



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA  
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
MESTRADO EM MATEMÁTICA

**ALGUMAS VERSÕES E APLICAÇÕES DO  
PRINCÍPIO DO MÁXIMO DE OMORI-YAU**

**LEANDRO DE FREITAS PESSOA**

**Teresina - 2011**

**LEANDRO DE FREITAS PESSOA**

**Dissertação de Mestrado:**

**ALGUMAS VERSÕES E APLICAÇÕES DO PRINCÍPIO DO  
MÁXIMO DE OMORI-YAU**

Dissertação submetida à Coordenação do  
Curso de Pós-Graduação em Matemática,  
da Universidade Federal do Piauí, como  
requisito parcial para obtenção do grau  
de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. BARNABÉ PESSOA LIMA

**Teresina - 2011**

# Algumas Versões e Aplicações do Princípio do Máximo de Omori-Yau

**Leandro de Freitas Pessoa**

Dissertação submetida à Comissão de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal do Piauí, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

---

Dr. Barnabé Pessoa Lima (Orientador).  
Professor Adjunto do DM/CCN-UFPI

---

Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa  
Professor Adjunto do DM/CCN-UFPI

---

Dr. Gregório Pacelli Feitosa Bessa  
Professor Adjunto do DM/UFC

---

Dr. Newton Luís Santos (Suplente)  
Professor Adjunto do DM/CCN-UFPI

P587a

Pessoa, Leandro de Freitas

Algumas versões e aplicações do Princípio do Máximo de Omori-Yau/Leandro de Freitas Pessoa. - 2011

78f. 6il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Piauí, 2011.

Orientação: Prof. Dr. Barnabé Pessoa Lima

1. Geometria diferencial. 2. Princípio do Máximo. 3. Omori-Yau (Matemática). I. Título

CDD 516.36

*Aos meus pais Luiz Antonio e Maria do Socorro.*

# Agradecimentos

Agradeço à minha família, não apenas pelo apoio e carinho, mas sobretudo por confiar nas minhas difíceis escolhas que nortearam minha vida. Aos meus Pais pelo sacrifício feito para que eu pudesse desfrutar das oportunidades que eles não tiveram. À Eliana e Eliene, principalmente, pelas vezes que deixaram de ser apenas irmãs para serem Mães. Ao meu irmão Lizo, digo Lizandro, por sempre me possibilitar mais do que a ele próprio.

À Swelen pelo amor, carinho, atenção e, sobretudo, pela amizade e companheirismo demonstrados a todos os momentos durante os últimos dois anos. Agradeço-lhe também pela paciência e por sempre me fazer lembrar que as experiências vividas são mais importantes que qualquer teoria (mesmo as matemáticas).

À Dona Rosa e seu feijão mágico que me fizeram engordar milagrosamente. À minha cunhada Aline por me possibilitar ter um quarto só pra mim.

Ao Orientador e amigo Barnabé Pessoa Lima por ter escrito de maneira retilínea nas linhas tortas de minha formação matemática, transformando um desconhecedor do Teorema do Valor Intermediário em um aluno regular do Doutorado em Matemática em pouco mais de dois anos.

Aos colegas de Mestrado com os quais aprendi tudo que sei sobre Matemática de verdade. Aos companheiros de Verão (Paraíba, Piauí e Ceará) pelas lições de motivação e perseverança.

Aos Professores do Mestrado em Matemática da UFPI, com particular ênfase ao grupo de Geometria por terem sido sempre solícitos em me ensinar não somente na sala de aula, mas também em seus gabinetes. Aos Professores Juscelino, Humberto e Paulo Sérgio pela paciência em me ajudar com o tex e com as figuras.

Aos Parceiros RH com os quais convivi por três anos e que estiveram presentes em muitos

momentos importantes da minha vida. Aos amigos da Hominis, pelo aprendizado e crescimento pessoal que me proporcionaram. Nesta mesma linha, quero agradecer aos Professores do antigo CEFET-PI pelas valiosas contribuições à minha formação profissional e pessoal.

Aos amigos do PICME, professores e alunos, pelas manhãs de sábado animadas onde comecei a levar mais a sério essa estória de ser Matemático. A Merval Jr pelas noites infíndas e torturantes de sexta-feira, quando estudávamos para as provas do PICME.

Aos Professores e amigos da OBMEP pelas manhãs de sábado com a garotada e pelos conselhos que talvez tenham feito eu não desistir da Matemática.

Aos amigos de UESPI pela boa diversão em sala de aula e por me aceitarem como turista na turma.

À Professora Maricéu Sena, por intercessão de minha irmã Eliana, pelo melhor presente que um jovem estudante de uma escola pública do interior poderia ganhar.

À aqueles que figurarem nas intersecções de alguns destes agradecimentos e aos que por ventura não tenham sido lembrados nestas linhas, minha gratidão por terem feito parte de minha vida. Aos amigos pelos quais tenho o apreço de um irmão, meus sinceros agradecimentos.

Agradeço ao CNPq pelos sete meses de bolsa de IC que me ajudou a sobreviver no início do Mestrado, e também, ao PICME-CAPES pelo posterior apoio financeiro com seu devido retroativo (antes tarde do que nunca!).

*“Em seres iluminados ...  
... só enxergo Luz!”.*

# Resumo

Dada uma função limitada superiormente  $f$ , claramente tal função atinge seu máximo quando seu domínio é um compacto numa variedade diferenciável. Mas se retirarmos a hipótese de compacidade do domínio, nem sempre podemos determinar se  $f$  atinge, pelo menos, um máximo local. Afim de recuperarmos, para domínios não compactos, as propriedades relacionadas com o gradiente, hessiano e laplaciano que os pontos de máximo possuem, fazemos tal estudo através de sequências maximizantes. Em variedades Riemannianas nos referimos a esta abordagem como Princípio do Máximo de Omori-Yau. Neste trabalho procuramos introduzir o princípio de Omori-Yau, demonstrando algumas versões que generalizaram este princípio nos últimos anos e acrescentando através do Teorema 5 uma generalização para a versão apresentada por Pigola, Rigoli e Setti em [16]. Especificamente, tomamos por base os teoremas apresentados em [3], [8] e [10]. Descrevemos também algumas das principais aplicações obtidas utilizando esta ferramenta da Análise Geométrica, cuja caracterização ainda é um problema em aberto.

# Abstract

Given  $f$ , a higher limited function, which clearly reaches its maximum when its domain is a compact subset in a differentiable manifold. But if we take off the hypothesis of compactness of the domain, we can't always determine if  $f$  reaches at least one local maximum. In order to recover, to noncompact domains, the properties related to the gradient, Hessian and Laplacian that the maximum points have, we make such a study through maximizing sequences. In Riemannian manifolds we refer to this approach as the Omori-Yau maximum principle. In this dissertation we introduce the Omori-Yau maximum principle, demonstrating some versions that have generalized this principle in recent years, adding in Theorem 5 a generalization to a version of Omori-Yau maximum principle proved by Pigola, Rigoli and Setti in [16]. Specifically, our result is based on the theorems presented in [3], [8] e [10]. We also describe some of the main applications obtained using this tool from Geometric Analysis, whose complete characterization is still an open problem.

# Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	v
Abstract	vi
Introdução	1
<b>1 Referencial Teórico</b>	<b>4</b>
1.1 Geodésicas e Variedades Completas . . . . .	4
1.2 Gradiente, Hessiano e Laplaciano . . . . .	8
1.3 Curvaturas e a Segunda Forma Fundamental . . . . .	12
1.4 Campos de Jacobi e o <i>Cut Locus</i> . . . . .	18
1.5 Teoremas de comparação de Hessiano e Laplaciano . . . . .	20
<b>2 Versões do Princípio do Máximo de Omori-Yau</b>	<b>25</b>
2.1 Omori-Yau no $\mathbb{R}^n$ . . . . .	25
2.2 Omori-Yau sob as hipóteses de Chen-Xin . . . . .	27
2.3 As Boas Sombras de Omori-Yau . . . . .	37
2.4 Omori-Yau sob outras Hipóteses . . . . .	45
<b>3 Aplicações do Princípio do Máximo de Omori-Yau</b>	<b>58</b>
Referências Bibliográficas	67

# Introdução

Um dos papéis fundamentais daqueles que se propõem a estudar Geometria Diferencial é discutir sob que condições os resultados obtidos para espaços Euclidianos continuam sendo verdadeiros em espaços não Euclidianos, como por exemplo, as variedades Riemannianas. É de notório conhecimento e uso por parte da comunidade matemática que em qualquer ponto de máximo para uma função, o gradiente em tal ponto é nulo e o hessiano, ou laplaciano, são não positivos. Baseado neste princípio do máximo surgiu a idéia de considerarmos uma sequência maximizante que goze destas mesmas propriedades satisfeitas por um ponto de máximo. Em 1966 H. Omori [14], em seus estudos sobre imersões de variedades em espaços Euclidianos, se propôs a estudar este tipo de problema no contexto das variedades Riemannianas. Entretanto, Omori observou que tal princípio nem sempre era válido, mesmo para o conjunto das variedades completas, ver exemplo 3.

Omori abordou este problema resumindo-o no

**Teorema A:** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana completa, conexa, com curvatura seccional  $K(X, Y)$  limitada inferiormente, i.e.,  $K(X, Y) \geq -K_0$ . Se uma função suave  $f$  sobre  $M$  possui cota superior, então para todo  $\varepsilon > 0$ , existe um ponto  $\mathbf{p} \in M$ , tal que*

$$\|\nabla f\|(\mathbf{p}) < \varepsilon, \quad \text{Hess } f(\mathbf{p})(X, X) < \varepsilon \quad \|X\| = 1 \quad e \quad \sup f - f(\mathbf{p}) < \varepsilon. \quad (1)$$

A abordagem dada por Omori não era tão simples e possuía o inconveniente de tratar apenas da forma hessiana. Em 1974, Shing-Tung Yau interessou-se pelo problema abordado por Omori simplificando e propondo este princípio do máximo para variedades com limitação sobre a curvatura de Ricci. Para este caso, Yau considerou em [19] e [4] o laplaciano, ao invés do hessiano.

Especificamente, Yau obteve o

**Teorema B:** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana completa com curvatura de Ricci limitada inferiormente, e seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ , limitada superiormente. Então existe uma sequência  $x_k \in M$  satisfazendo*

- i)  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = \sup f$ ;
- ii)  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\nabla f\|(x_k) = 0$ ;
- iii)  $\limsup_{k \rightarrow +\infty} \Delta f(x_k) \leq 0$ .

A partir de então, passou-se a chamar tal princípio do máximo como Princípio do Máximo de Omori-Yau. Diversas generalizações foram propostas durante as últimas décadas. Em [3], os pesquisadores Chen e Xin conseguiram tornar a hipótese sobre a curvatura de Ricci mais fraca, tomando uma limitação via decaimento pontual. A técnica utilizada em [3] foi basicamente a mesma empregada por Yau. Seguindo a mesma técnica Ratto, Rigoli e Setti conseguiram em [17] relaxar mais ainda as condições impostas à variedade. Ainda sob o mesmo viés Pigola, Rigoli e Setti em [16], obtiveram, a que talvez seja, a mais fraca hipótese até agora imposta para a validade do Princípio do Máximo de Omori-Yau. Seguindo os passos da técnica utilizada por Yau, tais pesquisadores mostraram que a hipótese sobre a curvatura é, num certo sentido, supérflua. Pigola, Rigoli e Setti tomaram como hipótese a existência de uma função própria que goza de certas estimativas para seu gradiente, hessiano e laplaciano fora de um compacto.

Entre aqueles que pesquisam uma caracterização para Omori-Yau, existe a suspeita que tal princípio seja válido sob condições que envolvem o crescimento de volume, ou relações entre o volume de bolas definidas na variedade. Em 1997 K. Takegoshi [18], propôs a seguinte

**Conjectura 1:** *Suponha  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana de dimensão  $m \geq 1$  que admite um ponto  $x \in M$  tal que  $\int_1^{+\infty} \frac{r}{\log \text{Vol}_x(r)} dr = +\infty$ . Então vale Omori-Yau em  $(M, g)$ .*

Neste mesmo artigo, Takegoshi se dispôs a dar uma versão mais fraca para tal conjectura. Mas Pigola, Rigoli e Setti [15], alertaram que tal versão de Takegoshi possui um equívoco em sua argumentação. Uma mudança de estratégia para a demonstração de

Omori-Yau também foi proposta por Kim e Lee em [10]. A forma modificada de demonstração possibilitou aos pesquisadores obterem o Princípio de Omori-Yau sob hipóteses bem diferentes daquelas propostas anteriormente. Segundo Kim e Lee, as hipóteses feitas nas versões anteriores propostas para o Princípio do Máximo de Omori-Yau implicam diretamente nas hipóteses feitas por eles, desde que ainda exista a hipótese sob a limitação da curvatura Ricci.

Atualmente, Fontenele e Xavier, ver [8], introduziram um refinamento conceitual para Omori-Yau. Os pesquisadores propuseram que para cada sequência maximizante existe uma outra, chamada de Boa Sombra, que permanece assintoticamente próxima e que satisfaz a tese de Omori-Yau. Buscando uma possível generalização de Omori-Yau para variedades com propriedades locais de volume, Fontenele e Xavier anunciaram a

**Conjectura 2:** *Se  $M$  é uma variedade L.V.P. e  $f \in \mathcal{C}^2$  é limitada superiormente, então qualquer sequência maximizante de  $f$  admite uma good shadow que satisfaz Omori-Yau (Laplaciano).*

Por uma variedade L.V.P. eles consideram toda variedade Riemanniana completa que satisfaz:

*Existem  $\mathbf{a} > 0$ ,  $\mathbf{b} > 1$ , tais que para qualquer  $x \in M$  e  $0 < r < \mathbf{a}$ , temos*

$$\text{Vol } B(x, r) \leq \mathbf{b} \text{Vol } B(x, \frac{r}{2}). \quad (2)$$

Fontenele e Xavier provaram em [8] tal conjectura para uma classe particular de funções.

A presente dissertação tem como objetivos descrever as principais generalizações dadas para o Princípio do Máximo de Omori-Yau, assim como demonstrar algumas aplicações desta ferramenta da Análise Geométrica. No Capítulo 1 nos dispomos a expor resultados básicos que serão utilizados ao longo dos demais capítulos. Dedicamos o Capítulo 2 para exibir tais generalizações, e também, propor algumas modificações no sentido de estender os resultados obtidos. Especificamente, nos Teoremas 2 e 5 procuramos enfraquecer as hipóteses originais. Neste mesmo capítulo enunciamos as conjecturas propostas para Omori-Yau e deixamos para o capítulo 3 a exposição de algumas de suas aplicações.

# Capítulo 1

## Referencial Teórico

Este capítulo é dedicado a introduzir os principais conceitos e resultados que serão abordados durante a parte principal deste trabalho, a saber, os capítulos 2 e 3. Pedese ao leitor leigo em Geometria das Variedades que tome conhecimento prévio acerca das definições fundamentais, tais como: variedades, espaço tangente, fibrados, aplicações entre variedades, diferenciabilidade de funções, etc. Omitiremos também uma parte inicial do curso de Geometria Riemanniana, onde se introduz os conceitos de métrica, conexão, derivada covariante, dentre outros conceitos que podem ser encontrados em qualquer bom livro de introdução à referida disciplina, ver por exemplo [6] e [11]. Os principais livros utilizados como referência são [2], [5], [6] e [20].

### 1.1 Geodésicas e Variedades Completas

Estaremos sempre denotando por  $M$  uma variedade Riemanniana conexa e munida de sua conexão Riemanniana.

**Definição 1.** *Uma curva parametrizada  $\gamma : I \rightarrow M$  é chamada de geodésica no instante  $t_0 \in I$  quando  $\frac{D}{dt} \left( \frac{d\gamma}{dt} \right) = 0$  no ponto  $t_0$ . Caso  $\gamma$  seja geodésica para todo  $t \in I$ , diremos que  $\gamma$  é uma curva geodésica, ou simplesmente, geodésica.*

Note que a definição acima é satisfeita no caso em que  $\gamma$  é uma reta de um espaço Euclidiano. Em verdade, o conceito acima introduzido irá representar de forma fidedigna a ideia intuitiva de uma reta em um espaço Euclidiano, ou seja, as geodésicas também minimizam a distância entre dois pontos. Mas isto só será provado mais adiante.

Observamos inicialmente que fazendo uso das propriedades de compatibilidade da métrica com a conexão e pela definição de geodésica iremos ter

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D}{dt} \left( \frac{d\gamma}{dt} \right), \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0.$$

Decorre portanto que  $\left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\|$  é constante. Iremos sempre supor que a norma do vetor velocidade de  $\gamma$  seja sempre não nula.

**Definição 2.** *O comprimento de arco  $s$  de uma curva parametrizada  $\gamma$ , a partir de uma origem fixada  $t_0$ , é dado por:*

$$s(t) = \int_{t_0}^t \left\| \frac{d\gamma}{d\tau} \right\| d\tau. \quad (1.1)$$

Se  $\gamma$  for geodésica, então  $s(t) = c(t - t_0)$ . Quando  $c = 1$ , a geodésica  $\gamma$  está normalizada.

No decorrer desta dissertação iremos sempre nos referir a geodésicas que estejam normalizadas. Se fixarmos condições iniciais determinaremos de modo único as geodésicas que satisfazem tais condições, mais precisamente, temos a

**Proposição 1.** *Dado  $p \in M$ , existem  $V \subset M$ , aberto contendo  $p$ , números  $\delta, \varepsilon$  positivos e uma aplicação  $\mathcal{C}^\infty$*

$$\gamma : (-\delta, \delta) \times U \rightarrow M, \quad U = \{(q, v) : q \in V, v \in T_q M \text{ e } \|v\| < \varepsilon\},$$

*tais que a curva  $t \rightarrow \gamma(t, q, v)$  com  $t \in (-\delta, \delta)$ , é a única geodésica de  $M$  que em  $t = 0$  passa pelo ponto  $q$  com velocidade  $v$ , isso para todo  $q \in V$  e para todo  $v \in T_q M$  com  $\|v\| < \varepsilon$ .*

**Demonstração:** Vide [6].

■

Exibiremos agora um lema que nos possibilita alterar a velocidade de uma geodésica apenas modificando seu intervalo de definição.

**Lema 1.** *Se  $\gamma(t, q, v)$  é uma geodésica definida no intervalo  $(-\delta, \delta)$ , então a geodésica  $\gamma(t, q, av)$ ,  $a > 0$ , está definida no intervalo  $(\frac{-\delta}{a}, \frac{\delta}{a})$  e  $\gamma(t, q, av) = \gamma(at, q, v)$ .*

**Demonstração:** Vide [6].

■

**Definição 3.** Dado  $p \in M$  e  $U \subset TM$ , onde  $U$  é um aberto como o da proposição 1. Definimos a aplicação exponencial em  $U$  como sendo a aplicação  $\exp : U \rightarrow M$  tal que

$$\exp(q, v) = \gamma(1, q, v) = \gamma\left(\|v\|, q, \frac{v}{\|v\|}\right), \quad (q, v) \in U.$$

Observamos que a aplicação  $\exp$  é uma aplicação diferenciável. Consideremos a restrição de  $\exp$  ao plano tangente, isto é,  $\exp_q : B_\varepsilon(0) \subset T_qM \rightarrow M$ , dada por  $\exp_q(v) = \exp(q, v)$ , onde  $B_\varepsilon(0) = \{v \in T_qM; \|v\| < \varepsilon\}$ . Provaremos que a aplicação  $\exp$  parametriza localmente a variedade  $M$  no sentido da

**Proposição 2.** Dado  $q \in M$ , existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\exp_q : B_\varepsilon(0) \subset T_qM \rightarrow M$  é um difeomorfismo sobre a imagem.

**Demonstração:** Defina a curva  $\beta(t) = tv$  e perceba que  $\beta(0) = 0$  e  $\beta'(0) = v$ . Daí

$$\begin{aligned} d(\exp_q)_0(v) &= \frac{d}{dt}(\exp_q(tv))\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(\gamma(1, q, tv))\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(\gamma(t, q, v))\Big|_{t=0} \\ &= v. \end{aligned}$$

Logo  $d(\exp_q)_0 = \text{Id} : T_qM \rightarrow T_qM$ , e o resultado segue pelo Teorema da Aplicação Inversa. ■

Se  $V \subset T_pM$  é uma vizinhança da origem tal que  $\exp_p : V \rightarrow U$  é um difeomorfismo, denominaremos  $\exp_p(V) = U$  de Vizinhança Normal de  $p$ . Se  $B_\varepsilon(0) \subset T_pM$  é tal que  $\overline{B_\varepsilon(0)} \subset V$ , dizemos que  $\exp_p(B_\varepsilon(0))$  é uma Bola Normal, ou Bola Geodésica, de centro  $p$  e raio  $\varepsilon$ . Denominaremos de Esfera Geodésica a fronteira de  $B_\varepsilon(0)$ , a qual denotaremos por  $S_\varepsilon(p)$ . Note que  $S_\varepsilon(p)$  é uma hipersuperfície em  $M$  ortogonal às geodésicas que partem de  $p$ . Tais geodésicas são chamadas de Geodésicas Radiais.

**Definição 4.** Um segmento de geodésica  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  é minimizante quando  $l(\gamma) \leq l(c)$ , onde  $l(\cdot)$  indica o comprimento da curva e  $c$  é qualquer curva diferenciável por partes ligando  $\gamma(a)$  a  $\gamma(b)$ .

A proposição a seguir possui um caráter local, mas sintetiza a ideia de que localmente as geodésicas minimizam o comprimento do arco que une dois pontos.

**Proposição 3.** *Sejam  $p \in M$ ,  $U$  uma vizinhança normal de  $p$  e  $B \subset U$  uma bola normal de centro  $p$ . Dada  $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$  um segmento de geodésica com  $\gamma(0) = p$ . Se  $c : [0, 1] \rightarrow M$  é qualquer curva diferenciável por partes ligando  $\gamma(0)$  a  $\gamma(1)$ , então  $l(\gamma) \leq l(c)$  e  $l(\gamma) = l(c)$  implica em  $\gamma([0, 1]) = c([0, 1])$ .*

**Demonstração:** Vide [6].

■

A recíproca deste resultado é válida para curvas com parâmetro proporcional ao comprimento de arco no sentido de que, se uma curva diferenciável por partes ligando dois pontos tem comprimento menor ou igual ao comprimento de qualquer outra curva diferenciável por partes ligando os mesmos pontos, então tal curva é geodésica. Este resultado segue como corolário da

**Proposição 4.** *Dado  $p \in M$  existem  $\delta > 0$  e uma vizinhança  $W$  de  $p$ , tais que para todo  $q \in W$  a aplicação  $\exp_q$  é um difeomorfismo entre  $B_\delta(0) \subset T_qM$  e  $\exp_q(B_\delta(0)) \supset W$ , ou seja,  $W$  é uma vizinhança normal de cada um de seus pontos.*

**Demonstração:** Vide [6].

■

Denominamos a vizinhança  $W$  definida na proposição acima de Vizinhança Totalmente Normal de  $p \in M$ . Um dos conceitos relacionados ao estudo das geodésicas é o de completude de uma variedade Riemanniana, ao qual passamos a discutir.

**Definição 5.** *Uma variedade Riemanniana  $M$  é dita geodesicamente completa, ou completa, se para qualquer  $p \in M$ , a aplicação exponencial restrita ao plano tangente,  $\exp_p$ , está definida para qualquer  $v \in T_pM$ , ou seja, as geodésicas radiais  $\gamma(t)$  estão definidas para todos os valores de  $t \in \mathbb{R}$ .*

Interligado ao conceito de completude está a noção de distância entre dois pontos de uma variedade Riemanniana. Tal relação será explicitada na Proposição 5. Antes porém, vejamos a definição de distância.

**Definição 6.** *Dados  $p, q \in M$ , definimos a distância entre  $p$  e  $q$ ,  $d(p, q)$ , como sendo o ínfimo dos comprimentos de todas as curvas diferenciáveis por partes que ligam  $p$  a  $q$ .*

Um fato curioso, mas não tão difícil de se provar, é que com esta definição de distância, a variedade  $M$  é um espaço métrico e que a topologia induzida por esta métrica coincide

com a topologia da variedade  $M$ . Verifica-se também que se fixarmos um ponto e tomarmos a função distância a este ponto, teremos que tal função é contínua na topologia induzida por  $d$ , e portanto, é contínua em  $M$ .

O conteúdo da proposição abaixo é o que enaltece o estudo das variedades completas e salienta o papel das geodésicas como minimizantes da distância entre dois pontos.

