\mathbf{p}}M$. Em termos de aplicações, X é uma aplicação de M no fibrado tangente TM . O campo é diferenciável se a aplicação $X : M \rightarrow TM$ for diferenciável.

Considerando a parametrização $x : \mathbf{U} \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ é possível escrever localmente

$$X(\mathbf{p}) = \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{p}},$$

onde cada $\alpha_i : \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função em \mathbf{U} e $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}_{i=1}^n$ é a base local associada a x , $i = 1, \dots, n$. X é diferenciável se e só se as funções α_i são diferenciáveis para alguma parametrização.

Às vezes é conveniente considerar um campo de vetores como uma aplicação $X : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{F}$ do conjunto \mathcal{D} das funções diferenciáveis em M no conjunto \mathcal{F} das funções em M , definidas do seguinte modo

$$(Xf)(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(\mathbf{p}) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p}), \quad f \in \mathcal{D},$$

onde f indica, por um abuso de notação, a expressão de $f = f \circ x = f|_{x(\mathbf{U})}$ na parametrização x .

A interpretação de X com um operador em \mathcal{D} permite-nos considerar os iterados de X . Por exemplo, se X e Y são campos diferenciáveis em M e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, podemos considerar as funções $X(Yf)$ e $Y(Xf)$. Em geral, tais operações não conduzem a campos vetoriais, por envolverem derivadas de ordem superior á primeira, entretanto,

Lema 2.1. *Sejam X e Y campos diferenciáveis de vetores tangentes em uma variedade diferenciável M . Então existe um único campo de vetores Z tal que, para todo $f \in \mathcal{D}$, $Zf = (XY - YX)f$*

Demonstração. Vide [1]. □

O campo vetorial Z dado pelo Lema (1.1) é chamado de *colchete* de X e Y , $[X, Y] = XY - YX$.

A operação colchete possui as seguintes propriedades:

Proposição 2.3. *Se X, Y e Z são campos diferenciáveis em M , a, b são números reais, e f, g são funções diferenciáveis, então:*

- (a) $[X, Y] = -[Y, X]$ (*anticomutatividade*),
- (b) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ (*linearidade*),
- (c) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (*identidade de Jacobi*),
- (d) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

Demonstração. Vide [1]. □

2.2 Métricas Riemannianas

Definição 2.9. *Uma métrica Riemanniana (ou estrutura Riemanniana) em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ (isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente T_pM , que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p , com $x(x_1, x_2, \dots, x_n) = q \in x(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx(0, \dots, 1, \dots, 0)$, então $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ é uma função diferenciável em U .*

Esta definição não depende da escolha do sistema de coordenadas (Vide [1].)

É usual deixar de indicar o índice p em $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ sempre que não houver possibilidade de confusão. As funções g_{ij} são chamadas *expressões da métrica Riemanniana* no sistema de coordenadas x . Uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana chama-se uma variedade Riemanniana.

Definição 2.10. *Sejam M e N variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \rightarrow N$ é chamado uma isometria se:*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \quad \text{para todo } p \in M, \quad u, v \in T_p M$$

Definição 2.11. *Sejam M e N variedades Riemannianas. Uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow N$ é uma isometria local em $p \in M$ se existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f : U \rightarrow f(U)$ é uma isometria.*

Variedade Riemanniana M é *localmente isométrica* à variedade Riemanniana N se para todo p em M existe uma vizinhança U de p em M e uma isometria local $f : U \rightarrow f(U) \subset N$.

Definição 2.12. *Um campo vetorial V ao longo de uma curva suave $c : I \rightarrow M$ é uma aplicação que a cada $t \in I$ associa um vetor tangente $V(t) \in T_{c(t)}M$. Diz-se que V é diferenciável se para toda função diferenciável f em M , a função $t \rightarrow V(t)f$ é uma função diferenciável em I .*

Finalizamos esta seção com um teorema de existência de métricas Riemannianas.

Proposição 2.4. *Uma variedade diferenciável M (de Hausdorff e com base enumerável) possui uma métrica Riemanniana.*

Demonstração. Vide [1]. □

2.3 Conexões Afins; Conexão Riemanniana

Indicaremos por $\mathcal{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M e por $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M .

Definição 2.13. Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$$

que se indica por $(X, Y) \longrightarrow \nabla_X Y$ e que satisfaz as seguintes propriedades:

- i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,
- ii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
- iii) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

onde $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Proposição 2.5. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial diferenciável V ao longo da curva diferenciável $c : I \longrightarrow M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c , denominando derivada covariante de V ao longo de c , tal que:

- a) $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$.
- b) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, onde W é um campo de vetores ao longo de c e f é uma função diferenciável em I .
- c) Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathcal{X}(M)$, i.é., $V(t) = Y(c(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt} Y$.

Demonstração. Vide [1]. □

Definição 2.14. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \longrightarrow M$ é chamado paralelo quando $\frac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.

Proposição 2.6. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Seja $c : I \longrightarrow M$ uma curva diferenciável em M e V_0 um vetor tangente a M em $c(t_0) \in I$ (i.é. $V_0 \in T_{c(t_0)}M$). Então existe um único campo de vetores paralelo V ao longo de c , tal que $V(t_0) = V_0$, ($V(t)$ é chamado transporte paralelo de $V(t_0)$ ao longo de c).

Demonstração. Vide [1]. □

Definição 2.15. *Uma conexão ∇ em uma variedade Riemanniana M é compatível com a métrica se, e somente se,*

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad X, Y, Z \in \mathcal{X}(M).$$

Definição 2.16. *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é dita simétrica quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad \text{para todo } X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Podemos agora enunciar o teorema fundamental desta seção

Teorema 2.2. *(Levi-Civita). Dada uma variedade Riemanniana M , existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:*

- a) ∇ é simétrica
- b) ∇ é compatível com a métrica Riemanniana.

Demonstração. Vide [1]. □

Dados $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$. Se ∇ é uma conexão de Levi-Civita em uma variedade Riemanniana (M, g) , então vale a identidade

$$\begin{aligned} \langle Z, \nabla_Y X \rangle &= \frac{1}{2} \{ X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle \\ &\quad \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle \} \end{aligned} \quad (2.1)$$

A fórmula (2.1) é chamada *fórmula de Koszul*, e será fundamental na determinação das conexões que consideramos neste trabalho.

2.4 Geodésicas

Nessa seção falaremos sobre curvas que minimizam localmente a distância em uma variedade Riemanniana. De agora em diante, M denotará uma variedade Riemanniana munida com uma conexão Riemanniana.

Definição 2.17. *Uma curva suave parametrizada $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica se $\nabla_{\gamma'(t)}\gamma' = 0$, para todo $t \in I$. Se $[a, b] \subset I$ e $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica, a restrição de γ a $[a, b]$ é chamada uma geodésica (segmento geodésico) ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.*

Se $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica, então

$$\frac{d}{dt}\langle \gamma', \gamma' \rangle = 2\langle \nabla_{\gamma'}\gamma', \gamma' \rangle = 0,$$

isto é, o comprimento de γ' é constante. De agora em diante, consideraremos apenas geodésicas tais que $|\gamma'| = c \neq 0$. O comprimento de arco s de γ , a partir de uma origem fixa, digamos $t = t_0$, é então dado por

$$\int_{t_0}^t |\gamma'| dt = c(t - t_0).$$

Portanto, o parâmetro de uma geodésica é proporcional ao comprimento de arco. Quando o parâmetro é o próprio comprimento de arco, isto é, $c = 1$, diremos que a geodésica g está normalizada.

Teorema 2.3. *Seja M uma variedade Riemanniana. Para cada ponto $p \in M$ e cada $v \in T_pM$ com $|v| = 1$, existe $\epsilon > 0$ e uma única geodésica $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ parametrizada pelo comprimento de arco, tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$.*

Demonstração. Vide [1]. □

A proposição seguinte nos permite introduzir o conceito de aplicação exponencial.

Proposição 2.7. *Dado $p \in M$, existem uma vizinhança V de p em M , um número $\epsilon > 0$ e uma aplicação C^∞ , $\alpha : (-2, 2) \times U \rightarrow M$, $U = \{(q, w) \in TM; q \in V, w \in T_pM, |w| < \epsilon\}$ tal que $t \rightarrow \alpha(t, q, w)$, é a única geodésica de M que no instante $t = 0$ passa por q com velocidade w , para cada $q \in V$ e cada $w \in T_pM$, com $|w| < \epsilon$.*

Demonstração. Vide [1]. □

Vamos introduzir agora a aplicação exponencial. Seja $p \in M$ e $U \subset TM$ um aberto dado pela proposição 1.7. Então a aplicação $\exp : U \rightarrow M$ dada por

$$\exp(\mathbf{q}, \mathbf{v}) = \alpha(1, \mathbf{q}, \mathbf{v}) = \alpha\left(|\mathbf{v}|, \mathbf{q}, \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right), (\mathbf{q}, \mathbf{v}) \in \mathbf{U}$$

Geometricamente, $\exp_{\mathbf{q}}(\mathbf{v}) = \exp(\mathbf{q}, \mathbf{v})$ é o ponto de M obtido percorrendo um comprimento igual a $|\mathbf{v}|$, a partir de \mathbf{q} , sobre a geodésica que passa por \mathbf{q} com velocidade igual a $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$.

Proposição 2.8. *Dado $\mathbf{q} \in M$, existe uma vizinhança B da origem de $T_{\mathbf{p}}M$ tal que $\exp_{\mathbf{q}} : B \rightarrow M$ é um difeomorfismo de B sobre um aberto de M .*

Demonstração. Vide [1]. □

Definição 2.18. *Uma variedade Riemanniana M é (geodesicamente) completa se para todo $\mathbf{p} \in M$ as geodésicas $\gamma(\mathbf{t})$ que partem de \mathbf{p} estão definidas para todos os valores do parâmetro $\mathbf{t} \in \mathbb{R}$.*

Intuitivamente, o conceito de variedade completa, diz que a variedade não possui "furos" ou fronteiras.

2.5 A segunda forma fundamental

Seja $(\bar{M}^{n+m=k}, \langle \cdot, \cdot \rangle, \bar{\nabla})$ uma variedade n -dimensional e $f : M^n \rightarrow \bar{M}^k$ uma imersão. Nestas condições, a métrica Riemanniana de \bar{M} induz de maneira natural uma métrica Riemanniana em M através da definição

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle d\mathbf{f}_{\mathbf{p}}(\mathbf{u}), d\mathbf{f}_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}) \rangle_{f(\mathbf{p})}, \forall \mathbf{p} \in M, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}M,$$

e dessa forma, a aplicação f é uma imersão isométrica.

Dado $\mathbf{p} \in M$, existe uma vizinhança $\mathbf{U} \subset M$ de \mathbf{p} tal que $f(\mathbf{U}) \subset \bar{M}$ é uma subvariedade de \bar{M} . Portanto existem uma vizinhança $\bar{\mathbf{U}}$ de $f(\mathbf{p})$ e um difeomorfismo $\phi : \bar{\mathbf{U}} \rightarrow \mathbf{V} \subset \mathbb{R}^k$ em um aberto \mathbf{V} do \mathbb{R}^k , tais que ϕ aplica difeomorficamente $f(\mathbf{U}) \cap \bar{\mathbf{U}}$ em um aberto do subespaço $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^k$. Identificaremos \mathbf{U} com $f(\mathbf{U})$ e cada vetor $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{q}}M$, $\mathbf{q} \in \mathbf{U}$, com o vetor $d\mathbf{f}_{\mathbf{q}}(\mathbf{v}) \in T_{f(\mathbf{q})}\bar{M}$. Assim, para cada $\mathbf{p} \in M$, o produto interno em $T_{\mathbf{p}}\bar{M}$ decompõe $T_{\mathbf{p}}\bar{M}$ na soma direta

$$T_{\mathbf{p}}\bar{M} = T_{\mathbf{p}}M \oplus (T_{\mathbf{p}}M)^{\perp},$$

onde $(T_p M)^\perp$ é o complemento ortogonal de $T_p M$ em $T_p \bar{M}$, $p \in M$, podemos escrever

$$v = v^T + v^\perp, \quad v^T \in T_p M, v^\perp \in (T_p M)^\perp.$$

Denominamos v^T a componente tangencial de v e v^\perp a componente normal de v . Além disso, usando o difeomorfismo ϕ podemos estender campos de vetores X, Y de M definidos em $f(U) \cap \bar{U}$, a campos de vetores \bar{X}, \bar{Y} definidos em \bar{U} tal que

$$\bar{X}|_U = X.$$

A conexão Riemanniana de \bar{M} será indicada por $\bar{\nabla}$. Se X e Y são campos locais de vetores em M e \bar{X}, \bar{Y} são extensões locais a \bar{M} , definimos:

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^T$$

Lema 2.2. *A conexão Riemanniana em M relativa à métrica induzida de \bar{M} por f , é ∇ , definida acima e, independente das extensões \bar{X} e \bar{Y} .*

Demonstração. Vide [1]. □

Definição 2.19. *(Campo Normal) Sejam $f : M \rightarrow \bar{M}$ uma imersão isométrica, $U \subset M$ uma vizinhança de $p \in M$ tal que $f(U) \subset \bar{M}$ aberto e $f(U) \in \bar{U}$. O campo \bar{X} diz-se normal a M se $\bar{X}_p \in (T_p M)^\perp$.*

Dessa forma, se X e Y são campos locais em M

$$B(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y \tag{2.2}$$

é um campo local em \bar{M} normal a M .

Observação 2.1. *Por [1], temos que:*

(a) $B(X, Y)$ não depende das extensões \bar{X}, \bar{Y} . Portanto $B(X, Y)$ está bem definida.

(b) Indicaremos por $\mathcal{X}(\mathbf{U})^\perp$ o espaço dos vetores diferenciáveis em \mathbf{U} normais a \mathbf{U} .

Proposição 2.9. Se $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbf{U})$, a aplicação $B : \mathcal{X}(\mathbf{U}) \times \mathcal{X}(\mathbf{U}) \longrightarrow \mathcal{X}(\mathbf{U})^\perp$ dada por

$$B(X, Y) = (X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{x}} \bar{Y} - \nabla_x Y$$

é bilinear e simétrica.

Demonstração. Vide [1]. □

Como B é bilinear, concluímos, exprimindo B em um sistema de coordenadas, que o valor de $B(X, Y)(\mathbf{p})$ depende apenas de $X(\mathbf{p})$ e $Y(\mathbf{p})$.

Agora podemos definir a segunda forma fundamental. Sejam $\mathbf{p} \in M$ e $\eta \in (T_{\mathbf{p}}M)^\perp$. A aplicação $H_\eta : T_{\mathbf{p}}M \times T_{\mathbf{p}}M \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(x, y) = \langle B(X, Y), \eta \rangle, \quad x, y \in T_{\mathbf{p}}M, \quad (2.3)$$

é, pela proposição (1.9), uma forma bilinear simétrica.

Definição 2.20. Seja $\mathbf{p} \in M$ e $\eta \in (T_{\mathbf{p}}M)^\perp$. A forma quadrática $\Pi_{\mathbf{p}}M$ definida em $T_{\mathbf{p}}M$ por

$$\Pi_\eta(x) = H_\eta(x, x) = \langle B(x, x), \eta \rangle \quad (2.4)$$

é definida a segunda forma fundamental de f em \mathbf{p} segundo o vetor normal η .

Observação 2.2. (a) Às vezes se utiliza também a expressão **segunda forma fundamental** para designar a aplicação B que em cada $\mathbf{p} \in M$ é uma aplicação bilinear, simétrica, tomando valores em $(T_{\mathbf{p}}M)^\perp$.

(b) Associada á aplicação H_η temos a aplicação linear auto adjunta $A_\eta : T_{\mathbf{p}}M \longrightarrow T_{\mathbf{p}}M$ definida por

$$\langle A_\eta(x), y \rangle = H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle.$$

onde $x, y \in T_{\mathbf{p}}M$. O operador A_η é chamado de **operador forma**.

Proposição 2.10. Seja $\mathbf{p} \in M$, $x \in T_{\mathbf{p}}M$ e $\eta \in (T_{\mathbf{p}}M)^\perp$. Seja N uma extensão local de η normal a M . Então

$$A_\eta(x) = -(\bar{\nabla}_x N)^\top.$$

Demonstração. Vide [1]. □

Considerando o caso particular em que a codimensão da imersão é 1, ou seja, $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$ e uma imersão isométrica; $f(M) \subset \bar{M}$ é então denominada uma hipersuperfície.

Sejam $f(M) \subset \bar{M}$ uma hipersuperfície, $p \in M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$, $|\eta| = 1$. Como $A_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$ é auto-adjunta, existe uma base ortonormal de $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $T_p M$ formada por autovetores com autovalores associados $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, isto é, $A_\eta(e_i) = \lambda_i e_i$, $1 \leq i \leq n$. Supondo que M e \bar{M} são orientáveis e estão orientadas então o vetor η fica univocamente determinado se exigirmos que $\{e_1, \dots, e_n, \eta\}$ uma base orientada na orientação de \bar{M} . Neste caso, denominamos as e_i direções principais e os $\lambda_i = k_i$ curvaturas principais da imersão f . O operador forma $A = A_\eta$ é chamado de **operador de Weingarten** associado à segunda forma fundamental. Neste caso, vale a igualdade $A_\eta = -(\bar{\nabla}_X N)$ (Basta usar o fato de que $|\eta| = \langle N, N \rangle = 1$ e derivar a função $\langle N, N \rangle = 1$ na direção do campo X .) As funções simétricas de $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são os invariantes da imersão. Por exemplo: $\det(A_\eta) = \lambda_1 \dots \lambda_n$ é denominada a curvatura de Gauss-Kronecker de f e $\frac{1}{n} \text{tr}(A_\eta) = \frac{1}{n}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$ é denominado a curvatura média de f . Um caso importante ocorre quando $\bar{M} = \mathbb{R}^{n+1}$. Neste caso, podemos dar uma interpretação geométrica interessante de A_η . Inicialmente, seja N uma extensão local de η , unitária e normal a M . Seja $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \|x\| = 1\}$ a esfera unitária de \mathbb{R}^{n+1} e defina a aplicação normal de Gauss, $g : M^n \rightarrow S^n$, trasladando a origem do campo N para a origem do \mathbb{R}^{n+1} e fazendo

$$g(q) = \text{ponto final do trasladado de } N(q).$$

como $T_p M$ e $T_{g(q)}(S^n)$ são paralelos, podemos identifica-los, e $dg_q : T_q M \rightarrow T_q M$ é dada por

$$dg_q(v) = \frac{d}{dt}(N \circ c(t))_{t=0} = \bar{\nabla}_v N = (\bar{\nabla}_v N)^\perp = -A_\eta(v),$$

onde $c : (-\epsilon, \epsilon)M$ é uma curva com $c(0) = q$, $c'(0) = v$. Segue-se que $-A_\eta$ é a derivada da aplicação normal de Gauss.

