



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

**Solução Fraca para um Sistema Não-Linear
via Integral Hilbertiana**

por

Cleyton Natanael Lopes de Carvalho Cunha

Teresina, Julho de 2010

Cleyton Natanael Lopes de Carvalho Cunha

Dissertação de Mestrado:

**Solução Fraca para um Sistema Não-Linear
via Integral Hilbertiana**

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Marcondes Rodrigues Clark

Teresina, Julho de 2010

C 972s Cunha, Cleyton Natanael Lopes de Carvalho.

Solução fraca para um Sistema Não Linear via Integral Hilbertiana/
Cleyton Natanael Lopes de Carvalho Cunha – Teresina: 2010.

114 fls

Dissertação (Mestrado em Matemática)

UFPI

Orientador: Prof. Dr Marcondes Rodrigues Clark

1. Matemática-Análise. 2. Equações Diferenciais Parciais. I. Título.

C.D.D - 515

Dedico este trabalho a meu pai Antônio Erisvaldo, minha mãe Maria Arlete, minha irmã Carla Noara, meus irmãos Cássio Nairon e Carlos Emanuel, a minha namorada Antônia Carla, minhas avós Albertiza Lopes de Carvalho e Gonçalves Rosa Teixeira e a meus avôs Francisco Pereira de Carvalho e Pedro José da Cunha (In memoriam).

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pelas oportunidades que tive e por está presente em todos os momentos de minha vida.

Agradeço em especial à minha mãe Maria Arlete pelos valores que me ensinou, dedicação e amor.

Agradeço aos meus pais Antônio Erisvaldo e Maria Arlete pela educação que me proporcionaram e por me incentivar a completar mais esta etapa em minha vida.

Agradeço aos meus irmãos, ao Iran Júnior, a Gleidiane e ao Christino pela convivência divertida, incentivo e auxílio quando necessitei.

Agradeço aos meus tios, tias, primos e a minha madrinha pelo incentivo e paciência, em especial a minhas avós: Albetiza e Gonçala e meus avôs: Francisco e Pedro Cunha (In Memoriam) pela simplicidade e exemplo de vida.

Agradeço à minha namorada Antônia Carla pela compreensão, dedicação, carinho e por está sempre ao meu lado. Agradeço ainda à família da minha namorada por sempre me receber de braços abertos.

Agradeço ao Professor e grande amigo Marcondes Rodrigues Clark pelas ótimas conversas, excelente orientação científica e por acreditar em mim.

Agradeço aos professores que tive na UFPI tanto na graduação como no mestrado, em especial os Professores Newton Luis Santos, Roger Peres de Moura e novamente ao Professor Marcondes Rodrigues Clark.

Agradeço aos Professores Alexandre Oliveira Marinho (UFPI) e Osmundo Alves de Lima (UEPB) por terem aceito participar da banca que avaliará este trabalho, pelo apoio e pelas valiosas sugestões. Agradeço ainda ao Professor Manuel Milla Miranda da UFRJ o

qual se propôs a ajudar-me na construção deste trabalho.

Agradeço aos amigos que fiz na graduação e no mestrado: Yuri, Raimundinho, Renan, Diego, Maurício, Pitágoras, João Santos, Domingos, Ítallo, Gilberto, Daniel, Venâncio, Pedro Jorge e Arimatéa . Agradeço em especial ao Yuri, Renan, Diego e Raimundinho pelas boas conversas sobre matemática e convivência agradável.

Agradeço a FAPEPI e a CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho estuda-se a existência e unicidade local de solução do problema misto associado ao sistema não-linear abstrato

$$\begin{cases} \mathbf{u}'' + \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{M}(\cdot, \| \mathbf{A}^{1/2}\mathbf{u} \|^2)\mathbf{A}\mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} = \mathbf{f}, \\ \boldsymbol{\theta}' + \mathbf{A}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{u}' = \mathbf{g}, \end{cases} \quad (1)$$

onde \mathbf{A} é um operador auto-adjunto e positivo num espaço de Hilbert separável \mathbf{H} e \mathbf{M} uma função real.

Palavras-Chave: Solução Fraca Local, Integral Hilbertiana, Sistema Não Linear.

Abstract

In this work study the local existence and uniqueness of solution for the mixed problem associated to the nonlinear abstract system

$$\begin{cases} u'' + Au + M(\cdot, \|A^{1/2}u\|^2)Au + \theta = f, \\ \theta' + \lambda\theta + u' = g, \end{cases}$$

where A is a positive self-adjoint operator in a separable Hilbert space H and M is a real function.

Keywords: Local Weak Solution, Integral Hilbertiana, Non Linear System.

Sumário

Introdução	1
1 Notação e Resultados Preliminares	4
1.1 Resultados Auxiliares	4
1.1.1 Desigualdades	7
1.2 Distribuições	9
1.3 Cálculo Espectral	14
2 Integral Hilbertiana & Teorema de Diagonalização	20
3 Existência e Unicidade de Solução Fraca	46
3.1 Problema Truncado	53
3.1.1 Estimativas I	64
3.2 Prova do Teorema 3.2	66
3.2.1 Estimativas II	67
3.2.2 Análise do Termo Não Linear	72
3.3 Prova do Teorema 3.1	78
3.4 Unicidade de Solução	82
4 Aplicação	87
A Elementos da Teoria Espectral	90
Principais Notações	101
Bibliografia	103

Introdução

Nesta dissertação estudamos o sistema (1) supondo A um operador positivo, auto-adjunto definido num espaço de Hilbert separável H e, fixado um número real $T > 0$, $M \in C^1([0, T] \times [0, +\infty))$ uma função satisfazendo hipóteses adequadas. A primeira equação do sistema (1) no caso concreto quando $A = -\Delta$, $M = M(\int_{\Omega} \|\nabla u(x, \cdot)\|^2 dx)$ e $\theta = 0$, é o modelo não-linear das vibrações transversais da corda elástica presa nos extremos, isto é, a equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u - M\left(\int_{\Omega} \|\nabla u(x, \cdot)\|^2 dx\right)\Delta u = f, \quad (2)$$

onde denotamos por Δ o operador de Laplace, ∇ é o operador gradiente e M é uma função real definida em $[0, +\infty)$.

A equação (2) no caso onde $M \in C^1([0, +\infty); \mathbb{R})$ com $M(\xi) \geq 0$ foi estudada por Matos [31] em um domínio aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado ou não. Em tal trabalho o autor fez uso do Teorema de Diagonalização, cf. Capítulo 2. Em Clark and Lima [8], o qual é o artigo base desta dissertação, os autores generalizam o trabalho de Matos [31] utilizando as mesmas técnicas.

Problemas relacionados com a equação (2), mais precisamente a equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(P_0 + P \int \|\nabla u(x, \cdot)\|^2 dx\right)\Delta u = 0, \quad (3)$$

foram estudados por diversos autores os quais, entre outros, citamos: Arosio and Spagnolo [1], Dickey [10], Lions [21], Medeiros and Milla Miranda [29], Matos [30], Menzala [33], Nishihara [37]. Todos os autores citados acima trabalharam no caso em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado ou no modelo abstrato

$$u'' + M_0(|A^{1/2}u|^2)Au = f, \quad (4)$$

supondo que o operador A tem espectro discreto e usando métodos de compacidade, exceto em Matos [30] e Dickey [10]. Segundo Matos [30], a fim de tratar do caso abstrato quando não temos compacidade o Professor J. L. Lions propôs estudar o modelo (4) fazendo uso do Teorema de Diagonalização para operadores auto-adjuntos e coercivos.

Neste trabalho estudamos o sistema (1) independente de compacidade, seguindo as idéias do Professor J. L. Lions.

O plano de apresentação desta dissertação é o seguinte:

No Capítulo 1 listamos alguns resultados clássicos, os quais serão enunciados sem demonstração e com indicações das referências para possíveis consultas, e fixamos notações que serão utilizados no decorrer deste trabalho.

No Capítulo 2 apresentamos de maneira clara os conceitos e resultados utilizados em todo os capítulos seguintes. Definimos os campos de espaços de Hilbert e a Integral Hilbertiana relativa a tais campos. Estudamos ainda os espaços \mathcal{H}_α , $\alpha \in \mathbb{R}$, bem como algumas de suas propriedades. Enunciamos e demonstramos o Teorema de Diagonalização, o qual desempenha um papel fundamental em toda esta dissertação.

No Capítulo 3 provamos o principal resultado desta dissertação: o Teorema de Existência de Solução para o sistema (1). A idéia da prova pode ser resumida como segue. Em primeiro lugar consideramos para cada $\epsilon > 0$ o sistema perturbado

$$\begin{cases} u_\epsilon'' + A_\epsilon u_\epsilon + M(\cdot, \|A_\epsilon^{1/2} u_\epsilon\|^2) A_\epsilon u_\epsilon + \theta_\epsilon = f, \\ \theta_\epsilon' + A_\epsilon \theta_\epsilon + u_\epsilon' = g, \end{cases} \quad (5)$$

onde $A_\epsilon = A + \epsilon I$ é um operador auto-adjunto e coercivo, isto é $A_\epsilon \geq \epsilon I$. Assim A_ϵ está nas condições do Teorema de Diagonalização e formalmente aplicamos o operador de diagonalização \mathcal{U}_ϵ ao sistema (5) obtendo

$$\begin{cases} v_\epsilon'' + \lambda v_\epsilon + M(\cdot, \|v_\epsilon(\cdot)\|_{1/2}^2) \lambda v_\epsilon + \phi_\epsilon = f_\epsilon = \mathcal{U}_\epsilon(f), \\ \phi_\epsilon' + \lambda \phi_\epsilon + v_\epsilon' = g_\epsilon = \mathcal{U}_\epsilon(g), \end{cases} \quad (6)$$

onde $v_\epsilon = \mathcal{U}(u_\epsilon)$ e $\phi_\epsilon = \mathcal{U}(\theta_\epsilon)$. Notemos que a solução de (5) será dada por $(u_\epsilon, \theta_\epsilon) = (\mathcal{U}_\epsilon^{-1}(v_\epsilon), \mathcal{U}_\epsilon^{-1}(\phi_\epsilon))$, sendo o par $(v_\epsilon, \phi_\epsilon)$ uma solução de (6). Na Seção 3.1 estudamos o Problema Truncado associado a (6), ou seja, para cada $k \in \mathbb{N}$ buscamos uma solução $(v_{\epsilon k}(t, \lambda), \phi_{\epsilon k}(t, \lambda))$ de (6) tal que $v_{\epsilon k}(t, \lambda) = \phi_{\epsilon k}(t, \lambda) = 0$ para quase todo $\lambda \in [k, +\infty)$. Na Seção 3.2 obtemos estimativas, válidas para $t \in [0, T_0]$, independentes de k e ϵ e, obtemos uma solução local de (6) como limite das soluções truncadas $(v_{\epsilon k}(t, \lambda), \phi_{\epsilon k}(t, \lambda))$ quando $k \rightarrow +\infty$. Na Seção 3.3 obtemos via Teorema de Áscoli-Arzelá uma solução local de (1) como limite de (5), numa topologia apropriada, quando $\epsilon \rightarrow 0^+$. Na Seção 3.4 demonstramos um resultado de unicidade.

No Capítulo 4 aplicamos os resultados obtidos no Capítulo 3 considerando $A = -\Delta$.

Encerramos com um Apêndice, apresentando alguns elementos da Teoria Espectral que achamos necessários para um melhor entendimento desta dissertação.

Capítulo 1

Notação e Resultados Preliminares

Neste capítulo fixaremos as notações e apresentaremos alguns resultados importantes para o cerne deste trabalho. Alguns resultados não serão demonstrados, no entanto daremos referências onde as mesmas poderão ser encontradas.

1.1 Resultados Auxiliares

Teorema 1.1. *(Beppo Levi) Seja (f_n) uma sequência crescente e não-negativa de funções mensuráveis tais que $f = \lim f_n$. Então*

$$\int f = \lim \int f_n.$$

Demonstração. Ver [40]. □

Corolário 1. *Sejam (f_n) uma sequência não-negativa de funções mensuráveis e $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$. Então*

$$\int f = \sum_{n=1}^{+\infty} \int f_n.$$

Demonstração. Ver [40]. □

Teorema 1.2. *(Convergência Dominada) Seja $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável sobre um espaço mensurável E da reta e seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções reais integráveis definidas em E tais que*

$$|f_n(x)| \leq g(x), \text{ q.s. em } E, \forall n.$$

Se $\{f_n\}$ converge quase sempre em E para uma função mensurável $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, então f é integrável sobre E e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n = \int_E f.$$

Demonstração. Ver [40]. □

Teorema 1.3. (*Radon - Nikodym*) Sejam μ e ν duas medidas positivas, σ -finitas definidas numa σ -Álgebra \mathfrak{M} e suponhamos que ν é absolutamente contínua com relação a μ , isto é, se $E \in \mathfrak{M}$ e $\mu(E) = 0$, tem-se $\nu(E) = 0$. Nestas condições existe uma função não negativa $g \in L^1(\mu)$ tal que

$$\nu(E) = \int_E g d\mu, \quad \forall E \in \mathfrak{M}. \quad (1.1)$$

Demonstração. Ver [40]. □

Teorema 1.4. (*Limitação Uniforme*) Sejam E um espaço de Banach e F um espaço normado. Seja $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma família de transformações lineares contínuas de E em F tal que para cada $x \in E$,

$$\sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha x\|_F < \infty.$$

Então,

$$\sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty.$$

Demonstração. Ver [2], [15] ou [39]. □

Teorema 1.5. (*Banach-Alaoglu-Bourbaki*) Seja E um espaço normado. O conjunto $B_{\leq 1}(0, X) = \{x \in E; \|x\|_E \leq 1\}$ é compacto na topologia fraca-*

Demonstração. Ver [2], [15] ou [39]. □

Corolário 2. Sejam E um espaço normado separável e (f_n) uma sequência fortemente limitada em E' . Então (f_n) possui uma subsequência que converge fraca-*

Demonstração. Ver [15]. □

Teorema 1.6. (*Representação de Riesz-Fréchet*) Sejam $(H; (\cdot, \cdot)_H)$ um espaço de Hilbert e H' seu dual topológico. Dada $\varphi \in H'$, existe um único elemento $f \in H$ tal que

$$\langle \varphi, v \rangle = (f, v)_H, \quad \forall v \in H.$$

Além disso

$$\|f\|_H = \|\varphi\|_{H'}.$$

Demonstração. Ver [2], [15] ou [39]. □

Teorema 1.7. (*Lema de Riesz - Lorch*) Sejam $(H, (\cdot, \cdot))$ um espaço de Hilbert e $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de subespaços de H , dois a dois ortogonais gerando H , isto é, $\sum H_n = H$. Se $u \in H$ representarmos por u_n sua projeção sobre H_n . Seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de operadores lineares com domínio e imagem em H tais que, para cada $n \in \mathbb{N}$, A_n reduz-se em H_n a um operador limitado e auto-adjunto de H_n em H_n . Então, existe um e somente um operador linear auto-adjunto A com domínio e imagem em H , em geral não limitado, cuja restrição a H_n é igual a A_n . Seu domínio $D(A)$ é constituído pela coleção de vetores $u \in H$ tais que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \|A_n u_n\|^2$ é convergente. Para todo $u \in D(A)$

$$\text{tem-se } Au = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n u_n.$$

Demonstração. Ver [25]. □

Teorema 1.8. (*Ponto Fixo de Banach*) Se M é um espaço métrico completo, toda contração $f : M \rightarrow M$ possui um único ponto fixo em M . Mais precisamente, se escolhermos um ponto $x_0 \in M$ e pusermos $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, ..., $x_{n+1} = f(x_n)$, ... a sequência (x_n) converge em M e $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ é o único ponto fixo de f .

Demonstração. Ver [24]. □

Teorema 1.9. (*Áscoli-Arzelá*) Seja $E \subset C(K, N) = \{f : K \rightarrow N; f \text{ é contínua}\}$, onde K e N são espaços métricos sendo, K compacto. A fim de que E seja relativamente compacto em $C(K, N)$, é necessário e suficiente que:

1°) E seja equicontínuo;

2°) Para cada $x \in K$, o conjunto $E(x) = \{f(x); f \in E\}$ seja relativamente compacto em N , isto é, toda sequência de E limitada admite uma subsequência que converge forte em $C(K, N)$.

Demonstração. Ver [24]. □

Seja D um subconjunto aberto de \mathbb{R}^{n+1} cujos os elementos serão denotados com (t, x) onde $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$ e seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função não necessariamente contínua.

Definição 1.1. Diz-se que f satisfaz as condições de Carathéodory sobre D se:

- 1) $f(t, x)$ é mensurável em t para cada x fixo,
- 2) $f(t, x)$ é contínua em x para cada t fixo,
- 3) para cada compacto $U \subset D$ existe uma função real integrável $m_U(t)$ tal que $|f(t, x)| \leq m_U(t)$, $\forall (t, x) \in U$.

Consideremos o retângulo $R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}; |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b\}$, $a, b > 0$.

Teorema 1.10. Seja $f : R \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre R . Então existe uma solução do PVI:

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta$, $\beta > 0$.

Demonstração. Ver [9]. □

Corolário 3. Seja $D = [0, T] \times B$, onde $T > 0$ é finito e $B = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq b\}$, e f satisfazendo as duas primeiras condições de Carathéodory sobre D e existe uma função integrável $m(t)$ tal que $|f(t, x)| \leq m(t)$, $\forall (t, x) \in D$. Seja $\phi(t)$ uma solução de

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(0) = x_0, \|x_0\| \leq b. \end{cases}$$

Suponha que em qualquer intervalo I onde ϕ está definida se tenha $\|\phi(t)\| \leq M$, $\forall t \in I$, M independente de I e $M < b$. Então ϕ pode ser prolongada até $[0, T]$.

Demonstração. Ver [9]. □

1.1.1 Desigualdades

A seguir listamos duas importantes desigualdades que serão usadas neste trabalho.

- Desigualdade de Gronwall

Seja C uma constante não-negativa e sejam $u \geq 0$ q.s. em (s, T) uma função integrável em (s, T) e $\varphi : (s, T) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e não-negativa, tal que

$$\varphi(t) \leq C + \int_s^t u(\xi)\varphi(\xi)d\xi, \quad \forall t \in [s, T].$$

Então

$$\varphi(t) \leq Ce^{\int_s^t u(\xi)d\xi}, \quad \forall t \in [s, T].$$

Demonstração. Ver [6]. □

• **Desigualdade de Gronwall Generalizada**

Sejam $v, f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ funções integráveis, não-negativas, e $\alpha : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, não-negativa, tais que

$$v(t) \leq v_0 + \int_0^t f(s)ds + \int_0^t \alpha(s)v(s)ds,$$

onde v_0 é uma constante não-negativa. Então,

$$v(t) \leq \left(v_0 + \int_0^t f(s)ds \right) e^{\int_0^t \alpha(s)ds}.$$

Demonstração. Ver [6]. □

• **Desigualdade de Young**

Sejam p e q índices conjugados, isto é, $1 \leq p, q \leq \infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q, \quad \forall a, b \geq 0.$$

Demonstração. Ver [5]. □

• **Desigualdade de Hölder**

Sejam p e q índices conjugados $p, q \in [1, \infty]$. Se $u \in L^p(a, b)$ e $v \in L^q(a, b)$, então $uv \in L^1(a, b)$ e

$$\int_a^b |uv| \leq \|u\|_p \|v\|_q. \tag{1.2}$$

Demonstração. Ver [40]. □

1.2 Distribuições

Seja u uma função real mensurável definida em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e seja $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ a família constituída por todos os subconjuntos abertos $\mathcal{O}_i \subset \Omega$ tais que $u|_{\mathcal{O}_i} \equiv 0$ q.s.. Considera-se o subconjunto (aberto) $\mathcal{O} = \cup_{i \in I} \mathcal{O}_i$. Então, $u = 0$ q.s. em \mathcal{O} , donde define-se o suporte de u , $\text{supp}(u)$, como sendo o subconjunto

$$\text{supp}(u) = \Omega \setminus \mathcal{O}.$$

Note que $\text{supp}(u)$ é sempre um subconjunto fechado de Ω . Quando u é contínua tem-se

$$\text{supp}(u) = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}},$$

fecho este tomado em Ω .

Sejam u e v funções numéricas, mensuráveis em Ω e $\beta \in \mathbb{K}$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Mostra-se que

$$\text{supp}(u + v) \subset \text{supp}(u) \cup \text{supp}(v)$$

$$\text{supp}(uv) \subset \text{supp}(u) \cap \text{supp}(v)$$

$$\text{supp}(\beta u) = \beta \text{supp}(u), \text{ se } \beta \neq 0.$$

Sejam X um espaço de Banach e fixemos sobre $(0, T)$ a medida de Lebesgue. Uma função u definida em $(0, T)$ com valores em X é mensurável quando existir uma sequência de funções simples (φ_n) tal que

$$\varphi_n(t) \longrightarrow u(t), \text{ em } X, \text{ quase sempre em } (0, T).$$

Definição 1.2. Uma função $u : (0, T) \longrightarrow X$ é integrável no sentido de Bochner ou Bochner integrável, quando for mensurável e a função $t \in (0, T) \longmapsto \|u(t)\|_X$ é integrável à Lebesgue.

Neste caso, a integral de Bochner de u é o vetor de X denotado por $\int_0^T u(t) dt$ e caracterizado por

$$\left\langle f, \int_0^T u(t) dt \right\rangle_{X', X} = \int_0^T \langle f, u(t) \rangle_{X', X} dt, \quad \forall f \in X'$$

$$\left\| \int_0^T u(t) dt \right\|_X \leq \int_0^T \|u(t)\|_X dt,$$

sendo X' o dual de X . Em [32] prova-se que a integral de Bochner satisfaz as mesmas propriedades da integral de Lebesgue no que diz respeito a linearidade bem como alguns teoremas importantes como o da convergência dominada e o lema de Fatou.

Dados um espaço de Banach X e um número real $T > 0$, denotamos por $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p \leq \infty$, o espaço das (classes de) funções a valores vetoriais $u : (0, T) \rightarrow X$ que são mensuráveis a Lebesgue e tais que a aplicação $t \mapsto \|u(t)\|_X$, definida quase sempre em $(0, T)$, está em $L^p(0, T)$.

Em $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$, a função

$$|\cdot|_{p,X} : L^p(0, T; X) \rightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$|u|_{p,X} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

é uma norma em $L^p(0, T; X)$, o qual é Banach com a mesma.

No caso $p = \infty$, a norma em $L^\infty(0, T; X)$ é dada por

$$|u|_{\infty,X} = \sup_{t \in (0,T)} \text{ess} \|u(t)\|_X,$$

e $L^\infty(0, T; X)$ com esta norma é um espaço de Banach.

Observação 1.1. No caso $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, então $L^2(0, T; X)$ possui uma estrutura hilbertiana definida pelo produto interno

$$(u, v) = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt, \quad \forall u, v \in L^2(0, T; X).$$

Temos que o espaço de Banach $L^p(0, T; X)$, $1 < p < \infty$, é reflexivo se X o for. Se X é separável então o dual topológico de $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$, é separável e identifica-se com o espaço de Banach $L^q(0, T; X')$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Neste caso temos também que $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$, também é separável. Para um estudo detalhado deste assunto ver [12], [14] ou [38].

Um outro espaço funcional que será considerado nesta dissertação é o espaço $C^0([0, T]; X)$ das funções vetoriais $u : [0, T] \rightarrow X$ que são contínuas. Este espaço vetorial equipado com a norma

$$|u|_{C^0([0,T];X)} = \max_{t \in [0,T]} \{\|u(t)\|_X\}$$

é um espaço de Banach.

Por $\mathcal{D}'(0, T; X)$ estamos representando o espaço das distribuições vetoriais sobre $(0, T)$ com valores em X , isto é, o espaço vetorial das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0, T)$ em X , onde $\mathcal{D}(0, T)$ representa o espaço vetorial $C_0^\infty(0, T)$ das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em $(0, T)$, munido da seguinte noção de convergência: Uma sequência $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de $C_0^\infty(0, T)$ converge para zero em $\mathcal{D}(0, T)$ quando existir um suconjunto compacto K de $(0, T)$ tal que $\text{supp}(u_j) \subset K$, $j = 1, 2, \dots$, e, para cada $j \in \mathbb{N}$ a sequência $(\frac{d^n u_j}{dt^n})$ converge uniformemente em K . Quando $X = \mathbb{R}$ o espaço $\mathcal{D}'(0, T; X)$ será denotado por $\mathcal{D}'(0, T)$ e denominado espaço das distribuições escalares sobre $(0, T)$.

Exemplo 1.2.1. Fixado $u \in L^p(0, T; X)$, $1 \leq p \leq \infty$, defina a aplicação

$$T_u : \mathcal{D}(0, T) \rightarrow X$$

pondo

$$T_u(\phi) = \int_0^T u(s)\phi(s)ds, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(0, T).$$

Prova-se a seguir que T_u é uma distribuição vetorial sobre $(0, T)$. Com efeito, em primeiro lugar note que o cálculo de $\int_0^T u(s)\phi(s)ds$, representa um vetor em X , em outras palavras temos que a integral na expressão de T_u é uma integral de Bochner. Daí segue a linearidade de T_u . Quanto a continuidade, seja (ϕ_n) uma sequência em $\mathcal{D}(0, T)$, convergindo a zero em $\mathcal{D}(0, T)$. Provemos que

$$T_u(\phi_n) \rightarrow 0 \text{ em } X.$$

Ora, pela desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned} \|T_u(\phi_n)\|_X &= \left\| \int_0^T u(s)\phi_n(s)ds \right\|_X \leq \int_0^T \|u(s)\|_X |\phi_n(s)| ds \\ &\leq \left(\int_0^T \|u(s)\|_X^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^T |\phi_n(s)|^q ds \right)^{\frac{1}{q}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \end{aligned}$$

ou seja

$$\|T_u(\phi_n)\|_X \leq \|u\|_{p, X} \|\phi_n\|_{L^q(0, T)}.$$

Como $\phi_n \rightarrow 0$ uniformemente em $\mathcal{D}(0, T)$, segue que $\|\phi_n\|_{L^q(0, T)} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, provando a continuidade de T_u em X .

Demonstra-se usando o lema de De Bois Raymond (Ver [5] ou [26]) que a distribuição T_u é univocamente determinada por u , de modo que podemos identificar u com T_u e neste sentido temos $L^p(0, T; X) \subset \mathcal{D}'(0, T; X)$.

Definição 1.3. Dada uma distribuição vetorial $u \in \mathcal{D}'(0, T; X)$ definimos a derivada de ordem n de u no sentido das distribuições vetoriais como sendo a distribuição vetorial sobre $(0, T)$, $\frac{d^n u}{dt^n}$, dada por

$$\left\langle \frac{d^n u}{dt^n}, \phi \right\rangle = (-1)^n \left\langle u, \frac{d^n \phi}{dt^n}(s) \right\rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(0, T),$$

Segue da definição acima que toda distribuição vetorial é derivável e sua derivada é ainda uma distribuição vetorial. Note que para $u \in L^p(0, T; X)$ tem-se, em vista da identificação de u com T_u , que

$$\left\langle \frac{d^n u}{dt^n}, \phi \right\rangle = (-1)^n \int_0^T u(s) \frac{d^n \phi}{dt^n}(s) ds, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(0, T).$$

Os próximos conceitos e notações são muito frequentes e utilizados: sejam X, Y dois espaços de Banach e suponha $X \subset Y$. Diz-se que X está imerso continuamente em Y se a aplicação inclusão

$$i : X \rightarrow Y, \quad i(x) = x, \quad \forall x \in X,$$

é contínua.

Observe que isto equivale a dizer que existe $C > 0$ tal que:

$$\|x\|_Y \leq C \|x\|_X, \quad \forall x \in X,$$

onde C é a constante de imersão. Este fato é simbolizado por $X \hookrightarrow Y$. Se $X \hookrightarrow Y$ e X é denso em Y , diz-se que X está imerso, contínua e densamente em Y com a topologia de Y . Se ocorrer da aplicação inclusão ser contínua e compacta (isto é, toda sequência limitada em X admite subsequência convergente em Y), diz-se que X é imerso compactamente em Y e denota-se $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$.

A seguir temos alguns importantes teoremas de imersão.

Teorema 1.11. *Sejam X e Y espaços de Banach e suponha $X \hookrightarrow Y$. Se $1 \leq s \leq r \leq \infty$, então*

$$L^r(0, T; X) \hookrightarrow L^s(0, T; Y).$$

Demonstração. Seja C a constante de imersão de X em Y . Dada $\mathbf{u} \in L^r(0, T; X)$ temos que \mathbf{u} é mensurável e, como $s \geq 1$,

$$\|\mathbf{u}(t)\|_Y^s \leq C^s \|\mathbf{u}(t)\|_X^s, \quad \forall t \in (0, T). \quad (1.3)$$

Ora, a função numérica $t \mapsto \|\mathbf{u}(t)\|_X^s$ está em $L^{\frac{r}{s}}(0, T)$ e a função $v(t) \equiv 1$ pertence a $L^q(0, T)$, onde q é o conjugado de r/s . Da desigualdade de Hölder, temos que $t \mapsto \|\mathbf{u}(t)\|_X^s$ está em $L^1(0, T)$, logo por (1.3) a função $t \mapsto \|\mathbf{u}(t)\|_Y$ pertence a $L^s(0, T)$, donde $\mathbf{u} \in L^s(0, T; Y)$. Portanto, $L^r(0, T; X) \subset L^s(0, T; Y)$. Quanto a continuidade da imersão, temos de (1.3) que :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{s,Y}^s &= \int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|_Y^s dt \leq \int_0^T C^s \|\mathbf{u}(t)\|_X^s dt \\ &\leq \left(\int_0^T C^r \|\mathbf{u}(t)\|_X^r dt \right)^{\frac{s}{r}} \left(\int_0^T dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= C^s T^{\frac{1}{q}} \left[\left(\int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|_X^r dt \right)^{\frac{1}{r}} \right]^s = C^s T^{\frac{1}{q}} \|\mathbf{u}\|_{r,X}^s. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\mathbf{u}\|_{s,Y} \leq C T^{\frac{1}{sq}} \|\mathbf{u}\|_{r,X}.$$

Assim, provamos que $L^r(0, T; X) \hookrightarrow L^s(0, T; Y)$. \square

Proposição 1.1. *Se p e q são índices conjugados, $\mathbf{u} \in L^p(0, T; X)$ e $\mathbf{v} \in L^q(0, T; X')$, então a função numérica $t \mapsto \langle \mathbf{v}(t), \mathbf{u}(t) \rangle_{X', X}$ está em $L^1(0, T)$.*

Demonstração. A mensurabilidade da função numérica $t \mapsto \langle \mathbf{v}(t), \mathbf{u}(t) \rangle_{X', X}$ é consequência da mensurabilidade de \mathbf{u} e de \mathbf{v} . Agora sendo $\mathbf{v}(t)$ um funcional linear contínuo temos

$$|\langle \mathbf{v}(t), \mathbf{u}(t) \rangle_{X', X}| \leq \|\mathbf{v}(t)\|_{X'} \|\mathbf{u}(t)\|_X,$$

e o resultado segue da desigualdade de Hölder. \square

Teorema 1.12. *Sejam X e Y espaços de Banach e suponha $X \hookrightarrow Y$. Então $Y' \hookrightarrow X'$.*

Demonstração. Note inicialmente que $Y' \subset X'$, pois toda forma linear e contínua em Y é, em particular, linear e contínua em X já que $X \subset Y$. Seja C a constante da imersão de X em Y e considere a aplicação inclusão $i: Y' \rightarrow X'$. Então i é linear e contínua. De fato, a linearidade segue da linearidade de \mathbf{y}' . Quanto a continuidade, temos

$$|i(\mathbf{y}')(x)| = |\mathbf{y}'(x)| \leq \|x\|_Y \|\mathbf{y}'\|_{Y'} \leq C \|x\|_X \|\mathbf{y}'\|_{Y'},$$

donde

$$\| \mathbf{y}' \|_{X'} = \| i(\mathbf{y}') \|_{X'} = \sup_{\| \mathbf{x} \|_X = 1} | i(\mathbf{y}')(\mathbf{x}) | \leq C \| \mathbf{y}' \|_{Y'} .$$

Segue que $Y' \hookrightarrow X'$. □

Segue do Teorema da Representação de Riesz-Fréchet que se Y é um espaço de Hilbert, vale

$$X \hookrightarrow Y \equiv Y' \hookrightarrow X'. \tag{1.4}$$

Teorema 1.13. *Sejam X e Y espaços de Hilbert tais que $X \hookrightarrow Y$. Se $\mathbf{u} \in L^p(0, T; X)$ e $\frac{d\mathbf{u}}{dt} \in L^p(0, T; Y)$, então $\mathbf{u} \in C^0([0, T]; X)$.*

Demonstração. Ver [26]. □

1.3 Cálculo Espectral

Nesta seção apresentaremos alguns resultados da Teoria Espectral. Para mais detalhes ver Apêndice A.

Seja H um espaço de Hilbert separável com produto interno (\cdot, \cdot) e norma correspondente $\| \cdot \|$. Em H fixemos um operador auto-adjunto não limitado A . De acordo com o Teorema Espectral, existe uma única família $\{E_\lambda; \lambda \in \mathbb{R}\}$ de projeções tal que

$$D(A) = \left\{ \mathbf{u} \in H; \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d(E_\lambda \mathbf{u}, \mathbf{u}) < \infty \right\},$$

$$\| A\mathbf{u} \|^2 = \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d(E_\lambda \mathbf{u}, \mathbf{u}); \quad \forall \mathbf{u} \in D(A),$$

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\mathbb{R}} \lambda d(E_\lambda \mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u} \in D(A), \mathbf{v} \in H,$$

onde as integrais acima são integrais de Riemann-Stieltjes.

Com o objetivo de definir as potências do operador A , revisaremos um pouco do cálculo funcional para operadores auto-adjuntos. Inicialmente consideraremos as funções reais limitadas.

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e integrável em \mathbb{R} no sentido de Lebesgue - Stieltjes, em relação a função de variação limitada $\rho(\lambda) = (E_\lambda \mathbf{u}, \mathbf{v})$ para $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$.

Observação 1.2. *Pela fórmula de polarização:*

$$(E_\lambda u, v) = \frac{1}{4} \{ \| E_\lambda(u+v) \|^2 + \| E_\lambda(u-v) \|^2 + i[\| E_\lambda(u+iv) \|^2 - \| E_\lambda(u-iv) \|^2] \}$$

resulta que é suficiente supormos f integrável relativamente à função real não-decrescente $\sigma(\lambda) = (E_\lambda u, u) = \| E_\lambda u \|^2$, $u \in H$.

Fixado $u \in H$ considere a função $g_u : H \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g_u(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d(E_\lambda u, v), \tag{1.5}$$

a qual é conjugada de um funcional linear a ser definido. Segue das propriedades da integral de Lebesgue - Stieltjes que g_u é linear.

Vejamos que g_u é limitada. Com efeito, sendo f limitada seja $M = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} |f(\lambda)|$. Então,

$$|g_u(v)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d(E_\lambda u, v) \right| \leq M V_{-\infty}^{+\infty}(E_\lambda u, v),$$

onde $V_{-\infty}^{+\infty}(E_\lambda u, v)$ é a variação total de $(E_\lambda u, v)$. Ora, considerando uma partição qualquer de \mathbb{R} em um número finito de intervalos de extremos

$$-\infty = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n = +\infty,$$

e pondo $P_k = E_{\lambda_k} - E_{\lambda_{k-1}}$, para $k = 1, 2, \dots, n$, temos que $\{P_k\}_{k=1}^n$ é uma família de projeções duas a duas ortogonais, tal que $\sum_k P_k = I$ e

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n | (E_{\lambda_k} u, v) - (E_{\lambda_{k-1}} u, v) | &= \sum_{k=1}^n | (P_k u, v) | = \sum_{k=1}^n | (P_k u, P_k v) | \\ &\leq \sum_{k=1}^n \| P_k u \| \| P_k v \| \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n \| P_k u \|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n \| P_k v \|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^n (P_k u, u) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n (P_k v, v) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (u, u)^{\frac{1}{2}} (v, v)^{\frac{1}{2}} = \| u \| \| v \|, \end{aligned}$$

donde

$$V_{-\infty}^{+\infty}(E_\lambda u, v) = \sup_P \sum_{k=1}^n | (E_{\lambda_k} u, v) - (E_{\lambda_{k-1}} u, v) | \leq \| u \| \| v \|,$$

isto é, $|g_u(v)| \leq M \|u\| \|v\|$, $\forall v \in H$. Logo, para cada $u \in H$ fixo temos que g_u é um funcional linear limitado de H , sendo $\|g_u\| \leq M \|u\|$. Segue do Teorema da Representação de Riesz - Fréchet que existe $u^* \in H$ tal que

$$g_u(v) = (u^*, v) = \overline{(v, u^*)}, \quad (1.6)$$

$$\|g_u\| = \|u^*\|_H. \quad (1.7)$$

Assim, define-se o operador $f(A)$ em H pondo $f(A)u = u^*$. Resulta de (1.6) que

$$(f(A)u, v) = (u^*, v) = g_u(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d(E_\lambda u, v),$$

isto é,

$$(f(A)u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d(E_\lambda u, v). \quad (1.8)$$

Da unicidade de u^* temos que $f(A)$ é linear e, além disso, por (1.7) temos:

$$\|f(A)u\| = \|u^*\| = \|g_u\| \leq M \|u\|,$$

isto é,

$$\|f(A)u\| \leq M \|u\|.$$

Logo, $f(A)$ é limitado com $\|f(A)\| \leq M$.

Em [25] e [35] prova-se que:

- (i) $f(A)$ é simétrico, ou seja, auto-adjunto;
- (ii) $f(A) \geq 0$ se $f(\lambda) \geq 0$;
- (iii) Todas as funções limitadas de A são permutáveis;
- (iv) Se $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz as mesmas propriedades da função f , então

$$(f(A)g(A)u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)g(\lambda) d(E_\lambda u, v), \forall u, v \in H.$$

Em particular temos

$$\|f(A)u\|^2 = (f(A)u, f(A)u) = (f(A)^2u, u) = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(\lambda)]^2 d(E_\lambda u, u),$$

portanto,

$$\|f(A)u\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(\lambda)]^2 d(E_\lambda u, u), \quad \forall u \in H. \quad (1.9)$$

Estenderemos a seguir a correspondência acima ao caso de funções não-limitadas. Consideremos as funções mensuráveis, finitas, definidas quase sempre em relação à $\sigma(\lambda) = (E_\lambda u, u)$. Seja $f = f(\lambda)$ uma função desta classe, a qual suporemos real. Tomemos os conjuntos

$$M_k = \{\lambda \in \mathbb{R}; k-1 < f(\lambda) < k\},$$

para $k \in \mathbb{Z}$, e seja $e_k(\lambda)$ a função característica de M_k . Segue-se que para cada k as funções $e_k(\lambda)$ e $f_k(\lambda) = f(\lambda)e_k(\lambda)$ são limitadas e mensuráveis, logo integráveis em relação à $\sigma(\lambda) = (E_\lambda u, u)$. Portanto, estão bem definidas os operadores lineares (limitados e auto-adjuntos) $e_k(A)$ e $f_k(A)$, pelo caso anterior. Sendo $[e_k(\lambda)]^2 = e_k(\lambda)$, $e_k(\lambda)e_l(\lambda) = 0$ para $k \neq l$ e $\sum_{k=1}^{+\infty} e_k(\lambda) = 1$, resulta que

$\{e_k(A)\}$ é uma família de projeções duas a duas ortogonais tais que $\sum_{k=1}^{+\infty} e_k(A) = I$.

Seja $N_k = e_k(A)(H)$, o qual é um subespaço de H . Como $f_k(A)$ permuta com $e_k(A)$, segue-se que $f_k(A)|_{N_k}$ é linear, limitada e simétrica. Assim, $\{N_k\}$ e $\{f_k(A)\}$ estão nas condições do lema de Riesz - Lorch, cf. Teorema 1.7. Portanto, existe um único operador linear $f(A)$, em geral não limitado, com domínio e imagem em H , tal que $f(A)|_{N_k} = f_k(A)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Além disso, $D(f(A)) = \{u \in H; \sum_{-\infty}^{+\infty} \|f_k(A)u_k\|^2 < \infty\}$. Ora, $u_k \in N_k$, donde $u_k = e_k(A)u$ com $u \in H$. Daí e do caso limitado, mais precisamente de (1.9) temos $\|f_k(A)u\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [f_k(\lambda)]^2 d(E_\lambda u, v)$. Portanto,

$$\begin{aligned} u \in D(f(A)) &\iff \sum_{-\infty}^{+\infty} \|f_k(A)u_k\|^2 < \infty \iff \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [f_k(\lambda)]^2 d(E_\lambda u, v) < \infty \\ &\iff \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} [f_k(\lambda)]^2 d(E_\lambda u, v) < \infty, \end{aligned}$$

onde na última equivalência usamos o Teorema de Beppo Levi. Da definição de f_k temos

$$\begin{aligned} \sum_{-\infty}^{+\infty} [f_k(\lambda)]^2 &= \sum_{-\infty}^{+\infty} [f(\lambda)]^2 [e_k(\lambda)]^2 = [f(\lambda)]^2 \sum_{-\infty}^{+\infty} [e_k(\lambda)]^2 \\ &= [f(\lambda)]^2 \sum_{-\infty}^{+\infty} [e_k(\lambda)] = [f(\lambda)]^2 \cdot 1 = [f(\lambda)]^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$u \in D(f(A)) \iff \int_{-\infty}^{+\infty} [f(\lambda)]^2 d(E_\lambda u, v) < \infty.$$

Portanto,

$$D(f(A)) = \{u \in H; \int_{-\infty}^{+\infty} [f(\lambda)]^2 d(E_\lambda u, v) < \infty\}.$$

Além disso, para cada $u \in D(f(A))$ temos

$$f(A)u = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_k(A)u_k = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_k(A)e_k(A)u = \sum_{-\infty}^{+\infty} f(A)e_k(A)^2u = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_k(A)u,$$

ou seja,

$$f(A)u = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_k(A)u.$$

Donde,

$$(f(A)u, v) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (f_k(A)u, v) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(\lambda) d(E_\lambda u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d(E_\lambda u, v),$$

ou seja,

$$(f(A)u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d(E_\lambda u, v), \quad \forall u \in D(f(A)) \text{ e } \forall v \in H. \quad (1.10)$$

Em [11] prova-se que

$$f(A)^* = \bar{f}(A),$$

onde \bar{f} é a função conjugada de f . Como estamos considerando f uma função real segue que $f(A)$ é um operador auto-adjunto, em geral não limitado de H e de (1.10) obtemos

$$\|f(A)u\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(\lambda)]^2 d(E_\lambda u, u), \quad \forall u \in D(f(A)).$$

Agora podemos definir as potências do operador auto-adjunto A . Notemos que se A é coercivo, isto é, existe $\beta > 0$ tal que $(Au, u) \geq \beta \|u\|^2$, para todo $u \in D(A)$, então $E_\lambda = 0$ para $\lambda < \beta$, e as potências A^α , $\alpha > 0$, do operador A podem ser definidas por meio das funções contínuas $f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, em geral não limitadas:

$$f_\alpha(\lambda) = \begin{cases} \lambda^\alpha, & \text{se } \lambda > \beta, \\ 0, & \text{se } \lambda < \beta. \end{cases}$$

Neste caso, teremos

$$D(A^\alpha) = \{u \in H; \int_{\beta}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u, u)\},$$

$$(A^\alpha u, v) = \int_{\beta}^{+\infty} \lambda^\alpha d(E_\lambda u, v), \quad \forall u \in D(A^\alpha) \text{ e } v \in H.$$

$$\|A^\alpha u\|^2 = \int_{\beta}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u, u), \quad \forall u \in D(A^\alpha).$$

Observação 1.3. Com as hipóteses acima sobre o operador A obtemos da demonstração do Teorema Espectral (Ver [35]), cujo enunciado consta no apêndice deste trabalho, que E_λ é a “soma” definida pelo Lema de Riesz-Lorch, segundo n , de operadores limitados $E_{\lambda, n}$ tais que $E_{\lambda, n} = 0$ para $\lambda < \beta$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Daí segue que $E_\lambda = 0$ para $\lambda < \beta$.

