



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

**Superfícies Estáveis com Curvatura Média Constante
e Bordo Livre na Bola Euclidiana**

Erisvaldo Vêras Vieira

Teresina - 2021

Erisvaldo Vêras Vieira

Dissertação de Mestrado:

**Superfícies Estáveis com Curvatura Média Constante e Bordo
Livres na Bola Euclidiana**

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Leandro de Freitas Pessoa

Teresina - 2021



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Superfícies Estáveis com Curvatura Média Constante e Bordo Livre na Bola Euclidiana

Erisvaldo Véras Vieira

Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 25 de Fevereiro de 2021.

Banca Examinadora:

Leandro de Freitas Pessoa
Prof. Dr. Leandro de Freitas Pessoa - Orientador

Barnabé Pessoa Lima
Prof. Dr. Barnabé Pessoa Lima - UFPI

Ivaldo Paz Nunes
Prof. Dr. Ivaldo Paz Nunes - UFMA

Cícero Tiarlos Nogueira Cruz
Prof. Dr. Cícero Tiarlos Nogueira Cruz - UFAL

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial de Ciências da Natureza – CCN
Serviço de Processamento Técnico

V658s Vieira, Erisvaldo Véras.
 Superfícies estáveis com curvatura média constante e bordo
 livre na bola euclidiana / Erisvaldo Véras Vieira – 2021.
 56 f.: il.

 Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí,
 Centro de Ciências da Natureza, Programa de Pós-Graduação em
 Matemática, Teresina, 2021.

 “Orientador: Prof. Dr. Leandro de Freitas Pessoa. ”

 1. Geometria Diferencial. 2. Curvatura Média. 3.
 Estabilidade. 4. Superfície – Bordo Livre. I. Pessoa, Leandro de
 Freitas. II. Título.

CDD 516.36

Dedico esse trabalho a toda minha família, em especial ao meu pai Edvaldo Alves Vieira, minha mãe Rosa Maria Veras Vieira, minha irmã Rosivalda Veras Vieira e para minhas tias Edileusa Veras Vieira(in memoriam) e Manuela Maria dos Santos(tia Dadinha)(in memoriam).

Agradecimentos

Agradeço Primeiramente a Deus por ter chegado até aqui, já que sem ele na minha vida nada disso seria possível! Deus é mais!

Agradeço a toda minha família, em especial minha mãe Rosa Maria, meu pai Edvaldo, minha irmã Rosivalda e meu cunhado Rivaldo por todo o apoio dado até então nessa caminhada que parece ser fácil mas não é. Sem todos eles eu não estaria aqui agora!

Agradeço ao meu orientador e amigo Leandro de Freitas Pessoa por ter me ajudado tanto até aqui. As vezes sou uma pessoa um pouco complicada e mesmo assim ele não desistiu de mim, sempre com paciência, e por isso sou muito grato. Obrigado pelos conselhos e ensinamentos.

Um agradecimento especial aos professores Barnabé Pessoa Lima, João Xavier da Cruz Neto e Jurandir de Oliveira Lopes, que desde o início da minha trajetória na UFPI me ajudaram bastante. Na graduação fui orientado pelo professor Xavier e Pelo professor Jurandir que sempre estiveram a disposição para ajudar quando eu precisa-se. O professor Barnabé sempre esteve a disposição para que eu pudesse tirar dúvidas e além disso deixava eu estudar em sua sala(Me deixava com uma chave), sem falar do cafézinho expresso que sempre tínhamos a disposição em sua sala para dar aquela relaxada. Sou muito grato a vocês.

Agradeço a todos os meus professores que tive até o ensino médio, em especial ao Professor Antônio Cardoso do Amaral, pessoa que sempre esteve presente na minha vida e que tenho um carinho muito grande, ao professor Aniceto Freitas por sempre me incentivar a ir mais longe e me dar conselhos que sigo até então, ao professor Raimundo que também esteve sempre presente nessa trajetória e a Diretora e professora Aurilene pelas conversas e por sempre me incentivar a estudar.

Agradeço aos professores do departamento de matemática da UFPI, em especial aos professores Paulo Alexandre, Halyson Baltazar, Rondinelle Marcolino, José Francisco, Gleison

Nascimento, Vitaliano Amaral, Mykael, Franciane, João Carlos, Newton Luís, Antônio Wilson, Liane Feitosa, Kelton Bezerra e Jefferson Leite que tiveram grande contribuição na minha formação acadêmica. Obrigado a todos.

Agradeço aos professores Cícero Tiarlos Nogueira Cruz e Ivaldo Paz Nunes por terem aceito o convite e participarem da banca examinadora e por todas sugestões para o melhoramento da minha dissertação.

Agradeço ao meu amigo e irmão por consideração João Vinícius (Baile de Favela), uma pessoa muito importante na minha vida e que me ajudou bastante até aqui. Sou muito grato pela nossa amizade, pelo nosso convívio! Agradeço também a toda sua família por todo o apoio que recebi durante esses 5 anos de convívio, em especial a sua mãe Valda Maria e sua irmã Geovana. Obrigado a todos, de coração!

Um agradecimento especial a minha turma do terceiro ano do ensino médio, formada por pessoas do meu agrado, meus amigos, que caminharam comigo desde o quinto ano do ensino fundamental.

Agradeço também aos meus amigos de CDA que conviveram comigo em Teresina e que viram de perto todos os acontecimentos na minha vida durante esse processo de formação. Em especial ao Jean Carlos, José Márcio, Antônio Wesley, Francimar, Sandoel, Rodrigo de Brito, Leonardo Amaral, Daniele Brandão, Janekely, Eugênio, Dieme, Junior Amaral, Denilson, Antônio (Toin), Francisco Feitosa (Neto), Juracir, Angélica, Rodolfo Fontenele, Marilene Magalhães, Francilene Magalhães, Maria de Fátima e Eulília.

Agradeço a todos os amigos que conheci na minha trajetória até aqui na UFPI. Em especial ao José Edilson, Raynara, Ruan Diego, Hotávio Fonseca, Kevin Marçal, Emília Amorim, Juliano Nascimento, Antônio Nilson, Marcos Carvalho, Júlio José, Danrley, André, Alexia, Osvaldo, George Lucas, Lucas Bandeira, Melquisedeque, Ousadia, Raylan, Pedro Paulo, Pedro Rodrigues, Raimundo Bruno, Christopher, Severino, Idalina, Jaciane, Leonardo Silva, Nielson, Edimilson Lopes, Igor, Thiago Mayson, Douglas Rafael, Michell Dhoulgas, Sillas Augusto, Raquel Lemos, Paulo Sérgio, Jonatas Arrais, Suerlan, Bruno Vasconcelos, Atécio Alves, Jefferson de Brito, João Santos, Alexandre Bezerra, Rafael Emanuel, Dário, Danilo e Adelfson Rios.

Agradeço (a CAPES, ao CNPq e ao Instituto Tim em parceria com a OBMEP) pelo apoio financeiro.

“O impossível existe até que alguém duvide dele e prove o contrário.”

Albert Einstein.

Resumo

A. Ros e E. Vergasta estudaram em [9] resultados de rigidez para superfícies compactas imersas com curvatura média constante (CMC) e fronteira livre em uma bola fechada B de \mathbb{R}^3 . Em particular, os autores mostraram que se Σ é uma superfície compacta, orientável e estável, imersa CMC com bordo livre em uma bola fechada B de \mathbb{R}^3 , então a fronteira de tal superfície é mergulhada e as únicas possibilidades são que ela seja um disco totalmente geodésico, uma calota esférica, ou uma superfície que tem gênero 1 com no máximo duas componentes de fronteira. No presente trabalho discutimos sobre o melhoramento provado por I. Nunes em [5] onde o autor demonstrou que tais superfícies devem ter gênero 0. Tal resultado é obtido como consequência de um resultado geral para domínios convexos de \mathbb{R}^3 sob condição de pinçamento da segunda forma fundamental do bordo, o qual é obtido através da aplicação de um lema de estabilidade e uma modificação do argumento de balanceamento do tipo Hersch.

Palavras-Chaves: Superfícies com bordo livre, Curvatura média constante, Estabilidade.

Abstract

In [9] A. Ros and E. Vergasta studied rigidity results for compact surfaces immersed with constant mean curvature (CMC) and free boundary in a closed ball B of \mathbb{R}^3 . In particular, the authors showed that if Σ is a compact, orientable and stable CMC surface immersed with free boundary in a closed ball B of \mathbb{R}^3 , then the the boundary of such a surface is embedded and the only possibilities are that it is a totally geodesic disc, a spherical cap, or a surface that has genus 1 with at most two boundary components. In the present work we discuss the improvement proved by I. Nunes in [5] where the author showed that such surfaces must have genus 0. This result is given as a consequence of a general result for convex domains of \mathbb{R}^3 under a pinching condition on the second fundamental form of the boundary, which is obtained through the application of a stability lemma and a modified Hersch type balancing argument.

Keywords: Surfaces with free boundary, Constant mean curvature, Stability.

Sumário

Resumo	v
Abstract	vi
Introdução	1
1 Noções Preliminares	4
1.1 Superfícies suaves com bordo	4
1.2 Gaus-Bonnet	13
1.3 Gradiente, Divergente e Laplaciano	15
1.4 Variações de área e volume	18
1.5 Superfícies CMC com bordo livre	23
1.6 Estabilidade	26
2 Melhorando o Teorema de Ros e Vergasta	28
Referências Bibliográficas	44

Introdução

Um problema variacional bem interessante na geometria diferencial, está relacionado ao problema isoperamétrico. Tal problema consiste em encontrar os pontos críticos do funcional área para variações que preservam volume, levando em conta todas as hipersuperfícies compactas $\Sigma \subset M$, com $\partial\Sigma \subset \partial M$, onde M é uma variedade Riemanniana compacta com bordo não vazio. As superfícies que são soluções para esse problema são as chamadas superfícies CMC com bordo livre, ou seja, que tem curvatura média constante e intersecta ∂M ortogonalmente.

Ros e Vergasta estudaram em [9] hipersuperfícies CMC estáveis imersas com bordo livre em domínios convexos compactos de \mathbb{R}^{n+1} . Um problema a se pensar seria responder se as únicas superfícies CMC estáveis imersas com bordo livre na bola B são as totalmente umbílicas. Eles deram uma resposta parcial para as superfícies imersas na bola unitária de \mathbb{R}^3 , dada pelo teorema abaixo.

Teorema 0.1 (A. Ros e E. Vergasta [9]). *Seja $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma bola fechada. Se $\Sigma \subset B$ é uma superfície CMC estável compacta orientável com bordo livre, então $\partial\Sigma$ é mergulhada e as únicas possibilidades são:*

- (i) Σ é um disco totalmente geodésico.
- (ii) Σ é uma calota esférica.
- (iii) Σ tem gênero 1, com no máximo duas componentes de fronteira.

O resultado acima é uma resposta parcial porque o problema sobre existência ou não de superfícies CMC estáveis de gênero 1 ainda não tinha sido resolvido.IVALDO NUNES [5] aparece nesse contexto melhorando o teorema (0.1) olhando para o seu terceiro item, onde afirma e prova que tal possibilidade não ocorre. Em seu artigo ele mostra que o gênero de Σ é zero.

Olhando para o teorema 0.1 e para o melhoramento envolvendo o gênero de Σ ,IVALDO NUNES [5] enuncia e demonstra o seguinte corolário:

Corolário 0.1. *Os discos totalmente umbílicos são as únicas superfícies CMC compactas orientáveis imersas estáveis com bordo livre em $B \subset \mathbb{R}^3$.*

O corolário acima é tido como o resultado análogo ao teorema de Barbosa e do Carmo [12] para superfícies CMC estáveis fechadas imersas no espaço euclidiano, enunciado abaixo.

Teorema 0.2. *Sejam M uma variedade Riemanniana de dimensão n , compacta, orientável com fronteira vazia e $\chi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma imersão com curvatura média constante não nula. Então χ é estável se, e somente se, $\chi(M)$ é a esfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.*

Ivaldo se utiliza do teorema acima como principal motivação para os resultados obtidos em seu artigo [5], e que serão apresentados no presente trabalho.

G. Wang e C. Xia em [13] provam um resultado bem mais geral levando em conta hipersuperfícies capilares estáveis em bolas geodésicas do espaço euclidiano. Esse resultado de classificação diz o seguinte:

Teorema 0.3 (G. Wang e C. Xia, 2019). *Seja $\chi : M^{n+1} \rightarrow B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície capilar estável imersa na bola euclidiana unitária com curvatura média constante $H \geq 0$, onde ∂M intersecta ∂B com um ângulo constante $\theta \in (0, \pi)$. Então χ é uma bola totalmente geodésica ou uma tampa esférica.*

Uma questão a se perguntar seria se o corolário 0.1 é válido no caso em que consideramos $B \subset S^{n+1}$ ou $B \subset \mathbb{H}^{n+1}$. Souam [18] mostrou que isso é verdade no caso em que Σ tem gênero zero e $n = 2$.

No presente trabalho, consideramos B a bola fechada de \mathbb{R}^3 , $\phi : \Sigma \rightarrow B \subset \mathbb{R}^3$ uma imersão onde $\phi(\text{int}\Sigma) \subset \text{int}(B)$ e $\phi(\partial\Sigma) \subset \partial B$ e a variação $\Phi : \Sigma \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow B \subset \mathbb{R}^3$, onde $\Phi_t(\text{int}\Sigma) \subset \text{int}(B)$ e $\Phi_t(\partial\Sigma) \subset \partial B$, onde Φ preserva volume. Quando a Variação Φ satisfaz essas inclusões, dizemos que a variação dada é admissível.

Em um primeiro momento, no Capítulo 1, apresentamos algumas noções que são importantes para o desenvolvimento desta dissertação. Definimos superfícies com bordo e superfícies com bordo livre, damos algumas noções e resultados referentes aos campos gradiente, divergente e laplaciano de uma função definida em uma variedade Riemanniana, falamos de imersão e segunda forma fundamental, variações de área e volume, além de dissertar um pouco a respeito do teorema de Gauss-Bonnet.

Em um segundo momento, no Capítulo 2, para melhorarmos teorema feito por A. Ros e E. Vergasta [9] enunciaremos e demonstraremos o lema de estabilidade feito pelo próprio Ivaldo

Nunes [5], mostraremos que, considerando uma condição de pinçamento para a fronteira de um domínio conexo compacto suave $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, se $\Sigma \subset \Omega$ é uma superfície CMC estável compacta orientável imersa com bordo livre, então tem gênero zero e a fronteira tem no máximo duas componentes conexas, além de um corolário que classifica as superfícies CMC compactas estáveis imersas com bordo livre na bola fechada unitária de \mathbb{R}^3 .