Definição 2.21. (*Imersão Geodésica*) Uma imersão $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+m}$ é geodésica em $p \in M$ se para todo $\eta \in (T_p M)^\perp$, a segunda forma fundamental II_η é identicamente nula em p , o que equivale a dizer que B é nula em p . A imersão f é totalmente geodésica se ela é geodésica para todo $p \in M$.

Proposição 2.11. *Uma imersão $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+m}$ é geodésica em $p \in M$ se, e somente se, toda geodésica γ de M partindo de p é geodésica em \bar{M} .*

Demonstração. Vide [1]. □

Exemplo 2.4. *Qualquer espaço afim em \mathbb{R}^n é totalmente geodésico, pois as geodésicas (as quais são retas) coincidem nos dois casos.*

Definição 2.22. *(Imersão Mínima) Uma imersão $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+m}$ é mínima se para todo $p \in M$ e todo $\eta \in (T_p M)^\perp$ tem-se o que o traço de A_η é zero, isto é, $\text{tr}(A_\eta) = 0$.*

Observação 2.3. (a) *(Vetor Curvatura Média) Seja $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{m+n}$ uma imersão, $p \in M$ e E_1, \dots, E_m um referencial ortonormal local de vetores em $\mathcal{X}(U)^\perp$, onde $U \subset M$ é uma vizinhança de p na qual f é um mergulho, podemos escrever, em p ,*

$$B(x, y) = \sum_{i=1}^m H_i(x, y) E_i, \quad x, y \in T_p M, \quad \text{onde } H_i = H_{E_i}, \text{ isto é,}$$

$$B(x, y) = \sum_{i=1}^m H_{E_i}(x, y) E_i = \sum_{i=1}^m \langle A_{E_i}(x), y \rangle E_i.$$

O vetor normal dado por

$$\vec{H}(p) = \vec{H} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m (\text{traço } A_i) E_i \tag{2.5}$$

onde $A_i = A_{E_i}$, é chamado o **vetor curvatura média** de f . Explicitamente, como o traço de um operador linear é independente da base, seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial local em U , portanto uma base de $T_p M$ para cada $p \in M$, o traço de A_i (em cada $p \in M$) é dado por

$$\text{tr}(A_i) = \sum_{j=1}^n \langle A_i(e_j), e_j \rangle.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \vec{H}(p) &= \vec{H} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m (\text{traço } A_i) E_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^n \langle A_i(e_j), e_j \rangle \right] E_i \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^n \langle B(e_j, e_j), E_i \rangle \right] E_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \langle B(e_j, e_j), E_i \rangle E_i \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^m \langle B(e_j, e_j), E_i \rangle \right] E_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^m H_{E_i}(e_j, e_j) E_i \right] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n B(e_j, e_j). \end{aligned}$$

(b) *É claro que f é mínima se e só se $H(p) = 0$, para toda $p \in M$.*

(c) *\vec{H} não depende do referencial E_i escolhido.*

2.6 Grupos de Lie

Nesta seção, a palavra diferenciável significará de classe C^∞ .

Definição 2.23. *Um grupo de Lie G é uma variedade diferenciável dotada de uma estrutura de grupo, definida por uma operação $*$, de modo que a aplicação*

$$\begin{aligned} \mu : G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto \mu(x, y) = x * y^{-1} \end{aligned}$$

é diferenciável, onde y^{-1} denota o elemento inverso de y .

Decorre imediatamente da definição que, num grupo de Lie G , para cada $x \in G$ as aplicações

$$\begin{aligned} L_x : G &\longrightarrow G \\ y &\longmapsto x * y \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} R_x : G &\longrightarrow G \\ y &\longmapsto y * x \end{aligned}$$

são difeomorfismos de G . Estas aplicações são chamadas, respectivamente, *translação à esquerda* por x e *translação à direita* por x . Indicaremos por e o elemento neutro de G .

Exemplo 2.5. *O \mathbb{R}^n com a operação de adição e a estrutura diferenciável usual é um grupo de Lie.*

Exemplo 2.6. *Seja $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$, onde \mathbb{C} é o conjunto dos números complexos. Consideremos em \mathbb{S}^1 a estrutura de grupo multiplicativo: se $\alpha, \beta \in \mathbb{S}^1$, então $\alpha \cdot \beta$ é o produto dos números complexos α e β . Como a aplicação*

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ (x, y) &\longmapsto x/y = \frac{x\bar{y}}{|y|^2} \end{aligned}$$

é diferenciável e sua restrição a \mathbb{S}^1 tem imagen em \mathbb{S}^1 , \mathbb{S}^1 é um grupo de Lie.

Exemplo 2.7. O produto de dois grupos de Lie G e H é um grupo de Lie $G \times H$, com a estrutura de variedade produto e produto direto de grupos:

$$(g_1, h_1) \odot (g_2, h_2) = (g_1 \cdot g_2, h_1 \cdot h_2),$$

quaisquer que sejam g_1, g_2 em G e h_1, h_2 em H . Dessa forma, a partir dos exemplos (1.5) e (1.6) concluímos que o toro n -dimensional $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ e o cilindro $T^n \times \mathbb{R}^m$ são grupos de Lie.

Exemplo 2.8. A variedade $GL(n, \mathbb{R})$ das matrizes reais $n \times n$ inversíveis, munido com a operação usual de multiplicação de matrizes e com a estrutura diferenciável usual do \mathbb{R}^{n^2} é um grupo de Lie. De fato, note que as funções abaixo são diferenciáveis

$$f : GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow GL(n, \mathbb{R}) \quad \text{dada por } f(A, B) = AB \quad e$$

$$g : GL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow GL(n, \mathbb{R}) \quad \text{dada por } g(A) = A^{-1}.$$

De forma análoga pode-se mostrar que $GL(n, \mathbb{C})$ admite a estrutura de grupo de Lie. Os grupos $GL(n, \mathbb{R})$ e $GL(n, \mathbb{C})$ são chamados grupos lineares.

Definimos agora a noção de campos invariantes à esquerda em um grupo de Lie G .

Definição 2.24. Dizemos que um campo X de vetores tangentes a um grupo de Lie G é invariante à esquerda quando $X_{xy} = dL_x(X_y)$, quaisquer que sejam $x, y \in G$. Analogamente, X é invariante à direita quando $dR_x(X_y) = X_{yx}$, quaisquer que sejam $x, y \in G$.

O conjunto dos campos invariantes à esquerda de um grupo de Lie G será denotado por LG . Um campo X invariante à esquerda (respectivamente à direita) fica completamente determinado quando se conhece X_e , ou seja, o valor do campo na identidade e , pois $X_x = dL_x(X_e)$. Note que LG é também um espaço vetorial, pois dados $X, Y \in LG$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\begin{aligned} (X + \alpha Y)_{xy} &= X_{xy} + \alpha Y_{xy} \\ &= dL_x(X_y) + \alpha dL_x(Y_y) \\ &= dL_x(X_y + \alpha Y_y) \\ &= dL_x(X + \alpha Y)_y. \end{aligned}$$

Donde $X + \alpha Y \in \text{LG}$.

Proposição 2.12. *A aplicação*

$$\begin{aligned} \alpha : \text{LG} &\longrightarrow \text{T}_e\text{G} \\ X &\longmapsto \alpha(X) = X_e, \end{aligned}$$

é um isomorfismo de espaços vetoriais.

Demonstração. É claro que α é linear. De fato, dados $X, Y \in \text{LG}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\alpha(X + \lambda Y) = (X + \lambda Y)_e = X_e + \lambda Y_e = \alpha(X) + \lambda \alpha(Y).$$

Agora, mostremos que α é sobrejetora. Dado $Z \in \text{T}_e\text{G}$, defina um campo X em G por $X_x = dL_x(Z)$. Temos,

$$X_{xy} = dL_{xy}(Z) = dL_x \circ dL_y(Z) = dL_x(X_y).$$

Portanto, $X \in \text{LG}$. Além disso,

$$\alpha(X) = X_e = dL_e(Z) = I(Z) = Z.$$

Finalmente, α é injetora, pois se

$$\alpha(X) = \alpha(Y),$$

temos que

$$X_e = Y_e.$$

E, dado $x \in G$, temos

$$X_x = dL_x(X_e) = dL_x(Y_e) = Y_x.$$

Logo, $X = Y$. □

Proposição 2.13. *Se X é um campo invariante à esquerda em G , então X é diferenciável.*

Demonstração. Vide [2] □

Definição 2.25. *Uma álgebra de Lie sobre \mathbb{R} é um espaço vetorial real \mathfrak{g} , munido de uma operação bilinear $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, denominada colchete de Lie, satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. $[X, Y] = -[Y, X]$ (*anticomutatividade*)
2. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (*identidade de Jacobi*)

para todo X, Y e Z pertencentes a \mathfrak{g} .

Vejamos alguns exemplos de álgebra de Lie.

Exemplo 2.9. O espaço vetorial $M(n, \mathbb{R})$ das matrizes quadradas reais com o colchete definido por

$$[A, B] = AB - BA,$$

onde AB indica o produto das matrizes A e B .

Exemplo 2.10. \mathbb{R}^3 com o colchete dado por

$$[x, y] = x \times y,$$

onde \times indica o produto vetorial usual de \mathbb{R}^3 .

Exemplo 2.11. Seja M uma variedade diferenciável. $\mathcal{X}(M)$ é um espaço vetorial com as operações de soma de campos e multiplicação de um número real por um campo, a saber

$$(X + Y)_x := X_x + Y_x \quad e \quad (\lambda X)_x = \lambda X_x.$$

Para $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ e $x \in M$, definimos o colchete $[X, Y]$ como o campo em $\mathcal{X}(M)$ tal que

$$[X, Y]_x(f) = X_x(Yf) - Y_x(Xf),$$

Assim temos que $\mathcal{X}(M)$ é uma álgebra de Lie. Mais detalhes encontram-se em [2]

Definição 2.26. Sejam M e N variedades diferenciáveis e $\varphi : M \rightarrow N$ uma aplicação de classe C^∞ . Dizemos que os campos $X \in \mathcal{X}(M)$ e $Y \in \mathcal{X}(N)$ são φ -relacionados, se $d\varphi \circ X = Y \circ \varphi$.

Proposição 2.14. *Seja $\varphi : M \rightarrow N$ uma aplicação de classe C^∞ , onde M, N são variedades diferenciáveis. Se $X, X_1 \in \mathcal{X}(M)$ são φ -relacionados, respectivamente, com $Y, Y_1 \in \mathcal{X}(N)$, então $[X, X_1]$ é φ -relacionado com $[Y, Y_1]$.*

Demonstração. mostremos que para cada $p \in M$ e cada $f \in C^\infty(N)$ vale a igualdade

$$d\varphi[X, X_1]_p(f) = [Y, Y_1]_{\varphi(p)}(f).$$

De fato,

$$\begin{aligned} d\varphi[X, X_1]_p(f) &= [X, X_1]_p(f \circ \varphi) \\ &= X_p(X_1(f \circ \varphi)) - (X_1)_p(X(f \circ \varphi)) \\ &= X_p(d\varphi(X_1))(f) - (X_1)_p(d\varphi(X))(f) \\ &= X_p(Y_1 \circ \varphi)(f) - (X_1)_p(Y \circ \varphi)(f) \\ &= X_p(Y_1(f) \circ \varphi) - (X_1)_p(Y(f) \circ \varphi) \\ &= d\varphi(X_p)(Y_1(f)) - d\varphi(X_1)_p(Y(f)) \\ &= Y_{\varphi(p)}(Y_1(f)) - d\varphi(X_1)_p(Y(f)) \\ &= Y_{\varphi(p)}(Y_1(f)) - (Y_1)_{\varphi(p)}(Y(f)) \\ &= [Y, Y_1]_{\varphi(p)}(f). \end{aligned}$$

□

Corolário 2.1. *Se $X, Y \in \text{LG}$, então $[X, Y] \in \text{LG}$.*

Demonstração. Vide [2]

□

Exemplo 2.12. *Seja G um grupo de Lie e LG o espaço dos campos invariantes à esquerda. LG é um espaço vetorial e pelo Corolário (1.1) é fechado em relação a operação de colchete de campos definida no exemplo (1.11). Assim, LG é uma álgebra de Lie.*

Já vimos na Proposição (1.10) que LG e $T_e G$ são isomorfos como espaços vetoriais. Assim, podemos introduzir em $T_e G$ uma estrutura de álgebra de Lie passando o colchete de campos em LG para $T_e G$.

Definição 2.27. *Seja G um grupo de Lie. Definimos a álgebra de Lie de G como sendo o espaço vetorial tangente a G no ponto e , $T_e G$, onde e é o elemento neutro de G .*

Assim, para $\widehat{V}, \widehat{W} \in T_e G$, definimos $[\widehat{V}, \widehat{W}] := [W, V]_e$, onde $V, W \in LG$ são tais que

$$V_x = dL_x \widehat{V} \quad \text{e} \quad W_x = dL_x \widehat{W}.$$

Denotaremos por \widehat{G} a álgebra de Lie do grupo de Lie G .

Definição 2.28. *Uma métrica Riemanniana num grupo de Lie G é invariante à esquerda se as translações à esquerda são isometrias, ou seja,*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle d(L_x)_y \mathbf{u}, d(L_x)_y \mathbf{v} \rangle_{L_x(y)} \quad \forall x, y \in G, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_y G.$$

Analogamente define-se métrica invariante à direita.

Uma métrica que é invariante a esquerda e a direita diz-se bi-invariante. Para introduzir uma métrica invariante à esquerda em G podemos, por exemplo, tomar um produto interno qualquer em $T_e G := \widehat{G}$ e definir

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_x = \langle d(L_{x^{-1}})_x \mathbf{u}, d(L_{x^{-1}})_x \mathbf{v} \rangle_e, \quad \forall x \in G, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_x G.$$

Isto define, de fato, uma métrica Riemanniana em G , pois L_x depende diferenciavelmente de x , e tal métrica será invariante à esquerda.

Uma **métrica homogênea** em uma variedade M é uma métrica Riemanniana tal que dados dois pontos $x, y \in M$ existe uma isometria de M que leva x em y . Com tal métrica, M é dita *homogênea*.

Um grupo de Lie com métrica invariante à esquerda é uma **variedade homogênea**, no sentido que: dados $x, y \in G$ existe uma isometria de G que leva x em y , a saber

$$\begin{aligned} L_{yx^{-1}} : G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto L_{yx^{-1}}(x) = yx^{-1}x = y \end{aligned}$$

Seja G um grupo de Lie com métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ invariante à esquerda. Se $X, Y \in LG$ então $\langle X, Y \rangle$ é constante, pois

$$\langle X_x, Y_y \rangle = \langle (dL_x)_e X_e, (dL_x)_e Y_e \rangle = \langle X_e, Y_e \rangle. \quad (2.6)$$

Consequentemente, no caso de um Grupo de Lie, a fórmula de Koszul (2.1) reduz-se a

$$2\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle. \quad (2.7)$$

Capítulo 3

Superfícies Translacionais Mínimas no Espaço Hiperbólico

Superfícies translacionais mínimas, como planos geodésicos e do tipo Scherk surgem em outros ambientes geométricos que não são espaços euclidianos. Neste capítulo e no próximo estaremos interessados em considerar tais exemplos no espaço hiperbólico e no espaço Sol_3

3.1 Conceitos Básicos no Espaço Hiperbólico

A ausência de uma estrutura afim no espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 não permite dar um conceito intrínseco de superfície translacional como no ambiente Euclidiano. O modelo que consideramos de espaço hiperbólico é o de semi espaço

$$\mathbb{R}_+^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_3 > 0\},$$

equipado com a métrica em um sistema global de cartas induzido pela identidade $i: \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$,

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{x_3^2}.$$

Neste modelo, nós podemos considerar superfícies que são somas de curvas planares, isto é, curvas de \mathbb{R}_+^3 contidas em planos coordenados Euclidianos. As coordenadas x_1, x_2

são permutáveis, o que não ocorre para a coordenada x_3 , e isso é uma diferença do espaço Euclidiano, no qual a escolha da coordenada x_3 não é significativa, isto é, o grupo das permutações está contido no grupo dos isomorfismos.