Observação 1.4. Prova-se em [30], que para todo $u \in D(A^\alpha)$ e todo $v \in D(A^\gamma)$, com $\gamma \in \mathbb{R}$, vale:

$$(A^\alpha u, A^\gamma v) = \int_{\beta}^{+\infty} \lambda^{\alpha+\gamma} d(E_\lambda u, v),$$

onde A^0 é o operador identidade de H .

Para mais detalhes sobre Calculo Funcional ver [25] ou [35].

A seguir tem-se algumas aplicações do que foi visto acima, aplicações estas que serão utilizadas em todo o capítulo 3.

Dado $\epsilon > 0$, consideremos as funções contínuas:

$$g_{\alpha\epsilon}(\lambda) = \begin{cases} (\lambda + \epsilon)^\alpha, & \text{se } \lambda \geq \epsilon, \\ 0, & \text{se } \lambda \leq \epsilon. \end{cases}$$

Então o operador $A_\epsilon^\alpha = (A + \epsilon I)^\alpha$, onde I é o operador identidade de H , coincide com $g_{\alpha\epsilon}(A)$ e teremos

$$D(A_\epsilon^\alpha) = D(A^\alpha), \quad \forall \alpha \geq 0, \quad \forall \epsilon > 0;$$

$$A_\epsilon^\alpha \geq \epsilon^\alpha I, \text{ ou seja, } (A_\epsilon^\alpha u, u) \geq \epsilon^\alpha \|u\|^2, \quad \forall u \in D(A^\alpha);$$

$$(A_\epsilon^\alpha u, A_\epsilon^\xi v) = \int_{-\epsilon}^{+\infty} (\lambda + \epsilon)^{\alpha+\xi} d(E_\lambda u, v), \quad \forall u \in D(A^\alpha) \text{ e } v \in D(A^\xi), \quad \xi \geq 0. \quad (1.11)$$

Usando o fato que $\int_{-\epsilon}^0 (\lambda + \epsilon)^{\alpha+\xi} d(E_\lambda u, v) \leq \epsilon^{\alpha+\xi} \int_{-\epsilon}^0 d(E_\lambda u, v)$, obtemos de (1.11) que

$$(A_\epsilon^\alpha u, A_\epsilon^\xi v) \leq \epsilon^{\alpha+\xi} \int_{-\epsilon}^0 d(E_\lambda u, v) + \int_0^{+\infty} (\lambda + \epsilon)^{\alpha+\xi} d(E_\lambda u, v), \quad (1.12)$$

$\forall u \in D(A^\alpha) \cap D(A^\xi), \quad \forall \alpha, \xi \geq 0.$

Capítulo 2

Integral Hilbertiana & Teorema de Diagonalização

Nesta seção enunciaremos e demonstraremos o Teorema de Diagonalização e estudaremos os espaços \mathcal{H}_α , $\alpha \in \mathbb{R}$, que serão fundamentais para o desenrolar de todo o capítulo seguinte o qual é o objetivo maior dessa dissertação.

Um campo de espaços de Hilbert é uma aplicação que associa a cada $\lambda \in \mathbb{R}$ um espaço de Hilbert real $\mathcal{H}(\lambda)$. Dado um campo de espaços Hilbertianos $\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto \mathcal{H}(\lambda)$, temos que um campo de vetores sobre \mathbb{R} é uma aplicação $\lambda \mapsto u(\lambda)$, definida em \mathbb{R} tal que $u(\lambda) \in \mathcal{H}(\lambda)$.

Denotamos por \mathcal{F} a coleção dos campos de vetores sobre \mathbb{R} , o qual é um espaço vetorial real com as operações definidas a seguir: Dados $u, w \in \mathcal{F}$ e $\beta \in \mathbb{R}$ definimos os campos de vetores sobre \mathbb{R} , $u + w$ e βu , pondo

$$(u + w)(\lambda) = u(\lambda) + w(\lambda)$$

$$(\beta \cdot u)(\lambda) = \beta \cdot u(\lambda), \lambda \in \mathbb{R},$$

onde as operações no segundo membro são as operações de $\mathcal{H}(\lambda)$. Como $\mathcal{H}(\lambda)$ é um espaço vetorial tem-se que as operações definidas acima estão bem definidas.

Fixemos uma medida positiva ν sobre \mathbb{R} .

Definição 2.1. *Um campo de espaços Hilbertianos $\lambda \mapsto \mathcal{H}(\lambda)$ é dito ν -mensurável quando existir um subespaço \mathcal{N} de \mathcal{F} satisfazendo as seguintes condições:*

- (i) A aplicação $\lambda \mapsto \| \mathbf{u}(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}$ é ν -mensurável, $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{N}$;
- (ii) se $\mathbf{u} \in \mathcal{F}$ e a aplicação $\lambda \mapsto (\mathbf{u}(\lambda), \mathbf{v}(\lambda))_{\mathcal{H}(\lambda)}$ é ν -mensurável para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{N}$, então $\mathbf{u} \in \mathcal{N}$;
- (iii) existe uma sequência $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em \mathcal{N} tal que para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ a sequência $(\mathbf{u}_n(\lambda))$ é total (ou completa) em $\mathcal{H}(\lambda)$.

Os elementos de \mathcal{N} são denominados campos de vetores ν -mensuráveis.

Observação 2.1. Um exemplo de campo de espaços Hilbertianos ν -mensurável será dado posteriormente na demonstração do Teorema de Diagonalização.

Observação 2.2. Uma família $(\mathbf{u}_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$, onde \mathcal{A} é um conjunto de índices, em um espaço de Hilbert \mathcal{H} é dita total ou completa quando dado $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$ tal que $(\mathbf{u}, \mathbf{u}_\alpha)_{\mathcal{H}} = 0, \forall \alpha \in \mathcal{A}$, tem-se $\mathbf{u} = 0$. Para mais detalhes ver [17].

No que segue a aplicação $\lambda \mapsto \mathcal{H}(\lambda)$ denota um campo de espaços Hilbertianos ν -mensurável e todos os campos de vetores sobre \mathbb{R} aqui considerados serão ν -mensuráveis.

Definição 2.2. Um campo de vetores sobre \mathbb{R} , \mathbf{u} , é dito de quadrado integrável, com relação a medida ν , quando

$$\int_{\mathbb{R}} \| \mathbf{u}(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 d\nu(\lambda) < \infty.$$

Seja $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{F}$ a coleção dos campos de vetores de quadrado integrável com relação a medida ν . Dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{H}_0$ e $\beta \in \mathbb{R}$, temos $(\mathbf{u} + \beta\mathbf{v})(\lambda) = \mathbf{u}(\lambda) + \beta\mathbf{v}(\lambda)$, donde

$$\begin{aligned} \| (\mathbf{u} + \beta\mathbf{v})(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 &\leq (\| \mathbf{u}(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)} + | \beta | \| \mathbf{v}(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)})^2 \\ &= \| \mathbf{u}(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 + 2 | \beta | \| \mathbf{u}(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)} \| \mathbf{v}(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)} \\ &\quad + \beta^2 \| \mathbf{v}(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2, \end{aligned}$$

daí,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \| (\mathbf{u} + \beta\mathbf{v})(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 d\nu(\lambda) &\leq \int_{\mathbb{R}} \| \mathbf{u}(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 d\nu(\lambda) \\ &\quad + 2 | \beta | \int_{\mathbb{R}} \| \mathbf{u}(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)} \| \mathbf{v}(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)} d\nu(\lambda) + \beta^2 \int_{\mathbb{R}} \| \mathbf{v}(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 d\nu(\lambda). \end{aligned}$$

Como $u, v \in \mathcal{H}_0$ temos que $\int_{\mathbb{R}} \|u(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 d\nu(\lambda)$ e $\int_{\mathbb{R}} \|v(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 d\nu(\lambda)$ são finitas. Além disso, pela desigualdade de Hölder, $\int_{\mathbb{R}} \|u(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)} \|v(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)} d\nu(\lambda)$ é finita. Logo $u + \beta v \in \mathcal{H}_0$. Assim, identificando-se dois campos de vetores que são iguais quase sempre, em \mathcal{H}_0 , relativamente a medida ν , $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{F}$ denota o subespaço vetorial das classes de campos de vetores de quadrado integrável com relação a medida ν .

Em \mathcal{H}_0 definimos a seguinte produto interno :

$$(u, v)_0 = \int_{\mathbb{R}} (u(\lambda), v(\lambda))_{\mathcal{H}(\lambda)} d\nu(\lambda), \quad u, v \in \mathcal{H}(\lambda),$$

o qual induz a norma:

$$\|u\|_0 = \left(\int_{\mathbb{R}} \|u(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 d\nu(\lambda) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposição 2.1. *O espaço $(\mathcal{H}_0, (\cdot, \cdot)_0)$ é um espaço de Hilbert.*

Demonstração. Seja (u_n) uma sequência de Cauchy em \mathcal{H}_0 . Então, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m \geq n_0$ tem-se $\|u_n - u_m\|_0 < \varepsilon$. Ou seja, $n, m \geq n_0$ implica em $\int_{\mathbb{R}} \|u_n(\lambda) - u_m(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 d\nu(\lambda) < \varepsilon^2$, donde segue que $\|u_n(\lambda) - u_m(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)} < \varepsilon$ ν -q.s., isso com $n, m \geq n_0$. Assim, a sequência $(u_n(\lambda))$ é de Cauchy, ν -q.s., em $\mathcal{H}(\lambda)$. Como $\mathcal{H}(\lambda)$ é Hilbert, existe $u(\lambda) \in \mathcal{H}(\lambda)$ tal que $\|u_n(\lambda) - u(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Afirmação: O campo $\lambda \mapsto u(\lambda) \in \mathcal{H}(\lambda)$ pertence a \mathcal{H}_0 !

De fato, sendo $(u_n(\lambda))$ de Cauchy, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n, m \geq n_1$ implica em $\|u_n(\lambda) - u_m(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)} < \varepsilon \|u_{m_0}(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)}$, com $m_0 \in \mathbb{N}$ fixo. Então,

$$\begin{aligned} \|u_n(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)} - \|u_m(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)} &\leq \|u_n(\lambda) - u_m(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)} < \varepsilon \|u_{m_0}(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)} \\ \Rightarrow \|u_n(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 &< \left(\varepsilon \|u_{m_0}(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)} + \|u_m(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)} \right)^2 \\ &= \varepsilon^2 \|u_{m_0}(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 + 2\varepsilon \|u_{m_0}(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)} \|u_m(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)} \\ &\quad + \|u_m(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2. \end{aligned}$$

Em particular, fixando-se $m_1 \geq n_1$ e fazendo $n \rightarrow \infty$, temos

$$\begin{aligned} \|u(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 &< \varepsilon^2 \|u_{m_0}(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 + 2\varepsilon \|u_{m_0}(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)} \|u_{m_1}(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)} + \|u_{m_1}(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 \\ \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \|u(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 d\nu(\lambda) &< \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}} \|u_{m_0}(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 d\nu(\lambda) \\ &\quad + 2\varepsilon \int_{\mathbb{R}} \|u_{m_0}(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)} \|u_{m_1}(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)} d\nu(\lambda) + \int_{\mathbb{R}} \|u_{m_1}(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 d\nu(\lambda). \end{aligned}$$

Como $\mathbf{u}_{m_0}, \mathbf{u}_{m_1} \in \mathcal{H}_0$ temos que a primeira e a terceira integral acima são finitas. Ora, as funções $f_0(\lambda) = \|\mathbf{u}_{m_0}(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)}$ e $f_1(\lambda) = \|\mathbf{u}_{m_1}(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)}$ estão em $L^2(\mathbb{R})$. Logo, pela desigualdade de Hölder, a segunda integral é finita, donde $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_0$. Além disso, ainda pelo fato da sequência $(\mathbf{u}_n(\lambda))$ ser de Cauchy tem-se $\|\mathbf{u}_n(\lambda) - \mathbf{u}(\lambda)\|^2 < \varepsilon^2 \|\mathbf{u}_{m_0}(\lambda)\|^2$, com a aplicação $\lambda \mapsto \varepsilon^2 \|\mathbf{u}_{m_0}(\lambda)\|^2$ integrável. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada temos que

$$\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}\|_0^2 = \int_{\mathbb{R}} \|\mathbf{u}_n(\lambda) - \mathbf{u}(\lambda)\|^2 d\nu(\lambda) \longrightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Daí, $\mathbf{u}_n \longrightarrow \mathbf{u}$ em \mathcal{H}_0 . Portanto, \mathcal{H}_0 é um espaço de Hilbert. □

O espaço de Hilbert \mathcal{H}_0 é denominado Integral Hilbertiana do campo $\lambda \mapsto \mathcal{H}(\lambda)$ e denotado por $\int^{\oplus} \mathcal{H}(\lambda) d\nu(\lambda)$.

Suponha que a medida ν tem suporte em $(\lambda_0, +\infty)$, para algum $\lambda_0 > 0$. Neste caso podemos considerar os campos de vetores definidos apenas em $(\lambda_0, +\infty)$. Daí, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ definimos o espaço vetorial \mathcal{H}_α do seguinte modo:

$$\mathbf{u} \in \mathcal{H}_\alpha \iff \lambda \mapsto \lambda^\alpha \mathbf{u} \in \mathcal{H}_0.$$

Define-se em \mathcal{H}_α o seguinte produto interno :

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_\alpha = \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} (\mathbf{u}(\lambda), \mathbf{v}(\lambda))_{\mathcal{H}(\lambda)} d\nu(\lambda), \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{H}(\lambda),$$

o qual induz a norma:

$$\|\mathbf{u}\|_\alpha = \left(\int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} \|\mathbf{u}(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 d\nu(\lambda) \right)^{\frac{1}{2}} = \|\lambda^\alpha \mathbf{u}\|_0.$$

Proposição 2.2. *O espaço $(\mathcal{H}_\alpha, (\cdot, \cdot)_\alpha)$ é um espaço de Hilbert e $(\mathcal{H}_\alpha)' \equiv \mathcal{H}_{-\alpha}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja (\mathbf{u}_n) uma sequência de Cauchy em \mathcal{H}_α . Então, a sequência $(\lambda^\alpha \mathbf{u}_n)$ é de Cauchy em \mathcal{H}_0 . Sendo este um espaço de Hilbert tem-se que existe $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_0$ tal que $\|\lambda^\alpha \mathbf{u}_n - \mathbf{u}\|_0 \longrightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Ora, $\mathbf{u} = \lambda^\alpha (\lambda^{-\alpha} \mathbf{u}) \in \mathcal{H}_0$, donde $\lambda^{-\alpha} \mathbf{u} \in \mathcal{H}_\alpha$.

Afirmção: $\|\mathbf{u}_n - \lambda^{-\alpha} \mathbf{u}\|_\alpha \longrightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

De fato, $\|\mathbf{u}_n - \lambda^{-\alpha} \mathbf{u}\|_\alpha = \|\lambda^\alpha \mathbf{u}_n - \mathbf{u}\|_0 \longrightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Logo, $\mathbf{u}_n \longrightarrow \lambda^{-\alpha} \mathbf{u}$ quando $n \rightarrow \infty$ em \mathcal{H}_α . Segue que \mathcal{H}_α é Hilbert.

Para provar que $(\mathcal{H}_\alpha)' \equiv \mathcal{H}_{-\alpha}$, considere o seguinte operador $\sigma : (\mathcal{H}_\alpha)' \longrightarrow \mathcal{H}_{-\alpha}$ definido por $\sigma(f) = \lambda^{2\alpha} \mathbf{u}_f$, onde \mathbf{u}_f é o único campo de \mathcal{H}_α tal que

$$\langle f, \mathbf{u} \rangle = (\mathbf{u}_f, \mathbf{u})_\alpha$$

$$\| f \|_{\mathcal{H}'_\alpha} = \| \mathbf{u}_f \|_\alpha,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota a dualidade entre \mathcal{H}_α e \mathcal{H}'_α . Note que sendo \mathcal{H}_α um espaço de Hilbert, a existência e a unicidade de um tal \mathbf{u}_f segue do teorema da Representação de Riesz-Fréchet. Prova-se a seguir que σ é um isomorfismo isométrico. Com efeito, dados $f, g \in \mathcal{H}'_\alpha$ e $\beta \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_{f+\beta g}, \mathbf{u})_\alpha &= \langle f + \beta g, \mathbf{u} \rangle = \langle f, \mathbf{u} \rangle + \beta \langle g, \mathbf{u} \rangle \\ &= (\mathbf{u}_f, \mathbf{u})_\alpha + \beta (\mathbf{u}_g, \mathbf{u})_\alpha \\ &= (\mathbf{u}_f + \beta \mathbf{u}_g, \mathbf{u})_\alpha, \end{aligned}$$

donde

$$(\mathbf{u}_{f+\beta g}, \mathbf{u})_\alpha = (\mathbf{u}_f + \beta \mathbf{u}_g, \mathbf{u})_\alpha, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{H}_\alpha.$$

Logo, $\mathbf{u}_{f+\beta g} = \mathbf{u}_f + \beta \mathbf{u}_g$. Assim, $\sigma(f + \beta g) = \lambda^{2\alpha} \mathbf{u}_{f+\beta g} = \lambda^{2\alpha} (\mathbf{u}_f + \beta \mathbf{u}_g) = \sigma(f) + \beta \sigma(g)$. Portanto, σ é linear.

Além disso, dada $f \in \mathcal{H}'_\alpha$ temos,

$$\| \sigma(f) \|_{-\alpha}^2 = \| \lambda^{2\alpha} \mathbf{u}_f \|_{-\alpha}^2 = \| \lambda^\alpha \mathbf{u}_f \|_0^2 = \| \mathbf{u}_f \|_\alpha^2 = \| f \|_{\mathcal{H}'_\alpha}^2.$$

Portanto,

$$\| \sigma(f) \|_{-\alpha} = \| f \|_{\mathcal{H}'_\alpha}.$$

Em particular σ é injetiva. Vejamos a sobrejetividade: dado $\mathbf{w} \in \mathcal{H}_{-\alpha}$ note que $\mathbf{u} = \lambda^{-2\alpha} \mathbf{w} \in \mathcal{H}_\alpha$, pois $\lambda^\alpha \mathbf{u} = \lambda^{-\alpha} \mathbf{w} \in \mathcal{H}_0$, visto que $\mathbf{w} \in \mathcal{H}_{-\alpha}$. Além disso, o funcional $f : \mathcal{H}_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por $\langle f, \mathbf{v} \rangle = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_\alpha$ está em \mathcal{H}'_α . De fato, a linearidade é óbvia, e além do mais, pela desigualdade de Höllder com $p = 2$, tem-se

$$| \langle f, \mathbf{v} \rangle | = | (\mathbf{u}, \mathbf{v})_\alpha | \leq \| \mathbf{u} \|_\alpha \| \mathbf{v} \|_\alpha.$$

Como $\| \mathbf{u} \|_\alpha < +\infty$, segue que $f \in \mathcal{H}'_\alpha$. Mais ainda, pelo teorema de Riesz-Fréchet, mais precisamente a unicidade de \mathbf{u}_f , temos $\mathbf{u}_f = \mathbf{u}$. Logo,

$$\sigma(f) = \lambda^{2\alpha} \mathbf{u}_f = \lambda^{2\alpha} \mathbf{u} = \lambda^{2\alpha} \lambda^{-2\alpha} \mathbf{w},$$

donde

$$\sigma(f) = w.$$

Portanto, σ é sobrejetiva, donde um isomorfismo isométrico. \square

No que segue estaremos sempre supondo que a medida ν tem suporte em $(\lambda_0, +\infty)$, com $\lambda_0 > 0$.

Para cada $k > \lambda_0$, $k \in \mathbb{N}$, representaremos por $\mathcal{H}_{0,k}$ o subespaço vetorial de \mathcal{H}_0 constituído pelos campos $u \in \mathcal{H}_0$ tais que $u(\lambda) = 0$, $\nu - q.s.$ em $[k, +\infty)$. Ou seja,

$$\mathcal{H}_{0,k} = \{u \in \mathcal{H}_0 ; u(\lambda) = 0, \nu - q.s. \text{ em } [k, +\infty)\}.$$

Proposição 2.3. *Para todo $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, temos:*

i) $\mathcal{H}_{0,k}$ é um subespaço fechado de \mathcal{H}_0 e, portanto, um espaço de Hilbert com a norma induzida por \mathcal{H}_0 .

ii) Se $v_k \in \mathcal{H}_{0,k}$, então $\lambda^\alpha v_k \in \mathcal{H}_{0,k}$. Em particular, $\mathcal{H}_{0,k} \subset \mathcal{H}_\alpha$.

iii) Em $\mathcal{H}_{0,k}$ as normas \mathcal{H}_α e \mathcal{H}_β são equivalentes e para $v_k \in \mathcal{H}_{0,k}$ temos

$$\|v_k\|_\alpha^2 \leq k^{2(\alpha-\beta)} \|v_k\|_\beta^2, \quad \alpha \geq \beta,$$

$$\|v_k\|_\beta^2 \leq \lambda_0^{2(\alpha-\beta)} \|v_k\|_\alpha^2, \quad \alpha \geq \beta.$$

Demonstração. i) Seja (u_n) uma sequência em $\mathcal{H}_{0,k}$ tal que $u_n \rightarrow u$ em \mathcal{H}_0 . Para cada $k \in \mathbb{N}$ temos

$$\int_k^{+\infty} \|u(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 d\nu(\lambda) = \int_k^{+\infty} \|u(\lambda) - u_n(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 d\nu(\lambda),$$

pois $u_n \in \mathcal{H}_{0,k}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Daí,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_k^{+\infty} \|u(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 d\nu(\lambda) \leq \int_{\lambda_0}^{+\infty} \|u(\lambda) - u_n(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 d\nu(\lambda) \\ &= \|u - u_n\|_0^2 \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_k^{+\infty} \|u(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 d\nu(\lambda) = 0,$$

donde $u(\lambda) = 0$ $v - q.s$ em $[k, +\infty)$. Assim, $u \in \mathcal{H}_{0,k}$ e, portanto $\mathcal{H}_{0,k}$ é um subespaço fechado de \mathcal{H}_0 .

(ii) Considere inicialmente $\alpha \geq 0$. Então, como $v_k \in \mathcal{H}_{0,k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} \|v_k(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 d\nu(\lambda) &= \int_{\lambda_0}^k \lambda^{2\alpha} \|v_k(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 d\nu(\lambda) \\ &\leq \int_{\lambda_0}^k k^{2\alpha} \|v_k(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 d\nu(\lambda), \end{aligned}$$

pois $\lambda \in [\lambda_0, k]$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} \|v_k(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 d\nu(\lambda) &\leq k^{2\alpha} \int_{\lambda_0}^k \|v_k(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 d\nu(\lambda) \\ &= k^{2\alpha} \|v_k\|_0^2 < +\infty. \end{aligned}$$

Assim, temos

$$\int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} \|v_k(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 d\nu(\lambda) \leq k^{2\alpha} \|v_k\|_0^2.$$

Segue que $\lambda^\alpha v_k \in \mathcal{H}_0$ e, como $\lambda^\alpha v_k(\lambda) = 0$ $v - q.s$ em $[k, +\infty)$, temos $\lambda^\alpha v_k \in \mathcal{H}_{0,k}$. Para o caso $\alpha \leq 0$, note que $\beta = -\alpha \geq 0$, donde pelo que foi provado acima, $\lambda^\beta v_k \in \mathcal{H}_{0,k}$. Como, $\mathcal{H}_{0,k}$ é um subespaço de \mathcal{H}_0 e $\lambda \in (\lambda_0, +\infty)$, com $\lambda_0 > 0$, temos $\lambda^\alpha v_k = \lambda^{-2\beta} \lambda^\beta v_k \in \mathcal{H}_{0,k}$, isto é, $\lambda^\alpha v_k \in \mathcal{H}_{0,k}$. Em particular, dado $v_k \in \mathcal{H}_{0,k}$ temos $\lambda^\alpha v_k \in \mathcal{H}_{0,k} \subset \mathcal{H}_0$, isto é, $\lambda^\alpha v_k \in \mathcal{H}_0$. Daí, $v_k \in \mathcal{H}_\alpha$, donde tem-se $\mathcal{H}_{0,k} \subset \mathcal{H}_\alpha$.

iii) No item (ii) provamos que para $\alpha \geq 0$ e $v_k \in \mathcal{H}_{0,k}$ vale

$$\|v_k\|_\alpha^2 \leq k^{2\alpha} \|v_k\|_0^2. \quad (2.1)$$

Para $\alpha \leq 0$, como $\lambda_0 \leq k$, temos $k^{2\alpha} = \frac{1}{k^{-2\alpha}} \leq \frac{1}{\lambda_0^{-2\alpha}} = \lambda_0^{2\alpha}$, donde

$$\|v_k\|_\alpha^2 \leq \lambda_0^{2\alpha} \|v_k\|_0^2. \quad (2.2)$$

Assim, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha \geq \beta$ temos

$$\|v_k\|_\beta^2 = \|\lambda^\beta v_k\|_0^2 = \lambda^{2\beta} \|v_k\|_0^2 \geq \lambda^{2\beta} k^{2(\beta-\alpha)} \|v_k\|_{\alpha-\beta}^2,$$

pois sendo $\alpha - \beta \geq 0$ temos de (2.1) que $\|v_k\|_{\alpha-\beta}^2 \leq k^{2(\alpha-\beta)} \|v_k\|_0^2$. Portanto, temos

$$\|v_k\|_{\alpha-\beta}^2 \leq \lambda^{-2\beta} k^{2(\alpha-\beta)} \|v_k\|_0^2.$$

Ora,

$$\begin{aligned} \| \mathbf{v}_k \|_{\alpha-\beta}^2 &= \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\alpha-2\beta} \| \mathbf{v}_k(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 d\nu(\lambda) \\ &= \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} \| \lambda^{-\beta} \mathbf{v}_k(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 d\nu(\lambda) \\ &= \| \lambda^{-\beta} \mathbf{v}_k \|_{\alpha}^2 \\ &= \lambda^{-2\beta} \| \mathbf{v}_k \|_{\alpha}^2 . \end{aligned}$$

Nota: Pelo item (ii) temos $\mathbf{v}_k \in \mathcal{H}_{0,k}$ implicando em $\lambda^{-\beta} \mathbf{v}_k \in \mathcal{H}_{0,k} \subset \mathcal{H}_{\alpha}$, donde $\lambda^{-\beta} \mathbf{v}_k \in \mathcal{H}_{\alpha}$. Assim faz sentido considerar a norma em \mathcal{H}_{α} do campo $\lambda^{-\beta} \mathbf{v}_k$.

Segue que

$$\lambda^{-2\beta} \| \mathbf{v}_k \|_{\alpha}^2 = \| \mathbf{v}_k \|_{\alpha-\beta}^2 \leq k^{2(\alpha-\beta)} \lambda^{-2\beta} \| \mathbf{v}_k \|_{\beta}^2 ,$$

donde

$$\| \mathbf{v}_k \|_{\alpha}^2 \leq k^{2(\alpha-\beta)} \| \mathbf{v}_k \|_{\beta}^2 .$$

De modo análogo, agora usando (2.2), obtemos

$$\| \mathbf{v}_k \|_{\beta}^2 \leq \lambda_0^{2(\alpha-\beta)} \| \mathbf{v}_k \|_{\alpha}^2 .$$

Daí, temos a equivalência das normas de \mathcal{H}_{α} e \mathcal{H}_{β} em $\mathcal{H}_{0,k}$. □

O espaço de Hilbert $\mathcal{H}_{0,k}$ é denominado espaço dos campos truncados. Note que $\mathcal{H}_{0,k}$ é um subespaço fechado de \mathcal{H}_{α} , $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. De fato, dada uma sequência (\mathbf{u}_n) em $\mathcal{H}_{0,k}$ tal que $\mathbf{u}_n \rightarrow \mathbf{u}$ em \mathcal{H}_{α} quando $n \rightarrow +\infty$, temos

$$\begin{aligned} \int_k^{+\infty} \lambda^{2\alpha} \| \mathbf{u}(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 d\nu(\lambda) &= \int_k^{+\infty} \lambda^{2\alpha} \| \mathbf{u}(\lambda) - \mathbf{u}_n(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 d\nu(\lambda) \\ &\leq \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} \| \mathbf{u}(\lambda) - \mathbf{u}_n(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 d\nu(\lambda) \\ &= \| \mathbf{u} - \mathbf{u}_n \|_{\alpha}^2 . \end{aligned}$$

Como $\| \mathbf{u} - \mathbf{u}_n \|_{\alpha} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$, temos

$$\int_k^{+\infty} \lambda^{2\alpha} \| \mathbf{u}(\lambda) \|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 d\nu(\lambda) = 0 ,$$

donde $\lambda^{2\alpha} \| \mathbf{u}(\lambda) \|^2 = 0$ ν -q.s. em $[k, +\infty)$. Ora, $\lambda \in [k, +\infty) \Rightarrow 0 < k \leq \lambda$, isto é, $\lambda^{2\alpha} > 0$. Logo, $\mathbf{u}(\lambda) = 0$ ν -q.s. em $[k, +\infty)$. Portanto $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_{0,k}$. Assim $\mathcal{H}_{0,k}$ é fechado em \mathcal{H}_{α} .

Definição 2.3. Dado um campo de vetores $\mathbf{v} \in \mathcal{H}_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, denominamos de k -ésimo campo truncado associado à \mathbf{v} ao campo $\mathbf{v}_k \in \mathcal{H}_{0,k}$ definido por

$$\mathbf{v}_k(\lambda) = \begin{cases} \mathbf{v}(\lambda) & \mathbf{v} - \text{q.s. em } (\lambda_0, k), \\ 0 & \mathbf{v} - \text{q.s. em } [k, +\infty). \end{cases}$$

Proposição 2.4. Seja $\mathbf{v} \in \mathcal{H}_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Então a sequência (\mathbf{v}_k) de campos truncados converge para \mathbf{v} em \mathcal{H}_α forte.

Demonstração. Notemos inicialmente que:

- i) $(\lambda_0, +\infty) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Lambda_k$, onde $\Lambda_k = (\lambda_0, k)$ e $\Lambda_k \subset \Lambda_{k+1}$.
- ii) $\mathbf{v}_k = \mathbf{v} \chi_{\Lambda_k}$ $\mathbf{v} - \text{q.s. em } (\lambda_0, +\infty)$.

Assim, temos $|\mathbf{v}_k(\lambda) - \mathbf{v}(\lambda)| = |\mathbf{v}(\lambda)| |\chi_{\Lambda_k}(\lambda) - 1|$, $\mathbf{v} - \text{q.s. em } (\lambda_0, +\infty)$. Ora, $\lambda \in (\lambda_0, +\infty)$, donde por (i) existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda \in \Lambda_{k_0}$. Como $\Lambda_k \subset \Lambda_{k+1}$ temos que para $k \geq k_0$ vale $\lambda \in \Lambda_k$, isto é, $k \geq k_0$ implica em $\chi_{\Lambda_k}(\lambda) = 1$. Assim, dado $\varepsilon > 0$ tomando $k \geq k_0$ tem-se $|\chi_{\Lambda_k}(\lambda) - 1| = 0 < \varepsilon$, ou seja, $\chi_{\Lambda_k}(\lambda) \rightarrow 1$ quando $k \rightarrow \infty$ em $(\lambda_0, +\infty)$. Daí, para cada $\lambda \in (\lambda_0, +\infty)$ temos $|\mathbf{v}_k(\lambda) - \mathbf{v}(\lambda)| = |\mathbf{v}(\lambda)| |\chi_{\Lambda_k}(\lambda) - 1| \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Portanto, $\mathbf{v}_k \rightarrow \mathbf{v}$ pontualmente em $(\lambda_0, +\infty)$. Da definição de \mathbf{v}_k temos que $\lambda^{2\alpha} \|\mathbf{v}_k(\lambda) - \mathbf{v}(\lambda)\|^2 \leq \lambda^{2\alpha} \|\mathbf{v}(\lambda)\|^2$ $\mathbf{v} - \text{q.s. em } (\lambda_0, +\infty)$. Como $\mathbf{v} \in \mathcal{H}_\alpha$, temos que a aplicação $\lambda \mapsto \lambda^{2\alpha} \|\mathbf{v}(\lambda)\|^2$ é \mathbf{v} -integrável em $(\lambda_0, +\infty)$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}_k - \mathbf{v}\|_\alpha^2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} \|\mathbf{v}_k(\lambda) - \mathbf{v}(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 d\mathbf{v}(\lambda) \\ &= \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}_k(\lambda) - \mathbf{v}(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 d\mathbf{v}(\lambda) \\ &= \int_{\lambda_0}^{+\infty} 0 d\mathbf{v}(\lambda) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathbf{v}_k \rightarrow \mathbf{v}$ em \mathcal{H}_α forte. □

Observação 2.3. Dado um campo $\mathbf{g} \in L^p(0, T; \mathcal{H}_\alpha)$, com $1 \leq p \leq +\infty$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, de modo análogo definimos o campo truncado \mathbf{g}_k pondo para quase todo $t \in (0, T)$ por

$$\mathbf{g}_k(t)(\lambda) = \begin{cases} \mathbf{g}(t)(\lambda) & \mathbf{v} - \text{q.s. em } (\lambda_0, k), \\ 0 & \mathbf{v} - \text{q.s. em } [k, +\infty). \end{cases}$$

Neste caso, $\mathbf{g}_k \in L^p(0, T; \mathcal{H}_{0,k})$ e $\mathbf{g}_k \rightarrow \mathbf{g}$ em $L^p(0, T; \mathcal{H}_\alpha)$ forte.

Proposição 2.5. *Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, com $\alpha \geq \beta$, então*

$$\mathcal{H}_\alpha \hookrightarrow \mathcal{H}_\beta \quad \text{e} \quad \|v\|_\beta \leq \lambda_0^{\beta-\alpha} \|v\|_\alpha, v \in \mathcal{H}_\alpha,$$

sendo a imersão acima densa.

Demonstração. Seja $v \in \mathcal{H}_\alpha$. Então,

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\beta} \|v(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 d\nu(\lambda) &= \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\beta-2\alpha} \|\lambda^\alpha v(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 d\nu(\lambda) \\ &\leq \lambda_0^{2(\beta-\alpha)} \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} \|v(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 d\nu(\lambda) \\ &= \lambda_0^{2(\beta-\alpha)} \|v\|_\alpha^2 < \infty. \end{aligned}$$

Logo, $\lambda^\beta v \in \mathcal{H}_0$, donde $v \in \mathcal{H}_\beta$. Daí, $\mathcal{H}_\alpha \subset \mathcal{H}_\beta$ se $\alpha \geq \beta$. Além disso,

$$\|v\|_\beta \leq \lambda_0^{\beta-\alpha} \|v\|_\alpha,$$

donde $\mathcal{H}_\alpha \hookrightarrow \mathcal{H}_\beta$. Quanto a densidade, basta notar que para $v \in \mathcal{H}_\beta$ a sequência de campos truncados (v_k) está em $\mathcal{H}_\alpha \cap \mathcal{H}_\beta$ e pela proposição (2.4), $v_k \rightarrow v$ em \mathcal{H}_β forte. □

A seguir enunciaremos o Teorema de Diagonalização o qual, intuitivamente, estabelece que todo operador auto-adjunto e coercivo é unitariamente equivalente a um operador de multiplicação.

Seja H um espaço de Hilbert separável com produto interno (\cdot, \cdot) e norma correspondente $\|\cdot\|$. Em H consideremos um operador A auto-adjunto e coercivo, isto é, existe uma constante $c > 0$ tal que

$$(Au, u) \geq c \|u\|^2, \quad \forall u \in D(A).$$

Nestas condições temos o seguinte resultado:

Teorema 2.1. *(Teorema de Diagonalização) Existe uma medida positiva limitada ν sobre \mathbb{R} , com suporte em $(\lambda_0, +\infty)$, $0 < \lambda_0 < c$, uma Integral Hilbertiana $\mathcal{H}_0 = \int^\oplus \mathcal{H}(\lambda) d\nu(\lambda)$ e um operador unitário \mathcal{U} de H sobre \mathcal{H}_0 satisfazendo as seguintes condições:*

- (i) $\mathcal{U}(A^\alpha u) = \lambda^\alpha \mathcal{U}(u)$, $\forall u \in D(A^\alpha)$, $0 \leq \alpha \leq 1$;
- (ii) \mathcal{U} é um isomorfismo de $D(A^\alpha)$ sobre \mathcal{H}_α , $0 \leq \alpha \leq 1$.

Demonstração. Faremos a demonstração em etapas : Na primeira construiremos um espaço de Hilbert L e um operador unitário U de H em L de modo que a imagem de A^α , $0 \leq \alpha \leq 1$, por U é o operador de multiplicação por λ^α sobre L , isto é, $UA^\alpha U^{-1} = S_\alpha$, onde S_α é o operador de L definido por

$$D(S_\alpha) = \{v \in L; \lambda^\alpha v \in L\} \text{ e } S_\alpha(v) = \lambda^\alpha v.$$

Além disso, U é um isomorfismo de $D(A^\alpha)$ sobre $D(S_\alpha)$.

Observação 2.4. Note que $UA^\alpha U^{-1} = S_\alpha$ equivale à $UA^\alpha = S_\alpha U$, donde dado $u \in D(A^\alpha)$ temos

$$(UA^\alpha)(u) = (S_\alpha U)(u) \iff U(A^\alpha u) = S_\alpha(U(u)) = \lambda^\alpha U(u),$$

isto é, $U(A^\alpha u) = \lambda^\alpha U(u)$.

Na segunda construiremos via Teorema de Radon-Nikodyn um espaço de Hilbert K e um operador unitário V de L sobre K , com propriedades análogas àquelas do operador U . Finalmente na terceira construiremos uma Integral Hilbertiana $\mathcal{H}_0 = \int^\oplus \mathcal{H}(\lambda) d\nu(\lambda)$ e um operador unitário W de K em \mathcal{H}_0 , o qual também possui propriedades análogas àquelas do operador U . O operador \mathcal{U} que desejamos construir será definido por $\mathcal{U} = W \circ V \circ U$. Esquemáticamente temos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} H & \xrightarrow{U} & L & \xrightarrow{V} & K & \xrightarrow{W} & \mathcal{H}_0 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ D(A^\alpha) & \xrightarrow{U} & D(S_\alpha) & \xrightarrow{V} & D(Q_\alpha) & \xrightarrow{W} & D(\mathcal{M}_\alpha) = \mathcal{H}_\alpha \end{array}$$

onde cada sub-diagrama é comutativo, isto é,

$$\begin{cases} UA^\alpha U^{-1} = S_\alpha, \\ VS_\alpha V^{-1} = Q_\alpha, \\ WQ_\alpha W^{-1} = \mathcal{M}_\alpha. \end{cases}$$

1ª Etapa : Construção do Operador U .

Seja $\{E_\lambda; \lambda \in \mathbb{R}\}$ a família espectral de A , cuja existência é garantida pelo Teorema Espectral (ver Apêndice). Sendo A coercivo, o operador A^α , $0 \leq \alpha \leq 1$, está bem definido e

$$D(A^\alpha) = \left\{ \mathbf{u} \in H; \int_{\mathbb{R}} \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda \mathbf{u}, \mathbf{u}) < \infty \right\}, \quad (2.3)$$

$$\| A^\alpha \mathbf{u} \|^2 = \int_{\mathbb{R}} \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda \mathbf{u}, \mathbf{u}); \quad \forall \mathbf{u} \in D(A^\alpha), \quad (2.4)$$

$$(A^\alpha \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^\alpha d(E_\lambda \mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u} \in D(A^\alpha), \mathbf{v} \in H, \quad (2.5)$$

$$(A^\alpha \mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq c^\alpha \|\mathbf{u}\|^2, \quad \forall \mathbf{u} \in D(A^\alpha). \quad (2.6)$$

Considere a seguinte definição:

Definição 2.4. Dado $\mathbf{v} \in H$, o subespaço cíclico de H gerado por \mathbf{v} , denotado por $H_{\mathbf{v}}$, é o fecho em H do subespaço gerado pelo conjunto $\{E_\lambda \mathbf{v}; \lambda \in \mathbb{R}\}$, isto é,

$$H_{\mathbf{v}} = \overline{\text{Span}\{E_\lambda \mathbf{v}; \lambda \in \mathbb{R}\}}.$$

Observação 2.5. (i) $\mathbf{v} \in H_{\mathbf{v}}$, pois $H_{\mathbf{v}}$ é fechado e, pelo Teorema Espectral, $\mathbf{v} = I\mathbf{v} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E_\lambda \mathbf{v}$.