Capítulo 1

Noções Preliminares

Neste capítulo apresentaremos algumas definições, notações e resultados que serão utilizados nos capítulos seguintes. Não demonstraremos todos os resultados, mas deixaremos as devidas referências. Para a leitura do texto espera-se que o leitor tenha algumas noções de geometria diferencial. Os conceitos aqui prescritos podem ser encontrados em [2], [3], [6], [7] e [8].

1.1 Superfícies suaves com bordo

Considere o conjunto $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}^2$, dado por

$$\mathbb{H}^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq 0\}.$$

Lembremos que o interior e a fronteira de \mathbb{H}^2 são dados, respectivamente, por

$$\text{Int}(\mathbb{H}^2) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$$

$$\partial\mathbb{H}^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}.$$

Seja M^2 uma variedade topológica bidimensional. Uma carta coordenada para M^2 é um par (U, φ) onde U é um subconjunto aberto de M^2 e $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ é um homeomorfismo de U em um subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 ou de \mathbb{H}^2 .

Definição 1.1. *Uma variedade topológica M^2 com bordo é um espaço topológico, Hausdorff, com base enumerável e localmente Euclidiano em que todo ponto $\mathfrak{p} \in M^2$ tem uma vizinhança homeomorfa ou a um subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 ou a um subconjunto aberto de \mathbb{H}^2 .*

Exemplo 1.1. O próprio \mathbb{H}^2 é um exemplo de variedade topológica com com bordo que dimensão dois. Basta considerar a carta coordenada como sendo a aplicação identidade. Ser Hausdorff e ter base enumerável são propriedades herdadas de \mathbb{R}^2 .

Seja U um subconjunto aberto de \mathbb{H}^2 . Uma aplicação $F : U \subset \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}^k$ é suave, se para todo ponto $x \in U$ existir um subconjunto aberto $\bar{U} \subset \mathbb{R}^2$ contendo x e uma aplicação suave $\bar{F} : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^k$, onde $\bar{F}|_U = F$.

Definição 1.2. Uma estrutura suave para M^2 é um conjunto de cartas cujos domínios cobrem M^2 e as aplicações de transição são suaves no sentido dado acima.

De posse das definições dadas acima, podemos definir agora o que seria uma superfície suave sem bordo.

Definição 1.3. Uma superfície suave M^2 com bordo, é um par (M^2, \mathbb{A}) em que M^2 é uma variedade topológica com bordo e \mathbb{A} é uma estrutura suave para M^2 .

Exemplo 1.2. A bola fechada unitária $\mathbb{B}^2 \subset \mathbb{R}^2$ é um exemplo de superfície com bordo.

Existem também as superfícies suaves sem bordo, que são definidas abaixo.

Definição 1.4. Dizemos que M^2 é uma superfície suave sem bordo quando as imagens das cartas que formam a estrutura suave estão contidas no interior de \mathbb{H}^2 .

Exemplo 1.3. Um exemplo claro é a bola aberta unitária de \mathbb{R}^2 .

Exemplo 1.4. Considere a relação de equivalência R em $\mathbb{R}^3 - \{0\}$, onde xRy se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $x = \lambda \cdot y$. O conjunto quociente $\mathbb{R}P^2 = (\mathbb{R}^3 - \{0\})/R$ é uma superfície suave sem bordo.

Considere M^2 uma superfície suave com ou sem bordo.

Definição 1.5. Dizemos que M^2 é uma superfície compacta quando toda cobertura por meio de abertos possuir uma subcobertura finita.

Exemplo 1.5. Considere a relação de equivalência R em $\mathbb{C}^3 - \{0\}$, onde xRy se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $x = \lambda \cdot y$. O conjunto quociente $\mathbb{C}P^2 = (\mathbb{C}^3 - \{0\})/R$ é uma superfície suave compacta.

Para o decorrer dos resultados, a noção de orientação de uma superfície suave se faz necessária.

Definição 1.6. *Uma superfície suave M é orientável se for possível cobri-la com uma família de vizinhanças coordenadas, de tal modo que se um ponto $p \in M$ pertence a duas vizinhanças dessa família, então a mudança de coordenadas tem Jacobiano positivo em p . A escolha de uma tal família é chamada uma orientação de M , e M , neste caso, diz-se orientada. Se uma tal escolha não é possível, a superfície é não orientável.*

Exemplo 1.6. *Uma superfície que é um gráfico de uma função diferenciável é uma superfície orientável. De fato, todas as superfícies que podem ser cobertas por uma única vizinhança coordenada são, trivialmente, orientáveis.*

Proposição 1.1. *Uma superfície $M \subset \mathbb{R}^3$ é orientável se, e somente se, existe um campo diferenciável $N : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ de vetores normais a M .*

Demonstração. Veja [3] pág. 124. □

Para mais detalhes a respeito de superfícies suaves com bordo, consulte [7]. Lá, as definições são dadas no caso n -dimensional, mas para o que nos convém adaptamos para o caso 2-dimensional.

Agora fixaremos nossa atenção na parte de imersões e segunda forma fundamental, onde abordaremos a teoria em cima das superfícies sem bordo.

Sejam M^2 e \overline{M}^3 variedades diferenciáveis e $f : M^2 \rightarrow \overline{M}^3$ uma aplicação diferenciável.

Definição 1.7. *Dizemos que f é uma imersão quando $df_p : T_p M^2 \rightarrow T_{f(p)} \overline{M}^3$ é injetiva para todo $p \in T_p M$.*

Definição 1.8. *Dizemos que f é um mergulho suave quando,*

- (i) *f é uma imersão suave.*
- (ii) *$f : M^2 \rightarrow f(M^2)$ é um homeomorfismo, onde a topologia de $f(M^2)$ é a topologia de subespaço.*

Teorema 1.1. *Seja $f : M^2 \rightarrow f(M^3)$ uma aplicação suave. Então f é uma imersão se, e somente se, é um mergulho local.*

Demonstração. Veja [7] pág. 87. □

Considere f satisfazendo a Definição 1.5. Então, f é localmente um mergulho, e assim, para todo $p \in M$ existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade de \overline{M} . Assim, existem uma vizinhança \overline{U} de $f(p)$ e um difeomorfismo $\varphi : \overline{U} \subset \overline{M} \rightarrow V \subset \mathbb{R}^k$, onde φ aplica $f(U) \cap \overline{U}$ difeomorficamente em $\varphi(f(U) \cap \overline{U})$. Agora, considere a identificação $U \approx f(U)$ e $v \approx df_p(v)$, onde $v \in T_p M$ e $df_p(v) \in T_{f(p)} \overline{M}$. Com tais identificações, podemos estender campos definidos em $f(U)$ à campos definidos em \overline{U} .

Assim, para todo $p \in M$, o produto interno de $T_p \overline{M}$ decompõe $T_p \overline{M}$ na seguinte soma direta

$$T_p \overline{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp.$$

A conexão Riemanniana de \overline{M} será denotada por $\overline{\nabla}$. Se X e Y são campos locais em M , e \overline{X} , \overline{Y} suas respectivas extensões em \overline{M} , definimos a conexão em M como sendo

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^\top.$$

Teorema 1.2. *Se $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, a aplicação $B : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \rightarrow \mathfrak{X}(U)^\perp$ dada por*

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y.$$

é bilinear e simétrica.

Demonstração. Veja [2] pág. 140. □

Seja $p \in M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$. A aplicação $H_\eta : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle, \quad x, y \in T_p M,$$

é também uma forma bilinear e simétrica, já que B o é. Desta forma, H_η fica associada a uma aplicação linear auto-adjunta $S_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$, onde

$$\langle S_\eta(x), y \rangle = H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle, \quad x, y \in T_p M.$$

Proposição 1.2. *Seja $p \in M$, $x \in T_p M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp$. Seja N uma extensão local de η normal a M . Então*

$$S_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^\top.$$

Demonstração. Veja [2] pág. 142. □

Definição 1.9. *Quando a codimensão da imersão é 1, isto é, $f : M^2 \rightarrow \overline{M}^3$, dizemos que f é uma hipersuperfície.*

Considere $p \in M$ e $\eta \in (T_p M)^\perp, |\eta| = 1$. Como S_η é simétrica, existe uma base ortonormal de autovetores $\{e_1, e_2\}$ de $T_p M$ com autovalores λ_1, λ_2 , ou seja, $S_\eta(e_i) = \lambda_i e_i, i = 1, 2$. Se M e \bar{M} são ambas orientáveis e estão orientadas, então o vetor η fica univocamente determinado se exigirmos que sendo $\{e_1, e_2\}$ uma base na orientação de M , $\{e_1, e_2, \eta\}$ seja uma base na orientação em \bar{M} . Neste caso, denominamos os e_i como sendo as direções principais e os $\lambda_i = k_i$ como sendo as curvaturas principais de f .

Definição 1.10. *Definimos a curvatura média e a curvatura de Gauss-Kronecker de f em p , respectivamente por*

$$H = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2), \quad K = \lambda_1 \cdot \lambda_2.$$

Dizemos que a imersão tem curvatura média constante quando H for constante.

Definição 1.11. *Definimos o vetor curvatura média de f como sendo*

$$\vec{H} = \frac{1}{2} \text{tr}(S_\eta) \eta \tag{1.1}$$

onde S_η é o Operador de Weingarten.

Quando $\bar{M} = \mathbb{R}^3$ podemos dar uma interpretação diferente para S_η . Inicialmente, considere N uma extensão local de η unitária e local a M . Seja \mathbb{S}^2 a esfera unitária de \mathbb{R}^3 e defina a aplicação normal de Gauss, $g : M \rightarrow \mathbb{S}^2$, trasladando a origem do campo N para a origem de \mathbb{R}^3 e fazendo $g(p) =$ ponto final do trasladado de $N(p)$. Como $T_p M$ e $T_{g(p)} \mathbb{S}^2$ são paralelos, podemos identificá-los, e vemos que

$$dg_q(x) = \frac{d}{dt}(N \circ c(t))_{t=0} = \bar{\nabla}_x N = (\bar{\nabla}_x N)^T = -S_\eta(x),$$

onde $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ é uma curva com $c(0)=q$ e $c'(0)=x$, e onde usamos que $\langle N, N \rangle = 1$ para garantir que $\bar{\nabla}_x N = (\bar{\nabla}_x N)^T$. Daí, segue que $-S_\eta$ é a derivada da aplicação normal de Gauss.

Definição 1.12. *A aplicação definida em $T_p M$ por*

$$\Pi_q(x) = \langle S_\eta(x), x \rangle = \langle B(x, x), \eta \rangle = -\langle dg_q(x), x \rangle,$$

é chamada a segunda forma fundamental de M em p .

Em [8] a segunda forma fundamental é definida como

$$\mathbb{I}_q(x, y) = -\langle dg_q(x), y \rangle,$$

onde $x, y \in T_p M$.

Seja $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão de M em \mathbb{R}^3 e N a aplicação normal de Gauss. Na referência acima a fórmula de Gauss é dada como segue:

Definição 1.13. *Definimos a fórmula de Gauss por*

$$\nabla_X^0 Y = \nabla_X Y - \mathbb{I}_p(X, Y)N,$$

onde $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, ∇^0 e ∇ são as conexões riemannianas de \mathbb{R}^3 e de M respectivamente.

É importante notar que, considerando a base ortonormal de auto-vetores

$$\begin{aligned} B_{ij} = B(e_i, e_j) &= \langle B(e_i, e_j), \eta \rangle \eta \\ &= \langle S_\eta(e_i), e_j \rangle \eta \\ &= k_i \delta^{ij} \eta. \end{aligned}$$

onde teremos

$$\begin{aligned} |B|^2 &= B_{ij} B_{ij} \\ &= (k_i \delta^{ij} \eta)(k_i \delta^{ij} \eta) \\ &= \sum_{i=1}^n k_i^2 \\ &= |\mathbb{I}_q|^2 = \text{tr}(S_\eta(S_\eta)^t). \end{aligned}$$

Proposição 1.3. *Seja $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão. Se N é um campo normal unitário à M e $\{e_1, e_2\}$ um referencial ortonormal local, então*

$$|\mathbb{I}_q|^2 = |B|^2 = - \sum_{i=1}^2 \langle N, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle.$$

Além disso, se $\{e_1, e_2\}$ é um referencial geodésico no ponto $p \in M$ e H é constante, teremos

$$\sum_{i=1}^2 \langle e_k, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N \rangle = 0,$$

para todo $n \in \{1, 2\}$.

Demonstração. Considere a aplicação $S_N(\mathbf{h}) = -\bar{\nabla}_h \mathbf{N}$ e observe que

$$S_N(\mathbf{e}_i) = \sum_{i,j} \mathbf{a}_{ij} \mathbf{e}_j,$$

sendo $\mathbf{a}_{ij} = -\langle \bar{\nabla}_{\mathbf{e}_i} \mathbf{N}, \mathbf{e}_j \rangle$. Daí, como nossa base é ortonormal

$$\|\sigma\|^2 = \sum_{i,j} \mathbf{a}_{ii} = \sum_{i,j} \langle \bar{\nabla}_{\mathbf{e}_i} \mathbf{N}, \mathbf{e}_j \rangle \langle \bar{\nabla}_{\mathbf{e}_j} \mathbf{N}, \mathbf{e}_i \rangle. \quad (1.2)$$

Note que $\langle \mathbf{N}, \mathbf{e}_i \rangle = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. Assim obtemos que $\langle \bar{\nabla}_{\mathbf{e}_j} \mathbf{N}, \mathbf{e}_i \rangle = -\langle \mathbf{N}, \bar{\nabla}_{\mathbf{e}_j} \mathbf{e}_i \rangle$.