**Proposição 5** (Hopf-Rinow). *Dados  $M$  uma variedade Riemanniana e  $p \in M$ . Se  $M$  for geodesicamente completa, então para todo ponto  $q \in M$  existe uma geodésica  $\gamma$  que liga  $p$  a  $q$  com  $l(\gamma) = d(p, q)$ .*

**Demonstração:** Vide [6].

■

Em vista desta proposição,  $M$  é uma variedade completa como espaço métrico se, e somente se,  $M$  é geodesicamente completa (ver [6]).

## 1.2 Gradiente, Hessiano e Laplaciano

Nesta seção introduziremos os conceitos de campo gradiente, hessiano e laplaciano de uma função a valores reais. Tais conceitos terão suma importância durante o decorrer deste trabalho e serão discutidos com detalhes.

**Definição 7.** *Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave definida em uma variedade Riemanniana. Definimos o campo gradiente de  $f$ , denotado por  $\nabla f$ , como sendo o campo vetorial que goza da seguinte relação:*

$$\langle \nabla f(p), v \rangle = df_p(v), \quad p \in M, \quad v \in T_p M.$$

Se extendermos  $v$  a um campo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , obtemos  $\langle \nabla f(p), X \rangle = X(f)(p)$ . O campo gradiente em variedades é uma generalização do campo gradiente em espaços Euclidianos. A proposição abaixo nos dá algumas propriedades que este campo satisfaz.

**Proposição 6.** *Dadas  $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$  funções diferenciáveis, valem:*

*i.*  $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g;$

*ii.*  $\nabla(f \cdot g) = g\nabla f + f\nabla g.$

**Demonstração:** Segue diretamente da Definição 7 e da regra do produto  $d(f \cdot g)_p(v) = g \cdot df_p(v) + f \cdot dg_p(v)$ .

■

Se tomarmos uma função  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e compormos com a função  $f$  da proposição acima, obteremos  $\nabla(\psi \circ f) = \psi'(f)\nabla f$ . Esta igualdade será muito utilizada durante as demonstrações dos principais teoremas desta dissertação. Um outro conceito importante é o de hessiano de uma função.

**Definição 8.** *Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. O Hessiano de  $f$  é, para cada ponto  $p \in M$ , o operador linear  $\text{Hess } f_p : T_p M \rightarrow T_p M$  definido do seguinte modo:*

$$\text{Hess } f_p(v) = (\nabla_v \nabla f)(p).$$

Se  $X \in \mathfrak{X}(M)$  for uma extensão de  $v$  numa vizinhança de  $p$ , então temos  $(\text{Hess } f)_p(X) = (\nabla_X \nabla f)(p)$ . Um outro modo de definir o hessiano de uma função é utilizando a linguagem de tensores em uma variedade. Sob este viés o hessiano aparece como uma forma bilinear definida do seguinte modo:

$$\text{Hess } f(X, Y) = \langle \text{Hess } f(X), Y \rangle. \quad (1.2)$$

É fácil ver que tal forma bilinear é simétrica e que o operador hessiano é auto adjunto. Agora se substituirmos as definições 7 e 8 em (1.2), temos

$$\begin{aligned} \text{Hess } f(X, Y) &= \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle \\ &= X \langle \nabla f, Y \rangle - \langle \nabla f, \nabla_X Y \rangle \\ &= X(Y(f)) - (\nabla_X Y)f. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Interligado ao conceito de hessiano está o de divergência de um campo de vetores. Tal conceito permite introduzir de forma simples e conveniente a definição de laplaciano de uma função numa variedade. Provaremos a seguir que esta forma equivale à maneira tradicional de definir o laplaciano através do hessiano.

**Definição 9.** *Dados  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , diferenciável, onde  $M$  é uma variedade Riemanniana. Definimos a divergência do campo  $X$  como sendo a função  $\text{div } X(p) : M \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$\text{div } X(p) = \text{tr}[Y(p) \rightarrow \nabla_Y X(p)], \quad p \in M,$$

e o laplaciano de  $f$  pela função  $\Delta f : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f).$$

Fixada uma base ortornormal  $\{e_1, \dots, e_m\}$ , sob tais definições temos que

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) = \langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_i \rangle_p = \langle (\operatorname{Hess} f)_p(e_i), e_i \rangle = \operatorname{tr}(\operatorname{Hess} f)_p. \quad (1.4)$$

O divergente e o laplaciano gozam das seguintes propriedades, análogas às apresentadas em espaços Euclidianos.

**Proposição 7.** *Se  $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável e  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  valem:*

1.  $\operatorname{div}(X + Y) = \operatorname{div} X + \operatorname{div} Y$ ,
2.  $\operatorname{div}(f \cdot X) = f \cdot \operatorname{div} X + \langle \nabla f, X \rangle$ ,
3.  $\Delta(f + g) = \Delta f + \Delta g$ ,
4.  $\Delta(f \cdot g) = f \cdot \Delta g + g \cdot \Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle$ .

**Demonstração:** Vide [Dc].

■

Nos debruçaremos agora em descrever tais conceitos em termos locais através de um referencial. Para tanto, começamos com o seguinte resultado.

**Proposição 8.** *Dados  $M$  uma variedade Riemanniana  $n$ -dimensional e  $p \in M$ , então existem uma vizinhança  $U \subset M$  de  $p$  e um conjunto  $\{E_1, \dots, E_n\} \subset \mathfrak{X}(U)$  ortonormal em cada ponto de  $U$ , que no ponto  $p$  satisfaz  $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$ .*

**Demonstração:** Parametrize localmente a  $M$  através da exponencial e utilize o transporte paralelo.

■

Uma base de vetores descrita na Proposição 8 é denominada Referencial Geodésico em  $p$ . Em vista desta proposição, podemos determinar uma expressão para o gradiente, divergente e laplaciano como segue.

**Proposição 9.** *Seja  $\{E_1, \dots, E_n\} \subset \mathfrak{X}(U)$  um referencial geodésico em  $p \in M$ , então valem:*

i.  $\nabla f(p) = \sum_{i=1}^n (E_i(f))E_i(p)$

ii.  $\operatorname{div}X(p) = \sum_{i=1}^n E_i(f_i)(p),$

iii.  $\Delta f = E_i(E_i f),$

onde  $X = \sum_{i=1}^n f_i E_i$  e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}.$

**Demonstração:** Segue diretamente da Proposição 8 e das Definições 7 e 9. ■

**Exemplo 1.** *Gradiente da função distância.*

Fixamos um ponto  $p \in M$  e consideremos a função distância ao ponto  $p$ ,  $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}.$  Dado um ponto  $q \neq p$  em  $M$ , tomemos  $\gamma : [0, t] \rightarrow M$  a geodésica normalizada e minimizante, tal que  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma(t_0) = q.$  Como  $\rho(\gamma(t_0)) = t_0,$  seja  $S_{t_0}$  a hiperfície dada por  $\rho^{-1}(t_0).$

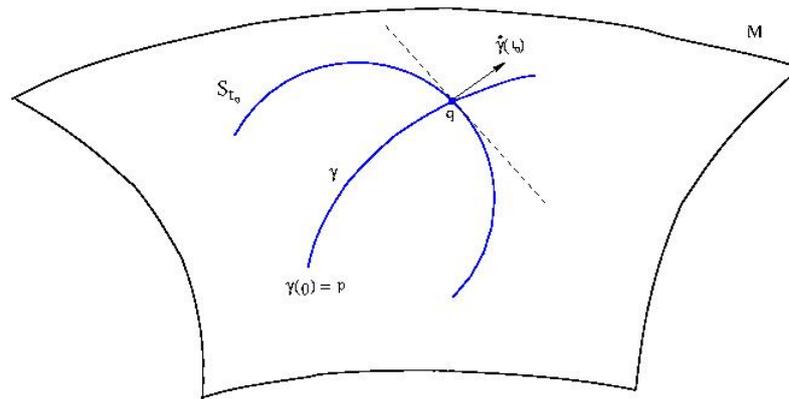


Figura 1.1: Função Distância

Sabemos que  $\nabla\rho(t_0)$  é um vetor normal a  $S_{t_0}$  e portanto tem a mesma direção de  $\dot{\gamma}(t_0).$  Como

$$\langle \nabla\rho(t_0), \dot{\gamma}(t_0) \rangle = \frac{d}{dt}(\rho \circ \gamma)(t) \Big|_{t=t_0} = \frac{d}{dt}(t) \Big|_{t=t_0} = 1.$$

Logo,

$$\|\nabla\rho(t_0)\| = \|\nabla\rho(t_0)\| \cdot \|\dot{\gamma}(t_0)\| = \langle \nabla\rho(t_0), \dot{\gamma}(t_0) \rangle = 1.$$

Assim,  $\nabla\rho = \dot{\gamma}$  e  $\|\nabla\rho\| = 1.$

### 1.3 Curvaturas e a Segunda Forma Fundamental

**Definição 10.** Dada  $M$  uma variedade Riemanniana, a correspondência que associa a cada par  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  a aplicação  $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad \forall Z \in \mathfrak{X}(M),$$

onde  $\nabla$  é a conexão Riemanniana de  $M$ , chama-se a curvatura de  $M$ .

A curvatura de uma variedade Riemanniana é o objeto geométrico que mede o quanto esta deixa de ser euclidiana. Suas propriedades lineares são as seguintes:

1.  $R$  é bilinear em  $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$ , isto é,

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1)$$

e

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2),$$

2.  $R(X, Y)$  é linear em  $\mathfrak{X}(M)$ , isto é,

$$R(X, Y)(fZ + W) = fR(X, Y)Z + R(X, Y)W.$$

Isto para quaisquer  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$  e quaisquer  $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ .

Trataremos agora de definir alguns dos principais conceitos de curvatura que aparecem em Geometria Diferencial. O primeiro, e talvez mais geométrico, é o de curvatura seccional o qual foi introduzido inicialmente por Riemann.

**Definição 11.** Sejam  $p \in M$  e  $\sigma \subset T_p M$  um subespaço bi-dimensional, denominamos curvatura seccional de  $\sigma$  em  $p$ , o número real

$$K(\sigma) = \frac{\langle R(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2},$$

onde  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$  é uma base qualquer de  $\sigma$ .

A expressão acima independe da escolha da base tomada para  $\sigma$ . Além disso, prova-se que o conhecimento da curvatura seccional em todos os subespaços de dimensão dois de  $T_p M$  determina unicamente a curvatura  $R$  da variedade. A partir da curvatura seccional define-se outras curvaturas, tais como a curvatura de Ricci e a curvatura escalar. Ambas são médias obtidas da curvatura seccional. Vejamos abaixo as definições.

**Definição 12.** *Dados  $M$  uma variedade Riemanniana,  $p \in M$ ,  $x$  um vetor unitário em  $T_p M$  e  $\{x_1, \dots, x_j = x, \dots, x_n\}$  uma base ortonormal de  $T_p M$ . A expressão*

$$\text{Ric}_p(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i \neq j}^n \langle R(x, x_i)x, z_i \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

*damos o nome de curvatura Ricci de  $M$  na direção  $x$  no ponto  $p$ . E para a expressão*

$$K(p) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \text{Ric}_p(x_j) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{ij} \langle R(x_i, x_j)x_i, x_j \rangle, \quad j = 1, \dots, n,$$

*chamamos de curvatura escalar de  $M$  em  $p$ .*

Novamente, tais conceitos independem da escolha das bases ortonormais. As curvaturas escalar e de Ricci são objetos geométricos definidos intrinsecamente numa variedade (ver [6]). Neste trabalho estaremos particularmente interessados em relacionar as curvaturas de duas variedades Riemannianas e daí transportar resultados geométricos entre elas. Surge naturalmente o problema de desenvolver uma teoria que seja capaz de interligar os entes Riemannianos, métrica e conexão, de duas variedades dadas. Para tanto, se faz necessário o estudo das imersões isométrica. No que se segue estaremos considerando duas variedades Riemannianas  $M$  e  $\overline{M}$ , munidas de suas conexões  $\nabla$  e  $\overline{\nabla}$ , respectivamente, compatíveis com as métricas, as quais são relacionadas pela expressão que caracteriza uma imersão isométrica:

$$\langle u, v \rangle_p := \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)},$$

onde  $f : M \rightarrow \overline{M}$  é uma imersão.

Assim como na literatura contemporânea, identificaremos os abertos de  $M$  com os abertos de  $\overline{M}$  e os vetores  $u \in T_p M$  com os correspondentes  $df_p(u) \in T_p \overline{M}$ . Deste modo, nos provemos da álgebra linear para a partir da métrica de  $T_p \overline{M}$  decompor o espaço  $T_p \overline{M}$  como soma direta de  $T_p M$  com seu complemento ortogonal em  $T_p \overline{M}$ , isto é,

$$T_p \overline{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp.$$

A decomposição acima é diferenciável no sentido de que as projeções sobre  $T_p M$  e  $(T_p M)^\perp$  são diferenciáveis. Se tomarmos  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  e considerarmos as suas respectivas extensões locais  $\overline{X}, \overline{Y} \in \overline{M}$ , temos que

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^\top,$$

é a conexão de Levi-Civita de  $M$ .

**Definição 13.** *Sejam  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  definidos localmente, então*

$$\alpha(X, Y) = \overline{\nabla}_X \overline{Y} - \nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)^\perp$$

*é chamada a Segunda Forma Fundamental.*

Temos também o caso em que a aplicação  $f : M \rightarrow \overline{M}$  não é uma imersão. Neste caso, a Segunda Forma Fundamental de  $f$  é dada por

$$\alpha_f(X, Y) = \nabla_X f_* Y - f_* \nabla_X Y. \quad (1.5)$$

Observamos que  $\alpha$  independe da escolha das extensões  $\overline{X}, \overline{Y}$  e que  $\alpha$  é uma forma bilinear, simétrica, que depende apenas dos valores de  $X$  e  $Y$  em  $p$ . Na notação acima  $\mathfrak{X}(\overline{M})^\perp$  denota o conjunto formado pelos campos de vetores normais. Assim como no caso do gradiente, é de nosso interesse estudar o hessiano de uma função sobre  $M$  composta com uma outra função. Em verdade, provaremos o seguinte:

$$\text{Hess}^M f_p(X, Y) = \text{Hess}^{\overline{M}} f_{\varphi(p)}(X, Y) + \langle \nabla^{\overline{M}} f(\varphi(p)), \alpha(X, Y) \rangle, \quad (1.6)$$

com  $f : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$  suave e  $\varphi : M \rightarrow \overline{M}$  sendo uma imersão. Com efeito, temos:

$$\begin{aligned} \text{Hess}^{\overline{M}} f_{\varphi(p)}(X, Y) &= XY(f) - \overline{\nabla}_X Y(f) \\ &= X \langle \nabla^{\overline{M}} f, Y \rangle - \langle \overline{\nabla}_X Y, \nabla^{\overline{M}} f \rangle \\ &= X \langle \nabla^M f, Y \rangle - \langle \nabla_X Y + \alpha(X, Y), \nabla^{\overline{M}} f \rangle \\ &= X \langle \nabla^M f, Y \rangle - \langle \nabla_X Y, \nabla^{\overline{M}} f \rangle - \langle \alpha(X, Y), \nabla^{\overline{M}} f \rangle \\ &= \text{Hess}^M f_p(X, Y) - \langle \alpha(X, Y), \nabla^{\overline{M}} f \rangle. \end{aligned}$$

Logo, vale o enunciado em (1.6).

Vejamos, também como aplicação do conceito da segunda forma fundamental, um lema que relaciona tal conceito com a forma hessiana de uma função.

**Lema 2** (Fontenele-Xavier [8]). *Dada uma função suave  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$  e o conjunto de nível  $S$  que passa por um ponto  $p$ , com  $\nabla g(p) \neq 0$ , temos*

$$\text{Hess } g(w, w) = -\langle \sigma(w, w), \nabla g(p) \rangle, \quad w \in T_p S, \quad (1.7)$$

onde  $\sigma$  denota a Segunda Forma Fundamental de  $S$ .

**Demonstração:** De fato, denotando por  $\nabla^0$  a conexão sobre  $S$  e extendendo  $w$  a um campo local sobre  $M$  que é tangente a  $S$ , teremos

$$\begin{aligned} 0 &= w\langle \nabla g, w \rangle = \langle \nabla_w \nabla g, w \rangle + \langle \nabla g, \nabla_w w \rangle \\ &= \text{Hess } g(w, w) + \langle \nabla g, \nabla_w w \rangle \end{aligned}$$

e pela definição da segunda forma fundamental

$$\langle \nabla g, \nabla_w w \rangle = \langle \nabla g, \nabla_w^0 w + \sigma(w, w) \rangle = \langle \nabla g, \sigma(w, w) \rangle,$$

donde segue o resultado. ■

Se tomarmos  $p \in M$ ,  $x \in T_p M$  e  $\xi \in (T_p M)^\perp$ , e considerarmos as suas respectivas extensões locais  $\bar{X}$  e  $\bar{\Xi}$  podemos definir o operador  $S_\xi(x) = -(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{\Xi})^\top$ , com  $(*)^\top$  indicando a parte tangente, ou seja, a projeção sobre  $T_p M$ .

**Proposição 10.** *Com as notações introduzidas acima o operador  $S_\xi : T_p M \rightarrow T_p M$  satisfaz*

$$\langle S_\xi(x), Y \rangle = \langle \alpha(X, Y), \Xi \rangle.$$

Ademais, o operador  $S_\xi$  é auto adjunto.

**Demonstração:** Vide [6]. ■

Diante dessas considerações estamos aptos a descrever uma nova noção de curvatura, o vetor curvatura média  $H$ .

**Definição 14.** *Dada uma imersão  $f : M \rightarrow \bar{M}$ , para cada  $p \in M$  definimos o vetor curvatura média de  $f$  em  $p$ , como sendo*

$$H(p) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \alpha(X_j, X_j), \tag{1.8}$$

onde  $\alpha$  é a segunda forma fundamental de  $f$  e  $\{X_1, \dots, X_n\}$  é uma referencial ortonormal local.

O vetor curvatura média  $H$  é bem definido pois independe do referencial ortonormal tomado. Através da definição acima podemos conceituar o que seria uma imersão mínima de modo muito simples.

**Definição 15.** *Uma imersão  $f : M \rightarrow \overline{M}$  é mínima quando  $H(p) = 0$ , para todo  $p \in M$ .*

Para o que se segue, se faz necessário comentarmos um pouco sobre a parte normal de  $\overline{\nabla}_X \overline{\Xi}$ . Como de praxe, usamos a notação  $\nabla_X^\perp \xi = (\overline{\nabla}_X \overline{\Xi})^N$  para denotar tal parte normal. Segue diretamente disto que

$$\nabla_X^\perp \xi = (\overline{\nabla}_X \overline{\Xi})^N = \overline{\nabla}_X \overline{\Xi} - (\overline{\nabla}_X \overline{\Xi})^T = \overline{\nabla}_X \overline{\Xi} + S_\xi(X). \quad (1.9)$$

Observamos que  $\nabla^\perp$  é realmente a conexão sobre  $\mathfrak{X}(M)^\perp$ . Generalizando o conceito de imersão mínima está o de vetor curvatura média paralelo, que passamos a descrever.

**Definição 16.** *Uma imersão isométrica  $f : M \rightarrow \overline{M}$  possui vetor curvatura média  $H$  paralelo, quando:*

$$\nabla_X^\perp H = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

**Obs 1.** *Se uma imersão isométrica possui vetor curvatura média  $H$  paralelo, então  $\|H\|$  é constante.*

De fato, segue da definição 16 que para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$

$$X(\|H\|^2) = X\langle H, H \rangle = 2\langle \overline{\nabla}_X H, H \rangle = 2\langle \nabla_X^\perp H, H \rangle = 0.$$

A equação fundamental das imersões isométricas que faremos bom uso durante a prova de alguns teoremas é conhecida como Equação de Gauss. Com ela podemos obter informações entre as curvaturas das duas variedades, da segunda forma fundamental e também do vetor curvatura média. No teorema abaixo estaremos nos referindo a uma imersão isométrica  $f : M \rightarrow \overline{M}$  entre duas variedades Riemannianas e à  $\alpha$  como sua Segunda Forma Fundamental.

**Proposição 11.** *Dados  $X, Y, Z$  e  $W$  campos de vetores, vale a equação de Gauss:*

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle \overline{R}(X, Y)Z, W \rangle + \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, Z) \rangle - \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W) \rangle, \quad (1.10)$$

com  $R$  e  $\overline{R}$  representando as curvaturas de  $M$  e  $\overline{M}$ , respectivamente. Em particular, se tais campos forem ortonormais, teremos:

$$K(X, Y) = \overline{K}(X, Y) + \langle \alpha(X, X), \alpha(Y, Y) \rangle - \|\alpha(X, Y)\|^2. \quad (1.11)$$

**Demonstração:** Começamos a demonstração lembrando que  $\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y)$ . Segue por definição que

$$\begin{aligned}
 \bar{R}(X, Y)Z &= \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z + \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z \\
 &= \bar{\nabla}_Y [\nabla_X Z + \alpha(X, Z)] - \bar{\nabla}_X [\nabla_Y Z + \alpha(Y, Z)] + \nabla_{[X, Y]} Z + \alpha([X, Y], Z) \\
 &= \nabla_Y \nabla_X Z + \alpha(Y, \nabla_X Z) + \bar{\nabla}_Y \alpha(X, Z) - [\nabla_X \nabla_Y Z + \alpha(X, \nabla_Y Z) - \\
 &\quad - \bar{\nabla}_X \alpha(Y, Z) + \nabla_{[X, Y]} Z + \alpha([X, Y], Z) \\
 &= R(X, Y)Z + \alpha(Y, \nabla_X Z) + \nabla_Y^\perp \alpha(X, Z) - S_{\alpha(X, Z)}(Y) + S_{\alpha(Y, Z)}(X) + \\
 &\quad + \nabla_X^\perp \alpha(Y, Z) + \alpha([X, Y], Z) - \alpha(X, \nabla_Y Z).
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{R}(X, Y)Z, T \rangle &= \langle R(X, Y)Z, T \rangle - \langle S_{\alpha(X, Z)}(Y), T \rangle + \langle S_{\alpha(Y, Z)}(X), T \rangle \\
 &= \langle R(X, Y)Z, T \rangle - \langle \alpha(Y, T), \alpha(X, Z) \rangle + \langle \alpha(X, T), \alpha(Y, Z) \rangle.
 \end{aligned}$$

Donde segue nosso resultado. ■

Fora do contexto das imersões isométricas, mas não tão distante, está o problema variacional de minimizar a energia de uma função. Como não é nosso foco desenvolver tal teoria em sua íntegra, iremos apenas introduzir alguns conceitos básicos que farão jus à sua exposição quando formos trabalhar as aplicações do princípio do máximo.

**Definição 17.** *A densidade de energia de uma aplicação  $f : M \rightarrow N$ , onde  $M$  e  $N$  são variedades Riemannianas, é a função suave  $e(f) : M \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que*

$$e(f) = \frac{1}{2} \|df\|^2.$$

Através desta definição, e caso  $e(f)$  seja Lebesgue integrável, podemos falar sobre a energia de uma aplicação,  $E(f)$ , que nada mais é que a integral da densidade de energia de  $f$  sobre  $M$ , isto é,

$$E(f) = \int_M e(f) \, dM. \tag{1.12}$$

**Definição 18.** *Definimos o campo de tensão de uma aplicação  $f : M \rightarrow N$ ,  $\tau(f)$  como sendo o traço da Segunda Forma Fundamental de  $f$ . Dizemos também que a aplicação é harmônica se  $\tau(f) = 0$  em  $M$ .*

Observe que a definição de aplicação harmônica dada acima é uma generalização do conceito clássico no qual uma aplicação  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é harmônica quando  $\Delta(f) \equiv 0$ . De fato, teremos

$$\begin{aligned} \tau(f) &= (\nabla_{e_i} f_* e_i) - f_*(\nabla_{e_i} e_i) \\ &= e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i)(f) \\ &= \Delta f. \end{aligned}$$

As Definições 17 e 18 estão relacionadas. De fato, as aplicações harmônicas podem ser caracterizadas como os pontos críticos do problema variacional associado à minimização do funcional energia vinculado a qualquer variação própria de  $f$ . Mas esta é outra história e não iremos nos ater a ela.

A fim de expormos um importante resultado devido a Ruh-Vilms em sua forma geral, iremos introduzir a seguinte

**Definição 19** (A Aplicação de Gauss Generalizada). *Dada  $\varphi : M^m \rightarrow N^n$  uma imersão entre duas variedades Riemannianas, com  $n > m$ . Definimos a Aplicação de Gauss Generalizada,  $y : M \rightarrow G_{m,n-m}$  por*

$$y(p) = T_p M \subset T_{\varphi(p)} N^\perp,$$

onde  $G_{m,n-m}(N^n)$  é a variedade de Grassmann dos subespaços de dimensão  $n - m$ .