Sejam X e Y campos vetoriais em \mathbb{R}^3 , $x_3 > 0$, seu produto interno euclidiano é dado por

$$X \cdot Y = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$$

enquanto que seu produto interno hiperbólico é

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{x_3} X \cdot Y$$

cada uma dessas métricas nos dá uma noção da derivada covariante que vamos representar por $\bar{D}_X Y$, associada à métrica Euclidiana, e $\bar{\nabla}_X Y$, associada à métrica hiperbólica. Essas duas derivadas estão relacionadas como estabelece o seguinte lema:

Lema 3.1. $\langle Z, \bar{\nabla}_Y X \rangle = \frac{1}{x_3} Z \cdot \bar{D}_Y X + \frac{1}{x_3} (-X[x_3]Y \cdot Z - Y[x_3]Z \cdot X + Z[x_3]X \cdot Y)$

Demonstração. Nós sabemos que

$$Y \langle Z, X \rangle = \langle \bar{\nabla}_Y Z, X \rangle + \langle Z, \bar{\nabla}_Y X \rangle$$

Por outro lado, nós podemos escrever:

$$\begin{aligned} Y \langle Z, X \rangle &= Y \left[\frac{1}{x_3^2} Z \cdot X \right] \\ &= - \left(\frac{2}{x_3^3} \right) Y[x_3]Z \cdot X + \frac{1}{x_3^2} \bar{D}_Y Z \cdot X + \frac{1}{x_3^2} \bar{D}_Y X \cdot Z \end{aligned}$$

Fórmulas similares podem ser obtidas para $X \langle Y, Z \rangle$ e $Z \langle X, Y \rangle$. Disto segue que

$$\langle \bar{\nabla}_Y Z, X \rangle + \langle Z, \bar{\nabla}_Y X \rangle = -\frac{2}{x_3^3} Y[x_3]Z \cdot X + \frac{1}{x_3^2} \bar{D}_Y Z \cdot X + \frac{1}{x_3^2} \bar{D}_Y X \cdot Z$$

$$\langle \bar{\nabla}_X Z, Y \rangle + \langle Z, \bar{\nabla}_X Y \rangle = \frac{-2}{x_3^3} X[x_3]Z \cdot Y + \frac{1}{x_3^2} \bar{D}_X Z \cdot Y + \left(\frac{1}{x_3^2} \bar{D}_X Y \cdot Z \right)$$

$$\langle \bar{\nabla}_Z Y, X \rangle + \langle Y, \bar{\nabla}_Z X \rangle = \frac{-2}{x_3^3} Z[x_3]Y \cdot X + \frac{1}{x_3^2} \bar{D}_Z Y \cdot X + \frac{1}{x_3^2} \bar{D}_Z X \cdot Y$$

Adicionando as primeiras duas equações e subtraindo a última, nós obtemos:

$$\begin{aligned} & \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [X, Z], Y \rangle + \langle Z, \bar{\nabla}_Y X \rangle + \langle Z, \bar{\nabla}_X Y \rangle \\ &= \frac{2}{x_3^2} \{ Z[x_3]Y \cdot X - Y[x_3]Z \cdot X - X[x_3]Z \cdot Y \} + \\ & \quad \frac{1}{x_3^2} \bar{D}_Y Z \cdot X + \frac{1}{x_3^2} \bar{D}_Y X \cdot Z + \frac{1}{x_3^2} \bar{D}_X Z \cdot Y + \\ & \quad \frac{1}{x_3^2} \bar{D}_X Y \cdot Z - \frac{1}{x_3^2} \bar{D}_Z Y \cdot X - \frac{1}{x_3^2} \bar{D}_Z X \cdot Y \end{aligned}$$

Usando o fato de que

$$[X, Y] = \bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X = \bar{D}_X Y - \bar{D}_Y X$$

nós podemos cancelar quatro termos na equação acima e obter o resultado. \square

Se $M \subset \mathbb{H}^3$ é uma superfície então a restrição de M para as duas métricas mencionadas dá origem a métricas distintas e conexões distintas em M . Estas conexões são representadas por $\nabla_X Y$ e $D_X Y$. Seja η e N representantes dos campos normais de M , onde o primeiro é um campo no sentido euclidiano e o segundo é um campo no sentido hiperbólico. Então nós podemos assumir

$$N = x_3 \eta.$$

Defina $AX = -\bar{\nabla}_X N$. É claro que, se X e Y são campos tangentes em M , então nós temos:

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \langle AX, Y \rangle.$$

Uma fórmula similar é verdade para o caso euclidiano.

Se $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$, $\alpha(0) = p$ é uma curva diferenciável, parametrizada pelo arco-tangente no sentido hiperbólico,

$$\bar{k} = \langle \bar{\nabla}_{\alpha'} \alpha', N \rangle$$

Similarmente, se $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$, $\beta(0) = p$ é também uma curva diferenciável, parametrizada pelo arco-tangente no sentido euclidiano, então sua curvatura normal no sentido Euclidiano é dada por:

$$k = \bar{D}_{\beta'} \beta' \cdot \eta$$

Lema 3.2. Para uma dada curva em M nós temos $\bar{k} = kx_3 + \eta_{x_3}$, onde η_{x_3} significa a última componente do vetor η .

Demonstração. Dado uma curva em M , representamos por T seu campo tangente no sentido hiperbólico e por t seu vetor untário no sentido euclidiano. Nós então temos: $N = x_3\eta$. $T = x_3t$ e $\langle N, T \rangle$. Daí,

$$1 = \langle N, N \rangle = \frac{1}{x_3^2} x_3^3 \eta \cdot \eta$$

$$1 = \langle T, T \rangle = \frac{1}{x_3^2} x_3^2 t \cdot t$$

Usando o (lema 2.1) segue-se que:

$$\begin{aligned} \bar{k} &= \langle \bar{\nabla}_T T, N \rangle \\ &= \frac{1}{x_3^2} \bar{D}_T T \cdot N + \frac{1}{x_3^3} N[x_3] T \cdot T \\ &= \frac{1}{x_3^2} \bar{D}_{x_3 t} x_3 t \cdot x_3 \eta + \frac{1}{x_3^3} x_3 \eta [x_3] z_3^2 t \cdot t \\ &= x_3 \bar{D}_t t \cdot \eta + t[x_3] t \cdot \eta + \eta[x_3] \\ &= x_3 k + \eta[x_3] \\ &= x_3 k + \eta_3 \end{aligned}$$

□

O vetor normal unitário em M no sentido hiperbólico é dado por

$$N = x_3 \eta.$$

Represente por h e H , respectivamente, as curvaturas média de M no espaço euclidiano e no espaço hiperbólico. Assim, um caminho simples para calcular a curvatura média num ponto P é considerar um referencial ortonormal em uma vizinhança do ponto e então calcular a média das curvaturas nas direções dos vetores do referencial. Seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ um referencial ortonormal no espaço hiperbólico sobre M . Represente por \bar{k}_i a curvatura normal (hiperbólica) de M na direção e_i . Então nos temos

$$H = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 k_i$$

Pelo (lema 2.2) nos obtemos:

$$\sum_{i=1}^3 \bar{k}_i = x_3 \sum_{i=1}^3 k_i + n\eta_3$$

Daí,

$$H = x_3 h + \eta_3 \tag{3.1}$$

Neste capítulo usaremos a notação $'$ para representar as derivadas tanto em relação a x como em relação a y .

3.2 Superfícies do tipo I

Definição 3.1. *Considere o modelo semi-espaço de \mathbb{H}^3 . Uma superfície M no espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 é uma superfície translacional do tipo I, se ela é dada por uma imersão $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^3$ definida por*

$$X(x, y) = (x, y, f(x) + g(y)), \quad (x, y) \in U \tag{3.2}$$

onde f e g são funções suaves em abertos de \mathbb{R} com, $f(x) + g(y) > 0, \quad \forall x, y$.

Seja M uma superfície translacional do tipo I dada pela parametrização (3.2). Já é bastante conhecido da Geometria de Curvas e Superfícies, que as expressões de h e η_3 são dadas por

$$h = \frac{1}{2} \frac{(1 + g'^2)f'' + (1 + f'^2)g''}{(1 + f'^2 + g'^2)^{3/2}}$$

e

$$\eta_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2 + g'^2}}.$$

Se a superfície é mínima, isto é, $H = 0$ em M , nós temos de (3.1)

$$H = (f + g) \frac{(1 + g'^2)f'' + (1 + f'^2)g''}{(1 + f'^2 + g'^2)^{3/2}} + \frac{2}{\sqrt{1 + f'^2 + g'^2}} = 0$$

Logo, podemos reescrever a expressão acima como:

$$(f + g) \left(\frac{f''}{1 + f'^2} + \frac{g''}{1 + g'^2} \right) = -2 \frac{1 + f'^2 + g'^2}{(1 + f'^2)(1 + g'^2)}. \tag{3.3}$$

Diferenciando (3.3) com relação a x e a y , segue que

$$f' \left(\frac{g''}{1+g'^2} \right)' + g' \left(\frac{f''}{1+f'^2} \right)' = \frac{8f'g'f''g''}{(1+f'^2)^2(1+g'^2)^2},$$

ou, assumindo $f'g' \neq 0$ e dividindo por $f'g'$,

$$\frac{1}{g'} \left(\frac{g''}{1+g'^2} \right)' + \frac{1}{f'} \left(\frac{f''}{1+f'^2} \right)' = \frac{8f''g''}{(1+f'^2)^2(1+g'^2)^2}. \quad (3.4)$$

Veja que o lado esquerdo desta equação é a soma de uma função que depende unicamente de x com uma função que depende exclusivamente de y , então derivando (3.4) com relação a x e a y respectivamente implica que o lado esquerdo será nulo para qualquer x, y , implicando que

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\frac{f''g''}{(1+f'^2)^2(1+g'^2)^2} \right] = 0,$$

ou, simplificando:

$$8(f'''(1+f'^2) - 4f'f''^2)(g'''(1+g'^2) - 4g''^2g') = 0$$

ou ainda,

$$(-4f'f''^2 + (1+f'^2)f''')(-4g'g''^2 + (1+g'^2)g''') = 0.$$

Sem perda de generalidade podemos assumir que,

$$-4f'f''^2 + (1+f'^2)f''' = 0,$$

ou seja, $\frac{4f'f''}{(1+f'^2)} = \frac{f'''}{f''}$, isto é, $\frac{2(f'^2)'}{1+f'^2} = \frac{(f'')'}{f''}$. Assim uma primeira integração desta equação diferencial ordinária nos dá,

$$2 \ln(1+f'^2) + c = \ln |f''|,$$

e exponenciando obtemos, $f'' = \mathbf{a}(1 + f'^2)^2$, para alguma constante \mathbf{a} . Substituindo em (3.4) nós obtemos,

$$\frac{1}{g'} \left(\frac{g''}{1 + g'^2} \right)' + 2\mathbf{a}f'' = 8\mathbf{a} \frac{g''}{(1 + g'^2)^2}. \quad (3.5)$$

Assim, podemos distinguir os seguintes casos:

1) Caso $\mathbf{a} = 0$.

Se $\mathbf{a} = 0$ então temos, $f'' = \mathbf{a}(1 + f'^2)^2 = 0$, ou seja, $f(x) = \mathbf{m}x + \mathbf{n}$, com $\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{R}$. Temos também de (3.5) que $g'' = \mathbf{b}(1 + g'^2)$, para alguma constante \mathbf{b} . Substituindo estas expressões para f e g'' em (3.3) obtem-se

$$((\mathbf{m}x + \mathbf{n}) + g) \left(\frac{\mathbf{b}(1 + g'^2)}{(1 + g'^2)} \right) = -2 \frac{1 + \mathbf{m}^2 + g'^2}{(1 + \mathbf{m}^2)(1 + g'^2)}$$

ou ainda,

$$\mathbf{b}(\mathbf{m}x + \mathbf{n} + g(y)) = -2 \frac{1 + \mathbf{m}^2 + g'^2}{(1 + \mathbf{m}^2)(1 + g'^2)}$$

Derivando esta última igualdade com relação a x , obtemos $\mathbf{b}\mathbf{m} = 0$.

i) Assumindo $\mathbf{b} \neq 0$.

Se $\mathbf{b} \neq 0$ então $\mathbf{m} = 0$. Assim concluímos que

$$\mathbf{b}(\mathbf{n} + g(y)) = -2$$

Isso implica que g é uma função constante, e assim, $g'' = 0$ e portanto $\mathbf{b} = 0$. Isto gera uma contradição, pois estamos supondo $\mathbf{b} \neq 0$.

i) Assumindo $\mathbf{b} = 0$:

Se $b = 0$, então $g'' = b(1 + g'^2) = 0$, e portanto, $g(y) = py + q$; $p, q \in \mathbb{R}$. Logo, substituindo $f'' = 0 = g''$ em (3.4) vemos que:

$$(f + g) \left(\frac{f''}{1 + f'^2} + \frac{g''}{1 + g'^2} \right) = 0 = -2 \frac{1 + f'^2 + g'^2}{(1 + f'^2)(1 + g'^2)},$$

o que é uma contradição novamente, pois o numerador $1 + f'^2 + g'^2$ nunca se anula.

2) Caso $a \neq 0$.

De (3.5) e do fato de x e y serem variáveis independentes, existe uma constante b tal que

$$b = \frac{1}{g'} \left(\frac{g''}{1 + g'^2} \right)' - 8a \frac{g''}{(1 + g'^2)^2} = -2af''$$

Em particular, $2af'' = -b$. Isso implica

$$f'' = -\frac{b}{2a}$$

donde vem, após integração

$$f = -\frac{b}{4a}x^2 + mx + n; \quad m, n \in \mathbb{R}.$$

Desta expressão para função f junto com a equação diferencial $f'' = a(1 + f'^2)^2$, nós obtemos um polinômio de grau 4 em x , a saber,

$$-\frac{b}{2a} = a \left(1 + \left(-\frac{b}{2a}x + m \right)^2 \right)^2. \quad (3.6)$$

Derivando (3.6) com relação a x , obtemos

$$0 = -2b \left(1 + \left(-\frac{b}{2a}x + m \right)^2 \right) \left(-\frac{b}{2a}x + m \right)$$

O que implica,

$$b \left(-\frac{bx}{2a} + m \right) = 0.$$

Isto é, $b = 0$ ou $-\frac{b}{2a}x + m = 0$. Portanto segue que $b = 0$.

Com isso, da identidade (3.6) segue que

$$-\frac{b}{2a} = 0 = a \left(1 + \left(-\frac{bx}{2a} + m \right)^2 \right) \neq 0$$

o que é um absurdo.

Portanto concluímos o seguinte resultado:

Teorema 3.1. *Não existem superfícies translacionais mínimas do tipo I em \mathbb{H}^3 .*

3.3 Superfícies do tipo II

Iniciamos esta seção fazemos a seguinte observação:

Observação 3.1. *Em [9], Lópes provou que as únicas superfícies translacionais mínimas do tipo II em \mathbb{H}^3 eram os planos totalmente geodésicos. Entretanto, há uma lacuna em sua prova que leva a uma má conclusão. No entanto, usando seus argumentos, SEO em [13] caracteriza as superfícies translacionais mínimas como segue.*

Definição 3.2. *Considere o modelo semi-espço de \mathbb{H}^3 . Uma superfície M no espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 é uma superfície translacional do tipo II, se ela é dada por uma imersão $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^3$ definida por*

$$X(x, z) = (x, f(x) + g(z), z), \quad (x, z) \in U \tag{3.7}$$

onde f e g são funções suaves em abertos de \mathbb{R} .

Seja M uma superfície translacional do tipo II. Procedendo como no caso anterior, obtemos

$$h = -\frac{1}{2} \frac{(1 + g'^2)f'' + (1 + f'^2)g''}{(1 + f'^2 + g'^2)^{3/2}}, \quad \eta_3 = \frac{g'}{\sqrt{1 + f'^2 + g'^2}}$$

Assim da equação (3.1), M é mínima em \mathbb{H}^3 quando

$$z \left(\frac{f''}{1 + f'^2} + \frac{g''}{1 + g'^2} \right) = 2g' \frac{1 + f'^2 + g'^2}{(1 + f'^2)(1 + g'^2)} \quad (3.8)$$

Diferenciando (3.8) com relação a x , temos

$$\begin{aligned} z \left(\frac{f''}{1 + f'^2} \right)' &= 2g' \left(\frac{2f'f''(1 + f'^2)(1 + g'^2) - (1 + f'^2 + g'^2)2f'f''(1 + g'^2)}{(1 + f'^2)^2(1 + g'^2)^2} \right) \\ &= \frac{4g'(f'f''(1 + g'^2)g'^2)}{(1 + f'^2)^2(1 + g'^2)^2} \end{aligned}$$

ou seja,

$$z \left(\frac{f''}{1 + f'^2} \right)' = \frac{-4f'f''}{(1 + f'^2)^2} \frac{g'^3}{(1 + g'^2)} \quad (3.9)$$

(a) **Assumindo $f'f'' = 0$.**

Assumindo $f'f'' = 0$ então $f(x) = ax + b$ para algumas constantes a e b . Assim, substituindo em (3.8) temos que

$$zg'' = \frac{2g'(1 + a^2 + g'^2)}{(1 + a^2)}$$

Se for $g' = 0$ então $g = d$ (constante) e a superfície é um plano vertical da forma

$$X(x, z) = (x, ax + b + d, z)$$

Se for $g' \neq 0$ então

$$\frac{g''}{g'(1 + a^2 + g'^2)} = \frac{2}{1 + a^2} \frac{1}{z}$$

Fazendo $g' = h$ e $K = 1 + a^2$, temos o problema:

$$\frac{h'}{h(K + h^2)} = \frac{2}{K} \frac{1}{z}$$

ou seja,

$$\frac{1}{K} \frac{h'}{h} - \frac{h}{K} \frac{h'}{K + h^2} = \frac{2}{K} \frac{1}{z}$$

integrando obtemos

$$\ln |h| - \frac{1}{2} \ln(h^2 + K) = 2 \ln |z| + \ln(c)$$

o que implica,

$$\ln \left(\frac{h}{(h^2 + k)^{1/2}} \right) = \ln |cz^2|$$

ou seja,

$$\frac{h}{\sqrt{h^2 + k}} = cz^2$$

ou

$$h^2(1 - cz^4) = cz^4k$$

com $|z| < 1$. Logo, obtemos

$$g' = \frac{\sqrt{k}cz^2}{\sqrt{1 - cz^4}}$$

Daí segue que

$$g(z) = \sqrt{1 + a^2} \int^z \frac{cz^2}{\sqrt{1 - c^2z^4}} dz \quad \text{onde } c \text{ é uma constante.} \quad (3.10)$$

(b) Assumindo $f'f'' \neq 0$.

Então neste caso pela equação (3.9) vemos que

$$\frac{(f''/(1 + f'^2))'}{-4f'f''/(1 + f'^2)^2} = \frac{g'^3}{z(1 + g'^2)} = a \quad (3.11)$$

onde a é uma constante.

1) Caso $a = 0$.

Se $a = 0$ então $g = \text{constante}$. Logo de (3.8) segue que

$$\frac{f''}{f'^2 + 1} = 0$$

ou seja, $f'' = 0$. Assim temos $f(x) = mx + n$, o que é impossível pois estamos supondo $f'f'' \neq 0$

2) Caso $a \neq 0$.