Veja que S_N é autoadjunta, donde temos

$$\|\sigma\|^2 = \sum_{i,j=1}^2 \langle \bar{\nabla}_{\mathbf{e}_i} \mathbf{N}, \mathbf{e}_j \rangle^2.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \langle \bar{\nabla}_{\mathbf{e}_i} \mathbf{N}, \bar{\nabla}_{\mathbf{e}_i} \mathbf{N} \rangle &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j,k=1}^2 \langle \bar{\nabla}_{\mathbf{e}_i} \mathbf{N}, \mathbf{e}_j \rangle \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k \rangle \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^2 (\langle \bar{\nabla}_{\mathbf{e}_i} \mathbf{N}, \mathbf{e}_j \rangle)^2 = \|\sigma\|^2. \end{aligned}$$

Além disso, derivando a igualdade $\langle \bar{\nabla}_{\mathbf{e}_i} \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle = 0$ tem-se que

$$0 = \mathbf{e}_i \langle \bar{\nabla}_{\mathbf{e}_i} \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\mathbf{e}_i} \bar{\nabla}_{\mathbf{e}_i} \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle + \langle \bar{\nabla}_{\mathbf{e}_i} \mathbf{N}, \bar{\nabla}_{\mathbf{e}_i} \mathbf{N} \rangle,$$

isto é,

$$-\sum_{i=1}^2 \langle \bar{\nabla}_{\mathbf{e}_i} \bar{\nabla}_{\mathbf{e}_i} \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle = \sum_{i=1}^2 \langle \bar{\nabla}_{\mathbf{e}_i} \mathbf{N}, \bar{\nabla}_{\mathbf{e}_i} \mathbf{N} \rangle.$$

Portanto

$$\|\sigma\|^2 = \sum_{i,j=1}^2 \langle \bar{\nabla}_{\mathbf{e}_i} \mathbf{N}, \mathbf{e}_j \rangle^2 = \sum_{i=1}^2 \langle \bar{\nabla}_{\mathbf{e}_i} \mathbf{N}, \bar{\nabla}_{\mathbf{e}_i} \mathbf{N} \rangle = -\sum_{i=1}^2 \langle \bar{\nabla}_{\mathbf{e}_i} \bar{\nabla}_{\mathbf{e}_i} \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle,$$

e segue o primeiro resultado.

Agora, sabendo que

$$nH = \text{tr}(S_N) = \sum_i \mathbf{a}_{ii},$$

ganhamos

$$nH = \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{\mathbf{e}_i} \mathbf{e}_i, \mathbf{N} \rangle.$$

Utilizando este fato e usando que H é constante concluímos que

$$\sum_{i=1}^2 \langle \bar{\nabla}_{\mathbf{e}_i} \bar{\nabla}_{\mathbf{e}_i} \mathbf{N}, \mathbf{e}_k \rangle = 0, \forall k = 1, 2.$$

□

Definição 1.14. *Seja $\Omega \subset M^2$ um domínio suave compacto contido na superfície M^2 . Dizemos que Ω é convexo, se $\text{II}^{\partial\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$ para todo vetor tangente a fronteira de Ω .*

Exemplo 1.7. *Considere B a bola fechada de \mathbb{R}^3 . Claramente temos $\partial B = S^2$ e $\text{II}_q(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 1 > 0$ para todo $\mathbf{v} \in T_p M$, onde $|\mathbf{v}| = 1$. Veja [3, p.169]. Tomando \mathbf{v} com norma diferente de 1 e considerando $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$, teremos*

$$\text{II}_p \left(\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}, \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \right) = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} \text{II}_p(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 1.$$

Segue que

$$\text{II}_p(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = |\mathbf{v}|^2 > 0.$$

Portanto B é um domínio convexo.

Definição 1.15. *Uma imersão $f : M^2 \rightarrow \overline{M}^3$ é geodésica em $\mathbf{p} \in M$ se para todo $\eta \in (T_p M)^\perp$ a segunda forma fundamental II_η é identicamente nula em \mathbf{p} . A imersão f é totalmente geodésica se ela é geodésica para todo $\mathbf{p} \in M$.*

Definição 1.16. *Uma imersão isométrica $f : M^2 \rightarrow \overline{M}^3$ é umbílica em $\mathbf{p} \in M$ se para $\eta \in (T_p M)^\perp - \{0\}$ existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que*

$$S_\eta = \lambda \cdot \text{Id}_{T_p M}.$$

A imersão f é totalmente umbílica quando for umbílica para todo $\mathbf{p} \in M$.

Observe que M^2 é umbílica em $\mathbf{p} \in M$ quando $k_1(\mathbf{p}) = k_2(\mathbf{p}) = 0$.

Exemplo 1.8. *A inclusão $f : S^2 \rightarrow S^3$ é uma imersão umbílica*

Proposição 1.4. *As calotas esféricas e os discos totalmente geodésicos são superfícies totalmente umbílicas.*

Demonstração. Considere a esfera unitária

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}. \quad (1.3)$$

Se $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ é uma curva parametrizada em S^2 , então

$$2xx' + 2yy' + 2zz' = 0, \quad (1.4)$$

o que mostra que o vetor (x, y, z) é normal a esfera no ponto (x, y, z) . Desta forma, considere $N(x, y, z) = (-x, -y, -z)$ um campo de vetores normal unitário como sendo a orientação em S^2 . Considere então $N(t)$ restrita a $\alpha(t)$

$$N(t) = (-x(t), -y(t), -z(t)). \quad (1.5)$$

Segue que

$$dN(x'(t), y'(t), z'(t)) = N'(t) = (-x'(t), -y'(t), -z'(t)); \quad (1.6)$$

isto é, $dN_p(v) = -v$ para todo $p \in S^2$ e para todo $v \in T_p S^2$. Como

$$dN_p(e_1) = -e_1, \quad dN_p(e_2) = -e_2,$$

então $k_1 = k_2 = -1$. Portanto, todos os pontos de S^2 são umbílicos, e em particular os pontos de uma calota esférica.

Note agora que se Σ é um disco totalmente geodésico, então $\Pi_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle = 0$ para todo $p \in \Sigma$ e para todo $v \in T_p \Sigma$. Logo, é direto que $dN_p(v) = 0$ para todo $v \in T_p \Sigma$, e assim

$$dN_p(e_1) = 0 = 0 \cdot e_1, \quad dN_p(e_2) = 0 \cdot e_2,$$

o que nos dá $k_1 = k_2 = 0$, onde fica provado que os discos totalmente geodésicos são totalmente umbílicos. \square

Proposição 1.5. *Se todos os pontos de uma superfície conexa $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ são umbílicos, então M^2 está contida em um plano ou em uma esfera.*

Demonstração. Veja [3] pág 173. \square

Agora definiremos o que é uma aplicação conforme.

Definição 1.17. *Sejam M e \bar{M} duas superfícies suaves. Um difeomorfismo $\varphi : M \rightarrow \bar{M}$ é chamado uma aplicação conforme se para todo $p \in M$ e quaisquer $v_1, v_2 \in T_p M$ temos*

$$\langle d\varphi_p(v_1), d\varphi_p(v_2) \rangle_{\varphi(p)} = \lambda^2 \langle v_1, v_2 \rangle_p,$$

onde λ^2 é uma função diferenciável em M que nunca se anula.

Exemplo 1.9. *Toda imersão isométrica é um exemplo de aplicação conforme, onde consideramos $\lambda^2 = 1$.*

1.2 Gaus-Bonnet

Nesta seção apresentaremos o teorema de Gaus-Bonnet, que é provavelmente o teorema mais profundo na geometria diferencial das superfícies. Não daremos detalhes a respeito de sua demonstração, pois focaremos apenas em aplicá-lo. Desta forma, traremos basicamente seu enunciado e algumas definições importantes.

Para enunciar tal teorema precisamos de algumas noções e definições importantes.

Definição 1.18. *Seja w um campo diferenciável e unitário de vetores ao longo de uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow S$ sobre uma superfície orientada S . Como $w(t)$, $t \in I$, é um campo de vetores unitário, $(dw/dt)(t)$ é normal a $w(t)$, e portanto*

$$\frac{Dw}{dt} = \lambda \cdot (N \wedge w(t)).$$

O número real $\lambda = \lambda(t)$, denotado por $[Dw/dt]$, é chamado valor algébrico da derivada covariante de w em t .

Definição 1.19. *Seja C uma curva regular orientada contida em uma superfície orientada S , e seja $\alpha(s)$ uma parametrização de C , em uma vizinhança de $p \in S$, pelo comprimento de arco s . O valor algébrico $[D\alpha'(s)/ds] = \kappa_g$ da derivada covariante de $\alpha(s)$ é chamado curvatura geodésica de C em p .*

Vamos dar agora a noção de ângulo externo levando em conta uma curva em uma superfície M^2 .

Seja $\alpha : [0, l] \rightarrow M^2$ uma aplicação contínua de um intervalo fechado $[0, l]$ sobre uma superfície suave M^2 . Dizemos que α é uma curva parametrizada simples, fechada e regular por partes se:

- (1) $\alpha(0) = \alpha(l)$.
- (2) $t_1 \neq t_2$, $t_1, t_2 \in [0, l]$, implica $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$.
- (3) Existe uma partição

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = l,$$

de $[0, l]$ tal que α é diferenciável e regular em cada $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \dots, k$.

Intuitivamente, isto significa que α é uma curva fechada sem auto-interseções, que deixa de ter uma reta tangente definida apenas em um número finito de pontos.

Os pontos $\alpha(t_i)$, $i = 1, \dots, k$, são chamados *vértices* de α e os traços $\alpha([t_i, t_{i+1}])$ são chamados arcos regulares de α .

Pela condição de regularidade, para cada vértice $\alpha(t_i)$ existe o limite à esquerda, i.é., para $t < t_i$,

$$\lim_{t \rightarrow t_i} \alpha'(t) = \alpha'(t_i + 0) \neq 0.$$

Suponha agora que M^2 está orientada e seja $|\theta_i|$, $0 < |\theta_i| \leq \pi$, a menor determinação do ângulo de $\alpha'(t_i - 0)$ e $\alpha'(t_i + 0)$. Se $\theta_i \neq \pi$, damos a θ_i o sinal do determinante $\{\alpha'(t_i - 0), \alpha'(t_i + 0), N\}$. Isto significa que se o vértice $\alpha(t_i)$ não é uma "cúspide", o sinal de θ_i é dado pela orientação de M^2 . O ângulo com sinal θ_i , $-\pi < \theta_i < \pi$, é chamado *ângulo externo* no vértice $\alpha(t_i)$.

No caso em que o vértice é uma cúspide, isto é, $|\theta_i| = \pi$ o sinal é escolhido do seguinte modo. Usando uma parametrização, o problema fica reduzido ao caso no qual α está contido em \mathbb{R}^2 , com $\alpha(t_i) = 0$, e $\alpha'(t_i - 0)$ está na parte negativa do eixo Ox (logo $\alpha'(t_i + 0)$ está na parte positiva). Para $\epsilon > 0$ suficiente pequeno, o traço de α restrito a $(t_i - \epsilon, t_i)$ é o gráfico de uma função $f : (0, -\epsilon') \rightarrow \mathbb{R}$ e o traço de α restrito a $(t_i, t_i + \epsilon)$ é o gráfico da função $g : (0, -\epsilon'') \rightarrow \mathbb{R}$. Como α não tem auto-interseções, ou $f(x) > g(x)$ ou $f(x) < g(x)$, para todo x em que ambas f e g estão definidas. No primeiro caso, defina $\theta_i = \pi$ e no segundo, defina $\theta(i) = -\pi$.

Considere M^2 uma superfície suave. Dizemos que uma região conexa $R \subset M^2$ é regular se R é compacta e sua fronteira ∂R é uma união finita de curvas regulares por partes fechadas (e simples) que não se intersectam.

Uma triangularização de uma região regular $R \subset M$ é uma família finita T de triângulos T_i , $i = 1, \dots, n$, onde

- (a) $\bigcup_{i=1}^n T_i = R$.
- (b) Se $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ para $i \neq j$, então $T_i \cap T_j$ é uma aresta comum de T_i e T_j ou um vértice comum de T_i e T_j .

Proposição 1.6. *Toda região regular de uma superfície regular admite uma triangulação.*

Demonstração. Veja [1] pág. 105. □

Definição 1.20. *Considere M uma superfície e R uma região de M . A característica de Euler Poincaré da triangulação é dada por*

$$\chi(R) = F - E + V,$$

onde F é o número de faces, E é o número de arestas e V é o número de vértices.

Sendo M uma superfície Compacta com bordo, onde o número de componentes conexas da fronteira é dada por r , a característica de Euler Poincaré de M é dada por

$$\chi(M) = 2 - 2g - r.$$

Teorema 1.3. *Considere M uma variedade Riemanianna compacta orientável, e sejam C_1, \dots, C_n as curvas fechadas, simples e regulares por partes que formam a fronteira ∂M de M . Suponha que cada C_i é orientada positivamente e sejam $\theta_1, \dots, \theta_p$ o conjunto de ângulos externos das curvas C_1, \dots, C_n . Então,*

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s) ds + \int_M K dM + \sum_{l=1}^p \theta_l = 2 \cdot \pi \cdot \chi(M),$$

onde s denota o comprimento de arco de C_i , e a integral sobre C_i significa a soma das integrais em todos os arcos regulares de C_i .

Demonstração. [3] pág 328. □

Corolário 1.1. *Considere M uma variedade Riemanianna compacta orientável. Suponha que ∂M é suave e que a mesma está orientada positivamente. Então,*

$$\int_{\partial M} k_g(s) ds + \int_M K dM = 2 \cdot \pi \cdot \chi(M),$$

onde s denota o comprimento de arco de ∂M .

Demonstração. Basta notar que ∂M é suave, e portanto a soma dos ângulos externos é nula, e portanto segue diretamente. □

1.3 Gradiente, Divergente e Laplaciano

Iremos definir as noções de gradiente e Laplaciano de uma função, a fórmula de Green e alguns outros resultados relacionados.

Definição 1.21. *O gradiente de uma função diferenciável $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é o campo ∇f , definido por*

$$\langle \nabla f(p), v \rangle = df_p(v),$$

para todo $v \in T_p M$.

Proposição 1.7. *Se $f, g : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis, então*

(a) $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g.$

(b) $\nabla(fg) = g \cdot \nabla f + f \cdot \nabla g.$

Demonstração. Considere $X \in \mathcal{X}(M)$ portanto temos

$$\begin{aligned} \langle \nabla(f + h), X \rangle &= X(f + h) \\ &= X(f) + X(h) \\ &= \langle \nabla f, X \rangle + \langle \nabla h, X \rangle \\ &= \langle \nabla f + \nabla h, X \rangle. \end{aligned}$$

Agora provaremos o segundo item. Ora,

$$\begin{aligned} \langle \nabla(fh), X \rangle &= X(fh) \\ &= fX(h) + hX(f) \\ &= \langle f\nabla h, X \rangle + \langle h\nabla f, X \rangle \\ &= \langle f\nabla h + h\nabla f, X \rangle. \end{aligned}$$

Isto conclui a prova da proposição. □

Definição 1.22. *Seja X um campo vetorial em M^2 . A divergência de X é a função suave $X : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\text{div}X = \text{tr}\{v \mapsto (\nabla_v X)(p)\},$$

onde $v \in T_p M$ e tr é o traço do operador dado entre chaves.