Para mais informações sobre variedades de Grassman, remetemos o leitor a [2]. Finalizamos esta seção com seu resultado principal.

**Proposição 12** (Ruh-Vilms). *Seja  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma imersão isométrica com aplicação de Gauss Generalizada  $y : M \rightarrow G_m(\mathbb{R}^n)$ . Então  $y$  é harmônica se, e somente se, o vetor curvatura média de  $\varphi$  for paralelo.*

## 1.4 Campos de Jacobi e o *Cut Locus*

O instrumento fundamental para que haja uma conexão suave entre os conceitos até agora apresentados de curvatura e geodésica é, sem dúvida, os campos de Jacobi. Com base nestes campos podemos interpretar a curvatura seccional,  $K(\sigma)$ , sob o viés da velocidade a qual as geodésicas radiais e tangentes a  $\sigma$  se afastam de  $\sigma$ . Os campos de

Jacobi são obtidos através de uma equação diferencial que é natural quando se estuda a aplicação exponencial.

**Definição 20.** Dada  $\gamma : [0, \mathbf{a}] \rightarrow M$  uma geodésica. Dizemos que um campo de vetores  $J$ , suave ao longo de  $\gamma$ , é um campo de Jacobi quando ele satisfaz a equação de Jacobi:

$$\frac{D^2}{dt}J + R(\dot{\gamma}, J)\dot{\gamma} = 0, \quad (1.13)$$

em  $[0, \mathbf{a}]$ .

Veja que sendo a equação de Jacobi uma equação de segunda ordem, podemos transformá-la em um sistema linear de primeira ordem equivalente, e assim, concluir que um campo de Jacobi é unicamente determinado pelas condições de valor inicial  $J(0)$  e  $\frac{DJ}{dt}(0)$ .

**Definição 21.** Dada  $\gamma : [0, \mathbf{a}] \rightarrow M$  uma geodésica. O ponto  $\gamma(t_0)$  é conjugado de  $\gamma(0)$ , ao longo de  $\gamma$ ,  $t_0 \in (0, \mathbf{a}]$ , se existe um campo de Jacobi  $J$  ao longo de  $\gamma$ , não identicamente nulo, que satisfaz  $J(0) = 0 = J(t_0)$ .

Apresentaremos a seguir algumas propriedades básicas de campos de Jacobi que nos serão úteis no decorrer do texto.

**Proposição 13.** Se  $J$  é um campo de Jacobi ao longo da geodésica  $\gamma : [0, \mathbf{a}] \rightarrow M$ , então:

$$\langle J(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = \langle J'(0), \dot{\gamma}(0) \rangle t + \langle J(0), \dot{\gamma}(0) \rangle, \quad t \in [0, \mathbf{a}].$$

Em particular se  $J(0) = J(\mathbf{a})$ , então  $\langle J, \dot{\gamma}(t) \rangle \equiv 0$ .

**Demonstração:** Vide [6].

■

**Proposição 14.** Dados  $\gamma : [0, \mathbf{a}] \rightarrow M$  uma geodésica,  $V_1 \in T_{\gamma(0)}M$  e  $V_2 \in T_{\gamma(\mathbf{a})}M$ . Então existe um único campo de Jacobi  $J$  ao longo de  $\gamma$ , com  $J(0) = V_1$  e  $J(\mathbf{a}) = V_2$ , sempre que  $\gamma(\mathbf{a})$  não for conjugado de  $\gamma(0)$ .

**Demonstração:** Vide [6].

■

Ainda sob influência da definição 22, consideremos numa variedade Riemanniana completa a geodésica  $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$  normalizada com  $\gamma(0) = \mathbf{p} \in M$ . Vimos na Seção 1.1 que para valores suficientemente pequenos de  $t > 0$  a geodésica  $\gamma$  é minimizante, ou seja,

$d(\gamma(0), \gamma(t)) = t$ . Contrapositivamente, se  $\gamma([0, t_1])$  não minimiza a distância, então o mesmo se dá para todo  $t > t_1$ . Dessa forma, utilizando a continuidade da função distância podemos concluir que o conjunto dos números que satisfazem a equação  $d(\gamma(0), \gamma(t)) = t$  tem a forma  $[0, t_0]$  ou  $[0, +\infty)$ . Denominamos de ponto mínimo de  $p$  ao longo de  $\gamma$  ao ponto  $\gamma(t_0)$ , onde  $t_0$  é como no primeiro caso. No segundo caso dizemos que não existe um ponto mínimo. Com base nesta discussão temos a seguinte

**Definição 22.** *O lugar geométrico dos pontos mínimos de  $p$ , ou simplesmente o Cut Locus de  $p$ , é a união dos pontos mínimos de  $p$  ao longo de todas as geodésicas que partem de  $p$ .*

O Cut Locus de  $p$  é por vezes denotado por  $C_M(p)$ . Tal conceito foi introduzido por H. Poincaré no início do século XX. Dentre outras utilidades, o conhecimento do Cut Locus é utilizado para determinar os pontos onde a função distância deixa de ser diferenciável. É de particular interesse para nosso trabalho a propriedade fundamental do Cut Locus.

**Proposição 15.** *Seja  $\gamma(t_0)$  um ponto mínimo de  $p = \gamma(0) \in M$  ao longo da geodésica  $\gamma$ . Então:*

- a) *ou  $\gamma(t_0)$  é o primeiro ponto conjugado de  $\gamma(0)$  ao longo de  $\gamma$ ,*
- b) *ou existe uma geodésica  $\sigma \neq \gamma$  ligando  $p$  a  $\gamma(t_0)$  tal que  $l(\sigma) = l(\gamma)$ , onde  $l$  representa o comprimento.*

*Reciprocamente, se (a) ou (b) se verifica, então existe  $\bar{t} \in (0, t_0]$  tal que  $\gamma(\bar{t})$  é o ponto mínimo de  $p$  ao longo de  $\gamma$ .*

**Demonstração:** Vide [6].

■

## 1.5 Teoremas de comparação de Hessiano e Laplaciano

Começamos esta seção introduzindo uma notação que se fará presente durante as demonstrações dos principais teoremas da teoria de comparação de hessiano e laplaciano. Denotando por  $M$  nossa variedade Riemanniana e por  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  uma geodésica em

$M$ , tomemos  $V$  um campo de vetores diferenciável por partes ao longo de  $\gamma$ . Deste modo, denotaremos para todo  $t_0 \in [0, a]$

$$I_{t_0}(V, V) = \int_0^{t_0} [\langle V', V' \rangle - \langle R(\dot{\gamma}, V)\dot{\gamma}, V \rangle] dt. \quad (1.14)$$

Suponhamos que  $\gamma(t)$  não seja um ponto conjugado a  $\gamma(0)$ , para qualquer valor de  $t \in (0, t_0]$ . O lema que anunciaremos a seguir é conhecido na literatura como Lema do Índice e terá papel crucial neste trabalho. Ele afirma que considerando campos de vetores diferenciáveis por partes com valores comuns nos instantes  $t = 0$  e  $t = t_0$ , os campos de Jacobi minimizam a expressão 1.14. Explicitamente temos o seguinte

**Lema 3.** *Dada  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  uma geodésica que não possui pontos conjugados a  $\gamma(0)$  em  $(0, a]$ . Ao longo de  $\gamma$ , tomemos um campo de Jacobi  $J$ , com  $\langle J, \dot{\gamma} \rangle = 0$  e um campo de vetores  $V$  diferenciável por partes, tal que  $\langle V, \dot{\gamma} \rangle = 0$ . Nestas condições, se  $J(0) = V(0) = 0$  e  $J(t_0) = V(t_0)$ , para  $t_0 \in (0, a]$ , então*

$$I_{t_0}(J, J) \leq I_{t_0}(V, V)$$

e vale a igualdade se, e somente se,  $V(t) = J(t)$  para todo  $t \in [0, t_0]$ .

Para uma demonstração do lema acima, ver [6]. Já vimos no Exemplo 1 que se fixarmos um ponto  $p \in M$  e considerarmos a função distância  $d : M \rightarrow \mathbb{R}$  a este ponto, então para todo ponto de  $M$  que não pertença ao *Cut Locus* de  $p$ , o gradiente da função distância satisfaz  $\nabla d(x) = \dot{\gamma}(x)$ , onde  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  é a geodésica parametrizada pelo comprimento de arco que liga o ponto  $p$  a  $x$ . Nestes moldes, tomemos um vetor  $X \in T_x M$  que seja ortogonal a  $\dot{\gamma}$ . Sendo  $x$  um ponto não conjugado a  $p$ , podemos considerar o campo de Jacobi  $J$  ao longo de  $\gamma$  com as condições de contorno  $J(\gamma(0)) = 0$  e  $J(\gamma(a)) = X$ , e de tal modo que  $\langle J, \dot{\gamma} \rangle = 0$ . Assim, pela definição de hessiano como forma bilinear e pela condição imposta ao colchete de  $J$  com  $\dot{\gamma}$ , tem-se

$$\text{Hess } d(X, X) = \langle J, \nabla_J \dot{\gamma} \rangle,$$

e portanto, em  $x$ , vale

$$\text{Hess } d(X, X) = \int_0^a \frac{d}{dt} \langle J, \nabla_{\dot{\gamma}} J \rangle dt = \int_0^a (\langle \nabla_{\dot{\gamma}} J, \nabla_{\dot{\gamma}} J \rangle + \langle J, \nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_{\dot{\gamma}} J \rangle) dt.$$

Sendo  $J$  um campo de Jacobi, então

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_{\dot{\gamma}} J + R(\dot{\gamma}, J)\dot{\gamma} = 0,$$

donde segue

$$\text{Hess } d(X, X) = \int_0^a (\|\nabla_{\dot{\gamma}} J\|^2 - \langle R(\dot{\gamma}, J)\dot{\gamma}, J \rangle) dt = I_a(J, J). \quad (1.15)$$

Com base no resultado obtido acima, enunciamos o resultado principal sobre comparação do hessiano da função distância.

**Proposição 16.** *Dadas as variedades Riemannianas  $n$ -dimensionais completas  $M_1$  e  $M_2$ , assumamos que  $\gamma_i : [0, a] \rightarrow M_i$  ( $i = 1, 2$ ) são duas geodésicas parametrizadas pelo comprimento de arco e que não interceptam o Cut Locus de  $\gamma_i(0)$ . Considere  $d_i$  as funções distância a  $\gamma_i(0)$  sobre  $M_i$  e sejam  $K_i$  as curvaturas seccionais de  $M_i$ .*

*Suponhamos que em  $\gamma_1(t)$  e  $\gamma_2(t)$ ,  $0 \leq t \leq a$ , valha*

$$K_1(X_1, \dot{\gamma}) \geq K_2(X_2, \dot{\gamma}), \quad (1.16)$$

onde  $X_i$  é qualquer vetor unitário em  $T_{\gamma_i(t)}M_i$  tal que  $\langle X_i, \dot{\gamma}_i \rangle = 0$ . Então

$$\text{Hess } d_1(X_1, X_1) \leq \text{Hess } d_2(X_2, X_2), \quad (1.17)$$

com  $X_i \in T_{\gamma_i(a)}M_i$  satisfazendo  $\langle X_i, \dot{\gamma}_i \rangle(\gamma_i(a)) = 0$  e  $\|X_i\| = 1$ .

**Demonstração:** No decorrer da demonstração estaremos considerando para cada  $i = 1, 2$  os campos de vetores ortonormais  $\{E_1^i, \dots, E_n^i\}$  paralelos ao longo de  $\gamma_i$ , com  $E_n^i = \dot{\gamma}_i$ . Logo pela expressão (1.15), tem-se

$$\text{Hess } d(X_i, X_i) = I_a(J_i, J_i), \quad (1.18)$$

onde  $J_i$  é um campo de Jacobi ao longo da geodésica  $\gamma_i$ , satisfazendo as condições de contorno  $J_i(\gamma_i(0)) = 0$  e  $J_i(\gamma_i(a)) = X_i$ . Como  $\langle X_i, \dot{\gamma}_i \rangle = 0$  e os campos  $E_j^i$  são paralelos, temos que  $J_i \perp E_n^i = \dot{\gamma}_i$ . Em particular, para cada ponto de  $\gamma_2$  podemos escrever

$$J_2 = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j(t) E_j^2.$$

Assim, tomemos um conjunto ortonormal  $\{E_1^1, \dots, E_n^1\}$  de tal modo que

$$X_1 = J_1(a) = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j(t) E_j^1(\gamma_1(a)).$$

Defina agora, um campo de vetores  $Z$  ao longo de  $\gamma_1$  por

$$Z = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j(t) E_j^1.$$

É claro que para os valores de  $t = 0$  e  $t = a$ , os campos  $Z$  e  $J_1$  coincidem. Ademais, como os coeficientes destes campos são os mesmos, então  $\|Z\| = \|J_2\|$  e

$$\|\nabla_{\gamma_2} J_2\| = \left\| \sum_{j=1}^{n-1} \lambda'_j(t) E_j^2 \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{n-1} \lambda'_j(t) E_j^1 \right\| = \|\nabla_{\gamma_1} Z\|. \quad (1.19)$$

Mas pelo Lema 3, combinado com as expressões (1.5), (1.18) e pela hipótese (1.16), obtemos

$$\begin{aligned} \text{Hess } d_1(X_1, X_1) = I_a(J_1) &\leq I_a(Z) \\ &= \int_0^a (\|\nabla_{\gamma_1} Z\|^2 - \langle R(\gamma_1, Z)\gamma_1, Z \rangle) dt \\ &= \int_0^a (\|\nabla_{\gamma_2} J_2\|^2 - K_1(Z, \gamma_1)) dt \\ &\leq \int_0^a (\|\nabla_{\gamma_2} J_2\|^2 - K_2(J_2, \gamma_2)) dt \\ &= I_a(J_2) = \text{Hess } d_2(X_2, X_2). \end{aligned}$$

■

Como consequência do resultado acima estabelecido obtemos um resultado do tipo comparação de laplaciano.

**Corolário 1.** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana completa  $n$ -dimensional que satisfaz  $\text{Ric}(M) \geq -(n-1)k^2$ , ( $k \geq 0$ ). Considere  $N$  um espaço  $n$ -dimensional simplesmente conexo de curvatura seccional constante e igual a  $-k^2$ . Tomemos  $d_M$  e  $d_N$  as funções distância sobre  $M$  e  $N$ , respectivamente. Se  $x \in M$  e  $d_M$  é diferenciável em  $x$ , então*

$$\Delta d_M(x) \leq \Delta d_N(y)$$

para qualquer  $y \in N$  com  $d_N(y) = d_M(x)$ .

É de particular interesse trabalharmos com variedades que possuam curvatura seccional constante. Tais variedades foram historicamente introduzidas como os primeiros exemplos de espaços não Euclidianos e são comumente denominadas na literatura corrente de formas espaciais. Afim de demonstrar um pouco da utilidade destes espaços, iremos calcular o hessiano e o laplaciano da função distância no espaço forma de curvatura  $-k^2$ , com  $k > 0$ .

A fórmula (1.15) nos fornece a informação que a problemática de calcularmos o hessiano e o laplaciano da função distância se reduz a encontrar um campo de Jacobi ao

longo da geodésica minimizante. Tomemos então um vetor  $X \in T_{\gamma(\mathbf{a})}\mathcal{M}$  tal que  $\{X, \dot{\gamma}(\mathbf{a})\}$  seja ortonormal, onde  $\gamma$  é uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco que minimiza a distância. Para cada  $t \in [0, \mathbf{a}]$  consideramos o campo de vetores  $X(t)$  obtido de  $X$  através do transporte paralelo ao longo de  $\gamma$ . É plausível pensarmos no campo de Jacobi  $J$  definido ao longo de  $\gamma$ , sob as condições de fronteira  $J(0) = 0$  e  $J(\mathbf{a}) = X$ , como tendo a forma  $J(t) = f(t)X(t)$ , com  $f$  satisfazendo a clássica equação de Jacobi

$$\begin{cases} f'' - k^2 f = 0 \\ f(0) = 0, f(\mathbf{a}) = 1. \end{cases} \quad (1.20)$$

Claramente, a solução do sistema (1.20) é  $f(t) = \sinh kt / \sinh k\mathbf{a}$ . Assim, a expressão (1.15) toma a seguinte forma

$$\text{Hess } d(X, X) = \int_0^{\mathbf{a}} [ \|f'(t)\|^2 + k^2 f^2(t) ] dt. \quad (1.21)$$

Portanto, substituindo o valor da função  $f$ , obtemos que o hessiano da função distância satisfaz

$$\text{Hess } d(X, X) = k \coth k\mathbf{a}. \quad (1.22)$$

Vejamos agora o caso do laplaciano. Fixando uma base ortonormal  $\{\dot{\gamma}, X_2, \dots, X_n\}$  de  $T_{\gamma(\mathbf{a})}\mathcal{M}$ , que seja paralela ao longo de  $\gamma$ , teremos que os campos de Jacobi correspondentes são da forma  $J_i(t) = f(t)X_i(t)$ , com  $J_i(\mathbf{a}) = X_i$  e  $J_i(0) = 0$ . Observando que  $\text{Hess } d(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0$ , então o traço de (1.21) e a expressão de  $f$  nos darão

$$\begin{aligned} \Delta d &= (n-1) \int_0^{\mathbf{a}} [ \|f'(t)\|^2 + k^2 f^2(t) ] dt \\ &= (n-1)k \coth k\mathbf{a}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

# Capítulo 2

## Versões do Princípio do Máximo de Omori-Yau

Neste capítulo, apresentaremos algumas das generalizações do Princípio do Máximo de Omori-Yau que foram demonstradas durante as duas últimas décadas. A escolha das versões a serem descritas aqui foi feita tomando por base as versões originais que envolvem o gradiente e hessiano (ver [14]), ou gradiente e laplaciano (ver [19]), de funções limitadas superiormente em variedades Riemannianas. Não iremos nos dispor a discutir sobre a versão fraca apresentada em [15] que envolve somente o laplaciano. Tal versão encontra-se completamente caracterizada pelo conceito de completude estocástica. Não obstante, apresentaremos uma versão que envolve somente o gradiente como forma de explicitar que as restrições que faremos sobre a variedade são impostas pelo comportamento do hessiano e do laplaciano das funções definidas na variedade.

### 2.1 Omori-Yau no $\mathbb{R}^n$

Descreveremos abaixo o caso em que a variedade Riemanniana considerada é o espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$  munido de sua métrica usual, ou seja,  $g_{ij} = \delta_{ij}$ , onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker. Veremos que neste caso específico a demonstração do princípio do máximo se faz de modo simples e instrutivo. Mais precisamente, temos o seguinte

**Teorema 1** (Pigola-Rigoli-Setti [16]). *Seja  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada superiormente e de Classe  $\mathcal{C}^2$ . Então existe uma sequência  $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$  tal que:*

$$(i) \quad u(x_k) > \sup u - \frac{1}{k};$$

$$(ii) \quad \|\nabla \mathbf{u}\|(\mathbf{x}_k) < \frac{1}{k};$$

$$(iii) \quad \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}_k) < \frac{1}{k}.$$

**Demonstração:** Dada  $(\varepsilon_k)$  uma sequência de números reais positivos tal que  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ , definimos

$$\mathbf{u}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \|\mathbf{x}\|^2 \varepsilon_i \quad i \in \mathbb{N}. \quad (2.1)$$

Note que quando  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$  temos que  $\mathbf{u}_i(\mathbf{x}) \rightarrow -\infty$ , o que nos diz que  $\mathbf{u}_i$  atinge seu máximo em algum ponto  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$ . Como sabemos, no ponto  $\mathbf{x}_i$  vale:

$$\|\nabla \mathbf{u}_i\|(\mathbf{x}_i) = 0 \quad \text{e} \quad \Delta \mathbf{u}_i(\mathbf{x}_i) \leq 0. \quad (2.2)$$

Por outro lado, em  $\mathbb{R}^n$  é fácil ver que

$$\nabla \|\mathbf{x}\|^2 = 2\mathbf{x} \quad \text{e} \quad \Delta \|\mathbf{x}\|^2 = 2n \quad (2.3)$$

e utilizando as expressões (2.2) e (2.3) em (2.1), obtemos

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}_i(\mathbf{x}_i) &= \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}_i) - \Delta \|\mathbf{x}_i\|^2 \varepsilon_i \leq 0 \\ \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_i) &= \nabla \|\mathbf{x}_i\|^2 \varepsilon_i. \end{aligned}$$

O que implica em

$$\Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}_i) \leq 2n\varepsilon_i \quad \text{e} \quad \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_i) = 2\mathbf{x}_i \varepsilon_i. \quad (2.4)$$

Como  $\mathbf{u}(\mathbf{x}_i) - \varepsilon_i \|\mathbf{x}_i\|^2 = \mathbf{u}_i(\mathbf{x}_i) \geq \mathbf{u}_i(0) = \mathbf{u}(0)$ , segue que

$$\varepsilon_i \|\mathbf{x}_i\|^2 \leq \mathbf{u}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{u}(0) \leq \sup \mathbf{u} - \mathbf{u}(0) \leq C^2 \quad (C > 0)$$

e deste modo, vale

$$\|\mathbf{x}_i\| \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon_i}}. \quad (2.5)$$

Assim, substituindo o obtido em (2.5) na expressão (2.4), obtem-se

$$\|\nabla \mathbf{u}\|(\mathbf{x}_i) \leq C\sqrt{\varepsilon_i}. \quad (2.6)$$

Agora dado  $\delta > 0$ , existe  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\mathbf{u}(\mathbf{y}) > \sup \mathbf{u} - \delta$ , donde segue que

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_i) - \varepsilon_i \|\mathbf{x}_i\|^2 \geq \mathbf{u}_i(\mathbf{y}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{u}(\mathbf{y}) - \varepsilon_i \|\mathbf{y}\|^2 > \sup \mathbf{u} - \delta - \varepsilon_i \|\mathbf{y}\|^2$$

e portanto

$$u(x_i) > \sup u - \delta - \varepsilon_i \|y\|^2. \quad (2.7)$$

Concluimos nossa demonstração fixando  $k \in \mathbb{N}$ , tomando  $\delta = 1/2k$  e  $i$  suficientemente grande de tal forma que:

$$\varepsilon_i \|y\|^2 < \frac{1}{2k}, \quad C\sqrt{\varepsilon_i} < \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad 2n\varepsilon_i < \frac{1}{k}.$$

Trocando  $x_i$  por  $x_k$ , as expressões (2.7), (2.6) e (2.4), nos darão respectivamente

(i)  $u(x_i) > \sup u - \frac{1}{k};$

(ii)  $\|\nabla u\|(x_k) < \frac{1}{k};$

(iii)  $\Delta u(x_k) < \frac{1}{k}.$

■

Vejamos um exemplo para ilustrar melhor o que foi feito acima.

**Exemplo 2.** *Tomemos a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = 10 - 1/x^2$ . Então  $f'(x) = 2/x^3$  e  $f''(x) = -6/x^4$  e obviamente qualquer sequência que convergir para mais infinito satisfaz as condições i), ii) e iii) do Teorema 1.*

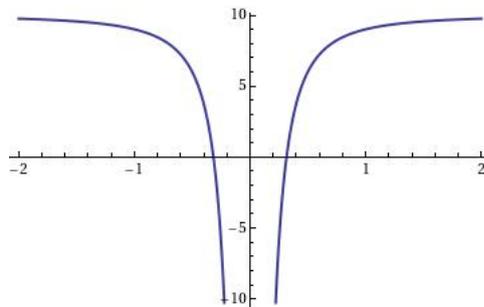


Figura 2.1: Gráfico de  $f$ .

## 2.2 Omori-Yau sob as hipóteses de Chen-Xin

Apresentaremos agora uma versão  $C^2$  do Princípio de Omori-Yau para variedades Riemannianas completas, considerando a restrição geométrica acerca da limitação inferior da curvatura de Ricci. Antes de enunciarmos o teorema principal desta seção provaremos um lema de comparação de Laplaciano que será utilizado na demonstração do resultado principal.

**Lema 4** (Chen-Xin [3]). *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana completa de dimensão  $m$  com  $\text{Ric}_x \geq -cF(\mathbf{y})$ , onde  $c > 0$  é uma constante,  $\mathbf{y}$  é a função distância a um ponto fixado  $x_0$  e  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função não decrescente satisfazendo  $F \geq 1$ . Se  $x$  não pertence ao cut locus do ponto  $x_0$ , então para  $\mathbf{y}(x) \geq y_0$ , ( $y_0$  constante), vale*

$$\Delta \mathbf{y}(x) \leq (m - 1) \cdot \sqrt{cF(\mathbf{y}) + c_0}, \quad (2.8)$$

onde  $c_0$  é constante.