Suponha agora que $a \neq 0$ em (3.11) então, em particular, como $a \neq 0$ e $z \neq 0$, temos

$$g'^3 - azg'^2 - az = 0 \quad (3.12)$$

Assim, derivando (3.12) em relação a z , implica

$$0 = 3g'^2 g'' - (ag'^2 + 2azg'g'') - a$$

ou seja,

$$g'(3g' - 2az)g'' = a(g'^2 + 1)$$

Como o lado direito da identidade acima é não nulo implica $g' \neq 0$, $(3g' - 2az) \neq 0$ e $g'' \neq 0$. Portanto obtemos

$$g'' = \frac{a(1 + g'^2)}{g'(3g' - 2az)} \quad (3.13)$$

Integrando em (3.11) obtemos;

$$\frac{f''}{1 + f'^2} = 2a \frac{1}{1 + f'^2} + b, \quad \text{para alguma constante } b \in \mathbb{R}.$$

Assim, retornando a (3.8), diretamente obtemos:

$$z \left(b + \frac{2a}{1 + f'^2} + \frac{a}{g'(3g' - 2az)} \right) = 2g' \frac{1 + f'^2 + g'^2}{(1 + f'^2)(1 + g'^2)}$$

Logo, usando a equação (3.11) novamente, obtemos

$$b + \frac{2a}{1 + f'^2} + \frac{a}{g'(3g' - 2az)} = \frac{2g'(1 + f'^2 + g'^2)}{(1 + f'^2)(1 + g'^2)} \frac{(1 + g'^2)a}{g'^3} = 2a \frac{1 + f'^2 + g'^2}{(1 + f'^2)g'^2},$$

ou

$$b + \frac{a}{g'(3g' - 2az)} = 2a \left[\frac{1 + f'^2 + g'^2}{(1 + f'^2)g'^2} - \frac{1}{1 + f'^2} \right] = \frac{2a}{g'^2},$$

isto é,

$$bg'^2(3g'^2 - 2azg') + ag'^2 = 2a(3g'^2 - 2azg'),$$

ou

$$3bg'^3 - 2abzg'^2 - 5ag' + 4a^2z = 0 \tag{3.14}$$

Agora a vamos estudar os casos em que $b = 0$ e $b \neq 0$ respectivamente.

i) Caso $b = 0$:

Se supormos que $b = 0$, então de (3.14) segue que

$$-5ag' + 4a^2z = 0$$

donde

$$g' = \frac{4az}{5} \tag{3.15}$$

Substituindo (3.15) em (3.12) obtemos

$$\frac{64}{125}a^3z^3 - az\left(\frac{16}{25}a^2z^2 + 1\right) = 0,$$

e conseqüentemente temos

$$\frac{-16}{125}a^3z^3 - az = 0. \tag{3.16}$$

Como z varia em um intervalo, a identidade (3.16) vale somente se $a = 0$, ou seja, uma contradição.

ii) Caso $b \neq 0$:

Agora vamos assumir que $b \neq 0$ em (3.14). Ponha $X = g'$. Assim a combinação de (3.12) e (3.14), implica

$$X^3 - azX^2 - az = 0 \quad (1)$$

$$3bX^3 - 2abzX^2 - 5aX + 4a^2z = 0 \quad (2)$$

Multiplicando (1) por $(-3b)$ e somando com (2) obtemos,

$$bzX^2 - 5X + 4az + 3bz = 0 \quad (3.17)$$

e multiplicando (1) por $(-2b)$ e somando com (2) obtemos (2.16) abaixo,

$$bX^3 - 5aX + 4a^2z + 2abz = 0 \quad (3.18)$$

Assim, multiplicando (3.17) por X e (3.18) por $(-z)$ e somando obtemos

$$-5X^2 + 3z(3a + b)X - 2az^2(2a + b) = 0. \quad (3.19)$$

Portanto de (3.17) e (3.19), temos

$$\begin{aligned} & -5 \left(\frac{5}{bz}X - \frac{4a}{b} - 3 \right) + 3z(3a + b)X - 2az^2(2a + b) \\ &= -\frac{25}{bz}X + \frac{20}{b}a + 15 + 3z(3a + b)X - 2az^2(2a + b) = 0 \end{aligned}$$

consequentemente,

$$X(-25 + (9a + 3b)bz^2) + (20a + 15b - 4a^2b^2z^2 - 2abz^2)z = 0$$

ou seja,

$$X = \frac{(-20a - 15b + 4a^2bz^2 + 2ab^2z^2)z}{(9a + 3b)bz^2 - 25}.$$

ou,

$$X = \frac{(-5(4a + 3b) + 2ab(2a + b)z^2)z}{3(3a + b)bz^2 - 25}$$

Fazendo

$$\begin{cases} M = -5(4a + 3b) \\ N = 2ab(2a + b) \\ P = 3(3a + b)b \\ Q = -25, \end{cases}$$

temos

$$X = \frac{(M + Nz^2)z}{Pz^2 + Q} \tag{3.20}$$

Substituindo (3.20) em (3.17) obtemos:

$$bz \left[\frac{(M + Nz^2)z}{Pz^2 + Q} \right]^2 - 5 \left[\frac{(M + Nz^2)z}{Pz^2 + Q} \right] + (4a + 3b)z = 0$$

Daí,

$$\begin{aligned} & bz(M + Nz^2)^2z^2 - 5(M + Nz^2)(Pz^2 + Q)z + (4a + 3b)z(Pz^2 + Q)^2 = \\ & = I + II + III \\ & = 0 \end{aligned}$$

Veja que,

$$\begin{aligned} I & = bz(M + Nz^2)^2z^2 \\ & = bz^3(M^2 + 2MNz^3 + N^2z^4) \\ & = bN^2z^7 + 2MNBz^5 + bM^2z^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{II} &= -5(M + Nz^2)(Pz^2 + Q)z \\
 &= -5z(NPz^4 + (PM + NQ)z^2 + MQ) \\
 &= -5NPz^5 - 5(PM + NQ)z^3 - 5MQz
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{III} &= (4a + 3b)z(Pz^2 + Q)^2 \\
 &= (4a + 3b)z(p^2z^4 + 2PQz^2 + Q^2) \\
 &= (4a + 3b)p^2z^5 + 2PQ(4a + 3b)z^3 + (4a + 3b)Q^2z.
 \end{aligned}$$

Portanto, de I + II + III obtemos

$$\begin{aligned}
 &bN^2z^7 + [2MNb - 5NP + (4a + 3b)P^2]z^2 + \\
 &+ [bM^2 - 5(PM - NQ) + 2PQ(4a + 3b)]z^3 + [-5MQ + (4a + 3b)Q^2]z \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Daí, obtemos uma equação polinomial em z dada por

$$4a^2b^3(2a + b)^2z^7 - b^2(16a^3 - 109a^2b - 108ab^2 - 27b^3)z^5 - 125ab^2z^3 = 0,$$

onde z é definido em algum intervalo de \mathbb{R} . Logo

$$\begin{cases}
 4a^2b^3(2a + b)^2 = 0, \\
 b^2(16a^3 - 109a^2b - 108ab^2 - 27b^3) = 0, \\
 -125ab^2 = 0
 \end{cases}$$

Da última igualdade tem-se $a = b = 0$ o que é uma contradição. Com isso concluímos o seguinte resultado,

Teorema 3.2. *Seja $M \subset \mathbb{H}^3$ uma superfície translacional mínimas do tipo II dada por $X(x, z) = (x, f(x) + g(x), z)$. Então as funções f e g são dadas por*

$$\begin{aligned}
 f(x) &= ax + b \\
 g(z) &= \sqrt{1 + a^2} \int \frac{cz^2}{\sqrt{1 - c^2z^4}} dz,
 \end{aligned}$$

onde a , b e c são constantes.

Capítulo 4

Superfícies Translacionais Mínimas em Sol_3

No espaço homogêneo Sol_3 , uma superfície translacional é uma superfície parametrizada por $\mathbf{x}(s, t) = \alpha(s) * \beta(t)$, onde α e β são curvas parametrizadas suaves contidas em planos coordenados e $*$ denota a operação do grupo Sol_3 induzida da operação natural de $\text{GL}(3, \mathbb{R})$ (multiplicação de matrizes). Neste capítulo nós estudaremos superfícies translacionais mínimas em Sol_3 . Mas antes exporemos algumas noções iniciais da geometria deste espaço, para isso faremos uso dos conceitos e resultados apresentados no capítulo 1.

4.1 O grupo Sol_3 e sua métrica invariante à esquerda

O espaço Sol_3 é o subgrupo de Lie de $\text{GL}(3, \mathbb{R})$ dado por

$$\text{Sol}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} e^z & 0 & x \\ 0 & e^{-z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Então Sol_3 tem uma estrutura diferenciável natural dada pelas coordenadas globais $\phi : \text{Sol}_3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\phi : \begin{pmatrix} e^z & 0 & x \\ 0 & e^{-z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (x, y, z). \quad (4.1)$$

Observamos que nestas coordenadas o produto de dois elementos r_1, r_2 representados por $\phi(r_1) = (x, y, z)$, $\phi(r_2) = (x', y', z')$ é dado por :

$$\begin{aligned} & \phi(\phi^{-1}(x, y, z) \cdot \phi^{-1}(x', y', z')) := \\ & (x, y, z) * (x', y', z') = (x + e^{-z}x', y + e^z y', z + z'), \end{aligned} \quad (4.2)$$

$(\text{Sol}_3, *)$ é um grupo de Lie simplesmente conexo que depende analiticamente de x, y, z , e x', y', z' .

Vamos determinar, agora, os campos invariantes à esquerda e os colchetes de Lie destes campos.

Na algebra de Lie \mathfrak{Sol}_3 , do grupo de Lie Sol_3 , destacamos os vetores tangentes

$$\partial_x \Big|_e := e_1, \quad \partial_y \Big|_e := e_2, \quad \partial_z \Big|_e := e_3$$

onde

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

É fácil ver que:

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_{e_3}] = e_1, \quad [e_2, e_3] = -e_2$$

Denotemos por E_1, E_2 e E_3 os campos invariantes à esquerda gerados pelos vetores e_1, e_2 e e_3 , respectivamente.

O subgrupo a um parâmetro gerado por \mathbf{e}_1 é a curva passando pela identidade com velocidade \mathbf{e}_1 .

A curva integral do campo E_1 passando pelo ponto $A \in \text{Sol}_3$ com coordenadas (x, y, z) é dada por

$$\begin{aligned} L_A(\exp(t\mathbf{e}_1)) &= A(\exp(t\mathbf{e}_1)) \\ &= (x, y, z) * (t, 0, 0) \\ &= (x + e^{-z}t, y, z). \end{aligned}$$

Derivando em $t = 0$ a curva $(x + e^{-z}t, y, z)$, temos o campo E_1 em $A = (x, y, z)$:

$$\begin{aligned} E_1 \Big|_{(x,y,z)} &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (x + e^{-z}t, y, z) \\ &= e^{-z} \partial_x. \end{aligned}$$

Analogamente, obtemos os campos invariantes à esquerda E_2 e E_3 gerados, respectivamente, por \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3

$$E_2 \Big|_{(x,y,z)} = e^z \partial_y \quad e \quad E_3 \Big|_{(x,y,z)} = \partial_z$$

Assim, os campos invariantes à esquerda gerados por $\mathbf{e}_1 = \partial_x$, $\mathbf{e}_2 = \partial_y$ e $\mathbf{e}_3 = \partial_z$ na álgebra de Lie \mathfrak{Sol}_3 são

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 = e^{-z} \partial_x \\ E_2 = e^z \partial_y \\ E_3 = \partial_z \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Calculando os colchetes de Lie destes campos, temos

$$\begin{aligned} [E_1, E_2]_{(x,y,z)} &= dL_{(x,y,z)} [E_1, E_2]_e \\ &= dL_{(x,y,z)} [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_3]_{(x,y,z)} &= dL_{(x,y,z)}[\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_3]_e \\
 &= dL_{(x,y,z)}[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3] \\
 &= dL_{(x,y,z)}\mathbf{e}_1 \\
 &= \mathbf{E}_1
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3]_{(x,y,z)} &= dL_{(x,y,z)}[\mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3]_e \\
 &= dL_{(x,y,z)}[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] \\
 &= dL_{(x,y,z)}(-\mathbf{e}_2) \\
 &= -\mathbf{E}_2.
 \end{aligned}$$

Ou seja,

$$[\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2] = 0 \quad , \quad [\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_3] = \mathbf{E}_1 \quad e \quad [\mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3] = -\mathbf{E}_2. \quad (4.4)$$

A seguir, definimos uma métrica invariante à esquerda em Sol_3 e sua conexão de Levi Civita $\tilde{\nabla}$.

Uma métrica invariante à esquerda, denotada por $\langle \cdot, \cdot \rangle$, pode ser obtida declarando os campos $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ como ortonormais, isto é,

$$\langle \mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j \rangle = \delta_{ij} \quad (4.5)$$

De (4.3) temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_x = e^z \mathbf{E}_1 \\ \partial_y = e^{-z} \mathbf{E}_2 \\ \partial_z = \mathbf{E}_3 \end{array} \right. \quad (4.6)$$

Em termos dos campos coordenados, a métrica é dada pela matriz

$$\langle \cdot, \cdot \rangle(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \langle \partial_x, \partial_x \rangle & \langle \partial_x, \partial_y \rangle & \langle \partial_x, \partial_z \rangle \\ \langle \partial_y, \partial_x \rangle & \langle \partial_y, \partial_y \rangle & \langle \partial_y, \partial_z \rangle \\ \langle \partial_z, \partial_x \rangle & \langle \partial_z, \partial_y \rangle & \langle \partial_z, \partial_z \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2z} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2z} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Escrevendo cada $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{p}} = \sum_{i,j=1}^n \langle \cdot, \cdot \rangle_{i,j}(\mathbf{p}) dx^i dy^j$ (tensor métrica em coordenadas), temos que a métrica invariante à esquerda que fixamos no espaço Sol_3 é dada por

$$ds^2 = e^{2z} dx^2 + e^{-2z} dy^2 + dz^2 \quad (4.7)$$

4.2 A conexão de Levi-Civita do grupo Sol_3

A conexão de de Levi-Civita $\tilde{\nabla}$ no espaço Sol_3 satisfaz:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{E_1} E_1 &= -E_3 & \tilde{\nabla}_{E_1} E_2 &= 0 & \tilde{\nabla}_{E_1} E_3 &= E_1 \\ \tilde{\nabla}_{E_2} E_1 &= 0 & \tilde{\nabla}_{E_2} E_2 &= E_3 & \tilde{\nabla}_{E_2} E_3 &= -E_2 \\ \tilde{\nabla}_{E_3} E_1 &= 0 & \tilde{\nabla}_{E_3} E_2 &= 0 & \tilde{\nabla}_{E_3} E_3 &= 0 \end{aligned}$$

De fato, sejam X, Y, Z campos invariantes à esquerda em Sol_3 . De (1.6) a fórmula de Koszul (1.7) fica apenas

$$2\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle$$

ou seja,

$$\langle Z, \nabla_X Y \rangle = \frac{1}{2} \{ \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle \}$$

Como $\tilde{\nabla}_{E_j} E_i = \sum_{k=1}^n \langle E_k, \tilde{\nabla}_{E_j} E_i \rangle E_k$, temos:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\nabla}_{E_1} E_1 &= \langle E_1, \tilde{\nabla}_{E_1} E_1 \rangle E_1 + \langle E_2, \tilde{\nabla}_{E_1} E_1 \rangle E_2 + \langle E_3, \tilde{\nabla}_{E_1} E_1 \rangle E_3 \\
 &= \left\{ \langle [E_1, E_1], E_1 \rangle - \langle [E_1, E_1], E_1 \rangle + \langle [E_1, E_1], E_1 \rangle \right\} \frac{E_1}{2} \\
 &+ \left\{ \langle [E_1, E_1], E_2 \rangle - \langle [E_1, E_2], E_1 \rangle + \langle [E_2, E_1], E_1 \rangle \right\} \frac{E_2}{2} \\
 &+ \left\{ \langle [E_1, E_1], E_3 \rangle - \langle [E_1, E_3], E_1 \rangle + \langle [E_3, E_1], E_1 \rangle \right\} \frac{E_3}{2} \\
 &= \left\{ -\langle E_1, E_1 \rangle - \langle E_1, E_1 \rangle \right\} \frac{E_3}{2} \\
 &= -E_3.
 \end{aligned}$$

Analogamente obtemos as demais conexões.

4.3 Superfícies mínimas no grupo Sol_3

Seja M uma superfície orientada e seja $x : M \rightarrow \text{Sol}_3$ uma imersão isométrica. Consideremos N um campo de vetores normais unitários sobre M . Denotemos por ∇ a conexão de Levi Civita sobre M . Para uso posterior nós escrevemos a fórmula de Gauss

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \sigma(X, Y)N, \quad \sigma(X, Y) = \langle \tilde{\nabla}_X Y, N \rangle \quad (4.8)$$

onde X, Y são vetores tangentes sobre M e σ é a segunda forma fundamental da imersão. Para cada $p \in M$, nós consideramos a aplicação de Weingarten $A_p : T_p M \rightarrow T_p M$, onde $T_p M$ é o plano tangente considerado como subespaço de $T_p \text{Sol}_3$, definido por

$$A_p(v) = -\tilde{\nabla}_X(N)$$

onde X é um campo de vetores tangentes de M que estende v em p . A curvatura media da imersão é definida como

$$H(p) = \frac{1}{2} \text{tr}(A_p)$$

Nós sabemos que A_p é um endomorfismo auto-adjunto com relação à métrica em M , isto é, $\langle A_p(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, A_p(\mathbf{v}) \rangle$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_pM$. Além disso,

$$-\langle \tilde{\nabla}_X N, Y \rangle = \langle \tilde{\nabla}_X Y, N \rangle \quad (4.9)$$

Em cada plano tangente T_pM nós tomamos uma base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ e depois escrevemos

$$A_p(\mathbf{v}_1) = -\tilde{\nabla}_{\mathbf{v}_1} N = \mathbf{a}_{11}\mathbf{v}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{v}_2,$$

$$A_p(\mathbf{v}_2) = -\tilde{\nabla}_{\mathbf{v}_2} N = \mathbf{a}_{21}\mathbf{v}_1 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{v}_2.$$

Tomando o produto interno de ambas identidades por \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 e denotando por E, F, G os coeficientes da primeira forma fundamental, obtemos:

$$E = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle, \quad F = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle, \quad G = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle.$$

Usando (4.8), nós obtemos

$$\mathbf{a}_{11} = \frac{\begin{vmatrix} -\langle \tilde{\nabla}_{\mathbf{v}_1} N, \mathbf{v}_1 \rangle & F \\ -\langle \tilde{\nabla}_{\mathbf{v}_1} N, \mathbf{v}_2 \rangle & G \end{vmatrix}}{EG - F^2} = \frac{\begin{vmatrix} \langle N, \tilde{\nabla}_{\mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 \rangle & F \\ \langle N, \tilde{\nabla}_{\mathbf{v}_1} \mathbf{v}_2 \rangle & G \end{vmatrix}}{EG - F^2}$$

$$\mathbf{a}_{22} = \frac{\begin{vmatrix} E & -\langle \tilde{\nabla}_{\mathbf{v}_2} N, \mathbf{v}_1 \rangle \\ F & -\langle \tilde{\nabla}_{\mathbf{v}_2} N, \mathbf{v}_2 \rangle \end{vmatrix}}{EG - F^2} = \frac{\begin{vmatrix} E & \langle N, \tilde{\nabla}_{\mathbf{v}_2} \mathbf{v}_1 \rangle \\ F & \langle N, \tilde{\nabla}_{\mathbf{v}_2} \mathbf{v}_2 \rangle \end{vmatrix}}{EG - F^2}$$

Nós concluímos então

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_{11} + \mathbf{a}_{22}) = \frac{1}{2} \frac{G \langle N, \tilde{\nabla}_{\mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 \rangle - 2F \langle N, \tilde{\nabla}_{\mathbf{v}_1} \mathbf{v}_2 \rangle + E \langle N, \tilde{\nabla}_{\mathbf{v}_2} \mathbf{v}_2 \rangle}{EG - F^2}$$

Como foi mencionado anteriormente, neste trabalho estamos interessados em superfícies mínimas; assim na equação das superfícies mínimas $H = 0$, se substituirmos N por outro campo proporcional \bar{N} obteremos uma equação equivalente. Com isto, M é uma superfície mínima se, e somente se,

$$G\langle \bar{N}, \tilde{\nabla}_{v_1} v_1 \rangle - 2F\langle \bar{N}, \tilde{\nabla}_{v_1} v_2 \rangle + E\langle \bar{N}, \tilde{\nabla}_{v_2} v_2 \rangle = 0 \quad (4.10)$$

Para cada escolha do par de curvas α e β em planos coordenados, nós obtemos um tipo de superfície translacional. Nós distinguimos seis tipos, a saber;

$$M(\alpha, \beta) \text{ e } M(\beta, \alpha), \quad \alpha \subset \{z = 0\}, \quad \beta \subset \{y = 0\}, \quad (\text{tipo I e tipo IV})$$

$$M(\alpha, \beta) \text{ e } M(\beta, \alpha), \quad \alpha \subset \{z = 0\}, \quad \beta \subset \{x = 0\}, \quad (\text{tipo II e tipo V})$$

$$M(\alpha, \beta) \text{ e } M(\beta, \alpha), \quad \alpha \subset \{y = 0\}, \quad \beta \subset \{x = 0\}, \quad (\text{tipo III e tipo VI})$$

Neste capítulo consideramos a equação de superfície mínima (4.10) para cada um dos seis tipos de superfícies mencionados acima. No entanto, vamos discutir apenas os casos I, II e III, pois os cálculos para os outros três tipos são análogos. Em cada um desses casos, (4.10) é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem. Neste trabalho, resolvemos a equação (4.10), quando a primeira curva encontra-se no plano de coordenada $z = 0$ e completamos a classificação das superfícies translacionais mínimas dos tipos I e II. No que diz respeito às superfícies da família do tipo III, equação (4.10) converte-se em uma expressão muito complicada e nós só daremos exemplos deste caso. A dificuldade deste processo reflete a ausência de simetrias do espaço Sol_3 , em particular, está no fato de os três eixos coordenados não serem permutáveis.