Proposição 1.8. *Sejam X, Y campos vetoriais suaves sobre M^2 e $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Então,*

(a) $\text{div}(X + Y) = \text{div}X + \text{div}Y.$

(b) $\text{div}(fX) = f\text{div}X + \langle \nabla f, X \rangle.$

Demonstração. A prova do primeiro item segue do seguinte cálculo

$$\begin{aligned} \text{div}(X + Y) &= \text{tr}\{Z \rightarrow \nabla_Z(X + Y)\} \\ &= \text{tr}\{Z \rightarrow (\nabla_Z X + \nabla_Z Y)\} \\ &= \text{tr}\{Z \rightarrow \nabla_Z X\} + \text{tr}\{Z \rightarrow \nabla_Z Y\} \\ &= \text{div}X + \text{div}Y. \end{aligned}$$

Agora tratamos do segundo item. Sendo $\{e_i\}$ um referencial, teremos

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(fX) &= \langle \nabla_{e_i} fX, e_i \rangle \\
 &= \langle e_i(f)X + f\nabla_{e_i} X, e_i \rangle \\
 &= \langle e_i(f)X, e_i \rangle + \langle f\nabla_{e_i} X, e_i \rangle \\
 &= \langle e_i(f)e_i, X \rangle + f\langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle \\
 &= \langle \nabla f, X \rangle + f \cdot \operatorname{div}X.
 \end{aligned}$$

□

Teorema 1.4 (Divergência). *Seja \widetilde{M}^3 uma variedade Riemanniana compacta orientável, e $X \in \chi(\widetilde{M})$. Se \widetilde{M}^{n+1} tem bordo $\partial\widetilde{M} = M^2$, munida com a orientação e a métrica induzida pela inclusão $i : M^2 \rightarrow \widetilde{M}^3$, e ν denota o normal unitário exterior à \widetilde{M}^3 ao longo de M^2 , então*

$$\int_{\widetilde{M}} \operatorname{div}X \, d\widetilde{M} = \int_M \langle X, \nu \rangle \, dM.$$

Demonstração. Esse teorema é uma consequência imediata do Teorema de Stokes para variedades. A demonstração do Teorema de Stokes pode ser encontrada em [7]. □

Definição 1.23. *Seja $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. O Laplaciano de f é a função $\Delta f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f).$$

Proposição 1.9. *Seja $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave em M^2 , e $\{e_1, e_2, e_3\}$ um referencial geodésico em $p \in M^2$. Então,*

$$\Delta f = \sum_{j=1}^2 e_i(e_j(f)).$$

Demonstração. Note que $\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$, onde $\nabla f = \sum_{i=1}^2 e_i(f)e_i$ e que $\nabla_{e_i} e_i = 0$. Assim

$$\begin{aligned}
 \Delta f &= \operatorname{div}(\nabla f) \\
 &= \sum_{i=1}^2 \{e_i(e_i(f)) - \langle \nabla_{e_i} e_i, \nabla f \rangle\} \\
 &= \sum_{i=1}^2 \{e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i)f\} \\
 &= \sum_{i=1}^2 e_i(e_i(f)).
 \end{aligned}$$

□

Teorema 1.5 (Primeira identidade de Green). *Seja \widetilde{M}^3 uma variedade Riemanniana compacta orientável, e $X \in \chi(\widetilde{M})$. Se \widetilde{M}^3 tem bordo $\partial\widetilde{M} = M^2$, munida com a orientação e a métrica induzida pela inclusão $i : M^2 \rightarrow \widetilde{M}^3$. Se $f, g : \widetilde{M}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves, e ν denota o normal unitário exterior a \widetilde{M}^3 ao longo de M^2 , então*

$$\int_{\widetilde{M}} \langle \nabla f, \nabla g \rangle dM + \int_{\widetilde{M}} f \Delta g d\widetilde{M} = \int_M f \frac{\partial g}{\partial \nu} dM.$$

Demonstração. Segue diretamente do Teorema da divergência e da definição de divergente considerando o seguinte campo $X = f \cdot \nabla g$. □

1.4 Variações de área e volume

Nessa seção, falaremos da primeira e segunda variações de área e da variação de volume. Por simplicidade, faremos as fórmulas de variação para o caso em que a imersão tem contra-domínio \mathbb{R}^3 .

Definição 1.24. *Uma variação de uma imersão $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável $X : M \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que, $\forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$, $X_t : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $X_t(p) = X(p, t)$ é uma imersão para todo t . Além disso, para $t = 0$, $X_0 = X$. Dado $p \in M$, o campo de vetores variacional da variação X_t é definido por:*

$$\xi(p) = \frac{\partial X}{\partial t}(p, t).$$

Suponha M uma superfície compacta e considere a área $A(t)$ de M , induzida pela imersão X_t :

$$A(t) = \int_M dM_t.$$

Desta forma, podemos enunciar a primeira variação de área como segue:

Teorema 1.6 (Primeira Variação de Área). *A função A é diferenciável em $t = 0$, e vale*

$$A'(0) = -2 \int_M H \langle N, \xi \rangle dM - \int_{\partial M} \langle \nu, \xi \rangle ds,$$

onde ν é o vetor conormal interno de M ao longo de ∂M e H é a curvatura média da imersão.

Demonstração. Considere o referencial geodésico $\{e_1, e_2\}$ em torno de um ponto $p \in M$ e sejam E_1, E_2 campos vetoriais ao longo da variação X que estendem e_1 e e_2 em uma vizinhança de p , respectivamente. Então,

$$\begin{aligned} dA_t &= \left(|(dX_t)_p(e_1)|^2 |(dX_t)_p(e_2)|^2 - \langle (dX_t)_p(e_1), (dX_t)_p(e_2) \rangle^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{E(p, t)G(p, t) - F(p, t)^2}, \end{aligned}$$

onde E, F e G são os coeficientes das primeira forma fundamental da imersão X_t . Uma vez que M é compacta, o teorema da dependência do parâmetro e o fato de que $E(p, 0) = |E_1(p, 0)|^2 = 1$, $E(p, 0) = |E_2(p, 0)|^2 = 1$ e $\langle E_1(p, 0), E_2(p, 0) \rangle = 0$ nos dá que

$$\begin{aligned} A'(0) &= \int_M \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \sqrt{E(p, t)G(p, t) - F(p, t)^2} dM \\ &= \frac{1}{2} \int_M \frac{E'(p, 0)G(p, 0) + E(p, 0)G'(p, 0) - 2F(p, 0)F'(p, 0)}{E(p, 0)G(p, 0) - F(p, 0)^2} dM \\ &= \frac{1}{2} \int_M (E'(p, 0) + G'(p, 0)) dM. \end{aligned}$$

Denote por \tilde{E}_1 e \tilde{E}_2 dois campos de vetores ao longo de X estendendo E_1 e E_2 . Para o primeiro coeficiente E teremos que

$$E(p, t) = \langle (dX_t)_p(E_1(p, t)), (dX_t)_p(E_1(p, t)) \rangle = \langle \tilde{E}_1(p, t), \tilde{E}_2(p, t) \rangle.$$

Desta forma,

$$\frac{d}{dt}(E(p, t)) \Big|_{t=0} = 2 \cdot \left\langle \frac{D}{dt}(\tilde{E}_1(p, 0)), \tilde{E}_1(p, 0) \right\rangle = 2 \cdot \left\langle \frac{D}{dt}(\tilde{E}_1(p, 0)), (dX_t)_p(e_1) \right\rangle$$

Sendo $[\cdot, \cdot]$ o colchete de Lie na variedade produto $M \times (-\epsilon, \epsilon)$, temos que

$$\left[(E_1(p), 0) \left(0, \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] = 0.$$

Então,

$$\left[((dX_t)_p(E_1(p), 0), (dX_t)_p(0, \frac{\partial}{\partial t})) \right] = 0$$

e

$$\nabla_{\frac{\partial X}{\partial t}(p, t)}^0 (dX_t)_p E_1(p) = \nabla_{\tilde{E}_1(p, t)}^0 \frac{\partial X}{\partial t}(p, t),$$

onde ∇^0 é a conexão de Levi-Civita para \mathbb{R}^3 . Em $t = 0$, nós obtemos

$$\nabla_{\xi(\mathbf{p})}^0 \tilde{E}_1 = \nabla_{\tilde{E}_1(\mathbf{p},0)}^0 \frac{\partial X}{\partial t}.$$

Agora a fórmula de Gauss em [8] nos dá que

$$\nabla_{e_1}^0 E_1 = \nabla_{e_1} E_1 + \beta(e_1, e_1)N,$$

onde ∇ é a conexão induzida de M , β é a segunda forma fundamental de X e N é uma orientação em M , no caso dada pela aplicação normal de Gauss.

Decompondo ξ na forma $\xi^T + \xi^\perp$ onde temos a parte normal e a parte tangente, então

$$\begin{aligned} \left\langle \nabla_{\tilde{E}_1(\mathbf{p},0)} \frac{\partial X}{\partial t}(\mathbf{p}, 0), (dX_{\mathbf{p}})(e_1) \right\rangle &= \langle \nabla_{e_1} \xi, (dX_{\mathbf{p}})(e_1) \rangle \\ &= e_1 \langle \xi, dX(E_1) \rangle - \langle \xi(\mathbf{p}), \nabla_{e_1}^0 E_1 \rangle \\ &= e_1 \langle \xi^T, dX(E_1) \rangle + e_1 \langle \xi^\perp, dX(E_1) \rangle - \\ &\quad \langle \xi(\mathbf{p}), \nabla_{e_1} E_1 \rangle - \langle \xi(\mathbf{p}), \beta(e_1, e_1)N \rangle \\ &= e_1 \langle \xi^T, dX(E_1) \rangle - \langle \xi^T, \nabla_{e_1} E_1 \rangle - \\ &\quad \beta(e_1, e_1) \langle \xi, N \rangle \\ &= \left\langle \nabla_{e_1} \tilde{\xi}, e_1 \right\rangle - \beta(e_1, e_1) \langle \xi, N \rangle \end{aligned}$$

onde $\tilde{\xi} \in \mathfrak{X}(M)$ e $dX_{\mathbf{p}}(\tilde{\xi}_{\mathbf{p}}) = \xi_{\mathbf{p}}^T$.

Assim, teremos

$$E'(\mathbf{p}, 0) = 2 \cdot \left\langle \nabla_{e_1} \tilde{\xi}, e_1 \right\rangle - 2 \cdot \beta(e_1, e_1) \langle \xi, N \rangle.$$

Analogamente obtemos

$$G'(\mathbf{p}, 0) = 2 \cdot \left\langle \nabla_{e_2} \tilde{\xi}, e_2 \right\rangle - 2 \cdot \beta(e_2, e_2) \langle \xi, N \rangle.$$

Logo

$$E'(\mathbf{p}, 0) + G'(\mathbf{p}, 0) = 2 \cdot \operatorname{div}(\tilde{\xi}) - 4H \langle \xi, N \rangle.$$

Desta forma, usando o teorema da divergência obtemos

$$\begin{aligned} A'(0) &= \int_M \operatorname{div}(\tilde{\xi}) - 2H \langle \xi, N \rangle dM \\ &= - \int_{\partial M} \left\langle \mathbf{v}, \tilde{\xi} \right\rangle ds - 2 \cdot \int_M H \langle N, \xi \rangle dM \end{aligned}$$

onde \mathbf{v} é o vetor conormal unitário de M ao longo da fronteira. □

Quando o conormal aponta para fora temos a seguinte expressão:

$$A'(0) = -2 \int_M H \langle N, \xi \rangle dM + \int_{\partial M} \langle \nu, \xi \rangle ds.$$

Agora, para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ definimos o volume "delimitado" pela imersão X_t como sendo

$$V(t) = \frac{1}{3} \int_M \langle X_t, N(t) \rangle dM_t,$$

onde $N : M \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável que define uma orientação sobre X_t .

Teorema 1.7 (Primeira Variação de Volume). *A função V é diferenciável em $t = 0$, onde teremos*

$$V'(0) = \int_M \langle N, \xi \rangle dM,$$

onde ξ é o campo variacional.

Demonstração. Veja [8]. □

Teorema 1.8. *Seja $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão de uma superfície compacta M e $f \in C^\infty(M)$ satisfazendo*

$$\int_M f dM = 0.$$

Então existe uma variação Φ que preserva volume, onde o campo variacional é dado por $\xi = fN$.

Demonstração. Considere $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tal imersão e $\Phi : M \times (-\epsilon, \epsilon)^2 \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, a variação dada por

$$\Phi(p, t, s) = \phi(p) + (tf(p) + sg(p))N(p),$$

onde $g \in C^\infty(M)$ satisfaz

$$\int_M g dM \neq 0.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} V(t, s) &= \frac{1}{n+1} \int_M \langle \Phi, N \rangle dM_{t,s} \\ &= \frac{1}{n+1} \int_M \langle \phi + (tf + sg)N, N \rangle dM_{t,s} \\ &= \frac{1}{n+1} \int_M (\langle \phi, N \rangle + \langle (tf + sg)N, N \rangle) dM_{t,s} \\ &= \frac{1}{n+1} \int_M (\langle \phi, N \rangle + tf + sg) dM_{t,s}. \end{aligned}$$

(1.7)

Calculando as derivadas parciais com respeito a t e s , obtemos

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, s) = \frac{1}{n+1} \left(\int_M f \, dM_{t,s} + \int_M (\langle \phi, N \rangle + tf + sg) \frac{\partial}{\partial t} dM_{t,s} \right)$$

e

$$\frac{\partial V}{\partial s}(t, s) = \frac{1}{n+1} \left(\int_M g \, dM_{t,s} + \int_M (\langle \phi, N \rangle + tf + sg) \frac{\partial}{\partial s} dM_{t,s} \right).$$

Agora, ao aplicarmos em $t = s = 0$ teremos:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, s) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial s}(t, s) = \frac{1}{n+1} \int_M g \, dM \neq 0.$$

Assim, como V é de classe C^k , $k \geq 1$, teremos pelo teorema da função implícita, dado em [11], que existe $\bar{I} \times \bar{J}$ vizinhança de $(0, 0)$ e uma função $\varphi : \bar{I} \rightarrow \bar{J}$, também de classe C^k , onde φ é o gráfico de V , com $\varphi(0) = 0$. Daí, $V(t, \varphi(t)) = c$, onde consideramos $V(0, 0) = c$.

Desta forma, considere a variação dada por

$$\Phi(p, t, \varphi) = \phi(p) + tf(p)N(p) + \varphi(t)g(p)N(p)$$

Claramente tal variação preserva volume. Note agora que

$$V'(t, \varphi(t)) = \frac{\partial V}{\partial t} \cdot 1 + \frac{\partial V}{\partial s} \cdot \varphi'(t).$$

Em $t = 0$ iremos ter

$$\begin{aligned} 0 = V'(t, \varphi(t)) \Big|_{t=0} &= \frac{\partial V}{\partial t}(0) \cdot 1 + \frac{\partial V}{\partial s}(0) \cdot \varphi'(0) \\ &= \varphi'(0) \cdot \frac{1}{n+1} \int_M g \, dM. \end{aligned}$$

Segue que $\varphi'(0) = 0$.