**Demonstração:** Pela completude de  $M$ , podemos tomar uma geodésica minimizante, parametrizada pelo comprimento de arco,  $\gamma : [0, \mathbf{y}] \rightarrow M$  tal que  $\gamma(0) = x_0$  e  $\gamma(\mathbf{y}) = x$ . Escolhamos uma base ortonormal  $\{\mathbf{e}_j\}$ , ( $j = 1, \dots, m$ ) em  $x$  de tal modo que  $\mathbf{e}_1 = \dot{\gamma}(x)$ . Utilizando a compatibilidade da métrica com a conexão obtemos através do transporte paralelo dos vetores  $\{\mathbf{e}_j\}$ , os campos de vetores  $\{\mathbf{e}_j(t)\}$  ao longo de  $\gamma$  que formam uma base ortonormal para cada  $t \in (0, \mathbf{y})$ . Como  $\gamma$  não possui pontos conjugados a  $x_0$ , pela Proposição 14 existe um único campo de Jacobi  $J_j$  ao longo de  $\gamma$ , que satisfaz  $J_j(0) = 0$  e  $J_j(\mathbf{y}) = \mathbf{e}_j$ , para todo  $j = 2, \dots, m$ .

Lembrando do cálculo que fizemos no Capítulo 1, sobre o hessiano da função distância, mais precisamente a equação (1.15), obtemos

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{y} &= \text{tr}(\text{Hess } \mathbf{y}) \\ &= \sum_{j=2}^m \int_0^{\mathbf{y}} (\|J_j'\|^2 - \langle \mathbf{R}(\dot{\gamma}, J_j)\dot{\gamma}, J_j \rangle) dt. \end{aligned}$$

Tomemos então  $f : [0, \mathbf{y}] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave por partes tal que  $f(0) = 0$  e  $f(\mathbf{y}) = 1$ . Assim,  $\{f(t)\mathbf{e}_j(t)\}_{j=2}^m$  são campos de vetores suaves por partes ao longo de  $\gamma$  e satisfazem:  $f(0) \cdot \mathbf{e}_j(0) = 0$  e  $f(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{e}_j(\mathbf{y}) = J_j$ . Notemos que os campos descritos acima estão sob as hipóteses do Lema 3, e aplicando-o obtemos

$$I_{\mathbf{y}}(J_j, J_j) \leq I_{\mathbf{y}}(f \cdot \mathbf{e}_j, f \cdot \mathbf{e}_j)$$

que implica em

$$\Delta \mathbf{y}(x) \leq \sum_{j=2}^m \int_0^{\mathbf{y}} (\|(f \cdot \mathbf{e}_j)'\|^2 - \langle \mathbf{R}(\dot{\gamma}, f \cdot \mathbf{e}_j)\dot{\gamma}, f \cdot \mathbf{e}_j \rangle) dt. \quad (2.9)$$

Pela linearidade da curvatura  $\mathbf{R}$  e pelo fato de  $(f \cdot \mathbf{e}_j)' = f' \cdot \mathbf{e}_j + f \nabla_{\dot{\gamma}} \mathbf{e}_j = f' \cdot \mathbf{e}_j$ ,  $\forall j \geq 2$ ,

vem

$$\begin{aligned} \Delta y &\leq \sum_{j=2}^m \int_0^y [(f')^2 - f^2 \langle R(\dot{\gamma}, e_j) \dot{\gamma}, e_j \rangle] dt \\ &= \int_0^y [(m-1)(f')^2 - f^2(m-1)\text{Ric}_x(\dot{\gamma})] dt. \end{aligned}$$

Utilizando a hipótese, teremos

$$\Delta y \leq (m-1) \int_0^y [(f')^2 + cFf^2] dt. \quad (2.10)$$

Observemos que a Equação de Euler-Lagrange associada ao lado direito da expressão acima deve satisfazer  $L_f = \frac{d}{dt} L_{f'}$ , donde segue que a equação é dada por

$$f'' - cFf = 0. \quad (2.11)$$

Com o objetivo de estudar tal equação e obter a existência de tal função  $f$ , estudaremos o seguinte problema de contorno:

$$\begin{cases} f'' - cFf = 0 \\ f(0) = 0, f'(y) = 1. \end{cases} \quad (2.12)$$

Começamos estudando o Problema de Valor Inicial (P.V.I.)

$$\begin{cases} f_1'' - cFf_1 = 0 \\ f_1(0) = 0, f_1'(0) = 1. \end{cases} \quad (2.13)$$

Vê-se que o P.V.I. acima possui solução única, a qual denotaremos por  $f_1$ . Note que  $f_1(t) \geq 0$ , pois caso contrário, definindo  $t_0 = \inf\{t > 0 : f_1(t) = 0\}$  e observando que pelas condições iniciais propostas, em torno da origem  $f_1'$  é positiva, e conseqüentemente será também positiva em  $[0, t_0]$ . Como  $f_1'' = cFf_1 > 0$  em  $[0, t_0]$ , então  $f_1'$  é crescente em tal intervalo, o que é um absurdo, pois deveria existir, pelo teorema de Rolle, um ponto onde  $f_1'$  se anule.

Consideremos agora o P.V.I.

$$\begin{cases} h_1'' - ch_1 = 0 \\ h_1(0) = 0, h_1'(0) = 1. \end{cases} \quad (2.14)$$

Um cálculo direto nos mostra que  $h_1(t) = \frac{\sinh(\sqrt{c}t)}{\sqrt{c}}$  é solução de (2.14). Agora dos

sistemas (2.13) e (2.14), obtemos

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_0^t [f_1(h_1'' - ch_1) - h_1(f_1'' - cFf_1)] d\tau \\
 &= \int_0^t (f_1 h_1'' - h_1 f_1'') d\tau + \int_0^t c(F-1)h_1 f_1 d\tau \\
 &\geq \int_0^t (h_1' f_1 - h_1 f_1')' d\tau \\
 &= f_1(t)h_1'(t) - h_1(t)f_1'(t).
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left( \frac{f_1}{h_1} \right)' = \frac{f_1' h_1 - f_1 h_1'}{(h_1)^2} \geq 0.$$

Deste modo, para qualquer  $t_0 \in (0, t)$ , tem-se

$$\frac{f_1(t)}{h_1(t)} \geq \frac{f_1(t_0)}{h_1(t_0)}.$$

Daí, usando L'hospital, teremos

$$\frac{f_1(t)}{h_1(t)} \geq \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{f_1(t_0)}{h_1(t_0)} = \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{f_1'(t_0)}{h_1'(t_0)} = 1$$

e concluimos enfim que

$$f_1(t) \geq h_1(t) = \frac{\sinh(\sqrt{c}t)}{\sqrt{c}}. \tag{2.15}$$

Segue então que  $f_1(y) \neq 0$ , e assim, podemos dizer que  $f(t) = f_1(t)/f_1(y)$  é solução de (2.12). Utilizando (2.11), temos então

$$\begin{aligned}
 (m-1) \int_0^y [(f')^2 + cFf^2] dt &= (m-1) \int_0^y [(f')^2 + f'' f] dt \\
 &= (m-1) \int_0^y [ff']' dt = (m-1)f(y)f'(y)
 \end{aligned}$$

e por (2.10), chegamos em

$$\Delta y \leq (m-1)f'(y). \tag{2.16}$$

Iremos agora estimar  $f'(y)$ . Iniciamos observando que

$$f'(0) = \frac{f_1'(0)}{f_1'(y)} = \frac{1}{f_1(y)} \leq \frac{\sqrt{c}}{\sinh(\sqrt{c}y)}, \tag{2.17}$$

e que, por outro lado, o sistema

$$\begin{cases} h_2'' - cF(y)h_2 = 0 \\ h_2(0) = 0, h_2'(0) = 1, \end{cases}$$

tem como solução  $h_2(t) = \frac{\sinh(\sqrt{cF(y)}t)}{\sqrt{cF(y)}}$ . Analogamente ao que fizemos anteriormente, teremos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^t [f_1(h_2'' - cF(y)h_2) - h_2(f_1'' - cFf_1)] d\tau \\ &= \int_0^t (f_1 h_2'' - h_2 f_1'') d\tau + \int_0^t c(F(t) - F(y)) h_2 f_1 d\tau \\ &\leq \int_0^t (h_2' f_1 - h_2 f_1')' d\tau \\ &= f_1(t) h_2'(t) - h_2(t) f_1'(t), \end{aligned}$$

e daí

$$\left( \frac{f_1}{h_1} \right)' \leq 0.$$

Destas considerações obtemos  $f_1(t) \leq h_2(t) = \frac{\sinh(\sqrt{cF(y)}t)}{\sqrt{cF(y)}}$ , donde concluímos que

$$f'(0) \geq \frac{1}{h_2(y)} = \frac{\sqrt{cF(y)}}{\sinh(\sqrt{cF(y)}y)}. \quad (2.18)$$

De (2.17) e (2.18), vem

$$0 \leq \frac{\sqrt{cF(y)}}{\sinh(\sqrt{cF(y)}y)} \leq f'(0) \leq \frac{\sqrt{c}}{\sinh(\sqrt{cy})},$$

donde segue que para  $y \geq y_0$  ( $y_0$  constante), teremos

$$(f'(0))^2 \leq \frac{c}{\sinh^2(\sqrt{cy_0})} \leq c_0. \quad (2.19)$$

Feito isto, lembrando que  $f'' = cFf$ , obteremos então

$$\begin{aligned} (f'(t))^2 - (f'(0))^2 &= \int_0^t \frac{d}{d\tau} (f'(\tau))^2 d\tau = \int_0^t 2f'f'' d\tau = \int_0^t 2f'(cFf) d\tau \\ &= \int_0^t cF(f^2)' d\tau \leq cF(t) \int_0^t (f^2)' d\tau = cF(t)f^2(t). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Agora, substituindo as expressões (2.19), (2.20) em (2.16), tem-se

$$[\Delta y]^2 \leq (m-1)^2 \cdot [cF(y) + (f'(0))^2] \leq (m-1)^2 \cdot [cF(y) + c_0]$$

e portanto, podemos concluir que

$$\Delta y \leq (m-1) \cdot \sqrt{cF(y) + c_0}.$$

■

**Obs 2.** Observamos que a tese do Lema 4 continua válida, a menos de uma constante, para o hessiano da função distância, se considerarmos a mesma hipótese de limitação para a curvatura seccional, isto é,  $K \geq -cF$ .

De fato, novamente lembrando da expressão (1.15) e procedendo como na demonstração do Lema 4 encontraremos

$$\text{Hess } \mathbf{y}(X, X) \leq \int_0^y [\|\nabla_{\dot{\gamma}}(f \cdot X)\|^2 - K(\dot{\gamma}, f \cdot X)] dt,$$

o que pela nossa hipótese sob a curvatura significa que

$$\text{Hess } \mathbf{y}(X, X) \leq \int_0^y [(f')^2 - f^2 cF] dt.$$

Daí utilizando a técnica de Euler-Lagrange, obteremos

$$\text{Hess } \mathbf{y}(X, X) \leq f'(y).$$

Portanto no caso do hessiano vale

$$\text{Hess } \mathbf{y}(X, X) \leq \sqrt{cF(y) + c_0}. \quad (2.21)$$

Com base no lema acima podemos agora enunciar e provar um dos nossos teoremas principais. Antes porém, façamos uma consideração acerca da função  $F$  do nosso lema. Estaremos supondo no teorema abaixo que  $F$  seja ilimitada superiormente, pois caso contrário, existiria uma constante  $k^2$  tal que  $F \leq k^2$ , e portanto, nossa hipótese sobre a curvatura se reduziria a  $\text{Ric} \geq -ck^2$ , o que nos remeteria ao Teorema B da introdução.

**Teorema 2.** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana completa que satisfaça a condição:*

$$\text{Ric} \geq -cF(y) \quad (2.22)$$

onde  $\mathbf{y}$  é a função distância a um ponto fixo  $x_0$ ,  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é não decrescente,  $\mathcal{C}^2$ ,  $F \geq 1$  e satisfaz:

$$\frac{F(y)[F'(y)]^2}{[F(y) + 1]^2[\log(F(y) + 1)]^2} \quad e \quad \frac{F''(y)}{[F(y) + 1] \log[F(y) + 1]} \quad \text{são limitados.} \quad (2.23)$$

Dada  $\mathbf{u} : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada superiormente e de classe  $\mathcal{C}^2$ , então existe uma sequência  $x_k$  em  $M$  tal que:

a)  $\lim_{k \rightarrow +\infty} (x_k) = \sup \mathbf{u};$

b)  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\nabla \mathbf{u}\|(x_k) = 0;$

c)  $\limsup_{k \rightarrow +\infty} \Delta \mathbf{u}(x_k) \leq 0.$

**Demonstração:** Defina para cada  $k \in \mathbb{N}$  a função

$$g_k(x) = \frac{\mathbf{u}(x) - \mathbf{u}(x_0) + 1}{[\log(F(\mathbf{y}(x)) + 1)]^{\frac{1}{k}}}$$

e veja que

$$g_k(x_0) = \frac{1}{[\log(F(0) + 1)]^{\frac{1}{k}}} > 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow \infty} g_k(x) = 0.$$

Logo para cada  $k$  podemos definir  $x_k$  tal que  $g_k(x_k) = \sup g_k$ . Escrevendo

$$[\log(F(\mathbf{y}(x)) + 1)]^{\frac{1}{k}} g_k(x) = \mathbf{u}(x) - \mathbf{u}(x_0) + 1,$$

teremos

$$\nabla \mathbf{u}(x) = [\log(F(\mathbf{y}(x)) + 1)]^{\frac{1}{k}} \nabla g_k(x) + \frac{(\mathbf{u}(x) - \mathbf{u}(x_0) + 1)F'(\mathbf{y}(x))\nabla \mathbf{y}(x)}{k[F(\mathbf{y}(x)) + 1] \log[F(\mathbf{y}(x)) + 1]}. \quad (2.24)$$

Observamos que  $(\mathbf{u}(x_k) - \mathbf{u}(x_0) + 1) \geq 0$ , pois do contrário teríamos

$$g_k(x) = \frac{\mathbf{u}(x_k) - \mathbf{u}(x_0) + 1}{[\log(F(\mathbf{y}(x_k)) + 1)]^{\frac{1}{k}}} \leq 0 < \frac{1}{[\log(F(0) + 1)]^{\frac{1}{k}}} = g_k(x_0),$$

e isto contraria o fato de  $x_k$  ser ponto de máximo. Ainda por esta característica maximal de  $x_k$ , e por (2.23) aplicada à expressão (2.24), obtemos:

$$\|\nabla \mathbf{u}\|(x_k) = \frac{(\mathbf{u}(x_k) - \mathbf{u}(x_0) + 1)F'(\mathbf{y}(x_k))\|\nabla \mathbf{y}\|(x_k)}{k[F(\mathbf{y}(x_k)) + 1] \log(F(\mathbf{y}(x_k)) + 1)} \rightarrow 0$$

quando  $k \rightarrow \infty$ . Façamos agora as contas para o laplaciano.

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}(x) &= [\log(F(\mathbf{y}(x)) + 1)]^{\frac{1}{k}} \Delta g_k(x) + \left\langle \nabla g_k(x), \nabla([\log(F(\mathbf{y}(x)) + 1)]^{\frac{1}{k}}) \right\rangle + \\ &+ \frac{(\mathbf{u}(x) - \mathbf{u}(x_0) + 1)F'(\mathbf{y}(x))\Delta \mathbf{y}(x)}{k(F(\mathbf{y}(x)) + 1) \log(F(\mathbf{y}(x)) + 1)} + \\ &+ \left\langle \nabla \mathbf{y}(x), \nabla \left( \frac{(\mathbf{u}(x) - \mathbf{u}(x_0) + 1)F'(\mathbf{y}(x))}{k[F(\mathbf{y}(x)) + 1] \log(F(\mathbf{y}(x)) + 1)} \right) \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Calculemos então o gradiente que será utilizado para nossas contas:

$$\begin{aligned} \nabla \left( \frac{(\mathbf{u}(x) - \mathbf{u}(x_0) + 1)F'(\mathbf{y}(x))}{k(F(\mathbf{y}(x)) + 1) \log(F(\mathbf{y}(x)) + 1)} \right) &= \frac{F'(\mathbf{y}(x))\nabla \mathbf{u}(x)}{k(F(\mathbf{y}(x)) + 1) \log(F(\mathbf{y}(x)) + 1)} + \\ &+ \frac{(\mathbf{u}(x) - \mathbf{u}(x_0) + 1)F''(\mathbf{y}(x))\nabla \mathbf{y}(x)}{k(F(\mathbf{y}(x)) + 1) \log(F(\mathbf{y}(x)) + 1)} - \\ &- \frac{(\mathbf{u}(x) - \mathbf{u}(x_0) + 1)[F'(\mathbf{y}(x))]^2 k(1 + \log(F(\mathbf{y}(x)) + 1))\nabla \mathbf{y}(x)}{[k(F(\mathbf{y}(x)) + 1) \log(F(\mathbf{y}(x)) + 1)]^2}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Substituindo (2.26) em (2.25) aplicada ao ponto  $\mathbf{x}_k$ , tem-se

$$\begin{aligned} \Delta u(\mathbf{x}_k) \leq & \frac{(\mathbf{u}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) + 1)F'(\mathbf{y}(\mathbf{x}_k))\Delta \mathbf{y}(\mathbf{x}_k)}{k[F(\mathbf{y}(\mathbf{x}_k)) + 1] \log(F(\mathbf{y}(\mathbf{x}_k)) + 1)} + \\ & + \frac{F'(\mathbf{y}(\mathbf{x}_k))\langle \nabla u(\mathbf{x}_k), \nabla \mathbf{y}(\mathbf{x}_k) \rangle}{k[F(\mathbf{y}(\mathbf{x}_k)) + 1] \log(F(\mathbf{y}(\mathbf{x}_k)) + 1)} + \\ & + \frac{(\mathbf{u}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) + 1)F''(\mathbf{y}(\mathbf{x}_k))\|\nabla \mathbf{y}\|^2(\mathbf{x}_k)}{k[F(\mathbf{y}(\mathbf{x}_k)) + 1] \log(F(\mathbf{y}(\mathbf{x}_k)) + 1)} - \\ & - \frac{(\mathbf{u}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) + 1)[F'(\mathbf{y}(\mathbf{x}_k))]^2 k(1 + \log(F(\mathbf{y}(\mathbf{x}_k)) + 1))\|\nabla \mathbf{y}\|^2(\mathbf{x}_k)}{[k(F(\mathbf{y}(\mathbf{x}_k)) + 1) \log(F(\mathbf{y}(\mathbf{x}_k)) + 1)]^2}. \end{aligned}$$

Sendo

$$\langle \nabla u(\mathbf{x}_k), \nabla \mathbf{y}(\mathbf{x}_k) \rangle = \frac{(\mathbf{u}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) + 1)F'(\mathbf{y}(\mathbf{x}_k))}{k[F(\mathbf{y}(\mathbf{x}_k)) + 1] \log(F(\mathbf{y}(\mathbf{x}_k)) + 1)},$$

obtemos

$$\begin{aligned} \Delta u(\mathbf{x}_k) \leq & \frac{(\mathbf{u}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) + 1)F'(\mathbf{y}(\mathbf{x}_k))}{k[F(\mathbf{y}(\mathbf{x}_k)) + 1] \log(F(\mathbf{y}(\mathbf{x}_k)) + 1)} \cdot \Delta \mathbf{y}(\mathbf{x}_k) + \\ & + \frac{(\mathbf{u}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) + 1)[F'(\mathbf{y}(\mathbf{x}_k))]^2}{k[F(\mathbf{y}(\mathbf{x}_k)) + 1] \log(F(\mathbf{y}(\mathbf{x}_k)) + 1)} + \\ & + \frac{(\mathbf{u}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) + 1)F''(\mathbf{y}(\mathbf{x}_k))}{k[F(\mathbf{y}(\mathbf{x}_k)) + 1] \log(F(\mathbf{y}(\mathbf{x}_k)) + 1)}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Devemos então estimar a primeira parcela de (2.27), haja vista já sabermos que as demais tendem a zero quando  $k \rightarrow \infty$ . Fazendo uso do Lema 4, obtemos:

$$\frac{(\mathbf{u}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) + 1)F'(\mathbf{y}(\mathbf{x}_k))}{k[F(\mathbf{y}(\mathbf{x}_k)) + 1] \log(F(\mathbf{y}(\mathbf{x}_k)) + 1)} \Delta \mathbf{y}(\mathbf{x}_k) \leq \frac{(\mathbf{u}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) + 1)F'(\mathbf{y}(\mathbf{x}_k))}{k[F(\mathbf{y}(\mathbf{x}_k)) + 1] \log(F(\mathbf{y}(\mathbf{x}_k)) + 1)} \times \\ \times (m-1) \sqrt{cF(\mathbf{y}(\mathbf{x}_k)) + c_0}.$$

Para podermos concluir que o termo do segundo membro pode ser estimado, basta que

$$\frac{F(\mathbf{y}(\mathbf{x}_k))[F'(\mathbf{y}(\mathbf{x}_k))]^2}{[F(\mathbf{y}(\mathbf{x}_k)) + 1]^2 [\log(F(\mathbf{y}(\mathbf{x}_k)) + 1)]^2} \quad (2.28)$$

seja limitado. O que é verdadeiro por hipótese. Portanto, a condição **c**) de nossa tese é satisfeita.

Resta-nos mostrar que a sequência  $x_k$  obtida satisfaz  $u(x_k) \rightarrow \sup u$ , quando  $k \rightarrow +\infty$ . Afim de demonstrarmos isto iremos supor por contradição que  $\lim_{k \rightarrow \infty} u(x_k) < \sup u$ . Daí, existiriam  $\delta > 0$  e um  $x \in M$  tal que

$$u(x_k) + \delta < u(x) \quad k \gg 1. \quad (2.29)$$

Temos então duas possibilidades sob o viés da limitação da sequência  $x_k$ . Caso  $x_k$  seja ilimitada, então quando  $k \rightarrow \infty$  teríamos  $y(x_k) \rightarrow \infty$ , o que pela expressão (2.29) significa que

$$g_k(x) = \frac{u(x) - u(x_0) + 1}{[\log(y^2(x) + 2)]^{\frac{1}{k}}} > \frac{u(x_k) - u(x_0) + 1}{[\log(y^2(x_k) + 2)]^{\frac{1}{k}}} = g_k(x_k) = \sup g_k$$

sempre que  $y(x_k) > y(x)$ .

Por outro lado, se  $x_k$  for limitada, então existe uma subsequência de  $(x_k)$  que converge para algum ponto  $\bar{x} \in M$ . Novamente por (2.29) obtemos  $u(x) \geq u(\bar{x}) + \delta$ , que nos daria

$$g_k(x) = \frac{u(x) - u(x_0) + 1}{[\log(y^2(x) + 2)]^{\frac{1}{k}}} > \frac{u(x_k) - u(x_0) + 1}{[\log(y^2(x_k) + 2)]^{\frac{1}{k}}} = g_k(x_k) = \sup g_k,$$

para  $k$  suficientemente grande, pois neste caso os denominadores tendem a 1 quando  $k \rightarrow +\infty$ . Logo como em ambos os casos obtemos um absurdo, confirmamos assim a veracidade do item a). ■

No artigo *A Generalized Maximum Principle* de Q. Chen e Y. L. Xin [3], o Teorema (2) é enunciado sob as mesmas hipóteses acima, com exceção da hipótese (2.23), e de que a função  $F$  é particularmente igual a  $1 + [y \log(y + 2)]^2$ . Observamos que a condição imposta em (2.23) é satisfeita por tal função. De fato,

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{[1 + (y \log(y + 2))^2] \left[ 2y(\log(y + 2))^2 + 2y^2 \frac{\log(y+2)}{y+2} \right]^2}{[[2 + (y \log(y + 2))^2][\log(2 + (y \log(y + 2))^2)]^2} = 1 \quad (2.30)$$

e

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\left( 2 \frac{y^2}{(y+2)^2} + 2 \log^2(y + 2) + 8y \frac{\log(y+2)}{y+2} - 2y^2 \frac{\log(y+2)}{(y+2)^2} \right)}{[\log(y^2 \log^2(y + 2) + 2)][y^2 \log^2(y + 2) + 2]} = 0. \quad (2.31)$$

Salientamos que na demonstração do Teorema 2 utilizamos o fato de que nos pontos  $x_k$  a função distância é diferenciável. Para maiores detalhes sobre tal diferenciabilidade, remetemos o leitor a [19]. Ademais, no Teorema 4 apresentaremos uma demonstração da diferenciabilidade da função distância dada por Fontenele-Xavier em [8].