4.4 Superfícies do tipo I.

Como nosso estudo é local, nós podemos assumir que cada uma das curvas geratrizes da superfície $M(\alpha, \beta)$ é o gráfico de uma função suave. Considerando as duas curvas

$$\alpha(s) = (s, f(s), 0) \text{ e } \beta(t) = (t, 0, g(t)),$$

a superfície translacional $M(\alpha, \beta)$ é parametrizada por

$$x(s, t) = \alpha(s) * \beta(t) = (s + t, f(s), g(t)).$$

$\mathbf{x}(s, t)$ definirá uma superfície parametrizada se impusermos que $f'^2 + g'^2 \neq 0$ (isto é, ao menos uma das funções f, g é não constante). Logo, de (4.10) segue-se a seguinte equação de minimalidade (*Vide afirmação 4.1 do Apêndice*),

$$-f''g'^3 - e^{2g}(f''g' + f'g'^2 + f'g'') + e^{-2g}f'^3(g'^2 - g'') = 0 \quad (4.11)$$

Nós começamos estudando a equação (4.11) nos casos simples. Se f é constante, $f(s) = y_0$, então $M(\alpha, \beta)$ é o plano $y = y_0$. Se g é constante, $g(t) = z_0$, a superfície está contida plano $z = z_0$.

Observação 4.1. *Se nós escrevemos as curvas $\alpha(s) = (f(s), s, 0)$ e $\beta(t) = (g(t), 0, t)$, então a parametrização de $M(\alpha, \beta)$ é $\mathbf{y}(s, t) = \alpha(s) * \beta(t) = (f(s) + g(t), s, t)$, a qual define uma superfície (orientada) de fato, em Sol_3 . Usando raciocínio análogo ao cálculo feito na (Afirmação 4.1 do apêndice), a equação (4.10) agora fica*

$$f''g'^3 - e^{2g}(-f''g' + f'^2g'^2 + f'^2g'') + e^{-2g}(g'^2 - g'') = 0$$

Veja que se f e g são constantes, a superfície é mínima. Isto diz que os planos $x = x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, são superfícies translacionais mínimas do tipo I.

De agora em diante, nós vamos assumir em (4.11) que $f'g' \neq 0$, ou seja, nem f , nem g , são constantes. Dividindo (4.11) por $(f'^3g'^3)$ obtemos:

$$-\frac{f''}{f'^3} - e^{2g} \left(\frac{f''}{f'^3} \frac{1}{g'^2} + \frac{1}{f'^2} \frac{1}{g'} + \frac{g''}{g'^3} \frac{1}{f'^2} \right) + e^{-2g} \frac{(g'^2 - g'')}{g'^3} = 0 \quad (4.12)$$

Em (4.12), a primeira e a terceira soma dependem unicamente de s e t , respectivamente. Então, diferenciando com relação a s e t , nós obtemos

$$\frac{\partial^2}{\partial_s \partial_t} \left[e^{2g} \left(\frac{f''}{f'^3} \frac{1}{g'^2} + \frac{1}{f'^2} \frac{1}{g'} + \frac{g''}{g'^3} \frac{1}{f'^2} \right) \right] = 0$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2}{\partial_s \partial_t} \left[e^{2g} \left(\frac{f''}{f'^3} \frac{1}{g'^2} + \frac{1}{f'^2} \frac{1}{g'} + \frac{g''}{g'^3} \frac{1}{f'^2} \right) \right] = \\
 &= \frac{\partial}{\partial_s} \left[2g' e^{2g} \left(\frac{f''}{f'^3} \frac{1}{g'^2} + \frac{1}{f'^2} \frac{1}{g'} + \frac{g''}{g'^3} \frac{1}{f'^2} \right) + e^{2g} \left(-\frac{f''}{f'^3} \left(\frac{2g''}{g'^3} \right) - \frac{1}{f'^2} \left(\frac{g''}{g'^2} \right) + \left(\frac{g''}{g'^3} \right)' \frac{1}{f'^2} \right) \right] \\
 &= 2g' e^{2g} \left(\left(\frac{f''}{f'^3} \right)' \frac{1}{g'^2} - \frac{2f'f''}{f'^4} \frac{1}{g'} - \frac{g''}{g'^3} \frac{2f'f''}{f'^4} \right) + e^{2g} \left(-\left(\frac{f''}{f'^3} \right)' \frac{2g''}{g'^3} + \frac{2f'f''}{f'^4} \frac{g''}{g'^2} \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{g''}{g'^3} \right)' \frac{2f'f''}{f'^4} \right) \\
 &= 2e^{2g} \left[\left(\frac{f''}{f'^3} \right)' \frac{1}{g'} - \frac{2f''}{f'^3} - 2\frac{g''}{g'^2} \frac{f''}{f'^3} - \left(\frac{f''}{f'^3} \right)' \frac{g''}{g'^3} + \frac{f''}{f'^3} \frac{g''}{g'^2} - \left(\frac{g''}{g'^3} \right)' \frac{f''}{f'^3} \right] \\
 &= 2e^{2g} \left[\frac{1}{g'} \left(1 - \frac{g''}{g'^2} \right) \left(\frac{f''}{f'^3} \right)' - \frac{f''}{f'^3} \left(2 + \frac{2g''}{g'^2} + \frac{g''}{g'^3} - \frac{g''}{g'^2} + \left(\frac{g''}{g'^3} \right)' \right) \right] \\
 &= 2e^{2g} \left[\frac{1}{g'} \left(1 - \frac{g''}{g'^2} \right) \left(\frac{f''}{f'^3} \right)' - \left(2 + \frac{g''}{g'^2} + \frac{g''}{g'^3} - \left(\frac{g''}{g'^3} \right)' \right) \right] \frac{f''}{f'^3} = 0
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\left(\frac{f''}{f'^3} \right)' \left(\frac{1}{g} - \frac{g''}{g'^3} \right) - \frac{2f''}{f'^3} - \left(\frac{f''}{f'^3} \right) \left(\frac{g''}{g'^3} + \frac{g''}{g'^3} \right) = 0 \quad (4.13)$$

(1) **Assumindo $f'' = 0$.**

Então $f(s) = as + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Assim a equação (4.11) pode ser reescrita como:

$$e^{2g}(g'' + g'^2) = a^2 e^{-2g}(-g'' + g'^2)$$

Fazendo a mudança $g(t) = h(t) + m$, com $e^{4m} = a^2$ e depois, $\zeta(t) = 2h(t)$. Obtemos

$$e^{2(h(t)+m)}(h''(t) + h'(t)^2) = a^2 e^{-2(h(t)+m)}(-h''(t) + h'(t)^2)$$

Donde

$$e^{\zeta} a \left(\frac{\zeta''}{2} + \frac{\zeta'^2}{4} \right) = a^2 e^{-\zeta} \frac{1}{a} \left(-\frac{\zeta''}{2} + \frac{\zeta'}{4} \right)$$

ou ainda:

$$e^{\zeta} \zeta'' + \frac{e^{\zeta} \zeta'^2}{2} = -e^{-\zeta} \zeta'' + \frac{e^{-\zeta} \zeta'^2}{2}.$$

Ou seja, nós obtemos $2\zeta''(e^{\zeta} + e^{-\zeta}) = -\zeta'^2(e^{\zeta} - e^{-\zeta})$, ou

$$2\zeta'' \cosh(\zeta) = -\zeta'^2 \sinh(\zeta).$$

Multiplicando ambos os lados por ζ' , obtemos

$$2\zeta' \zeta'' \cosh(\zeta) + \zeta' \zeta'^2 \sinh(\zeta) = 0.$$

O que implica

$$\frac{d}{dt}(\zeta'^2 \cosh(\zeta)) = 0.$$

Daí, integrando com relação a t temos;

$$\zeta'^2 = \frac{c^2}{\cosh(\zeta)}, \quad \text{para algum } c \in \mathbb{R} \quad (c > 0).$$

Da expressão acima segue que

$$\zeta'^2 \cosh(\zeta) = c^2.$$

Extraindo as raízes

$$\zeta' \sqrt{\cosh(\zeta)} = c.$$

Integrando novamente com relação a t

$$\int^t \sqrt{\cosh(\zeta(\tau))} \zeta'(\tau) d\tau = ct + c_1, \quad \text{onde } c_1 \text{ é uma constante de integração.}$$

Considere $I(t) = \int^t \sqrt{\cosh(\tau)} d\tau$. Como $\sqrt{\cosh(\tau)}$ é positiva, segue-se que $I(t)$ é estritamente crescente e conseqüentemente a equação $I(\zeta(t)) = ct$ tem uma única solução, a saber $\zeta(t) = I^{-1}(ct)$.

(2) **Assumindo** $g'' - g'^2 = 0$.

Como g não é constante, ela é dada por

$$g(t) = -\log|t + \lambda| + \mu, \quad \mu, \lambda \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

De fato, pois se $g'' - g'^2 = 0$, então fazendo $h = g'$, temos $h' = h^2$. Resolvendo, vamos obter

$$\frac{dh}{h^2} = dt \Leftrightarrow -\frac{1}{h} = t + c \Leftrightarrow -h = \frac{1}{t + \lambda},$$

e portanto,

$$-g' = \frac{1}{t + \lambda} \Leftrightarrow g = -\log|t + \lambda| + \mu.$$

Daí segue o que foi afirmado.

Substituindo (*) na equação (4.11) temos

$$\begin{aligned} & -f'' g'^3 - e^{2g}(f'' g' + f' g'^2 - f' g'') + e^{-2g} f'^3 (g'^2 - g'') = \\ & = -f'' \left(-\frac{1}{t + \lambda} \right)^3 - e^{2(-\log|t + \lambda| + \mu)} \left(-f'' \frac{1}{t + \lambda} + \frac{f'}{(t + \lambda)^2} + \frac{f'}{(t + \lambda)^2} \right) \\ & = f'' \frac{1}{(t + \lambda)^3} - \frac{1}{(t + \lambda)^2} e^{2\mu} \left(-f'' \frac{1}{t + \lambda} + \frac{2f'}{(t + \lambda)^2} \right) \\ & = f'' \left(\frac{1 + e^{2\mu}}{(t + \lambda)^3} \right) - \frac{2e^{2\mu} f'}{(t + \lambda)^4} \\ & = 0. \end{aligned}$$

Isto é,

$$(1 + e^{2\mu})f''(t + \lambda) - 2e^{2\mu}f' = 0.$$

Então, obtemos $f'' = 0$ e $f' = 0$, o que é uma contradição.

(3) Assumindo $f''(g'' - g'^2) \neq 0$.

De (4.12) nós concluímos que existe $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{(f''/f'^3)'}{f''/f'^3} = \mathbf{a} = \frac{(g''/g'^3)' + g''/g'^2 + 2}{1/g' - g''/g'^3} \quad (4.14)$$

(a) Suponha $\mathbf{a}=0$.

Então isto implica

$$\left(\frac{f''}{f'^3}\right)' = 0$$

$$\frac{f''}{f'^3} = \mathbf{b}$$

$$f'' = \mathbf{b}f'^3$$

onde \mathbf{b} é uma constante não nula. Então obtemos:

$$\frac{1}{f'^2} = -2\mathbf{b}s + \mathbf{c}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}$$

De fato, fazendo $\mathbf{h} = f'$ implica

$$\begin{aligned} \mathbf{h}' &= \mathbf{b}\mathbf{h}^3 \\ \frac{d\mathbf{h}}{\mathbf{h}^3} &= \mathbf{b}.ds \end{aligned}$$

Integrando,

$$\begin{aligned} \int h^{-3} dh &= b \int ds \\ \frac{h^{-2}}{-2} &= b(s + c) \\ \frac{1}{f'^2} &= -2bs + c. \end{aligned}$$

Logo segue a afirmação.

Por outro lado, da segunda equação em (4.14) temos

$$\left(\frac{g''}{g'^3}\right)' + \frac{g''}{g'^2} + 2 = 0$$

ou seja,

$$\left(\frac{g''}{g'^3}\right)' - \left(\frac{1}{g'}\right)' + 2 = 0$$

o que implica,

$$\left(\frac{g''}{g'^3} - \frac{1}{g'}\right)' + 2 = 0. \quad (4.15)$$

Então, integrando em relação a t temos

$$\frac{g''}{g'^3} - \frac{1}{g'} = -2t + p, \quad p \in \mathbb{R}.$$

Com estas informações sobre f e g , temos de (4.12)

$$-b - e^{2g} \left(\frac{b}{g'^2} + (-2bs + c) \frac{1}{g'} + \frac{g''}{g'^3} (-2bs + c) \right) + e^{-2g} \left(\frac{1}{g'} - \frac{g''}{g'^3} \right) = 0,$$

ou seja,

$$-b \left(1 + \frac{e^{2g}}{g'^2} \right) + (2bs - c) e^{2g} \left(\frac{g''}{g'^3} + \frac{1}{g'} \right) - e^{-2g} \left(\frac{g''}{g'^3} - \frac{1}{g'} \right) = 0 \quad (4.16)$$

Como a expressão (4.16) é uma equação polinomial em s , temos derivando com respeito a s

$$2be^{2g} \left(\frac{g''}{g'^3} + \frac{1}{g'} \right) = 0$$

e como $b \neq 0$, implica

$$\frac{g''}{g'^3} + \frac{1}{g'} = 0.$$

De (4.15), obtemos, integrando com relação a t , $\frac{g''}{g'^3} - \frac{1}{g'} = -2t + p$ com $p \in \mathbb{R}$. Junto com a expressão $\frac{g''}{g'^3} + \frac{1}{g'} = 0$, temos que

$$\frac{-2}{g'} = -2t + p$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{g'} &= t - \frac{p}{2} \\ g' &= \frac{1}{t - \frac{p}{2}}. \end{aligned}$$

Integrando temos

$$g = \log\left(t - \frac{p}{2}\right) + q, \quad q \in \mathbb{R}.$$

Desta forma podemos obter uma expressão para o coeficiente independente em (4.16), a saber

$$\begin{aligned} & -b \left(1 + \frac{e^{2g}}{g'^2} \right) - e^{-2g} \frac{g''}{g'^3} - \frac{1}{g'} = 0 \\ -b \left(1 + \frac{(t - p/2)^2 e^{2q}}{1/(t - p/2)^2} \right) - \frac{e^{-2q}}{(t - p/2)^2} \left(\frac{-1/(t - p/2)^2}{1/(t - p/2)^3} - \frac{1}{1/(t - p/2)} \right) &= 0 \\ -b (1 + e^{2q}(t - p/2)^4) - \frac{e^{-2q}}{(t - p/2)^2} (-(t - p/2) - (t - p/2)) &= 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$-b(1 + e^{2q}(t - p/2)^4) + \frac{2e^{-2q}}{t - p/2} = 0.$$

O que implica,

$$-\left(t - \frac{p}{2}\right) b \left(1 + e^{2q} \left(-\frac{p}{2}\right)^4\right) + 2e^{-2t} = 0$$

ou

$$b \left(t - \frac{p}{2}\right) + be^{2q} \left(-\frac{p}{2}\right)^5 + 2e^{-2q} = 0.$$

Assim $be^{2q} = 0$, o que implica $b = 0$, o que é uma contradição, pois b é uma constante não nula.

(b) Suponha $a \neq 0$.