Logo,

$$\begin{aligned} \xi(p) = \frac{\partial}{\partial t} \Phi_t(p) \Big|_{t=0} &= fN + \varphi'(0)fN \\ &= fN, \end{aligned}$$

donde segue o resultado. □

Considere a imersão $\phi : M \rightarrow B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e $\Phi : M \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma variação para tal imersão, onde $\phi(\text{int}M) \subset \text{int}B$, $\phi(\partial M) \subset \partial B$ e B é um conjunto convexo de \mathbb{R}^{n+1} .

Definição 1.25. Dizemos que a variação Φ é admissível quando $\Phi_t(\text{int}M) \subset \text{int}B$ e $\Phi_t(\partial M) \subset \partial B$, para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Definição 1.26. Dizemos que a imersão ϕ é estacionária se $A'(0) = 0$ para toda variação admissível Φ que preserva volume.

Teorema 1.9. Considere $\phi : M \rightarrow B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão com curvatura média constante H e uma variação admissível de ϕ que preserva volume. Então,

$$A''(0) = \int_M f \Delta f - |A|^2 f^2 \, dM - \int_{\partial M} f \frac{\partial f}{\partial \nu} \text{II}^{\partial B}(N, N) f^2 \, dl,$$

onde N é normal a M e ν é normal a fronteira apontando para fora.

Demonstração. [8]

□

1.5 Superfícies CMC com bordo livre

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ e considere $S \subset \Omega$ uma superfície compacta com $\partial S \neq \emptyset$, onde $\partial S \subset \partial \Omega$.

Definição 1.27. Dizemos que S é uma superfície CMC com bordo livre quando a curvatura média H é constante e S intersecta $\partial \Omega$ ortogonalmente.

Exemplo 1.10. O catenóide crítico pode ser definido analiticamente como a imagem da aplicação conforme $\varphi : (t, \theta) \in [-t_0, t_0] \times S^1$

$$\mapsto a_0 \cosh(t) \cos(\theta) e_1 + a_0 \cosh(t) \sin(\theta) e_2 + a_0 t e_3 \in \mathbb{R}^3$$

onde $\{e_1, e_2, e_3\}$ é uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 .

A constante t_0 é a única solução positiva da equação $t \sinh(t) = \cosh(t)$, enquanto que $a_0 = (t_0 \cosh(t_0))^{-1}$.

Estas constantes são escolhidas de tal maneira que a aplicação φ é conforme e a sua imagem é um pedaço de um catenóide em B , encontrando ∂B ortogonalmente, e cujo eixo de simetria é a reta gerada pelo vetor e_3 .

Veja abaixo uma ilustração que representa bem o catenóide crítico imerso na bola $B \subset \mathbb{R}^3$.

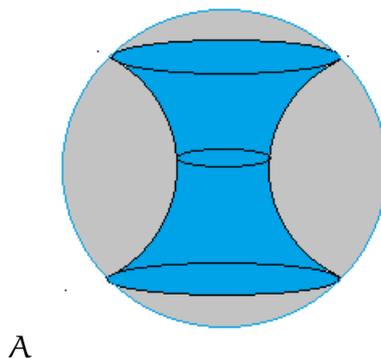


Figura 1.1: Catenóide

Exemplo 1.11. *O disco equatorial plano, onde o mesmo é dado pela interseção da bola fechada de \mathbb{R}^3 com um hiperplano passando pela origem.*

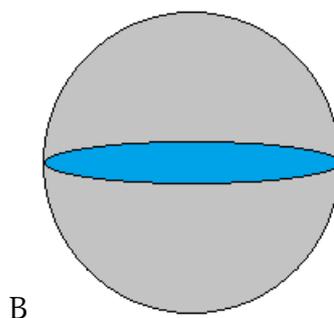


Figura 1.2: Disco equatorial

Exemplo 1.12. *As calotas esféricas.*

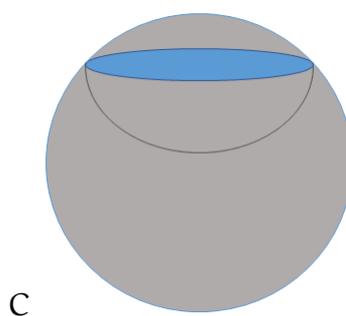


Figura 1.3: Calota esférica

Teorema 1.10. *Considere $\phi : M^2 \rightarrow B \subset \mathbb{R}^3$ uma imersão, onde $\phi(\text{int}M) \subset \text{int}B$, $\phi(\partial M) \subset \partial B$ e B é a bola fechada de \mathbb{R}^3 . ϕ é estacionária para toda variação normal se,*

e somente se, ϕ tem curvatura média constante e bordo livre.

Demonstração. Note que

$$A'(0) = - \int_{\mathcal{M}} 2 \cdot H \langle \mathbf{N}, \xi \rangle \, d\mathcal{M} + \int_{\partial\mathcal{M}} \langle \mathbf{v}, \xi \rangle \, ds$$

e

$$V'(0) = \int_{\mathcal{M}} \langle \mathbf{N}, \xi \rangle \, d\mathcal{M}.$$

Usando os multiplicadores de Lagrange, temos que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$A'(0) = \lambda \cdot V'(0).$$

Daí, teremos

$$- \int_{\mathcal{M}} 2 \cdot H \langle \mathbf{N}, \xi \rangle \, d\mathcal{M} + \int_{\partial\mathcal{M}} \langle \mathbf{v}, \xi \rangle \, ds = \lambda \cdot \int_{\mathcal{M}} \langle \mathbf{N}, \xi \rangle \, d\mathcal{M}.$$

E assim

$$\int_{\mathcal{M}} (\lambda + 2H) \langle \mathbf{N}, \xi \rangle \, d\mathcal{M} = \int_{\partial\mathcal{M}} \langle \mathbf{v}, \xi \rangle \, ds.$$

Note agora que, se $\mathbf{p} \in \partial\mathcal{M}$ então $\xi(\mathbf{p}) = \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{t}}|_{\mathbf{t}=\mathbf{p}}$ é um vetor tangente a fronteira, pois $\Phi_{\mathbf{p}} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \partial\mathcal{B}$. Como \mathbf{v} é normal a fronteira então teremos $\langle \mathbf{v}, \xi \rangle = 0$. Se tomarmos $\xi = (\lambda + 2H)\mathbf{N}$, obteremos

$$\int_{\mathcal{M}} (\lambda + 2H) \langle \mathbf{N}, (\lambda + 2H)\mathbf{N} \rangle \, d\mathcal{M} = 0 \implies \int_{\mathcal{M}} (\lambda + 2H)^2 \, d\mathcal{M} = 0.$$

Como $(\lambda + 2H)^2 \geq 0$ e a integral acima é nula, então obrigatoriamente deveremos ter

$$(\lambda + 2H)^2 = 0 \implies \lambda + 2H = 0 \implies H = -\frac{\lambda}{2}.$$

Segue que a imersão tem curvatura média constante e bordo livre. Reciprocamente, suponha que $\Phi(\mathcal{M})$ encontra $\partial\mathcal{B}$ ortogonalmente. Assim, é direto que $\langle \mathbf{v}, \xi \rangle = 0$.

Desta forma, como $V'(0) = 0$, pois a variação preserva volume, e H é constante teremos

$$\begin{aligned} A'(0) &= - \int_{\mathcal{M}} 2H \langle \mathbf{N}, \xi \rangle \, d\mathcal{M} + \int_{\partial\mathcal{M}} \langle \mathbf{v}, \xi \rangle \, ds \\ &= -2H \int_{\mathcal{M}} \langle \mathbf{N}, \xi \rangle \, d\mathcal{M} \\ &= -2H \cdot V'(0) \\ &= -2H \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, segue o resultado. □

1.6 Estabilidade

Definição 1.28. A imersão ϕ é estável se $A''(0) \geq 0$ para toda variação normal admissível Φ que preserva volume.

Seja $\mathbb{F} = \{f \in H^1(M) : \int_M f dM = 0\}$, onde $H^1(M)$ denota o espaço de Sobolev com respeito a M . Levando em conta a variação Φ dada por (1.7), temos a seguinte definição.

Definição 1.29. A forma índice Q de ϕ é uma forma bilinear simétrica que toma valores em $H^1(f)$ e é definida como

$$Q(f, f) = \int_M |\nabla f|^2 - |A|^2 f^2 dM - \int_{\partial M} \Pi^{\partial B}(N, N) f^2 dl.$$

Proposição 1.10. Seja ϕ uma imersão estacionária. Então ϕ é estável se, e somente se, $I(f, f) \geq 0$ para toda $f \in \mathbb{F}$.

Demonstração. Seja $\phi : M \rightarrow B \subset \mathbb{R}^3$ uma imersão e Φ uma variação admissível que preserva volume. Desta forma, a fórmula da primeira variação de área nos dá que:

$$A''(0) = - \int_M f \Delta f + |A|^2 f^2 dM + \int_{\partial M} f \frac{\partial f}{\partial \nu} - \Pi^{\partial B}(N, N) f^2 dl \geq 0$$

A primeira fórmula de Green nos dá que

$$\int_M \langle \nabla f, \nabla g \rangle dM + \int_M f \Delta g dM = \int_{\partial M} \frac{\partial f}{\partial \nu} g dl.$$

Assim, teremos

$$- \int_M f \Delta g dM = \int_M \langle \nabla f, \nabla g \rangle dM - \int_{\partial M} \frac{\partial g}{\partial \nu} f dl.$$

Trocando g por f e substituindo na expressão para a segunda derivada no zero, obtemos

$$\begin{aligned} A''(0) &= \int_M |\nabla f|^2 dM - \int_{\partial M} \frac{\partial f}{\partial \nu} f dl - \int_M |A|^2 f^2 dM \\ &+ \int_{\partial M} f \frac{\partial f}{\partial \nu} dl - \int_{\partial M} \Pi^{\partial B}(N, N) f^2 dl. \\ &= \int_M |\nabla f|^2 - |A|^2 f^2 dM - \int_{\partial M} \Pi^{\partial B}(N, N) f^2 dl \\ &= Q(f, f) \geq 0. \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha $Q(f, f) \geq 0$ para toda $f \in \mathbb{F}$. Como $\int_{\mathcal{M}} f \, d\mathcal{M} = 0$, então existe uma variação normal Φ de ϕ , admissível preservando volume, onde

$$A''(0) = Q(f, f) \geq 0.$$

□

Capítulo 2

Melhorando o Teorema de Ros e Vergasta

Ros e Vergasta estudaram hipersuperfícies CMC estáveis imersas com bordo livre em domínios convexos compactos M^{n+1} de \mathbb{R}^{n+1} . Uma questão muito natural, que ainda está em aberto, no caso de M^{n+1} ser uma bola fechada $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é perguntar se as únicas hipersuperfícies CMC estáveis compactas orientáveis imersas com bordo livre em $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ são as totalmente umbílicas. Para $n = 2$, Ros e Vergasta em [9] deram uma resposta parcial, e neste capítulo, o nosso principal objetivo é apresentar o que Ivaldo Nunes [5] fez para melhorar tal resultado.

Teorema 2.1 (A.Ros e E.Vergasta, [9]). *Seja $B \subset \mathbb{R}^3$ uma bola fechada. Se $\Sigma \subset B$ é uma superfície CMC estável compacta orientável com bordo livre, então $\partial\Sigma$ é mergulhada e as únicas possibilidades são:*

- (i) Σ é um disco totalmente geodésico.
- (ii) Σ é uma calota esférica.
- (iii) Σ tem gênero 1, com no máximo duas componentes de fronteira.

Demonstração. Veja que $\text{II}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) = 1$ e o Lema 2, em [9], afirma que $k_\nu = 1$ em ∂M . Neste caso, a estimativa dada pela equação 10 ([9], pág. 26), pode ser melhorada para

$$4\pi \left(4 - 2g + 2 \left[\frac{g+1}{2} \right] - r \right) > 4H^2A + 3L \geq 3(H^2A + L). \quad (2.1)$$

Pela Proposição 3, em [9], temos que $H^2A + L \geq 2\pi$, o que nos dá

$$4\pi \left(4 - 2g + 2 \left\lfloor \frac{g+1}{2} \right\rfloor - r \right) > 6\pi.$$

Organizando os termos temos que

$$8 + 4 \left\lfloor \frac{g+1}{2} \right\rfloor - 4g - 2r > 3.$$

De maneira análoga ao que foi feito no Teorema Teorema 5, em [9], faremos uma análise quando gênero g for par, e quando for ímpar.

Primeiro caso: Se g for par então $2 \left\lfloor \frac{g+1}{2} \right\rfloor = g$. Daí

$$\begin{aligned} 3 &< 8 + 2g - 4g - 2r \\ \Leftrightarrow 5 &> 2(g + r). \end{aligned}$$

Aqui, se $g = 0$ então $r = 1$ ou 2 se $g = 2$, temos que $r = 0$.

Segundo caso: Se g for ímpar então $2 \left\lfloor \frac{g+1}{2} \right\rfloor = g + 1$. Assim

$$\begin{aligned} 3 &< 8 + 2g + 2 - 4g - 2r \\ \Leftrightarrow 7 &> 2(g + r). \end{aligned}$$

Nesse caso, g só pode ser igual a 1, e assim $r = 1$ ou 2 .

Portanto temos que $g = 0$ ou 1 e $r = 1$ ou 2 . Agora para eliminar algumas possibilidades iremos supor que ∂M não é mergulhada e chegaremos em uma contradição.

Ainda pela Proposição 3, em [9], temos que $H^2A + L \geq 4\pi$, e usando 2.1, ganhamos que

$$4\pi \left(4 - 2g + 2 \left\lfloor \frac{g+1}{2} \right\rfloor - r \right) > 3(4\pi),$$

o que é equivalente a

$$4 - 2g + 2 \left\lfloor \frac{g+1}{2} \right\rfloor - r > 3.$$

Novamente, analisaremos o caso em que g é par e o caso em que g é ímpar.

Primeiro caso: Se g for par então $2 \left\lfloor \frac{g+1}{2} \right\rfloor = g$. Daí

$$\begin{aligned} 3 &< 4 - 2g + g - r \\ \Leftrightarrow 1 &> g + r. \end{aligned}$$

Isso nos mostra que $g = 0$ e $r = 0$, o que não pode acontecer, já que ∂M é não vazia.