**Exemplo 3.** *Contra exemplo ao Teorema 2.*

Tomemos  $M = \mathbb{R}^2$  com a métrica dada em coordenadas polares por

$$dr^2 + g(r)^2 d\theta^2, \quad (2.32)$$

onde  $d\theta^2$  é a métrica usual da esfera unidimensional e  $g \in \mathcal{C}^\infty([0, +\infty))$  é tal que  $g(r) > 0$  para  $r > 0$  e

$$g(r) = \begin{cases} r & \text{se } 0 \leq r < 1, \\ r(\log r)^{1+\mu} e^{r^2(\log r)^{1+r}} & \text{se } r > 3. \end{cases}$$

Como  $g$  coincide com a métrica usual nos pontos próximos da origem, então tal métrica pode ser definida suavemente em todo  $\mathbb{R}^2$ . Mais que isso, pode-se provar que  $(M, g)$  é uma variedade Riemanniana completa.

Defina a função  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$$u(x) = u(r(x)) = \int_0^{r(x)} \left( \frac{1}{g(t)} \int_0^t g(s) ds \right) dt.$$

$u$  é claramente suave e satisfaz:

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial r} \partial_r = \frac{1}{g(r)} \left( \int_0^r g(s) ds \right) \partial_r.$$

Assim,

$$\Delta u = \frac{1}{g(r)} \left( \int_0^r g(s) ds \right) \Delta r - \frac{g'(r)}{g^2(r)} \int_0^r g(s) ds + 1.$$

Agora, como tratamos de  $\mathbb{R}^2$ , escolhendo  $e_1 = \frac{\partial}{\partial r}$  e  $e_2 = \frac{1}{g(r)} \frac{\partial}{\partial \theta}$ , teremos pela compatibilidade da métrica com a conexão e pelo fato de  $[e_1, e_2] = 0$  que

$$\begin{aligned} \Delta r &= \langle \nabla_{e_1} \frac{\partial}{\partial r}, e_1 \rangle + \langle \nabla_{e_2} \frac{\partial}{\partial r}, e_2 \rangle \\ &= \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} e_2, e_2 \rangle \\ &= \frac{1}{g^2(r)} \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta} \rangle \\ &= \frac{1}{2g^2(r)} \frac{\partial}{\partial r} (g^2(r)) \\ &= \frac{g'(r)}{g(r)}. \end{aligned}$$

Deste modo,

$$\Delta u \equiv 1. \quad (2.33)$$

Ademais, sendo  $\mu > 0$ , então  $\sup \mathbf{u} < +\infty$ . Portanto, a propriedade iii) do Teorema 2 não é satisfeita por  $\mathbf{u}$ . Observamos que neste exemplo a curvatura Gaussiana satisfaz:

$$K(r) = \frac{g''(r)}{g(r)} \approx -c^2 r^2 (\log r)^{2(1+\mu)}, \quad \text{quando } r \rightarrow +\infty$$

para algum  $c > 0$ .

## 2.3 As Boas Sombras de Omori-Yau

Nesta secção iremos expor uma versão que trás em si um refinamento conceitual do princípio do máximo. Enquanto que em todas as versões até então apresentadas os autores se preocupavam somente em encontrar uma sequência específica que satisfizesse as condições de Omori-Yau, no artigo *Good shadows, dynamics and convex hulls of complete submanifolds* [8], os pesquisadores F. Fontenele e F. Xavier propuseram a idéia de que para cada sequência maximizante  $\mathbf{x}_k$ , existe uma sequência  $\mathbf{y}_k$  relacionada a  $\mathbf{x}_k$ , que satisfaz as condições de Omori-Yau. Assim, temos não somente uma sequência com boas propriedades, mas uma abundância de boas sequências. A uma tal sequência do tipo  $\mathbf{y}_k$  denominamos uma boa sombra de  $\mathbf{x}_k$ .

Como havíamos mencionado na introdução deste capítulo, iremos descrever uma versão  $\mathcal{C}^1$  de Omori-Yau. Notemos que na demonstração do Teorema 2 podemos constatar que tal resultado independe de restrições sobre a curvatura da variedade. Chamamos a atenção ao modo refinado e instrutivo da demonstração desta versão, que se utiliza de uma ferramenta clássica da Análise.

**Lema 5** (Princípio Variacional de Ekeland). *Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico completo e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada superiormente e semi-contínua superiormente. Então para quaisquer  $\varepsilon, \delta > 0$  e  $x \in X$  com  $f(x) \geq \sup_X f - \varepsilon$  existe  $y \in X$  satisfazendo:*

- i.  $d(x, y) \leq \delta$ ;
- ii.  $f(y) \geq f(x)$ ;
- iii.  $f(y) > f(z) - \frac{\varepsilon}{8} d(y, z), \quad \forall z \in X, \text{ com } z \neq y.$

**Demonstração:** Vide [7].

■

**Teorema 3** (Fontenele-Xavier [8]). *Sejam  $M$  uma variedade completa e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  tal que  $\sup_M f < +\infty$ . Então para toda sequência  $(x_k)$  em  $M$  tal que  $f(x_k) \rightarrow \sup_M f$ , existe uma sequência  $(y_k)$  em  $M$  que satisfaz:*

i.  $d(x_k, y_k) \rightarrow 0$ ;

ii.  $f(y_k) \rightarrow \sup_M f$ ;

iii.  $\|\nabla f\|(y_k) \rightarrow 0$ .

**Demonstração:** Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , tomemos  $\varepsilon_k = \sup_M f - f(x_k)$  e  $\delta_k = \sqrt{\varepsilon_k}$ . Se existir  $k$  tal que  $f(x_k) = \sup_M f$ , nada temos a demonstrar. Caso  $\varepsilon_k > 0, \forall k \in \mathbb{N}$ , então  $\delta_k > 0$  e aplicando o Princípio Variacional de Ekeland para  $\varepsilon = \varepsilon_k, \delta = \delta_k$  e  $x = x_k$  iremos obter  $y_k \in M$  satisfazendo:

$$d(x_k, y_k) \leq \delta_k, \quad f(x_k) \leq f(y_k)$$

e

$$f(y_k) > f(z) - \frac{\varepsilon_k}{\delta_k} d(y_k, z) = f(z) - \delta_k d(y_k, z). \quad (2.34)$$

Mostraremos que  $\|\nabla f\|(y_k) \leq \delta_k$ . Como  $M$  é completa podemos tomar  $v \in T_{y_k} M$ , com  $\|v\| = 1$  e  $\gamma : (-c, c) \rightarrow M$  a geodésica radial em  $M$  que satisfaz  $\gamma(0) = y_k$  e  $\gamma'(0) = v$ . Diminuindo  $c$ , se necessário, podemos supor que a imagem de  $\gamma$  está contida numa vizinhança normal centrada em  $y_k$ . Tomando  $z = \gamma(t)$  em (2.34), temos

$$f(\gamma(t)) - f(y_k) < \delta_k d(\gamma(t), y_k) = \delta_k \|t\|, \quad 0 < \|t\| < c.$$

Daí para  $-c < t < 0$ , tem-se  $f(\gamma(t)) - f(y_k) < (-t)\delta_k$ , donde obtemos

$$-\frac{f(\gamma(t)) - f(y_k)}{t} \leq \delta_k.$$

Sendo  $f$  uma função de classe  $\mathcal{C}^1$ , segue que

$$-\langle \nabla f(y_k), v \rangle = -df_{y_k}(v) = -\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \gamma)(t) = -\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(\gamma(t)) - f(y_k)}{t} \leq \delta_k,$$

$\forall v \in T_{y_k} M, \|v\| = 1$ . Analogamente, tomando  $0 < t < c$  teremos  $\langle \nabla f(y_k), v \rangle \leq \delta_k$ .

Deste modo,

$$\|\nabla f\|(y_k) = \sup_{\|v\|=1} \|\langle \nabla f(y_k), v \rangle\| \leq \delta_k.$$

Podemos então concluir que quando  $k \rightarrow +\infty$ , tem-se  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ ,  $\delta_k \rightarrow 0$  e vale

$$\|\nabla f\|(\mathbf{y}_k) \rightarrow 0.$$

■

**Exemplo 4.** Tomemos  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , uma  $\mathcal{C}^\infty$  bump function definida por  $\beta(x) = e^{-\frac{4}{x(1-x)}}$ .

Consideremos a função

$$f(r) = \begin{cases} \beta(r) & \text{se } 0 \leq r < 1, \\ 2\beta(r) & \text{se } 1 < r < 2, \\ 3\beta(r) & \text{se } 2 < r < 3, \\ \dots & \text{cdots .} \end{cases}$$

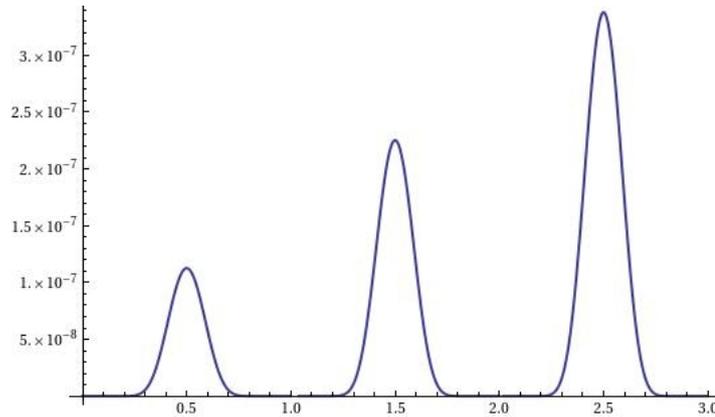


Figura 2.2: Gráfico de  $f$ .

Observe que a cada intervalo de definição a velocidade de crescimento de  $f$  aumenta. Logo se tomarmos  $x_1 \in (0, 1/4)$  tal que  $f'(x_1) = c$ , para alguma constante  $c \neq 0$ , podemos definir uma sequência  $x_k$  de tal maneira que  $x_k \in (k - 1, k - 1 + 1/4)$  e  $f'(x_k) = c$ . Observe que deste modo, tal sequência obrigatoriamente deverá convergir para  $\inf f = 0$ .

Generalizando o resultado  $\mathcal{C}^1$ , obtemos o caso  $\mathcal{C}^2$  para Omori-Yau com Boas Sombras. Entretanto, neste caso não iremos utilizar o Princípio Variacional de Ekeland, pois o mesmo não nos dispõe de informações acerca da segunda derivada de funções.

**Teorema 4** (Fontenele-Xavier [8]). *Seja  $M^m$  uma variedade Riemanniana completa com curvatura de Ricci limitada inferiormente (curvatura seccional). Dada  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $\mathcal{C}^2$  tal que  $\sup f_M < +\infty$ , então para toda sequência maximizante*

$(x_k)$  de  $f$ , existe uma sequência  $(y_k)$  satisfazendo:

$$d(x_k, y_k) \rightarrow 0, \quad f(y_k) \rightarrow \sup_M f, \quad \|\nabla f\|(y_k) \rightarrow 0 \quad (2.35)$$

e

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \Delta f(y_k) \leq 0 \quad (\limsup_{k \rightarrow +\infty} \text{Hess } f(y_k) \leq 0). \quad (2.36)$$

**Demonstração:** Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , sejam

$$r_k = \sup_M f - f(x_k), \quad \delta_k = r_k^{\frac{1}{4}} \quad e \quad \varepsilon_k = r_k^{\frac{1}{2}}. \quad (2.37)$$

Observamos inicialmente que se  $f(x_k) = \sup_M f$ , para algum  $k \in \mathbb{N}$ , então nada há a provar. Caso  $f(x_k) < \sup_M f, \forall k \in \mathbb{N}$ , defina a função  $f_k : M \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$f_k(x) = f(x) - \varepsilon_k d_k^2(x), \quad (2.38)$$

onde  $d_k(x) = d(x_k, x)$  é a distância em  $M^m$  de  $x$  a  $x_k$ .

**Afirmção 1.** Para todo  $k \in \mathbb{N}$ , a função  $f_k$  atinge seu supremo.

De fato, como  $f$  é limitada superiormente e  $\varepsilon_k$  é positivo, temos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \varepsilon_k d_k^2(x)] = -\infty,$$

e portanto existe  $y_k \in M$  tal que  $f_k(y_k) = \sup f_k$ .

Notemos que  $f_k(x_k) = f(x_k) - \varepsilon_k d_k^2(x_k) = f(x_k)$  e para todo  $x \notin \bar{B}(x_k, \delta_k)$ , vale

$$f_k(x) = f(x) - \varepsilon_k d_k^2(x) < f(x) - \varepsilon_k \delta_k^2 = f(x) - r_k = f(x) - \sup_M f + f(x_k) \leq f_k(x_k).$$

Com isso  $d(x_k, y_k) \leq \delta_k$ , pois do contrário  $f_k(y_k) < f_k(x_k)$ . Além disso,

$$f(x_k) = f_k(x_k) \leq f_k(y_k) = f(y_k) - \varepsilon_k d_k^2(y_k) \leq f(y_k). \quad (2.39)$$

**Afirmção 2.**  $f_k$  é diferenciável numa vizinhança de  $y_k$ .

É suficiente provarmos que  $d_k$  é diferenciável numa vizinhança de  $y_k$ . Suponhamos, com propósitos de contradição, que isto seja falso, daí  $y_k$  pertenceria ao *cut locus* de  $x_k$  e uma interpretação da Proposição 15 nos daria duas possibilidades:

- i) Existem dois segmentos de geodésicas minimizantes  $\gamma, \sigma : [0, t_k] \rightarrow M$  ligando  $x_k$  a  $y_k$ , com  $t_k = d_k(y_k)$ ;

ii) Existe um segmento de geodésica minimizante  $\gamma : [0, t_k] \rightarrow M$  de  $x_k$  a  $y_k$  ao longo do qual  $y_k$  é conjugado de  $x_k$ .

Supondo que ocorra o enunciado no primeiro item, definimos  $v = \gamma'(t_k)$  e  $w = \sigma'(t_k)$ .

Como  $f_k$  atinge seu máximo em  $y_k$ , então pela definição de  $f_k$ ,

$$\begin{aligned} 0 &\geq \liminf_{s \rightarrow 0^+} \frac{f_k(\gamma(t_k + s)) - f_k(\gamma(t_k))}{s} \\ &= \liminf_{s \rightarrow 0^+} \left[ \frac{f(\gamma(t_k + s)) - f(\gamma(t_k))}{s} + \varepsilon_k \frac{d_k^2(\gamma(t_k + s)) - d_k^2(\gamma(t_k))}{s} \right] \\ &= v(f) - \varepsilon_k \cdot \liminf_{s \rightarrow 0^+} \frac{d_k^2(\gamma(t_k + s)) - f(\gamma(t_k))}{s}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Como neste caso  $\gamma|_{[0, t_k]}$  é minimizante, tem-se

$$\begin{aligned} 0 &\geq \liminf_{s \rightarrow 0^+} \frac{f_k(\gamma(t_k - s)) - f_k(\gamma(t_k))}{s} \\ &= \liminf_{s \rightarrow 0^+} \left[ \frac{f(\gamma(t_k - s)) - f(\gamma(t_k))}{s} + \varepsilon_k \frac{d_k^2(\gamma(t_k - s)) - f(\gamma(t_k))}{s} \right] \\ &= -v(f) - \varepsilon_k \cdot \liminf_{s \rightarrow 0^+} \frac{d_k^2(\gamma(t_k - s)) - f(\gamma(t_k))}{s} \\ &= -v(f) - \varepsilon_k \cdot \liminf_{s \rightarrow 0^+} \frac{(t_k - s)^2 - t_k^2}{s} \\ &= -v(f) + 2\varepsilon_k t_k. \end{aligned} \quad (2.41)$$

De (2.40) e (2.41) obtemos

$$\liminf_{s \rightarrow 0^+} \frac{d_k^2(\gamma(t_k + s)) - f(\gamma(t_k))}{s} \geq \frac{v(f)}{\varepsilon_k} \geq 2t_k. \quad (2.42)$$

Por outro lado, como  $v \neq w$  existe  $c \in (0, 1)$  tal que para todo  $s > 0$ , suficientemente pequeno, vale

$$d(\sigma(t_k - s), \gamma(t_k + s)) < 2cs,$$

que por sua vez implica em

$$\begin{aligned} d_k(\gamma(t_k + s)) &= d(\gamma(t_k + s), \gamma(t_k)) \\ &\leq d(\gamma(t_k + s), \sigma(t_k - s)) + d(\sigma(t_k - s), \gamma(t_k)) \\ &\leq 2cs + d_k(\sigma(t_k - s)) = t_k + (2c - 1)s. \end{aligned}$$

Como  $t_k = d_k(\gamma(t_k))$  e  $0 < c < 1$ , segue que

$$\begin{aligned} \liminf_{s \rightarrow 0^+} \frac{d_k^2(\gamma(t_k + s)) - d_k^2(\gamma(t_k))}{s} &\leq \liminf_{s \rightarrow 0^+} \frac{t_k^2 + 2(2c - 1)st_k + (2c - 1)^2s^2 - t_k^2}{s} \\ &= \liminf_{s \rightarrow 0^+} [2(2c - 1)t_k + (2c - 1)^2s] \\ &= 2(2c - 1)t_k < 2t_k. \end{aligned}$$

O que contradiz (2.42).

Supondo agora que aconteça ii), a expressão (2.41) nos diz que  $v(f)(\mathbf{y}_k) \geq 2\varepsilon_k t_k$ , donde obtemos  $\nabla f(\mathbf{y}_k) \neq 0$ . Disto, podemos concluir que

$$\Gamma = \{x \in M : f(x) = f(\mathbf{y}_k)\} \tag{2.43}$$

é uma superfície suave numa vizinhança de  $\mathbf{y}_k$ . Seja  $\Gamma_t$  a superfície paralela a  $\Gamma$  que passa por  $\gamma(t)$ , então existe  $\bar{t} \in (0, t_k)$  tal que para todo  $t \in (\bar{t}, t_k)$ ,  $\Gamma_t$  é suave numa vizinhança de  $\gamma(t)$ .

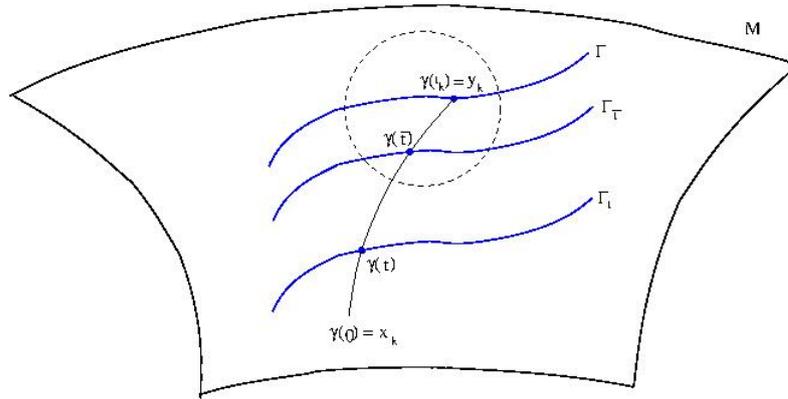


Figura 2.3:

Sendo  $\gamma : [0, t_k] \rightarrow M$  minimizante, então  $d_k$  é diferenciável em  $\gamma(t)$  e  $\nabla d_k(\gamma(t)) = \dot{\gamma}(t)$  para todo  $t \in (0, t_k)$ . Logo a esfera geodésica  $S_t$  com centro em  $x_k$  e raio  $t$  é suave em uma vizinhança de  $\gamma(t)$ , para todo  $0 < t < t_k$ .

Como  $\mathbf{y}_k = \gamma(t_k)$  é o primeiro ponto conjugado a  $x_k = \gamma(0)$  ao longo de  $\gamma$ , temos pela Definição 22 que existe um campo de Jacobi  $J$  ao longo de  $\gamma$  satisfazendo  $J(0) = J(t_k) = 0$ ,  $J(t) \neq 0$ , para  $t \in (0, t_k)$  e pela Proposição 13, tem-se  $\langle J, \dot{\gamma} \rangle(t) \equiv 0$ . Não obstante, sendo

$$\text{Hess } d_k(J(t), J(t)) = \langle \nabla_J \dot{\gamma}, J \rangle = \langle J, J' \rangle = \frac{1}{2} (\|J(t)\|^2)' \text{ e } J'(t_k) \neq 0,$$

decorre que

$$\lim_{t \rightarrow t_k} \text{Hess } d_k \left( \frac{J(t)}{\|J(t)\|}, \frac{J(t)}{\|J(t)\|} \right) = \frac{1}{2\|J(t)\|^2} (\|J(t)\|^2)' = -\infty. \tag{2.44}$$

**Afirmção 3.** Para algum  $t \in (\bar{t}, t_k)$  existe  $\mathbf{y}_t \in \Gamma_t$ , suficientemente próximo de  $\gamma(t)$ , que pertence a  $B(x_k, t)$ .

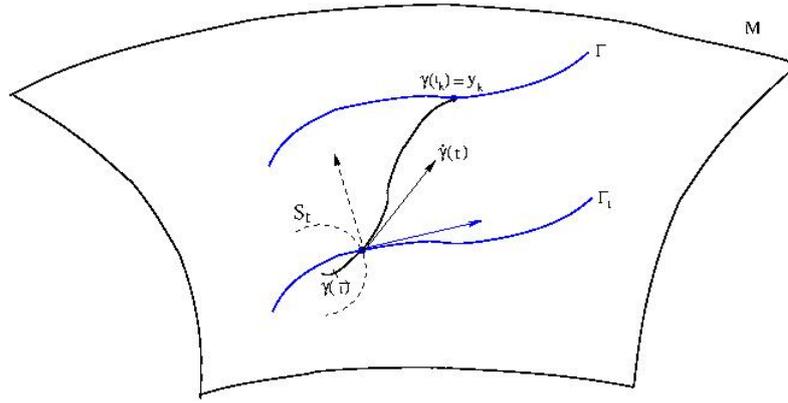


Figura 2.4:

Caso exista  $t \in (\bar{t}, t_k)$  para o qual  $\dot{\gamma}(t)$  não seja normal a  $\Gamma_t$ , então  $\Gamma_t$  é transversal a  $S_t$ . Daí existirá um  $y_t \in \Gamma_t$  que satisfaz nossa afirmação (ver figura 2.4). Suponhamos que  $\dot{\gamma}(t) \perp \Gamma_t$  para todo  $t \in (\bar{t}, t_k)$ . Neste caso,  $\Gamma_t$  e  $S_t$  são tangentes em  $\gamma(t)$ . Mas pelo Lema 2 aplicado à função  $d_k$ , obtemos

$$\text{Hess } d_k(w, w) = \langle \sigma_t(w, w), -\dot{\gamma}(t) \rangle, \quad \forall w \in T_{\gamma(t)}S_t = T_{\gamma(t)}\Gamma_t, \quad (2.45)$$

onde  $\sigma_t$  é a segunda forma fundamental de  $S_t$ . Segue de (2.44) e (2.45) que

$$\lim_{t \rightarrow t_k} \langle \sigma_t(w, w), -\dot{\gamma}(t) \rangle = -\infty$$

com  $w(t) = \frac{J(t)}{\|J(t)\|}$ .

Denotando por  $\bar{\sigma}_t$  a segunda forma fundamental de  $\Gamma_t$ , pela expressão acima deve existir  $t \in (\bar{t}, t_k)$  tal que

$$\langle \bar{\sigma}_t(w(t), w(t)), -\dot{\gamma}(t) \rangle > \langle \sigma_t(w(t), w(t)), -\dot{\gamma}(t) \rangle. \quad (2.46)$$

Tomemos agora uma curva  $\alpha : (-\delta, \delta) \rightarrow \Gamma_t$  suave e que satisfaz  $\alpha(0) = \gamma(t)$  e  $\dot{\alpha}(0) = w(t)$ . Definimos então  $f(s) = d_k(\alpha(s))$ , e teremos

$$f(0) = d_k(\gamma(t)) = t \quad \text{e} \quad f'(s) = \langle \nabla d_k(\alpha(s)), \dot{\alpha}(s) \rangle. \quad (2.47)$$

Em particular,  $f'(0) = \langle \dot{\gamma}(t), w(t) \rangle = 0$ , pois  $w(t) \in T_{\gamma(t)}\Gamma_t$ . Denotando por  $\bar{\nabla}^0$  a conexão sobre  $\Gamma$  e utilizando as expressões (2.45) e (2.47) tem-se

$$\begin{aligned} f''(0) &= \langle \nabla_{\dot{\alpha}(0)} \nabla d_k, \dot{\alpha}(0) \rangle + \langle \nabla d_k, \nabla_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha}(\gamma(t)) \rangle \\ &= \langle \nabla_{w(t)} \nabla d_k, w(t) \rangle + \langle \dot{\gamma}(t), \nabla_{w(t)} w(t) \rangle \\ &= \text{Hess } d_k(w(t), w(t)) + \langle \dot{\gamma}(t), \bar{\sigma}_t(w(t), w(t)) + \bar{\nabla}^0_{w(t)} w(t) \rangle \\ &= \langle \sigma_t(w(t), w(t)), -\dot{\gamma}(t) \rangle + \langle \bar{\sigma}_t(w(t), w(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Substituindo a expressão (2.46) em (2.48), obtem-se  $f''(0) < 0$ . Sendo  $f(0) = t$  e  $f'(0) = 0$ , concluímos que 0 é ponto de máximo local de  $f$ , e conseqüentemente,  $d_k(\alpha(s)) = f(s) < t$ , para todo  $s \neq 0$ , suficientemente pequeno. Como a imagem de  $\alpha$  está contida em  $\Gamma_t$ , concluímos que existe um  $y_t$  satisfazendo nossa afirmação.