Da primeira equação em (4.14), a saber

$$\frac{(f''/f'^3)'}{f''/f'^3} = a,$$

temos, integrando com relação a s ,

$$\ln\left(\frac{f''}{f'^3}\right) + \ln(c) = as$$

$$\ln\left[c\left(\frac{f''}{f'^3}\right)\right] = as$$

$$c\left(\frac{f''}{f'^3}\right) = e^{as}$$

$$\left(\frac{f''}{f'^3}\right) = \frac{e^{as}}{c},$$

isto é, existe $b \neq 0$ tal que

$$\frac{f''}{f'^3} = be^{as}. \tag{4.17}$$

Integrando (4.17) obtemos

$$\frac{-1}{2f'^2} = \frac{b}{a}e^{as} + c \quad (4.18)$$

Substituindo (4.17) e (4.18) em (4.12), nós temos para algum s

$$-be^{as} - e^{2g} \left(be^{as} \frac{1}{g'^2} - \left(\frac{2be^{as}}{a} + 2c \right) \left(\frac{1}{g'} + \frac{g''}{g'^3} \right) \right) + e^{-2g} \frac{g' - g''}{g'^3} = 0$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & - be^{as} \left[1 + e^{2g} \left(\frac{1}{g'^2} - \frac{2}{a} \left(\frac{1}{g'} + \frac{g''}{g'^3} \right) \right) \right] \\ & + 2ce^{2g} \left(\frac{1}{g'} + \frac{g''}{g'^3} \right) + e^{-2g} \left(\frac{1}{g'} - \frac{g''}{g'^3} \right) = 0. \end{aligned}$$

Veja que esta é uma expressão polinomial em e^{as} e então os dois coeficientes devem ser nulos. Daí segue-se que g satisfaz a duas equações diferenciais:

$$1 + e^{2g} \left(\frac{1}{g'^2} - \frac{2}{a} \left(\frac{1}{g'} + \frac{g''}{g'^3} \right) \right) = 0 \quad (4.19)$$

$$2ce^{2g} \left(\frac{1}{g'} + \frac{g''}{g'^3} \right) + e^{-2g} \left(\frac{1}{g'} - \frac{g''}{g'^3} \right) = 0 \quad (4.20)$$

Logo, se $c = 0$ então de (4.20) segue que $g'' - g'^2 = 0$. Mas por hipótese isso não pode ocorrer. Portanto, nós vamos assumir que $c \neq 0$ e estudar a função g .

De (4.14) nós temos uma equação diferencial linear para $\varphi = \frac{1}{g'} - \frac{g''}{g'^3}$, dada por

$$a = \frac{-\varphi' + 2}{\varphi}$$

ou,

$$\varphi' + a\varphi - 2 = 0$$

cuja solução é

$$\varphi = \frac{1}{g'} - \frac{g''}{g'^3} = \frac{2}{a} + \lambda e^{-at}, \lambda \in \mathbb{R}. \quad (4.21)$$

Daí temos que

$$\frac{g''}{g'^3} = \frac{1}{g'} - \frac{2}{a} - \lambda e^{-at} \quad (4.22)$$

Substituindo (4.22) em (4.20), nós obtemos

$$2ce^{2g} \left(\frac{2}{g'} - \frac{2}{a} - \lambda e^{-at} \right) + e^{-2g} \left(\frac{2}{a} + \lambda e^{-at} \right) = 0.$$

O que implica

$$\begin{aligned} \frac{1}{g'} - \frac{1}{a} - \frac{\lambda e^{-at}}{2} &= -\frac{e^{-4g}}{4c} \left(\frac{2}{a} + \lambda e^{-at} \right) \\ \frac{1}{g'} &= \frac{1}{a} + \frac{\lambda e^{-at}}{2} - \frac{e^{-4g}}{4c} \left(\frac{2}{a} + \lambda e^{-at} \right) \\ \frac{1}{g'} &= \frac{1}{a} + \frac{\lambda e^{-at}}{2} - \frac{e^{-4g}}{2ac} - \frac{\lambda e^{-at-4g}}{4c} \\ \frac{1}{g'} &= \frac{e^{-at-4g}}{4ac} (-2e^{at} - a\lambda + 4ce^{4g+at} + 2a\lambda ce^{4g}) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{1}{g'} = \frac{e^{-at-4g}}{4ac} (-1 + 2ce^{4g}) (2e^{at} + a\lambda) \quad (4.23)$$

Substituindo a expressão (4.23) em (4.21), obtemos

$$a\lambda + 4c^2 e^{8g(t)} (2e^{at} + a\lambda) - 4ce^{4g(t)} (3e^{at} + a\lambda) = 0$$

Isto implica

$$\begin{aligned} e^{4g_{\pm}(t)} &= \frac{4c(3e^{at} + a\lambda) \pm \sqrt{16c^2(3e^{at} + a\lambda)^2 - 4a\lambda 4c^2(2e^{at} + a\lambda)}}{8c^2(2e^{at} + a\lambda)} \\ &= \frac{3e^{at} + a\lambda \pm \sqrt{(3e^{at} + a\lambda)^2 - a\lambda(2e^{at} + a\lambda)}}{2c(2e^{at} + a\lambda)} \end{aligned}$$

ou seja,

$$e^{4g_{\pm}(t)} = \frac{3e^{at} + a\lambda \pm \sqrt{9e^{2at} + 4a\lambda e^{at}}}{2c(2e^{at} + a\lambda)} \quad (4.24)$$

Assim nós temos dois possíveis valores para g (g_+ e g_-). Sem perda de generalidade, nós podemos escolher g_+ na expressão acima (o raciocínio é o mesmo com g_-).

Combinando (4.24) com (4.23), nós temos

$$24e^{at} + 11a\lambda + 4\sqrt{9e^{2at} + 4a\lambda e^{at}} + 3a\lambda e^{-at}\sqrt{9e^{2at} + 4a\lambda e^{at}} = 0. \quad (4.25)$$

Eliminando-se a raiz em (4.25) convertemos (4.25) em uma equação polinomial em e^{at} dada por

$$108e^{3at} + 62a\lambda e^{2at} - 14a^2\lambda^2 e^{at} - 9a^3\lambda^3 = 0$$

logo e^{at} somente pode assumir um número finito de valores, $t \in \mathbb{R}$. Isto implica que $a = 0$ o que é contradição. Como conclusão, nós obtemos o seguinte resultado

Teorema 4.1. *As únicas superfícies translacionais mínimas em Sol_3 do tipo I são os planos $y = y_0$, os planos $x = x_0$, os planos $z = z_0$ e as superfícies parametrizadas por*

$$x(s, t) = \alpha(s) * \beta(t) = (s + t, f(s), g(t))$$

Com $f(s) = as + b$ $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e

$$g(t) = \frac{1}{2}I^{-1}(ct) + m, \quad I(t) = \int^t \sqrt{\cosh \tau} d\tau, \quad c > 0, \quad e^{4m} = a^2.$$

4.5 Superfícies do tipo II.

Considere α no plano $z = 0$ e β no plano $x = 0$. Novamente, assumimos que ambas as curvas são gráficos de funções e nós tomamos $\alpha(s) = (s, f(s), 0)$ e $\beta(t) = (0, t, g(t))$. Considere a superfície translacional mínima correspondente $M(\alpha, \beta)$, a qual é parametrizada por

$$x(s, t) = \alpha(s) * \beta(t) = (s, f(s), 0) * (0, t, g(t)) = (s, t + f(s), g(t)). \quad (4.26)$$

Da equação (4.10), a superfície translacional definida pela parametrização (4.26) será mínima se, e somente se, valer a equação abaixo (*Vide Afirmação 4.2 do apêndice*)

$$-f''g'^3 + e^{-2g}(f'^2(g'' - g'^2) - f''g') + e^{2g}(g'' + g'^2) = 0 \quad (4.27)$$

Agora estudaremos as possíveis soluções a esta equação.

Observação 4.2. *Se for $g' = 0$, ou seja, $g(t) = z_0$ então a equação de minimalidade (4.27) é automaticamente válida e, neste caso, a superfície estará contida no plano coordenado $z = z_0$.*

Para o que segue iremos sempre considerar $g' \neq 0$. Como nas abordagens anteriores, estudaremos a equação (4.27).

Caso $f' = 0$:

Se $f' = 0$, então f é uma função constante, ou seja, $f(s) = x_0$ e a equação (4.26) se converte simplesmente em

$$g'' + g'^2 = 0$$

que tem por soluções (excluída a solução trivial $g(t) = z_0$):

$$g(t) = \log |t + \lambda| + \mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

para certas constantes de integração λ e μ . Neste caso a superfície fica parametrizada por

$$\mathbf{x}(s, t) = (s, t + x_0, \ln |t + \lambda| + \mu)$$

Observação 4.3. Como no caso das superfícies translacionais do tipo I, nós temos os planos $\mathbf{x} = x_0$, com $x_0 \in \mathbb{R}$. Para isso, nós escrevemos $\alpha(s) = (f(s), 0, s)$. Usando raciocínio análogo ao cálculo feito na (Afirmção 4.2 do apêndice), a equação (4.10) agora fica

$$f''g'^3 + e^{-2g}(f'(g'' - g'^2) + f''g') + e^{2g}(g'' + g'^2) = 0.$$

Dáí, se f é constante, então satisfaz a equação acima, isto é, a superfície $M(\alpha, \beta)$ é parametrizada por

$$\mathbf{x}(s, t) = (x_0, t + s, g(t)),$$

isto é, o plano $\mathbf{x} = x_0$ é uma superfície translacional mínima do tipo II.

Caso $f' \neq 0$:

Suponha que em (4.27) $f' \neq 0$. Então dividindo (4.27) por g'^3 , nós obtemos

$$-f'' + e^{-2g} \left(f'^2 \left(\frac{g''}{g'^3} - \frac{1}{g'} \right) - f'' \frac{1}{g'^2} \right) + e^{2g} \left(\frac{g''}{g'^3} + \frac{1}{g'^2} \right) = 0 \quad (4.28)$$

Como a primeira e a última parcelas na expressão (4.28) acima são funções que dependem apenas de s e t respectivamente, temos, diferenciando com relação a s e t respectivamente, que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2}{\partial_s \partial_t} \left[e^{-2g} \left(\frac{f''}{g'^2} + \frac{f'^2}{g'} - f'^2 \frac{g''}{g'^3} \right) \right] \\ &= e^{-2g} \left[-2g' \left(\frac{f'''}{g'^2} + \frac{2f'f''}{g'} - \frac{2f'f''g''}{g'^3} \right) + \left(\frac{-2f'''g''}{g'^3} - \frac{2f'f''g''}{g'^2} - 2f'f'' \left(\frac{g''}{g'^3} \right)' \right) \right] \\ &= -2e^{-2g} \left[\frac{f'''}{g'} + \frac{f'''g''}{g'^3} + 2f'f'' - \frac{f'f''g''}{g'^2} + f'f'' \left(\frac{g''}{g'^3} \right)' \right] \end{aligned}$$

ou seja,

$$f'f'' \left(\left(\frac{g''}{g'^3} \right)' - \frac{g''}{g'^2} + 2 \right) + f''' \left(\frac{g''}{g'^3} + \frac{1}{g'} \right) = 0 \quad (4.29)$$

(1) **Assumindo $f'' = 0$.**

Supondo $f'' = 0$ temos que $f(s) = as + b$ para certas constantes $a, b \in \mathbb{R}$, onde $a \neq 0$ (pois $f' \neq 0$). Da equação (4.27), nós obtemos

$$a^2 e^{-2g}(g'' - g'^2) + e^{2g}(g'' + g'^2) = 0.$$

Fazendo a mudança de variáveis $\zeta(t) = 2(g(t) - m)$, $e^{4m} = a^2$ e com o mesmo argumento usado na seção anterior em (1) obtemos

$$\zeta'' \cosh(\zeta) + \frac{\zeta'^2}{2} \sinh(\zeta) = 0$$

donde segue que,

$$\zeta'^2 = \frac{c}{\cosh(\zeta)}, \quad c > 0.$$

Assim temos uma situação análoga ao caso anterior.

(2) **Assumindo $g'' + g'^2 = 0$.**

Como g não é constante e pela observação no início deste tópico, tem-se que $g(t) = \log|t + \lambda| + \mu$ com $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Logo, da equação (4.27) segue que

$$\begin{aligned} & -f''(g'^3 + g'e^{-2g}) - 2e^{-2g}f'g'^2 \\ = & -f'' \left(\frac{1}{(t + \lambda)^3} + \frac{e^{-2\mu}}{(t + \lambda)^3} \right) - 2f'g'^2 \frac{e^{-2\mu}}{(t + \lambda)^4} \\ = & 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$f''(1 + e^{-2\mu})(t + \lambda) + 2f'^2 e^{-2\mu} = 0.$$

Derivando em relação a t temos

$$f''(1 + e^{-2\mu}) = 0$$

o que implica $f'' = 0$. Logo,

$$2f'^2 e^{-2\mu} = 0$$

ou seja, $f' = 0$.

Assim temos que $f'' = f' = 0$, e portanto, f é constante o que gera uma contradição, pois estamos supondo $f' \neq 0$

(3) Assumindo $f''(g'' + g'^2) \neq 0$.

Dividindo a equação (4.29) por $f'f'' \left(\frac{g''}{g'^3} + \frac{1}{g'} \right)$ obtemos:

$$\frac{\left(\frac{g''}{g'^3} \right)' - \frac{g''}{g'^2} + 2}{\frac{g''}{g'^3} + \frac{1}{g'}} + \frac{f'''}{f'f''} = 0$$

Donde segue que existe uma constante $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$-\frac{f'''}{f'f''} = \alpha = \frac{(g''/g'^3)' - g''/g'^2 + 2}{g''/g'^3 + 1/g'} \quad (4.30)$$

Vamos considerar dois casos: $\alpha = 0$ e $\alpha \neq 0$.

i) **Caso $\alpha = 0$.**

Neste caso temos $f'(s) = bs + c$, com $b, c \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ que substituindo na equação (4.27) nos conduz a

$$-bg'^3 + e^{-2g}((bs + c)^2(g'' - g'^2) - bg') + e^{2g}(g'' + g'^2) = 0. \quad (4.31)$$

Veja que esta é um equação polinomial em s o que implica que o coeficiente principal deve ser nulo. De fato, derivando em relação a variável s obtemos

$$2be^{-2g}(bs + c)(g'' - g'^2) = 0,$$

o que implica

$$g'' - g'^2 = 0. \quad (4.32)$$

Assim temos que

$$g(t) = -\log |pt + q|, \text{ onde } p, q \in \mathbb{R}, p \neq 0. \quad (4.33)$$

Substituindo (4.32) em (4.31) temos:

$$-bg'^3 - bg'e^{-2g} + 2e^{2g}g'^2 = 0$$

ou,

$$-bg'^2 - be^{-2g} + 2e^{2g}g' = 0, \quad (4.34)$$

substituindo (4.33) em (4.34):

$$\begin{aligned} & -b \left(-\frac{p}{pt + q} \right)^2 - be^{-2(\ln(pt+q))} + 2e^{2(-\ln(pt+q))} \left(\frac{-p}{pt + q} \right) \\ &= -\frac{bp^2}{(pt + q)^2} - b(pt + q)^{-2} - \frac{2p}{(pt + q)^3} \\ &= \frac{-1}{(pt + q)^3} [bp^2(pt + q) + b(pt + q)^5 - 2p] = 0 \end{aligned}$$

O termo entre colchetes pode ser escrito como $bp^5t^5 + O(t^4) = 0$, onde $O(t^4)$ são os termos de ordem ≤ 4 e que dependem de t polinomialmente. Logo o coeficiente principal deve ser nulo e obtemos $bp = 0$, o que é uma contradição, já que estamos supondo $b \neq 0$ e $p \neq 0$.

ii) Caso $a \neq 0$.

A primeira equação em (4.30) nos dá

$$\frac{f'''}{f''} = -af', \quad a \in \mathbb{R},$$

e portanto integrando obtemos

$$\ln |f''| = -af + c.$$

Exponenciando ambos os lados,

$$f'' = e^c e^{-af}. \quad (4.35)$$

Ou seja,

$$f'' = b e^{-af} \quad \text{com } b \neq 0. \quad (4.36)$$

Multiplicando por (4.36) f' , nós obtemos

$$f' f'' = b f' e^{-af},$$

ou ainda,

$$(f'^2)' = \frac{-2b}{a} (e^{-af})'$$

portanto,

$$f'^2 = \frac{-2b}{a} e^{-af} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (4.37)$$

Substituindo (4.36) e (4.37) em (4.29), obtemos

$$\begin{aligned} & - b e^{-af} \left[1 + e^{-2g} \frac{1}{g'^2} + \frac{2}{a} \left(\frac{g''}{g'^3} - \frac{1}{g'} \right) \right] + 2c e^{-2g} \left(\frac{g''}{g'^3} - \frac{1}{g'} \right) \\ & + e^{2g} \left(\frac{g''}{g'^3} + \frac{1}{g'} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Como $f' \neq 0$ e $b \neq 0$, nós concluímos:

$$1 + e^{-2g} \frac{1}{g'^2} + \frac{2}{a} \left(\frac{g''}{g'^3} - \frac{1}{g'} \right) = 0 \quad (4.39)$$

$$2ce^{-2g} \left(\frac{g''}{g'^3} - \frac{1}{g'} \right) + e^{2g} \left(\frac{g''}{g'^3} + \frac{1}{g'} \right) = 0. \quad (4.40)$$

Nós temos de (4.30) que se colocarmos

$$\varphi = \frac{g''}{g'^3} + \frac{1}{g'},$$

obtemos a equação diferencial dada por

$$\varphi' - a\varphi + 2 = 0.$$

Resolvendo obtemos,

$$\frac{g''}{g'^3} + \frac{1}{g'} = \frac{2}{a} + \lambda e^{at}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (4.41)$$

Combinando com (4.40) e (4.41), concluímos

$$2ce^{-2g} \left(\frac{-2}{g'} + \frac{2}{a} + \lambda e^{at} \right) + e^{2g} \left(\frac{2}{a} + \lambda e^{at} \right) = 0.$$

ou seja,

$$\frac{-2}{g'} + \frac{2}{a} + \lambda e^{at} + \frac{e^{4g}}{2c} \left(\frac{2}{a} + \lambda e^{at} \right) = 0$$

ou,

$$\frac{4ac}{g'} = 4c + 2c\lambda a e^{at} + 2e^{4g} + a\lambda e^{4g} e^{at}.$$

Então, obtemos

$$\frac{1}{g'} = \frac{(2c + e^{4g})(2 + a\lambda e^{at})}{4ac} \quad (4.42)$$

Colocando o valor de g' em (4.41) implica

$$a\lambda e^{at+8g} + 4c^2(2 + a\lambda e^{at}) + 4c(3 + a\lambda e^{at})e^{4g} = 0.$$

ou ainda,

$$(a\lambda e^{at})(e^{4g})^2 + [4c(3 + a\lambda e^{at})]e^{4g} + 4c^2(2 + a\lambda e^{at}) = 0$$

resolvendo em e^{4g} obtemos

$$\begin{aligned} e^{4g_{\pm}} &= \frac{-4c(3 + a\lambda e^{at}) \pm \sqrt{16c^2(3 + a\lambda e^{at})^2 - 16(a\lambda e^{at})c^2(2 + a\lambda e^{at})}}{(2a\lambda e^{at})} \\ &= \frac{-4c(3 + a\lambda e^{at}) \pm 4c\sqrt{9 + 6a\lambda e^{at} + a^2\lambda^2 e^{2at} - 2a\lambda e^{at} - a^2\lambda^2 e^{2at}}}{2a\lambda e^{at}} \\ &= \frac{2ce^{-at}}{a\lambda} \left(-(3 + a\lambda e^{at}) \pm \sqrt{9 + 4a\lambda e^{at}} \right) \end{aligned}$$

ou seja,

$$g_{\pm}(t) = \frac{1}{4} \log \left(\frac{2ce^{-at}}{a\lambda} \left(-(3 + a\lambda e^{at}) \pm \sqrt{9 + 4a\lambda e^{at}} \right) \right)$$

Nós podemos escolher g_+ na expressão acima (o raciocínio é o mesmo com g_-). Agora podemos calcular $\frac{1}{g'}$ e comparar com (4.42) para obter,

$$4 \left(6 + \sqrt{9 + 4a\lambda e^{at}} \right) + a\lambda e^{at} \left(11 + 3\sqrt{9 + 4a\lambda e^{at}} \right) = 0$$

Esta expressão pode ser escrita como

$$\sqrt{9 + 4a\lambda e^{at}}(4 + 3a\lambda e^{at}) = -(24 + 11a\lambda e^{at})$$

elevando ao quadrado ambos os lados, temos

$$(9 + 4a\lambda e^{at})(16 + 24a\lambda e^{at} + 9a^2\lambda^2 e^{2at}) = 576 + 528a\lambda e^{at} + 121a^2\lambda^2 e^{2at}$$

ou seja,

$$144 + 216a\lambda e^{at} + 81a^2\lambda^2 e^{2at} + 64a\lambda e^{at} + 96a^2\lambda^2 e^{2at} + 36\lambda^3 e^{3at} - 576 - 528a\lambda e^{at} - 121a^2\lambda^2 e^{2at} = 0$$

Logo,

$$36a^3\lambda^3 e^{3at} + 56a^2\lambda^2 e^{2at} - 248a\lambda e^{at} - 432 = 0$$

que é uma equação cúbica em e^{at} . Logo o conjunto das raízes forma um conjunto finito, o que é um absurdo.