(ii) Se \mathbf{w} é ortogonal a $H_{\mathbf{v}}$, então $H_{\mathbf{w}}$ é ortogonal a $H_{\mathbf{v}}$. De fato, dados $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, temos pela proposição (A.9) que $(E_\lambda \mathbf{v}, E_\mu \mathbf{w}) = (E_\mu E_\lambda \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (E_\gamma \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$, onde $\gamma = \min\{\lambda, \mu\}$. Resulta daí que $(E_\lambda \mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0, \forall \mathbf{u} \in \text{Span}\{E_\mu \mathbf{w}; \mu \in \mathbb{R}\}$. Agora, dado $\mathbf{u} \in H_{\mathbf{w}}$, existe uma sequência (\mathbf{u}_k) em $\text{Span}\{E_\mu \mathbf{w}; \mu \in \mathbb{R}\}$ tal que $\mathbf{u}_k \rightarrow \mathbf{u}$ em H . Logo, $(E_\lambda \mathbf{v}, \mathbf{u}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (E_\lambda \mathbf{v}, \mathbf{u}_k) = 0$. Portanto, $(E_\lambda \mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0, \forall \mathbf{u} \in H_{\mathbf{w}}$. Daí, dado $\mathbf{z} \in H_{\mathbf{v}}$ temos $(\mathbf{z}, \mathbf{u}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (\mathbf{z}, \mathbf{u}_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\sum \alpha_i^{(k)} E_{\lambda_i} \mathbf{v}, \mathbf{u} \right) = 0$, isto é, $(\mathbf{z}, \mathbf{u}) = 0, \forall \mathbf{u} \in H_{\mathbf{w}}$ e $\forall \mathbf{z} \in H_{\mathbf{v}}$.

Proposição 2.6. Existe uma sequência (H_n) de subespaços cíclicos de H , dois a dois ortogonais e tal que $H = \bigoplus_n H_n$.

Demonstração. Seja (\mathbf{u}_k) uma sequência densa em H (recorde que estamos supondo H separável!). Façamos $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$ e tomemos $H_1 = H_{\mathbf{v}_1}$. Suponhamos construídos H_1, H_2, \dots, H_k subespaços cíclicos de H dois a dois ortogonais. Seja $\mathbf{u}_{n_{k+1}}$ o primeiro elemento da sequência (\mathbf{u}_k) que não pertence à $H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_k$ (Se não existir tal vetor, então $H = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_k$ e tomamos $H_n = \{0\}, n > k$, e a demonstração acabou!). Se E_{k+1} denota o subespaço de H gerado por $H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_k$ e $\{\mathbf{u}_{n_{k+1}}\}$, então

existe em E_{k+1} um vetor v_{k+1} ortogonal à $H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_k$. Tomemos $H_{k+1} = H_{v_{k+1}}$. Obtemos assim uma sequência (H_n) de subespaços cíclicos, dois a dois ortogonais com $\{u_n\} \subset \bigcup_n H_n$. Portanto, $H = \bigoplus_n H_n = \bigoplus_n H_{v_n}$. \square

Denotemos por P_n a projeção ortogonal de $H = \bigoplus_n H_n$ sobre H_n , então dado $u \in H$ temos

$$u = \sum_n P_n u \quad e \quad \|u\|^2 = \sum_n \|P_n u\|^2.$$

Além disso, se $u = \sum u_n$, então $u_n = P_n u$. Por esta razão usaremos indistintamente as formas $u = (u_n)$ e $u = \sum u_n$, $u_n = P_n u$, para representar o vetor $u \in H = \bigoplus H_n$.

Com a notação acima temos a seguir algumas propriedades dos espaços H_n :

Proposição 2.7. (i) Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, H_n é invariante por E_λ , e P_n comuta com E_λ .

(ii) P_n comuta com A^α , isto é, se $u \in D(A^\alpha)$ então $u_n = P_n u \in D(A^\alpha)$ e $P_n A^\alpha u = A^\alpha P_n u$. Em particular, se $u \in H_n \cap D(A^\alpha)$, então $A^\alpha u \in H_n$.

Demonstração. (i) Seja $u \in H_n$ da forma $u = E_\mu v_n$. Então, $E_\lambda u = E_\lambda E_\mu v_n = E_\gamma v_n \in H_n$, onde $\gamma = \min\{\lambda, \mu\}$. Por linearidade obtemos $E_\lambda u \in H_n$, $\forall u \in H_n$. Agora, dado $u = \sum P_n u \in H$, então $P_k E_\lambda u = P_k \sum E_\lambda P_n u = P_k E_\lambda P_k u = E_\lambda P_k u$, pois $E_\lambda P_k u \in H_k$, $\forall k$.

(ii) Sejam $u \in D(A^\alpha)$, $u_n = P_n u$ e $0 < \lambda_0 < c$ tal que $E_\lambda = 0$, $\forall \lambda < \lambda_0$. Para cada $b > \lambda_0$, temos

$$\int_{\lambda_0}^b \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u_n, u_n) = \int_{\lambda_0}^b \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u_n, P_n u) = \int_{\lambda_0}^b \lambda^{2\alpha} d(P_n E_\lambda u_n, u) = \int_{\lambda_0}^b \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u_n, u).$$

Mas, $\int_{\lambda_0}^b \lambda dE_\lambda$ define um operador T de H , limitado e auto-adjunto definido em todo H e

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_0}^b \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u_n, u) &= (T^{2\alpha} u_n, u) = (T^\alpha u_n, T^\alpha u) \\ &\leq \|T^\alpha u_n\| \|T^\alpha u\| \\ &= \left[\int_{\lambda_0}^b \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u_n, u_n) \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\lambda_0}^b \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u, u) \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\int_{\lambda_0}^b \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u_n, u_n) \leq \left[\int_{\lambda_0}^b \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u_n, u_n) \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\lambda_0}^b \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u, u) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\implies \left[\int_{\lambda_0}^b \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u_n, u_n) \right]^2 \leq \int_{\lambda_0}^b \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u_n, u_n) \int_{\lambda_0}^b \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u, u).$$

Logo,

$$\int_{\lambda_0}^b \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u_n, u_n) \leq \int_{\lambda_0}^b \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u, u).$$

Como $u \in D(A^\alpha)$ e $E_\lambda = 0$, $\forall \lambda < \lambda_0$, temos

$$\int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u, u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u, u) < \infty$$

e, portanto, fazendo $b \rightarrow +\infty$ temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u_n, u_n) = \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u_n, u_n) \leq \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u, u) < \infty.$$

Resulta daí que $u_n \in D(A^\alpha)$. Finalmente, dado $u \in D(A^\alpha)$ e $v \in H$, temos

$$\begin{aligned} (A^\alpha P_n u, v) &= \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda P_n u, v) \\ &= \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u, P_n v) \\ &= (A^\alpha u, P_n v) = (P_n A^\alpha u, v), \quad \forall v \in H. \end{aligned}$$

Logo, $A^\alpha P_n u = P_n A^\alpha u$, $\forall u \in D(A^\alpha)$. □

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja L_n^2 o espaço de Hilbert constituído das (classes) funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mensuráveis com relação a medida $p_n(\lambda) = (E_\lambda v_n, v_n)$ e tais que

$$\|f\|_{L_n^2}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 d(E_\lambda v_n, v_n) < \infty.$$

Seja $L = \bigoplus L_n^2 = \{u = (u_n); u_n \in L_n^2 \text{ e } \sum \|u_n\|_{L_n^2}^2 < \infty\}$, equipado com o produto interno

$$(u, v)_L = \sum (u_n, v_n)_{L_n^2}. \quad (2.7)$$

O espaço L com o produto interno (2.7) é um espaço de Hilbert.

Proposição 2.8. *Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, seja Φ_λ a função característica de $(-\infty, \lambda)$. Então:*

(i) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, tem-se $\Phi_\lambda \in L_n^2$, $n = 1, 2, \dots$

(ii) O conjunto $X_n = \{E_\lambda v_n; \lambda \in \mathbb{R}\}$ (resp. $Y_n = \{\Phi_\lambda; \lambda \in \mathbb{R}\}$) é total em H_{v_n} (em resp. L_n^2).

(iii) Existe um único operador unitário U_n de H_{v_n} sobre L_n^2 tal que $U_n(E_\lambda v_n) = \Phi_\lambda$.

(iv) $\forall u \in H_{v_n}$, tem-se $U_n(E_\lambda u) = \Phi_\lambda U_n(u)$.

Demonstração. (i) Φ_λ é mensurável com relação a $\mathfrak{p}_n(\lambda)$ e

$$\begin{aligned} \|\Phi_\lambda\|_{L_n^2}^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_\lambda(\mu)|^2 d(E_\mu \mathfrak{v}_n, \mathfrak{v}_n) \\ &= \lim_{\lambda_0 \rightarrow -\infty} \int_{\lambda_0}^{\lambda} d(E_\mu \mathfrak{v}_n, \mathfrak{v}_n) \\ &= \lim_{\lambda_0 \rightarrow -\infty} \left\{ (E_\lambda \mathfrak{v}_n, \mathfrak{v}_n) - (E_{\lambda_0} \mathfrak{v}_n, \mathfrak{v}_n) \right\} \\ &= (E_\lambda \mathfrak{v}_n, \mathfrak{v}_n) = |E_\lambda \mathfrak{v}_n|^2 < \infty, \end{aligned}$$

pois pelo teorema espectral temos $\lim_{\lambda_0 \rightarrow -\infty} E_{\lambda_0} = 0$.

(ii) Claramente X_n é total em $H_{\mathfrak{v}_n}$. Provaremos que Y_n é total em L_n^2 . De fato, se $\mathbf{u} \in L_n^2$ existe uma sequência de funções simples (φ_k) tal que $\varphi_k \rightarrow \mathbf{u}$ em L_n^2 . Como $(-\infty, \lambda_0)$ tem medida nula com relação a \mathfrak{p}_n , podemos supor que existem $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{n(k)}$ com $\lambda_j \geq \lambda_0, \forall j = 1, 2, \dots, n(k)$ e $\varphi_k = \sum_{j=1}^{n(k)} C_j \Phi_{[\lambda_0, \lambda_j]}$. Seja $\Psi_k = \sum_{j=1}^{n(k)} C_j \Phi_{\lambda_j} \in \text{Span}\{Y_n\}$. Então

$$\begin{aligned} \|\Psi_k - \mathbf{u}\|_{L_n^2}^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi_k(\lambda) - \mathbf{u}(\lambda)|^2 d(E_\lambda \mathfrak{v}_n, \mathfrak{v}_n) \\ &= \int_{\lambda_0}^{+\infty} |\varphi_k(\lambda) - \mathbf{u}(\lambda)|^2 d(E_\lambda \mathfrak{v}_n, \mathfrak{v}_n) \\ &= \|\varphi_k - \mathbf{u}\|_{L_n^2}^2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Assim $\Psi_k \rightarrow \mathbf{u}$ em L_n^2 . Portanto, $L_n^2 = \overline{\text{Span}\{Y_n\}}$.

(iii) Seja $U_n : X_n \rightarrow Y_n, U_n(E_\lambda \mathfrak{v}_n) = \Phi_\lambda$. Resulta que U_n preserva produto interno. De fato, se $\lambda \leq \mu$, temos $E_\lambda \leq E_\mu$ donde

$$\begin{aligned} (\Phi_\lambda, \Phi_\mu)_{L_n^2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_\lambda(\eta) \Phi_\mu(\eta) d(E_\eta \mathfrak{v}_n, \mathfrak{v}_n) \\ &= \int_{-\infty}^{\lambda} d(E_\eta \mathfrak{v}_n, \mathfrak{v}_n) \\ &= (E_\lambda \mathfrak{v}_n, \mathfrak{v}_n) = (E_\mu E_\lambda \mathfrak{v}_n, \mathfrak{v}_n) = (E_\lambda \mathfrak{v}_n, E_\mu \mathfrak{v}_n). \end{aligned}$$

Extendendo U_n linearmente a um operador $U_n : \text{Span}\{X_n\} \rightarrow \text{Span}\{Y_n\}$, pomos $U_n(\sum_{j=1}^k C_j E_{\lambda_j} \mathfrak{v}_n) = \sum_{j=1}^k C_j \Phi_{\lambda_j}$. Temos que U_n é unitário e por densidade podemos extendê-lo a um operador unitário U_n de $H_{\mathfrak{v}_n} = \overline{\text{Span}\{X_n\}}$ sobre $L_n^2 = \overline{\text{Span}\{Y_n\}}$.

(iv) Suponhamos $\mathbf{u} = E_\mu \mathfrak{v}_n$ e seja $\nu = \min\{\lambda, \mu\}$. Então,

$$\begin{aligned} U_n(E_\lambda \mathbf{u}) &= U_n(E_\lambda E_\mu \mathfrak{v}_n) = U_n(E_\nu \mathfrak{v}_n) = \Phi_\nu \\ &= \Phi_\lambda \Phi_\mu = \Phi_\lambda U_n(E_\mu \mathfrak{v}_n) = \Phi_\lambda U_n(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Usando linearidade e continuidade concluímos que $\mathbf{U}_n(E_\lambda \mathbf{u}) = \Phi_\lambda \mathbf{U}_n(\mathbf{u})$, $\forall \mathbf{u} \in H_{v_n}$. \square

Proposição 2.9. *Seja $\mathbf{v} \in H_{v_n}$. Então $\mathbf{v} \in D(A^\alpha)$ se, e somente se, $\lambda^\alpha \mathbf{U}_n(\mathbf{v}) \in L_n^2$. Neste caso $\mathbf{U}_n(A^\alpha \mathbf{v}) = \lambda^\alpha \mathbf{U}_n(\mathbf{v})$.*

Demonstração. Como $\mathbf{v} \in H_{v_n}$, segue da proposição 2.7 item (a) que $E_\lambda \mathbf{v} \in H_{v_n}$ e sendo $\mathbf{U}_n : H_{v_n} \rightarrow L_n^2$ unitário segue que $(E_\lambda \mathbf{v}, \mathbf{v}) = (\mathbf{U}_n E_\lambda \mathbf{v}, \mathbf{U}_n \mathbf{v})_{L_n^2}$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda \mathbf{v}, \mathbf{v}) &= \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} d(\mathbf{U}_n E_\lambda \mathbf{v}, \mathbf{U}_n \mathbf{v}) \\ &= \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} d \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{U}_n(\mathbf{v})(\mu)|^2 d(E_\mu v_n, v_n) \\ &= \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} d \int_{\lambda_0}^{\lambda} |\mathbf{U}_n(\mathbf{v})(\mu)|^2 d(E_\mu v_n, v_n) \\ &= \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} |\mathbf{U}_n(\mathbf{v})(\mu)|^2 d(E_\mu v_n, v_n). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda \mathbf{v}, \mathbf{v}) < \infty \iff \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda^\alpha \mathbf{U}_n(\mathbf{v})(\lambda)|^2 d(E_\lambda v_n, v_n) < \infty,$$

isto é,

$$\mathbf{v} \in D(A^\alpha) \iff \lambda^\alpha \mathbf{U}_n(\mathbf{v}) \in L_n^2.$$

Mostremos agora que $\mathbf{U}_n(A^\alpha \mathbf{v}) = \lambda^\alpha \mathbf{U}_n(\mathbf{v})$. De fato, para cada $\mathbf{w} \in H_{v_n}$ temos

$$(A^\alpha \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{U}_n(A^\alpha \mathbf{v}), \mathbf{U}_n(\mathbf{w}))_{L_n^2} \tag{2.8}$$

e

$$\begin{aligned} (E_\lambda \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= (\mathbf{U}_n E_\lambda \mathbf{v}, \mathbf{U}_n \mathbf{w})_{L_n^2} = (\Phi_\lambda \mathbf{U}_n \mathbf{v}, \mathbf{U}_n \mathbf{w})_{L_n^2} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_\lambda(\mu) \mathbf{U}_n(\mathbf{v})(\mu) \mathbf{U}_n(\mathbf{w})(\mu) d(E_\mu v_n, v_n) \\ &= \int_{\lambda_0}^{\lambda} \mathbf{U}_n(\mathbf{v})(\mu) \mathbf{U}_n(\mathbf{w})(\mu) d(E_\mu v_n, v_n), \end{aligned}$$

ou seja,

$$(E_\lambda \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \mathbf{U}_n(\mathbf{v})(\mu) \mathbf{U}_n(\mathbf{w})(\mu) d(E_\mu v_n, v_n).$$

Logo,

$$\begin{aligned} (A^\alpha \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^\alpha d(E_\lambda \mathbf{v}, \mathbf{w}) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^\alpha d \int_{\lambda_0}^{\lambda} \mathbf{U}_n(\mathbf{v})(\mu) \mathbf{U}_n(\mathbf{w})(\mu) d(E_\mu v_n, v_n) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^\alpha \mathbf{U}_n(\mathbf{v})(\lambda) \mathbf{U}_n(\mathbf{w})(\lambda) d(E_\lambda v_n, v_n) = (\lambda^\alpha \mathbf{U}_n(\mathbf{v}), \mathbf{U}_n(\mathbf{w}))_{L_n^2}. \end{aligned}$$

Usando (2.8), obtemos

$$(\mathbf{U}_n(A^\alpha \mathbf{v}), \mathbf{U}(\mathbf{w}))_{L_n^2} = (\lambda^\alpha \mathbf{U}_n(\mathbf{v}), \mathbf{U}_n(\mathbf{w}))_{L_n^2}, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{H}. \quad (2.9)$$

De (2.9) e do fato de \mathbf{U}_n ser sobrejetiva concluímos que $\mathbf{U}_n(A^\alpha \mathbf{v}) = \lambda^\alpha \mathbf{U}_n(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in D(A^\alpha) \cap H_{v_n}$. \square

Lemma 2.0.1. *Seja $\mathbf{u} = \sum_n \mathbf{u}_n \in \mathbf{H}$. Então $\mathbf{u} \in D(A^\alpha)$ se, e somente se, $\mathbf{u}_n \in D(A^\alpha)$ e $\sum_n A^\alpha(\mathbf{u}_n)$ converge. Neste caso,*

$$A^\alpha \mathbf{u} = \sum_n A^\alpha(\mathbf{u}_n). \quad (2.10)$$

Demonstração. Suponhamos que $\mathbf{u}_n \in D(A^\alpha)$ e $\sum_n A^\alpha(\mathbf{u}_n)$ é convergente e seja $\mathbf{v}_k = \sum_{n=1}^k \mathbf{u}_n$. Então $\mathbf{v}_k \in D(A^\alpha)$, $\mathbf{v}_k \rightarrow \mathbf{u}$ em \mathbf{H} e $A^\alpha \mathbf{v}_k = \sum_{n=1}^k A^\alpha \mathbf{u}_n \rightarrow \mathbf{w}$. Sendo A^α fechado, concluímos que $\mathbf{u} \in D(A^\alpha)$ e $A^\alpha \mathbf{u} = \mathbf{w}$. Reciprocamente, se $\mathbf{u} \in D(A^\alpha)$ vimos na Proposição 2.7(ii) que $\mathbf{u}_n = P_n \mathbf{u} \in D(A^\alpha)$. Além disso, $\sum_{n=1}^k A^\alpha \mathbf{u}_n = \sum_{n=1}^k A^\alpha P_n \mathbf{u} = \sum_{n=1}^k P_n A^\alpha \mathbf{u} \rightarrow A^\alpha \mathbf{u}$. \square

Lemma 2.0.2. *Seja $\{\mathcal{L}_n : E_n \rightarrow F_n; n \in \mathbb{N}\}$ uma família de operadores unitários entre espaços de Hilbert. Então $\mathcal{L} : E = \bigoplus E_n \rightarrow F = \bigoplus F_n$ dado por $\mathcal{L}(\mathbf{w}_n) = \mathcal{L}_n \mathbf{w}_n$ é um operador unitário.*

Demonstração. A linearidade de \mathcal{L} é óbvia. Dado $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_n) \in E$, segue da hipótese que $\|\mathcal{L}\mathbf{w}\|_F^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{L}_n \mathbf{w}_n\|_{F_n}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|\mathbf{w}_n\|_{E_n}^2 = \|\mathbf{w}\|_E^2$. \square

Usaremos a seguinte notação para os operadores "tipo" \mathcal{L} : $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_n)$.

Definição 2.5. *O operador de multiplicação por λ^α em L é o operador S_α definido por*

$$D(S_\alpha) = \{f = (f_n) \in L; \lambda^\alpha f_n \in L_n^2 \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^\alpha f_n \text{ converge em } L\}, \quad (2.11)$$

$$S_\alpha(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^\alpha f_n. \quad (2.12)$$

Teorema 2.2. *Dado $0 \leq \alpha \leq 1$ existe um operador unitário \mathbf{U} de $\mathbf{H} = \bigoplus \mathbf{H}_{\nu_n}$ sobre $\mathbf{L} = \bigoplus \mathbf{L}_n^2$ tal que a imagem de \mathbf{A}^α por \mathbf{U} é o operador \mathcal{S}_α da definição acima, isto é $\mathbf{U}(\mathbf{D}(\mathbf{A}^\alpha)) = \mathbf{D}(\mathcal{S}_\alpha)$ e $\mathbf{U}\mathbf{A}^\alpha\mathbf{U}^{-1}(f) = \mathcal{S}_\alpha(f)$, $\forall f \in \mathbf{D}(\mathcal{S}_\alpha)$. Além disso, \mathbf{U} é um isomorfismo de $(\mathbf{D}(\mathbf{A}^\alpha), \|\cdot\|_{\mathbf{D}(\mathbf{A}^\alpha)})$ sobre $(\mathbf{D}(\mathcal{S}_\alpha), \|\cdot\|_{\mathbf{D}(\mathcal{S}_\alpha)})$, onde*

$$\| \mathbf{u} \|_{\mathbf{D}(\mathbf{A}^\alpha)}^2 = \| \mathbf{A}^\alpha \mathbf{u} \|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} d(\mathbf{E}_\lambda \mathbf{u}, \mathbf{u}), \quad (2.13)$$

$$\| f \|_{\mathbf{D}(\mathcal{S}_\alpha)}^2 = \| \mathcal{S}_\alpha f \|_{\mathbf{L}}^2 = \sum_n \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} |f_n(\lambda)|^2 d(\mathbf{E}_\lambda \nu_n, \nu_n), \quad f \in \mathbf{D}(\mathcal{S}_\alpha). \quad (2.14)$$

Demonstração. Seja $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_n)$, onde \mathbf{U}_n é o operador da Proposição (2.8)(iii). Segue do Lema 2.0.2 que \mathbf{U} é unitário de \mathbf{H} sobre \mathbf{L} . Mostraremos agora que $\mathbf{U}\mathbf{A}^\alpha\mathbf{U}^{-1} : \mathbf{U}(\mathbf{D}(\mathbf{A}^\alpha)) \rightarrow \mathbf{L}$ coincide com o operador \mathcal{S}_α

(i) $\mathbf{U}(\mathbf{D}(\mathbf{A}^\alpha)) = \mathbf{D}(\mathcal{S}_\alpha)$.

De fato, seja $f = (f_n) \in \mathbf{D}(\mathcal{S}_\alpha) \subset \mathbf{L}$ e seja $g = \mathbf{U}^{-1}(f) \in \mathbf{H}$. Temos $g_n = \mathbf{U}_n^{-1}(f_n) \in \mathbf{H}_{\nu_n}$ e $\lambda^\alpha \mathbf{U}_n(g_n) = \lambda^\alpha f_n \in \mathbf{L}_n^2$. Resulta da Proposição 2.9 que $g_n \in \mathbf{D}(\mathbf{A}^\alpha)$. Além disso

$$\sum_n^{+\infty} \mathbf{U}_n(\mathbf{A}^\alpha g_n) = \sum_n^{+\infty} \lambda^\alpha \mathbf{U}_n(g_n) = \lambda^\alpha f_n$$

que converge em \mathbf{L} e portanto $\sum_n^{+\infty} \mathbf{A}^\alpha g_n$ converge em \mathbf{H} . Resulta do Lema 2.0.1 que $g \in \mathbf{D}(\mathbf{A}^\alpha)$ e portanto $f = \mathbf{U}(g) \in \mathbf{U}(\mathbf{D}(\mathbf{A}^\alpha))$. Reciprocamente, seja $g \in \mathbf{D}(\mathbf{A}^\alpha)$ e ponhamos $f = \mathbf{U}(g)$. Do Lema 2.0.1 concluímos que $g_n \in \mathbf{D}(\mathbf{A}^\alpha)$ e $\sum_n^{+\infty} \mathbf{A}^\alpha g_n$ converge em \mathbf{H} . Mas,

$$g_n \in \mathbf{D}(\mathbf{A}^\alpha) \iff \lambda^\alpha \mathbf{U}_n(g_n) \in \mathbf{L}_n^2 \quad (\text{Veja Proposição 2.9}).$$

Logo,

$$\lambda^\alpha f_n = \lambda^\alpha \mathbf{U}_n(g_n) \in \mathbf{L}_n^2 \quad (2.15)$$

e

$$\sum_n^{+\infty} \lambda^\alpha f_n = \sum_n^{+\infty} \lambda^\alpha \mathbf{U}_n(g_n) = \sum_n^{+\infty} \mathbf{U}_n(\mathbf{A}^\alpha g_n), \quad (2.16)$$

sendo a convergência acima em \mathbf{L} . Resulta de (2.15) e (2.16) que $f = \mathbf{U}(g) \in \mathbf{D}(\mathcal{S}_\alpha)$.

(ii) $\mathbf{U}\mathbf{A}^\alpha\mathbf{U}^{-1}(f) = \mathcal{S}_\alpha(f)$, $\forall f \in \mathbf{D}(\mathcal{S}_\alpha)$.

De fato,

$$\begin{aligned} \mathbf{U}\mathbf{A}^\alpha\mathbf{U}^{-1}(f) &= \mathbf{U}\mathbf{A}^\alpha\mathbf{U}^{-1}\left(\sum_n^{+\infty} f_n\right) = \mathbf{U}\mathbf{A}^\alpha\left(\sum_n^{+\infty} \mathbf{U}_n^{-1}(f_n)\right) \\ &= \mathbf{U}\left(\sum_n^{+\infty} \mathbf{A}^\alpha\mathbf{U}_n^{-1}(f_n)\right) \\ &= \sum_n^{+\infty} \mathbf{U}_n\mathbf{A}^\alpha\mathbf{U}_n^{-1}(f_n) \\ &= \sum_n^{+\infty} \lambda^\alpha f_n = \mathcal{S}_\alpha f. \end{aligned}$$

Da (i) e (ii) concluímos que $\mathbf{U}\mathbf{A}^\alpha\mathbf{U}^{-1} = \mathcal{S}_\alpha$. Para provarmos que \mathbf{U} é um isomorfismo de $(\mathbf{D}(\mathbf{A}^\alpha), \|\cdot\|_{\mathbf{D}(\mathbf{A}^\alpha)})$ sobre $(\mathbf{D}(\mathcal{S}_\alpha), \|\cdot\|_{\mathbf{D}(\mathcal{S}_\alpha)})$, seja $\mathbf{u} \in \mathbf{D}(\mathbf{A}^\alpha)$ e $f = \mathbf{U}(\mathbf{u})$. Então

$$\begin{aligned} \|\mathbf{U}(\mathbf{u})\|_{\mathbf{D}(\mathcal{S}_\alpha)}^2 &= \|f\|_{\mathbf{D}(\mathcal{S}_\alpha)}^2 = \|\mathcal{S}_\alpha(f)\|_{\mathbf{L}} \\ &= \|\mathbf{U}\mathbf{A}^\alpha\mathbf{U}^{-1}(f)\|_{\mathbf{L}}^2 \\ &= \|\mathbf{U}\mathbf{A}^\alpha(\mathbf{u})\|_{\mathbf{L}}^2 \\ &= \|\mathbf{A}^\alpha(\mathbf{u})\|^2 = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{D}(\mathbf{A}^\alpha)}^2, \end{aligned}$$

isto é,

$$\|\mathbf{U}(\mathbf{u})\|_{\mathbf{D}(\mathcal{S}_\alpha)} = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{D}(\mathbf{A}^\alpha)}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{D}(\mathbf{A}^\alpha).$$

□

Observação 2.6. O Teorema 2.2 continua válido se equiparmos $\mathbf{D}(\mathbf{A}^\alpha)$ com a norma do gráfico :

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{D}(\mathbf{A}^\alpha)}^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{A}^\alpha\mathbf{u}\|^2.$$

Neste caso

$$\begin{aligned} \|\mathbf{U}(\mathbf{u})\|_{\mathbf{D}(\mathcal{S}_\alpha)}^2 &= \|\mathbf{A}^\alpha\mathbf{u}\|^2 \leq \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{D}(\mathbf{A}^\alpha)}^2 \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{c^{2\alpha}}\right) \|\mathbf{U}(\mathbf{u})\|_{\mathbf{D}(\mathcal{S}_\alpha)}^2, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{D}(\mathbf{A}^\alpha). \end{aligned} \tag{2.17}$$

O diagrama a seguir resume esta primeira etapa:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{H} = \bigoplus \mathbf{H}_n & \xleftarrow{\mathbf{U}} & \mathbf{L} = \bigoplus \mathbf{L}_n^2 \\ \mathbf{A}^\alpha \uparrow & & \mathcal{S}_\alpha \uparrow \\ \mathbf{D}(\mathbf{A}^\alpha) & \xleftarrow{\mathbf{U}} & \mathbf{D}(\mathcal{S}_\alpha). \end{array}$$

Além disso, $UA^\alpha U^{-1} = S_\alpha$.

2ª Etapa: Construção do Operador \mathcal{V} .

Dado $E \subset \mathbb{R}$ mensurável, seja $\mu_n(E) = \int_E d(E_\lambda v_n, v_n) \geq 0$. Temos que μ_n define uma medida positiva na σ -álgebra \mathfrak{M} dos subconjuntos de \mathbb{R} mensuráveis com relação a medida $p_n(\lambda) = (E_\lambda v_n, v_n)$.

Sem perda de generalidade, podemos supor que os subespaços cíclicos H_{v_n} da decomposição de H são gerados por vetores ortonormais v_n . Assim, por (2.4) com $\alpha = 0$, temos

$$\mu_n(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} d(E_\lambda v_n, v_n) = \|v_n\|^2 = 1. \tag{2.18}$$

Resulta de (2.18) que μ_n é uma medida finita, de modo que a medida μ definida por

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} \mu_n(E), \tag{2.19}$$

é positiva, finita e $\mu(E) = 0 \iff \mu_n(E) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Observação 2.7. Como $E_\lambda = 0$ para $\lambda < \lambda_0$, temos $\int_E d(E_\lambda v_n, v_n) = 0$ para todo $\lambda < \lambda_0$, donde $\text{supp}(\mu_n) \subset (\lambda_0, +\infty)$. Além disso, como $\text{supp}(\mu) \subset \text{supp}(\mu_n)$ temos $\text{supp}(\mu) \subset (\lambda_0, +\infty)$.

Aplicando o Teorema de Radon - Nikodym, cf. Capítulo 1, com $\nu = \mu_n$, concluímos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe uma função não negativa $\phi_n \in L^1(\mu)$, onde μ é definida por (2.19), tal que

$$\mu_n(E) = \int_E \phi_n d\mu, \forall E \in \mathfrak{M},$$

isto é,

$$\int_E d(E_\lambda v_n, v_n) = \int_E \phi_n d\mu, \forall E \in \mathfrak{M}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja

$$A_n = \{t \in \mathbb{R}; \phi_n(t) > 0\},$$

e denotemos por $L^2(A_n, \mu)$ ao espaço vetorial das (classes de) funções μ -mensuráveis de quadrado integráveis em A_n .

Observação 2.8. Temos que $f \in L_n^2 \iff \sqrt{\phi_n}f \in L^2(A_n, \mu)$, pois $\text{supp}(\mu) \subset (\lambda_0, +\infty)$, donde

$$\int_{A_n} (\sqrt{\phi_n}f)^2 d\mu = \int_{\lambda_0}^{+\infty} \phi_n f^2 d\mu = \int_{\lambda_0}^{+\infty} f^2 d(E_\lambda \nu_n, \nu_n).$$

Denotemos por K o espaço vetorial $\bigoplus_n L^2(A_n, \mu)$ equipado com o produto interno

$$(f, g)_K = \sum_n (f_n, g_n)_{L^2(A_n, \mu)}, \quad ; \quad f = (f_n), g = (g_n) \in \bigoplus_n L^2(A_n, \mu).$$

Tem-se que K é um espaço de Hilbert e

$$\sum_n f_n \text{ converge em } L \iff \sum_n \sqrt{\phi_n}f_n \text{ converge em } K.$$

Definição 2.6. O operador de multiplicação por λ^α sobre K é o operador Q_α definido por

$$D(Q_\alpha) = \{g = (g_n) \in K; \lambda^\alpha g_n \in L^2(A_n, \mu) \text{ e } \sum_n \lambda^\alpha g_n \text{ converge em } K\}, \quad (2.20)$$

$$Q_\alpha(g) = \sum_n \lambda^\alpha g_n. \quad (2.21)$$

Teorema 2.3. Existe um operador unitário \mathcal{V} de L sobre K tal que a imagem de \mathcal{S}_α por \mathcal{V} é o operador Q_α . Além disso, \mathcal{V} é um isomorfismo de $(D(\mathcal{S}_\alpha), \|\cdot\|_{D(\mathcal{S}_\alpha)})$ sobre $(D(Q_\alpha), \|\cdot\|_{D(Q_\alpha)})$, onde

$$\|g\|_{D(Q_\alpha)} = \|Q_\alpha g\|_K. \quad (2.22)$$

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\mathcal{V}_n : L_n^2 \rightarrow L^2(A_n, \mu)$ definido por $\mathcal{V}_n(f) = \sqrt{\phi_n}f$. Resulta da Observação 2.8 que \mathcal{V}_n está bem definida. Além disso, \mathcal{V}_n é um operador unitário de L_n^2 sobre $L^2(A_n, \mu)$, pois

$$\begin{aligned} (\mathcal{V}_n(f), \mathcal{V}_n(g))_{L^2(A_n, \mu)} &= \int_{A_n} \phi_n fg d\mu = \int_{\lambda_0}^{+\infty} \phi_n fg d\mu \\ &= \int_{\lambda_0}^{+\infty} fg d(E_\lambda \nu_n, \nu_n) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} fg d(E_\lambda \nu_n, \nu_n) = (f, g)_{L_n^2}. \end{aligned}$$

Do Lema 2.0.2 concluímos que $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_n)$ é um operador unitário de $L = \bigoplus_n L_n^2$ sobre

$$K = \bigoplus_n L^2(A_n, \mu).$$

(i) $\mathcal{V}(D(\mathcal{S}_\alpha)) = D(Q_\alpha)$.

Seja $f = (f_n) \in D(Q_\alpha)$ e $g = \mathcal{V}^{-1}(f)$. Temos

$f \in D(Q_\alpha) \iff \lambda^\alpha f_n \in L^2(A_n, \mu)$ e $\sum_n^{+\infty} \lambda^\alpha f_n$ converge em $K \iff \lambda^\alpha g_n = \lambda^\alpha \phi_n^{-\frac{1}{2}} f_n \in L_n^2$
 e $\sum_n^{+\infty} \lambda^\alpha g_n = \sum_n^{+\infty} \lambda^\alpha \phi_n^{-\frac{1}{2}} f_n$ converge em L (Veja (2.20) e a Observação 2.8).

Isso prova (i).

(ii) $\mathcal{V} S_\alpha \mathcal{V}^{-1}(f) = Q_\alpha(f), \forall f \in D(Q_\alpha)$.

Seja $f = \sum_n^{+\infty} f_n \in D(Q_\alpha)$. Então

$$\begin{aligned} \mathcal{V} S_\alpha \mathcal{V}^{-1}(f) &= \mathcal{V} S_\alpha \left(\sum_n^{+\infty} \mathcal{V}_n^{-1}(f_n) \right) = \mathcal{V} \left(\sum_n^{+\infty} \lambda^\alpha \mathcal{V}_n^{-1}(f_n) \right) \\ &= \sum_n^{+\infty} \mathcal{V}_n(\lambda^\alpha \mathcal{V}_n^{-1}(f_n)) \\ &= \sum_n^{+\infty} \sqrt{\phi_n} \lambda^\alpha \mathcal{V}_n^{-1}(f_n) \\ &= \sum_n^{+\infty} \sqrt{\phi_n} \lambda^\alpha \phi_n^{-\frac{1}{2}} f_n = \sum_n^{+\infty} \lambda^\alpha f_n = Q_\alpha(f). \end{aligned}$$

Provemos agora que $\mathcal{V} : D(S_\alpha) \longrightarrow D(Q_\alpha)$ é uma bijeção linear. Dado $f \in D(S_\alpha)$ temos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{V}(f)\|_{D(Q_\alpha)}^2 &= \|Q_\alpha(\mathcal{V}(f))\|_K^2 = \|Q_\alpha\left(\sum_n^{+\infty} \sqrt{\phi_n} f_n\right)\|_K^2 \\ &= \left\| \sum_n^{+\infty} \lambda^\alpha \sqrt{\phi_n} f_n \right\|_K^2 \\ &= \sum_n^{+\infty} \|\lambda^\alpha \sqrt{\phi_n} f_n\|_{L^2(A_n, \mu)}^2 \\ &= \sum_n^{+\infty} \|\lambda^\alpha f_n\|_{L_n^2}^2 = \|f\|_{D(S_\alpha)}^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|\mathcal{V}(f)\|_{D(Q_\alpha)} = \|f\|_{D(S_\alpha)}, \forall f \in D(S_\alpha).$$

$$\begin{array}{ccc} L = \bigoplus_n L_n^2 & \xleftrightarrow{\mathcal{V}} & K = \bigoplus L^2(A_n, \mu) \\ S_\alpha \uparrow & & \uparrow Q_\alpha \\ D(S_\alpha) & \xleftrightarrow{\mathcal{V}} & D(Q_\alpha). \end{array}$$

Além disso, $\mathcal{V} S_\alpha \mathcal{V}^{-1} = Q_\alpha$.

□

3ª Etapa: Construção do Operador \mathcal{U} & A Integral Hilbertiana \mathcal{H}_0 .

Recordando a parte inicial deste capítulo observamos que para se definir uma integral hilbertiana necessitamos de uma medida ν positiva sobre \mathbb{R} e um campo de espaços hilbertianos $\lambda \in \mathbb{R} \mapsto H(\lambda)$ ν -mensurável. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ denotemos por $n(\lambda)$ o número de índices i para os quais $\lambda \in A_i = \{t \in \mathbb{R}; \phi_i(t) > 0\}$ e seja $B_m = \{\lambda \in \mathbb{R}; n(\lambda) = m\}$. Temos que $\lambda \mapsto n(\lambda)$ e B_m são μ -mensuráveis, onde μ é a medida definida na etapa anterior, cf. (2.19).

Proposição 2.10. *Seja F um espaço de Hilbert com base ortonormal $\{v_1, v_2, \dots\}$ e seja $F_n = \text{Span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. O campo hilbertiano*

$$\lambda \mapsto \mathcal{H}(\lambda) = \begin{cases} F_{n(\lambda)}, & \text{se } \lambda \notin B_0, \\ 0, & \text{se } \lambda \in B_0, \end{cases}$$

é μ -mensurável.

Demonstração. Seja

$$\mathcal{N} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow F; f \text{ é } \mu\text{-mensurável e } f(\lambda) \in \mathcal{H}(\lambda), \forall \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Mostraremos que \mathcal{N} satisfaz as condições (i), (ii) e (iii) da Definição 2.1. De fato, se $f \in \mathcal{N}$ temos $\|f\|_{\mathcal{H}(\lambda)} = \|f\|_F$ e f μ -mensurável, donde $\lambda \mapsto \|f\|_{\mathcal{H}(\lambda)}$ é μ -mensurável e, portanto, o item (i) é satisfeito. Para verificar (ii), seja $\lambda \mapsto \phi(\lambda) \in \mathcal{H}(\lambda)$ um campo de vetores sobre \mathbb{R} tal que

$$\lambda \mapsto (f(\lambda), \phi(\lambda))_{\mathcal{H}(\lambda)} = (f(\lambda), \phi(\lambda))_F \tag{2.23}$$

é μ -mensurável, $\forall f \in \mathcal{N}$. Para provar que ϕ é μ -mensurável é suficiente provar que $\lambda \mapsto (v, \phi(\lambda))_F$ é μ -mensurável, $\forall v \in F$. Seja então

$$v = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i v_i \in F$$

e

$$f_v(\lambda) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i v_i, & \text{se } \lambda \in B_n, \\ 0, & \text{se } \lambda \in B_0. \end{cases}$$

Temos que $f_v : \mathbb{R} \mapsto F$ é μ -mensurável e se $\lambda \in B_n$ então $n(\lambda) = n$ e $\mathcal{H}(\lambda) = \text{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$, resultando $f_v(\lambda) \in \mathcal{H}(\lambda)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. Logo, $f_v \in \mathcal{N}$ e para

$\lambda \in \mathbb{R}$ temos

$$(\mathbf{v}, \phi(\lambda))_{\mathbb{F}} = (f_{\mathbf{v}}(\lambda), \phi(\lambda))_{\mathcal{H}(\lambda)},$$

donde por (2.23) resulta que $\lambda \mapsto (\mathbf{v}, \phi(\lambda))_{\mathbb{F}}$ é μ -mensurável. Finalmente, consideremos a sequência $(\mathbf{e}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida do seguinte modo: Se $\lambda \in B_0$, definimos $\mathbf{e}_n(\lambda) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Se $\lambda \notin B_0$, definimos $\mathbf{e}_1(\lambda) = \mathbf{v}_1$ e para $n \geq 2$

$$\mathbf{e}_n(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{se } \lambda \in \cup_{j=1}^{n-1} B_j, \\ \mathbf{v}_n, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Dado $\lambda \in \mathbb{R} - B_0$ temos $\lambda \in B_q$ para algum inteiro $q \geq 1$, e teremos

$$\mathbf{e}_n(\lambda) = \mathbf{v}_n, \quad n \leq q, \text{ pois } \lambda \notin \cup_{j=1}^{n-1} B_j, \quad n \leq q,$$

$$\mathbf{e}_n(\lambda) = 0, \quad n > q, \text{ pois } \lambda \in \cup_{j=1}^{n-1} B_j, \quad n > q,$$

isto é, $(\mathbf{e}_n(\lambda)) = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_q, 0, \dots)$ é total em $\mathcal{H}(\lambda) = F_{n(\lambda)} = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_q\}$. Isto mostra que vale o item (iii) e a proposição está demonstrada. \square

A integral hilbertiana do campo $\lambda \mapsto \mathcal{H}(\lambda)$ da proposição acima será denotada por $\mathcal{H}_0 = \int^{\oplus} \mathcal{H}(\lambda) d\mu(\lambda)$.