Segundo caso: Se g for ímpar então $2 \left\lfloor \frac{g+1}{2} \right\rfloor = g+1$. Daí

$$\begin{aligned} 3 &< 4 - 2g + g + 1 - r \\ \Leftrightarrow 2 &> g + r. \end{aligned}$$

Assim temos que $g = 1$ e $r = 0$ o que não pode acontecer, pois a ∂M é não vazia.

Devemos provar que os discos totalmente geodésicos e calotas esféricas são as únicas superfícies estáveis estacionárias com gênero $g = 0$. Seja $p_0 \in M$ um ponto onde a função $|\phi(p)|$ atinge seu mínimo. Perceba que $u \neq 0$ faz com que $0 \notin \phi(M)$. Definamos em M a função

$$\beta(p) = \langle \phi(p) \wedge N(p), N_0 \rangle,$$

onde $N_0 = N(p_0)$ e \wedge denota o produto vetorial em \mathbb{R}^3 . Note que

$$\beta(p_0) = \langle \phi(p_0) \wedge N(p_0), N_0 \rangle = 0. \quad (2.2)$$

Além disso

$$\nabla_w \beta(p_0) = \langle w \wedge N(p_0) + \phi(p_0) \wedge \nabla_w N(p_0), N(p_0) \rangle = 0, \forall w \in T_p M,$$

pois $\phi(p_0) \neq 0$ implica que $\phi(p_0)$ é paralelo a $N(p_0)$. Logo

$$\nabla \beta(p_0) = 0. \quad (2.3)$$

Pelo Lema 1, em [9], temos que β satisfaz

$$\begin{cases} \Delta \beta + \|\sigma\|^2 \beta = 0, & \text{sep} \in M, \\ \frac{\partial \beta}{\partial \nu} = \beta, & \text{sep} \in \partial M. \end{cases} \quad (2.4)$$

Logo, como β é a solução de uma equação elíptica em M , obtemos que $\beta^{-1}(0)$ é um conjunto nodal.

Afirmção: $\beta = 0$ em M .

De fato, caso contrário o conjunto de nível $\beta^{-1}(0)$ é um gráfico cujos vértices são os pontos críticos de β (ver, por exemplo, Anné ([14]) ou cheng([15])). Seja m o número de componentes conexas M_i de $M - \beta^{-1}(0)$. Usando o Teorema de Gauss-Bonnet para cada componente conexas M_i de $M - \beta^{-1}(0)$, temos

$$\int_{M_i} K dA = 2\pi \chi(M_i) - \int_{\partial M_i} k_g ds - \sum_j \theta_{ij},$$

onde θ_{ij} denotam os ângulos externos de cada componente da ∂M_i . Somando as equações acima para todos os i , obtemos

$$\int_M K dA = 2\pi \sum_{i=1}^m \chi(M_i) - \sum_{i=1}^m \int_{\partial M_i} k_g ds - \sum_{i=1}^m \sum_j \theta_{ij}.$$

Assim,

$$\int_M K dA + \int_{\partial M} k_g ds = 2\pi \sum_{i=1}^m \chi(M_i) - \sum_{i,j} \theta_{ij} \quad (2.5)$$

Como ∂M é suave não temos ângulos externos, a última equação nos dá

$$\int_M K dA + \int_{\partial M} k_g ds = 2\pi \chi(M). \quad (2.6)$$

Nesse caso, comparando 2.5 e 2.6 e sabendo que $\chi(M) = 2 - 2g - r$, obtemos que

$$2\pi(2 - 2g - r) = 2\pi \sum_{i=1}^m \chi(M_i) - \sum_{i,j} \theta_{ij}. \quad (2.7)$$

Devemos agora obter uma estimativa para a última soma. De 2.2, há pelo menos duas linhas nodais de β se cruzando em p_0 e formando um sistema equiangular em p_0 (ver [14] ou [15]). Portanto, $\sum_{i,j} \theta_{ij}$ é pelo menos 2π que a soma dos ângulos que possuem $p_0 \notin \partial M$ como vértice. Por outro lado, em cada componente conexa $\Gamma_k, k = 1, \dots, r$, de ∂M , escolhendo uma parametrização de comprimento de arco orientada positivamente γ_k temos $\phi \wedge N = -\gamma'_k$. Lembrando que estamos usando que M é de fronteira livre. Assim, pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_{\Gamma_k} \beta ds = - \int_{\Gamma_k} \langle \gamma'_k, N_0 \rangle = 0,$$

pois γ_k é uma curva fechada e segue que β tem pelo menos dois zeros em cada componente conexa Γ_k . Cada ponto de $\beta^{-1}(0) \cap \gamma_i$ contribui com pelo menos π para a soma de $\sum_{i,j} \theta_{ij}$ na última equação. Levando em consideração todos estes valores e o anterior obtido em p_0 obtemos a estimativa

$$\sum_{i,j} \theta_{ij} \geq 2\pi(1 + r).$$

Comparando isso com a equação 2.7, temos o seguinte

$$2\pi(2 - 2g - r) = 2\pi \sum_{i=1}^m \chi(M_i) - \sum_{i,j} \theta_{ij} \leq 2\pi \sum_{i=1}^m \chi(M_i) - 2\pi(1 + r)$$

donde temos,

$$2 - 2g - r \leq \sum_{i=1}^m \chi(M_i) - 1 - r,$$

Assim,

$$\sum_{i=1}^m \chi(M_i) \geq 3 - 2g.$$

Note que cada componente conexa M_i é homeomorfa a um disco, pela característica de Euler $\chi(M_i) = 1$ para cada i . Se assumirmos que M tem gênero $g = 0$, segue-se que $M - \beta^{-1}(0)$ tem pelo menos três componentes conexas. Sejam M_1 e M_2 duas destas componentes conexas. Assim, sejam $\beta_1, \beta_2 : M \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$\beta_1(\mathbf{p}) = \begin{cases} \beta(\mathbf{p}), & \text{se } \mathbf{p} \in M_1 \\ 0, & \text{se } \mathbf{p} \in M - M_1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \beta_2(\mathbf{p}) = \begin{cases} \beta(\mathbf{p}), & \text{se } \mathbf{p} \in M_2 \\ 0, & \text{se } \mathbf{p} \in M - M_2 \end{cases}$$

Tendo em mente que $\Pi(\mathbf{N}, \mathbf{N}) = 1$ e usando o Teorema da Divergência na forma do índice para a função β_1 , temos que

$$\begin{aligned} I(\beta_1, \beta_1) &= \int_M (\langle \nabla \beta_1, \nabla \beta_1 \rangle - \|\sigma\|^2 \beta_1^2) \, dA - \int_{\partial M} \beta_1^2 \, ds \\ &= \int_M (\langle \nabla \beta, \nabla \beta_1 \rangle - \|\sigma\|^2 \beta_1 \beta) \, dA - \int_{\partial M} \beta_1 \beta \, ds \\ &= - \int_M (\beta_1 \Delta \beta + \|\sigma\|^2 \beta_1 \beta) \, dA + \int_{\partial M} \left(\beta_1 \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{v}} - \beta_1 \beta \right) \, ds \\ &= - \int_M \beta_1 (\Delta \beta + \|\sigma\|^2 \beta) \, dA + \int_{\partial M} \beta_1 \left(\frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{v}} - \beta \right) \, ds, \end{aligned}$$

pois β_1 se anula em $M - M_1$. De 2.4 tem-se que

$$I(\beta_1, \beta_1) = 0.$$

De maneira similar, mostra-se que $I(\beta_2, \beta_2) = 0$. Mais ainda, como β_1 e β_2 se anulam em conjuntos complementares, obtemos que $I(\beta_1, \beta_2) = 0$.

Supondo sem perda de generalidade que $\int_M \beta_2 \, dA \neq 0$. Seja $\bar{\beta} = \beta_1 + \alpha \beta_2$, onde $\alpha = -\frac{\int_M \beta_1 \, dA}{\int_M \beta_2 \, dA}$. E assim, pelo que analisamos anteriormente temos que

$$I(\bar{\beta}, \bar{\beta}) = I(\beta_1, \beta_1) + 2\alpha I(\beta_1, \beta_2) + \alpha^2 I(\beta_2, \beta_2) = 0.$$

Sendo ϕ estacionário estável, e do Lema ?? segue que $\bar{\beta} \mathbf{N}$ é um campo de Jacobi e assim

$$\Delta \bar{\beta} + \|\sigma\|^2 \bar{\beta} = \text{constante}. \tag{2.8}$$

Como $\bar{\beta}$ desaparece fora de $M_1 \cup M_2$ e 2.8 é uma equação elíptica, o Teorema da Continuação única (ver [17]) nos dá $\bar{\beta} \equiv 0$ em M . Isso implica que $\beta \equiv 0$. Assim,

$$0 = \langle \phi(\mathbf{p}) \wedge \mathbf{N}(\mathbf{p}), \mathbf{N}_0 \rangle = -\langle \phi(\mathbf{p}) \wedge \mathbf{N}_0, \mathbf{N}(\mathbf{p}) \rangle.$$

Portanto, o vetor $W(\mathbf{p}) = \phi(\mathbf{p}) \wedge \mathbf{N}_0 \in T_{\mathbf{p}}M$, $\forall \mathbf{p} \in M$. Considerando o campo de vetores V em \mathbb{R}^3 dado por $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \wedge \mathbf{N}_0$. V é um campo de Killing, pois é gerado a partir de um grupo a um parâmetro de isometrias de \mathbb{R}^3 , sendo elas as rotações. Ao longo de $\phi(M)$ a restrição de V coincide com W , então M é uma superfície de rotação ao redor do eixo \mathbf{N}_0 com ponto fixo \mathbf{p}_0 , e então M deve ser homeomorfa a um disco. A conclusão segue de um Teorema de Nitsche ([16]). \square

Para melhorar o teorema acima, Ivaldo Nunes [5] mostrou que o item (iii) não ocorre. Mais ainda, mostrou que o gênero é zero.

Antes de fazermos isso, provaremos um lema técnico envolvendo a equação de Jacobi, que ajudará nessa demonstração.

Lema 2.1. *Seja $X : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão com curvatura média constante H e \mathbf{v} um vetor unitário fixo em \mathbb{R}^3 . Então a função $f = \langle \mathbf{v}, \mathbf{N} \rangle$ satisfaz a equação de Jacobi, ou seja,*

$$\Delta f + |\mathbf{A}|^2 f = 0.$$

Demonstração. Seja $\mathbf{p} \in M^2$ e $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ um referencial geodésico em \mathbf{p} , ou seja, $\nabla_{\mathbf{e}_i} \mathbf{e}_j(\mathbf{p}) = 0$, $\forall i, j = 1, 2$. Desta forma teremos

$$\begin{aligned} \Delta f &= \sum_{j=1}^2 \mathbf{e}_j(\mathbf{e}_j \langle \mathbf{v}, \mathbf{N} \rangle)(\mathbf{p}) \\ &= \sum_{j=1}^2 \mathbf{e}_j(\langle \nabla_{\mathbf{e}_j} \mathbf{v}, \mathbf{N} \rangle + \langle \mathbf{v}, \nabla_{\mathbf{e}_j} \mathbf{N} \rangle) \\ &= \sum_{j=1}^2 \mathbf{e}_j(\langle \mathbf{v}, \nabla_{\mathbf{e}_j} \mathbf{N} \rangle) \\ &= \sum_{j=1}^2 \langle \nabla_{\mathbf{e}_j} \mathbf{v}, \nabla_{\mathbf{e}_j} \mathbf{N} \rangle + \langle \mathbf{v}, \nabla_{\mathbf{e}_j} \nabla_{\mathbf{e}_j} \mathbf{N} \rangle \\ &= \sum_{j=1}^2 \langle \mathbf{v}, \nabla_{\mathbf{e}_j} \nabla_{\mathbf{e}_j} \mathbf{N} \rangle \\ &= \left\langle \mathbf{v}, \sum_{j=1}^2 \nabla_{\mathbf{e}_j} \nabla_{\mathbf{e}_j} \mathbf{N} \right\rangle. \end{aligned}$$

Agora, note que como $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{N}\}$ é uma base ortonormal para \mathbb{R}^3 , então

$$\mathbf{v} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_2 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{N} \rangle \mathbf{N}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{v}, \sum_{j=1}^2 \nabla_{\mathbf{e}_j} \nabla_{\mathbf{e}_j} \mathbf{N} \right\rangle &= \left\langle \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_2 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{N} \rangle \mathbf{N}, \sum_{j=1}^2 \nabla_{\mathbf{e}_j} \nabla_{\mathbf{e}_j} \mathbf{N} \right\rangle \\ &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_1 \rangle \sum_{j=1}^2 \langle \mathbf{e}_1, \nabla_{\mathbf{e}_j} \nabla_{\mathbf{e}_j} \mathbf{N} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_2 \rangle \sum_{j=1}^2 \langle \mathbf{e}_2, \nabla_{\mathbf{e}_j} \nabla_{\mathbf{e}_j} \mathbf{N} \rangle + \\ &\quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{N} \rangle \sum_{j=1}^2 \langle \mathbf{N}, \nabla_{\mathbf{e}_j} \nabla_{\mathbf{e}_j} \mathbf{N} \rangle. \end{aligned}$$

Como H é constante, usando a proposição 1.3 obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \langle \mathbf{v}, \nabla_{\mathbf{e}_j} \nabla_{\mathbf{e}_j} \mathbf{N} \rangle &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{N} \rangle \sum_{j=1}^2 \langle \mathbf{N}, \nabla_{\mathbf{e}_j} \nabla_{\mathbf{e}_j} \mathbf{N} \rangle \\ &= -\langle \mathbf{v}, \mathbf{N} \rangle |\mathbf{A}|^2 \\ &= -f |\mathbf{A}|^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \Delta f + |\mathbf{A}|^2 f &= -f |\mathbf{A}|^2 + |\mathbf{A}|^2 f \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Proposição 2.1 (Lema de estabilidade, [5]). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio convexo compacto. Se $\Sigma \subset \Omega$ é uma superfície CMC estável compacta orientável imersa com bordo livre então,*

$$Q^0(f, f) = \int_{\Sigma} |\nabla f|^2 - |\mathbf{A}|^2 f^2 \, d\mathbf{a} \geq 0,$$

para toda f tal que $f = 0$ em $\partial\Sigma$.

Demonstração. Considere $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 e defina $\mathbf{u}_i(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{N}(\mathbf{x}) \rangle$ onde $\mathbf{x} \in \Sigma$, $\forall i = 1, 2, 3$. Pelo Lema dado anteriormente teremos

$$L\mathbf{u}_i = 0,$$

$\forall i = 1, 2, 3$, onde $L = \Delta_{\Sigma} + |\mathbf{A}|^2$ é o operador de Jacobi de Σ .