Assim segue-se o resultado

Teorema 4.2. *As únicas superfícies translacionais mínimas em Sol_3 do tipo II são os planos $x = x_0$, os planos $z = z_0$ e as superfícies parametrizadas por $\chi(s, t) = (s, t + f(s), g(t))$ com*

(1) $f(s) = a$ e $g(t) = \log |t + \lambda| + \mu$, onde $a, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(2) $f(s) = as + b$, $a \neq 0$ e $g(t) = \frac{1}{2}I^{-1}(ct) + m$, com

$$I(t) = \int^t \sqrt{\cosh \tau} d\tau, \quad c > 0, \quad e^{4m} = a^2.$$

4.6 Superfícies do tipo III.

Para superfícies translacionais mínimas do tipo III, nós assumimos que as curvas geratrizes são gráficos de funções dadas por $\alpha(s) = (s, 0, f(s))$ e $\beta(t) = (0, t, g(t))$. A superfície translacional $M(\alpha, \beta)$ é dado por

$$\begin{aligned} \chi(s, t) = \alpha(s) * \beta(t) &= (s, 0, f(s)) * (0, t, g(t)) \\ &= (s, te^{f(s)}, f(s) + g(t)) \end{aligned}$$

Então (4.10) se escreve como (*Vide afirmação 4.3 do apêndice*)

$$\begin{aligned} -e^{2(f+g)}(g'' + g'^2) + e^{-2g}(t^2 f'^2 g'^2 + f'^2 - t^2 f'^2 g'' - 3t f'^2 g' + f''(tg' - 1)) \\ -2f'^2 g'^2 + t f'^2 g'^3 + t f'' g'^3 - f'' g'^2 - f'^2 g'' = 0 \end{aligned} \quad (4.43)$$

Nesta seção, nós daremos exemplos de superfícies translacionais mínimas do tipo III distinguindo alguns casos especiais.

(1) Assumindo f constante.

Então (4.43) implica $g'' + g'^2 = 0$. Se g é constante, a superfície é um plano horizontal $z = z_0$; a solução não constante é

$$g(t) = \log |t + \lambda| + \mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Neste caso $M(\alpha, \beta)$ pode ser parametrizada por

$$\chi(s, t) = (s, te^c, \log |t + \lambda| + \mu + c), \quad \text{onde } c \text{ é a constante dada por } f.$$

(2) Assumindo g constante.

Então (4.43) nos leva a $e^{-2g}(f'^2 - f'') = 0$ e assim, se f é constante a superfície é um plano horizontal $z = z_0$. Se f é não constante temos

$$f'^2 - f'' = 0,$$

cuja solução é dada por:

$$f(s) = \log|s + \lambda| + \mu \quad ; \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Neste caso $M(\alpha, \beta)$ pode ser parametrizada por

$$\chi(s, t) = (s, t(s + \lambda)e^\mu, \log|s + \lambda| + \mu + \bar{c}), \quad \text{onde } \bar{c} \text{ é a constante dada por } g.$$

(3) Assumindo $tg' - 1 = 0$.

Então temos $g(t) = \log|t| + \mu$, $\mu \in \mathbb{R}$. Neste caso a equação (4.43) é satisfeita para qualquer função f . De fato, se $tg' - 1 = 0$, temos

$$\begin{aligned} & -e^{2(f+g)}(g'' + g'^2) + e^{-2g}(f'^2 + f'^2 - t^2 f'^2 - 3f'^2) - f'^2 g'^2 + f'' g'^2 - f'' g'^2 - f'^2 g'' = \\ = & -e^{2(f+g)} \left(\frac{-1}{t^2} + \frac{1}{t^2} \right) + \frac{e^{-2\mu}}{t^2} \left(2f'^2 + \frac{t^2 f'^2}{t^2} - 3f'^2 \right) - f'^2 \frac{1}{t^2} - f'^2 \left(\frac{-1}{t^2} \right) \\ = & 0 \end{aligned}$$

Neste caso $M(\alpha, \beta)$ pode ser parametrizada por

$$\chi(s, t) = (s, te^{f(s)}, f(s) + \log|t| + \mu).$$

(4) Assumindo $f'' = 0$.

Então temos $f(s) = bs + c$ para alguma constante $b \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$. Assim, a equação (4.43) pode ser escrita como:

$$-e^{2(f+g)}(g'' + g'^2) + b^2(-2g'^2 + tg'^3 - g'') + b^2 e^{-2g}(t^2 g'^2 + 1 - t^2 g'' - 3tg') = 0. \tag{4.44}$$

Derivando (4.44) em s obtemos:

$$-2f' e^{2(f+g)}(g'' + g'^2) = 0$$

Em particular, $-e^{2(f+g)}(g'' + g'^2)$ é uma função dependendo apenas de t . Como $f' = b$ e $b \neq 0$, segue que $g'' + g'^2 = 0$. Assim $g(t) = \log|t + \lambda| + \mu$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Com estas expressões para f e g em (4.43) obtemos

$$\lambda b^2 e^{-2\mu}((1 + e^{2\mu})t + \lambda(e^{2\mu} - 1)) = 0$$

Daí, obtemos um polinômio em t , e conseqüentemente $\lambda = 0$. Então temos que $tg' - 1 = 0$. Mas este caso está contido no caso anterior.

(5) **Assumindo $g'' + g'^2 = 0$.**

Supondo g não constante, como já sabemos, temos

$$g(t) = \log|t + \lambda| + \mu; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Então a equação (4.43) converte-se em:

$$\lambda((\lambda(-1 + e^{2\mu}) + (1 + e^{2\mu})t)f'^2 + (1 + e^{2\mu})(t + \lambda)f'') = 0.$$

Agora observe que se $\lambda = 0$, então $tg' - 1 = 0$, e este caso já foi estudado. Se $\lambda \neq 0$, nós temos um polinômio em t obtendo, com uma manipulação simples, um par de equações diferenciais, a saber,

$$(-1 + e^{2\mu})f'^2 + (1 + e^{2\mu})f'' = 0 \quad \text{e} \quad f'' + f'^2 = 0$$

O que implica,

$$\begin{aligned} (-1 + e^{2\mu})f'^2 - (1 + e^{2\mu})f'^2 &= 0 \\ f'^2(-1 + e^{2\mu} - 1 - e^{2\mu}) &= 0 \\ f'^2 &= 0 \end{aligned}$$

Logo temos que f é constante e este caso está contido no primeiro estudo desta seção.

Observação 4.4. *Destacamos que se considerarmos a curva α dada por $\alpha(s) = (f(s), 0, s)$, então a superfície é parametrizada por $\chi(s, t) = (f(s), te^s, s + g(t))$. Usando raciocínio análogo ao cálculo feito na (Afirmação 4.3 do apêndice), sua condição de minimalidade*

é dada por:

$$\begin{aligned} & -e^{2(s+g)}f'^3(g'' + g'^2) + e^{-2g}(f'(t^2g'^2 - 1 + t^2g'' - 3tg') - f''(tg' - 1)) \\ & + f'(-3tg'^3 - g'') + f''g'^2(1 - tg') = 0. \end{aligned}$$

Para esta equação, a função $f(s) = \alpha_0$ é uma solução para qualquer g . Isso nos diz que a superfície é um plano vertical $x = \alpha_0$.

Assim nós concluímos o seguinte resultado;

Proposição 4.1. *Exemplos de superfícies translacionais mínimas em Sol_3 do tipo III são os planos $z = z_0$, os planos $x = \alpha_0$ e as superfícies parametrizada por $\chi(s, t) = (s, te^f, f(s) + g(t))$ com*

1) $f(s) = \alpha$ e $g(t) = \log|t + \lambda| + \mu$; $\alpha, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

2) $f(s) = -\log|s + \lambda| + \mu$ e $g(t) = \alpha$; $\alpha, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

3) $g(s) = \log|t| + \mu$ e f é uma função arbitrária

No caso geral de (4.43), isto é, se $f''g'(tg' - 1)(g'' + g'^2) \neq 0$, nós dividimos a expressão (4.43) por $f'^2e^{-2g}(tg' - 1)$, e obtemos

$$\begin{aligned} & -\frac{e^{2f}}{f'^2}e^{4g}\frac{g'' + g'^2}{tg' - 1} + \left[\frac{t^2g'^2 + 1 - t^2g'' - 3tg' - 3tg' + e^2g(-2g'^2 + tg'^3 - g'')}{tg' - 1} \right] \\ & + \frac{f''}{f'^2}(1 + e^{2g}g'^2) = 0. \end{aligned} \tag{4.45}$$

derivando esta equação com relação a s , e observando que a expressão entre colchetes é uma função que depende unicamente de t , nós obtemos

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[-\frac{e^{2f}}{f'^2}e^{4g}\frac{g'' + g'^2}{tg' - 1} + \frac{f''}{f'^2}(1 + e^{2g}g'^2) \right] = 0$$

Isso nos diz que

$$-\left(\frac{e^{2f}}{f'^2}\right)' \left(e^{4g}\frac{g'' + g'^2}{tg' - 1}\right) + \left(\frac{f''}{f'^2}\right)' (1 + e^{2g}g'^2) = 0. \tag{4.46}$$

ou,

$$\frac{\left(\frac{e^{2f}}{f'^2}\right)}{\left(\frac{f''}{f'^2}\right)'} = \frac{1 + e^{2g}g'^2}{\frac{e^{4g}(g'' + g'^2)}{(tg' - 1)}}$$

Como f''/f'^2 é não constante, nós deduzimos de (4.46) que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{(e^{2f/f'^2})'}{(f''/f'^2)'} = \alpha = \frac{1 + e^{2g}g'^2}{e^{4g}((g'' + g'^2)/(tg' - 1))} \quad (4.47)$$

Se $\alpha = 0$, então $1 + e^{2g}g'^2 = 0$ o que é impossível. Assim, $\alpha \neq 0$. De (4.47), nós temos

$$\frac{e^{2f}}{f'^2} = \alpha \frac{f''}{f'^2} + b \quad (4.48)$$

$$e^{2g}g'^2 = \alpha e^{4g} \frac{g'' + g'^2}{tg' - 1} - 1 \quad (4.49)$$

com $b \in \mathbb{R}$ constante de integração. Finalmente, substituindo (4.48) e (4.49) em (4.45) obtemos:

$$(b - \alpha)g'^2 e^{6g} + (\alpha + b - 2\alpha tg' + g'^2)e^{4g} + (1 + t^2g')e^{2g} + t^2 = 0 \quad (4.50)$$

Note que as demais superfícies translacionais mínimas do tipo III deverão satisfazer às equações (4.48) e (4.50).

Apêndice

Neste apêndice, vamos determinar as equações de minimalidade do grupo de Lie Sol_3 , munido do sistema de coordenadas globais dado por $\phi : \text{Sol}_3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$\phi : \begin{pmatrix} e^z & 0 & x \\ 0 & e^{-z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (x, y, z).$$

e métrica invariante à esquerda dada por

$$ds^2 = e^{2z} dx^2 + e^{-2z} dy^2 + dz^2$$

Observamos que para as equações de superfície mínima, não precisamos que o vetor normal seja unitário. Assim trabalharemos com o vetor normal não normalizado \bar{N} , conforme discussão que precede a equação (4.10)

Afirmção 4.1. *A equação de minimalidade do tipo I em Sol_3 é dada por*

$$-f''g'^3 - e^{2g}(f''g' + f'g'^2 - f'g'') + e^{-2g}f'^3(g'^2 - g'') = 0.$$

Demonstração. De fato, como a parametrização destas superfícies é da forma $\mathbf{x}(s, t) = (s + t, f(s), g(t))$ então

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{x}_s = (1, f', 0) = \partial_x + f' \partial_y = e^g \mathbf{E}_1 + f' e^{-g} \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{x}_t = (1, 0, g') = \partial_x + g' \partial_z = e^g \mathbf{E}_1 + g' \mathbf{E}_3, \end{aligned}$$

É claro que \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 geram $T_p M$ se $f'^2 + g'^2 \neq 0$.

Um vetor ortogonal (não necessariamente unitário) em $P = (s, t)$ é dado por

$$\bar{N} = (f'g'e^{-g})E_1 - g'e^gE_2 - f'E_3.$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$E = \langle \chi_s, \chi_s \rangle = e^{2g} + f'^2e^{-2g}$$

$$F = \langle \chi_s, \chi_t \rangle = e^{2g}$$

$$G = \langle \chi_t, \chi_t \rangle = e^{2g} + g'^2$$

Por outro lado, fazendo uso das conexões de Levi-Civita em Sol_3 , isto é,

$$[\nabla_{E_i} E_j]_{ij} = \begin{bmatrix} -E_3 & 0 & E_1 \\ 0 & E_3 & -E_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\nu_1} \nu_1 &= \tilde{\nabla}_{\chi_s} \chi_s \\ &= \tilde{\nabla}_{\chi_s} (e^g E_1 + f' e^{-g} E_2) \\ &= e^g \tilde{\nabla}_{\chi_s} E_1 + f'' e^{-g} E_2 + f' e^{-g} \tilde{\nabla}_{\chi_s} E_2 \\ &= e^g \tilde{\nabla}_{(e^g E_1 + f' e^{-g} E_2)} E_1 + f'' e^{-g} E_2 + f' e^{-g} \tilde{\nabla}_{(e^g E_1 + f' e^{-g} E_2)} E_2 \\ &= e^g (e^g (-E_3)) + f'' e^{-g} E_2 + f' e^{-g} (f' e^{-g} E_3) \\ &= (f'^2 e^{-2g} - e^{2g}) E_3 + f'' e^{-g} E_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\nu_1} \nu_2 &= \tilde{\nabla}_{\chi_s} \chi_t \\ &= \tilde{\nabla}_{\chi_s} (e^g E_1 + g' E_3) \\ &= e^g \tilde{\nabla}_{\chi_s} E_1 + g' \tilde{\nabla}_{\chi_s} E_3 \\ &= e^g \tilde{\nabla}_{(e^g E_1 + f' e^{-g} E_2)} E_1 + g' \tilde{\nabla}_{(e^g E_1 + f' e^{-g} E_2)} E_3 \\ &= e^{2g} (-E_3) + g' e^g E_1 - g' f' e^{-g} E_2 \\ &= g' e^g E_1 - f' g' e^{-g} E_2 - e^{2g} E_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\nabla}_{v_2} v_2 &= \tilde{\nabla}_{x_t} x_t \\
 &= \tilde{\nabla}_{x_t} (e^g E_1 + g' E_3) \\
 &= g' e^g E_1 + e^g \tilde{\nabla}_{x_t} E_1 + g'' E_3 + g' \tilde{\nabla}_{x_t} E_3 \\
 &= g' e^g E_1 + e^g \tilde{\nabla}_{(e^g E_1 + g' E_3)} E_1 + g'' E_3 + g' \tilde{\nabla}_{(e^g E_1 + g' E_3)} E_3 \\
 &= g' e^g E_1 + e^{2g} (E_3) + g'' E_3 + g' e^g E_1 \\
 &= 2g'' e^g E_1 + (g'' - e^{2g}) E_3.
 \end{aligned}$$

E assim, temos

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{N}, \tilde{\nabla}_{v_1} v_1 \rangle &= \langle f' g' e^{-g} E_1 - g' e^g E_2 - f' E_3, f'' e^{-g} E_2 + (f'^2 e^{-2g} - e^{2g}) E_3 \rangle \\
 &= -f'' g' - f'^3 e^{-2g} + f' e^{2g},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{N}, \tilde{\nabla}_{v_1} v_2 \rangle &= \langle f' g' e^{-g} E_1 - g' e^g E_2 - f' E_3, g' e^g E_1 - f' g' e^{-g} E_2 - e^{2g} E_3 \rangle \\
 &= f' g'^2 + f' g'^2 + f' e^{2g} \\
 &= 2f' g'^2 + f' e^{2g},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{N}, \tilde{\nabla}_{v_1} v_2 \rangle &= \langle f' g' e^{-g} E_1 - g' e^g E_2 - f' E_3, e g' e^g E_1 + (g'' - e^{2g}) E_3 \rangle \\
 &= 2f' g'^2 - f' g'' + f' e^{2g}.
 \end{aligned}$$