Definição 2.7. *O operador de multiplicação por λ^α em \mathcal{H}_0 é o operador \mathcal{M}_α definido por*

$$D(\mathcal{M}_\alpha) = \{\mathbf{v} \in \mathcal{H}_0; \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} \|\mathbf{v}(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 d\mu(\lambda) < \infty\} \quad (2.24)$$

$$\mathcal{M}_\alpha \mathbf{v}(\lambda) = \lambda^\alpha \mathbf{v}(\lambda), \quad \lambda \in (\lambda_0, +\infty), \quad \mathbf{v} \in D(\mathcal{M}_\alpha). \quad (2.25)$$

Observe que $D(\mathcal{M}_\alpha) = \mathcal{H}_\alpha$, onde os espaços (de Hilbert) \mathcal{H}_α são os espaços definidos no início deste capítulo, os quais são normados com norma

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathcal{H}_\alpha}^2 = \int_{+\infty}^{\lambda_0} \lambda^{2\alpha} \|\mathbf{v}(\lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 d\mu(\lambda), \quad \mathbf{v} \in D(\mathcal{M}_\alpha) = \mathcal{H}_\alpha.$$

Teorema 2.4. *Existe um operador unitário \mathcal{W} de \mathbb{K} sobre \mathcal{H}_0 tal que a imagem do operador \mathcal{Q}_α por \mathcal{W} é o operador \mathcal{M}_α da definição 2.7. Além disso, \mathcal{W} é um isomorfismo de $(D(\mathcal{Q}_\alpha), \|\cdot\|_{D(\mathcal{Q}_\alpha)})$ sobre \mathcal{H}_α .*

Demonstração. Segue de modo análogo à prova dos Teoremas 2.2 e 2.3. \square

Segue das três etapas acima a prova do Teorema de Diagonalização com $\mathbf{v} = \mu$, onde μ é a medida definida em (2.19), \mathcal{H}_0 como na Proposição 2.10 e $\mathcal{U} = \mathcal{W} \circ \mathcal{V} \circ \mathcal{U}$. \square

Observação 2.9. *Resulta do Teorema 2.1 que para todo $u \in D(A)$ tem-se*

$$\mathcal{U}(Au) = \lambda \mathcal{U}(u).$$

Observação 2.10. *Se \mathcal{U} unitário segue que o mesmo é um operador limitado de H .*

Como uma primeira aplicação do Teorema 2.1 provaremos a seguinte cadeia de imersões densas:

$$D(A^\alpha) \hookrightarrow D(A^\beta) \hookrightarrow H \hookrightarrow D(A^\beta)' \hookrightarrow D(A^\alpha)', \quad (2.26)$$

onde $\alpha \geq \beta \geq 0$. De fato, dado $u \in D(A^\alpha)$ e recordando que $E_\lambda = 0$ para $\lambda < \lambda_0$ temos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u, u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{2\alpha-2\beta} \lambda^{2\beta} d(E_\lambda u, u) = \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2(\alpha-\beta)} \lambda^{2\beta} d(E_\lambda u, u) \\ &\leq \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda_0^{2(\alpha-\beta)} \lambda^{2\beta} d(E_\lambda u, u) \\ &= \lambda_0^{2(\alpha-\beta)} \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2\beta} d(E_\lambda u, u) \\ &= \lambda_0^{2(\alpha-\beta)} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{2\beta} d(E_\lambda u, u), \end{aligned}$$

donde

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{2\beta} d(E_\lambda u, u) \leq \lambda_0^{2(\beta-\alpha)} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u, u) < \infty.$$

Logo, $u \in D(A^\beta)$, donde $D(A^\alpha) \subset D(A^\beta)$. Além disso,

$$\begin{aligned} \|u\|_{D(A^\beta)}^2 &= \|A^\beta u\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{2\beta} d(E_\lambda u, u) \\ &\leq \lambda_0^{2(\beta-\alpha)} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{2\alpha} d(E_\lambda u, u) \\ &= \lambda_0^{2(\beta-\alpha)} \|A^\alpha u\|^2 \\ &= \lambda_0^{2(\beta-\alpha)} \|u\|_{D(A^\alpha)}^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|u\|_{D(A^\beta)} \leq \lambda_0^{\beta-\alpha} \|u\|_{D(A^\alpha)}, \quad \forall u \in D(A^\alpha). \quad (2.27)$$

Portanto, $D(A^\alpha) \hookrightarrow D(A^\beta)$, $\alpha \geq \beta$. Quanto a densidade recorde que $\mathcal{H}_\alpha \hookrightarrow \mathcal{H}_\beta$, com imersão densa, se $\alpha \geq \beta$. Além disso, pelo Teorema 2.1 $D(A^\alpha)$ e \mathcal{H}_α são isometricamente isomorfos, o mesmo valendo para $D(A^\beta)$ e \mathcal{H}_β . Assim, a densidade de \mathcal{H}_α em \mathcal{H}_β acarreta a densidade $D(A^\alpha)$ em $D(A^\beta)$. Portanto

$D(A^\alpha) \hookrightarrow D(A^\beta)$ com imersão densa. Ainda pelo Teorema 2.1 temos que $D(A^\alpha)$ e $D(A^\beta)$ são espaços de Hilbert, pois \mathcal{H}_α e \mathcal{H}_β o são. Logo, por (1.4), temos $D(A^\beta)' \hookrightarrow D(A^\alpha)'$. Provemos agora que $D(A^\beta) \hookrightarrow H$, donde seguirá, identificando H com H' , que $H \hookrightarrow D(A^\beta)'$. Já temos a inclusão e a densidade de $D(A^\beta)$ em H , pois A^β é auto-adjunto, cf. Apêndice. Considerando (1.3) e a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos para cada $u \in D(A^\beta)$ que

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &\leq \frac{1}{c^\beta} (A^\beta u, u) \leq \frac{1}{c^\beta} \|A^\beta u\| \|u\| = \frac{1}{c^\beta} \|u\|_{D(A^\beta)} \|u\| \\ &\implies \|u\| \leq \frac{1}{c^\beta} \|u\|_{D(A^\beta)}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\|u\| \leq \frac{1}{c^\beta} \|u\|_{D(A^\beta)}, \quad \forall u \in D(A^\beta).$$

Logo para $\alpha \geq \beta \geq 0$ é válida a cadeia de imersões (2.26), onde cada imersão é densa. Além disso, sendo \mathcal{U} um isomorfismo (isométrico) de $D(A^\beta)$ sobre \mathcal{H}_β , $\beta \geq 0$, temos $\mathcal{H}_\beta \hookrightarrow \mathcal{H}_0$ com imersão densa. Assim, em vista das Proposições 2.2 e 2.5, temos

$$\begin{array}{ccccccccc} D(A^\alpha) & \hookrightarrow & D(A^\beta) & \hookrightarrow & H & \hookrightarrow & D(A^\beta)' & \hookrightarrow & D(A^\alpha)' \\ \uparrow u & & \uparrow u & & \uparrow u & & \uparrow u & & \uparrow u \\ \mathcal{H}_\alpha & \hookrightarrow & \mathcal{H}_\beta & \hookrightarrow & \mathcal{H}_0 & \hookrightarrow & \mathcal{H}_{-\beta} & \hookrightarrow & \mathcal{H}_{-\alpha}. \end{array}$$

Observação 2.11. Note que a cadeia de imersões contínuas e densas (2.26) foi obtida supondo que o espaço de Hilbert $D(A^\alpha)$ estava munido da norma definida em (2.13). No entanto, por (2.17) temos que tal cadeia ainda é válida se $D(A^\alpha)$ estiver equipado com a norma do gráfico.

A dualidade entre $\mathcal{H}_{-\alpha}$ e \mathcal{H}_α será denotada simplesmente por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-\alpha, \alpha}$. Em [30] prova-se que se $v \in \mathcal{H}_\beta$ então $\lambda^{\alpha+\beta} v \in \mathcal{H}_{-\alpha}$ e vale a fórmula

$$\langle \lambda^{\alpha+\beta} v, u \rangle_{-\alpha, \alpha} = (\lambda^\beta v, \lambda^\alpha u)_0, \quad \forall u \in \mathcal{H}_\alpha.$$

Daí segue o seguinte resultado:

Proposição 2.11. Se $w \in L^2(0, T; \mathcal{H}_{3/4})$ e $w' \in L^2(0, T; \mathcal{H}_{1/4})$ então a aplicação $t \mapsto \|w(t)\|_{1/2}^2$ é absolutamente contínua em $[0, T]$ e

$$\frac{d}{dt} \|w(t)\|_{1/2}^2 = 2\langle \lambda w(t), w'(t) \rangle_{-1/4, 1/4} = 2(\lambda^{3/4} w(t), \lambda^{1/4} w'(t))_0.$$

Demonstração. Ver [30]. □

Capítulo 3

Existência e Unicidade de Solução

Fraca

Neste capítulo estudamos a existência e unicidade de solução fraca local (em t) do seguinte problema:

$$(P.1) \quad \begin{cases} u'' + Au + M(\cdot, \|A^{1/2}u\|^2)Au + \theta = f, \\ \theta' + A\theta + u' = g, \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \\ \theta(0) = \theta_0, \end{cases}$$

onde A é um operador auto-adjunto não-limitado de um espaço de Hilbert separável H tal que

$$(Au, u) \geq 0, \quad \forall u \in D(A), \quad (3.1)$$

M é uma função real definida em $[0, T] \times [0, +\infty)$, com $T > 0$ fixo, de modo que

$$M \in C^1([0, T] \times [0, +\infty)), \quad (3.2)$$

$$M(t, \lambda) \geq 0, \quad \forall (t, \lambda) \in [0, T] \times [0, +\infty), \quad (3.3)$$

$$\left| \frac{\partial M}{\partial t} \right| \leq K(1 + M), \quad \lambda \in [0, +\infty), \quad (3.4)$$

onde K é uma constante positiva. Representa-se por $A^{1/2}$ a raiz quadrada do operador A , cf. Seção 1.3, e $\|A^{1/2}u\|$ está denotando a norma em H de $A^{1/2}u$.

Enunciamos a seguir o principal resultado desta dissertação.

Teorema 3.1. *Nas condições acima e supondo*

$$\{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \boldsymbol{\theta}_0\} \in \mathbf{D}(\mathbf{A}^{3/4}) \times \mathbf{D}(\mathbf{A}^{1/4}) \times \mathbf{D}(\mathbf{A}^{1/2}), \quad (3.5)$$

$$\{f, g\} \in [L^2(0, T; \mathbf{D}(\mathbf{A}^{1/4}))]^2, \quad (3.6)$$

existem $0 < T_0 \leq T$ e funções vetoriais $\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta} : [0, T_0] \rightarrow \mathbf{H}$ satisfazendo:

$$\mathbf{u} \in L^\infty(0, T_0; \mathbf{D}(\mathbf{A}^{3/4})), \quad (3.7)$$

$$\mathbf{u}' \in L^\infty(0, T_0; \mathbf{D}(\mathbf{A}^{1/4})), \quad (3.8)$$

$$\boldsymbol{\theta} \in L^2(0, T_0; \mathbf{D}(\mathbf{A}^{1/2})), \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{u}'(t), \mathbf{z}) + (\mathbf{A}^{3/4}\mathbf{u}(t), \mathbf{A}^{1/4}\mathbf{z}) + \mathbf{M}(t, \|\mathbf{A}^{1/2}\mathbf{u}(t)\|^2)(\mathbf{A}^{3/4}\mathbf{u}(t), \mathbf{A}^{1/4}\mathbf{z}) \\ + (\boldsymbol{\theta}(t), \mathbf{z}) = (f(t), \mathbf{z}), \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbf{D}(\mathbf{A}^{1/4}), \end{aligned} \quad (3.10)$$

no sentido de $L^2(0, T_0)$,

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\theta}(t), \mathbf{z}) + (\mathbf{A}^{1/2}\boldsymbol{\theta}(t), \mathbf{A}^{1/2}\mathbf{z}) + (\mathbf{u}'(t), \mathbf{z}) = (g(t), \mathbf{z}), \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbf{D}(\mathbf{A}^{1/2}), \quad (3.11)$$

no sentido de $L^2(0, T_0)$,

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{u}'(0) = \mathbf{u}_1 \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\theta}(0) = \boldsymbol{\theta}_0. \quad (3.12)$$

O par de funções vetoriais $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}\}$ do teorema acima é denominado solução fraca do problema (P.1).

Para demonstrar o teorema acima seguiremos o seguinte roteiro. Mantendo-se as hipóteses (3.1)-(3.4), consideramos para cada $\epsilon > 0$ o problema perturbado:

$$(P.2) \quad \begin{cases} \mathbf{u}_\epsilon'' + \mathbf{A}_\epsilon \mathbf{u}_\epsilon + \mathbf{M}(\cdot, \|\mathbf{A}_\epsilon^{1/2} \mathbf{u}_\epsilon\|^2) \mathbf{A}_\epsilon \mathbf{u}_\epsilon + \boldsymbol{\theta}_\epsilon = f, \\ \boldsymbol{\theta}_\epsilon' + \mathbf{A}_\epsilon \boldsymbol{\theta}_\epsilon + \mathbf{u}_\epsilon' = g, \\ \mathbf{u}_\epsilon(0) = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{u}_\epsilon'(0) = \mathbf{u}_1, \\ \boldsymbol{\theta}_\epsilon(0) = \boldsymbol{\theta}_0, \end{cases}$$

onde $\mathbf{A}_\epsilon = \mathbf{A} + \epsilon \mathbf{I}$, com \mathbf{I} sendo o operador identidade de \mathbf{H} . Observamos na Seção 1.3 que \mathbf{A}_ϵ está nas condições do Teorema de Diagonalização, cf. Capítulo 2. Assim, para cada $\epsilon > 0$, existe uma medida positiva μ_ϵ com

$\text{supp}(\mu_\epsilon) \subset (\lambda_\epsilon, +\infty)$, $0 < \lambda_\epsilon < \epsilon$, uma Integral Hilbertiana $\mathcal{H}_{0,\epsilon} = \int^\oplus \mathcal{H}(\lambda) d\mu_\epsilon(\lambda)$ e um operador unitário $\mathcal{U}_\epsilon : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{H}_{0,\epsilon}$ tal que:

$$\mathcal{U}_\epsilon(A_\epsilon^\alpha w) = \lambda^\alpha \mathcal{U}_\epsilon(w), \quad \forall w \in D(A_\epsilon^\alpha) = D(A^\alpha), \alpha \geq 0, \quad (3.13)$$

$$\mathcal{U}_\epsilon \text{ é um isomorfismo de } D(A_\epsilon^\alpha) \text{ sobre } \mathcal{H}_{\alpha,\epsilon}, \quad (3.14)$$

onde $D(A_\epsilon^\alpha)$ e $D(A^\alpha)$ estão equipados com a norma do gráfico.

Observação 3.1. Por simplicidade o espaço $\mathcal{H}_{\alpha,\epsilon}$, $\alpha \geq 0$, será denotado por \mathcal{H}_α e sua norma por $\|\cdot\|_\alpha$ em vez de $\|\cdot\|_{\alpha,\epsilon}$. No entanto, lembramos que $\|\cdot\|_\alpha$ depende de ϵ .

Garantida a existência do operador \mathcal{U}_ϵ , temos formalmente em vista de (3.13) e do fato de \mathcal{U}_ϵ ser limitado, que

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon'' + A_\epsilon \mathbf{u}_\epsilon + M(\cdot, \|A_\epsilon^{1/2} \mathbf{u}_\epsilon\|^2) A_\epsilon \mathbf{u}_\epsilon + \theta_\epsilon) &= \mathcal{U}_\epsilon(f) \\ \iff \mathbf{v}_\epsilon'' + \lambda \mathbf{v}_\epsilon + M(\cdot, \|\mathbf{v}_\epsilon(\cdot)\|_{1/2}^2) \lambda \mathbf{v}_\epsilon + \phi_\epsilon &= \mathcal{U}_\epsilon(f) \end{aligned}$$

e

$$\mathcal{U}_\epsilon(\theta'_\epsilon + A_\epsilon \theta_\epsilon + \mathbf{u}'_\epsilon) = \mathcal{U}_\epsilon(g) \iff \phi'_\epsilon + \lambda \phi_\epsilon + \mathbf{v}'_\epsilon = \mathcal{U}_\epsilon(g),$$

sendo $\mathbf{v}_\epsilon = \mathcal{U}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon)$ e $\phi_\epsilon = \mathcal{U}_\epsilon(\theta_\epsilon)$. Assim pondo $\mathbf{v}_{0\epsilon} = \mathcal{U}_\epsilon(\mathbf{u}_0)$, $\mathbf{v}_{1\epsilon} = \mathcal{U}_\epsilon(\mathbf{u}_1)$, $\phi_{0\epsilon} = \mathcal{U}_\epsilon(\theta_0)$, $f_\epsilon = \mathcal{U}_\epsilon(f)$ e $g_\epsilon = \mathcal{U}_\epsilon(g)$, obtemos de (P.2) o seguinte problema

$$(P.3) \quad \begin{cases} \mathbf{v}_\epsilon'' + \lambda \mathbf{v}_\epsilon + M(\cdot, \|\mathbf{v}_\epsilon(\cdot)\|_{1/2}^2) \lambda \mathbf{v}_\epsilon + \phi_\epsilon = f_\epsilon, \\ \phi'_\epsilon + \lambda \phi_\epsilon + \mathbf{v}'_\epsilon = g_\epsilon, \\ \mathbf{v}_\epsilon(0) = \mathbf{v}_{0\epsilon}, \quad \mathbf{v}'_\epsilon(0) = \mathbf{v}_{1\epsilon}, \\ \phi_\epsilon(0) = \phi_{0\epsilon}, \end{cases}$$

Observação 3.2. A necessidade de perturbar o problema (P.1) provém da hipótese de A ser positivo, pois com esta condição pode ocorrer do mesmo degenerar, isto é, A ser nulo, donde não poderíamos aplicar o Teorema de Diagonalização.

O problema (P.3) será estudado no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_{0,k}$ dos campos truncados. Mostraremos via Teorema do Ponto Fixo de Banach que para cada $k \in \mathbb{N}$ o problema truncado associado a (P.3) possui solução, $\{\mathbf{v}_{\epsilon k}, \phi_{\epsilon k}\}$, e mediante estimativas válidas para todo $t \in [0, T_0]$, independentes de k e ϵ , tomamos o limite com $k \rightarrow +\infty$ obtendo o seguinte teorema:

Teorema 3.2. *Nas mesmas condições do Teorema 3.1 existem $0 < T_0 \leq T$ e funções vetoriais $v_\epsilon, \phi_\epsilon : [0, T_0] \rightarrow \mathcal{H}_0$ tais que para cada $t \in [0, T_0]$*

$$v_\epsilon \in L^\infty(0, T_0; \mathcal{H}_{3/4}), \quad (3.15)$$

$$v'_\epsilon \in L^\infty(0, T_0; \mathcal{H}_{1/4}), \quad (3.16)$$

$$\phi_\epsilon \in L^2(0, T_0; \mathcal{H}_{1/2}), \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(v'_\epsilon(t), \xi)_0 + (\lambda^{3/4}v_\epsilon(t), \lambda^{1/4}\xi)_0 + M(t, \|v_\epsilon(t)\|_{1/2}^2)(\lambda^{3/4}v_\epsilon(t), \lambda^{1/4}\xi)_0 \\ + (\phi_\epsilon(t), \xi)_0 = (f_\epsilon(t), \xi)_0, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}_{1/4}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

no sentido de $\mathcal{D}'(0, T_0)$,

$$\frac{d}{dt}(\phi_\epsilon(t), \xi)_0 + (\lambda^{1/2}\phi_\epsilon(t), \lambda^{1/2}\xi)_0 + (v'_\epsilon(t), z)_0 = (g_\epsilon(t), \xi)_0, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}_{1/2}, \quad (3.19)$$

no sentido de $\mathcal{D}'(0, T_0)$,

$$v_\epsilon(0) = v_{0\epsilon}, \quad v'_\epsilon(0) = v_{1\epsilon}, \quad \phi_\epsilon(0) = \phi_{0\epsilon}. \quad (3.20)$$

Resolvido o problema (P.3) temos o seguinte Corolário do Teorema 3.2:

Corolário 4. *As funções vetoriais $u_\epsilon, \theta_\epsilon : [0, T_0] \rightarrow H$ definidas por $u_\epsilon = \mathcal{U}_\epsilon^{-1}(v_\epsilon)$ e $\theta_\epsilon = \mathcal{U}_\epsilon^{-1}(\phi_\epsilon)$ satisfazem:*

$$u_\epsilon \in L^\infty(0, T_0; D(A^{3/4})), \quad (3.21)$$

$$u'_\epsilon \in L^\infty(0, T_0; D(A^{1/4})), \quad (3.22)$$

$$\theta_\epsilon \in L^2(0, T_0; D(A^{1/2})), \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u'_\epsilon(t), z) + (A_\epsilon^{3/4}u_\epsilon(t), A_\epsilon^{1/4}z) + M(t, \|A_\epsilon^{1/2}u_\epsilon(t)\|^2)(A_\epsilon^{3/4}u_\epsilon(t), A_\epsilon^{1/4}z) \\ + (\theta_\epsilon(t), z) = (f(t), z), \quad \forall z \in D(A^{1/4}), \end{aligned} \quad (3.24)$$

no sentido de $L^2(0, T_0)$,

$$\frac{d}{dt}(\theta_\epsilon(t), z) + (A_\epsilon^{1/2}\theta_\epsilon(t), A_\epsilon^{1/2}z) + (u'_\epsilon(t), z) = (g(t), z), \quad \forall z \in D(A^{1/2}), \quad (3.25)$$

no sentido de $L^2(0, T_0)$,

$$u_\epsilon(0) = u_0, \quad u'_\epsilon(0) = u_1, \quad \theta_\epsilon(0) = \theta_0. \quad (3.26)$$

Ou seja, o par $\{\mathbf{u}_\epsilon, \theta_\epsilon\}$ é uma solução fraca (local) do problema (P.2). Finalmente, por passagem ao limite em (P.2), numa topologia apropriada, com $\epsilon \rightarrow 0^+$ provamos o Teorema 3.1. A seguir provaremos o Corolário 4.

Demonstração. Inicialmente fixemos de uma vez por todas a norma do gráfico em $D(A^\alpha)$, $\alpha \geq 0$. Como \mathcal{U}_ϵ é um isomorfismo de $D(A_\epsilon^\alpha)$ sobre \mathcal{H}_α , $\alpha \geq 0$, temos de (3.15) e de (3.17) que $\mathbf{u}_\epsilon(t) \in D(A_\epsilon^{3/4}) = D(A^{3/4})$ e $\theta_\epsilon(t) \in D(A_\epsilon^{1/2}) = D(A^{1/2})$, $\forall t \in [0, T_0]$. Para provar que $\sup_{t \in [0, T_0]} \text{ess} \|\mathbf{u}_\epsilon(t)\|_{D(A^{3/4})} < \infty$ e $\sup_{t \in [0, T_0]} \text{ess} \|\theta_\epsilon(t)\|_{D(A^{1/2})} < \infty$, note que dados $w, \tilde{w} \in D(A^\alpha)$ vale:

$$(\lambda^\alpha \mathcal{U}_\epsilon(w), \lambda^\alpha \mathcal{U}_\epsilon(\tilde{w}))_0 = (\mathcal{U}_\epsilon(A_\epsilon^\alpha w), \mathcal{U}_\epsilon(A_\epsilon^\alpha \tilde{w}))_0 = (A_\epsilon^\alpha w, A_\epsilon^\alpha \tilde{w}),$$

isto é,

$$(\lambda^\alpha \mathcal{U}_\epsilon(w), \lambda^\alpha \mathcal{U}_\epsilon(\tilde{w}))_0 = (A_\epsilon^\alpha w, A_\epsilon^\alpha \tilde{w}), \quad \forall w, \tilde{w} \in D(A^\alpha), \alpha \geq 0. \quad (3.27)$$

Em particular,

$$\|\mathcal{U}_\epsilon(w)\|_\alpha^2 = \|A_\epsilon^\alpha w\|^2, \quad \forall w \in D(A^\alpha). \quad (3.28)$$

Em (3.28) fazendo $\alpha = 0$ e $w = \mathbf{u}_\epsilon(t)$, temos

$$\|\mathbf{u}_\epsilon(t)\|^2 = \|\mathbf{v}_\epsilon(t)\|_0^2. \quad (3.29)$$

Por outro lado, fazendo $\alpha = 3/4$ e $w = \mathbf{u}_\epsilon(t)$ em (3.28) obtemos

$$\|A_\epsilon^{3/4} \mathbf{u}_\epsilon(t)\|^2 = \|\mathbf{v}_\epsilon(t)\|_{3/4}^2. \quad (3.30)$$

Logo de (3.29) e (3.30) temos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_\epsilon(t)\|_{D(A^{3/4})} &= \|\mathbf{u}_\epsilon(t)\|^2 + \|A_\epsilon^{3/4} \mathbf{u}_\epsilon(t)\|^2 \\ &= \|\mathbf{v}_\epsilon(t)\|_0^2 + \|\mathbf{v}_\epsilon(t)\|_{3/4}^2 \\ &\leq K \|\mathbf{v}_\epsilon(t)\|_{3/4}^2, \end{aligned}$$

pois $\mathcal{H}_{3/4} \hookrightarrow \mathcal{H}_0$. Portanto,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_\epsilon(t)\|_{D(A^{3/4})} &\leq K \|\mathbf{v}_\epsilon(t)\|_{3/4} \\ \implies \sup_{0 \leq t \leq T} \text{ess} \|\mathbf{u}_\epsilon(t)\|_{D(A^{3/4})} &\leq K \sup_{0 \leq t \leq T} \text{ess} \|\mathbf{v}_\epsilon(t)\|_{3/4} < \infty. \end{aligned}$$

Segue que $\mathbf{u}_\epsilon \in L^\infty(0, T; D(A^{3/4}))$. Analogamente $\theta_\epsilon \in L^2(0, T_0; D(A^{1/2}))$, logo vale (3.21) e (3.23). Para provar (3.22) notemos que sendo \mathcal{U}_ϵ linear e limitado vale:

$$[\mathcal{U}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon(t))]' = \mathcal{U}_\epsilon(\mathbf{u}'_\epsilon(t)), \quad \forall t \in [0, T_0], \quad (3.31)$$

veja observação logo após esta demonstração. Daí, $v'_\epsilon(t) = \mathcal{U}_\epsilon(u_\epsilon(t))' = \mathcal{U}_\epsilon(u'_\epsilon(t))$, donde $u'_\epsilon(t) = \mathcal{U}_\epsilon^{-1}(v'_\epsilon(t))$, $\forall t \in [0, T_0]$. Logo, por (3.16) temos $u'_\epsilon(t) \in D(A^{1/4})$, $\forall t \in [0, T_0]$. Agora usando (3.28) e procedendo como acima temos (3.22). As relações em (3.26) seguem imediatamente de (3.20), (3.31) e da definição de u_ϵ e θ_ϵ . Provaremos a seguir apenas (3.24) sendo a verificação de (3.25) análoga. Sejam $\Phi \in \mathcal{D}'(0, T_0)$, $z \in D(A^{1/4})$ e $\xi = \mathcal{U}_\epsilon(z) \in \mathcal{H}_{1/4}$. De (3.18) e do fato de \mathcal{U}_ϵ ser unitário de H sobre \mathcal{H}_0 deduzimos

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} (f(t), z) \Phi dt &= \int_0^{T_0} (\mathcal{U}_\epsilon(f(t)), \mathcal{U}_\epsilon(z))_0 \Phi dt \\ &= \int_0^{T_0} (f_\epsilon(t), \xi)_0 \Phi dt \\ &= \int_0^{T_0} \frac{d}{dt} (v'_\epsilon(t), \xi)_0 \Phi dt + \int_0^{T_0} (\lambda^{3/4} v_\epsilon(t), \lambda^{1/4} \xi)_0 \Phi dt \\ &\quad + \int_0^{T_0} M(t, \|v_\epsilon(t)\|_{1/2}^2) (\lambda^{3/4} v_\epsilon(t), \lambda^{1/4} \xi)_0 \Phi dt + \int_0^{T_0} (\phi_\epsilon(t), \xi) \Phi dt. \end{aligned}$$

Analisaremos em separado as integrais no segundo membro da ultima igualdade.

$$1. \int_0^{T_0} \frac{d}{dt} (v'_\epsilon(t), \xi)_0 \Phi dt = \int_0^{T_0} \frac{d}{dt} (\mathcal{U}_\epsilon(u'_\epsilon(t)), \mathcal{U}_\epsilon(z))_0 \Phi dt = \int_0^{T_0} \frac{d}{dt} (u'_\epsilon(t), z) \Phi dt.$$

Portanto

$$\int_0^{T_0} \frac{d}{dt} (v'_\epsilon(t), \xi)_0 \Phi dt = \int_0^{T_0} \frac{d}{dt} (u'_\epsilon(t), z) \Phi dt, \quad \forall \Phi \in \mathcal{D}'(0, T_0).$$

2.

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} (\lambda^{3/4} v_\epsilon(t), \lambda^{1/4} \xi)_0 \Phi dt &= \int_0^{T_0} (\lambda^{1/4} \lambda^{1/2} v_\epsilon(t), \lambda^{1/4} \xi)_0 \Phi dt \\ &= \int_0^{T_0} (\lambda^{1/4} \lambda^{1/2} \mathcal{U}_\epsilon(u_\epsilon(t)), \lambda^{1/4} \mathcal{U}_\epsilon(z))_0 \Phi dt \\ &= \int_0^{T_0} (\lambda^{1/4} \mathcal{U}_\epsilon(A_\epsilon^{1/2} u_\epsilon(t)), \lambda^{1/4} \mathcal{U}_\epsilon(z))_0 \Phi dt \\ &= \int_0^{T_0} (A_\epsilon^{1/4} (A_\epsilon^{1/2} u_\epsilon(t)), A_\epsilon^{1/4} z) \Phi dt \\ &= \int_0^{T_0} (A_\epsilon^{3/4} u_\epsilon(t), A_\epsilon^{1/4} z) \Phi dt. \end{aligned}$$

Observação 3.3. *Da cadeia de imersões em (2.26) segue que $D(A^{3/4}) \hookrightarrow D(A^{1/2})$, donde $D(A^{3/4}) \subset D(A^{1/2})$. Como $u_\epsilon(t) \in D(A^{3/4})$ temos que $A_\epsilon^{1/2} u_\epsilon(t)$ faz sentido. Além disso, $\mathcal{U}_\epsilon(A_\epsilon^{1/2} u_\epsilon(t)) = \lambda^{1/2} \mathcal{U}_\epsilon(u_\epsilon(t)) \in \mathcal{H}_{1/4}$, donde $A_\epsilon^{1/4} u_\epsilon(t) \in D(A^{1/4})$. Assim podemos de fato usar (3.27).*

3. De (3.28) com $w = \mathbf{u}_\epsilon(t) = \mathcal{U}_\epsilon^{-1}(v_\epsilon(t)) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{3/4})$, temos

$$\|v_\epsilon(t)\|_{1/2}^2 = \|\mathcal{A}_\epsilon^{1/2}\mathbf{u}_\epsilon(t)\|^2, \quad \forall t \in [0, T_0]. \quad (3.32)$$

Logo, pelo item 2 temos

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_0} M(t, \|v_\epsilon(t)\|_{1/2}^2)(\lambda^{3/4}v_\epsilon(t), \lambda^{1/4}\xi)_0 \Phi dt \\ &= \int_0^{T_0} M(t, \|\mathcal{A}_\epsilon^{1/2}\mathbf{u}_\epsilon(t)\|^2)(\mathcal{A}_\epsilon^{3/4}\mathbf{u}_\epsilon(t), \mathcal{A}_\epsilon^{1/4}z) \Phi dt, \quad \forall \Phi \in \mathcal{D}'(0, T_0). \end{aligned}$$

4. Sendo \mathcal{U}_ϵ unitário temos

$$\int_0^{T_0} (\phi_\epsilon(t), \xi)_0 \Phi dt = \int_0^{T_0} (\theta_\epsilon(t), z) \Phi dt, \quad \forall \Phi \in \mathcal{D}'(0, T_0).$$

Assim dos itens 1-4 temos

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_0} \left[\frac{d}{dt}(\mathbf{u}'_\epsilon(t), z) + (\mathcal{A}_\epsilon^{3/4}\mathbf{u}_\epsilon(t), \mathcal{A}_\epsilon^{1/4}(z)) \right. \\ & \left. + M(t, \|\mathcal{A}_\epsilon^{1/2}\mathbf{u}_\epsilon(t)\|^2)(\mathcal{A}_\epsilon^{3/4}\mathbf{u}_\epsilon(t), \mathcal{A}_\epsilon^{1/4}z) + (\theta_\epsilon(t), z) \right] \Phi dt = \\ &= \int_0^{T_0} (f(t), z) \Phi dt, \quad \forall \Phi \in \mathcal{D}'(0, T_0). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Como $L^2(0, T_0) \subset \mathcal{D}'(0, T_0)$, temos que (3.33) é válido para todo $\Phi \in L^2(0, T_0)$. Logo vale (3.24). \square

Observação 3.4. *A seguir temos uma demonstração da igualdade (3.31). Com efeito, sendo $\mathcal{U}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon(t)) = v_\epsilon(t) \in L^\infty(0, T_0; \mathcal{H}_{3/4}) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0, T_0; \mathcal{H}_{3/4})$, temos para cada $\varphi \in \mathcal{D}(0, T_0)$ que:*

$$\begin{aligned} [\mathcal{U}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon(t))]'(\varphi) &= - \int_0^{T_0} \mathcal{U}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon(t))(s) \varphi'(s) ds \\ &= - \int_0^{T_0} \mathcal{U}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon(t))(s) \varphi'(s) ds \\ &= \mathcal{U}_\epsilon \left(- \int_0^{T_0} \mathbf{u}_\epsilon(t)(s) \varphi'(s) ds \right) \\ &= \mathcal{U}_\epsilon(\mathbf{u}'_\epsilon(t)(\varphi)) \\ &= \mathcal{U}_\epsilon(\mathbf{u}'_\epsilon(t))(\varphi). \end{aligned}$$

Logo $[\mathcal{U}_\epsilon(\mathbf{u}_\epsilon(t))]'(\varphi) = \mathcal{U}_\epsilon(\mathbf{u}'_\epsilon(t))(\varphi)$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T_0)$. Portanto vale (3.31).

Na seção seguinte demonstraremos a existência de solução para o problema truncado associado a (P.3).

3.1 Problema Truncado

O problema truncado associado ao sistema (P.3) consiste em encontrar campos $v_{\epsilon k}, \phi_{\epsilon k} : [0, \tau] \rightarrow \mathcal{H}_{0,k}, 0 \leq \tau \leq T$, tais que

$$\{v_{\epsilon k}, v'_{\epsilon k}, \phi_{\epsilon k}\} \in (L^\infty(0, \tau; \mathcal{H}_{0,k}))^3, \quad (3.34)$$

$$\{v''_{\epsilon k}, \phi'_{\epsilon k}\} \in (L^2(0, \tau; \mathcal{H}_{0,k}))^2, \quad (3.35)$$

$$v''_{\epsilon k} + \lambda v_{\epsilon k} + M(\cdot, \|v_{\epsilon k}\|_{1/2}^2) \lambda v_{\epsilon k} + \phi_{\epsilon k} = f_{\epsilon k}, \quad (3.36)$$

$$\phi'_{\epsilon k} + \lambda \phi_{\epsilon k} + v'_{\epsilon k} = g_{\epsilon k}, \quad (3.37)$$

$$v_{\epsilon k}(0) = v_{0\epsilon k}, \quad v'_{\epsilon k}(0) = v_{1\epsilon k}, \quad \phi_{\epsilon k}(0) = \phi_{0\epsilon k}, \quad (3.38)$$

onde $v_{0\epsilon k}, v_{1\epsilon k}, \phi_{0\epsilon k}, f_{\epsilon k}$ e $g_{\epsilon k}$ são os campos truncados associados à $v_{0\epsilon}, v_{1\epsilon}, \phi_{0\epsilon}, f_\epsilon$ e g_ϵ , respectivamente, cf. Capítulo 2.

Observação 3.5. Em vista do Teorema 1.13, segue de (3.34) que $v_{\epsilon k} \in C^0([0, \tau]; \mathcal{H}_{0,k})$. Agora como pelo Teorema 1.11 temos $L^\infty(0, \tau; \mathcal{H}_{0,k}) \hookrightarrow L^2(0, \tau; \mathcal{H}_{0,k})$. Assim de (3.34) e (3.35) temos, via Teorema 1.13, que $v'_{\epsilon k}, \phi_{\epsilon k} \in C^0([0, \tau]; \mathcal{H}_{0,k})$. Logo podemos calcular $v_{\epsilon k}(t), v'_{\epsilon k}(t)$ e $\phi_{\epsilon k}(t)$ no ponto $t = 0$ e as relações em (3.38) fazem sentido.

A solução do problema truncado (3.34)-(3.38) será obtida como um ponto fixo de um operador S_k conveniente. Para definir tal operador faz-se necessário mais algumas notações.

Representemos por X_k o espaço $L^\infty(0, \tau; \mathcal{H}_{0,k})$ equipado com a norma

$$|v_{\epsilon k}|_{X_k} = \sup_{0 \leq t \leq \tau} \text{ess} \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2},$$

e por Y_k o espaço $L^\infty(0, \tau; \mathcal{H}_{0,k})$ equipado com a norma

$$|\phi_{\epsilon k}|_{Y_k} = \sup_{0 \leq t \leq \tau} \text{ess} \|\phi_{\epsilon k}(t)\|_0.$$

Consideremos o produto cartesiano $E = X_k \times Y_k$ com a norma

$$|[v_{\epsilon k}, \phi_{\epsilon k}]|_E^2 = |v_{\epsilon k}|_{X_k}^2 + |\phi_{\epsilon k}|_{Y_k}^2.$$

Observação 3.6. Mais adiante determinaremos τ de modo conveniente.

Para cada $w_{\epsilon k} \in X_k$ consideremos os campos de vetores $F_{\epsilon k}$ e $G_{\epsilon k}$ dados por

$$F_{\epsilon k}(t, \lambda) = f_{\epsilon k}(t, \lambda) - M(t, \|w_{\epsilon k}\|_{1/2}^2) \lambda w_{\epsilon k}(t, \lambda),$$

$$G_{\epsilon k}(t, \lambda) = g_{\epsilon k}(t, \lambda).$$

Note que $F_{\epsilon k} \in X_k$ e $G_{\epsilon k} \in Y_k$. De fato, é suficiente provar que o campo truncado $f_{\epsilon k} \in X_k$ e o campo truncado $g_{\epsilon k} \in Y_k$. Para tanto note que $f_{\epsilon k} \in L^2(0, \tau; \mathcal{H}_{0,k}) \subset L^2(0, \tau; \mathcal{H}_{1/2})$. Daí $\int_0^\tau \|f_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 dt < \infty$, donde $\|f_{\epsilon k}(t)\|_{1/2} < \infty$ quase sempre em $[0, \tau]$. Logo $|f_{\epsilon k}|_{X_k} = \sup_{t \in [0, \tau]} \text{ess} \|f_{\epsilon k}(t)\|_{1/2} < \infty$, e portanto $f_{\epsilon k} \in X_k$. Analogamente,

$$g_{\epsilon k} \in L^2(0, \tau; \mathcal{H}_{0,k}) \implies \int_0^\tau \|g_{\epsilon k}(t)\|_0^2 dt < \infty \implies \|g_{\epsilon k}(t)\|_0 < \infty$$

quase sempre em $[0, \tau]$, donde $|g_{\epsilon k}|_{Y_k} = \sup_{t \in [0, \tau]} \text{ess} \|g_{\epsilon k}(t)\|_0 < \infty$, e portanto $g_{\epsilon k} \in Y_k$. Assim de fato temos $F_{\epsilon k} \in X_k$ e $G_{\epsilon k} \in Y_k$.