Agora, por ser  $\Gamma_t \parallel \Gamma$ , existe  $y \in \Gamma$  tal que  $d(y_t, y) \leq t_k - t$ . Combinando isto com o fato de  $d_k(y_t) < t$  e lembrando da definição de  $\Gamma$ , vem

$$d_k(y) = d(x_k, y) \leq d(x_k, y_t) + d(y_t, y) < t_k - t + t = d_k(y_k),$$

donde

$$f_k(y) = f(y) - \varepsilon_k d_k^2(y) > f(y_k) - d_k^2(y_k) = f_k(y_k),$$

o que contraria a maximalidade de  $y_k$ . Com isso,  $f_k$  é diferenciável em  $y_k$ .

Para o que nos resta provar é suficiente supor que  $y_k \neq x_k$  (pois se  $y_k = x_k$  então  $\nabla d_k^2(x_k) = 0$  e  $\text{Hess } d_k^2(x_k)(v, v) \geq 2 \cdot \|v\|^2$ , e portanto as condições (2.35) e (2.36) são trivialmente satisfeitas). Neste caso,

$$0 = \nabla f_k(y_k) = \nabla f(y_k) - 2\varepsilon_k d_k(y_k) \nabla d_k(y_k) \tag{2.49}$$

e lembrando que  $\|\nabla d_k\| = 1$  e  $d_k(y_k) \leq \delta_k$ , segue da expressão (2.37) que

$$\|\nabla f\|(y_k) = 2\varepsilon_k d_k(x_k, y_k) \leq 2\varepsilon_k \delta_k = 2r_k^{\frac{3}{4}}. \tag{2.50}$$

Novamente pelo fato de  $y_k$  ser ponto de máximo, obtemos

$$0 \geq \text{Hess } f_k(y_k)(v, v) = \text{Hess } f(y_k)(v, v) - \varepsilon_k \text{Hess } d_k^2(y_k)(v, v)$$

o que nos dá

$$\text{Hess } f(y_k)(v, v) \leq \varepsilon_k \text{Hess } d_k^2(y_k)(v, v). \tag{2.51}$$

Tomando o traço na expressão acima, vem

$$\Delta f(y_k) \leq \varepsilon_k \Delta d_k^2(y_k). \tag{2.52}$$

Como por hipótese a variedade considerada possui curvatura seccional limitada inferiormente, digamos  $K \geq -k_0^2$ , então pela Proposição 16 e por (1.22)

$$\begin{aligned} \text{Hess } d_k^2(y_k)(v, v) &\leq 2(d_k(y_k) \coth(k_0 d_k(y_k)) + 1) \|v\|^2 \\ &\leq 2(\delta_k \coth(k_0 \delta_k) + 1) \|v\|^2, \end{aligned}$$

pois  $d_k(\mathbf{y}_k) \leq \delta_k$  e  $\coth$  é crescente. Ademais, como  $\delta_k \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow +\infty$ , existe uma constante  $C > 1$ , tal que  $\delta_k \coth(k_0 \delta_k) + 1 \leq 2C$ . Então

$$\text{Hess } d_k^2(\mathbf{y}_k)(v, v) \leq 4C\|v\|^2 \quad (2.53)$$

e (2.36) segue por (2.51) e (2.53).

Para o caso do laplaciano, supomos que a curvatura de Ricci seja limitada inferiormente por  $\text{Ric} \geq -k_0^2$ . Logo, a Proposição 1 e a expressão (1.23) implicam, de modo análogo ao caso do hessiano, que

$$\begin{aligned} \Delta d_k^2(\mathbf{y}_k) &\leq 2[(m-1)d_k(\mathbf{y}_k)k_0 \coth(k_0 d_k(\mathbf{y}_k)) + 1] \\ &\leq 4(m-1)C. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Concluimos então a validade de (2.36) substituindo (2.54) em (2.52). ■

## 2.4 Omori-Yau sob outras Hipóteses

A validade do Princípio do Máximo do Omori-Yau independe da curvatura da variedade. Este fato foi observado por Pigola, Rigoli e Setti em [16]. Utilizaremos a técnica utilizada na demonstração do Teorema 1 para refinar o resultado proposto por estes pesquisadores. Especificamente, conseguimos o seguinte

**Teorema 5.** *Seja  $M^m$  uma variedade Riemanniana completa e assuma que existe uma função não negativa  $\gamma$  satisfazendo as seguintes propriedades:*

*h1)  $\gamma(x) \rightarrow +\infty$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ ;*

*h2)  $\|\nabla\gamma\| \leq A \sqrt[p]{G(\gamma)} \left( \int_0^\gamma \frac{ds}{\sqrt[p]{G(s)}} + 1 \right)$ , fora de um conjunto compacto;*

*h3)  $\Delta\gamma \leq B \sqrt[p]{G(\gamma)} \left( \int_0^\gamma \frac{ds}{\sqrt[p]{G(s)}} + 1 \right)$ , fora de um conjunto compacto;*

*para certas constantes positivas  $A, B > 0$ , onde  $p \in \mathbb{N}$  é fixado e  $G : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  é uma função suave satisfazendo:*

*g1)  $G(0) > 0$  e  $G'(t) \geq 0$ ;*

$$g2) \int_0^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt[p]{G(s)}} = +\infty.$$

Se  $u \in \mathcal{C}^2(M)$  é uma função que satisfaz

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{u(x)}{\varphi(\gamma(x))} = 0, \quad (2.55)$$

onde

$$\varphi(t) = \log \left( \int_0^t \frac{ds}{\sqrt[p]{G(s)}} + 1 \right),$$

então existe uma sequência  $x_n \in M$ ,  $n \in \mathbb{N}$  tal que:

$$i) \|\nabla u\|(x_n) < \frac{1}{n};$$

$$ii) \Delta u(x_n) < \frac{1}{n};$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Se, ao invés de h3) nós assumirmos

$$h4) \text{Hess } \gamma(.,.) \leq \sqrt[p]{G(\gamma)} \left( \int_0^\gamma \frac{ds}{\sqrt[p]{G(s)}} + 1 \right) \langle ., . \rangle, \text{ fora de um conjunto compacto.}$$

No sentido das formas quadráticas, a conclusão de ii) se modifica para

$$iii) \text{Hess } u(x_n)(.,.) < \frac{1}{n} \langle ., . \rangle.$$

**Demonstração:** Fixamos uma sequência de números reais positivos  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tais que,  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  e consideremos agora uma função  $u \in \mathcal{C}^2(M)$  que satisfaça (2.55). Defina

$$g_n(x) = u(x) - \varepsilon_n \varphi(\gamma(x)). \quad (2.56)$$

e observe que  $\varphi$  é  $\mathcal{C}^2(M)$ , positiva e vale

$$\varphi(t) \rightarrow +\infty, \text{ quando } t \rightarrow +\infty.$$

Por uma cálculo direto, temos

$$\varphi'(t) = \left[ \sqrt[p]{G(t)} \left( \int_0^t \frac{ds}{\sqrt[p]{G(s)}} + 1 \right) \right]^{-1}, \quad (2.57)$$

$$\varphi''(t) = - \left[ \sqrt[p]{G(t)} \left( \int_0^t \frac{ds}{\sqrt[p]{G(s)}} + 1 \right) \right]^{-2} \left[ \frac{G'(t)}{p \sqrt[p]{(G(t))^{p-1}}} \left( \int_0^t \frac{ds}{\sqrt[p]{G(s)}} + 1 \right) + 1 \right]$$

e usando as propriedades satisfeitas por  $G$ , concluímos que

$$\varphi''(t) \leq 0. \quad (2.58)$$

É fácil ver que  $g_n$  atinge seu supremo em algum ponto  $x_n \in M$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Segue diretamente da definição de  $g_n$  que

$$\nabla g_n(x) = \nabla u(x) - \varepsilon_n \varphi'(\gamma(x)) \nabla \gamma(x).$$

Em particular, nos pontos  $x_n$  obtemos

$$\|\nabla u\|(x_n) = \varepsilon_n \varphi'(\gamma(x_n)) \|\nabla \gamma\|(x_n). \quad (2.59)$$

Usando h2) e (2.57), na igualdade acima, teremos

$$\|\nabla u\|(x_n) = \varepsilon_n \varphi'(\gamma(x_n)) \|\nabla \gamma\|(x_n) \leq \varepsilon_n.$$

o que prova i).

Similarmente, a expressão (2.56) combinada com (2.58), implica que

$$\begin{aligned} \text{Hess } g_n(x)(v, v) &= \text{Hess } u(x)(v, v) - \varepsilon_n (\varphi'(\gamma(x)) \text{Hess } \gamma(x)(v, v) - \\ &\quad - \varphi''(\gamma(x)) \langle \nabla \gamma(x), v \rangle^2) \\ &\geq \text{Hess } u(x)(v, v) - \varepsilon_n \varphi'(\gamma(x)) \text{Hess } \gamma(x)(v, v), \end{aligned}$$

para todo  $v$ . Usando o fato que  $x_n$  é um ponto de máximo de  $g_n$ , a hipótese h4) e a inequação (2.57), nos darão

$$\text{Hess } u(x_n)(v, v) \leq \varepsilon_n \varphi'(\gamma(x_n)) \text{Hess } \gamma(x_n)(v, v) \leq \varepsilon_n \langle v, v \rangle. \quad (2.60)$$

Isto prova iii).

Finalmente, se assumirmos que h3) ocorra, obteremos

$$\Delta u(x_n) \leq \varepsilon_n \varphi'(\gamma(x_n)) \Delta \gamma(x_n) \leq \varepsilon_n.$$

O que encerra nossa prova. ■

**Obs 3.** Se trocarmos a condição (2.55) por  $\sup u < +\infty$ , teremos

$$iii) \lim_{n \rightarrow +\infty} u(x_n) = \sup u .$$

De fato, observe que se fixarmos  $j \in \mathbb{N}$ , existe um  $\mathbf{y} \in M$  tal que

$$\mathbf{u}(\mathbf{y}) > \sup \mathbf{u} - 1/2j. \quad (2.61)$$

Portanto, denotando por  $x_k$  os pontos de máximo de  $g_k$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ , temos

$$\mathbf{u}(x_k) - \varepsilon_k \log \left( \int_0^{\gamma(x_k)} \frac{ds}{\sqrt[p]{G(s)}} + 1 \right) = g_k(x_k) \geq \mathbf{u}(\mathbf{y}) - \varepsilon_k \log \left( \int_0^{\gamma(\mathbf{y})} \frac{ds}{\sqrt[p]{G(s)}} + 1 \right).$$

A expressão (2.61) e o fato de  $\varepsilon_k \log \left( \int_0^{\gamma(x_k)} \frac{ds}{\sqrt[p]{G(s)}} + 1 \right) > 0$  aplicados a inequação acima nos dará

$$\mathbf{u}(x_k) > \sup \mathbf{u} - \frac{1}{2j} - \varepsilon_k \log \left( \int_0^{\gamma(\mathbf{y})} \frac{ds}{\sqrt[p]{G(s)}} + 1 \right). \quad (2.62)$$

Escolhendo agora  $k_j$  suficientemente grande de tal sorte que

$$\varepsilon_{k_j} \log \left( \int_0^{\gamma(\mathbf{y})} \frac{ds}{\sqrt[p]{G(s)}} + 1 \right) < \frac{1}{2j}, \quad (2.63)$$

segue de (2.63) e (2.62) que

$$\mathbf{u}(x_{k_j}) > \sup \mathbf{u} - \frac{1}{2j} - \frac{1}{2j} = \sup \mathbf{u} - \frac{1}{j}. \quad (2.64)$$

Portanto  $\lim_{j \rightarrow +\infty} \mathbf{u}(x_{k_j}) = \sup \mathbf{u}$  e isto prova nossa observação.

O Teorema 5 é uma generalização do Teorema 1.9 apresentado em [16], no sentido de que as hipóteses impostas nele são mais fracas que as hipóteses propostas no referido trabalho. Com efeito, as hipóteses sugeridas em [16] para as funções  $\gamma$  e  $G$  são

b.1)  $\|\nabla \gamma\| \leq A\sqrt{\gamma}$ , para alguma constante  $A > 0$ ,

b.2)  $\text{Hess } \gamma(v, v) \leq B\sqrt{\gamma G(\sqrt{\gamma})}\|v\|^2$ , para alguma constante  $B > 0$ ,

b.3)  $\Delta \gamma \leq B\sqrt{\gamma G(\sqrt{\gamma})}$ , para alguma constante  $B > 0$ ,

isto sempre fora de algum compacto; e

g.1)  $G(0) > 0$  e  $G'(t) \geq 0$ ,  $\forall t \geq 0$ ,

g.2)  $\int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{G(s)}} = \infty$ ,

g.3)  $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{tG(\sqrt{t})}{G(t)} < +\infty$ .

A hipótese g.3) implica que  $G$  é uma função própria e que existe uma constante  $c > 0$  tal que  $\sqrt{t} \leq c\sqrt{G(t)}/A$  e  $\sqrt{tG(\sqrt{t})} \leq c\sqrt{G(t)}/B$ . Então por g.2)

$$A\sqrt{t} \leq c\sqrt{G(t)} \leq c\sqrt{G(t)} \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{G(s)}}$$

e

$$B\sqrt{tG(\sqrt{t})} \leq c\sqrt{G(t)} \leq c\sqrt{G(t)} \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{G(s)}}.$$

Assim, o conjunto das variedades que admitem uma função própria  $\gamma$  com as hipóteses b.1), b.2), b.3), g.1), g.2) e g.3) está contido no conjunto das variedades propostas no Teorema 5.

Discutiremos a seguir os conceitos básicos para introduzirmos uma nova versão de Omori-Yau apresentada em 2007 por K.-T. Kim e H. Lee em [10]. Consideremos uma variedade Riemanniana completa  $M$  e lembremos que uma função  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  é própria se, e somente se, o conjunto  $\{p \in M : u(p) \leq r\}$  é compacto, para todo  $r \in \mathbb{R}$ . Fixados uma função  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  e um ponto  $p \in M$ , dizemos que a função  $v : U_p \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $U_p$  é uma vizinhança aberta de  $p$ , é uma *upper-supporting function* de  $u$ , em  $p$ , quando:

- i)  $v(p) = u(p)$ ,
- ii)  $v \geq u$  em  $U_p$ .

**Definição 23.** Denominamos uma função própria  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  de uma *tamed-exhaustion*, se ela satisfaz:

- a)  $u \geq 0$ ,
- b) Para todo  $p \in M$ , existe uma *upper-supporting function*  $v \in \mathcal{C}^2$  para  $u$ , em  $p$ , definida em  $U_p$  tal que  $\|\nabla v\|(p) \leq 1$  e  $\Delta v(p) \leq 1$ .

Com base nesta definição obtemos o seguinte

**Teorema 6** (Kim-Lee [10]). *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana que admite uma função tamed-exhaustion, então vale Omori-Yau para o laplaciano.*

**Demonstração:** Supomos sem perda de generalidade que  $\sup_M f > 0$ . Assim, podemos escolher um ponto  $p \in M$  tal que  $f(p) > 0$ . Para cada  $\varepsilon$  positivo, defina  $X_\varepsilon = \{x \in$

$M : u(x) < 1/\varepsilon\}$ , onde  $u$  é uma função *tamed-exhaustion* definida em  $M$ . Notemos que quando  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ , temos  $X_{\varepsilon_2} \subset X_{\varepsilon_1}$ , e que  $X_\varepsilon \rightarrow M$ , quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Fixamos um número real  $r > 0$ , de tal sorte que  $p \in X_r$ . Assim, a função  $g_r(x) = (1 - ru(x))f(x)$  atinge seu máximo em  $X_r$ . De fato, como  $\bar{X}_r$  é um compacto,  $g_r(p) > 0$  e  $g_r \equiv 0$  na fronteira de  $X_r$ , deve existir um ponto  $x_r \in X_r$  que seja um ponto de máximo de  $g_r$ . Temos ainda que  $g_r(x_r) \geq g_r(p) > 0$ .

Seja agora  $\varepsilon > 0$  que satisfaça  $\varepsilon < r$ . Vale então

$$g_\varepsilon(p) = (1 - \varepsilon u(p))f(p) \geq (1 - ru(p))f(p) = g_r(p) > 0.$$

Ademais,  $g_\varepsilon$  também atinge um máximo positivo em  $X_\varepsilon$ . Denotamos os pontos de máximo dos conjuntos  $X_\varepsilon$  por  $x_\varepsilon$ , para todo  $0 < \varepsilon < r$ .

Consideremos para cada ponto  $x_\varepsilon$  a *upper-supporting function*  $v : U \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^2$ , onde  $U \subset M$  é uma vizinhança de  $x_\varepsilon$ . Reduzindo  $U$ , se preciso for, podemos supor que  $U \subset X_\varepsilon$ , e pela definição de  $v$ , temos

$$(1 - \varepsilon v(x))f(x) \leq (1 - \varepsilon u(x))f(x) \leq (1 - \varepsilon u(x_\varepsilon))f(x_\varepsilon) = (1 - \varepsilon v(x_\varepsilon))f(x_\varepsilon), \quad (2.65)$$

para todo  $x \in U$ . Logo a função  $(1 - \varepsilon v(x))f(x)$  também atinge seu máximo em  $x_\varepsilon$  e deste modo,

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla [(1 - \varepsilon v(x_\varepsilon))f(x_\varepsilon)] \\ &= -\varepsilon \nabla v(x_\varepsilon)f(x_\varepsilon) + (1 - \varepsilon v(x_\varepsilon))\nabla f(x_\varepsilon). \end{aligned}$$

Daí, como  $u(x_\varepsilon) = v(x_\varepsilon)$  e  $\|\nabla v\| \leq 1$ , tem-se

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon v(x_\varepsilon))\|\nabla f\|(x_\varepsilon) &= \varepsilon \|\nabla v\|(x_\varepsilon)\|\nabla f\|(x_\varepsilon) \\ &\leq \varepsilon \sup f. \end{aligned}$$

Como  $0 < \varepsilon < r$ , então  $x_r \in X_r \subset X_\varepsilon$ , e portanto

$$g_\varepsilon(x_r) \leq g_\varepsilon(x_\varepsilon). \quad (2.66)$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} (1 - ru(x_r))f(x_r)\|\nabla f\|(x_\varepsilon) &\leq (1 - \varepsilon u(x_r))f(x_r)\|\nabla f\|(x_\varepsilon) \\ &\leq (1 - \varepsilon u(x_\varepsilon))f(x_r)\|\nabla f\|(x_\varepsilon) \\ &\leq \varepsilon f(x_r) \sup f \leq \varepsilon (\sup f)^2. \end{aligned}$$

Donde segue que

$$\|\nabla f\|(\mathbf{x}_\varepsilon) \leq \varepsilon \left( \frac{(\sup f)^2}{(1 - \mathbf{r}\mathbf{u}(\mathbf{x}_r))f(\mathbf{x}_r)} \right). \quad (2.67)$$

Observamos que  $\frac{(\sup f)^2}{(1 - \mathbf{r}\mathbf{u}(\mathbf{x}_r))f(\mathbf{x}_r)} > 0$ , independentemente do valor de  $\varepsilon$ , com  $0 < \varepsilon < \mathbf{r}$ .

Consideremos agora  $\Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}_\varepsilon)$ . Utilizando novamente (2.65), segue

$$\begin{aligned} 0 &\geq \Delta[(1 - \varepsilon \mathbf{v}(\mathbf{x}_\varepsilon))f(\mathbf{x}_\varepsilon)] \\ &= (1 - \varepsilon \mathbf{v}(\mathbf{x}_\varepsilon))\Delta f(\mathbf{x}_\varepsilon) - \varepsilon f(\mathbf{x}_\varepsilon)\Delta \mathbf{v}(\mathbf{x}_\varepsilon) - 2\varepsilon \langle \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}_\varepsilon), \nabla f(\mathbf{x}_\varepsilon) \rangle. \end{aligned}$$

Por Cauchy-Schwarz e (2.67), temos

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon \mathbf{v}(\mathbf{x}_\varepsilon))\Delta f(\mathbf{x}_\varepsilon) &\leq \varepsilon(2\|\nabla f\|(\mathbf{x}_\varepsilon) + \sup f) \\ &\leq \varepsilon(\mathbf{C}\varepsilon + \sup f), \end{aligned} \quad (2.68)$$

onde  $\mathbf{C} > 0$  é uma constante que independe de  $\varepsilon$  (pela observamos que fizemos acima).

Utilizando (2.66), (2.68) e a definição de  $\mathbf{v}$ , obtemos

$$\begin{aligned} (1 - \mathbf{r}\mathbf{u}(\mathbf{x}_r))f(\mathbf{x}_r)\Delta f(\mathbf{x}_\varepsilon) &\leq (1 - \varepsilon \mathbf{u}(\mathbf{x}_r))f(\mathbf{x}_r)\Delta f(\mathbf{x}_\varepsilon) \\ &\leq (1 - \varepsilon \mathbf{u}(\mathbf{x}_\varepsilon))f(\mathbf{x}_\varepsilon)\Delta f(\mathbf{x}_\varepsilon) \\ &\leq (1 - \varepsilon \mathbf{v}(\mathbf{x}_\varepsilon))f(\mathbf{x}_\varepsilon)\Delta f(\mathbf{x}_\varepsilon) \\ &\leq \varepsilon(\mathbf{C}\varepsilon + \sup f)f(\mathbf{x}_\varepsilon) \\ &\leq \varepsilon(\mathbf{C}\varepsilon + \sup f) \sup f. \end{aligned}$$

Logo

$$\Delta f(\mathbf{x}_\varepsilon) \leq \varepsilon \left( \frac{(\mathbf{C}\varepsilon + \sup f) \sup f}{(1 - \mathbf{r}\mathbf{u}(\mathbf{x}_r))f(\mathbf{x}_r)} \right)$$

e podemos concluir que

$$\Delta f(\mathbf{x}_\varepsilon) \leq \tilde{\mathbf{C}}\varepsilon \quad (2.69)$$

para alguma constante  $\tilde{\mathbf{C}} > 0$  conveniente.