De acordo com (4.10), a superfície parametrizada por $x(s, t) = \alpha(s) * \beta(t)$ é mínima se, e somente se,

$$\begin{aligned}
 &G \langle \bar{N}, \tilde{\nabla}_{e_1} e_1 \rangle - 2F \langle \bar{N}, \tilde{\nabla}_{e_1} e_2 \rangle + E \langle \bar{N}, \tilde{\nabla}_{e_2} e_2 \rangle \\
 &= (e^{2g} + f'^2) (-f'' g' - f'^3 e^{-2g} + f' e^{2g}) - 2e^{2g} (2f' g'^2 + f' e^{2g}) \\
 &\quad + (e^{2g} + f'^2 e^{-2g}) (2f' g'^2 - f' g'' + f' e^{2g}) \\
 &= -f'' g' e^{2g} - f'^3 + f' e^{4g} - f'' g'^3 - f'^3 g'^2 e^{-2g} \\
 &\quad + f' g'^2 e^{2g} - 4f' g'^2 e^{2g} - 2f' e^{4g} + 2f' g'^2 e^{2g} - f' g'' e^{2g} \\
 &\quad + f' e^{4g} + 2f'^3 g'^2 e^{-2g} - f'^3 g'' e^{-2g} + f'^3 = 0
 \end{aligned}$$

ou, após simplificar e organizar os termos da equação acima:

$$-f''g'^3 - e^{2g}(f''g' + f'g'^2 - f'g'') + e^{-2g}f'^3(g'^2 - g'') = 0$$

□

As superfícies translacionais mínimas correspondente $M(\alpha, \beta)$, do tipo II em Sol_3 são as superfícies parametrizadas parametrizada por

$$x(s, t) = \alpha(s) * \beta(t) = (s, f(s), 0) * (0, t, g(t)) = (s, t + f(s), g(t)).$$

Afirmção 4.2. *A equação de minimalidade do tipo II em Sol_3 é dada por*

$$-f''g'^3 + e^{-2g}(f'^2(fg'' - g'^2) - f''g') + e^{2g}(g'' + g'^2) = 0$$

Demonstração. Para estas superfícies $x(s, t) = (s, t + f(s), g(t))$, temos os campos coordenados (globais) dados por:

$$w_1 = x_s = (1, f', 0) = \partial_x + f'\partial_y = e^g E_1 + f'e^{-g} E_2$$

$$w_2 = x_t = (0, 1, g') = \partial_y + g'\partial_z = e^{-g} E_2 + g' E_3.$$

Um vetor normal não normalizado em cada ponto $P = x(s, t)$ é dado por

$$\bar{N} = f'g'e^{-g} E_1 - g'e^g E_2 + E_3$$

Assim os coeficientes da primeira forma fundamental são dados por

$$E = \langle x_s, x_s \rangle = e^{2g} + e^{-2g} f'^2$$

$$F = \langle x_s, x_t \rangle = f'e^{-2g}$$

$$G = \langle x_t, x_t \rangle = e^{-2g} + g'^2.$$

Determinando as derivadas covariantes, $\tilde{\nabla}_{w_j} w_i$ $j, i = 1, 2$

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{w_1} w_1 &= \tilde{\nabla}_{x_s} x_s \\ &= \tilde{\nabla}_{x_s} (e^g E_1 + e^{-g} f' E_2) \\ &= e^g \tilde{\nabla}_{x_s} E_1 + f'' e^{-g} E_2 + f' e^{-g} \tilde{\nabla}_{x_s} E_2 \\ &= f'' e^{-g} E_2 + (f'^2 e^{-2g} - e^{2g}) E_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\nabla}_{w_1} w_2 &= \tilde{\nabla}_{x_s} x_t \\
 &= \tilde{\nabla}_{x_s} (e^{-g} E_2 + g' E_3) \\
 &= e^{-g} \tilde{\nabla}_{x_s} E_2 + g' \tilde{\nabla}_{x_s} E_3 \\
 &= e^{-g} \tilde{\nabla}_{(e^g E_1 + f' e^{-g} E_2)} E_2 + g' \tilde{\nabla}_{(e^g E_1 + f' e^{-g} E_2)} E_3 \\
 &= e^g g' E_1 - f' g e^{-g} E_2 + e^{-2g} f' E_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\nabla}_{w_2} w_2 &= \tilde{\nabla}_{x_t} x_t \\
 &= \tilde{\nabla}_{x_t} (e^{-g} E_2 + g' E_3) \\
 &= -g' e^{-g} E_2 + e^{-g} \tilde{\nabla}_{x_t} E_2 + g'' E_3 + g' \tilde{\nabla}_{x_t} E_3 \\
 &= -g' e^{-g} E_2 + e^{-g}
 \end{aligned}$$

Tomando os produtos internos de $\tilde{\nabla}_{w_i} w_j$ com \bar{N} obtemos:

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{N}, \tilde{\nabla}_{w_1} w_1 \rangle &= \langle f' g' e^{-g} E_1 - g' e^g E_2 + E_3, f'' e^{-g} E_2 + (f'^2 e^{-2g} - e^{2g}) E_3 \rangle \\
 &= -g' e^g e^{-g} f'' + (f'^2 e^{-2g} - e^{2g}) \\
 &= -f'' g' + f'^{-2g} - e^{2g}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{N}, \tilde{\nabla}_{w_2} w_1 \rangle &= \langle f' g' e^{-g} E_1 - g' e^g E_2 + E_3, g' e^g E_1 - f' g' e^{-g} E_2 + e^{-2g} f' E_3 \rangle \\
 &= f' g' e^{-g} g' e^g + f' g'^2 e^g e^{-g} + e^{-2g} f' \\
 &= f' g'^2 + f' g'^2 + e^{-2g} f' \\
 &= 2f' g'^2 + e^{-2g} f'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{N}, \tilde{\nabla}_{w_2} w_2 \rangle &= \langle f' g' e^{-g} E_1 - g' e^g E_2 + e_3, -2g' e^{-g} E_2 + (g'' + e^{-2g}) E_3 \rangle \\
 &= 2g'^2 + g'' + e^{-2g}
 \end{aligned}$$

Logo, pela equação de superfície mínima (4.10), temos

$$(e^{-2} + g'^2)(-f''g' + f'^2e^{-2g} - e^{2g}) - 2f'e^{-2g}(2f'g'^2 + e^{-2g}f') \\ + (e^{2g} + e^{-2g}f'^2)(2g'^2 + g'' + e^{-2g}) = 0$$

donde vem que

$$-f''g'e^{-2g} + f'^2e^{-4g} - 1 - f''g'^3 + f'^2g'e^{-2g} - g'^2e^{2g} \\ - 4f'^2g'^2e^{-2g} - 2f'^2e^{-4g} + 2g'e^{2g} + g''e^{2g} + 1 \\ 2f'^2g'^2e^{-2g} + f'^2g''e^{-2g} + f'^2e^{-4g} = 0$$

ou ainda, simplificando e evidenciando, obtemos a equação de superfície mínima:

$$-f''g'^3 + e^{-2g}(f'^2(fg'' - g'^2) - f''g') + e^{2g}(g'' + g'^2) = 0$$

□

As superfícies translacionais mínimas correspondente $M(\alpha, \beta)$, do tipo III em Sol_3 são as superfícies parametrizadas parametrizada por

$$\chi(s, t) = \alpha(s) * \beta(t) = (s, 0, f(s)) * (0, t, g(t)) = (s, te^{f(s)}, f(s) + g(t))$$

Para esse tipo segue-se

Afirmção 4.3. *A equação de minimalidade do tipo III em Sol_3 é dada por*

$$-e^{2(f+g)}(g'' + g'^2) + e^{-2g}(t^2f'^2g'^2 + f'^2 - t^2f'^2g'' - 3tf'^2g' + tf''g' - f'') \\ - 2f'^2g'^2 + tf'^2g'^3 + tf''g'^3 - f''g'^2 - f'^2g'' = 0$$

Demonstração. Os campos coordenados destas superfícies são dados por:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_1 &= \chi_s \\
 &= (1, tf'e^f, f') \\
 &= \partial_x + tf'e^f\partial_y + f'\partial_z \\
 &= e^{f+g}\mathbf{E}_1 + tf'e^{-f-g} + f'\mathbf{E}_3 \\
 &= e^{f+g}\mathbf{E}_1 + tf'e^{-g}\mathbf{E}_2 + f'\mathbf{E}_3,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_2 &= \chi_t \\
 &= (0, e^f, g') \\
 &= e^f e^{-f-g}\mathbf{E}_2 + g'\mathbf{E}_3 \\
 &= e^{-g}\mathbf{E}_2 + g'\mathbf{E}_3
 \end{aligned}$$

Assim coeficientes da primeira forma fundamental são:

$$\begin{aligned}
 E &= e^{2(f+g)} + t^2 f'^2 e^{-2g} + f'^2 \\
 F &= tf'e^{-2g} + f'g' \\
 G &= e^{-2g} + g'^2
 \end{aligned}$$

O campo normal não normalizado é dado por :

$$\bar{\mathbf{N}} = f'(1 - tg')e^{-(t+g)}\mathbf{E}_1 + g'e^g\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_3.$$

As derivadas covariantes $\nabla_{\mathbf{u}_j}\mathbf{u}_i$ são:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\nabla}_{\mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 &= \tilde{\nabla}_{\chi_s}\chi_s \\
 &= \tilde{\nabla}_{\chi_s}(e^{f+g}\mathbf{E}_1 + tf'e^{-g}\mathbf{E}_2 + f'\mathbf{E}_3) \\
 &= f'e^{f+g}\mathbf{E}_1 + e^{f+g}\tilde{\nabla}_{\chi_s}\mathbf{E}_1 + te^{-g}f''\mathbf{E}_2 + te^{-g}f'\tilde{\nabla}_{\chi_s}\mathbf{E}_2 \\
 &\quad + f''\mathbf{E}_3 + f'\tilde{\nabla}_{\chi_s}\mathbf{E}_3 \\
 &= f'e^{f+g}\mathbf{E}_1 + e^{f+g}\tilde{\nabla}_{(e^{f+g}\mathbf{E}_1+tf'e^{-g}\mathbf{E}_2+f'\mathbf{E}_3)}\mathbf{E}_1 + te^{-g}f''\mathbf{E}_2 + te^{-g}f'\tilde{\nabla}_{(e^{f+g}\mathbf{E}_1+tf'e^{-g}\mathbf{E}_2+f'\mathbf{E}_3)}\mathbf{E}_2 \\
 &\quad + f''\mathbf{E}_3 + f'\tilde{\nabla}_{(e^{f+g}\mathbf{E}_1+tf'e^{-g}\mathbf{E}_2+f'\mathbf{E}_3)}\mathbf{E}_3 \\
 &= f'e^{f+g}\mathbf{E}_1 - e^{f+g}e^{f+g}\mathbf{E}_3 + te^{-g}f''\mathbf{E}_2 + te^{-g}f'(te^{-g}f'\mathbf{E}_3 - f'\mathbf{E}_2) \\
 &\quad + f''\mathbf{E}_3 + f'(e^{f+g}\mathbf{E}_1 - te^{-g}f'\mathbf{E}_2) \\
 &= (2f'e^{f+g})\mathbf{E}_1 + t(f'' - f'^2)e^{-g}\mathbf{E}_2 + (f'' - e^{2(f+g)} + t^2f'^2e^{-2g})\mathbf{E}_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\nabla}_{\mathbf{u}_1} \mathbf{u}_2 &= \tilde{\nabla}_{x_s} \chi_t \\
 &= \tilde{\nabla}_{x_s} (e^{-g} \mathbf{E}_2 + g' \mathbf{E}_3) \\
 &= e^{-g} \tilde{\nabla}_{x_s} \mathbf{E}_2 + g' \tilde{\nabla}_{x_s} \mathbf{E}_3 \\
 &= e^{-g} \tilde{\nabla}_{(e^{f+g} \mathbf{E}_1 + t f' e^{-g} \mathbf{E}_2 + f' \mathbf{E}_3)} \mathbf{E}_2 + g' \tilde{\nabla}_{(e^{f+g} \mathbf{E}_1 + t f' e^{-g} \mathbf{E}_2 + f' \mathbf{E}_3)} \mathbf{E}_3 \\
 &= e^{-g} e^{f+g} \tilde{\nabla}_{\mathbf{E}_1} \mathbf{E}_2 + e^{-g} t f' e^{-g} \tilde{\nabla}_{\mathbf{E}_2} \mathbf{E}_2 + e^{-g} f' \tilde{\nabla}_{\mathbf{E}_3} \mathbf{E}_2 \\
 &\quad + g' e^{f+g} \tilde{\nabla}_{\mathbf{E}_1} \mathbf{E}_3 + g' t f' e^{-g} \tilde{\nabla}_{\mathbf{E}_2} \mathbf{E}_3 + g' f' \tilde{\nabla}_{\mathbf{E}_3} \mathbf{E}_3 \\
 &= g' e^{f+g} \mathbf{E}_1 - t f' g' e^{-g} \mathbf{E}_2 + t f' e^{-2g} \mathbf{E}_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\nabla}_{\mathbf{u}_2} \mathbf{u}_2 &= \tilde{\nabla}_{x_t} \chi_t \\
 &= \tilde{\nabla}_{x_t} (e^{-g} \mathbf{E}_2 + g' \mathbf{E}_3) \\
 &= -g' e^{-g} \mathbf{E}_2 + e^{-g} \tilde{\nabla}_{x_t} \mathbf{E}_2 + g'' \mathbf{E}_3 + g' \tilde{\nabla}_{x_t} \mathbf{E}_3 \\
 &= -g' e^{-g} \mathbf{E}_2 + e^{-g} \tilde{\nabla}_{(e^{-g} \mathbf{E}_2 + g' \mathbf{E}_3)} \mathbf{E}_2 + g'' \mathbf{E}_3 + g' \tilde{\nabla}_{(e^{-g} \mathbf{E}_2 + g' \mathbf{E}_3)} \mathbf{E}_3 \\
 &= -g' e^{-g} \mathbf{E}_2 + e^{-2g} \tilde{\nabla}_{\mathbf{E}_2} \mathbf{E}_2 + g' e^{-g} \tilde{\nabla}_{\mathbf{E}_3} \mathbf{E}_2 + g'' \mathbf{E}_3 + g' e^{-g} \tilde{\nabla}_{\mathbf{E}_2} \mathbf{E}_3 + g'^2 \tilde{\nabla}_{\mathbf{E}_3} \mathbf{E}_3 \\
 &= -2g' e^{-g} \mathbf{E}_2 + (g'' + e^{-2g}) \mathbf{E}_3
 \end{aligned}$$

Logo, tomando os produtos internos de $\nabla_{\mathbf{u}_i} \mathbf{u}_i$ com $\bar{\mathbf{N}}$, em cada ponto $\mathbf{P} = (s, t)$ nós obtemos

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{\mathbf{N}}, \tilde{\nabla}_{\mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 \rangle &= \langle f'(1 - t g') e^{-(f+g)} \mathbf{E}_1 + g' e^g \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_3, (2f' e^{f+g}) \mathbf{E}_1 \\
 &\quad + t(f'' - f'^2) e^{-g} \mathbf{E}_2 + (f'' - e^{2(f+g)} + t^2 f'^2 e^{-2g}) \mathbf{E}_3 \rangle \\
 &= f'(1 - t g')(2f' e^{f+g}) e^{(f+g)} + t g'(f'' - f'^2) e^g e^{-g} - (f'' - e^{2(f+g)} + t^2 f'^2 e^{-2g}) \\
 &= 2f'^2 - 3t f'^2 g' + t f'' g' - f'' + e^{2(f+g)} - t^2 f'^2 e^{-2g}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{\mathbf{N}}, \tilde{\nabla}_{\mathbf{u}_1} \mathbf{u}_2 \rangle &= \langle f'(1 - t g') e^{-(f+g)} \mathbf{E}_1 + g' e^g \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_3, g' e^{f+g} \mathbf{E}_1 - t f' g' e^{-g} \mathbf{E}_2 + t f' e^{-2g} \mathbf{E}_3 \rangle \\
 &= f'(1 - t g') g' - g' t f' g' - t f' e^{-2g} \\
 &= f' g' - 2t f' g'^2 - t f' e^{-2g}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{\mathbf{N}}, \tilde{\nabla}_{\mathbf{u}_2} \mathbf{u}_2 \rangle &= \langle f'(1 - t g') e^{-(f+g)} \mathbf{E}_1 + g' e^g \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_3, -2g' e^{-g} \mathbf{E}_2 + (g'' + e^{-2g}) \mathbf{E}_3 \rangle \\
 &= -2g'^2 - g'' - e^{-2g}
 \end{aligned}$$

Então, após substituição em (4.10) e devidas simplificações, obtemos

$$\begin{aligned} & -e^{2(f+g)}(g'' + g'^2) + e^{-2g}(t^2 f'^2 g'^2 + f'^2 - t^2 f'^2 g'' - 3t f'^2 g' + t f'' g' - f'') \\ & -2f'^2 g'^2 + t f'^2 g'^3 + t f'' g'^3 - f'' g'^2 - f'^2 g'' = 0 \end{aligned}$$

□

Bibliografia

- [1] do Carmo, M. P. -*Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides - IMPA, 2015.
- [2] do Carmo, M. P. -*Notas de um curso de Grupos de Lie*. IMPA, Rio de Janeiro, 1974.
- [3] do Carmo, M. P. -*Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Textos Universitários, Rio de Janeiro, SBM 2005.
- [4] H. F. Scherk, -*Bemerkungen über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen*. J. Reine Angew. Math. 13 (1835), 185-208.
- [5] Barbosa J.L. Earp R. Sá -*Geometric Methods and Nonlinear Analysis in Hyperbolic Space*. X Escola de Geometria Diferencial, 1998.
- [6] John M. Lee, -*Riemannian Manifolds - An Introduction to Curvature*. Graduate Texts in Mathematics-Springer, 1997.
- [7] Lima, E.L., -*Varietades Diferenciáveis* . Publicações Matemáticas, IMPA, 2007.
- [8] Oliveira Neto, G.L -*Superfícies Invariantes no Espaço Homogêneo Sol com Curvatura Constante*. Dissertação de Mestrado em Matemática, UFPB, João Pessoa, 2012.
- [9] R. López, -*Minimal translation surfaces in hyperbolic space*. Beitr. Algebra Geom. 52 (2011), 105-112.
- [10] R. López and M. I. Munteanu, -*Minimal translation surfaces in Sol³* J. Math. Soc. Japan, 64 (2012), 985-1003 105-112.
- [11] R. López , -*Constant Mean Curvature Surfaces with Boundary*. Springer Monographs in Mathematics, 2013.
- [12] S. Gudmundsson, -*An Introduction to Riemannian Geometry*. Lund University, 2016.

-
- [13] Seo K. - *Translation hypersurfaces with constant curvature in space forms* Osaka J. Math. 50, 631-641 (2013).