Considere

$$Q(f, f) = \int_{\Sigma} |\nabla f|^2 - |A_{\Sigma}|^2 f^2 d\text{vol}_{\Sigma} - \int_{\partial \Sigma} \text{II}^{\partial \Omega}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) f^2 dl.$$

Substituindo u_i obteremos

$$Q(u_i, u_i) = \int_{\Sigma} |\nabla u_i|^2 - |A_{\Sigma}|^2 u_i^2 d\text{vol}_{\Sigma} - \int_{\partial \Sigma} \text{II}^{\partial \Omega}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) u_i^2 dl.$$

Agora somando em i , para $i = 1, 2, 3$

$$Q(u_i, u_i) = \int_{\Sigma} \sum_{j=1}^3 |\nabla u_j|^2 - |A_{\Sigma}|^2 u_j^2 d\text{vol}_{\Sigma} - \int_{\partial \Sigma} \sum_{j=1}^3 \text{II}^{\partial \Omega}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) u_j^2 dl.$$

Usando que $\Delta u_i + |A|^2 u_i = 0$, teremos

$$0 = \int_{\Sigma} u_i \Delta u_i + |A|^2 u_i^2 d\text{vol}_{\Sigma}.$$

Desta forma, usando a fórmula de Green, iremos obter

$$0 = - \int_{\Sigma} |\nabla u_i|^2 d\text{vol}_{\Sigma} + \int_{\partial \Sigma} u_i \frac{\partial u_i}{\partial \nu} dl + \int_{\Sigma} |A_{\Sigma}|^2 u_i^2 d\text{vol}_{\Sigma}.$$

Já que

$$\int_{\Sigma} u_i \nabla u_i d\text{vol}_{\Sigma} = - \int_{\Sigma} |\nabla u_i|^2 d\text{vol}_{\Sigma} + \int_{\partial \Sigma} u_i \frac{\partial u_i}{\partial \nu} dl.$$

Assim,

$$\int_{\Sigma} |\nabla u_i|^2 d\text{vol}_{\Sigma} - \int_{\Sigma} |A_{\Sigma}|^2 u_i^2 d\text{vol}_{\Sigma} = \int_{\partial \Sigma} u_i \frac{\partial u_i}{\partial \nu} dl.$$

Somando em i e em ambos os lados

$$- \int_{\partial \Sigma} \sum_{j=1}^3 \text{II}^{\partial \Omega}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) u_j^2 dl,$$

chegaremos em

$$\int_{\partial \Sigma} \sum_{j=1}^3 (u_j \frac{\partial u_j}{\partial \nu} - u_j^2 \text{II}(\mathbf{N}, \mathbf{N})) dl = \int_{\Sigma} \sum_{j=1}^3 (|\nabla u_j|^2 d\text{vol}_{\Sigma} - |A_{\Sigma}|^2 u_j^2) d\text{vol}_{\Sigma} - \int_{\partial \Sigma} \sum_{j=1}^3 u_j^2 \text{II}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) dl$$

Logo, usando que $\sum_{j=1}^3 u_i^2 = 1$, temos

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^3 Q(u_i, u_i) &= \int_{\partial \Sigma} \sum_{j=1}^3 (u_i \frac{\partial u_i}{\partial \nu} - u_i^2 \text{II}(\mathbf{N}, \mathbf{N})) dl \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\partial \Sigma} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_i^2}{\partial \nu} dl - \int_{\partial \Sigma} \sum_{j=1}^3 \text{II}^{\partial \Omega}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) u_i^2 dl \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\partial \Sigma} \frac{\partial}{\partial \nu} (\sum_{j=1}^3 u_i^2) dl - \int_{\partial \Sigma} \text{II}^{\partial \Omega}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) \sum_{j=1}^3 (u_i^2) dl \\
 &= - \int_{\partial \Sigma} \text{II}^{\partial \Omega}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) \sum_{j=1}^3 (u_i^2) dl \\
 &= - \int_{\partial \Sigma} \text{II}^{\partial \Omega}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) < 0.
 \end{aligned}$$

Como essa soma é negativa, vai existir $i \in \{1,2,3\}$ satisfazendo

$$Q(u_i, u_i) < 0.$$

Considere i satisfazendo a desigualdade acima. Como Σ é estável, $\int_{\Sigma} u_i \, d\text{vol}_{\Sigma} \neq 0$, pois se $\int_{\Sigma} u_i \, d\text{vol}_{\Sigma} = 0$, então pela estabilidade de Σ

$$Q(u_i, u_i) = \int_{\Sigma} \sum_{j=1}^3 |\nabla u_i|^2 - |A_{\Sigma}|^2 u_i^2 \, d\text{vol}_{\Sigma} - \int_{\partial \Sigma} \sum_{j=1}^3 \text{II}^{\partial \Omega}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) u_i^2 \, dl \geq 0.$$

Suponha então $\int_{\Sigma} f \, d\text{vol}_{\Sigma} \neq 0$ e considere a função $\bar{f} = c.f$ onde $c = \frac{\int_{\Sigma} u_i \, d\text{vol}_{\Sigma}}{\int_{\Sigma} f \, d\text{vol}_{\Sigma}}$. Assim, perceba que

$$\bar{f} - u_i = c.f - u_i,$$

e desta forma,

$$\begin{aligned}
 \int_{\Sigma} \bar{f} - u_i \, d\text{vol}_{\Sigma} &= c \int_{\Sigma} f \, d\text{vol}_{\Sigma} - \int_{\Sigma} u_i \, d\text{vol}_{\Sigma} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
 0 &\leq Q(\bar{f} - u_i, \bar{f} - u_i) \\
 &\leq Q(\bar{f}, \bar{f}) - 2Q(\bar{f}, u_i) + Q(u_i, u_i) \\
 &= c^2 Q(f, f) - 2Q(\bar{f}, u_i) + Q(u_i, u_i).
 \end{aligned}$$

Vamos agora mostrar que $Q(\bar{f}, u_i) = 0$. De fato,

$$\begin{aligned} Q(\bar{f}, u_i) &= Q(c.f, u_i) \\ &= c.Q(f, u_i) \\ &= c. \left(\int_{\Sigma} \nabla f \cdot \nabla u_i - |A_{\Sigma}|^2 f u_i \, d\text{vol}_{\Sigma} \right. \\ &\quad \left. - \int_{\partial \Sigma} \text{II}^{\partial \Omega}(N, N) f u_i \, dl \right). \end{aligned}$$

Usando a formula de Green

$$\begin{aligned} Q(\bar{f}, u_i) &= c. \left(- \int_{\Sigma} (\Delta u_i) f \, d\text{vol}_{\Sigma} + \int_{\partial \Sigma} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \nu} \right) f \, dl - \int_{\Sigma} |A_{\Sigma}|^2 f u_i \, d\text{vol}_{\Sigma} \right. \\ &\quad \left. - \int_{\partial \Sigma} \text{II}^{\partial \Omega}(N, N) f u_i \, dl \right). \end{aligned}$$

Organizando e colocando f em evidência chegamos na seguinte expressão

$$\begin{aligned} Q(\bar{f}, u_i) &= c. \left(- \int_{\Sigma} (\Delta u_i) f + |A_{\Sigma}|^2 f u_i \, d\text{vol}_{\Sigma} \right. \\ &\quad \left. + \int_{\partial \Sigma} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \nu} \right) f - \text{II}^{\partial \Omega}(N, N) f u_i \, dl \right) \\ &= c. \left(- \int_{\Sigma} f \cdot ((\Delta u_i) + |A_{\Sigma}|^2 u_i) \, d\text{vol}_{\Sigma} \right. \\ &\quad \left. + \int_{\partial \Sigma} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \nu} \right) f - \text{II}^{\partial \Omega}(N, N) f u_i \, dl \right) \\ &= 0 \\ &= Q(u_i, \bar{f}), \end{aligned}$$

onde acima usamos que f se anula na fronteira e que $Lu_i = 0$. Assim,

$$0 \leq c^2 Q(f, f) + Q(u_i, u_i) \leq c^2 Q(f, f) \implies Q(f, f) \geq 0.$$

Portanto, teremos

$$Q(f, f) = \int_{\Sigma} |\nabla f|^2 - |A|^2 f^2 \, da \geq 0.$$

□

O teorema acima mostra que $Q^0(f, f) \geq 0$ para toda f que se anula na fronteira, independente de a mesma possuir média nula ou não.

A proposição abaixo, dada em [10] como um corolário, e o teoremas 2.2 serão usados na demonstração da primeira parte do teorema (2.3).

Proposição 2.2 (Corolário 5.8, [10]). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio convexo tal que a segunda forma fundamental da $\partial\Omega$ satisfaz a condição $II^{\partial\Omega} \leq k$. Então*

$$2\pi \leq \frac{1}{4} \int_M H^2 \, dM + k \cdot L.$$

Além disso, vale a igualdade se, e somente se, $\varphi(M)$ é uma calota esférica ou um disco unitário totalmente geodésico.

Teorema 2.2 (Teorema 7.2,[4]). *Seja M uma superfície Riemanniana compacta com bordo de gênero g e com r componentes conexas de bordo. Então, existe um aplicação conforme $f : M \rightarrow \mathbb{D}^2$ com grau menor do que ou igual a $g + r$.*

O resultado abaixo nos dar um argumento de balanceamento que nos permite usar as funções coordenadas de um difeomorfismo conforme como funções teste.

Proposição 2.3. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta, G o grupo de difeomorfismos conformes de \mathbb{S}^n , e seja φ uma imersão de M em $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Existe $f \in G$ tal que $\psi = f \circ \varphi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ satisfazendo*

$$\int_M \psi_i \, dM = 0,$$

$\forall i = 1, \dots, n$, onde G denota o grupo de difeomorfismos conformes de \mathbb{S}^n .

Demonstração. Veja [19] pág 274. ou [20] Teorema 7.6 pág. 240. □

De posse do Lema de estabilidade, das Proposições 2.2 e 2.3, podemos ir direto para a prova do teorema 2.3.

Teorema 2.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio convexo compacto suave. Suponha que a segunda forma fundamental $II^{\partial\Omega}$ de $\partial\Omega$ satisfaça a condição de piçamento*

$$k \cdot h \leq II^{\partial\Omega} \leq \frac{3}{2} \cdot k \cdot h,$$

para alguma constante $k \geq 0$, onde h denota a métrica induzida em $\partial\Omega$. Se $\Sigma \subset \Omega$ é uma superfície CMC estável compacta orientável imersa com bordo livre, então tem gênero zero e a fronteira tem no máximo duas componentes conexas.

Demonstração. Pelo Teorema 2.2 existe uma aplicação conforme $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{D}^2 \subset \mathbb{R}^2$ de grau máximo $g + r$, onde \mathbb{D}^2 é o disco fechado unitário. Suponha $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}_+^2$, já que \mathbb{D}^2 é conformemente equivalente à \mathbb{S}_+^2 . Além disso, a energia de Dirichlet é tal que

$$\int_{\Sigma} |\nabla \psi|^2 \, d\text{vol}_{\Sigma} \leq 4\pi(g + r). \quad (2.9)$$

Usando um difeomorfismo conforme de \mathbb{S}_+^2 , podemos tomar

$$\int_{\Sigma} \psi_i \, d\text{vol}_{\Sigma} = 0,$$

$\forall i = 1, 2$.

Pela estabilidade da imersão teremos que $I(\psi_i, \psi_i) \geq 0$, $\forall i = 1, 2$. Assim,

$$\int_{\Sigma} |\nabla \psi_i|^2 - |A_{\Sigma}|^2 \psi_i^2 \, d\text{vol}_{\Sigma} - \int_{\partial \Sigma} \text{II}^{\partial \Omega}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) \psi_i^2 \, dl \geq 0,$$

$i = 1, 2$. Desta forma, somando em i obteremos

$$\int_{\partial \Sigma} \text{II}^{\partial \Omega}(\mathbf{N}, \mathbf{N})(\psi_1^2 + \psi_2^2) \, dl + \int_{\Sigma} |A_{\Sigma}|^2(\psi_1^2 + \psi_2^2) \, d\text{vol}_{\Sigma} \leq \int_{\Sigma} |\nabla \psi_1|^2 + |\nabla \psi_2|^2 \, d\text{vol}_{\Sigma} \quad (2.10)$$

Note agora que $\psi_3 \Big|_{\partial \Sigma} = 0$, pois $\psi(\partial \Sigma) = \partial \mathbb{S}_+^2$. Pela Proposição 2.1, teremos

$$\int_{\Sigma} |\nabla \psi_3|^2 - |A_{\Sigma}|^2 \psi_3^2 \, d\text{vol}_{\Sigma} \geq 0 \implies \int_{\Sigma} |A_{\Sigma}|^2 \psi_3^2 \, d\text{vol}_{\Sigma} \leq \int_{\Sigma} |\nabla \psi_3|^2 \, d\text{vol}_{\Sigma}. \quad (2.11)$$

Somando (2.2) e (2.3) membro a membro, obteremos que

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} |\nabla \psi_1|^2 + |\nabla \psi_2|^2 + |\nabla \psi_3|^2 \, d\text{vol}_{\Sigma} &\geq \int_{\partial \Sigma} \text{II}^{\partial \Omega}(\mathbf{N}, \mathbf{N})(\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2) \, dl \\ &+ \int_{\Sigma} |A_{\Sigma}|^2(\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2) \, d\text{vol}_{\Sigma}. \end{aligned}$$

Portanto, como a imagem de ψ cai na esfera, teremos $\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 = 1$, onde

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} |\nabla \psi|^2 &= \int_{\Sigma} |\nabla \psi_1|^2 + |\nabla \psi_2|^2 + |\nabla \psi_3|^2 \, d\text{vol}_{\Sigma} \\ &\geq \int_{\partial \Sigma} \text{II}^{\partial \Omega}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) \, dl + \int_{\Sigma} |A_{\Sigma}|^2 \, d\text{vol}_{\Sigma}. \end{aligned}$$

Como $|A_{\Sigma}|^2 = H^2 - 2K$,

$$\begin{aligned}
 \int_{\Sigma} |\nabla\psi|^2 &= \int_{\Sigma} |\nabla\psi_1|^2 + |\nabla\psi_2|^2 + |\nabla\psi_3|^2 d\text{vol}_{\Sigma} \\
 &\geq \int_{\partial\Sigma} \text{II}^{\partial\Omega}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) dl + \int_{\Sigma} H^2 - K d\text{vol}_{\Sigma} \\
 &= \int_{\partial\Sigma} \text{II}^{\partial\Omega}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) dl + \int_{\Sigma} H^2 d\text{vol}_{\Sigma} - 2 \int_{\Sigma} K d\text{vol}_{\Sigma}. \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