Por outro lado $L^\infty(0, \tau; \mathcal{H}_{0,k}) \hookrightarrow L^2(0, \tau; \mathcal{H}_{0,k})$ com as norma usuais, temos $Y_k \hookrightarrow L^2(0, \tau; \mathcal{H}_{0,k})$. Quanto à X_k note que dado $w_k \in X_k$ temos pela Proposição 2.3 item (iii), com $\alpha = 1/2$ e $\beta = 0$:

$$\begin{aligned} |w_k|_{2, \mathcal{H}_{0,k}}^2 &= \int_0^\tau \|w_k(t)\|_0^2 dt \\ &\leq \lambda_\epsilon \int_0^\tau \|w_k(t)\|_{1/2}^2 dt \\ &\leq \lambda_\epsilon \tau \left(\sup_{0 \leq t \leq \tau} \text{ess} \|w_k(t)\|_{1/2} \right)^2 \\ &= \lambda_\epsilon \tau |w_k|_{X_k}^2 < \infty, \end{aligned}$$

donde $X_k \hookrightarrow L^2(0, \tau; \mathcal{H}_{0,k})$. Logo $F_{\epsilon k}$ e $G_{\epsilon k} \in L^2(0, \tau; \mathcal{H}_{0,k})$. Definimos o operador $S_k : E \rightarrow E$ por $S_k([w_{\epsilon k}, z_{\epsilon k}]) = [v_{\epsilon k}, \phi_{\epsilon k}]$, sendo $[v_{\epsilon k}, \phi_{\epsilon k}]$ a única solução do sistema

$$(P.4) \quad \begin{cases} v''_{\epsilon k} + \lambda v_{\epsilon k} + \phi_{\epsilon k} = F_{\epsilon k}, & \text{em } L^2(0, \tau; \mathcal{H}_{0,k}) \\ \phi'_{\epsilon k} + \lambda \phi_{\epsilon k} + v'_{\epsilon k} = G_{\epsilon k}, & \text{em } L^2(0, \tau; \mathcal{H}_{0,k}) \\ v_{\epsilon k}(0) = v_{0\epsilon k}, \quad v'_{\epsilon k}(0) = v_{1\epsilon k}, \quad \phi_{\epsilon k}(0) = \phi_{0\epsilon k}, \end{cases}$$

na classe

$$\begin{aligned} \{v_{\epsilon k}, v'_{\epsilon k}, \phi_{\epsilon k}\} &\in [L^\infty(0, \tau; \mathcal{H}_{0,k})]^3 \\ \{v''_{\epsilon k}, \phi'_{\epsilon k}\} &\in [L^2(0, \tau; \mathcal{H}_{0,k})]^2. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Para ver que S_k está bem definido é suficiente provar que de fato (P.4) possui solução e esta é única. A unicidade segue da seguinte forma: Dados $[v_{\epsilon k}, \phi_{\epsilon k}]$ e $[\tilde{v}_{\epsilon k}, \tilde{\phi}_{\epsilon k}]$ soluções de (P.4), temos que $[\hat{v}_{\epsilon k}, \hat{\phi}_{\epsilon k}] = [v_{\epsilon k}, \phi_{\epsilon k}] - [\tilde{v}_{\epsilon k}, \tilde{\phi}_{\epsilon k}]$ é solução do sistema

$$(P.5) \quad \begin{cases} \hat{v}_{\epsilon k}'' + \lambda \hat{v}_{\epsilon k} + \hat{\phi}_{\epsilon k} = 0, & \text{em } L^2(0, \tau; \mathcal{H}_{0,k}) \\ \hat{\phi}_{\epsilon k}' + \lambda \hat{\phi}_{\epsilon k} + \hat{v}_{\epsilon k}' = 0, & \text{em } L^2(0, \tau; \mathcal{H}_{0,k}) \\ \hat{v}_{\epsilon k}(0) = \hat{v}_{\epsilon k}'(0) = \hat{\phi}_{\epsilon k}(0) = 0. \end{cases}$$

Tomando o produto interno em \mathcal{H}_0 de ambos os lados de (P.5)₁ e (P.5)₂ por $2\hat{v}_{\epsilon k}'$ e $2\hat{\phi}_{\epsilon k}$, respectivamente, temos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|\hat{v}_{\epsilon k}'(t)\|_0^2 + 2(\lambda \hat{v}_{\epsilon k}(t), \hat{v}_{\epsilon k}'(t))_0 + 2(\hat{\phi}_{\epsilon k}(t), \hat{v}_{\epsilon k}'(t))_0 = 0 \\ \iff & \frac{d}{dt} \|\hat{v}_{\epsilon k}'(t)\|_0^2 + 2(\lambda^{3/4} \hat{v}_{\epsilon k}(t), \lambda^{1/4} \hat{v}_{\epsilon k}'(t))_0 + 2(\hat{\phi}_{\epsilon k}(t), \hat{v}_{\epsilon k}'(t))_0 = 0 \\ \iff & \frac{d}{dt} \|\hat{v}_{\epsilon k}'(t)\|_0^2 + \frac{d}{dt} \|\hat{v}_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 + 2(\hat{v}_{\epsilon k}'(t), \hat{\phi}_{\epsilon k}(t))_0 = 0. \end{aligned} \quad (3.40)$$

e analogamente

$$\frac{d}{dt} \|\hat{\phi}_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + 2 \|\hat{\phi}_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 + 2(\hat{v}_{\epsilon k}'(t), \hat{\phi}_{\epsilon k}(t))_0 = 0. \quad (3.41)$$

Somando (3.40) e (3.41) obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|\hat{v}_{\epsilon k}'(t)\|_0^2 + \frac{d}{dt} \|\hat{\phi}_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + \frac{d}{dt} \|\hat{v}_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 \\ & + 2 \|\hat{\phi}_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 + 4(\hat{v}_{\epsilon k}'(t), \hat{\phi}_{\epsilon k}(t))_0 = 0. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Integrando (3.42) de 0 à $t \leq \tau$, obtemos

$$\begin{aligned} & \|\hat{v}_{\epsilon k}'(t)\|_0^2 - \|\hat{v}_{\epsilon k}'(0)\|_0^2 + \|\hat{\phi}_{\epsilon k}(t)\|_0^2 - \|\hat{\phi}_{\epsilon k}(0)\|_0^2 + \|\hat{v}_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 - \|\hat{v}_{\epsilon k}(0)\|_{1/2}^2 \\ & + 2 \int_0^t \|\hat{\phi}_{\epsilon k}(s)\|_{1/2}^2 ds + 4 \int_0^t (\hat{v}_{\epsilon k}'(s), \hat{\phi}_{\epsilon k}(s))_0 ds = 0 \\ & \iff \\ & \|\hat{v}_{\epsilon k}'(t)\|_0^2 + \|\hat{\phi}_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + \|\hat{v}_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 = -2 \int_0^t \|\hat{\phi}_{\epsilon k}(s)\|_{1/2}^2 ds - 4 \int_0^t (\hat{v}_{\epsilon k}'(s), \hat{\phi}_{\epsilon k}(s))_0 ds \\ & \leq 2 \int_0^t \|\hat{\phi}_{\epsilon k}(s)\|_{1/2}^2 ds + 2 \int_0^t \left\{ \|\hat{v}_{\epsilon k}'(s)\|_0^2 + \|\hat{\phi}_{\epsilon k}(s)\|_0^2 \right\} ds \\ & \leq 2 \int_0^t \left\{ \|\hat{v}_{\epsilon k}'(s)\|_0^2 + \|\hat{\phi}_{\epsilon k}(s)\|_0^2 + \|\hat{v}_{\epsilon k}(s)\|_{1/2}^2 \right\} ds + 2 \int_0^t \|\hat{\phi}_{\epsilon k}(s)\|_{1/2}^2 ds. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \|\hat{v}'_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + \|\hat{\phi}_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + \|\hat{v}_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 \\ & \leq 2 \int_0^t \|\hat{\phi}_{\epsilon k}(s)\|_{1/2}^2 ds + 2 \int_0^t \left\{ \|\hat{v}'_{\epsilon k}(s)\|_0^2 + \|\hat{\phi}_{\epsilon k}(s)\|_0^2 + \|\hat{v}_{\epsilon k}(s)\|_{1/2}^2 \right\} ds. \end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Gonwall Generalizada, cf. Capítulo 1, segue-se que

$$\begin{aligned} & \|\hat{v}'_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + \|\hat{\phi}_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + \|\hat{v}_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 \\ & \leq C \int_0^t \|\hat{\phi}_{\epsilon k}(s)\|_{1/2}^2 ds = \tilde{C} \int_0^t \|\hat{\phi}_{\epsilon k}(s)\|_0^2 ds \\ & \leq \tilde{C} \int_0^t \left\{ \|\hat{v}'_{\epsilon k}(s)\|_0^2 + \|\hat{\phi}_{\epsilon k}(s)\|_0^2 + \|\hat{v}_{\epsilon k}(s)\|_{1/2}^2 \right\} ds, \end{aligned}$$

donde pela Desigualdade de Gronwall, cf. Capítulo 1, segue que

$$\|\hat{v}'_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + \|\hat{\phi}_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + \|\hat{v}_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 = 0,$$

e, portanto, $[v_{\epsilon k}, \phi_{\epsilon k}] = [\tilde{v}_{\epsilon k}, \tilde{\phi}_{\epsilon k}]$. A existência é obtida via Método de Galerkin seguindo as mesmas idéias do Lema 2.1 pág. 22 de [30]. Portanto S_k está bem definida.

É fácil ver que um ponto fixo de S_k é uma solução do problema truncado (3.34)-(3.38). Para provar que S_k possui um ponto fixo usaremos o Teorema do Ponto Fixo de Banach na bola fechada de centro na origem e raio a em E , isto é, $B_k[0, a] = \{[w_{\epsilon k}, z_{\epsilon k}] \in E; |[w_{\epsilon k}, z_{\epsilon k}]|_E \leq a\}$, onde a será definido a posteriori.

Observação 3.7. *Estamos considerando E com a topologia da norma, logo $B_k[0, a]$ é um conjunto fechado do espaço de Banach E . Portanto $B_k[0, a]$ é completo.*

Provamos a seguir que S_k é uma contração. Com efeito, seja $S_k([w_{\epsilon k}, z_{\epsilon k}]) = [v_{\epsilon k}, \phi_{\epsilon k}]$. Tomando o produto interno em \mathcal{H}_0 de ambos os lados de (P.4)₁ e (P.4)₂ por $2v'_{\epsilon k}$ e $2\phi_{\epsilon k}$, respectivamente, obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|v'_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + \frac{d}{dt} \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 + 2(\phi_{\epsilon k}(t), v'_{\epsilon k}(t))_0 = 2(F_{\epsilon k}(t), v'_{\epsilon k}(t))_0 \\ & \leq 2 |(F_{\epsilon k}(t), v'_{\epsilon k}(t))_0| \leq 2 \|F_{\epsilon k}(t)\|_0 \|v'_{\epsilon k}(t)\|_0 \leq \|F_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + \|v'_{\epsilon k}(t)\|_0^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|v'_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + \frac{d}{dt} \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 + 2(\phi_{\epsilon k}(t), v'_{\epsilon k}(t))_0 \\ & \leq \|F_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + \|v'_{\epsilon k}(t)\|_0^2. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Analogamente obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\Phi_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + 2\|\Phi_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 + 2(\Phi_{\epsilon k}(t), v'_{\epsilon k}(t))_0 \\ \leq \|G_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + \|\Phi_{\epsilon k}(t)\|_0^2. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Somando (3.43) e (3.44) e integrando de 0 à $t \leq \tau$, obtemos

$$\begin{aligned} \|v'_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 + \|\Phi_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + 2\int_0^t \|\Phi_{\epsilon k}(s)\|_{1/2}^2 ds + 4\int_0^t (\Phi_{\epsilon k}(s), v'_{\epsilon k}(s))_0 ds \\ \leq \|v'_{\epsilon k}(0)\|_0^2 + \|v_{\epsilon k}(0)\|_{1/2}^2 + \|\Phi_{\epsilon k}(0)\|_0^2 \\ + \int_0^t \|F_{\epsilon k}(s)\|_0^2 ds + \int_0^t \|G_{\epsilon k}(s)\|_0^2 ds + \int_0^t \left\{ \|v'_{\epsilon k}(s)\|_0^2 + \|\Phi_{\epsilon k}(s)\|_0^2 \right\} ds \\ = \|v_{1\epsilon k}\|_0^2 + \|v_{0\epsilon k}\|_{1/2}^2 + \|\Phi_{0\epsilon k}\|_0^2 \\ + |F_{\epsilon k}|_{2, \mathcal{H}_{0,k}}^2 + |G_{\epsilon k}|_{2, \mathcal{H}_{0,k}}^2 + \int_0^t \left\{ \|v'_{\epsilon k}(s)\|_0^2 + \|\Phi_{\epsilon k}(s)\|_0^2 \right\} ds \\ \implies \|v'_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 + \|\Phi_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + 2\int_0^t \|\Phi_{\epsilon k}(s)\|_{1/2}^2 ds \\ \leq \|v_{1\epsilon k}\|_0^2 + \|v_{0\epsilon k}\|_{1/2}^2 + \|\Phi_{0\epsilon k}\|_0^2 \\ + |F_{\epsilon k}|_{2, \mathcal{H}_{0,k}}^2 + |G_{\epsilon k}|_{2, \mathcal{H}_{0,k}}^2 + 3\tau \left\{ |v'_{\epsilon k}|_{\infty, \mathcal{H}_{0,k}}^2 + |\Phi_{\epsilon k}|_{\infty, \mathcal{H}_{0,k}}^2 \right\}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|v'_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 + \|\Phi_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + 2\int_0^t \|\Phi_{\epsilon k}(s)\|_{1/2}^2 ds \\ \leq \|v_{1\epsilon k}\|_0^2 + \|v_{0\epsilon k}\|_{1/2}^2 + \|\Phi_{0\epsilon k}\|_0^2 \\ + |F_{\epsilon k}|_{2, \mathcal{H}_{0,k}}^2 + |G_{\epsilon k}|_{2, \mathcal{H}_{0,k}}^2 + 3\tau \left\{ |v'_{\epsilon k}|_{\infty, \mathcal{H}_{0,k}}^2 + |\Phi_{\epsilon k}|_{\infty, \mathcal{H}_{0,k}}^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Como $v_{0\epsilon k}$, $v_{1\epsilon k}$ e $\Phi_{0\epsilon k}$ são campos truncados de $v_{0\epsilon}$, $v_{1\epsilon}$ e $\Phi_{0\epsilon}$, respectivamente, então $\|v_{0\epsilon k}\|_{1/2}^2 \leq \|v_{0\epsilon}\|_{1/2}^2$, $\|v_{1\epsilon k}\|_0^2 \leq \|v_{1\epsilon}\|_0^2$ e $\|\Phi_{0\epsilon k}\|_0^2 \leq \|\Phi_{0\epsilon}\|_0^2$, de modo que (3.45) implica em

$$\begin{aligned} \|v'_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 + \|\Phi_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + 2\int_0^t \|\Phi_{\epsilon k}(s)\|_{1/2}^2 ds \\ \leq \|v_{1\epsilon}\|_0^2 + \|v_{0\epsilon}\|_{1/2}^2 + \|\Phi_{0\epsilon}\|_0^2 \\ + |F_{\epsilon k}|_{2, \mathcal{H}_{0,k}}^2 + |G_{\epsilon k}|_{2, \mathcal{H}_{0,k}}^2 + 3\tau \left\{ |v'_{\epsilon k}|_{\infty, \mathcal{H}_{0,k}}^2 + |\Phi_{\epsilon k}|_{\infty, \mathcal{H}_{0,k}}^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Note que sendo \mathcal{U}_ϵ um operador unitário temos

$$\|v_{1\epsilon}\|_0^2 = \|\mathcal{U}_\epsilon(u_1)\|_0^2 = \|u_1\|^2. \quad (3.47)$$

$$\|\Phi_{0\epsilon}\|_0^2 = \|\mathcal{U}_\epsilon(\theta_0)\|_0^2 = \|\theta_0\|^2. \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned}
 \|v_{0\epsilon}\|_{1/2}^2 &= \|u_\epsilon(u_0)\|_{1/2}^2 = \|A_\epsilon^{1/2}u_0\|^2 \\
 &= \int_{-\epsilon}^{+\infty} (\lambda + \epsilon) d(E_\lambda u_0, u_0) \\
 &\leq \|A^{1/2}u_0\|^2 + \|u_0\|^2.
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

Vejamos agora uma estimativa para $|F_{\epsilon k}|_{2, \mathcal{H}_{0,k}}^2$. Observe que

$$\begin{aligned}
 \|F_{\epsilon k}(t, \lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 &\leq \left[\|f_{\epsilon k}(t, \lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)} + \left| M(t, \|w_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) \right| \|\lambda w_{\epsilon k}(t, \lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)} \right]^2 \\
 &\leq 2 \|f_{\epsilon k}(t, \lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 + 2 \left| M(t, \|w_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) \right|^2 \|\lambda w_{\epsilon k}(t, \lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2.
 \end{aligned}$$

Integrando esta última desigualdade de λ_ϵ até $+\infty$ temos

$$\begin{aligned}
 \|F_{\epsilon k}\|_0^2 &= \int_{\lambda_\epsilon}^{+\infty} \|F_{\epsilon k}(t, \lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 d\mu_\epsilon(\lambda) \leq 2 \int_{\lambda_\epsilon}^{+\infty} \|f_{\epsilon k}(t, \lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 d\mu_\epsilon(\lambda) \\
 &\quad + 2 \left| M(t, \|w_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) \right|^2 \int_{\lambda_\epsilon}^{+\infty} \lambda^2 \|w_{\epsilon k}(t, \lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 d\mu_\epsilon(\lambda) \\
 &= 2 \|f_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + 2 \left| M(t, \|w_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) \right|^2 \int_{\lambda_\epsilon}^k \lambda \cdot \lambda \|w_{\epsilon k}(t, \lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 d\mu_\epsilon(\lambda) \\
 &\leq 2 \|f_\epsilon(t)\|_0^2 + 2k \left| M(t, \|w_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) \right|^2 \int_{\lambda_\epsilon}^k \lambda^{2 \cdot (1/2)} \|w_{\epsilon k}(t, \lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 d\mu_\epsilon(\lambda) \\
 &= 2 \|f_\epsilon(t)\|_0^2 + 2k \left| M(t, \|w_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) \right|^2 \|w_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2,
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|F_{\epsilon k}(t)\|_0^2 \leq 2 \|f_\epsilon(t)\|_0^2 + 2k \left| M(t, \|w_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) \right|^2 \|w_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2.$$

Como $\|w_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 \leq |w_{\epsilon k}|_{X_k}^2$ temos

$$\|F_{\epsilon k}(t)\|_0^2 \leq 2 \|f_\epsilon(t)\|_0^2 + 2k \left| M(t, \|w_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) \right|^2 |w_{\epsilon k}|_{X_k}^2. \tag{3.50}$$

Denotando por $C_0 = \max\{|M(t, \eta)|^2; (t, \eta) \in [0, \tau] \times [0, a^2]\}$, temos em (3.50)

$$\|F_{\epsilon k}(t)\|_0^2 \leq 2 \|f_\epsilon(t)\|_0^2 + 2kC_0 |w_{\epsilon k}|_{X_k}^2,$$

donde integrando-se de 0 até τ obtemos

$$|F_{\epsilon k}|_{2, \mathcal{H}_{0,k}}^2 \leq 2|f_\epsilon|_{2, \mathcal{H}_{0,k}}^2 + 2k\tau C_0 |w_{\epsilon k}|_{X_k}^2. \tag{3.51}$$

Assim assumindo que $[w_{\epsilon k}, z_{\epsilon k}] \in B_k[0, a]$ obtemos

$$|F_{\epsilon k}|_{2, \mathcal{H}_{0,k}}^2 \leq 2|f_{\epsilon}|_{2, \mathcal{H}_{0,k}}^2 + 2k\tau C_0 a^2. \quad (3.52)$$

De modo análogo obtemos

$$|G_{\epsilon k}|_{2, \mathcal{H}_{0,k}}^2 \leq |g_{\epsilon}|_{2, \mathcal{H}_{0,k}}^2. \quad (3.53)$$

Como $|f_{\epsilon}|_{2, \mathcal{H}_{0,k}}^2 = \int_0^t \|f_{\epsilon}(s)\|_{\mathcal{H}_{0,k}}^2 ds = \int_0^t \|U_{\epsilon}(f(s))\|_{\mathcal{H}_{0,k}}^2 ds = \int_0^t \|f(s)\|_{\mathcal{H}_{0,k}}^2 ds = |f|_{2, H}^2$, isto é,

$$|f_{\epsilon}|_{2, \mathcal{H}_{0,k}}^2 = |f|_{2, H}^2, \quad (3.54)$$

e analogamente

$$|g_{\epsilon}|_{2, \mathcal{H}_{0,k}}^2 = |g|_{2, H}^2, \quad (3.55)$$

as desigualdades (3.52) e (3.53) podem ser reescritas como segue:

$$|F_{\epsilon k}|_{2, \mathcal{H}_{0,k}}^2 \leq 2|f|_{2, H}^2 + 2k\tau C_0 a^2, \quad (3.56)$$

$$|G_{\epsilon k}|_{2, \mathcal{H}_{0,k}}^2 \leq |g|_{2, H}^2. \quad (3.57)$$

Substituindo (3.47)-(3.49), (3.56) e (3.57) em (3.46), resulta

$$\begin{aligned} & \|v'_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 + \|\phi_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + 2 \int_0^t \|\phi_{\epsilon k}(s)\|_{1/2}^2 ds \\ & \leq E_0 + 2C_0 k a^2 \tau + 3\tau \{ |v'_{\epsilon k}|_{\infty, \mathcal{H}_{0,k}}^2 + |\phi_{\epsilon k}|_{\infty, \mathcal{H}_{0,k}}^2 \}, \end{aligned} \quad (3.58)$$

onde

$$E_0 = \|u_1\|^2 + \|\theta_0\|^2 + \|A^{1/2}u_0\|^2 + \|u_0\|^2 + 2|f|_{2, H}^2 + |g|_{2, H}^2. \quad (3.59)$$

Em particular temos

$$\|v'_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + \|\phi_{\epsilon k}(t)\|_0^2 \leq E_0 + 2C_0 k a^2 \tau + 3\tau \{ |v'_{\epsilon k}|_{\infty, \mathcal{H}_{0,k}}^2 + |\phi_{\epsilon k}|_{\infty, \mathcal{H}_{0,k}}^2 \} \quad (3.60)$$

e

$$\|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 + \|\phi_{\epsilon k}(t)\|_0^2 \leq E_0 + 2C_0 k a^2 \tau + 3\tau \{ |v'_{\epsilon k}|_{\infty, \mathcal{H}_{0,k}}^2 + |\phi_{\epsilon k}|_{\infty, \mathcal{H}_{0,k}}^2 \} \quad (3.61)$$

De (3.60) temos

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in [0, \tau]} \text{ess} \|v'_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + \sup_{t \in [0, \tau]} \text{ess} \|\phi_{\epsilon k}(t)\|_0^2 \\ & \leq E_0 + 2C_0 k a^2 \tau + 3\tau \{ |v'_{\epsilon k}|_{\infty, \mathcal{H}_{0,k}}^2 + |\phi_{\epsilon k}|_{\infty, \mathcal{H}_{0,k}}^2 \}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|v'_{\epsilon k}|^2_{\infty, \mathcal{H}_{0,k}} + |\phi_{\epsilon k}|^2_{\infty, \mathcal{H}_{0,k}} \leq E_0 + 2C_0 k a^2 \tau + 3\tau \{|v'_{\epsilon k}|^2_{\infty, \mathcal{H}_{0,k}} + |\phi_{\epsilon k}|^2_{\infty, \mathcal{H}_{0,k}}\}.$$

Daí escolhendo $\tau \geq 0$ tal que $3\tau \leq 1/2$ temos

$$\begin{aligned} |v'_{\epsilon k}|^2_{\infty, \mathcal{H}_{0,k}} + |\phi_{\epsilon k}|^2_{\infty, \mathcal{H}_{0,k}} &\leq E_0 + 2C_0 k a^2 \tau + \frac{1}{2} \{|v'_{\epsilon k}|^2_{\infty, \mathcal{H}_{0,k}} + |\phi_{\epsilon k}|^2_{\infty, \mathcal{H}_{0,k}}\} \implies \\ |v'_{\epsilon k}|^2_{\infty, \mathcal{H}_{0,k}} + |\phi_{\epsilon k}|^2_{\infty, \mathcal{H}_{0,k}} &\leq 2E_0 + 4C_0 k a^2 \tau. \end{aligned}$$

Portanto, para a escolha acima de τ obtemos

$$3\tau \{|v'_{\epsilon k}|^2_{\infty, \mathcal{H}_{0,k}} + |\phi_{\epsilon k}|^2_{\infty, \mathcal{H}_{0,k}}\} \leq \frac{1}{2} (2E_0 + 4C_0 k a^2 \tau) = E_0 + 2C_0 k a^2 \tau,$$

ou seja,

$$3\tau \{|v'_{\epsilon k}|^2_{\infty, \mathcal{H}_{0,k}} + |\phi_{\epsilon k}|^2_{\infty, \mathcal{H}_{0,k}}\} \leq E_0 + 2C_0 k a^2 \tau. \quad (3.62)$$

Substituindo (3.62) em (3.61) obtemos

$$\begin{aligned} \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 + \|\phi_{\epsilon k}(t)\|_0^2 &\leq 2E_0 + 4C_0 k a^2 \tau \\ \implies \sup_{t \in [0, \tau]} \text{ess} \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 + \sup_{t \in [0, \tau]} \text{ess} \|\phi_{\epsilon k}(t)\|_0^2 &\leq 2E_0 + 4C_0 k a^2 \tau, \end{aligned} \quad (3.63)$$

isto é,

$$|v_{\epsilon k}|^2_{\infty, \mathcal{H}_{1/2}} + |\phi_{\epsilon k}|^2_{\mathcal{H}_{0,k}} \leq 2E_0 + 4C_0 k a^2 \tau.$$

Logo

$$|S_k([w_{\epsilon k}, z_{\epsilon k}])|_E \leq 2E_0 + 4C_0 k a^2 \tau. \quad (3.64)$$

Por outro lado, dados $[w_{\epsilon k}, v_{\epsilon k}]$, $[\hat{w}_{\epsilon k}, \hat{v}_{\epsilon k}] \in B_k[0, a]$, então

$[z_{\epsilon k}, \hat{z}_{\epsilon k}] = S_k([w_{\epsilon k}, v_{\epsilon k}]) - S_k([\hat{w}_{\epsilon k}, \hat{v}_{\epsilon k}])$ satisfaz o sistema:

$$(P.6) \quad \begin{cases} z''_{\epsilon k} + \lambda z_{\epsilon k} + \hat{z}_{\epsilon k} = \Phi_{\epsilon k}, \\ z'_{\epsilon k} + \lambda \hat{z}_{\epsilon k} + z'_{\epsilon k} = 0, \\ z_{\epsilon k}(0) = z'_{\epsilon k}(0) = \hat{z}_{\epsilon k}(0) = 0, \end{cases}$$

onde

$$\Phi_{\epsilon k}(t, \lambda) = M(t, \|\hat{w}_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) \lambda \hat{w}_{\epsilon k}(t, \lambda) - M(t, \|w_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) \lambda w_{\epsilon k}(t, \lambda).$$

Procedendo como anteriormente, tomamos o produto interno em \mathcal{H}_0 de (P.6)₁ e (P.6)₂ por $2z'_{\epsilon k}(t)$ e $2\hat{z}_{\epsilon k}(t)$, respectivamente, e somando as equações obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \|z'_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + \|z_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 + \|\hat{z}_{\epsilon k}(t)\|_0^2 \right\} + 2 \| \hat{z}_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2 \\ = 2(\Phi_{\epsilon k}(t), z'_{\epsilon k})_0 - 4(\hat{z}_{\epsilon k}(t), z'_{\epsilon k}(t))_0. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Note que

$$\begin{aligned}
 2(\Phi_{\epsilon k}(t), z'_{\epsilon k})_0 - 4(\hat{z}_{\epsilon k}(t), z'_{\epsilon k}(t))_0 &\leq 2 |(\Phi_{\epsilon k}(t), z'_{\epsilon k})_0| + 4 |(\hat{z}_{\epsilon k}(t), z'_{\epsilon k}(t))_0| \\
 &\leq 2 \|\Phi_{\epsilon k}(t)\|_0 \|z'_{\epsilon k}\|_0 + 4 \|\hat{z}_{\epsilon k}(t)\|_0 \|z'_{\epsilon k}(t)\|_0 \\
 &\leq \|\Phi_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + \|z'_{\epsilon k} V\|_0^2 + 2 \|\hat{z}_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + 2 \|z'_{\epsilon k}(t)\|_0^2 \\
 &= \|\Phi_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + 2 \|\hat{z}_{\epsilon k}\|_0^2 + 3 \|z'_{\epsilon k}(t)\|_0^2,
 \end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left\{ \|z'_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + \|z_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 + \|\hat{z}_{\epsilon k}(t)\|_0^2 \right\} + 2 \|\hat{z}_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 \\
 \leq \|\Phi_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + 2 \|\hat{z}_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + 3 \|z'_{\epsilon k}(t)\|_0^2.
 \end{aligned} \tag{3.66}$$

Integrando (3.66) de 0 até $t \leq \tau$ e usando (P.6)₃, obtemos

$$\begin{aligned}
 &\|z'_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + \|z_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 + \|\hat{z}_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + 2 \int_0^t \|\hat{z}_{\epsilon k}(s)\|_{1/2}^2 ds \\
 &\leq \int_0^t \|\Phi_{\epsilon k}(s)\|_0^2 ds + 2 \int_0^t \|\hat{z}_{\epsilon k}(s)\|_0^2 ds + 3 \int_0^t \|z'_{\epsilon k}(s)\|_0^2 ds \\
 &= |\Phi_{\epsilon k}|_{2, \mathcal{H}_{0,k}}^2 + 3 \int_0^t \|z'_{\epsilon k}(s)\|_0^2 ds + 2 \int_0^t \|\hat{z}_{\epsilon k}(s)\|_0^2 ds \\
 &\leq |\Phi_{\epsilon k}|_{2, \mathcal{H}_{0,k}}^2 + 3 \int_0^t \left\{ \|z'_{\epsilon k}(s)\|_0^2 + \|\hat{z}_{\epsilon k}(s)\|_0^2 \right\} ds \\
 &\leq |\Phi_{\epsilon k}|_{2, \mathcal{H}_{0,k}}^2 + 3\tau \left\{ |z'_{\epsilon k}|_{\infty, \mathcal{H}_{0,k}}^2 + |\hat{z}_{\epsilon k}|_{\infty, \mathcal{H}_{0,k}}^2 \right\} ds.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 &\|z'_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + \|z_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 + \|\hat{z}_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + 2 \int_0^t \|\hat{z}_{\epsilon k}(s)\|_{1/2}^2 ds \\
 &\leq |\Phi_{\epsilon k}|_{2, \mathcal{H}_{0,k}}^2 + 3\tau \left\{ |z'_{\epsilon k}|_{\infty, \mathcal{H}_{0,k}}^2 + |\hat{z}_{\epsilon k}|_{\infty, \mathcal{H}_{0,k}}^2 \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.67}$$

Como estamos supondo $3\tau \leq \frac{1}{2}$ temos

$$3\tau \left\{ |z'_{\epsilon k}|_{\infty, \mathcal{H}_{0,k}}^2 + |\hat{z}_{\epsilon k}|_{\infty, \mathcal{H}_{0,k}}^2 \right\} \leq |\Phi_{\epsilon k}|_{2, \mathcal{H}_{0,k}}^2,$$

segue-se

$$\|z'_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + \|z_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 + \|\hat{z}_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + 2 \int_0^t \|\hat{z}_{\epsilon k}(s)\|_{1/2}^2 ds \leq 2|\Phi_{\epsilon k}|_{2, \mathcal{H}_{0,k}}^2.$$

Em particular

$$\|z_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 + \|\hat{z}_{\epsilon k}(t)\|_0^2 \leq 2|\Phi_{\epsilon k}|_{2, \mathcal{H}_{0,k}}^2, \tag{3.68}$$

ou ainda

$$|[z_{\epsilon k}, \hat{z}_{\epsilon k}]|_{\mathbb{E}}^2 \leq 2|\Phi_{\epsilon k}|_{2, \mathcal{H}_{0,k}}^2.$$

Portanto,

$$|S_k([w_{\epsilon k}, v_{\epsilon k}]) - S_k([\hat{w}_{\epsilon k}, \hat{v}_{\epsilon k}])|_{\mathbb{E}}^2 \leq 2|\Phi_{\epsilon k}|_{2, \mathcal{H}_{0,k}}^2. \quad (3.69)$$

Da definição de $\Phi_{\epsilon k}$ temos

$$\begin{aligned} \Phi_{\epsilon k}(t, \lambda) &= M(t, \|\hat{w}_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) \lambda \left\{ \hat{w}_{\epsilon k}(t, \lambda) - w_{\epsilon k}(t, \lambda) \right\} \\ &+ \left\{ M(t, \|\hat{w}_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) - M(t, \|w_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) \right\} \lambda w_{\epsilon k}(t, \lambda), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \|\Phi_{\epsilon k}(t, \lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 &\leq \left[\left| M(t, \|\hat{w}_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) \right| \|\lambda \{\hat{w}_{\epsilon k}(t, \lambda) - w_{\epsilon k}(t, \lambda)\}\|_{\mathcal{H}(\lambda)} \right. \\ &\quad \left. + \left| M(t, \|\hat{w}_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) - M(t, \|w_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) \right| \|\lambda w_{\epsilon k}(t, \lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)} \right]^2 \\ &\leq 2 \left| M(t, \|\hat{w}_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) \right|^2 \|\lambda \{\hat{w}_{\epsilon k}(t, \lambda) - w_{\epsilon k}(t, \lambda)\}\|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2 \\ &\quad + 2 \left| M(t, \|\hat{w}_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) - M(t, \|w_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) \right|^2 \|\lambda w_{\epsilon k}(t, \lambda)\|_{\mathcal{H}(\lambda)}^2. \end{aligned}$$

Integrando a desigualdade acima com relação a $d\mu_{\epsilon}(\lambda)$ de λ_{ϵ} a $+\infty$, obtemos

$$\begin{aligned} \|\Phi_{\epsilon k}(t)\|_0^2 &\leq 2 \left| M(t, \|\hat{w}_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) \right|^2 \|\hat{w}_{\epsilon k}(t) - w_{\epsilon k}(t)\|_1^2 \\ &\quad + 2 \left| M(t, \|\hat{w}_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) - M(t, \|w_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) \right|^2 \|w_{\epsilon k}(t)\|_1^2. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Pela Proposição 2.3 item (iii), com $\alpha = 1$ e $\beta = 1/2$ temos:

$$\begin{aligned} \|\hat{w}_{\epsilon k}(t) - w_{\epsilon k}(t)\|_1^2 &\leq k \|\hat{w}_{\epsilon k}(t) - w_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2, \\ \|\hat{w}_{\epsilon k}(t)\|_1^2 &\leq k \|\hat{w}_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2, \end{aligned} \quad (3.71)$$

donde

$$\begin{aligned} \|\hat{w}_{\epsilon k}(t) - w_{\epsilon k}(t)\|_1^2 &\leq k |\hat{w}_{\epsilon k} - w_{\epsilon k}|_{X_k}^2, \\ \|\hat{w}_{\epsilon k}(t)\|_1^2 &\leq k |\hat{w}_{\epsilon k}|_{X_k}^2 \leq k |[\hat{w}_{\epsilon k}, \hat{v}_{\epsilon k}]|_{\mathbb{E}}^2 \leq k \alpha^2. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Por outro lado, temos pelo Teorema do Valor Médio que

$$\begin{aligned} &\left| M(t, \|\hat{w}_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) - M(t, \|w_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) \right|^2 \\ &\leq \left| \frac{\partial M}{\partial t}(t, \xi) \right|^2 \left| \|\hat{w}_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 - \|w_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 \right|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \frac{\partial M}{\partial t}(t, \xi) \right|^2 \left| \|\hat{w}_{\epsilon k}(t)\|_{1/2} + \|w_{\epsilon k}(t)\|_{1/2} \right|^2 \left| \|\hat{w}_{\epsilon k}(t)\|_{1/2} - \|w_{\epsilon k}(t)\|_{1/2} \right|^2 \\
 &\leq \left| \frac{\partial M}{\partial t}(t, \xi) \right|^2 \left| \|\hat{w}_{\epsilon k}(t)\|_{1/2} + \|w_{\epsilon k}(t)\|_{1/2} \right|^2 \|\hat{w}_{\epsilon k}(t) - w_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2,
 \end{aligned}$$

onde ξ está no segmento de extremos $\|\hat{w}_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2$ e $\|w_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2$.

Pondo $C_1 = \max\{\|\nabla M(t, \eta)\|^2; (t, \eta) \in [0, \tau] \times [0, a^2]\}$ e usando as desigualdades

$$\begin{aligned}
 \|w_{\epsilon k}(t)\|_{1/2} &\leq |[w_{\epsilon k}, v_{\epsilon k}]_E| \leq a \\
 \|\hat{w}_{\epsilon k}(t)\|_{1/2} &\leq |[\hat{w}_{\epsilon k}, \hat{v}_{\epsilon k}]_E| \leq a,
 \end{aligned} \tag{3.73}$$

obtemos

$$\left| M(t, \|\hat{w}_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) - M(t, \|w_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) \right|^2 \leq 4a^2 C_1 |w_{\epsilon k} - \hat{w}_{\epsilon k}|_{X_k}^2. \tag{3.74}$$

Assim, substituindo (3.72) e (3.74) em (3.70) e lembrando que $|M(t, \xi)|^2 \leq C_0$, $\forall (t, \xi) \in [0, \tau] \times [0, a^2]$, temos

$$\begin{aligned}
 \|\Phi_{\epsilon k}(t)\|_0^2 &\leq 2C_0 k |w_{\epsilon k} - \hat{w}_{\epsilon k}|_{X_k}^2 + 8a^4 C_1 k |w_{\epsilon k} - \hat{w}_{\epsilon k}|_{X_k}^2 \\
 &= (2C_0 k + 8a^4 C_1 k) |w_{\epsilon k} - \hat{w}_{\epsilon k}|_{X_k}^2.
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

Integrando (3.75) de 0 até τ , obtemos

$$\begin{aligned}
 |\Phi_{\epsilon k}(t)|_{2, \mathcal{H}_{0,k}}^2 &\leq (2C_0 k + 8a^4 C_1 k) \tau |w_{\epsilon k} - \hat{w}_{\epsilon k}|_{X_k}^2 \\
 &\leq (2C_0 k + 8a^4 C_1 k) \tau |[w_{\epsilon k}, v_{\epsilon k}]_E - [\hat{w}_{\epsilon k}, \hat{v}_{\epsilon k}]_E|^2.
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

Substituindo (3.76) em (3.69) temos

$$|S_k([w_{\epsilon k}, v_{\epsilon k}]) - S_k([\hat{w}_{\epsilon k}, \hat{v}_{\epsilon k}])|_E^2 \leq (4C_0 k + 16a^4 C_1 k) \tau |[w_{\epsilon k}, v_{\epsilon k}]_E - [\hat{w}_{\epsilon k}, \hat{v}_{\epsilon k}]_E|^2, \tag{3.77}$$

$\forall [w_{\epsilon k}, v_{\epsilon k}], [\hat{w}_{\epsilon k}, \hat{v}_{\epsilon k}] \in B_k[0, a]$. Escolhamos $a > 0$ e $\tau > 0$ tais que

$$\begin{aligned}
 a^2 &\geq 4E_0, \quad E_0 \text{ definido em (3.59),} \\
 \tau = \tau_k &= \min \left\{ \frac{1}{6}, \frac{1}{16C_0 k + 64a^4 C_1 k} \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.78}$$

Com estas escolhas temos de (3.64) que

$$\begin{aligned}
 |S_k([w_{\epsilon k}, z_{\epsilon k}])|_E^2 &\leq 2E_0 + 4C_0 k a^2 \tau \leq 2E_0 + \frac{4C_0 k a^2}{16C_0 k + 64a^4 C_1 k} \\
 &\leq \left(\frac{1}{2} + \frac{C_0 k}{4C_0 k + 16a^4 C_1 k} \right) a^2 \\
 &\leq \frac{3a^2}{4} \leq a^2,
 \end{aligned}$$

ou seja, $|S_k([w_{\epsilon k}, z_{\epsilon k}])|_E \leq \alpha$, $\forall [w_{\epsilon k}, z_{\epsilon k}] \in B_k[0, \alpha]$. Logo S_k aplica $B_k[0, \alpha]$ em $B_k[0, \alpha]$. Além disso, de (3.77) resulta que

$$\begin{aligned} |S_k([w_{\epsilon k}, v_{\epsilon k}]) - S_k([\hat{w}_{\epsilon k}, \hat{v}_{\epsilon k}])|_E^2 &\leq (4C_0k + 16a^4C_1k)\tau |[w_{\epsilon k}, v_{\epsilon k}] - [\hat{w}_{\epsilon k}, \hat{v}_{\epsilon k}]|_E^2 \\ &\leq \frac{4}{16} \left[\frac{C_0k + 4a^4C_1k}{C_0k + 4a^4C_1k} \right] |[w_{\epsilon k}, v_{\epsilon k}] - [\hat{w}_{\epsilon k}, \hat{v}_{\epsilon k}]|_E^2 \\ &= \frac{1}{4} |[w_{\epsilon k}, v_{\epsilon k}] - [\hat{w}_{\epsilon k}, \hat{v}_{\epsilon k}]|_E^2, \end{aligned}$$

$\forall [w_{\epsilon k}, v_{\epsilon k}], [\hat{w}_{\epsilon k}, \hat{v}_{\epsilon k}] \in B_k[0, \alpha]$. Logo $S_k : B_k[0, \alpha] \rightarrow B_k[0, k]$ é uma contração (estrita) e pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach deduzimos que o operador S_k tem um (único) ponto fixo $[v_{\epsilon k}, \phi_{\epsilon k}] \in B_k[0, \alpha]$, o qual é uma solução fraca do problema truncado (3.34)-(3.38) em $[0, \tau_k]$.