Estabeleceremos agora a relação entre a sequência  $\mathbf{x}_\varepsilon$  e o supremo de  $f$ . Dado  $\eta > 0$ , como  $f$  é uma função limitada superiormente podemos escolher  $\mathbf{y} \in \mathbf{M}$ , tal que  $f(\mathbf{y}) > \sup f - \eta/2$ . Fixamos  $\varepsilon \in (0, \mathbf{r})$  de tal maneira que  $\mathbf{y} \in \mathbf{X}_\varepsilon$ . Escolhendo  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno e que satisfaz  $\varepsilon \mathbf{u}(\mathbf{y})f(\mathbf{y}) < \eta/2$ , obteremos por (2.66)

$$(1 - \varepsilon \mathbf{u}(\mathbf{x}_\varepsilon))f(\mathbf{x}_\varepsilon) \geq (1 - \varepsilon \mathbf{u}(\mathbf{y}))f(\mathbf{y}) > \sup f - \eta.$$

Donde segue que

$$f(x_\varepsilon) > \frac{\sup f - \eta}{1 - \varepsilon u(x_\varepsilon)}. \quad (2.70)$$

As expressões (2.67), (2.69) e (2.70) permitem concluir a validade de Omori-Yau em  $M$ . ■

As versões para o princípio do máximo expostas nesta seção, juntamente com o Teorema 4, constituem as generalizações mais recente de Omori-Yau. Em 1998, Takegoshi propôs em [18] a seguinte conjectura:

**Conjectura 1** (Takegoshi [18]). *Suponha  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana de dimensão  $m > 1$  que admite um ponto  $x \in M$  tal que  $\int_1^{+\infty} \frac{r}{\log \text{Vol}_x(r)} dr = +\infty$ . Então vale Omori-Yau em  $(M, g)$ .*

No mesmo artigo, Takegoshi expôs uma versão fraca para esta conjectura, porém Pigola, Rigoli e Setti em [15], afirmaram que a demonstração dada continha um erro na argumentação. A hipótese considerada por Takegoshi, acerca de estimativas sobre o crescimento de volume, é bem aceita entre os pesquisadores que trabalham com Omori-Yau. Tal idéia também é considerada por Fontenele-Xaiver em [8], mas agora sob o viés de comparação do volume de bolas. Introduzimos a seguinte definição:

**Definição 24.** *Dada uma variedade Riemanniana completa, diremos que ela satisfaz a propriedade local de volume (L.V.P.), quando existem  $a > 0$ ,  $b > 1$ , tais que para qualquer  $x \in M$  e  $0 < r < a$ , vale*

$$\text{Vol } B(x, r) \leq b \text{Vol } B(x, \frac{r}{2}).$$

Fontenele e Xavier propõem a seguinte

**Conjectura 2.** *Se  $M$  é uma variedade que satisfaz a Definição 24 e  $f \in \mathcal{C}^2$  é limitada superiormente, então qualquer sequência maximizante de  $f$  admite uma Boa Sombra que satisfaz Omori-Yau (laplaciano).*

Os autores supracitados provaram em [8] tal conjectura para uma classe particular de funções utilizando ferramentas de Sistemas Dinâmicos. Em termos, tem-se:

**Teorema 7.** *Seja  $M$  uma variedade completa que satisfaz e  $f \in \mathcal{C}^2(M)$  é limitada superiormente, tal que  $\sup \|\text{Hess } f\| < +\infty$ . Então toda sequência maximizante de  $f$  possui uma Boa Sombra de Omori-Yau relativamente ao laplaciano. Ou seja, se  $f(x_k) \rightarrow \sup f$ , então existe uma sequência  $y_k \in M$  tal que  $f(y_k) \rightarrow \sup f$ ,  $d(x_k, y_k) \rightarrow 0$ ,  $\|\nabla f\|(y_k) \rightarrow 0$  e  $\limsup \Delta f(y_k) \leq 0$ .*

**Demonstração:** Seja  $\phi_t$  o fluxo local do campo  $X = \nabla f$  sobre  $M$ , tal que

$$\frac{d}{dt}\phi_t(x) = \nabla f(\phi_t(x)) \quad \text{e} \quad \phi_0(x) = x,$$

com  $t \in [0, \tau(x)) =$  intervalo máximo de existência de solução não negativa. Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , definimos

$$\delta_k = \sqrt{\sup f - f(x_k)} \quad \text{e} \quad r_k = \sqrt{\delta_k}.$$

Como  $\delta_k \rightarrow 0$ , quando  $k \rightarrow \infty$ , podemos supor que  $\delta_k < r_k$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

Fixaremos nossa atenção em encontrar uma sequência  $y_k \in M$ , satisfazendo

$$d(x_k, y_k) \leq r_k \quad \text{e} \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} \Delta(y_k) \leq 0. \quad (2.71)$$

Sempre que  $\delta_k = 0$ , tem-se  $\Delta f(x_k) \leq 0$ , e podemos tomar  $y_k = x_k$ . Quando  $\delta_k > 0$ , temos duas possibilidades:

- a) Toda órbita positiva originada em  $\bar{B}(x_k, r_k^2)$  permanece em  $B(x_k, r_k)$ ;
- b) Existe pelo menos uma trajetória que liga as fronteiras de  $B(x_k, r_k^2)$  e  $B(x_k, r_k)$  em tempo finito.

De fato, tais possibilidades são as únicas possíveis, pois como o campo é gradiente, o mesmo não possui órbitas periódicas.

Supondo que ocorra o item a), é fácil ver que  $\tau(x) = +\infty$ , para todo  $x \in \bar{B}(x_k, r_k^2)$ . Denotemos por  $\mu$  a medida Riemanniana de  $M$ . Como  $\phi_t(B(x_k, r_k^2)) \subset B(x_k, r_k)$ , então pela fórmula de Liouville (Vide [13]), para todo  $t \geq 0$  vale

$$\mu(B(x_k, r_k)) \geq \mu(\phi_t(B(x_k, r_k^2))) = \int_{B(x_k, r_k^2)} \exp\left(\int_0^t \Delta f(\phi_s(p)) ds\right) d\mu(p). \quad (2.72)$$

Se existisse um  $\varepsilon > 0$  de tal sorte que  $\Delta f(y) \geq \varepsilon$ , para todo  $y \in (B(x_k, r_k))$ , então ao fazer  $t \rightarrow +\infty$  em (2.72), iríamos ter

$$\mu(B(x_k, r_k)) \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{B(x_k, r_k^2)} \exp(t\varepsilon) d\mu(p) = +\infty.$$

O que é uma contradição.

Passamos então a trabalhar sob as hipóteses do item **b**). Tomemos  $\tau_k \in (0, \tau(x_k)]$  como sendo o menor tempo que a trajetória leva para ir de  $\partial B(x_k, r_k^2)$  a  $\partial B(x_k, r_k)$ , ou seja,

$$\tau_k = \inf\{t : t \in (0, \tau(x)), x \in \partial B(x_k, r_k^2) \text{ e } \phi_t(x) \in \partial B(x_k, r_k)\}.$$

Em particular,

$$\phi_{\tau_k}(\bar{B}(x_k, r_k^2)) \subset \bar{B}(x_k, r_k).$$

Vamos estimar o valor de  $\tau_k$ . Para tanto, seja  $p_k \in \partial B(x_k, r_k^2)$  e  $t_k \in (0, \tau(p_k))$  de tal maneira que  $\phi_{t_k}(p_k) \in \partial B(x_k, r_k)$  e  $t_k < 2\tau_k$ . Usando o fato do campo ser gradiente e a desigualdade de Cauchy, obtemos

$$\begin{aligned} f(\phi_{t_k}(p_k)) - f(p_k) &= \int_0^{t_k} (f \circ \phi_s)' ds = \int_0^{t_k} \|\nabla f\|^2(\phi_s(p_k)) ds \\ &\geq \frac{1}{t_k} \left[ \int_0^{t_k} \|\nabla f\|(\phi_s(p_k)) ds \right]^2. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Lembremos que o comprimento do segmento de órbita do campo  $X$  entre 0 e  $t_k$  é dado por  $\int_0^{t_k} \|\nabla f\|(\phi_s(p_k)) ds$ . Assim, como o último ponto do segmento de órbita pertence a  $\partial B(x_k, r_k)$ , o comprimento de tal segmento de órbita é maior ou igual a  $r_k(1 - r_k)$ . Substituindo esta informação em (2.73), vem

$$\frac{\delta_k(1 - r_k)^2}{2\tau_k} \leq \frac{r_k^2(1 - r_k)^2}{t_k} \leq f(\phi_{t_k}(p_k)) - f(p_k) \leq \sup f - f(p_k). \quad (2.74)$$

Estimaremos agora  $\sup f - f(p_k)$ . Para tanto, defina  $h(x) = \|\nabla f\|^2(x) + \varepsilon$ , com  $\varepsilon > 0$ . Dados  $p, q \in M$ , consideremos a geodésica minimizante normalizada,  $\gamma : [0, \bar{b}] \rightarrow M$ , que liga  $p$  a  $q$ . Se  $K > 0$  é uma cota superior para a norma de Hess  $f$ , então pela definição de  $h$

$$\left\| \frac{d}{dt} h(\gamma(t)) \right\| = 2\langle \nabla_{\dot{\gamma}} \nabla f, \nabla f \rangle \leq 2K\|\nabla f\| \leq 2K\sqrt{h(\gamma(t))},$$

e assim, pela desigualdade do valor médio,

$$\left\| \sqrt{h(\gamma(t))} - \sqrt{h(\gamma(0))} \right\| \leq \frac{d}{dt} \left( \sqrt{h(\gamma(t))} \right) \Big|_{t=\bar{t}} (t - 0) = \frac{d}{dt} (h(\gamma(\bar{t}))) \Big|_{2\sqrt{h(\gamma(t))}} t \leq Kt.$$

Para  $t = \bar{b}$ , temos

$$\left| \|\nabla f\|(q) - \|\nabla f\|(p) \right| \leq K\bar{b} = Kd(p, q), \quad \forall p, q \in M. \quad (2.75)$$

Note que a expressão acima independe do valor de  $\varepsilon$ .

Por outro lado, pelo Teorema 3 existe  $\mathbf{q}_k \in \bar{B}(\mathbf{x}_k, \delta_k)$  tal que  $\|\nabla f\|(\mathbf{q}_k) \leq \delta_k$ . Usando (2.75), obtemos para todo  $\mathbf{z} \in \bar{B}(\mathbf{x}_k, \delta_k)$

$$\begin{aligned} \|\nabla f\|(\mathbf{z}) &\leq \left| \|\nabla f\|(\mathbf{z}) - \|\nabla f\|(\mathbf{q}_k) \right| + \|\nabla f\|(\mathbf{q}_k) \\ &\leq \|\nabla f\|(\mathbf{q}_k) + Kd(\mathbf{q}_k, \mathbf{z}) \\ &\leq \delta_k(1 + 2K). \end{aligned} \tag{2.76}$$

Considerando o segmento de geodésica minimizante e normalizado,  $\gamma : [0, \delta_k] \rightarrow M$ , que liga  $\mathbf{x}_k$  a  $\mathbf{p}_k$ , segue de (2.76) que

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{p}_k) - f(\mathbf{x}_k)\| &\leq \int_0^{\delta_k} \|\langle \nabla f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle\| dt \\ &\leq \int_0^{\delta_k} \|\nabla f\|(\gamma(t)) dt \\ &\leq \int_0^{\delta_k} \delta_k(1 + 2K) dt = \delta_k^2(1 + 2K). \end{aligned} \tag{2.77}$$

As expressões (2.74) e (2.77) nos darão

$$\begin{aligned} \frac{\delta_k(1 - r_k)^2}{2\tau_k} &\leq \sup f - f(\mathbf{x}_k) + f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{p}_k) \\ &\leq \delta_k^2 + \delta_k^2(1 + 2K) \\ &\leq 2\delta_k^2(1 + K) \end{aligned}$$

e daí

$$\frac{(1 - r_k)^2}{\tau_k} \leq 4\delta_k(1 + K) \tag{2.78}$$

Como  $\delta_k \rightarrow 0$  e  $r_k \rightarrow 0$ , quando  $k \rightarrow \infty$ , particularmente temos que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = +\infty$ .

Novamente pela fórmula de Liouville,

$$\mu(\Phi_{\tau_k}(B(\mathbf{x}_k, r_k^2))) = \int_{B(\mathbf{x}_k, r_k^2)} \exp\left(\int_0^{\tau_k} \Delta f(\Phi_s(\mathbf{x})) ds\right) d\mu(\mathbf{x}). \tag{2.79}$$

A desigualdade de Jensen, (Vide [12]), aplicada à medida de probabilidade  $\nu/\nu(\Omega)$ , onde  $\nu$  é a medida finita sobre  $\Omega$ , nos diz que:

$$\psi\left(\frac{1}{\nu(\Omega)} \int_{\Omega} g d\nu\right) \leq \frac{1}{\nu(\Omega)} \int_{\Omega} (\psi \circ g) d\nu, \tag{2.80}$$

onde  $\psi$  é convexa e  $g$  é integrável. Trocando  $\psi$  por  $\exp$  e  $g$  por  $\int_0^{\tau_k} \Delta f(\phi_s(x)) ds$  em (2.80), então (2.79) implicará em

$$\begin{aligned} \frac{\mu(\phi_{\tau_k})(B(x_k, r_k^2))}{\mu(B(x_k, r_k^2))} &= \frac{\int_{B(x_k, r_k^2)} \exp\left(\int_0^{\tau_k} \Delta f(\phi_s(x)) ds\right) d\mu(x)}{\mu(B(x_k, r_k^2))} \\ &\geq \exp\left[\frac{1}{\mu(B(x_k, r_k^2))} \int_{B(x_k, r_k^2)} \left(\int_0^{\tau_k} \Delta f(\phi_s(x)) ds\right) d\mu(x)\right] \end{aligned} \quad (2.81)$$

Como  $M$  satisfaz a propriedade local de volume, L.V.P., podemos afirmar que

$$\frac{\mu(B(x, d))}{\mu(B(x, c))} \leq b^{\frac{d}{c}}, \quad \forall x \in M \text{ e } 0 < c < d < \alpha. \quad (2.82)$$

De fato, como  $\text{Vol } B(x, r) \leq b \text{Vol } B(x, r/2)$ , para  $r < \alpha$ , indutivamente obtemos

$$\text{Vol } B(x, r) \leq b^k \text{Vol } B(x, r/2^k).$$

Portanto, se  $0 < c < d < \alpha$  e  $k$  é tal que  $d/c \leq 2^k$  e  $2^{k-1} < d/c$ , então  $k \leq 2^{k-1} < d/c$ .

Em particular, como  $b > 1$ ,

$$\text{Vol } B(x, d) \leq b^k \text{Vol } B(x, d/2^k) \leq b^k \text{Vol } B(x, c) < b^{\frac{d}{c}} \text{Vol } B(x, c).$$

Lembrando que  $\phi_{\tau_k}(\bar{B}(x_k, r_k^2)) \subset \bar{B}(x_k, r_k)$ , segue de (2.81) com (2.82) que

$$\exp\left[\frac{1}{\mu(B(x_k, r_k^2))} \int_{\mu(B(x_k, r_k^2))} \left(\int_0^{\tau_k} \Delta f(\phi_s(x)) ds\right) d\mu(x)\right] \leq \frac{\mu(B(x_k, r_k))}{\mu(B(x_k, r_k^2))} \leq b^{\frac{1}{r_k}},$$

a qual implica

$$\frac{1}{\mu(B(x_k, r_k^2))} \int_{\mu(B(x_k, r_k^2))} \left(\int_0^{\tau_k} \Delta f(\phi_s(x)) ds\right) d\mu(x) \leq \frac{\ln b}{r_k}. \quad (2.83)$$

No que segue, denotaremos  $\Omega_k = B(x_k, r_k^2) \times [0, \tau_k]$  munido da medida de probabilidade  $\nu$ , dada pela normalização da medida produto sobre  $B(x_k, r_k^2) \times [0, \tau_k]$ . Dividindo (2.83) por  $\tau_k$  e usando (2.78), chegaremos em

$$\int_{\Omega_k} \Delta f(\phi_s(x)) d\nu(x, s) \leq \frac{\ln b}{\tau_k r_k} \leq \frac{4(1+K)r_k \ln b}{(1-r_k)^2}, \quad (2.84)$$

pois  $\mu(\Omega_k) = 1$ . Por (2.84) existem  $s_k \in [0, \tau_k]$  e  $y'_k \in B(x_k, r_k^2)$  tais que, para  $y_k = \phi_{s_k}(y'_k)$ , tem-se

$$d(x_k, y_k) \leq r_k, \quad \Delta f(y_k) \leq \frac{4r_k(1+K) \ln b}{(1-r_k)^2}$$

e portanto, fazendo  $r_k \rightarrow 0$ , finalizamos nossa primeira etapa estabelecendo a validade de (2.71).

Provaremos agora que a sequência  $y_k$  acima obtida é maximizante. Procedendo de modo inteiramente análogo a (2.76), obtemos

$$\|\nabla f\|(z) \leq r_k(1 + 2K). \quad (2.85)$$

Utilizando (2.85) de maneira semelhante ao que foi feito com (2.76) em (2.77), obteremos

$$f(y_k) \leq f(x_k) + r_k^2(1 + 2K).$$

Resta-nos mostrar que  $\|\nabla f\|(y_k) \rightarrow 0$ , quando  $k \rightarrow \infty$ . Não obstante, outra vez fazendo uso do Teorema 3 determinamos a existência de uma sequência  $l_k$  com  $d(y_k, l_k) \rightarrow 0$  e  $\|\nabla f\|(l_k) \rightarrow 0$ . Mas aplicando (2.75) a  $y_k$  e  $l_k$ , veremos que  $\|\nabla f\|(y_k) \rightarrow 0$ , quando  $k \rightarrow \infty$ . Concluindo nossa demonstração.

■

## Capítulo 3

# Aplicações do Princípio do Máximo de Omori-Yau

Como de praxe em Matemática, são as aplicações que motivam o estudo de novas teorias. Com o Princípio do Máximo de Omori-Yau não foi muito diferente. Foi estudando as condições para imergir uma variedade em espaços Euclidianos, mais precisamente em um cone não degenerado, que H. Omori em [14] se propôs a estender o princípio do máximo para variedades Riemannianas não compactas. Desde então diversos trabalhos tem sido publicados utilizando Omori-Yau como ferramenta fundamental para demonstração de resultados geométricos e também não geométricos. Neste capítulo iremos descrever algumas aplicações deste princípio do máximo, remetendo o leitor interessado em mais aplicações a [1], [8], [16] e [17].

Quase todas as aplicações aqui descritas foram extraídas de Xin-Chen [3]. Nossa primeira aplicação é uma generalização de um resultado clássico obtido por Jorge-Xavier [9].

**Teorema 8.** *Dada  $M$  uma variedade Riemanniana completa  $m$ -dimensional, com  $\text{Ric} \geq -cF(\mathbf{y})$ , onde  $c, F$  e  $\mathbf{y}$  são como no Teorema 2. Sejam  $N$  uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional limitada superiormente por uma constante  $K$  e  $B_R(\mathbf{y}_0)$  uma bola geodésica normal de raio  $R$ , em torno de  $\mathbf{y}_0 \in N$  ( $R < (\pi/2)\sqrt{K}$ , se  $K > 0$ ). Se  $f : M \rightarrow N$  é uma aplicação suave com campo de tensão limitado  $\|\tau\| \leq m\tau_0$  ( $\tau_0$  constante) e  $f(M) \subset B_R(\mathbf{y}_0)$ , então*

$$1. R \geq \frac{1}{\sqrt{K}} \tan^{-1} \left( \frac{2\sqrt{K} \inf e(f)}{m\tau_0} \right), \text{ quando } K > 0;$$

$$2. \ R \geq \frac{2 \inf e(f)}{m\tau_0}, \text{ quando } K = 0;$$

$$3. \ R \geq \frac{1}{\sqrt{-K}} \tanh^{-1} \left( \frac{2\sqrt{-K} \inf e(f)}{m\tau_0} \right), \text{ quando } K < 0;$$

onde  $e(f)$  é a densidade de energia de  $f$ .

**Demonstração:** Façamos o caso onde  $K < 0$  e  $K = 0$ , o outro caso é análogo ao primeiro. Quando  $K < 0$ , considere a função  $l = 1 + \cosh(\sqrt{-K}\rho)$ ,  $l : B_R(y_0) \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\rho(y) = d(y, y_0)$  em  $N$ . Assim,  $l$  é limitada e suave. É fácil ver que

$$\begin{aligned} \text{Hess } l(v, v) &= \sqrt{-K} \sinh(\sqrt{-K}\rho) \text{Hess } \rho(v, v) - K \cosh(\sqrt{-K}\rho) \langle \nabla \rho, v \rangle^2 \\ &\geq \sqrt{-K} \sinh(\sqrt{-K}\rho) \text{Hess } \rho(v, v). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Pela Proposição 16 e por (1.22), substituídos em (3.1), teremos

$$\text{Hess } l(v, v) \geq -K \cosh(\sqrt{-K}\rho) \langle v, v \rangle. \quad (3.2)$$

Tomemos agora a função  $u = l \circ f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , que também é limitada e suave. Aplicando o Teorema 2 obtemos  $\Delta u(x) < \varepsilon$ , para todo  $\varepsilon > 0$ . Segue de (3.2)

$$\begin{aligned} \varepsilon &> \Delta u = \Delta(l \circ f) = \text{Hess } l(f_* X_i, f_* X_i) + \langle \nabla l, \text{tr}(\alpha_f) \rangle \\ &\geq -K \cosh(\sqrt{-K}\rho) \langle f_* X_i, f_* X_i \rangle + \langle \nabla l, \tau(f) \rangle \\ &\geq -2K \cosh(\sqrt{-K}\rho) e(f) + \sqrt{-K} \sinh(\sqrt{-K}\rho) \langle \nabla \rho, \tau(f) \rangle. \end{aligned}$$

Como  $f(M) \subset B_R(y_0)$ , tem-se  $\rho(f(x)) < R$  e portanto  $\cosh(\sqrt{-K}\rho) \leq \cosh(\sqrt{-K}R)$ . Daí, por Cauchy-Schwarz e pela hipótese, vem

$$\begin{aligned} \varepsilon &> -2K \cosh(\sqrt{-K}R) e(f) - \sqrt{-K} \sinh(\sqrt{-K}R) m\tau_0 \\ &\geq \sqrt{-K} \cosh(\sqrt{-K}R) \cdot (2\sqrt{-K} \inf e(f) - \tanh(\sqrt{-K}R) m\tau_0), \quad \forall \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$2\sqrt{-K} \inf e(f) - \tanh(\sqrt{-K}R) m\tau_0 \leq 0,$$

donde segue que

$$R \geq \frac{1}{\sqrt{-K}} \tanh^{-1} \left( \frac{2\sqrt{-K} \inf e(f)}{\sqrt{-K} m\tau_0} \right).$$

Passamos então ao caso  $K = 0$ . Observamos inicialmente que  $\text{Hess } \rho(v, v) = (1/\rho)\langle v, v \rangle$ . Seguindo a demonstração dada acima, defina  $u = \rho^2 \circ f$ , e pelos mesmos argumentos, segue

$$\begin{aligned} \varepsilon &> \Delta u = \text{Hess } \rho^2(f_* e_i, f_* e_i) + d\rho^2(\tau(f)) \\ &= 2\rho \text{Hess } \rho(f_* e_i, f_* e_i) + 2\langle \nabla \rho, f_* e_i \rangle^2 + \langle \nabla \rho^2, \tau(f) \rangle \\ &\geq 2\rho \frac{1}{\rho} \langle f_* e_i, f_* e_i \rangle + 2\rho \langle \nabla \rho, \tau(f) \rangle \\ &\geq 4 \inf e(f) - 2\rho \|\tau(f)\| \\ &> 4 \inf e(f) - 2\text{Rm}\tau_0, \end{aligned}$$

donde segue o resultado. ■

**Corolário 2.** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana completa com curvatura escalar  $S \geq -cF$ , a qual é isometricamente imersa na variedade Riemanniana  $\bar{M}$  de curvatura seccional satisfazendo  $\|K_{\bar{M}}\| \leq K_2$ , onde  $K_2$  é constante. Assuma que o vetor curvatura média  $H$  de  $M$  em  $\bar{M}$  é limitado, com  $\|H\| \leq H_0$ ,  $H_0$  constante. Dadas  $N$  e  $f$  como no Teorema 8, então as conclusões de tal teorema continuam válidas.*

**Demonstração:** Dada  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ , uma base ortonormal de  $T_p M$ , é fácil ver que se a curvatura seccional é limitada por uma constante então a curvatura de Ricci também será limitada pela mesma constante. Utilizando a Equação de Gauss (1.11) teremos

$$\begin{aligned} \text{Ric}_p(X_j) &= \sum_{i \neq j}^n \frac{1}{n-1} [\langle \bar{R}(X_j, X_i)X_j, X_i \rangle + \langle \alpha(X_i, X_i), \alpha(X_j, X_j) \rangle - \|\alpha(X_i, X_j)\|^2] \\ &\leq K_2 + \frac{1}{n-1} \left[ \langle \alpha(X_j, X_j), nH(p) - \alpha(X_j, X_j) \rangle - \sum_{i \neq j}^n \|\alpha(X_i, X_j)\|^2 \right] \\ &\leq K_2 + \frac{1}{n-1} \left[ \langle \alpha(X_j, X_j), nH(p) \rangle - \sum_{i=1}^n \|\alpha(X_i, X_j)\|^2 \right], \end{aligned}$$

o que pela definição de curvatura escalar nos dá

$$\begin{aligned} S(p) &\leq K_2 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{n(n-1)} \left[ \langle \alpha(X_j, X_j), nH(p) \rangle - \sum_{i,j=1}^n \|\alpha(X_i, X_j)\|^2 \right] \\ &\leq K_2 + \frac{1}{n(n-1)} n^2 \|H(p)\|^2 - \frac{1}{n(n-1)} \|\alpha\|^2. \end{aligned}$$

Mas por hipótese,  $S(p) \geq -cF$  e  $\|H\| \leq H_0$ , donde

$$-cF \leq K_2 + \frac{n}{(n-1)} H_0^2 - \frac{1}{n(n-1)} \|\alpha\|^2.$$

Segue portanto que

$$\frac{1}{n-1} \|\alpha\|^2 \leq nK_2 + \frac{n^2}{(n-1)} H_0^2 + ncF.$$

Aplicando novamente a Equação de Gauss (1.11) e substituindo na inequação acima, encontraremos

$$\begin{aligned} K(X_i, X_j) &\geq -K_2 + \langle \alpha(X_i, X_i), \alpha(X_j, X_j) \rangle - \|\alpha(X_i, X_j)\|^2 \\ &\geq -K_2 - \|\alpha(X_i, X_i)\| \|\alpha(X_j, X_j)\| - \|\alpha(X_i, X_j)\|^2 \\ &\geq -K_2 - 2\|\alpha(X_i, X_j)\|^2 \\ &\geq -K_2 - 2n(n-1)K_2 - 2n^2H_0^2 - 2n(n-1)cF \\ &\geq -K_0(b + cF), \end{aligned}$$

onde  $K_0 = 2n(n-1) > 0$  e  $b = \frac{K_2}{K_0} + K_2 + \frac{nH_0^2}{(n-1)}$ . Como  $K_0 > 0$  e  $b + cF$  é uma função que satisfaz as condições do Teorema 2, o resultado segue aplicando o Teorema 8. ■

Como observado por Xin-Chen [3], se considerarmos no Corolário 2 a aplicação  $f$  como sendo a imersão de  $M$  sobre  $\overline{M}$ , então tal corolário é exatamente uma extensão do Teorema 1 de Jorge-Xavier [9]. O próximo teorema estabelecerá uma aplicação ao problema de Calabi-Chern, sobre as propriedades de limitações de subvariedades imersas em espaços Euclidianos.