Por Gauss Bonnet

$$\int_{\partial\Sigma} k_g dl + \int_{\Sigma} K d\text{vol}_{\Sigma} + \sum \theta_l = 2\pi\chi(\Sigma).$$

Segue que, como $\sum \theta_l = 0$, já que a fronteira não tem ângulos externos, então

$$-2 \int_{\Sigma} K d\text{vol}_{\Sigma} = (-2) \cdot 2\pi\chi(\Sigma) + 2 \int_{\partial\Sigma} k_g dl. \quad (2.13)$$

Substituindo (2.5) em (2.4) iremos obter

$$\begin{aligned}
 \int_{\Sigma} |\nabla\psi|^2 &\geq \int_{\partial\Sigma} \text{II}^{\partial\Omega}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) dl + \int_{\Sigma} H^2 d\text{vol}_{\Sigma} - 2 \int_{\Sigma} K d\text{vol}_{\Sigma} \\
 &= \int_{\partial\Sigma} \text{II}^{\partial\Omega}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) dl + \int_{\Sigma} H^2 d\text{vol}_{\Sigma} - 4\pi\chi(\Sigma) + 2 \int_{\partial\Sigma} k_g dl.
 \end{aligned}$$

Em virtude de (2.1)

$$\int_{\partial\Sigma} \text{II}^{\partial\Omega}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) dl + \int_{\Sigma} H^2 d\text{vol}_{\Sigma} - 4\pi\chi(\Sigma) + 2 \int_{\partial\Sigma} k_g dl \leq 4\pi(g+r).$$

Agora, pelo fato de que $\chi(\Sigma) = 2 - 2g - r$,

$$\int_{\partial\Sigma} \text{II}^{\partial\Omega}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) dl + \int_{\Sigma} H^2 d\text{vol}_{\Sigma} + 2 \int_{\partial\Sigma} k_g dl \leq 4\pi(2-g).$$

Note ainda que

$$k_g = \langle \gamma'', \eta x \gamma' \rangle = \langle \gamma'', -\mathbf{N} \rangle = \text{II}^{\partial\text{B}}(\gamma', \gamma') \geq K.h(\gamma', \gamma') = k.1 = k,$$

onde η é normal a fronteira, restrita a γ e $\gamma : I \rightarrow \partial\Sigma$ é orientada positivamente e

parametrizada pelo comprimento de arco. Agora, substituindo em (2.78), obteremos

$$\begin{aligned}
 4.\pi.(2 - g) &\geq \int_{\partial\Sigma} \Pi^{\partial\Omega}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) \, dl + \int_{\Sigma} H^2 \, d\text{vol}_{\Sigma} + 2 \int_{\partial\Sigma} k_g \, dl \\
 &\geq \int_{\partial\Sigma} k \, dl + \int_{\Sigma} H^2 \, d\text{vol}_{\Sigma} + 2 \int_{\partial\Sigma} k \, dl \\
 &= 3.k \int_{\partial\Sigma} 1 \, dl + \int_{\Sigma} H^2 \, d\text{vol}_{\Sigma} \\
 &= 3.k.L(\partial\Sigma) + \int_{\Sigma} H^2 \, d\text{vol}_{\Sigma} \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma} H^2 \, d\text{vol}_{\Sigma} + 2. \left(\frac{1}{4} \int_{\Sigma} H^2 \, d\text{vol}_{\Sigma} + \frac{3}{2}.k.L(\partial\Sigma) \right).
 \end{aligned}$$

Pelo fato de que $\Pi^{\partial\Omega} \leq \frac{3}{2}.k.h$, teremos pela proposição 2.2 que

$$\frac{1}{4} \int_{\Sigma} H^2 \, d\text{vol}_{\Sigma} + \frac{3}{2}.k.L(\partial\Sigma) \geq 2.\pi, \tag{2.14}$$

onde a igualdade ocorre se, e somente se $\phi(\Sigma)$ é uma calota esférica ou um disco totalmente geodésico. Assim, não teríamos mais o que fazer.

Se, porém não ocorrer a igualdade, teríamos

$$\frac{1}{4} \int_{\Sigma} H^2 \, d\text{vol}_{\Sigma} + \frac{3}{2}.k.L(\partial\Sigma) > 2.\pi$$

e assim,

$$\begin{aligned}
 4.\pi.(2 - g) &\geq \frac{1}{2} \int_{\Sigma} H^2 \, d\text{vol}_{\Sigma} + 2. \left(\frac{1}{4} \int_{\Sigma} H^2 \, d\text{vol}_{\Sigma} + \frac{3}{2}.k.L(\partial\Sigma) \right) \\
 &> \frac{1}{2} \int_{\Sigma} H^2 \, d\text{vol}_{\Sigma} + 4.\pi \\
 &> 4.\pi.
 \end{aligned}$$

Segue que $g < 1$ e portanto $g = 0$.

Mostremos agora que Σ tem no máximo duas componentes conexas. De fato, se considerarmos $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^2$ a aplicação conforme que é restrição de $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) : \bar{\Sigma} \rightarrow \mathbb{S}^2$, onde Σ é compacta e é obtida colando um disco em cada componente conexa de $\partial\Sigma$. Irá existir também um difeomorfismo $\psi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ onde

$$\int_{\Sigma} (\varphi \circ \psi)_i \, d\text{vol}_{\Sigma} = 0,$$

$\forall i = 1, 2, 3$.

Assim, podemos considerar φ satisfazendo

$$\int_{\Sigma} \varphi_i \, d\text{vol}_{\Sigma} = 0.$$

Teremos também que

$$\int_{\Sigma} |\nabla \varphi|^2 \, d\text{vol}_{\Sigma} \leq 8\pi \left(1 + \left\lceil \frac{g+1}{2} \right\rceil \right).$$

Assim, pela estabilidade da imersão teremos que $I(\varphi_i, \varphi_i) \geq 0$, $\forall i = 1, 2, 3$. Assim

$$\int_{\Sigma} |\nabla \varphi_i|^2 - |A_{\Sigma}|^2 \varphi_i^2 \, d\text{vol}_{\Sigma} - \int_{\partial \Sigma} \text{II}^{\partial \Omega}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) \varphi_i^2 \, dl \geq 0,$$

$i = 1, 2, 3$.

Daí, somando em i obteremos

$$\int_{\partial \Sigma} \text{II}^{\partial \Omega}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) (\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2) \, dl + \int_{\Sigma} |A_{\Sigma}|^2 (\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2) \, d\text{vol}_{\Sigma} \leq \int_{\Sigma} |\nabla \varphi|^2 \, d\text{vol}_{\Sigma}.$$

Segue que

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} |\nabla \varphi|^2 \, d\text{vol}_{\Sigma} &\geq \int_{\partial \Sigma} \text{II}^{\partial \Omega}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) \, dl + \int_{\Sigma} |A_{\Sigma}|^2 \, d\text{vol}_{\Sigma} \\ &= \int_{\partial \Sigma} \text{II}^{\partial \Omega}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) \, dl + \int_{\Sigma} H^2 \, d\text{vol}_{\Sigma} - 2 \int_{\Sigma} K \, d\text{vol}_{\Sigma} \\ &= \int_{\partial \Sigma} \text{II}^{\partial \Omega}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) \, dl + \int_{\Sigma} H^2 \, d\text{vol}_{\Sigma} - 4\pi \chi(\Sigma) \\ &\quad + 2 \int_{\partial \Sigma} k_g \, dl. \end{aligned}$$

E assim

$$\begin{aligned} \int_{\partial \Sigma} \text{II}^{\partial \Omega}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) \, dl + \int_{\Sigma} H^2 \, d\text{vol}_{\Sigma} + 2 \int_{\partial \Sigma} k_g \, dl &\leq \int_{\Sigma} |\nabla \varphi|^2 \, d\text{vol}_{\Sigma} \\ &\quad + 4\pi \chi(\Sigma) \end{aligned}$$

Usando $\chi(\Sigma) = 2 - 2g - r$, $g = 0$ e a expressão abaixo

$$\int_{\Sigma} |\nabla \varphi|^2 \, d\text{vol}_{\Sigma} \leq 8\pi \left(1 + \left\lceil \frac{g+1}{2} \right\rceil \right).$$

Teremos,

$$\begin{aligned} \int_{\partial \Sigma} \text{II}^{\partial \Omega}(\mathbf{N}, \mathbf{N}) \, dl + \int_{\Sigma} H^2 \, d\text{vol}_{\Sigma} + 2 \int_{\partial \Sigma} k_g \, dl &\leq \int_{\Sigma} |\nabla \varphi|^2 \, d\text{vol}_{\Sigma} \\ &\quad + 4\pi \chi(\Sigma) \\ &\leq 8\pi \left(1 + \left\lceil \frac{g+1}{2} \right\rceil \right) \\ &\quad + 4\pi(2 - 2g - r) \\ &= 8\pi + 8\pi - 4\pi r \\ &= 16\pi - 4\pi r. \end{aligned}$$

Obteremos assim

$$16\pi - 4\pi r \geq \frac{1}{2} \int_{\Sigma} H^2 \, d\text{vol}_{\Sigma} + 2 \cdot \left(\frac{1}{4} \int_{\Sigma} H^2 \, d\text{vol}_{\Sigma} + \frac{3}{2} \cdot k \cdot L(\partial\Sigma) \right).$$

Desta forma, pela expressão dada em (2.6)

$$16\pi - 4\pi r > 4\pi \implies 4\pi(4 - r) > 4\pi \cdot 1 \implies 4 - r > 1 \implies r < 3.$$

Portanto, segue o resultado. \square

Agora podemos enunciar o resultado que melhora o teorema dado por Ros e Vergasta.

Teorema 2.4 (Teorema 1.2, [5]). *Seja $B \subset \mathbb{R}^3$ uma bola fechada. Se $\Sigma \subset B$ é uma superfície CMC estável compacta orientável imersa com bordo livre, então tem gênero zero.*

Demonstração. Note a priori que $\Pi^{\partial B}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 1$ para todo $\mathbf{p} \in \mathbb{S}^2$ e todo $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}\mathbb{S}^2$, onde $|\mathbf{v}| = 1$. Veja [3], pág. 169. Desta forma, tomando $\frac{2}{3} \leq k \leq 1$, a condição de pinçamento para a segunda forma fundamental na fronteira é satisfeita para vetores com norma 1. Sabendo disso, mostremos para todo vetor $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}\mathbb{S}^2$. De fato, note que $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ tem norma 1.

Assim,

$$\begin{aligned} k \cdot h \left(\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}, \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \right) &\leq \Pi^{\partial\Omega} \left(\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}, \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \right) \leq \frac{3}{2} \cdot k \cdot h \left(\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}, \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \right) \\ &\quad \updownarrow \\ \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} k \cdot h(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &\leq \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} \Pi^{\partial\Omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leq \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} \frac{3}{2} \cdot k \cdot h(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

E desta forma obtemos

$$k \cdot h(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leq \Pi^{\partial\Omega}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leq \frac{3}{2} \cdot k \cdot h(\mathbf{v}, \mathbf{v}).$$

Portanto a condição de pinçamento é satisfeita, e o resultado é obtido como esperado. \square

Como corolário do teorema acima temos o seguinte resultado, que serve como classificação para as superfícies CMC compactas estáveis imersas com bordo livre na bola fechada unitária de \mathbb{R}^3 .

Corolário 2.1. *Os discos totalmente umbílicos são as únicas superfícies CMC compactas orientáveis imersas estáveis com bordo livre em $B \subset \mathbb{R}^3$.*

Demonstração. Pela Proposição 1.4 as calotas esféricas e os discos totalmente geodésicos são superfícies totalmente umbílicas. Em virtude da proposição 1.5 concluímos que os discos totalmente umbílicos são as únicas superfícies CMC compactas orientáveis imersas estáveis com bordo livre em $B \subset \mathbb{R}^3$. \square

Referências Bibliográficas

- [1] L.Ahlfors e L.Sario, *Riemann Surfaces*. Princeton University Press, N.J.,1960, Cap.1.
- [2] do Carmo, M. P. *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides - IMPA, 2005.
- [3] do Carmo, M.P. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Editora SBM, 6ª edição/2014.
- [4] Gabard, A. *Sur la représentation conforme des surfaces de Riemann à bord et une caractérisation des courbes séparantes*. Comment. Math. Helv. 81 (2006), no. 4, 945-964.
- [5] Nunes, I.P. *On stable constant mean curvature surfaces with free boundary*. Math. Z. (2017) 287, 473–479.
- [6] Lee, J.M., *Introduction to topological manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, 202, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [7] Lee, J.: *Introduction to Smooth Manifolds*, Second edition, Springer, New York, 2013.
- [8] Lopez, R. *Constant mean curvature surfaces with boundary*. Tsukuba J. Math. 23 (1999), no. 1, 27–36.
- [9] Ros, A. e Vergasta, E. *Stability for hypersurfaces of constant mean curvature with free boundary*. Geom. Dedicata 56, 19-33 (1995).
- [10] A. Volkmann, *A monotonicity formula for free boundary surfaces with respect to the unit ball*, Comm. Anal. Geom. 24 (2016), no. 1, 195-221.
- [11] Lima, Elon Lages. *Curso de análise vol.2/ Elon Lages Lima*. 11.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- [12] *Stability of hypersurfaces with constant mean curvature*: Barbosa, J.L., do Carmo, M. Math. Z. 185, 339-353 (1984).

-
- [13] WANG, G.; XIA, C. Uniqueness of stable capillary hypersurfaces in a ball. *Math. Ann.*, v. 374, n. 3-4, p. 1845-1882, 2019. ISSN 0025-5831.
- [14] Ann6, C.: Bomes sur la multiplicité, Preprint, 1992.
- [15] Cheng, S. Y.: Eigenfunctions and nodal sets, *Comment. Math. Helv.* 51 (1976), 43-55.
- [16] Nitsche, J. C. C.: Stationary partitioning of convex bodies, *Arch. Rational Mech. Anal* 89 (1985), 1-19.
- [17] AthanassenasM, .: A variational problem for constant mean curvature surfaces with free boundary, *J. reine angew. Math.* 377 (1987), 97-107.
- [18] Souam, R.: On stability of stationary hypersurfaces for the partitioning problem for balls in spce forms. *Math. Z.* 224, 195-208 (1997).
- [19] P. Li, S.-T. Yau, A new conformal invariant and its applications to the Willmore conjecture and the first eigenvalue of compact surfaces, *Invent. Math.* 69 (1982), no.2, 269-291.
- [20] Colding, Tobias H. A course in minimal surfaces / Tobias Holck Colding, William P. Minicozzi II.