3.1.1 Estimativas I

Nosso propósito agora é obter estimativas para prolongarmos a solução $[v_{\epsilon k}, \phi_{\epsilon k}]$ do problema truncado obtida na seção precedente ao intervalo $[0, T]$. Tomando o produto interno em \mathcal{H}_0 de (3.36) e (3.37) por $2v'_{\epsilon k}(t)$ e $2\phi_{\epsilon k}(t)$, respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|v'_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + \frac{d}{dt} \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 + M(t, \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) \frac{d}{dt} \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 \\ + 2(\phi_{\epsilon k}(t), v'_{\epsilon k}(t))_0 = 2(f_{\epsilon k}(t), v'_{\epsilon k}(t))_0, \\ \frac{d}{dt} \|\phi_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + 2\|\phi_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 + 2(\phi_{\epsilon k}(t), v'_{\epsilon k}(t))_0 = 2(g_{\epsilon k}(t), \phi_{\epsilon k}(t))_0. \end{aligned}$$

Considerando a função

$$\hat{M}(t, \eta) = \int_0^\eta M(t, \xi) d\xi,$$

observamos que

$$M(t, \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) \frac{d}{dt} \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 = \frac{d}{dt} \hat{M}(t, \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) - \int_0^{\|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2} \frac{\partial}{\partial s} M(s, \xi) d\xi,$$

donde somando as equações obtidas acima, integrando de 0 até $t \leq \tau_k$ e repetindo os argumentos anteriores, temos:

$$\begin{aligned} \|v'_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 + \|\phi_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + \hat{M}(t, \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) \\ + 2 \int_0^t \|\phi_{\epsilon k}(s)\|_{1/2}^2 ds \leq \|v'_{\epsilon k}(0)\|_0^2 + \|v_{\epsilon k}(0)\|_{1/2}^2 + \|\phi_{\epsilon k}(0)\|_0^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\hat{M}(0, \|v_{\epsilon k}(0)\|_{1/2}^2) + \int_0^t \|f_{\epsilon k}(s)\|_0^2 ds + \int_0^t \|g_{\epsilon k}(s)\|_0^2 ds \\
 & +3 \int_0^t \left\{ \|v'_{\epsilon k}(s)\|_0^2 + \|\Phi_{\epsilon k}(s)\|_0^2 \right\} ds + \int_0^t \int_0^{\|v_{\epsilon k}(s)\|_{1/2}^2} \left| \frac{\partial}{\partial t} M(s, \xi) \right| d\xi ds \\
 & = \|v_{1\epsilon k}\|_0^2 + \|v_{0\epsilon k}\|_{1/2}^2 + \|\Phi_{0\epsilon k}\|_0^2 + \hat{M}(0, \|v_{0\epsilon k}\|_{1/2}^2) + \int_0^t \|f_{\epsilon k}(s)\|_0^2 ds \\
 & + \int_0^t \|g_{\epsilon k}(s)\|_0^2 ds + 3 \int_0^t \left\{ \|v'_{\epsilon k}(s)\|_0^2 + \|\Phi_{\epsilon k}(s)\|_0^2 \right\} ds + \int_0^t \int_0^{\|v_{\epsilon k}(s)\|_{1/2}^2} \left| \frac{\partial}{\partial t} M(s, \xi) \right| d\xi ds,
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
 & \|v'_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 + \|\Phi_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + \hat{M}(t, \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) \\
 & + 2 \int_0^t \|\Phi_{\epsilon k}(s)\|_{1/2}^2 ds \leq \|v_{1\epsilon k}\|_0^2 + \|v_{0\epsilon k}\|_{1/2}^2 + \|\Phi_{0\epsilon k}\|_0^2 \\
 & + \hat{M}(0, \|v_{0\epsilon k}\|_{1/2}^2) + \int_0^t \|f_{\epsilon k}(s)\|_0^2 ds + \int_0^t \|g_{\epsilon k}(s)\|_0^2 ds \\
 & + 3 \int_0^t \left\{ \|v'_{\epsilon k}(s)\|_0^2 + \|\Phi_{\epsilon k}(s)\|_0^2 \right\} ds + \int_0^t \int_0^{\|v_{\epsilon k}(s)\|_{1/2}^2} \left| \frac{\partial}{\partial t} M(s, \xi) \right| d\xi ds.
 \end{aligned} \tag{3.79}$$

Usando a hipótese (3.4) obtemos

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \int_0^{\|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2} \left| \frac{\partial}{\partial t} M(s, \xi) \right| d\xi dt & \leq \int_0^t \int_0^{\|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2} K(1 + M(s, \xi)) d\xi ds \\
 & = K \int_0^t \left\{ \|v_{\epsilon k}(s)\|_{1/2}^2 + \hat{M}(s, \|v_{\epsilon k}(s)\|_{1/2}^2) \right\} ds,
 \end{aligned}$$

e usando (3.47)-(3.49), (3.54) temos

$$\begin{aligned}
 & \|v'_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 + \|\Phi_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + \hat{M}(t, \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) + \\
 & 2 \int_0^t \|\Phi_{\epsilon k}(s)\|_{1/2}^2 ds \leq E_1 + 3 \int_0^t \left\{ \|v'_{\epsilon k}(s)\|_0^2 + \|\Phi_{\epsilon k}(s)\|_0^2 \right\} ds + \\
 & K \int_0^t \left\{ \|v_{\epsilon k}(s)\|_{1/2}^2 + \hat{M}(s, \|v_{\epsilon k}(s)\|_{1/2}^2) \right\} ds,
 \end{aligned} \tag{3.80}$$

onde

$$\begin{aligned}
 E_1 = & \|u_1\|_0^2 + \|\theta_0\|_{1/2}^2 + \|A^{1/2}u_0\|^2 + \|u_0\|^2 \\
 & + \hat{M}(0, \|A^{1/2}u_0\|^2 + \|u_0\|^2) + |f|_{2,H}^2 + |g|_{2,H}^2.
 \end{aligned} \tag{3.81}$$

De (3.80) e da Desigualdade de Gronwall obtemos

$$\begin{aligned}
 & \|v'_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 + \|\Phi_{\epsilon k}(t)\|_0^2 \\
 & + \hat{M}(t, \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) + 2 \int_0^t \|\Phi_{\epsilon k}(s)\|_{1/2}^2 ds \leq C_2,
 \end{aligned} \tag{3.82}$$

$\forall t \in [0, \tau_k]$, onde $C_2 > 0$ é independente de k e de ϵ . Em particular, temos

$$\begin{aligned}
 & \|v'_{\epsilon k}(t)\|_0^2 \leq C_2; \quad \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 \leq C_2, \\
 & \|\Phi_{\epsilon k}(t)\|_0^2 \leq C_2; \quad \int_0^t \|\Phi_{\epsilon k}(s)\|_{1/2}^2 ds \leq C_2,
 \end{aligned} \tag{3.83}$$

$\forall t \in [0, \tau_k]$. Resulta de (3.83) e do Corolário do Teorema de Carathéodory, cf. Capítulo 1, que a solução $\{v_{\epsilon k}, \phi_{\epsilon k}\}$ pode ser estendida ao intervalo $[0, T]$.

3.2 Prova do Teorema 3.2

Como descrito no início deste Capítulo a solução do problema (P.3) será obtida como limite, quando $k \rightarrow \infty$, da solução do problema truncado. Note que as estimativas em (3.83) implicam em:

$$\begin{aligned} |v_{\epsilon k}|_{\infty, \mathcal{H}_{1/2}}^2 &\leq C_2; \quad |v'_{\epsilon k}|_{\infty, \mathcal{H}_0}^2 \leq C_2, \\ |\phi_{\epsilon k}|_{\infty, \mathcal{H}_0}^2 &\leq C_2; \quad |\phi_{\epsilon k}|_{2, \mathcal{H}_{1/2}}^2 \leq C_2, \end{aligned} \quad (3.84)$$

$\forall t \in [0, T]$. Ou seja a sequência $(v_{\epsilon k})_k$ é limitada em $L^\infty(0, T; \mathcal{H}_{1/2})$, $(v'_{\epsilon k})_k$ é limitada em $L^\infty(0, T; \mathcal{H}_0)$ e a sequência $(\phi_{\epsilon k})_k$ é limitada em $L^2(0, T; \mathcal{H}_{1/2})$ e em $L^\infty(0, T; \mathcal{H}_0)$. Pelo Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbarki, mais precisamente seu Corolário, cf. Capítulo 1, temos que existem $v_\epsilon \in L^\infty(0, T; \mathcal{H}_{1/2})$ e $\phi_\epsilon \in L^\infty(0, T; \mathcal{H}_0)$ tais que, passando a uma subsequência se necessário vale

$$v_{\epsilon k} \overset{*}{\rightharpoonup} v_\epsilon \text{ em } L^\infty(0, T; \mathcal{H}_{1/2}), \quad (3.85)$$

$$v'_{\epsilon k} \overset{*}{\rightharpoonup} v'_\epsilon \text{ em } L^\infty(0, T; \mathcal{H}_0), \quad (3.86)$$

$$\phi_{\epsilon k} \overset{*}{\rightharpoonup} \phi_\epsilon \text{ em } L^\infty(0, T; \mathcal{H}_0), \quad (3.87)$$

$$\phi_{\epsilon k} \rightharpoonup \phi_\epsilon \text{ em } L^2(0, T; \mathcal{H}_{1/2}). \quad (3.88)$$

Observação 3.8. Sendo $L^2(0, T; \mathcal{H}_{1/2})$ um espaço de Hilbert temos que as topologias fraca e fraca-* coincidem donde $\phi_{\epsilon k} \overset{*}{\rightharpoonup} z_\epsilon$ em $L^2(0, T; \mathcal{H}_{1/2}) \iff \phi_{\epsilon k} \rightharpoonup z_\epsilon$ em $L^2(0, T; \mathcal{H}_{1/2})$.

Observação 3.9. Como $L^\infty(0, T; \mathcal{H}_{1/2}) \hookrightarrow L^\infty(0, T; \mathcal{H}_0)$, pois $\mathcal{H}_{1/2} \hookrightarrow \mathcal{H}_0$, temos que (3.85) é equivalente à

$$\int_0^T (v_{\epsilon k}(t), w(t))_0 dt \longrightarrow \int_0^T (v_\epsilon(t), w(t))_0 dt, \quad \forall w \in L^1(0, T; \mathcal{H}_0),$$

donde em particular obtemos

$$\int_0^T (v_{\epsilon k}(t), z)_0 \varphi(t) dt \longrightarrow \int_0^T (v_\epsilon(t), z)_0 \varphi(t) dt, \quad \forall z \in \mathcal{H}_0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T).$$

Ou seja

$$(v_{\epsilon k}(t), z)_0 \longrightarrow (v_\epsilon(t), z)_0 \text{ em } \mathcal{D}'(0, T), \quad \forall z \in \mathcal{H}_0. \quad (3.89)$$

Assim se $v'_{\epsilon k} \xrightarrow{*} w_\epsilon$ em $L^\infty(0, T; \mathcal{H}_0)$, então procedendo de modo análogo obtemos

$$(v'_{\epsilon k}(t), z)_0 \longrightarrow (w_\epsilon(t), z)_0 \text{ em } \mathcal{D}'(0, T), \forall z \in \mathcal{H}_0. \quad (3.90)$$

Logo pela unicidade do limite em $\mathcal{D}'(0, T)$ obtemos de (3.89) e (3.90) que

$$(w_\epsilon(t), z)_0 = (v'_\epsilon(t), z)_0, \forall z \in \mathcal{H}_0 \text{ e } t \in [0, T].$$

Daí, $w_\epsilon = v'_\epsilon$. De modo análogo verifica-se (3.88).

As estimativas obtidas até aqui não são suficientes para passar o limite no termo não linear.

3.2.1 Estimativas II

Nesta seção obteremos estimativas mais precisas para $v_{\epsilon k}$ e $v'_{\epsilon k}$ bem como para $v''_{\epsilon k}$ e $\phi'_{\epsilon k}$ que nos permitam tomar o limite em (3.36) e (3.37), quando $k \rightarrow \infty$, a fim de obtermos o Teorema 3.2. Com efeito, tomando o produto interno em \mathcal{H}_0 de ambos os lados de (3.36) por $2\lambda^{1/2}v'_{\epsilon k}$, temos:

$$\begin{aligned} & 2(v''_{\epsilon k}(t), \lambda^{1/2}v'_{\epsilon k}(t))_0 + 2(\lambda v_{\epsilon k}(t), \lambda^{1/2}v'_{\epsilon k}(t))_0 \\ & + M(t, \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2)2(\lambda v_{\epsilon k}(t), \lambda^{1/2}v'_{\epsilon k}(t))_0 \\ & + 2(\phi_{\epsilon k}(t), \lambda^{1/2}v'_{\epsilon k}(t))_0 = 2(f_{\epsilon k}(t), \lambda^{1/2}v'_{\epsilon k}(t))_0, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & 2(\lambda^{1/4}v''_{\epsilon k}(t), \lambda^{1/4}v'_{\epsilon k}(t))_0 + 2(\lambda^{3/4}v_{\epsilon k}(t), \lambda^{1/4}v'_{\epsilon k}(t))_0 \\ & + M(t, \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2)2(\lambda^{3/4}v_{\epsilon k}(t), \lambda^{1/4}v'_{\epsilon k}(t))_0 \\ & + 2(\lambda^{1/4}\phi_{\epsilon k}(t), \lambda^{1/4}v'_{\epsilon k}(t))_0 = 2(\lambda^{1/4}f_{\epsilon k}(t), \lambda^{1/4}v'_{\epsilon k}(t))_0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|\lambda^{1/4}v'_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + \frac{d}{dt} \|\lambda^{3/4}v_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + M(t, \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) \frac{d}{dt} \|\lambda^{3/4}v_{\epsilon k}(t)\|_0^2 \\ & + 2(\lambda^{1/4}\phi_{\epsilon k}(t), \lambda^{1/4}v'_{\epsilon k}(t))_0 = 2(\lambda^{1/4}f_{\epsilon k}(t), \lambda^{1/4}v'_{\epsilon k}(t))_0, \end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|v'_{\epsilon k}(t)\|_{1/4}^2 + \frac{d}{dt} \|v_{\epsilon k}(t)\|_{3/4}^2 + M(t, \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) \frac{d}{dt} \|v_{\epsilon k}(t)\|_{3/4}^2 \\ & + 2(\lambda^{1/4}\phi_{\epsilon k}(t), \lambda^{1/4}v'_{\epsilon k}(t))_0 = 2(\lambda^{1/4}f_{\epsilon k}(t), \lambda^{1/4}v'_{\epsilon k}(t))_0. \end{aligned}$$

Daí procedendo como antes obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|v'_{\epsilon k}(t)\|_{1/4}^2 + \frac{d}{dt} \|v_{\epsilon k}(t)\|_{3/4}^2 + M(t, \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) \frac{d}{dt} \|v_{\epsilon k}(t)\|_{3/4}^2 \\ & \leq \| \phi_{\epsilon k}(t) \|_{1/4}^2 + 2 \| v'_{\epsilon k}(t) \|_{1/4}^2 + \| f_{\epsilon k}(t) \|_{1/4}^2. \end{aligned} \quad (3.91)$$

De modo análogo tomando o produto interno em \mathcal{H}_0 de ambos os lados de (3.37) por $2\lambda^{1/2}\phi_{\epsilon k}(t)$, obtemos

$$\frac{d}{dt} \|\phi_{\epsilon k}(t)\|_{1/4}^2 + 2 \|\phi_{\epsilon k}(t)\|_{3/4}^2 \leq 2 \|\phi_{\epsilon k}(t)\|_{1/4}^2 + \|\mathbf{v}'_{\epsilon k}(t)\|_{1/4}^2 + \|\mathbf{g}_{\epsilon k}(t)\|_{1/4}^2. \quad (3.92)$$

Somando as desigualdades obtidas em (3.91) e (3.92), obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \|\mathbf{v}'_{\epsilon k}(t)\|_{1/4}^2 + \|\mathbf{v}_{\epsilon k}(t)\|_{3/4}^2 + \|\phi_{\epsilon k}(t)\|_{1/4}^2 \right\} \\ & + 2 \|\phi_{\epsilon k}(t)\|_{3/4}^2 + M(t, \|\mathbf{v}_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}_{\epsilon k}(t)\|_{3/4}^2 \\ & \leq 3 \|\mathbf{v}'_{\epsilon k}(t)\|_{1/4}^2 + 3 \|\phi_{\epsilon k}(t)\|_{1/4}^2 + \|\mathbf{f}_{\epsilon k}(t)\|_{1/4}^2 + \|\mathbf{g}_{\epsilon k}(t)\|_{1/4}^2. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Note que

$$\begin{aligned} M(t, \|\mathbf{v}_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}_{\epsilon k}(t)\|_{3/4}^2 &= \frac{d}{dt} \left\{ M(t, \|\mathbf{v}_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) \|\mathbf{v}_{\epsilon k}(t)\|_{3/4}^2 \right\} \\ & - \|\mathbf{v}_{\epsilon k}(t)\|_{3/4}^2 M'(t, \|\mathbf{v}_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 \end{aligned}$$

e

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{v}_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 = 2(\lambda^{3/4}\mathbf{v}_{\epsilon k}(t), \lambda^{1/4}\mathbf{v}'_{\epsilon k}(t))_0. \quad (\text{cf. Capítulo 2})$$

Substituindo as equações acima em (3.93), integrando de 0 até $t \leq T$ e usando (3.38), obtemos

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{v}'_{\epsilon k}(t)\|_{1/4}^2 + \|\mathbf{v}_{\epsilon k}(t)\|_{3/4}^2 + \|\phi_{\epsilon k}(t)\|_{1/4}^2 \\ & + 2 \int_0^t \|\phi_{\epsilon k}(s)\|_{3/4}^2 ds + M(t, \|\mathbf{v}_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) \|\mathbf{v}_{\epsilon k}(t)\|_{3/4}^2 \\ & \leq \|\mathbf{v}_{1\epsilon k}\|_{1/4}^2 + \|\mathbf{v}_{0\epsilon k}\|_{3/4}^2 + \|\phi_{0\epsilon k}\|_{1/4}^2 + M(t, \|\mathbf{v}_{0\epsilon k}\|_{1/2}^2) \|\mathbf{v}_{0\epsilon k}\|_{3/4}^2 \\ & \quad + \|\mathbf{f}_{\epsilon k}(t)\|_{2, \mathcal{H}_{1/4}}^2 + \|\mathbf{g}_{\epsilon k}(t)\|_{2, \mathcal{H}_{1/4}}^2 \\ & + C_4 \int_0^t \left\{ \|\mathbf{v}_{\epsilon k}(s)\|_{3/4}^3 \|\mathbf{v}'_{\epsilon k}(s)\|_{1/4} + \|\mathbf{v}'_{\epsilon k}(s)\|_{1/4}^2 + \|\phi_{\epsilon k}(s)\|_{1/4}^2 \right\} ds, \end{aligned} \quad (3.94)$$

onde $C_4 = \max\{3, 2C_3\}$ e $C_3 = \max \left\{ \left| \frac{\partial M}{\partial t}(\xi, \eta) \right|^2; (\xi, \eta) \in [0, T] \times [0, \alpha^2] \right\}$. Da definição de campo truncado segue que $\|\mathbf{v}_{1\epsilon k}\|_{1/4}^2 \leq \|\mathbf{v}_{1\epsilon}\|_{1/4}^2$, $\|\mathbf{v}_{0\epsilon k}\|_{3/4}^2 \leq \|\mathbf{v}_{0\epsilon}\|_{3/4}^2$, $\|\phi_{0\epsilon k}\|_{1/4}^2 \leq \|\phi_{0\epsilon}\|_{1/4}^2$, $\|\mathbf{f}_{\epsilon k}\|_{2, \mathcal{H}_{1/4}}^2 \leq \|\mathbf{f}_{\epsilon}\|_{2, \mathcal{H}_{1/4}}^2$ e $\|\mathbf{g}_{\epsilon k}\|_{2, \mathcal{H}_{1/4}}^2 \leq \|\mathbf{g}_{\epsilon}\|_{2, \mathcal{H}_{1/4}}^2$. Daí obtemos:

$$\|\mathbf{v}_{1\epsilon k}\|_{1/4}^2 \leq \|\mathbf{A}^{1/4}\mathbf{u}_1\|^2 + \|\mathbf{u}_1\|^2, \quad (3.95)$$

$$\|\mathbf{v}_{0\epsilon k}\|_{3/4}^2 \leq \frac{3}{2} \left[\|\mathbf{A}^{3/4}\mathbf{u}_0\|^2 + \|\mathbf{u}_0\|^2 \right], \quad (3.96)$$

$$\|\phi_{0\epsilon k}\|_{1/4}^2 \leq \|\mathbf{A}^{1/4}\theta_0\|^2 + \|\theta_0\|^2, \quad (3.97)$$

$$\|\mathbf{f}_{\epsilon k}(t)\|_{2, \mathcal{H}_{1/4}}^2 = \|\mathbf{A}_{\epsilon}^{1/4}\mathbf{f}\|_{1/4}^2 \leq \|\mathbf{A}^{1/4}\mathbf{f}\|_{2, \mathcal{H}}^2 + \|\mathbf{f}\|_{2, \mathcal{H}}^2, \quad (3.98)$$

$$\|\mathbf{g}_{\epsilon k}(t)\|_{2, \mathcal{H}_{1/4}}^2 = \|\mathbf{A}_{\epsilon}^{1/4}\mathbf{g}\|_{1/4}^2 \leq \|\mathbf{A}^{1/4}\mathbf{g}\|_{2, \mathcal{H}}^2 + \|\mathbf{g}\|_{2, \mathcal{H}}^2. \quad (3.99)$$

Justificaremos apenas as desigualdades (3.96) e (3.98) pois as demais seguem análogamente. Para a desigualdade (3.96) note que para $\lambda, \epsilon \geq 0$ vale $(\lambda + \epsilon)^{3/2} \leq \frac{3}{2}(\lambda^{3/2} + \epsilon^{3/2})$, donde em vista de (1.12) com $\alpha = \xi = \frac{3}{4}$ temos

$$\begin{aligned} & \|v_{0\epsilon k}\|_{3/4}^2 \leq \|v_{0\epsilon}\|_{3/4}^2 = \|u_\epsilon(u_0)\|_{3/4}^2 = \|A_\epsilon^{3/4}u_0\|^2 \\ & \leq \epsilon^{3/2} \int_{-\epsilon}^0 d(E_\lambda u_0, u_0) + \int_0^{+\infty} (\lambda + \epsilon)^{3/2} d(E_\lambda u_0, u_0) \\ & \leq \epsilon^{3/2} \int_{-\epsilon}^0 d(E_\lambda u_0, u_0) + \frac{3}{2} \epsilon^{3/2} \int_0^{+\infty} d(E_\lambda u_0, u_0) + \frac{3}{2} \int_0^{+\infty} \lambda^{3/2} d(E_\lambda u_0, u_0) \\ & \leq \frac{3}{2} \epsilon^{3/2} \int_0^{+\infty} d(E_\lambda u_0, u_0) + \frac{3}{2} \int_0^{+\infty} \lambda^{3/2} d(E_\lambda u_0, u_0) \\ & \leq \frac{3}{2} \epsilon^{3/2} \|u_0\|^2 + \frac{3}{2} \|A^{3/4}u_0\|^2 \leq \frac{3}{2} [\|u_0\|^2 + \|A^{3/4}u_0\|^2]. \end{aligned}$$

Logo vale (3.96). Quanto à (3.98) temos

$$\|f_{\epsilon k}\|_{2, \mathcal{H}_{1/4}}^2 = \int_0^T \|f_{\epsilon k}(t)\|_{1/4}^2 dt = \int_0^T \|A_\epsilon^{1/4}f\|^2 dt = \|A_\epsilon^{1/4}f\|_{2, H}^2.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \|f_{\epsilon k}\|_{2, \mathcal{H}_{1/4}}^2 &= \|A_\epsilon^{1/4}f\|_{2, H}^2 = \int_0^T \int_{-\epsilon}^{+\infty} (\lambda + \epsilon)^{1/2} d(E_\lambda f, f) dt \\ &\leq \int_0^T \int_{-\epsilon}^{+\infty} \lambda^{1/2} d(E_\lambda f, f) dt + \epsilon^{1/2} \int_0^T \int_{-\epsilon}^{+\infty} d(E_\lambda f, f) dt \\ &\leq \int_0^T \left\{ \|A^{1/4}f(t)\|^2 + \|f(t)\|^2 \right\} dt = \|A^{1/4}f\|_{2, H}^2 + \|f\|_{2, H}^2. \end{aligned}$$

Logo vale (3.98).

Substituindo (3.95)-(3.99) em (3.94) obtemos

$$\begin{aligned} & \|v'_{\epsilon k}(t)\|_{1/4}^2 + \|v_{\epsilon k}(t)\|_{3/4}^2 + \|\Phi_{\epsilon k}(t)\|_{1/4}^2 \\ & + 2 \int_0^t \|\Phi_{\epsilon k}(s)\|_{3/4}^2 ds + M(t, \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) \|v_{\epsilon k}(t)\|_{3/4}^2 \\ & \leq E_2 + C_4 \int_0^t \left\{ \|v_{\epsilon k}(s)\|_{3/4}^3 \|v'_{\epsilon k}(s)\|_{1/4} + \|v'_{\epsilon k}(s)\|_{1/4}^2 + \|\Phi_{\epsilon k}(s)\|_{1/4}^2 \right\} ds, \end{aligned} \quad (3.100)$$

onde

$$\begin{aligned} E_2 &= \|A^{1/4}u_1\|^2 + \|u_1\|^2 + \frac{3}{2}(C_0 + 1) [\|A^{3/4}u_0\|^2 + \|u_0\|^2 + \|A^{1/4}\theta_0\|^2 \\ & + \|\theta_0\|^2 + \|A^{1/4}f\|_{2, H}^2 + \|f\|_{2, H}^2 + \|A^{1/4}g\|_{2, H}^2 + \|g\|_{2, H}^2]. \end{aligned}$$

Definindo $\gamma_{\epsilon k}(t) = \|v'_{\epsilon k}(t)\|_{1/4}^2 + \|v_{\epsilon k}(t)\|_{3/4}^2 + \|\Phi_{\epsilon k}(t)\|_{1/4}^2$, $t \in [0, T]$, obtemos de (3.100) que

$$0 \leq \gamma_{\epsilon k}(t) \leq E_2 + C_4 \int_0^t \left\{ \gamma_{\epsilon k}(s) + [\gamma_{\epsilon k}(s)]^2 \right\} ds. \quad (3.101)$$

Lemma 3.2.1. *Se $\gamma_{\epsilon k}(t)$ satisfaz (3.101) em $[0, T]$ então existe $0 \leq T_0 \leq T$ tal que*

$$\gamma_{\epsilon k}(t) \leq e^{C_4 T_0 \{1 + E_2^{-1} - e^{C_4 T_0}\}^{-1}}, \quad \forall t \in [0, T_0]. \quad (3.102)$$

Demonstração. Defina $\varphi(t) = \int_0^t \left\{ \gamma_{\epsilon k}(s) + [\gamma_{\epsilon k}(s)]^2 \right\} ds$. Então, $\varphi'(t) = \gamma_{\epsilon k}(t) + [\gamma_{\epsilon k}(t)]^2$, pois $\varphi(0) = 0$. De (3.101) temos

$$\begin{aligned} [\gamma_{\epsilon k}(t)]^2 &\leq (E_2 + C_4 \varphi(t))^2 \implies \varphi'(t) = \gamma_{\epsilon k}(t) + [\gamma_{\epsilon k}(t)]^2 \\ &\leq \gamma_{\epsilon k}(t) + (E_2 + C_4 \varphi(t))^2 = E_2 + C_4 \varphi(t) + (E_2 + C_4 \varphi(t))^2, \end{aligned}$$

portanto

$$\varphi'(t) \leq E_2 + C_4 \varphi(t) + (E_2 + C_4 \varphi(t))^2. \quad (3.103)$$

Fazendo $y = y(t) = E_2 + C_4 \varphi(t)$ temos

$$y' = C_4 \varphi'(t) \leq C_4 y + C_4 y^2. \quad (3.104)$$

Multiplicando (3.104) por $e^{-C_4 t}$ temos

$$\begin{aligned} e^{-C_4 t} y' &\leq C_4 y e^{-C_4 t} + C_4 y^2 e^{-C_4 t} \\ \implies \frac{d}{dt}(e^{-C_4 t} y) &= -C_4 y e^{-C_4 t} + y e^{-C_4 t} \leq C_4 y^2 e^{-C_4 t}, \end{aligned}$$

ou seja

$$\frac{d}{dt}(e^{-C_4 t} y) \leq C_4 y^2 e^{-C_4 t}. \quad (3.105)$$

Integrando (3.105) de 0 ate $t \leq T$ e observando que $y(0) = E_2$ obtemos

$$y \leq e^{C_4 t} \left\{ E_2 + C_4 \int_0^t y^2 e^{-C_4 s} ds \right\}. \quad (3.106)$$

Fazendo $z = z(t) = \int_0^t y^2 e^{-C_4 s} ds$ temos de (3.106) que

$$\begin{aligned} y &\leq e^{C_4 t} (E_2 + C_4 z) \implies y^2 \leq e^{2C_4 t} (E_2 + C_4 z)^2 \\ \implies e^{-C_4 t} y^2 &\leq e^{C_4 t} (E_2 + C_4 z)^2. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Da definição de z temos $z'(t) = e^{-C_4 t} y^2$, logo de (3.107) temos

$$z'(t) \leq e^{C_4 t} (E_2 + C_4 z)^2 \iff \frac{(E_2 + C_4 z)'}{(E_2 + C_4 z)^2} \leq e^{C_4 t},$$

ou

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{-1}{E_2 + C_4 z} \right) \leq e^{C_4 t}. \quad (3.108)$$

Integrando (3.108) de 0 ate $t \leq T$ obtemos

$$\frac{-1}{E_2 + C_4 z} \leq -\frac{1}{E_2} + e^{C_4 t} - 1 \iff \frac{1}{E_2 + C_4 z} \geq 1 + \frac{1}{E_2} - e^{C_4 t}. \quad (3.109)$$

Note que $1 + \frac{1}{E_2} - e^{C_4 t} > 0 \iff e^{C_4 t} < 1 + \frac{1}{E_2} \iff t < \frac{1}{C_4} \ln \left(1 + \frac{1}{E_2}\right) := T^*$. Assim tomando $T_0 < T^*$ obtemos de (3.109)

$$E_2 + C_4 z \leq (1 + E_2^{-1} - e^{C_4 t})^{-1}, \quad \forall t \in [0, T_0].$$

Daí como

$$\begin{aligned} e^{-C_4 t} \gamma_{\epsilon k}(t) &\leq e^{-C_4 t} y \leq e^{-C_4 t} e^{C_4 t} (1 + E_2^{-1} - e^{C_4 t})^{-1} \\ \implies \gamma_{\epsilon k}(t) &\leq e^{C_4 t} (1 + E_2^{-1} - e^{C_4 t})^{-1} \leq e^{C_4 T_0} (1 + E_2^{-1} - e^{C_4 T_0})^{-1}, \end{aligned}$$

ou seja

$$\gamma_{\epsilon k}(t) \leq e^{C_4 T_0} (1 + E_2^{-1} - e^{C_4 T_0})^{-1}.$$

□

Do Lema 3.2.1 e de (3.101) obtemos a estimativa

$$\|v'_{\epsilon k}(t)\|_{1/4}^2 + \|v_{\epsilon k}(t)\|_{3/4}^2 + \|\phi_{\epsilon k}(t)\|_{1/4}^2 \leq E_3, \quad (3.110)$$

$\forall t \in [0, T_0], \forall \epsilon \in (0, 1)$ e $\forall k \in \mathbb{N}$, onde

$$E_3 = e^{C_4 T_0} (1 + E_2^{-1} - e^{C_4 T_0})^{-1}. \quad (3.111)$$

De (3.110) segue que

$$v_{\epsilon k} \xrightarrow{*} v_{\epsilon} \text{ em } L^{\infty}(0, T_0; \mathcal{H}_{3/4}), \quad (3.112)$$

$$v'_{\epsilon k} \xrightarrow{*} v'_{\epsilon} \text{ em } L^{\infty}(0, T_0; \mathcal{H}_{1/4}), \quad (3.113)$$

$$\phi_{\epsilon k} \xrightarrow{*} \phi_{\epsilon} \text{ em } L^{\infty}(0, T_0; \mathcal{H}_{1/4}). \quad (3.114)$$

No que segue estaremos supondo $t \in [0, T_0]$.

Vejamos agora uma limitação para $v''_{\epsilon k}$ e $\phi'_{\epsilon k}$ em $L^{\infty}(0, T_0; \mathcal{H}_{-1/4})$ e $L^2(0, T_0; \mathcal{H}_{-1/2})$, respectivamente. De fato, de (3.36) obtemos

$$v''_{\epsilon k}(t) = f_{\epsilon k}(t) - \lambda v_{\epsilon k}(t) - M(t, \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) \lambda v_{\epsilon k}(t) - \phi_{\epsilon k}(t).$$

Logo temos

$$\begin{aligned} & \|v''_{\epsilon k}(t)\|_{-1/4} \leq \|f_{\epsilon k}(t)\|_{-1/4} + \|\lambda v_{\epsilon k}(t)\|_{-1/4} \\ & + M(t, \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) \|\lambda v_{\epsilon k}(t)\|_{-1/4} + \|\phi_{\epsilon k}(t)\|_{-1/4} \\ \leq & C_5 \|f_{\epsilon k}(t)\|_0 + \|v_{\epsilon k}(t)\|_{3/4} + \sqrt{C_0} \|v_{\epsilon k}(t)\|_{3/4} + C_5 \|\phi_{\epsilon k}(t)\|_0 \\ \leq & C_5 \|f_{\epsilon k}(t)\|_0 + C_7 \|v_{\epsilon k}(t)\|_{3/4} + C_8 \|\phi_{\epsilon k}(t)\|_{1/4}, \end{aligned}$$

onde C_5 é a constante da imersão $\mathcal{H}_0 \hookrightarrow \mathcal{H}_{-1/4}$, $C_7 = 1 + \sqrt{C_0}$ e $C_8 = C_5 C_6$ com C_6 a constante da imersão $\mathcal{H}_{1/4} \hookrightarrow \mathcal{H}_0$. Usando (3.110) e o fato de $\|f_{\epsilon k}(t)\|_0 \leq \|f_{\epsilon}(t)\|_0 \leq \|f(t)\|$, obtemos

$$|v''_{\epsilon k}|_{\infty, \mathcal{H}_{-1/4}} \leq \sup_{t \in [0, T_0]} \text{ess} \|v''_{\epsilon k}(t)\|_{-1/4} \leq C_9. \quad (3.115)$$

Analogamente, de (3.37) temos

$$\phi'_{\epsilon k}(t) = g_{\epsilon k}(t) - \lambda \phi_{\epsilon k}(t) - v'_{\epsilon k}(t).$$

Daí,

$$\begin{aligned} & \|\phi'_{\epsilon k}(t)\|_{-1/2} \leq \|g_{\epsilon k}(t)\|_{-1/2} + \|\lambda \phi_{\epsilon k}(t)\|_{-1/2} + \|\lambda v'_{\epsilon k}(t)\|_{-1/2} \\ & \leq C_{10} \|g_{\epsilon k}(t)\|_0 + \|\phi_{\epsilon k}(t)\|_{1/2} + C_{10} \|v'_{\epsilon k}(t)\|_0 \\ & \leq C_{10} \|g_{\epsilon k}(t)\|_0 + C_{11} \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/4} + C_{12} \|v'_{\epsilon k}(t)\|_{1/4}, \end{aligned}$$

onde C_{10} é a constante da imersão $\mathcal{H}_0 \hookrightarrow \mathcal{H}_{-1/2}$, C_{11} a constante da imersão $\mathcal{H}_{1/2} \hookrightarrow \mathcal{H}_{1/4}$ e $C_{12} = C_{10} C_6$. Seque que

$$|\phi_{\epsilon k}|_{2, \mathcal{H}_{-1/2}} \leq C_{13}. \quad (3.116)$$

Portanto $v''_{\epsilon k}$ e $\phi'_{\epsilon k}$ são limitados em $L^\infty(0, T_0; \mathcal{H}_{-1/4})$ e $L^2(0, T_0; \mathcal{H}_{-1/2})$, respectivamente, donde passando a uma subsequência se necessário, obtemos

$$v''_{\epsilon k} \xrightarrow{*} v''_{\epsilon} \text{ em } L^\infty(0, T_0; \mathcal{H}_{-1/4}), \quad (3.117)$$

$$\phi'_{\epsilon k} \rightharpoonup \phi'_{\epsilon} \text{ em } L^2(0, T_0; \mathcal{H}_{-1/2}). \quad (3.118)$$

3.2.2 Análise do Termo Não Linear

Nesta seção obteremos via Teorema de Áscoli-Arzelá a convergência do termo não linear e por conseguinte a prova do Teorema 3.2. Para tanto consideremos a sequência $\psi_{\epsilon k}(t) = \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2$, definida em $[0, T_0]$. Como $v_{\epsilon k}, v'_{\epsilon k} \in$

$L^\infty(0, T_0; \mathcal{H}_{0,k})$ temos em particular $v_{\epsilon k} \in L^\infty(0, T_0; \mathcal{H}_{0,k})$ e $v'_{\epsilon k} \in L^\infty(0, T_0; \mathcal{H}_{1/2})$, donde pelo Teorema 1.13 obtemos $v_{\epsilon k} \in C^0([0, T_0]; \mathcal{H}_{1/2})$. Portanto $(\psi_{\epsilon k})_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de funções contínuas com valores reais. Mais ainda, da estimativa (3.83) obtemos

$$|\psi_{\epsilon k}(t)| = \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 \leq C_2, \quad \forall \epsilon \in (0, 1), \forall k \in \mathbb{N} \text{ e } \forall t \in [0, T_0]. \quad (3.119)$$

Por outro lado, dados $t, s \in [0, T_0]$ temos:

$$\begin{aligned} |\psi_{\epsilon k}(t) - \psi_{\epsilon k}(s)| &= \left| \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 - \|v_{\epsilon k}(s)\|_{1/2}^2 \right| = \left| \int_s^t \frac{d}{dt} \|v_{\epsilon k}(\rho)\|_{1/2}^2 d\rho \right| \\ &= 2 \left| \int_s^t (\lambda^{3/4} v_{\epsilon k}(\rho), \lambda^{1/4} v'_{\epsilon k}(\rho))_0 d\rho \right| \leq 2 \left| \int_s^t \|v_{\epsilon k}(\rho)\|_{3/4} \|v'_{\epsilon k}(\rho)\|_{1/4} d\rho \right| \\ &\leq \left| \int_s^t \left\{ \|v_{\epsilon k}(\rho)\|_{3/4}^2 + \|v'_{\epsilon k}(\rho)\|_{1/4}^2 \right\} d\rho \right| \leq E_3 \left| \int_s^t d\rho \right| = E_3 |t - s|, \end{aligned}$$

onde E_3 é definido em (3.111). Portanto,

$$|\psi_{\epsilon k}(t) - \psi_{\epsilon k}(s)| \leq E_3 |t - s|, \quad \forall \epsilon \in (0, 1), \forall k \in \mathbb{N} \text{ e } \forall t \in [0, T_0]. \quad (3.120)$$

Em outras palavras, $(\psi_{\epsilon k})_{k \in \mathbb{N}}$ é uniformemente limitada e equicontínua em $[0, T_0]$. Logo pelo Teorema de Áscoli-Arzelá existem uma subsequência de $(\psi_{\epsilon k})$, a qual ainda denotaremos por $(\psi_{\epsilon k})$, e $\psi_\epsilon \in C^0([0, T_0]; \mathbb{R})$ tais que

$$\psi_{\epsilon k} \longrightarrow \psi_\epsilon \text{ uniformemente em } [0, T_0]. \quad (3.121)$$

Como $M \in C^1([0, T_0] \times [0, +\infty))$ obtemos de (3.121) que

$$M(t, \psi_{\epsilon k}(t)) \longrightarrow M(t, \psi_\epsilon(t)) \text{ uniformemente em } [0, T_0]. \quad (3.122)$$

Das convergências (3.112) e (3.122) concluimos que

$$M(t, \psi_{\epsilon k}(t)) \lambda^{3/4} v_{\epsilon k}(t) \xrightarrow{*} M(t, \psi_\epsilon(t)) \lambda^{3/4} v_\epsilon(t) \text{ em } L^\infty(0, T_0; \mathcal{H}_0). \quad (3.123)$$

A seguir listamos as convergências obtidas até agora

$$v_{\epsilon k} \xrightarrow{*} v_\epsilon \text{ em } L^\infty(0, T_0; \mathcal{H}_{3/4}), \quad (3.124)$$

$$v'_{\epsilon k} \xrightarrow{*} v'_\epsilon \text{ em } L^\infty(0, T_0; \mathcal{H}_{1/4}), \quad (3.125)$$

$$v''_{\epsilon k} \xrightarrow{*} v''_\epsilon \text{ em } L^\infty(0, T_0; \mathcal{H}_{-1/4}), \quad (3.126)$$

$$\phi_{\epsilon k} \rightharpoonup \phi_\epsilon \text{ em } L^2(0, T_0; \mathcal{H}_{1/2}), \quad (3.127)$$

$$\phi'_{\epsilon k} \rightharpoonup \phi'_\epsilon \text{ em } L^2(0, T_0; \mathcal{H}_{-1/2}), \quad (3.128)$$

$$M(t, \psi_{\epsilon k}(t)) \lambda^{3/4} v_{\epsilon k}(t) \xrightarrow{*} M(t, \psi_\epsilon(t)) \lambda^{3/4} v_\epsilon(t) \text{ em } L^\infty(0, T_0; \mathcal{H}_0). \quad (3.129)$$

Das convergências (3.124)-(3.129) e observando que

$$f_{\epsilon k} \longrightarrow f_{\epsilon} \text{ em } L^2(0, T_0; \mathcal{H}_{1/4}) \text{ forte,} \quad (3.130)$$

$$g_{\epsilon k} \longrightarrow g_{\epsilon} \text{ em } L^2(0, T_0; \mathcal{H}_{1/4}) \text{ forte,} \quad (3.131)$$

tomamos o limite em (3.36) e (3.37) com $k \rightarrow +\infty$ donde deduzimos que os campos v_{ϵ} e ϕ_{ϵ} estão na classe (3.15)-(3.17) e satisfazem:

$$v_{\epsilon}'' + \lambda v_{\epsilon} + M(\cdot, \|\psi_{\epsilon}(\cdot)\|_{1/2}^2) \lambda v_{\epsilon} + \phi_{\epsilon} = f_{\epsilon} \text{ em } L^2(0, T_0; \mathcal{H}_{-1/4}), \quad (3.132)$$

$$\phi_{\epsilon}' + \lambda \phi_{\epsilon} + v_{\epsilon}' = g_{\epsilon} \text{ em } L^2(0, T_0; \mathcal{H}_{-1/2}), \quad (3.133)$$

$$v_{\epsilon}(0) = v_{0\epsilon}, \quad v_{\epsilon}'(0) = v_{1\epsilon}, \quad \phi_{\epsilon}(0) = \phi_{0\epsilon}. \quad (3.134)$$