**Teorema 9.** *Seja  $M$  uma subvariedade completa, não compacta e imersa em  $\mathbb{R}^n$  com vetor curvatura média  $H$  paralelo, e curvatura escalar limitada inferiormente por  $-cF$ . Se a imagem da aplicação de Gauss  $g : M \rightarrow G_{m,n-m}$ , estiver contida numa bola geodésica normal de raio  $R$  em torno de  $y_0$ ,  $B_R(y_0) \in G_{m,n-m}$ , com  $R < (\pi/2)\sqrt{K}$  ( $K = 0$  se  $G_{m,n-m} = S^n$ , em outro caso  $K = 2$ ), então  $M$  é uma subvariedade mínima.*

**Demonstração:** Pela Proposição 12 a aplicação de Gauss  $g : M \rightarrow G_{m,n-m}$  é harmônica. Deste modo, sendo  $\mathbb{R}^n$  um espaço cuja curvatura é nula, podemos utilizar o Teorema 8 para concluir que  $0 \leq \inf e(g) \leq m\tau_0 R$ . Novamente pelo fato de  $g$  ser harmônica, segue da Definição 18 que  $\tau(g) = 0$ , e deste modo  $\inf e(g) = 0$ .

Por outro lado, definindo  $S$  como o quadrado da norma da Segunda Forma Fundamental de  $M$  em  $\mathbb{R}^n$ , tem-se:

$$\inf S = \frac{1}{2} \inf e(g) = 0. \tag{3.3}$$

Entretanto, pelo fato de  $H$  ser paralelo, sabemos que

$$\text{Const.} = \|H\|^2 \leq \frac{1}{m^2} S. \quad (3.4)$$

Portanto de (3.3) e (3.4) concluímos o resultado. ■

Nossa última aplicação é a mais clássica dentre todas as aplicações de Omori-Yau. A demonstração dada aqui é essencialmente a mesma dada por Omori em [14], cuja construtividade salienta-se em beleza geométrica própria. Este último resultado tem como referência [1] e trata em seu bojo o problema da não existência de imersões mínimas contidas em cones não degenerados de espaços Euclidianos. Por um cone não degenerado de vértice  $0$ , direção  $\mathbf{a}$  e ângulo  $\theta \in (0, \pi/2)$  em  $\mathbb{R}^n$ , entenderemos por

$$C = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \setminus 0 : \langle \frac{\mathbf{p} - 0}{\|\mathbf{p} - 0\|}, \mathbf{a} \rangle \geq \cos \theta\}. \quad (3.5)$$

**Teorema 10.** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana onde valha Omori-Yau. Então  $M$  não admite uma imersão isométrica mínima em um cone não degenerado de  $\mathbb{R}^m$ .*

**Demonstração:** Argumentamos por contradição e assumimos a existência de uma imersão isométrica mínima  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ , com  $\varphi(M)$  contida em um cone não degenerado de  $\mathbb{R}^m$ . Sem perda de generalidade, podemos assumir que o vértice de tal cone seja a origem de  $\mathbb{R}^m$ , e deste modo, existem  $\mathbf{a} \in S^{n-1}$  e  $\vartheta \in (0, \pi/2)$  tais que

$$\frac{\langle \varphi(\mathbf{x}), \mathbf{a} \rangle}{\|\varphi(\mathbf{x})\|} \geq \cos \vartheta, \quad \forall \mathbf{x} \in M. \quad (3.6)$$

Para cada  $\mathbf{x} \in M$ , denotemos por  $\hat{\varphi}(\mathbf{x})$  a projeção ortonormal de  $\varphi(\mathbf{x})$  sobre o hiperplano ortogonal a  $\mathbf{a}$ , isto é,

$$\hat{\varphi}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) - \langle \varphi(\mathbf{x}), \mathbf{a} \rangle \mathbf{a},$$

e assim sendo,

$$\|\hat{\varphi}(\mathbf{x})\|^2 = \|\varphi(\mathbf{x})\|^2 - \langle \varphi(\mathbf{x}), \mathbf{a} \rangle^2. \quad (3.7)$$

Segue portanto que

$$\begin{aligned} \langle \varphi(\mathbf{x}), \mathbf{a} \rangle^2 - \cos^2 \vartheta \|\hat{\varphi}(\mathbf{x})\|^2 &= \langle \varphi(\mathbf{x}), \mathbf{a} \rangle^2 - \cos^2 \vartheta \|\varphi(\mathbf{x})\|^2 + \cos^2 \vartheta \langle \varphi(\mathbf{x}), \mathbf{a} \rangle^2 \\ &\geq \langle \varphi(\mathbf{x}), \mathbf{a} \rangle^2 - \cos^2 \vartheta \|\varphi(\mathbf{x})\|^2 \\ &\geq 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Tomemos agora  $0 < \varepsilon < \cos \vartheta / \sqrt{2}$ , para definirmos

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) = -\langle \varphi(\mathbf{x}), \mathbf{a} \rangle + \sqrt{1 + \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}(\mathbf{x})\|^2}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{M}. \quad (3.9)$$

**Afirmção 4.**  $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) \leq 1$ , para todo  $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$  e  $\varepsilon \in (0, \cos \vartheta / \sqrt{2})$ .

De fato, a expressão acima é equivalente a

$$\sqrt{1 + \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}(\mathbf{x})\|^2} \leq 1 + \langle \varphi(\mathbf{x}), \mathbf{a} \rangle.$$

Elevando ao quadrado a desigualdade acima, obtemos

$$\langle \varphi(\mathbf{x}), \mathbf{a} \rangle^2 - \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}(\mathbf{x})\|^2 + 2\langle \varphi(\mathbf{x}), \mathbf{a} \rangle \geq 0. \quad (3.10)$$

Segue de (3.6) que  $\langle \varphi(\mathbf{x}), \mathbf{a} \rangle \geq 0$ . Combinando o fato de  $\varepsilon^2 < \cos^2 \vartheta$  com a inequação (3.8) tem-se

$$\langle \varphi(\mathbf{x}), \mathbf{a} \rangle^2 - \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}(\mathbf{x})\|^2 + 2\langle \varphi(\mathbf{x}), \mathbf{a} \rangle \geq \langle \varphi(\mathbf{x}), \mathbf{a} \rangle^2 - \cos^2 \vartheta \|\hat{\varphi}(\mathbf{x})\|^2 \geq 0,$$

e portanto vale (3.10), donde segue nossa afirmação.

Fixaremos um ponto  $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{M}$ , para então definirmos o conjunto

$$\Omega_\varepsilon = \{\mathbf{x} \in \mathbf{M} : \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) \geq \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)\} \neq \emptyset. \quad (3.11)$$

Observamos que sobre  $\Omega_\varepsilon$  vale

$$\sqrt{1 + \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}(\mathbf{x})\|^2} \geq \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}_0) + \langle \varphi(\mathbf{x}), \mathbf{a} \rangle.$$

Lembrando que  $\langle \varphi(\mathbf{x}), \mathbf{a} \rangle \geq \|\varphi(\mathbf{x})\| \cos \vartheta$  e da junção da expressão acima com (3.7), vale

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \varepsilon^2 \|\varphi(\mathbf{x})\|^2} &= \sqrt{1 + \varepsilon^2 (\|\hat{\varphi}(\mathbf{x})\|^2 + \langle \varphi(\mathbf{x}), \mathbf{a} \rangle^2)} \\ &\geq \sqrt{1 + \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}(\mathbf{x})\|^2} \\ &\geq \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}_0) + \|\varphi(\mathbf{x})\| \cos \vartheta, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Definimos agora os conjuntos

$$\Omega_\varepsilon^+ = \{\mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon : \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}_0) + \cos \vartheta \|\varphi(\mathbf{x})\| > 0\}$$

e

$$\Omega_\varepsilon^- = \{\mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon : \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}_0) + \cos \vartheta \|\varphi(\mathbf{x})\| < 0\}.$$

Para todo  $x \in \Omega_\varepsilon^-$  temos, independentemente do valor de  $\varepsilon$ ,

$$\|\varphi(x)\| < \frac{-\mathbf{u}_\varepsilon(x_0)}{\cos \vartheta} = \frac{\langle \varphi(x_0), \mathbf{a} \rangle - \sqrt{1 + \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}(x_0)\|^2}}{\cos \vartheta} \leq \frac{\langle \varphi(x_0), \mathbf{a} \rangle}{\cos \vartheta}.$$

Por outro lado, para  $x \in \Omega_\varepsilon^+$ , obtemos através de 3.12 que

$$1 + \varepsilon^2 \|\varphi(x)\|^2 \geq (\mathbf{u}_\varepsilon(x_0) + \|\varphi(x)\| \cos \vartheta)^2,$$

o que é o mesmo que

$$\mathbf{u}_\varepsilon^2(x_0) + 2\mathbf{u}_\varepsilon(x_0)\|\varphi(x)\| \cos \vartheta + \|\varphi(x)\|^2 \cos^2 \vartheta - \varepsilon^2 \|\varphi(x)\|^2 - 1 \leq 0.$$

Reorganizando, temos

$$(\cos^2 \vartheta - \varepsilon^2) \|\varphi(x)\|^2 + 2\mathbf{u}_\varepsilon(x_0)\|\varphi(x)\| \cos \vartheta + \mathbf{u}_\varepsilon^2(x_0) - 1 \leq 0.$$

Observe que (3.13) é uma equação do segundo grau, em  $\|\varphi(x)\|$ , cujo primeiro coeficiente é positivo. Logo, analisando as raízes deste polinômio, ganhamos

$$\begin{aligned} \|\varphi(x)\| &\leq \frac{-\cos \vartheta \mathbf{u}_\varepsilon(x_0) + \sqrt{\cos^2 \vartheta - \varepsilon^2 + \varepsilon^2 \mathbf{u}_\varepsilon^2(x_0)}}{\cos^2 \vartheta - \varepsilon^2} \\ &\leq 2 \frac{\|\mathbf{u}_\varepsilon(x_0)\| + \sqrt{1 + \mathbf{u}_\varepsilon^2(x_0)}}{\cos \vartheta}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Novamente pelo fato de  $\varepsilon^2 < \cos^2 \vartheta / 2$  e  $\langle \varphi(x_0), \mathbf{a} \rangle \geq 0$ , teremos

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\varepsilon^2(x_0) &= \left( -\langle \varphi(x_0), \mathbf{a} \rangle + \sqrt{1 + \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}(x_0)\|^2} \right)^2 \\ &= \langle \varphi(x_0), \mathbf{a} \rangle^2 + 1 + \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}(x_0)\|^2 - 2\langle \varphi(x_0), \mathbf{a} \rangle \sqrt{1 + \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}(x_0)\|^2} \\ &\leq \langle \varphi(x_0), \mathbf{a} \rangle^2 + 1 + \frac{\cos^2 \vartheta}{2} \|\varphi(x_0)\|^2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Juntando (3.13) com (3.14), podemos concluir que existe uma constante  $C = C(x_0, \mathbf{a}, \vartheta) > 0$ , tal que

$$\|\varphi(x)\| \leq C(x_0, \mathbf{a}, \vartheta).$$

Concluimos que  $\|\varphi\|$  é limitada sobre todo  $\Omega_\varepsilon$ , e isto, para todo  $\varepsilon \in (0, \cos \vartheta / \sqrt{2})$ .

Para o que segue consideraremos a função  $\mathbf{u} : M \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{u}_\varepsilon(x) - \mathbf{u}_\varepsilon(x_0).$$

Como  $\mathbf{u}_\varepsilon(M) \leq 1$ , então

$$\mathbf{u}(x) \leq 1 - \mathbf{u}_\varepsilon(x_0) = 1 + \langle \varphi(x_0), \mathbf{a} \rangle - \sqrt{1 + \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}(x_0)\|^2} \leq \langle \varphi(x_0), \mathbf{a} \rangle.$$

Assim,  $\mathbf{u}$  é limitada superiormente, independentemente de  $\varepsilon$ . Doravante, por (3.11), temos que  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \geq 0$  se, e somente se,  $\mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon$  e  $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}_0) = 0$ .

Como  $\varphi$  é uma imersão isométrica,

$$\begin{aligned} d\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} &= -\langle d\varphi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}, \mathbf{a} \rangle + \varepsilon^2 \frac{\langle d\hat{\varphi}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}, \hat{\varphi}(\mathbf{x}) \rangle}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}(\mathbf{x})\|^2}} \\ &= -\langle \mathbf{v}, \mathbf{a} \rangle + \varepsilon^2 \frac{\langle \mathbf{v}, \hat{\varphi}(\mathbf{x}) \rangle}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}(\mathbf{x})\|^2}} \\ &= \langle \mathbf{v}, -\mathbf{a}^\top \rangle + \varepsilon^2 \frac{\langle \mathbf{v}, \hat{\varphi}^\top(\mathbf{x}) \rangle}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}(\mathbf{x})\|^2}} \end{aligned}$$

e assim,

$$\nabla \mathbf{u} = \nabla \mathbf{u}_\varepsilon = -\mathbf{a}^\top + \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}(\mathbf{x})\|^2}} \hat{\varphi}^\top, \quad (3.15)$$

onde  $^\top$  sobrescrito representa a parte tangente ao longo da imersão  $\varphi$ .

Aplicando a Equação (1.6), obtemos

$$\text{Hess } \mathbf{u}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}\|^2}} (\|\mathbf{X}\|^2 - \langle \mathbf{X}, \mathbf{a}^\top \rangle^2) - \frac{\varepsilon^4 \langle \mathbf{X}, \hat{\varphi}^\top \rangle}{(1 + \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}\|^2)^{\frac{3}{2}}} + \langle \alpha(\mathbf{X}, \mathbf{X}), \eta \rangle, \quad (3.16)$$

onde  $\eta = -\mathbf{a}^\perp + \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}\|^2}} \hat{\varphi}^\perp$ . Passando o traço em 3.16, tem-se

$$\Delta \mathbf{u} = \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}\|^2}} (m - \|\mathbf{a}^\top\|^2) - \frac{\varepsilon^4 \|\hat{\varphi}^\top\|^2}{(1 + \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}\|^2)^{\frac{3}{2}}} + m \langle \mathbf{H}, \eta \rangle. \quad (3.17)$$

Usando (3.15), vem

$$\|\nabla \mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{a}^\top\|^2 - \frac{2\varepsilon^2 \langle \mathbf{a}^\top, \varphi^\top \rangle}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}\|^2}} + \frac{\varepsilon^4 \|\hat{\varphi}^\top\|^2}{1 + \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}\|^2}$$

e substituindo em (3.17) obtemos

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} &= \frac{m\varepsilon^2}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}\|^2}} + \frac{\|\mathbf{a}^\top\|^2}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}\|^2}} - \frac{\|\mathbf{a}^\top\|^2}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}\|^2}} - \\ &\quad - \frac{\varepsilon^2 \|\mathbf{a}^\top\|^2}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}\|^2}} - \frac{\varepsilon^4 \|\hat{\varphi}^\top\|^2}{(1 + \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}\|^2)^{\frac{3}{2}}} + m \langle \mathbf{H}, \eta \rangle \\ &= \frac{m\varepsilon^2}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}\|^2}} + \frac{(1 - \varepsilon^2) \|\mathbf{a}^\top\|^2}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}\|^2}} - \frac{\|\nabla \mathbf{u}\|^2}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}\|^2}} - \\ &\quad - \frac{2\varepsilon^2 \langle \mathbf{a}^\top, \varphi^\top \rangle}{1 + \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}\|^2} + m \langle \mathbf{H}, \eta \rangle. \end{aligned}$$

Agora, como a imersão é mínima, temos  $\mathbf{H} \equiv 0$  e então

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{\|\nabla \mathbf{u}\|^2}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}\|^2}} = \frac{m\varepsilon^2}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}\|^2}} + \frac{(1 - \varepsilon^2) \|\mathbf{a}^\top\|^2}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}\|^2}} - \frac{2\varepsilon^2 \langle \mathbf{a}^\top, \varphi^\top \rangle}{1 + \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}\|^2}. \quad (3.18)$$

Somando  $0 = \frac{\varepsilon^4 \|\hat{\varphi}^T\|^2}{1 + \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}\|^2} - \frac{\varepsilon^4 \|\hat{\varphi}^T\|^2}{1 + \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}\|^2}$  à (3.18), teremos

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} + \frac{\|\nabla \mathbf{u}\|^2}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}\|^2}} &= \frac{\mathfrak{m} \varepsilon^2}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}\|^2}} - \frac{\varepsilon^2 \|\mathbf{a}^T\|}{1 + \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}\|^2} + \frac{\|\mathbf{a}^T - \varepsilon^2 \hat{\varphi}^T\|^2}{1 + \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}\|^2} - \frac{\varepsilon^4 \|\hat{\varphi}^T\|^2}{1 + \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}\|^2} \\ &\geq \varepsilon^2 \left( \frac{\mathfrak{m}}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \|\hat{\varphi}\|^2}} - 1 \right) \geq \varepsilon^2 \left( \frac{\mathfrak{m}}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \|\varphi\|^2}} - 1 \right), \end{aligned}$$

donde

$$\Delta \mathbf{u} + \|\nabla \mathbf{u}\|^2 \geq \varepsilon^2 \left( \frac{\mathfrak{m}}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \|\varphi\|^2}} - 1 \right) \quad (3.19)$$

Lembremos que  $\|\varphi(\mathbf{x})\| \leq C$ , sobre  $\Omega_\varepsilon$ , com  $0 < \varepsilon < \cos \vartheta / \sqrt{2}$ . Assim, em  $\Omega_\varepsilon$  temos

$$\varepsilon^2 \left( \frac{\mathfrak{m}}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \|\varphi\|^2}} - 1 \right) \geq \varepsilon^2 \left( \frac{\mathfrak{m}}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 C^2}} - 1 \right),$$

e escolhendo  $\varepsilon < \sqrt{\mathfrak{m}^4 - 1} / C$ , para então substituímos em (3.19), teremos sobre  $\Omega_\varepsilon$  que

$$\Delta \mathbf{u} + \|\nabla \mathbf{u}\|^2 \geq \varepsilon^2 \left( \frac{\mathfrak{m}}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 C^2}} - 1 \right) > 0. \quad (3.20)$$

Sendo  $\sup \mathbf{u} < +\infty$ , pelo Princípio do Máximo de Omori-Yau, Teorema 5, existe uma sequência  $\mathbf{x}_k \in M$ , tal que

- i)  $\mathbf{u}(\mathbf{x}_k) > \sup \mathbf{u} - \frac{1}{k}$ ;
- ii)  $\|\nabla \mathbf{u}\|(\mathbf{x}_k) < \frac{1}{k}$ ;
- iii)  $\Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}_k) < \frac{1}{k}$ .

Daí, pelo fato de  $\mathbf{u}(\mathbf{x}_k) \rightarrow \sup \mathbf{u}$  e  $\mathbf{u} < 0$ , fora de  $\Omega_\varepsilon$ , podemos supor, sem perder a boa generalidade, que  $\mathbf{x}_k \in \Omega_\varepsilon$ . A expressão (3.20) nos dará

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} > \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}_k) + \|\nabla \mathbf{u}\|^2(\mathbf{x}_k) \geq \varepsilon^2 \left( \frac{\mathfrak{m}}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 C^2}} - 1 \right) > 0.$$

Fazendo  $k \rightarrow +\infty$ , chegaremos na esperada contradição. ■

**Corolário 3.** *Uma variedade Riemanniana completa  $M$  não admite uma imersão isométrica mínima e própria em qualquer cone não degenerado de um espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$ .*

# Referências Bibliográficas

- [1] Alías, J. L., Rigoli, M. - *An Introduction to the Omori-Yau Maximum Principle and its Applications*. XVI Escola de Geometria Diferencial. São Carlos: RiMa, 2010.
- [2] Caminha, A. M. Neto. - *Introdução à Geometria das Aplicações Harmônicas*. XVI Escola de Geometria Diferencial. São Carlos: RiMa, 2010.
- [3] Chen, Q., Xin Y. L. - *A generalized maximum principle and its applications in geometry*. American Journal of Math. - Vol. 114, 335-366, 1990.
- [4] Cheng, S. Y., Yau. S-T. - *Differential Equations on Riemannian Manifolds and their Geometric Applications*. Comm. on Pure and App. Math. - Vol. 28, 333-354, 1975.
- [5] Dajczer, M. et al. - *Submanifolds and Isometric Immersions*.
- [6] do Carmo, M. P. - *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides - IMPA, 2008.
- [7] Ekeland, I. - *On the variational principle*. J. Math. Anal. Appl., - Vol. 47, 324-352, 1975.
- [8] Fontenele, F., Xavier F. - *Good shadows, dynamics and convex hulls of complete submanifolds*. Asian J. Math - Vol. 15 (1), 9-32, 2011.
- [9] Jorge, L. P., Xavier, F. - *An Inequality between the Exterior Diameter and the Mean Curvature of Bounded Immersions*. Mathematische Zeitschrift - Springer-Verlag, 1981.
- [10] Kim, K-T., Lee, H. - *On the Omori-Yau almost Maximum Principle*. J. Math. Anal. Appl. - Vol. 335, 332-340, 2007.
- [11] Lee, J. M. - *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*. Graduate Texts in Mathematics, 176 - Springer, 1997.

- 
- [12] Lieb, E. H. - *Analysis*. Graduate Studies in Math. - Vol. 14. A.M.S., 1996.
- [13] Mané, R. - *Ergodic Theory and Differentiable Dynamics*. Springer-Verlag, 1987.
- [14] Omori, H. - *Isometric immersions of Riemannian manifolds*. J. Math. Soc. Japan - Vol. 19 (2), 1967.
- [15] Pigola, S., Rigoli, M., Setti, A. G. - *A remark on the maximum principle and stochastic completeness*. Proceedings of the American Math. Soc. - Vol. 131 (4), 1283-1288, 2002.
- [16] Pigola, S., Rigoli, M., Setti, A. G. - *Maximum principles on Riemannian manifolds and applications*. Mem. Amer. Math. Soc. - Vol. 174 (822), 2005.
- [17] Ratto, A., Rigoli, M., Setti, A. G. - *On the Omori-Yau Maximum Principle and Its Applications to Differential Equations and Geometry*. Journal of Functional Analysis. - Vol. 134 486-510, 1995.
- [18] Takegoshi, K. - *A Volume Estimate for Strong Subharmonicity and Maximum Principle on Complete Riemannian Manifolds*. Nagoya Math. J. - Vol. 151, 25-36, 1998.
- [19] Yau, S-T. - *Harmonic Functions on Complete Riemannian Manifolds*. Comm. on Pure and App. Math. - Vol. 28, 201-228, 1975.
- [20] Yau, S-T., Schoen, R. - *Lectures on Differential Geometry*. International Press - Volume I.