De fato, dado $v \in L^2(0, T_0; \mathcal{H}_{1/4})$ consideremos o campo truncado v_k associado à v e por (3.36) obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_0} \int_{\lambda_{\epsilon}}^k (v_{\epsilon k}''(t, \lambda) + \lambda v_{\epsilon k}(t, \lambda) + M(t, \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) \lambda v_{\epsilon k}(t, \lambda) \\ & + \phi_{\epsilon k}(t, \lambda), v_k(t, \lambda))_{\mathcal{H}(\lambda)} d\mu_{\epsilon}(\lambda) dt = \int_0^{T_0} \int_{\lambda_{\epsilon}}^k (f_{\epsilon k}(t, \lambda), v_k(t, \lambda))_{\mathcal{H}(\lambda)} d\mu_{\epsilon}(\lambda) dt. \end{aligned} \quad (3.135)$$

Da definição de campo truncado podemos reescrever (3.135) como segue

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_0} \int_{\lambda_{\epsilon}}^{+\infty} (v_{\epsilon k}''(t, \lambda) + \lambda v_{\epsilon k}(t, \lambda) + M(t, \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) \lambda v_{\epsilon k}(t, \lambda) \\ & + \phi_{\epsilon k}(t, \lambda), v(t, \lambda))_{\mathcal{H}(\lambda)} d\mu_{\epsilon}(\lambda) dt = \int_0^{T_0} \int_{\lambda_{\epsilon}}^{+\infty} (f_{\epsilon k}(t, \lambda), v(t, \lambda))_{\mathcal{H}(\lambda)} d\mu_{\epsilon}(\lambda) dt, \end{aligned} \quad (3.136)$$

ou

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_0} (v_{\epsilon k}''(t) + \lambda v_{\epsilon k}(t) + M(t, \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) \lambda v_{\epsilon k}(t) + \phi_{\epsilon k}(t), v(t))_0 dt \\ & = \int_0^{T_0} (f_{\epsilon k}(t), v(t))_0 dt, \end{aligned} \quad (3.137)$$

ou ainda (cf. Capítulo 2)

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_0} \left\langle v_{\epsilon k}''(t) + \lambda v_{\epsilon k}(t) + M(t, \|v_{\epsilon k}(\cdot)\|_{1/2}^2) \lambda v_{\epsilon k}(t) + \phi_{\epsilon k}(t), v(t) \right\rangle_{-1/4, 1/4} dt \\ & = \int_0^{T_0} \langle f_{\epsilon k}(t), v(t) \rangle_{-1/4, 1/4} dt, \quad \forall v \in L^2(0, T_0; \mathcal{H}_{1/4}). \end{aligned} \quad (3.138)$$

Tomando o limite em (3.138) com $k \rightarrow +\infty$ e considerando as convergências (3.124)-(3.127), (3.129) e (3.130) obtemos (3.132). A verificação de (3.133) é inteiramente análoga à feita acima para (3.132). Vejamos agora os dados

iniciais. Consideremos $\varphi \in C^1([0, T_0], \mathbb{R})$ tal que $\varphi(0) = 1$ e $\varphi(T_0) = 0$. Da convergência (3.125) temos em particular

$$\int_0^{T_0} \left(v'_{\epsilon k}(t), \xi \right)_0 \varphi(t) dt \longrightarrow \int_0^{T_0} \left(v'_\epsilon(t), \xi \right)_0 \varphi(t) dt, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}_0. \quad (3.139)$$

Note que

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} \left(v'_{\epsilon k}(t), \xi \right)_0 \varphi(t) dt &= \int_0^{T_0} \left(v'_{\epsilon k}(t) \varphi(t), \xi \right)_0 dt = \left(\int_0^{T_0} v'_{\epsilon k}(t) \varphi(t) dt, \xi \right)_0 \\ &= \left(v_{\epsilon k}(t) \varphi(t) \Big|_0^{T_0} - \int_0^{T_0} v_{\epsilon k}(t) \varphi'(t) dt, \xi \right)_0 = \left(-v_{\epsilon k}(0) - \int_0^{T_0} v_{\epsilon k}(t) \varphi'(t), \xi \right)_0 \\ &= -(v_{0\epsilon k}, \xi)_0 - \int_0^{T_0} (v_{\epsilon k}(t), \xi)_0 \varphi'(t) dt, \end{aligned}$$

ou seja

$$\int_0^{T_0} \left(v'_{\epsilon k}(t), \xi \right)_0 \varphi(t) dt = -(v_{0\epsilon k}, \xi)_0 - \int_0^{T_0} (v_{\epsilon k}(t), \xi)_0 \varphi'(t) dt.$$

Assim (3.139) é equivalente à

$$\begin{aligned} &-(v_{0\epsilon k}, \xi)_0 - \int_0^{T_0} (v_{\epsilon k}(t), \xi)_0 \varphi'(t) dt \\ &\longrightarrow -(v_\epsilon(0), \xi)_0 - \int_0^{T_0} (v_\epsilon(t), \xi)_0 \varphi'(t) dt, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}_0. \end{aligned} \quad (3.140)$$

Da convergência (3.124) obtemos

$$\int_0^{T_0} (v_{\epsilon k}(t), \xi)_0 \varphi'(t) dt \longrightarrow \int_0^{T_0} (v_\epsilon(t), \xi)_0 \varphi'(t) dt, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}_0. \quad (3.141)$$

De (3.140) e (3.141) segue que

$$(v_{0\epsilon k}, \xi)_0 \longrightarrow (v_\epsilon(0), \xi)_0, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}_0, \quad \text{quando } k \rightarrow +\infty. \quad (3.142)$$

Ora, $v_{0\epsilon k} \longrightarrow v_{0\epsilon}$ em $\mathcal{H}_{3/4}$ forte e $\mathcal{H}_{3/4} \hookrightarrow \mathcal{H}_0$. Daí $v_{0\epsilon k} \longrightarrow v_{0\epsilon}$ em \mathcal{H}_0 forte, em particular, $v_{0\epsilon k} \rightarrow v_{0\epsilon}$ em \mathcal{H}_0 . Logo de (3.142) obtemos $(v_{0\epsilon}, \xi)_0 = (v_\epsilon(0), \xi)_0, \forall \xi \in \mathcal{H}_0$. Portanto $v_\epsilon(0) = v_{0\epsilon}$. Para provar que $v'_\epsilon(0) = v_{1\epsilon}$ e $\phi_\epsilon(0) = \phi_{0\epsilon}$, considere φ como acima e proceda analogamente com as convergências (3.125), (3.126) e (3.127), (3.128), respectivamente.

Procedendo como na Observação 3.9, obtemos de (3.132)-(3.134) que

$$\frac{d}{dt} (v'_\epsilon(t), \xi)_0 + (\lambda^{3/4} v_\epsilon(t), \lambda^{1/4} \xi)_0 + M(t, \|v_\epsilon(t)\|_{1/2}^2) (\lambda^{3/4} v_\epsilon(t), \lambda^{1/4} \xi)_0$$

$$+(\phi_\epsilon(t), \xi)_0 = (f_\epsilon(t), \xi)_0, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}_{1/4}, \forall \epsilon \in (0, 1),$$

no sentido de $\mathcal{D}'(0, T_0)$,

$$\frac{d}{dt}(\phi_\epsilon(t), \xi)_0 + (\lambda^{1/2}\phi_\epsilon(t), \lambda^{1/2}\xi)_0 + (v'_\epsilon(t), \xi)_0 = (g_\epsilon(t), \xi)_0, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}_{1/2}, \forall \epsilon \in (0, 1),$$

no sentido de $\mathcal{D}'(0, T_0)$,

$$v_\epsilon(0) = v_{0\epsilon}, \quad v'_\epsilon(0) = v_{1\epsilon}, \quad \phi_\epsilon(0) = \phi_{0\epsilon}.$$

Para concluirmos que os campos $\{v_\epsilon, \phi_\epsilon\}$ satisfazem o Teorema 3.2 é suficiente provar o seguinte resultado.

Lemma 3.2.2. *Se $\{v_\epsilon, \phi_\epsilon\}$ é o par de campos obtidos acima, então*

$$\psi_\epsilon(t) = \|v_\epsilon(t)\|_{1/2}^2, \quad \forall t \in [0, T_0].$$

Demonstração. Sejam $w_{\epsilon k} = v_{\epsilon k} - v_\epsilon$ e $z_{\epsilon k} = \phi_{\epsilon k} - \phi_\epsilon$. Temos que o par de campos $\{w_{\epsilon k}, z_{\epsilon k}\}$ está na classe (3.15)-(3.17) e satisfazem as equações

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(w'_{\epsilon k}(t), \xi)_0 + (\lambda^{3/4}w_{\epsilon k}(t), \lambda^{1/4}\xi)_0 + M(t, \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2)(\lambda^{3/4}v_{\epsilon k}(t), \lambda^{1/4}\xi)_0 \\ & + \left\{ M(t, \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) - M(t, \psi_\epsilon(t)) \right\} (\lambda^{3/4}v_{\epsilon k}(t), \lambda^{1/4}\xi)_0 + (z_{\epsilon k}(t), \xi)_0 = (f_{\epsilon k}(t) - f_\epsilon(t), \xi)_0, \end{aligned} \quad (3.143)$$

$\forall \xi \in \mathcal{H}_{1/4}$, no sentido de $\mathcal{D}'(0, T_0)$,

$$\frac{d}{dt}(z_{\epsilon k}(t), \xi)_0 + (\lambda^{1/2}z_{\epsilon k}(t), \lambda^{1/2}\xi)_0 + (w'_{\epsilon k}(t), \xi)_0 = (g_{\epsilon k}(t) - g_\epsilon(t), \xi)_0, \quad (3.144)$$

$\forall \xi \in \mathcal{H}_{1/2}$, no sentido de $\mathcal{D}'(0, T_0)$ e

$$\begin{aligned} w_{\epsilon k}(0) &= v_{0\epsilon k} - v_{0\epsilon} \longrightarrow 0 \text{ em } \mathcal{H}_{3/4} \text{ forte,} \\ w'_{\epsilon k}(0) &= v_{1\epsilon k} - v_{1\epsilon} \longrightarrow 0 \text{ em } \mathcal{H}_{1/4} \text{ forte,} \\ z_{\epsilon k}(0) &= \phi_{0\epsilon k} - \phi_{0\epsilon} \longrightarrow 0 \text{ em } \mathcal{H}_{1/2} \text{ forte.} \end{aligned} \quad (3.145)$$

Fazendo $\xi = w'_{\epsilon k}$ em (3.143), $\xi = z_{\epsilon k}$ em (3.144) e somando as equações, obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \|w'_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + \|w_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 + \|z_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + M(t, \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) \|w_{\epsilon k}(t)\|_0^2 \right\} + \|z_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 \\ & = -2(z_{\epsilon k}(t), w'_{\epsilon k}(t))_0 + \left\{ M(t, \psi_\epsilon(t)) - M(t, \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) \right\} (\lambda^{3/4}v_{\epsilon k}(t), \lambda^{1/4}w'_{\epsilon k}(t))_0 \\ & + (f_{\epsilon k}(t) - f_\epsilon(t), w'_{\epsilon k}(t))_0 + (g_{\epsilon k}(t) - g_\epsilon(t), z_{\epsilon k}(t))_0 + \left\{ \frac{d}{dt} M(t, \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) \right\} \|w_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2. \end{aligned}$$

Estimando como de costume o lado direito da equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \|w'_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + \|w_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 + \|z_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + M(t, \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) \|w_{\epsilon k}(t)\|_0^2 \right\} + \|z_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \|f_{\epsilon k}(t) - f_{\epsilon}(t)\|_0^2 + \frac{1}{2} \|g_{\epsilon k}(t) - g_{\epsilon}(t)\|_0^2 + C_{14} \|w_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 + \frac{3}{2} \|w'_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + \frac{3}{2} \|z_{\epsilon k}(t)\|_0^2 \\ & \quad + \left| M(t, \psi_{\epsilon}(t)) - M(t, \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) \right| \|v_{\epsilon k}(t)\|_{3/4}^2 \|w'_{\epsilon k}(t)\|_{1/4}. \end{aligned} \quad (3.146)$$

Note que $\left| \frac{d}{dt} M(t, \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) \right| \leq C_{14}, \forall \epsilon \in (0, 1), k \in \mathbb{N} \text{ e } t \in [0, T_0]$.

De (3.110) obtemos

$$\|v'_{\epsilon k}(t)\|_{1/4}^2 \leq E_3, \forall \epsilon \in (0, 1), k \in \mathbb{N} \text{ e } t \in [0, T_0]. \quad (3.147)$$

Daí sendo $w_{\epsilon k} = v_{\epsilon k} - v_{\epsilon}$, obtemos

$$\|w'_{\epsilon k}(t)\|_{1/4}^2 \leq 2 \left(\|v'_{\epsilon k}(t)\|_{1/4}^2 + \|v'_{\epsilon}(t)\|_{1/4}^2 \right) \leq E_4, \quad (3.148)$$

onde $E_4 = 4E_3$. Integrando (3.146) e usando (3.147) e (3.148) resulta que

$$\begin{aligned} & \|w'_{\epsilon k}(t)\|_0^2 + \|w_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 + \|z_{\epsilon k}(t)\|_0^2 \leq E_{0\epsilon k} \\ & + C_{15} \int_0^t \left\{ \|w'_{\epsilon k}(s)\|_0^2 + \|w_{\epsilon k}(s)\|_{1/2}^2 + \|z_{\epsilon k}(s)\|_0^2 \right\} ds, \end{aligned} \quad (3.149)$$

onde

$$\begin{aligned} E_{0\epsilon k} = & \|v_{1\epsilon k} - v_{1\epsilon}\|_0^2 + \|v_{0\epsilon k} - v_{0\epsilon}\|_{1/2}^2 + \|\Phi_{0\epsilon k} - \Phi_{0\epsilon}\|_0^2 \\ & + M(0, \|v_{0\epsilon k}\|_{1/2}^2) \|v_{0\epsilon k} - v_{0\epsilon}\|_0^2 + \frac{1}{2} \|f_{\epsilon k}(t) - f_{\epsilon}(t)\|_{\mathcal{H}_0}^2 + \frac{1}{2} \|g_{\epsilon k}(t) - g_{\epsilon}(t)\|_{\mathcal{H}_0}^2 \\ & + C(T_0) \max_{0 \leq t \leq T_0} \left| M(t, \psi_{\epsilon}(t)) - M(t, \|v_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2) \right|, \end{aligned} \quad (3.150)$$

$C_{15} = \max\{\frac{3}{2}, C_{14}\}$ e $C(T_0) = \sqrt{E_4} |v_{\epsilon}|_{\infty, \mathcal{H}_{3/4}} T_0$. Da desigualdade de Gronwall e (3.149) implicam em

$$\|w_{\epsilon k}(t)\|_{1/2}^2 \leq E_{0\epsilon k} e^{C_{15} T_0}, \forall t \in [0, T_0]. \quad (3.151)$$

Das convergências (3.129), (3.145) e do fato de

$$f_{\epsilon k} \longrightarrow f_{\epsilon} \text{ em } L^2(0, T_0; \mathcal{H}_0) \text{ forte}, \quad (3.152)$$

$$g_{\epsilon k} \longrightarrow g_{\epsilon} \text{ em } L^2(0, T_0; \mathcal{H}_0) \text{ forte} \quad (3.153)$$

(recorde que $L^2(0, T_0; \mathcal{H}_{1/4}) \hookrightarrow L^2(0, T_0; \mathcal{H}_0)$), resulta que

$$E_{0\epsilon k} \longrightarrow 0, \quad (3.154)$$

independente de $t \in [0, T_0]$. Logo de (3.151) obtemos

$$\| w_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2 \rightarrow 0 \text{ em } C^0([0, T_0]), \text{ quando } k \rightarrow +\infty. \quad (3.155)$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} & \left| \psi_\epsilon(t) - \| v_\epsilon(t) \|_{1/2}^2 \right| \leq |\psi_\epsilon(t) - \psi_{\epsilon k}(t)| \\ & \quad + \left| \| v_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}^2 - \| v_\epsilon(t) \|_{1/2}^2 \right| \\ \leq & |\psi_\epsilon(t) - \psi_{\epsilon k}(t)| + \left\{ \| v_{\epsilon k}(t) \|_{1/2} + \| v_\epsilon(t) \|_{1/2} \right\} \| v_{\epsilon k}(t) - v_\epsilon(t) \|_{1/2}, \end{aligned} \quad (3.156)$$

ou seja

$$\begin{aligned} & \left| \psi_\epsilon(t) - \| v_\epsilon(t) \|_{1/2}^2 \right| \leq |\psi_\epsilon(t) - \psi_{\epsilon k}(t)| \\ & \quad + \left\{ \| v_{\epsilon k}(t) \|_{1/2} + \| v_\epsilon(t) \|_{1/2} \right\} \| w_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}. \end{aligned} \quad (3.157)$$

De (3.83) obtemos

$$\left\{ \| v_{\epsilon k}(t) \|_{1/2} + \| v_\epsilon(t) \|_{1/2} \right\} \| w_{\epsilon k}(t) \|_{1/2} \leq C_{16} \| w_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}, \quad (3.158)$$

onde $C_{16} = 2\sqrt{C_2}$. Substituindo (3.158) em (3.157) obtemos

$$\left| \psi_\epsilon(t) - \| v_\epsilon(t) \|_{1/2}^2 \right| \leq |\psi_\epsilon(t) - \psi_{\epsilon k}(t)| + C_{16} \| w_{\epsilon k}(t) \|_{1/2}, \quad \forall t \in [0, T_0]. \quad (3.159)$$

Tomando o limite em (3.159) com $k \rightarrow +\infty$, usando (3.121) e (3.155) obtemos

$$\psi_\epsilon(t) = \| v_\epsilon(t) \|_{1/2}^2, \quad \forall t \in [0, T_0].$$

□

Isto completa a prova do Lema 3.2.2 e portanto do Teorema 3.2.

3.3 Prova do Teorema 3.1

De acordo com o Corolário 4 do Teorema 3.2 o par de funções vetoriais $u_\epsilon = \mathcal{U}_\epsilon^{-1}(v_\epsilon)$ e $\theta_\epsilon = \mathcal{U}_\epsilon^{-1}(\phi_\epsilon)$ satisfazem (3.21)-(3.26). De (3.28), das estimativas (3.82) e (3.110), das convergências (3.124) e (3.125) e do Teorema da Limitação Uniforme, cf Capítulo 1, obtemos as seguintes estimativas:

$$\| u'_\epsilon(t) \|^2 = \| v'_\epsilon(t) \|_0^2 \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \| v'_{\epsilon k}(t) \|_0^2 \leq C_{17} \quad (3.160)$$

$$\| A_\epsilon^{1/4} \mathbf{u}'_\epsilon(t) \|^2 = \| \mathbf{v}'_\epsilon(t) \|^2_{1/4} \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \| \mathbf{v}'_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/4} \leq C_{17} \quad (3.161)$$

$$\| A_\epsilon^{3/4} \mathbf{u}_\epsilon(t) \|^2 = \| \mathbf{v}_\epsilon(t) \|^2_{3/4} \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \| \mathbf{v}_{\epsilon k}(t) \|^2_{3/4} \leq C_{17} \quad (3.162)$$

$$\| \theta_\epsilon(t) \|^2 = \| \phi_\epsilon(t) \|^2_{1/2} \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \| \phi_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2} \leq C_{17} \quad (3.163)$$

$$\| A_\epsilon^{1/2} \mathbf{u}_\epsilon(t) \|^2 = \| \mathbf{v}_\epsilon(t) \|^2_{1/2} \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \| \mathbf{v}_{\epsilon k}(t) \|^2_{1/2} \leq C_{17}, \quad (3.164)$$

onde C_{17} é uma constante positiva independente de ϵ e t .

A convergência do termo não linear será obtida como na Seção 3.2, isto é, fazendo uso do Teorema de Arzelá - Ascoli. De fato, para cada $\epsilon > 0$ consideremos a função real $\Psi_\epsilon(t) := \| A_\epsilon^{1/2} \mathbf{u}_\epsilon(t) \|^2 = \| \mathbf{v}_\epsilon(t) \|^2_{1/2}$. Em [30] o autor prova mediante os Espaços Intermediários, cuja definição é dada no Capítulo 4, que a função Ψ_ϵ está bem definida e é contínua em $[0, T_0]$. De (3.164) segue que

$$|\Psi_\epsilon(t)| \leq C_{17}, \quad \forall t \in [0, T_0], \quad \forall \epsilon \in (0, 1). \quad (3.165)$$

Das estimativas (3.161) e (3.162) resulta que

$$|\Psi_\epsilon(t) - \Psi_\epsilon(s)| \leq 2 \left| \int_s^t \| A_\epsilon^{3/4} \mathbf{u}_\epsilon(\rho) \| \| A_\epsilon^{1/4} \mathbf{u}'_\epsilon(\rho) \| d\rho \right| \leq C_{18} |t - s|,$$

ou seja

$$|\Psi_\epsilon(t) - \Psi_\epsilon(s)| \leq C_{18} |t - s| \quad \forall t, s \in [0, T_0], \quad \forall \epsilon \in (0, 1). \quad (3.166)$$

De (3.165) , (3.166) e do Teorema de Arzelá-Ascoli segue a existência de uma função $\Psi \in C^0([0, T_0]; \mathbb{R})$ e de uma subfamília de $(\Psi_\epsilon)_{\epsilon \in (0,1)}$, a qual ainda denotaremos por $(\Psi_\epsilon)_{\epsilon \in (0,1)}$, tais que

$$\Psi_\epsilon \longrightarrow \Psi \text{ em } C^0([0, T_0]) \text{ quando } \epsilon \longrightarrow 0^+. \quad (3.167)$$

Como $M \in C^1([0, T_0] \times [0, +\infty); \mathbb{R})$ segue de (3.167) e da definição de Ψ_ϵ que

$$M(t, \| \mathbf{v}_\epsilon(t) \|^2_{1/2}) \longrightarrow M(t, \Psi(t)) \text{ em } C^0([0, T_0]) \text{ quando } \epsilon \longrightarrow 0^+. \quad (3.168)$$

Agora de (3.160), notando que $\mathbf{u}_\epsilon(0) = \mathcal{U}_\epsilon^{-1}(\mathbf{v}_{0\epsilon}) = \mathcal{U}_\epsilon^{-1} \mathcal{U}_\epsilon(\mathbf{u}_0) = \mathbf{u}_0$, e do Teorema Fundamental do Cálculo temos

$$\begin{aligned} \int_0^t \| \mathbf{u}'_\epsilon(s) \| ds &\leq C_{17} T_0 \implies \left\| \int_0^t \mathbf{u}'_\epsilon(s) ds \right\| \leq C_{17} T_0 \\ \implies \| \mathbf{u}_\epsilon(t) - \mathbf{u}_0 \| &\leq C_{17} T_0 \implies \| \mathbf{u}_\epsilon(t) \| \leq C_{19}, \quad \forall t \in [0, T_0]. \end{aligned}$$

Logo $(u_\epsilon)_{0 < \epsilon < 1}$ é limitada em $L^\infty(0, T_0; H)$. Desta limitação, de $\|A^\alpha u_\epsilon\|^2 \leq \|A_\epsilon^\alpha u_\epsilon\|^2$, $\forall 0 < \epsilon < 1$, $\forall \alpha \geq 0$, e de (3.161)-(3.164) obtemos

$$(u_\epsilon) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T_0; D(A^{3/4})), \quad (3.169)$$

$$(u'_\epsilon) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T_0; D(A^{1/4})), \quad (3.170)$$

$$(\theta_\epsilon) \text{ é limitada em } L^2(0, T_0; D(A^{1/2})). \quad (3.171)$$

Considerando uma subfamília se necessário, deduzimos de (3.169)-(3.171) que existem $u \in L^\infty(0, T_0; D(A^{3/4}))$ e $\theta \in L^2(0, T_0; D(A^{1/2}))$ tais que

$$u_\epsilon \xrightarrow{*} u \text{ em } L^\infty(0, T_0; D(A^{3/4})), \quad (3.172)$$

$$u'_\epsilon \xrightarrow{*} u' \text{ em } L^\infty(0, T_0; D(A^{1/4})), \quad (3.173)$$

$$\theta_\epsilon \rightharpoonup \theta \text{ em } L^2(0, T_0; D(A^{1/2})). \quad (3.174)$$

Da imersão $L^\infty(0, T_0; D(A^{3/4})) \hookrightarrow L^2(0, T_0; H)$, da convergência (3.172) e da estimativa (3.162) resulta que existe $\chi \in L^2(0, T_0; H)$ tal que

$$u_\epsilon \rightharpoonup u \text{ em } L^2(0, T_0; H), \quad (3.175)$$

$$A^{3/4}u_\epsilon \rightharpoonup \chi \text{ em } L^2(0, T_0; H), \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0^+. \quad (3.176)$$

Sendo $A^{3/4}$ um operador auto-adjunto, temos que $A^{3/4}$ é fechado (forte), cf. Apêndice, donde fracamente fechado. Daí $A^{3/4}u = \chi$. Além disso, se $z \in D(A^{1/4})$ então por (1.11) temos

$$\begin{aligned} (A_\epsilon^{3/4}u_\epsilon(t), A_\epsilon^{1/4}z) &= \int_{-\epsilon}^{+\infty} (\lambda + \epsilon) d(E_\lambda u_\epsilon(t), z) = \int_{-\epsilon}^{+\infty} \lambda d(E_\lambda u_\epsilon(t), z) \\ &+ \epsilon \int_{-\epsilon}^{+\infty} d(E_\lambda u_\epsilon(t), z) = (A^{3/4}u_\epsilon(t), A^{1/4}z) + \epsilon(u_\epsilon(t), z). \end{aligned}$$

Disto e de (3.176) resulta que

$$(A_\epsilon^{3/4}u_\epsilon(t), A_\epsilon^{1/4}z) \rightharpoonup (A^{3/4}u(t), A^{1/4}z), \text{ em } L^2(0, T_0), \forall z \in D(A^{1/4}). \quad (3.177)$$

Utilizando a convergência (3.168) deduzimos que

$$M(t, \|v_\epsilon(t)\|_{1/2}^2)(A_\epsilon^{3/4}u_\epsilon(t), A_\epsilon^{1/4}z) \longrightarrow M(t, \Psi(t))(A^{3/4}u(t), A^{1/4}z), \quad (3.178)$$

em $L^2(0, T_0)$, $\forall z \in D(A^{1/4})$ quando $\epsilon \rightarrow 0^+$. De modo análogo obtemos da imersão $L^2(0, T_0; D(A^{1/2})) \hookrightarrow L^2(0, T_0; H)$, da estimativa (3.163) e da convergência

(3.174) que

$$\theta_\epsilon \rightharpoonup \theta \text{ em } L^2(0, T_0; H), \quad (3.179)$$

$$A^{1/2}\theta_\epsilon \rightharpoonup A^{1/2}\theta \text{ em } L^2(0, T_0; H), \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0^+, \quad (3.180)$$

donde

$$(A_\epsilon^{1/2}\theta_\epsilon(t), A_\epsilon^{1/2}z) \rightharpoonup (A^{1/2}\theta(t), A^{1/2}z), \text{ em } L^2(0, T_0), \forall z \in D(A^{1/2}). \quad (3.181)$$

Tomando o limite em (3.24) e (3.25) com $\epsilon \rightarrow 0^+$ e levando em consideração as convergências (3.172)-(3.174), (3.177)-(3.179) e (3.181) obtemos

$$\begin{aligned} \{u, u', \theta\} &\in L^\infty(0, T_0; D(A^{3/4})) \times L^\infty(0, T_0; D(A^{1/4})) \times L^2(0, T_0; D(A^{1/2})), \\ \frac{d}{dt}(u'(t), z) + (A^{3/4}u(t), A^{1/4}z) + M(t, \Psi(t))(A^{3/4}u(t), A^{1/4}z) + \\ &+(\theta(t), z) = (f(t), z), \forall z \in D(A^{1/4}), \end{aligned}$$

no sentido de $L^2(0, T_0)$,

$$\frac{d}{dt}(\theta(t), z) + (A^{1/2}\theta(t), A^{1/2}z) + (u'(t), z) = (g(t), z), \forall z \in D(A^{1/2}),$$

no sentido de $L^2(0, T_0)$,

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1 \text{ e } \theta(0) = \theta_0.$$

A verificação dos dados iniciais é feita de modo análogo à do problema perturbado.

Lemma 3.3.1. *Se $\{v_\epsilon, \phi_\epsilon\}$ é o par de campos obtidos acima, então*

$$\Psi(t) = \|A^{1/2}u(t)\|_{1/2}^2, \quad \forall t \in [0, T_0].$$

A conclusão da prova do Teorema 3.1 segue do Lema acima cuja demonstração é inteiramente análoga à prova do Lema 3.2.2.

Observação 3.10. *O Lema 3.2.1 mostra o caráter local da solução fraca obtida acima, pois somente para $T_0 < T^*$ obtemos a estimativa (3.110). No entanto se pudermos impor condições sobre T^* de modo que $T < T^*$ então pode-se determinar uma solução fraca global para o problema (P.1), isto é, um par de funções vetoriais $u, \theta : [0, T] \rightarrow H$ satisfazendo (3.7)-(3.12).*

3.4 Unicidade de Solução

Nesta seção provaremos a unicidade de solução para o problema (P.1). Inicialmente observamos que a regularidade imposta sobre os dados iniciais $\{u_0, u_1, \theta_0, f, g\}$ na classe $D(A^{3/4}) \times D(A^{1/4}) \times D(A^{1/2}) \times [L^2(0, T, D(A^{1/4}))]^2$ “não é suficiente” para obtermos a unicidade de solução. De fato, se $[u, \theta]$ e $[\hat{u}, \hat{\theta}]$ satisfazem o Teorema 3.1, então $[\eta, \phi] = [u - \hat{u}, \theta - \hat{\theta}]$ está na classe (3.7)-(3.9) e satisfaz

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\eta', z) + (A^{3/4}\eta, A^{1/4}z) + M(\cdot, \|A^{1/2}u\|^2)(A^{3/4}u, A^{1/4}z) - \\ M(\cdot, \|A^{1/2}\hat{u}\|^2)(A^{3/4}\hat{u}, A^{1/4}z) + (\phi, z) = 0, \quad \forall z \in D(A^{1/4}), \end{aligned} \quad (3.182)$$

no sentido de $L^2(0, T_0)$,

$$\frac{d}{dt}(\phi, z) + (A^{1/2}\phi, A^{1/2}z) + (\eta', z) = 0, \quad \forall z \in D(A^{1/2}), \quad (3.183)$$

no sentido de $L^2(0, T_0)$,

$$\eta(0) = \eta'(0) = \phi(0) = 0, \quad (3.184)$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\eta', z) + (A^{3/4}\eta, A^{1/4}z) + M(\cdot, \|A^{1/2}u\|^2)(A^{3/4}\hat{u}, A^{1/4}z) + (\phi, z) \\ = \left\{ M(\cdot, \|A^{1/2}\hat{u}\|^2) - M(\cdot, \|A^{1/2}u\|^2) \right\} (A^{3/4}\hat{u}, A^{1/4}z), \end{aligned} \quad (3.185)$$

$\forall z \in D(A^{1/4})$ no sentido de $L^2(0, T_0)$,

$$\frac{d}{dt}(\phi, z) + (A^{1/2}\phi, A^{1/2}z) + (\eta', z) = 0, \quad \forall z \in D(A^{1/2}), \quad (3.186)$$

no sentido de $L^2(0, T_0)$,

$$\eta(0) = \eta'(0) = \phi(0) = 0. \quad (3.187)$$

Tomando $z = \eta'(t)$ em (3.185) temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\eta'(t)\|^2 + (A^{3/4}\eta(t), A^{1/4}\eta'(t)) + M(t, \|A^{1/2}u(t)\|^2)(A^{3/4}\eta(t), A^{1/4}\eta'(t))\eta'(t) \\ + (\phi(t), \eta'(t)) = \left\{ M(t, \|A^{1/2}\hat{u}(t)\|^2) - M(t, \|A^{1/2}u(t)\|^2) \right\} (A^{3/4}\hat{u}(t), A^{1/4}\eta'(t)), \quad \text{ou} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|\eta'(t)\|^2 + (A\eta(t), \eta'(t)) + M(t, \|A^{1/2}u(t)\|^2)(A^{3/4}\eta(t), A^{1/4}\eta'(t)) \\ &= -(\phi(t), \eta'(t)) + \left\{ M(t, \|A^{1/2}\hat{u}(t)\|^2) - M(t, \|A^{1/2}u(t)\|^2) \right\} (A^{3/4}\hat{u}(t), A^{1/4}\eta'(t)), \text{ ou} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|\eta'(t)\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|A^{1/2}\eta(t)\|^2 + \frac{1}{2} M(t, \|A^{1/2}u(t)\|^2) \frac{d}{dt} \|A^{1/2}\eta(t)\|^2 \\ & \quad + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ M(t, \|A^{1/2}u(t)\|^2) \right\} \|A^{1/2}\eta(t)\|^2 \\ &= -(\phi(t), \eta'(t)) + \left\{ M(t, \|A^{1/2}\hat{u}(t)\|^2) - M(t, \|A^{1/2}u(t)\|^2) \right\} (A^{3/4}\hat{u}(t), A^{1/4}\eta'(t)) \\ & \quad + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ M(t, \|A^{1/2}u(t)\|^2) \right\} \|A^{1/2}\eta(t)\|^2, \text{ ou ainda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|\eta'(t)\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|A^{1/2}\eta(t)\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ M(t, \|A^{1/2}u(t)\|^2) \|A^{1/2}\eta(t)\|^2 \right\} \\ &= -(\phi(t), \eta'(t)) + \left\{ M(t, \|A^{1/2}\hat{u}(t)\|^2) - M(t, \|A^{1/2}u(t)\|^2) \right\} (A^{3/4}\hat{u}(t), A^{1/4}\eta'(t)) \\ & \quad + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ M(t, \|A^{1/2}u(t)\|^2) \right\} \|A^{1/2}\eta(t)\|^2, \text{ ou} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ 2 \|\eta'(t)\|^2 + \|A^{1/2}\eta(t)\|^2 + M(t, \|A^{1/2}u(t)\|^2) \|A^{1/2}\eta(t)\|^2 \right\} \\ &= 2(-\phi(t), \eta'(t)) + 2 \left\{ M(t, \|A^{1/2}\hat{u}(t)\|^2) - M(t, \|A^{1/2}u(t)\|^2) \right\} (A^{3/4}\hat{u}(t), A^{1/4}\eta'(t)) \\ & \quad + \frac{d}{dt} \left\{ M(t, \|A^{1/2}u(t)\|^2) \right\} \|A^{1/2}\eta(t)\|^2 \\ & \leq 2 \left| (\phi(t), \eta'(t)) \right| + 2 \left| M(t, \|A^{1/2}\hat{u}(t)\|^2) - M(t, \|A^{1/2}u(t)\|^2) \right| \left| (A\hat{u}(t), \eta'(t)) \right| \\ & \quad + \left| \frac{d}{dt} M(t, \|A^{1/2}u(t)\|^2) \right| \|A^{1/2}\eta(t)\|^2 \\ & \leq \|\phi(t)\|^2 + \|\eta'(t)\|^2 + 2 \left| M(t, \|A^{1/2}\hat{u}(t)\|^2) - M(t, \|A^{1/2}u(t)\|^2) \right| \|A\hat{u}(t)\| \|\eta'(t)\| \\ & \quad + \left| \frac{d}{dt} M(t, \|A^{1/2}u(t)\|^2) \right| \|A^{1/2}\eta(t)\|^2. \end{aligned}$$

Pondo $\|\eta(t)\|^2 = \|A^{1/2}\eta(t)\|^2$, segue que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ 2 \|\eta'(t)\|^2 + \|\eta(t)\|^2 + M(t, \|A^{1/2}u(t)\|^2) \|A^{1/2}\eta(t)\|^2 \right\} \\ & \leq \|\phi(t)\|^2 + \|\eta'(t)\|^2 + 2 \left| M(t, \|A^{1/2}\hat{u}(t)\|^2) - M(t, \|A^{1/2}u(t)\|^2) \right| \|A\hat{u}(t)\| \|\eta'(t)\| \\ & \quad + \left| \frac{d}{dt} M(t, \|A^{1/2}u(t)\|^2) \right| \|A^{1/2}\eta(t)\|^2. \end{aligned} \tag{3.188}$$

De modo análogo, pondo $z = \phi(t)$ em (3.186) obtemos

$$\frac{d}{dt} \|\phi(t)\|^2 + \|\phi(t)\|^2 \leq \|\phi(t)\|^2 + \|\eta'(t)\|^2. \tag{3.189}$$

Usando o Teorema do Valor Médio e procedendo como anteriormente, obtemos

$$\begin{aligned} & |M(t, \|A^{1/2}\hat{u}(t)\|^2) - M(t, \|A^{1/2}u(t)\|^2)| \\ & \leq \left| \frac{\partial M}{\partial t}(t, \lambda) \right| \left| \|\hat{u}(t)\|_{D(A^{1/2})} + \|u(t)\|_{D(A^{1/2})} \right| \|A^{1/2}\eta(t)\|, \end{aligned} \quad (3.190)$$

onde ξ pertence ao segmento de extremos $\|A^{1/2}\hat{u}(t)\|^2$ e $\|A^{1/2}u(t)\|^2$. Assim por (3.2) segue-se

$$\begin{aligned} & |M(t, \|A^{1/2}\hat{u}(t)\|^2) - M(t, \|A^{1/2}u(t)\|^2)| \\ & \leq C_5 \left| \|\hat{u}(t)\|_{D(A^{1/2})} + \|u(t)\|_{D(A^{1/2})} \right| \|A^{1/2}\eta(t)\|. \end{aligned} \quad (3.191)$$

Sendo $M \in C^1([0, T] \times [0, +\infty))$ e $\hat{u}, u \in L^\infty(0, T_0; D(A^{3/4})) \hookrightarrow L^\infty(0, T_0; D(A^{1/2}))$ obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ 2 \|\eta'(t)\|^2 + \|\eta(t)\|^2 + M(t, \|A^{1/2}u(t)\|^2) \|A^{1/2}\eta(t)\|^2 \right\} \\ & \leq \|\phi(t)\|^2 + \|\eta'(t)\|^2 + 2C_5 \left| \|\hat{u}(t)\|_{D(A^{1/2})} + \|u(t)\|_{D(A^{1/2})} \right| \|A^{1/2}\eta(t)\| \|A\hat{u}(t)\| \|\eta'(t)\| \\ & \quad + C_6 \|A^{1/2}\eta(t)\|^2. \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ 2 \|\eta'(t)\|^2 + \|\eta(t)\|^2 + M(t, \|A^{1/2}u(t)\|^2) \|A^{1/2}\eta(t)\|^2 \right\} \\ & \leq \|\phi(t)\|^2 + \|\eta'(t)\|^2 + C_6 \|A^{1/2}\eta(t)\|^2 + C_7 \|A^{1/2}\eta(t)\| \|A\hat{u}(t)\| \|\eta'(t)\|^2. \end{aligned} \quad (3.192)$$

Somando (3.189) e (3.192) obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ 2 \|\eta'(t)\|^2 + \|\eta(t)\|^2 + \|\phi(t)\|^2 + M(t, \|A^{1/2}u(t)\|^2) \|A^{1/2}\eta(t)\|^2 \right\} + \|\phi(t)\|^2 \\ & \leq 2 \|\phi(t)\|^2 + 2 \|\eta'(t)\|^2 + C_6 \|A^{1/2}\eta(t)\|^2 + C_7 \|A^{1/2}\eta(t)\| \|A\hat{u}(t)\| \|\eta'(t)\|^2. \end{aligned} \quad (3.193)$$

Integrando (3.193) de 0 até $t \leq T_0$ e usando o fato de $M(t, \lambda) \geq 0$ concluímos que

$$\begin{aligned} & \|\eta'(t)\|^2 + \|\eta(t)\|^2 + \|\phi(t)\|^2 + \int_0^t \|\phi(s)\|^2 ds \\ & \leq \int_0^t \left\{ 2 \|\phi(s)\|^2 + 2 \|\eta'(s)\|^2 + C_6 \|A^{1/2}\eta(s)\|^2 \right. \\ & \quad \left. + C_7 \|A^{1/2}\eta(s)\| \|A\hat{u}(s)\| \|\eta'(s)\| \right\} ds. \end{aligned} \quad (3.194)$$

Como nós não temos uma limitação para $\|A\hat{u}(t)\|$, não conseguimos usar a Desigualdade de Gronwall e por conseguinte não obtemos a unicidade de solução. No entanto com as hipóteses fixadas anteriormente sobre o operador A e a função M , se os dados iniciais $\{u_0, u_1, \theta_0, f, g\}$ têm mais regularidade,

teremos unicidade de solução no Teorema 3.1. Mais precisamente temos o seguinte Teorema.

Teorema 3.3. *Sejam $u_0 \in D(A)$, $u_1 \in D(A^{1/2})$, $\theta_0 \in D(A^{1/2})$ e $f, g \in L^2(0, T; D(A^{1/2}))$, $T > 0$. Então existe $0 < T_0 \leq T$ e um único par de funções vetoriais $u, \theta : [0, T_0] \rightarrow H$ satisfazendo:*

$$u \in L^\infty(0, T_0; D(A)), \quad (3.195)$$

$$u' \in L^\infty(0, T_0; D(A^{1/2})), \quad (3.196)$$

$$\theta \in L^2(0, T_0; D(A^{1/2})), \quad (3.197)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u'(t), z) + (A^{1/2}u(t), A^{1/2}z) + M(t, \|A^{1/2}u(t)\|^2)(A^{1/2}u(t), A^{1/2}z) \\ + (\theta(t), z) = (f(t), z), \quad \forall z \in D(A^{1/2}), \end{aligned} \quad (3.198)$$

no sentido de $L^2(0, T_0)$,

$$\frac{d}{dt}(\theta(t), z) + (A^{1/2}\theta(t), A^{1/2}z) + (u'(t), z) = (g(t), z), \quad \forall z \in D(A^{1/2}), \quad (3.199)$$

no sentido de $L^2(0, T_0)$,

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1 \text{ e } \theta(0) = \theta_0. \quad (3.200)$$

Demonstração. A prova da existência de solução $\{u, \theta\}$ na classe (3.195)-(3.197) é análoga a do Teorema 3.1. Para a prova da unicidade, suponha que $[u, \theta]$ e $[\hat{u}, \hat{\theta}]$ satisfazem o Teorema 3.3 e seja $[\eta, \phi] = [u - \hat{u}, \theta - \hat{\theta}]$. Observemos que as estimativas (3.188)-(3.191) continuam valendo para a classe (3.195)-(3.197), donde também continua valendo (3.193). Como $u, \hat{u} \in L^\infty(0, T_0; D(A))$ segue que $\|A\hat{u}(t)\| \leq C_8$, donde

$$\begin{aligned} C_7 \|A^{1/2}\eta(s)\| \|A\hat{u}(s)\| \|\eta'(s)\| \\ \leq C_9 \|A^{1/2}\eta(s)\|^2 + C_9 \|\eta'(s)\|^2 \\ = C_9 \|\eta(s)\|^2 + C_9 \|\eta'(s)\|^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$C_7 \|A^{1/2}\eta(s)\| \|A\hat{u}(s)\| \|\eta'(s)\| \leq C_9 \|\eta(s)\|^2 + C_9 \|\eta'(s)\|^2. \quad (3.201)$$

Substituindo (3.201) em (3.194) temos

$$\|\eta'(t)\|^2 + \|\eta(t)\|^2 + \|\phi(t)\|^2$$

$$\begin{aligned}
 & \leq \| \eta'(t) \|^2 + \| \eta(t) \|^2 + \| \phi(t) \|^2 + \int_0^t \| \phi(s) \|^2 ds \\
 & \leq \int_0^t \left\{ 2 \| \phi(s) \|^2 + 2 \| \eta'(s) \|^2 + C_{10} \| \eta(s) \|^2 + C_9 \| \eta'(s) \|^2 \right\} ds \\
 & \leq C_{11} \int_0^t \left\{ \| \phi(s) \|^2 + \| \eta'(s) \|^2 + \| \eta(s) \|^2 \right\} ds,
 \end{aligned}$$

donde pela Desigualdade de Gronwall segue que

$$\| \eta'(t) \|^2 + \| \eta(t) \|^2 + \| \phi(t) \|^2 = 0, \quad \forall t \in [0, T_0].$$

Portanto, $\eta \equiv \phi \equiv 0$ em $[0, T_0]$ e fica provado a unicidade da solução. □

Capítulo 4

Aplicação

Neste capítulo objetivamos aplicar os resultados obtidos nos capítulos anteriores. Para tanto necessitamos de mais algumas notações.

Seja Ω um subconjunto aberto do \mathbb{R}^n . Por $H^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{Z}_+$, estamos representando o espaço de Sobolev de ordem m , ou seja, o espaço vetorial das (classes de) funções de $L^2(\Omega)$ que possuem derivadas no sentido das distribuições até a ordem m pertencentes à $L^2(\Omega)$ equipado com o produto escalar

$$(u, v)_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2} dx, \quad u, v \in H^m(\Omega).$$

O fecho em $H^m(\Omega)$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ será denotado por $H_0^m(\Omega)$ e o dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ é denotado por $H^{-m}(\Omega)$. Mediante o Teorema da Representação de Riesz-Fréchet obtemos a seguinte cadeia de imersões contínuas e densas:

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow H_0^m(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-m}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega).$$

Sejam X e Y dois espaços de Hilbert separáveis com produto interno e norma denotados, respectivamente, por $((\cdot, \cdot)), \|\cdot\|$ e $(\cdot, \cdot), |\cdot|$. Suponhamos que $X \hookrightarrow Y$, isto é, X é denso em Y e a imersão de X em Y é contínua. Seja S o operador de Y determinado pela terna $\{X, Y, ((\cdot, \cdot))\}$, isto é, S é o operador de Y tal que para cada $u \in D(S)$ existe um único $\bar{u} \in Y$ de modo que

$$((u, v)) = (\bar{u}, v), \quad \forall u, v \in X.$$

Neste caso temos

$$Su = \bar{u}$$

e

$$D(S) = \{u \in X; \exists f \in Y \text{ que verifica } ((u, v)) = (f, v), \forall v \in X\}.$$

Além disso, o operador S é auto-adjunto, não limitado (se $X \neq Y$) e

$$(Su, u) = ((u, v)) = \|u\|^2 \geq C|u|^2, \forall u \in D(S),$$

onde $C > 0$ é a constante da imersão $X \hookrightarrow Y$. Ou seja, S é auto-adjunto, não limitado (se $X \neq Y$) e coercivo. Nestas condições o operador $\Lambda = S^{1/2}$ está bem definido, é auto-adjunto, coercivo e $X = D(\Lambda)$, veja [35]. Assim, conforme a Seção 1.3, ficam bem definidas as potências do operador Λ .

Definição 4.1. *O Espaço Intermediário $[X, Y]_\theta$, $0 \leq \theta \leq 1$, é o domínio do operador $\Lambda^{1-\theta}$ equipado com a norma do gráfico*

$$\|u\|_{[X, Y]_\theta}^2 = |u|^2 + |\Lambda^{1-\theta}u|^2, \quad u \in D(\Lambda^{1-\theta}) = [X, Y]_\theta.$$

Segue da definição acima que $[X, Y]_\theta$ é um espaço de Hilbert, $[X, Y]_0 = X$ e $[X, Y]_1 = Y$.

Observação 4.1. *Mostra-se em [23] que se X e Y são equipados com novos produtos internos equivalentes à $((\cdot, \cdot))$ e (\cdot, \cdot) , respectivamente, e definindo $Y_\theta = [X, Y]_\theta$ com relação a estes novos produtos internos, então se X_θ denota o espaço intermediário $[X, Y]_\theta$ com os produtos internos $((\cdot, \cdot))$ e (\cdot, \cdot) temos $X_\theta = Y_\theta$ e suas normas são equivalentes. Conclui-se que os espaços estão intrinsecamente definidos por X e Y .*

Consideremos Ω um aberto limitado bem regular do \mathbb{R}^n (ou $\Omega = \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+^n, \mathbb{R}_-^n$) e números reais $s > 0$ e $m > s$. Definimos os espaços de Sobolev de ordem s por

$$H^s(\Omega) = [H^m(\Omega), L^2(\Omega)]_{1-\frac{s}{m}}.$$

Mostra-se em [23] que $H^s(\Omega)$ não depende dos inteiros $m > s$.

Com as notações acima podemos dar uma aplicação dos resultados obtidos no Capítulo 3. Seja $\Omega = \mathbb{R}^n$ e em $H = L^2(\mathbb{R}^n)$ consideremos o operador $A = -\Delta$ com domínio $D(A) = H^2(\mathbb{R}^n)$. Então:

$$\begin{aligned} D(A^{1/4}) &= [H^1(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n)]_{1/2} = H^{1/2}(\mathbb{R}^n), \\ D(A^{1/2}) &= [H^1(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n)]_0 = H^1(\mathbb{R}^n), \\ D(A^{3/4}) &= [H^1(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n)]_{1/4} = H^{3/4}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

De acordo com o Teorema 3.1, dados $u_0 \in H^{3/4}(\mathbb{R}^n)$, $u_1 \in H^{1/2}(\mathbb{R}^n)$, $\theta_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ e $f, g \in L^2(0, T; H^{1/2}(\mathbb{R}^n))$ existem $0 < T_0 \leq T$ e funções vetoriais $u, \theta : [0, T_0] \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ na classe (3.7)-(3.9) tal que

$$(P.7) \quad \begin{cases} u'' - \Delta u - M(\cdot, \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla u(x, \cdot)\|^2 dx) \Delta u + \theta = f, \\ \theta' - \Delta \theta + u' = g, \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \\ \theta(0) = \theta_0. \end{cases}$$

Tomando $u_0 \in H^2(\mathbb{R}^n)$, $u_1, \theta_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ e $f, g \in L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}^n))$ podemos aplicar o Teorema 3.3 e obtemos existência e unicidade de solução para o problema (P.7) na classe (3.195)-(3.197).

Apêndice A

Elementos da Teoria Espectral

Aqui apresentaremos alguns conceitos relativos a Teoria Espectral em Espaços de Hilbert com ênfase nos operadores lineares não limitados. Iniciamos com a definição mais geral de um operador linear em espaços de Hilbert. Seja $(H; (\cdot, \cdot))$ um espaço de Hilbert, com norma correspondente $\|\cdot\|$.

Definição A.1. *Denomina-se operador (ou transformação) linear de H a toda aplicação $A : D(A) \rightarrow H$ definida num subespaço $D(A)$ de H tal que*

$$A(u + v) = Au + Av \text{ e } A(cu) = cAu, \forall u, v \in D(A) \text{ e } \forall c \in \mathbb{C}.$$

Dados $A : D(A) \rightarrow H$ e $B : D(B) \rightarrow H$ dois operadores de H , os conceitos de adição, multiplicação por escalar, multiplicação e inversa define-se como para funções em geral, observando-se apenas que $D(A + B) = D(A) \cap D(B)$ e $D(AB) = M$ onde $M \subset D(B)$ é tal que $B(M) = \text{Im}(B) \cap D(A)$.

Definição A.2. *Dados dois operadores lineares A e B de H , diz-se que os mesmos são iguais, denotando $A = B$, quando $D(A) = D(B)$ sendo $A \equiv B$ em $D(A)$. Quando $D(A) \supset D(B)$ e $A \equiv B$ em $D(B)$ diz-se que A é uma extensão de B , escrevendo-se $B \subset A$.*

Definição A.3. *Sejam A e B operadores lineares, com B limitado. Diz-se que B e A são permutáveis ou que B comuta com A , quando AB é uma extensão de BA , isto é, $BA \subset AB$.*

Definição A.4. *Diz-se que um operador linear A de H é limitado em $D(A)$ quando existe uma constante $K > 0$ tal que*

$$\| Ax \| \leq K \| x \|,$$

$\forall x \in D(A)$. Em caso contrário diz-se que A é não limitado.

Assim, um operador A de H é não limitado quando para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in D(A)$ tal que $\| Ax_n \| > n \| x_n \|$.

A seguir justifica-se o uso de $D(A)$ em vez de H na definição (A.1). Inicialmente recorde que um operador A é limitado em $D(A)$ se, e somente se, A é contínuo em $D(A)$. Daí, tem-se a seguinte proposição.

Proposição A.1. *Se o operador A é limitado em $D(A)$, então A pode ser estendido por continuidade ao fecho $\overline{D(A)}$ de $D(A)$, sendo tal extensão linear, limitada e com a mesma norma de A .*

Demonstração. Seja $x \in \overline{D(A)}$. Então existe uma sequência (x_n) em $D(A)$ tal que $x_n \rightarrow x$ em H . Sendo A linear e limitado, temos

$$\| Ax_n - Ax_m \| \leq \| A \| \| x_n - x_m \|, \tag{A.1}$$

onde

$$\| A \| = \sup_{\|x\|=1} \| Ax \| . \tag{A.2}$$

Como (x_n) é convergente, tem-se que (x_n) é de Cauchy, donde por (A.1) temos que (Ax_n) é de Cauchy em H . Sendo H completo, existe $y \in H$ tal que $Ax_n \rightarrow y$ em H . Defina $\tilde{A} : \overline{D(A)} \rightarrow H$ pondo $\tilde{A}x = y$.

Afirmção: \tilde{A} está bem definido !

De fato, se (z_n) é outra sequência em $D(A)$ tal que $z_n \rightarrow x$ em H , então $(v_n) = (x_1, z_1, x_2, z_2, \dots)$ é tal que $v_n \rightarrow x$ em H . Pela continuidade de A , temos que (Av_n) é convergente, logo, de Cauchy. É fácil ver que (Ax_n) e (Az_n) são subsequências de (Av_n) e, além disso, $Ax_n \rightarrow y$. Sendo (Av_n) de Cauchy, tem-se necessariamente que $Av_n \rightarrow y$, donde $Az_n \rightarrow y$. Portanto, \tilde{A} está bem definido. É fácil ver que \tilde{A} é linear e para cada $x \in D(A)$, considerando a sequência constante $(x_n) = (x, x, \dots)$, temos $\tilde{A}x = Ax$. Logo,

temos que $D(\tilde{A}) = \overline{D(A)} \supset D(A)$ e $\tilde{A} \equiv A$ em $D(A)$. Assim, \tilde{A} é uma extensão de A . Para ver que \tilde{A} é limitada em $D(\tilde{A})$, note que dado $x \in D(\tilde{A})$ temos

$$\|\tilde{A}x\| = \|\lim Ax_n\| = \lim \|Ax_n\| \leq \lim \|A\| \|x_n\| = \|A\| \|x\|,$$

portanto,

$$\|\tilde{A}x\| \leq \|A\| \|x\|, \forall x \in D(\tilde{A}).$$

Além disso, $\|\tilde{A}\| \leq \|A\|$. Ora, para $x \in D(A) \subset D(\tilde{A})$ com $\|x\| = 1$ temos $\tilde{A}x = Ax \implies \|Ax\| = \|\tilde{A}x\| \leq \|\tilde{A}\|$, donde por (A.2) temos $\|A\| \leq \|\tilde{A}\|$. Logo, $\|A\| = \|\tilde{A}\|$. \square

Observação A.1. *O fecho \bar{F} de um subespaço vetorial F de um espaço normado é ainda um subespaço vetorial do mesmo, confira em [36].*

Segue da proposição acima que se $D(A)$ é denso em H , isto é, $\overline{D(A)} = H$, a extensão obtida é limitada em H . Em caso contrário, considera-se a decomposição em soma direta $H = \overline{D(A)} \oplus \overline{D(A)}^\perp$, onde $\overline{D(A)}^\perp = \{v \in H; (v, x) = 0, \forall x \in \overline{D(A)}\}$. Daí, todo $w \in H$ é univocamente representado por $w = x + y$, com $x \in \overline{D(A)}$ e $y \in \overline{D(A)}^\perp$. Assim, pondo $Ay = 0$ em $\overline{D(A)}^\perp$, define-se $\tilde{A}w = Ax + Ay$, obtendo-se uma extensão linear de A à H , a qual é limitada e possui a mesma norma que A . Logo, no caso limitado podemos sem perda de generalidade considerar A com domínio $D(A) = H$. Entretanto, no caso não limitado isso nem sempre é possível. Tal fato segue da contra-positiva do teorema a seguir.

Teorema A.1. *(Hellinger-Toeplitz) Se $D(A) = H$ com A linear e satisfazendo*

$$(Ax, y) = (x, Ay), \forall x, y \in H, \tag{A.3}$$

então A é limitado.

Demonstração. Suponha, por contradição, que A não é limitado. Então, existe uma sequência (v_n) em H tal que $\|v_n\| = 1$ e $\|Av_n\| \rightarrow +\infty$. Consideremos a sequência (f_n) de funcionais lineares definidos em H (recorde que $D(A) = H!$), por $f_n(u) = (Au, v_n)$. Por (A.3) temos

$$|f_n(u)| = |(Au, v_n)| = |(u, Av_n)| \leq \|u\| \|Av_n\|,$$

donde (f_n) é limitada para cada $n \in \mathbb{N}$. Além disso,

$$|f_n(u)| = |(Au, v_n)| \leq \|Au\| \|v_n\| = \|Au\|, \quad \forall u \in H,$$

ou seja, $(f_n(u))$ é limitada em \mathbb{R} para todo $u \in H$. Logo, pelo Teorema da Limitação Uniforme, existe $k > 0$ tal que $|f_n(u)| \leq k \|u\|$, $\forall n = 1, 2, \dots$ e $\forall u \in H$. Em particular, para $u = Av_n$, obtém-se $\|Av_n\|^2 \leq k \|Av_n\|$, donde $\|Av_n\| \leq k$, $\forall n \in \mathbb{N}$, o que é uma contradição. Logo A é limitado. \square

A seguir faremos uma rápida introdução sobre o operador Adjunto de um operador de H .

Recordando o caso limitado temos que o operador adjunto de um operador linear $A : H \rightarrow H$ é o único operador linear $A^* : H \rightarrow H$ tal que

$$(Au, v) = (u, A^*v), \quad \forall u, v \in H.$$

Agora, no caso não limitado, temos que A é definido em $D(A) \subset H$ e não mais no espaço de Hilbert H . Assim, pode ocorrer do vetor $v^* = A^*v$ não ser mais único. No entanto com a hipótese adicional de densidade, recupera-se a unicidade de v^* . De fato, suponha $(Au, v) = (u, v^*) = (u, v_1^*)$, $\forall u \in D(A)$. Logo, $(u, v^* - v_1^*) = 0$, $\forall u \in D(A)$, donde $v^* - v_1^* \in D(A)^\perp$. Como $D(A) \subset \overline{D(A)}$, segue que $\overline{D(A)}^\perp \subset D(A)^\perp$.

Afirmção: $v^* - v_1^* \in \overline{D(A)}^\perp$!

Com efeito, se $v^* - v_1^* \notin \overline{D(A)}^\perp$ então existe $v \in \overline{D(A)}$ tal que $(v, v^* - v_1^*) \neq 0$. Seja (v_n) uma sequência em $D(A)$ tal que $v_n \rightarrow v$ em H . Então, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n, v^* - v_1^*) = (v, v^* - v_1^*) \neq 0$, donde existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$ vale $(v_n, v^* - v_1^*) \neq 0$, o que é um absurdo pois $v_n \in D(A)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo, $v^* - v_1^* \in \overline{D(A)}^\perp$. Sendo $D(A)$ denso em H , temos que $\overline{D(A)}^\perp = \{0\}$, donde $v^* = v_1^*$.

Assim, com a hipótese de densidade fica bem definida a aplicação $A^* : D(A^*) \rightarrow H$ dada por $A^*v = v^*$ e tal que

$$(Au, v) = (u, A^*v), \quad \forall u \in D(A) \text{ e } \forall v \in D(A^*).$$

Diz-se então que A^* é o operador adjunto ou a adjunta de A . Note que

$$D(A^*) = \{v \in H ; \exists! v^* \in H \text{ com } (Au, v) = (u, v^*), \forall u \in D(A)\}.$$

Proposição A.2. *O operador A^* é um operador linear de H .*

Demonstração. Devemos provar que $D(A^*)$ é um subespaço de H e que A^* é linear em $D(A^*)$. Ora, dados $u, v \in D(A^*)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, temos que para todo $w \in D(A)$ vale

$$(Aw, u + \lambda v) = (Aw, u) + \bar{\lambda}(Aw, v) = (w, u^*) + \bar{\lambda}(w, v^*) = (w, u^* + \lambda v^*).$$

Falta provar que $(u + \lambda v)^* = u^* + \lambda v^*$ é único. Se existe $w^* \in H$ tal que $(Aw, u + \lambda v) = (w, u^* + \lambda v^*) = (w, w^*)$, $\forall w \in D(A)$, então $(w, u^* + \lambda v^* - w^*) = 0$, $\forall w \in D(A)$. Então, pela densidade de $D(A)$ em H , segue que $u^* + \lambda v^* = w^*$. Assim, $u + \lambda v \in D(A^*)$. Além disso, $A^*(u + \lambda v) = u^* + \lambda v^* = A^*u + \lambda A^*v$. Portanto, A^* é um operador linear de H . \square

No que segue citaremos algumas propriedades da adjunta A^* .

Proposição A.3. *Seja A um operador linear de H . Se existem A^{-1} , A^* e $(A^{-1})^*$ então existe $(A^*)^{-1}$ e $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.*

Demonstração. Ver [25]. \square

Proposição A.4. *Seja A um operador de H com $D(A) = H$. Então, A^* é limitado e $D(A^*)$ é fechado em H .*

Demonstração. Ver [25]. \square

Definição A.5. *Seja A um operador de H com domínio $D(A)$ em H . Diz-se que A é fechado se seu gráfico $G(A) = \{(u, Au) \in H \times H; u \in D(A)\}$ é um conjunto fechado em $H \times H$.*

Proposição A.5. *Seja A um operador linear de H fechado com domínio $D(A)$ denso em H . Então, o domínio $D(A^*)$ da adjunta é denso em H , existe $(A^*)^* = A^{**}$ e é igual à A .*

Demonstração. Ver [25]. \square

Proposição A.6. *O operador adjunto A^* é fechado.*

Demonstração. Seja (v_n) uma sequência em $D(A^*)$ tal que $v_n \rightarrow v$ e $Av_n \rightarrow w$. Devemos provar que $v \in D(A^*)$ e $w = A^*v$. Ora, para todo $u \in D(A)$, temos

$$(Au, v) = \lim(Au, v_n) = \lim(u, A^*v_n) = (u, w),$$

pois o produto interno é contínuo. Da definição de $D(A^*)$, resulta que $v \in D(A^*)$ e $w = A^*v$. \square

Proposição A.7. (*Teorema do Gráfico Fechado*) *Se A for fechado e $D(A) = H$, então A é limitado.*

Demonstração. Pela proposição A.4 temos que A^* é limitado e $D(A^*)$ é fechado. Sendo A fechado resulta da proposição A.5 que $D(A^*)$ é denso em H , donde $D(A^*) = H$. Além disso, existe $(A^*)^* = A^{**}$ e é igual à A . Aplicando novamente a proposição A.4 agora para A^* , conclui-se que A é limitado. \square

Vamos agora tratar de uma classe de operadores de H bem especial, a saber, a dos operadores auto-adjuntos.

Seja $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ um operador linear de H com domínio denso em H . Diz-se que A é auto-adjunto se $A = A^*$. Ou seja, se $D(A) = D(A^*)$ e $A^*v = Av$ para todo $v \in D(A)$.

Com o objetivo de caracterizar os operadores auto-adjuntos recordaremos novamente o caso limitado. Neste caso um operador auto-adjunto A é caracterizado pela relação

$$(Au, v) = (u, Av), \quad \forall u, v \in H, \tag{A.4}$$

a qual define os chamados Operadores Simétricos. Motivados pela relação (A.4) poderíamos usar a mesma como definição de operador simétrico para o caso não limitado. Para isso seria necessário apenas manter os pares de elementos u, v no domínio $D(A)$ de A . Em vista do nosso objetivo, vamos supor também que $D(A)$ é denso em H , donde existe A^* . Assim, temos de (A.4) que

$$(Au, v) = (u, Av), \quad (\forall u, v \in H)$$

$$\iff v \in D(A^*), A^*v = v^* = Av \quad (\forall v \in D(A))$$

$$\iff A \subset A^*.$$

Logo, motivado pelo caso limitado define-se operador linear simétrico no caso geral do modo seguinte:

Definição A.6. *Seja A um operador linear de H com domínio $D(A)$ denso em H . Diz-se que A é simétrico se $A \subset A^*$.*

Ou seja, se A^* é uma extensão de A .

Observação A.2. *Sendo A^* fechada conclui-se que todo operador linear simétrico possui uma extensão fechada, que é sua adjunta.*

Note que todo operador auto-adjunto é simétrico, porém, diferentemente do caso limitado nem todo operador simétrico é auto-adjunto.

Contra-Exemplo A.0.1. *Considere o espaço de Hilbert $L^2(0, 1)$ com o produto interno*

$$(u, v)_{L^2} = \int_0^1 u\bar{v},$$

e o subespaço do mesmo, denotado por $S^1(0, 1)$, das funções $u : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ absolutamente contínua. Defina $S_0^1(0, 1)$ como sendo o conjunto das funções $u \in S^1(0, 1)$ tais que $\frac{du}{dt} \in L^2(0, 1)$ e $u(0) = u(1) = 0$. Então temos que $S_0^1(0, 1)$ é denso em $L^2(0, 1)$. Seja $A : S_0^1(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$ dado por $Au = i\frac{du}{dt}$. Prova-se a seguir que A é simétrico e não é auto-adjunto. Com efeito, temos

$$\begin{aligned} (Au, v)_{L^2} - (u, Av)_{L^2} &= \int_0^1 iu'\bar{v} + \int_0^1 iu\bar{v}' \\ &= i \int_0^1 (u'\bar{v} + u\bar{v}') \\ &= i \int_0^1 \frac{d(u\bar{v})}{dt} = i[u\bar{v}]_0^1 = 0, \end{aligned}$$

donde $(Au, v)_{L^2} = (u, Av)_{L^2}$, $\forall u, v \in S_0^1(0, 1)$. Assim A é simétrico. Em [25] prova-se que $D(A^*)$ está contido na coleção de funções de $S^1(0, 1)$ cuja derivada pertence a $L^2(0, 1)$, porém sem condições nos extremos. Assim $D(A)$ está contido propriamente em $D(A^*)$, donde $A \neq A^*$. Portanto A não é auto-adjunto.

No entanto temos o seguinte resultado.

Teorema A.2. *Se A é simétrica e sobrejetora, então A é auto-adjunta.*

Demonstração. Já temos $A \subset A^*$, isto é, $D(A) \subset D(A^*)$ e $A^*|_{D(A)} = A$. Logo, para provar que $A = A^*$ é suficiente mostrar que $D(A^*) \subset D(A)$. Assim sendo, seja $v \in D(A^*)$ e ponhamos $v^* = A^*v$. Sendo $A(D(A)) = H$, existe $w \in D(A)$ tal que $Aw = v^*$. Portanto para cada $u \in D(A)$, sendo A simétrico, obtém-se

$$(Au, v) = (u, A^*v) = (u, v^*) = (u, Aw) = (Au, w),$$

donde, $\forall z \in A(D(A)) = H$ vale

$$(z, v - w) = 0.$$

Daí segue que $v = w$ e $v \in D(A)$. Portanto $D(A^*) \subset D(A)$. □

Um outro conceito importante para um melhor entendimento desta dissertação é o de **Projeção ortogonal**. Antes de definirmos o que se entende por **projeção ortogonal**, considere o seguinte teorema.

Teorema A.3. *Seja M um subespaço fechado do espaço de Hilbert H . Então, $H = M \oplus M^\perp$.*

Demonstração. Ver [2] ou [39]. □

Definição A.7. *Sejam $P : H \rightarrow H$ um operador linear e $W = P(H)$. Diz-se que P é uma projeção de H sobre W se $P^2 = P$, isto é, se $P|_W = I_W = \text{identidade em } W$.*

Em geral existem várias maneiras de "projetar" H sobre W como fica claro na definição acima. Uma destas maneiras em particular merece nossa atenção, a saber, a **projeção ortogonal**. Tal projeção é distinguida das demais pelo fato de seu núcleo ser o complemento ortogonal da sua imagem. Formalmente temos:

Definição A.8. *Seja P uma projeção de H sobre $W = P(H)$. Diz-se que P é uma projeção ortogonal de H sobre W se W é fechado e $\text{Ker}(P) = W^\perp$.*

Note que sendo P uma projeção ortogonal sobre sua imagem W temos que $W = \{z \in H; Pz = z\}$. De fato, dado $z \in H$ temos $z \in W \iff z = Px, x \in H$, donde $Pz = P^2x = Px = z$, ou seja, $z \in W \iff Pz = z$. Além disso, como P é linear temos que W é um subespaço de H , o qual é fechado por definição. Assim

segue do Teorema A.3 que $H = W \oplus W^\perp = \text{Im}(P) \oplus \text{Ker}(P)$. Daí, dado $z \in H$ temos $\|Pz\| = \|Py + Px\| = \|Py\| = \|y\|$, $\forall x \in \text{Ker}(P)$ e $y \in \text{Im}(P) = W$. Logo, P é limitado com $\|P\| = 1$, (portanto, $P \neq 0!$). Temos ainda que

$$\begin{aligned} (Pz_1, z_2) &= (P(y_1^{(1)} + y_2^{(1)}), y_1^{(2)} + y_2^{(2)}) = (Py_1^{(1)}, y_1^{(2)} + y_2^{(2)}) \\ &= (y_1^{(1)}, y_1^{(2)}) \\ &= (y_1^{(1)} + y_2^{(1)}, Py_1^{(2)}) \\ &= (z_1, Pz_2), \end{aligned}$$

$\forall z_1 = y_1^{(1)} + y_2^{(1)}, z_2 = y_1^{(2)} + y_2^{(2)} \in H$. Logo, $P = P^*$. Reciprocamente, se P é uma projeção limitada e auto-adjunta então P é uma projeção ortogonal sobre sua imagem. De fato, sejam $W = P(H)$ e (y_n) uma sequência em W tal que $y_n \rightarrow z \in H$. Ora, $y_n = Px_n$, com (x_n) sendo uma sequência em H , donde $Py_n = P^2x_n = Px_n = y_n$. sendo $P = P^*$ e P^* um operador fechado, temos que $y_n \rightarrow z$ e $Py_n = y_n \rightarrow z$ implicam em $z = Pz \in W$. Logo, W é fechado. Para provar que $\text{Ker}(P) = W^\perp$, devemos provar que $x \in \text{Ker}(P) \iff (Pz, x) = 0, \forall z \in H \iff (z, Px) = 0, \forall z \in H$, pois $P = P^*$. Mas, $(z, Px) = 0, \forall z \in H$ ocorre se, e somente se, $Px = 0$. Assim, $\text{Ker}(P) = W^\perp$. Portanto, P é uma projeção ortogonal sobre sua imagem. Provou-se acima a seguinte caracterização das projeções ortogonais:

Proposição A.8. *Uma projeção $P : H \rightarrow H$ é ortogonal se, e somente se, P é limitada e auto-adjunta.*

Observação A.3. *A proposição acima justifica o uso de H em vez de $D(A)$ na definição de projeção ortogonal.*

Como foi visto anteriormente, se $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ é um operador linear auto-adjunto então A é simétrico. Daí, $(Au, u) = (u, Au) = \overline{(Au, u)}, \forall u \in D(A)$, donde $(Au, u) \in \mathbb{R}, \forall u \in H$. Assim podemos considerar a seguinte relação de ordem parcial:

Definição A.9. *Dados A e B operadores de H auto-adjuntos, diz-se que A é maior que B , e denotamos por $A \geq B$ ou $B \leq A$, se*

$$(Au, u) \geq (Bu, u),$$

para todo $u \in D(A) \cap D(B)$.

Quando ocorrer de $(Au, u) \geq 0, \forall u \in D(A)$, diz-se que A é positivo e denotamos por $A \geq 0$. Além disso, se $(Au, u) = 0 \iff u = 0$, diz-se que A é positivo definido e denotamos por $A > 0$.

Observação A.4. Note que $A \geq B \iff A - B \geq 0$.

Proposição A.9. Sejam E_1 e E_2 projeções ortogonais. Então as condições a seguir são equivalentes:

- (i) $E_1 \leq E_2$;
- (ii) $\|E_1 x\| \leq \|E_2 x\|, \forall x \in H$;
- (iii) $E_1 E_2 = E_1$;
- (iv) $E_2 E_1 = E_1$.

Demonstração. Ver [2]. □

Observação A.5. Na proposição acima, se no item (i) for $E_2 \leq E_1$ então teremos nos itens (iii) e (iv) $E_1 E_2 = E_2$ e $E_2 E_1 = E_2$, respectivamente.

Proposição A.10. Sejam E_1 e E_2 projeções ortogonais. Então $E = E_1 - E_2$ é uma projeção ortogonal se, e somente se, $E_2 \leq E_1$.

Demonstração. Ver [2]. □

Enunciaremos, sem demonstração, o Teorema Espectral para um operador linear de H auto-adjunto e não limitado .

Teorema A.4. Seja $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ um operador linear de H com domínio denso em H . Se A é auto-adjunto, existe uma família $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ de projeções ortogonais tal que:

- (i) $E_\lambda \leq E_\mu$ para $\lambda \leq \mu$;
- (ii) E_λ é contínua à direita em λ , isto é, $E_{\lambda+\epsilon} \longrightarrow E_\lambda$ quando $\epsilon \rightarrow 0^+$;
- (iii) $E_\lambda \rightarrow 0$ quando $\lambda \rightarrow -\infty$ e $E_\lambda \rightarrow I$ quando $\lambda \rightarrow +\infty$;
- (iv) E_λ comuta com A , e se $T : H \longrightarrow H$ é limitado e comuta com A então T comuta com E_λ e E_λ comuta com T ;
- (v) Existe uma medida definida a partir das projeções E_λ de modo que

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_\lambda,$$

e

$$D(A) = \left\{ \mathbf{u} \in H; \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d \| E_{\lambda} \mathbf{u} \|^2 < \infty \right\}.$$

(vi) Se $\{F_{\lambda}\}$ é outra família de projeções ortogonais satisfazendo (i) – (iii) e tal que

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda dF_{\lambda},$$

então $E_{\lambda} = F_{\lambda}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Ver [2], [25] ou [35]. □

Observação A.6. As integrais em (iv) e (v) são integrais impropriamente de Riemann-Stieltjes.

A família de projeções ortogonais $\{E_{\lambda}\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ é chamada de família espectral de A .

Principais Notações

1. X denota um espaço de Banach real.
2. H denota um espaço de Hilbert real.
3. $C([0, T]; X)$ é o espaço de Banach das funções contínuas definidas em $[0, T]$ tomando valores em X .
4. $|\cdot|_{p,X}$ é a norma do espaço $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p \leq \infty$.
5. $C_0^\infty(0, T)$ é o espaço das funções de classe $C^\infty(0, T)$ com suporte compacto em $(0, T)$.
6. $\mathcal{D}'(0, T)$ é o espaço das distribuições escalares sobre $(0, T)$.
7. $\mathcal{D}'(0, T; X)$ é o espaço das distribuições vetoriais sobre $(0, T)$ com valores em X .
8. $\lambda \mapsto \mathcal{H}(\lambda)$ é o campo de espaços de Hilbert ν -mensurável.
9. $\mathcal{H}_0 = \int^\oplus \mathcal{H}(\lambda) d\nu(\lambda)$ é a integral hilbertiana associada ao campo $\lambda \mapsto \mathcal{H}(\lambda)$.
10. \mathcal{H}_α é o espaço dos campos u tais que $\lambda^\alpha u \in \mathcal{H}_0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
11. $|\cdot|_\alpha$ é a norma do espaço \mathcal{H}_α .
12. $(\cdot, \cdot)_\alpha$ é o produto escalar em \mathcal{H}_α .
13. $|\cdot|_{p,\alpha}$ é a norma de $L^p(0, T; \mathcal{H}_\alpha)$, $1 \leq p \leq \infty$.
14. $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-\alpha, \alpha}$ denota a dualidade entre $\mathcal{H}_{-\alpha}$ e \mathcal{H}_α .
15. $\mathcal{H}_{0,k}$ é o subespaço de \mathcal{H}_0 dos campos truncados, isto é, que se anulam ν -q.s. em $[k, +\infty)$.

16. X_k é o espaço $L^\infty(0, \tau_k; \mathcal{H}_{0,k}) \hookrightarrow L^\infty(0, \tau_k; \mathcal{H}_{1/2})$.
17. A denota um operador auto-adjunto de H , $A \geq 0$.
18. $A_\epsilon = A + \epsilon I$, onde I é o operador identidade de H , $\epsilon > 0$.
19. $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ é a família espectral de A .
20. A^α denota as potências do operador A , $\alpha \in \mathbb{R}$.
21. Ω denota um subconjunto aberto bem regular do \mathbb{R}^n .
22. $[X, Y]_\theta$ denota os espaços intermediários entre X e Y , $0 \leq \theta \leq 1$.
23. $H^s(\Omega)$ é o espaço de Sobolev de ordem $s > 0$.

Referências Bibliográficas

- [1] Arosio, A. and Spagnolo, S.: Global solution of the Cauchy problem for a nonlinear hyperbolic equation, *Nonlinear Partial Differential Equation and their Applications*, Collège de France Seminar, vol. 6, London, 1984.
- [2] Bachman, G. and Narici, L.: *Functional Analysis*, Dover, New York, 2000.
- [3] Ball, J. M.: Initial-Boundary Value Problems for an Extensible Beam, *J. of Math. Anal. and Appl.* 42, 61-90, 1973.
- [4] Bartle, R.: *The Elements of Integration*, J. Wiley, 1996.
- [5] Brézis, H.: *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*, Dunod, Paris, 1999.
- [6] Castro, N. N. de O.: *Soluções Fraca para um Sistema Hiperbólico envolvendo o Operador p-Laplaciano*, Notas de Aula, UFPB, João Pessoa, 2005.
- [7] Clark, H. R.: *Propriedades Assintóticas e Regularizantes de Equações de Vibrações com Não Linearidade Não Locais*, Tese de Doutorado, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1992.
- [8] Clark, M. R. and Lima, O. A. de: *Mathematical Analysis of a Nonlinear System*, *Nonlinear Analysis* 45, 343-361, 2001.
- [9] Coddington, E. A. and Levinson, N.: *Theory of Ordinary Differential Equations*, Mcgraw-Hill Publishing Co. Ltd., New Delhi, 1972.
- [10] Dickey, R. W.: *The initial value problem for a nonlinear semi-infinite string*, University of Texas of Austin, Workshop, March 1977.

-
- [11] Dunford, N. and Schwartz, J. T.: *Linear Operators, Parte II: Spectral Theory, Self Adjoint Operators in Hilbert Space*, Wiley-Interscience, New York, 1963.
- [12] Evans, L. C.: *Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics*, vol. 19, American Mathematical Society, 1997.
- [13] Ebihara, Y., Medeiros, L. A. and Miranda, M. M.: *Local Solutions for a Nonlinear Degenerate Hyperbolic Equations, Nonlinear Analysis*, vol. 10, 27-40, 1986.
- [14] Folland, G. B.: *Real Analysis: Modern techniques and their Applications*, 2nd ed., Wiley-Interscience, 1999.
- [15] Friedman, A.: *Foundations of Modern Analysis*, Dover, New York, 1970.
- [16] Gelfand, I. M. and Vilenkin, Y. N.: *Generalized Functions*, vol. 4, Translated by Amiel Feinstein, New York, Academic Press, 1964.
- [17] Honing, C. S. : *Análise Funcional e o problema de Sturm-Liouville*, Edgard Blucher, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1978.
- [18] Huet, D.: *Décomposition Spectrale et Opérateurs*, Press Universitaires de France, 1977.
- [19] Lions, J.L.: *Equations Differentielles Operationelles et Problèmes aux Limites*, Springer-Verlag, 1961.
- [20] Lions, J.L.: *Problèmes aux Limites Dans les Équations aux Derivées Partielles*, Presses de l'Université de Montreal, 1962.
- [21] Lions, J.L.: *On Some Questions in Boundary Value Problems of Mathematical Physics, Contemporary Development in Continuum Mechanics and Partial Differential Equations*, London, 1978.
- [22] Lions, J.L. and Magenes, E.: *Non Homogeneous Boundary Value Problems and Applications*, vol 1, Springer, 1972.

- [23] Lions, J.L. and Magenes, E.: *Problèmes aux Limites Non Homogènes et Application*, vol. 1, Dunod, Paris, 1968.
- [24] Lima, E. L.: *Espaços Métricos, Projeto Euclides*, IMPA, Rio de Janeiro, 1977.
- [25] Medeiros, L. A.: *Teoria Espectral em Espaços de Hilbert*, Textos de Métodos Matemáticos n°4, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1973.
- [26] Medeiros, L. A.: *Equações Diferenciais Parciais*, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1981.
- [27] Medeiros, L. A. e Rivera, P. H.: *Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais*, Textos de Métodos Matemáticos n°9, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1975.
- [28] Medeiros, L. A. e Miranda, M. M.: *Introdução aos Espaços de Sobolev e as Equações Diferenciais Parciais*, Textos de Métodos Matemáticos n°25, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1993.
- [29] Medeiros, L. A. and Miranda, M. M.: *Solutions for the equations of nonlinear vibrations in Sobolev space of fractionary order*, *Math. Appl. Comput.*, vol. 6, 1987, 257-276.
- [30] Matos, M. P.: *Estudo de um Modelo Abstrato para a Equação da Corda Via Integral Hilbertiana*, Tese de Doutorado, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1989.
- [31] Matos, M. P.: *Mathematical Analysis of the Nonlinear Model for the Vibrations of String*, *Nonlinear Analysis*, vol 17, 1125-1137, 1991.
- [32] Matos, M. P.: *Integral de Bochner e Espaços $L^p(0, T; X)$* , Notas de Aula, UFPB, João Pessoa, 1998.
- [33] Menzala, G. P.: *On Classical Solutions of a Quasilinear Hyperbolic Equation*, *Nonlinear Analysis*, vol. 3, n° 5, 613-627, 1978.
- [34] Menzala, G. P.: *On Global Classical Solutions of a Nonlinear Wave Equation*, *J. Appl. Anal.* 10, 179-195, 1980.

- [35] Miranda, M. M.: *Análise Espectral em Espaços de Hilbert, Notas de Aula, IM-UFRJ, Rio de Janeiro.*
- [36] Nachibin, L.: *Introdução a Análise Funcional: Espaços de Banach e Cálculo Diferencial, Coleção de Monografias, Série de Matemática n° 17, 1976.*
- [37] Nishihara, K.: *On global solution of some quasilinear hyperbolic equations, Tokyo J. Math. 7, 1984, 437-459.*
- [38] Ribeiro, N. F. M.: *Dual de Espaços L^p de Funções Vetoriais, Gazeta de Matemática, Paraná, 1981.*
- [39] Riesz, F. and Nagy, Sz. B.: *Functional Analysis, Fredrick Ungar, New York, 1955.*
- [40] Royden, H. L.: *Real Analysis (2nd ed.), Macmillan, New York, 1988.*
- [41] Yosida, K.: *Functional Analysis (6th ed.), Springer-Verlag, New York, 1980.*