



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA  
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
MESTRADO EM MATEMÁTICA

# **Um Teorema da Massa Positiva para Métricas Estáticas com Constante Cosmológica Positiva**

**Maria Jaciane Costa Gonçalves**

**Teresina - 2021**

**Maria Jaciane Costa Gonçalves**

**Dissertação de Mestrado:**

**Um Teorema da Massa Positiva para Métricas  
Estáticas com Constante Cosmológica Positiva**

Dissertação submetida à Coordenação do  
Curso de Pós-Graduação em Matemática,  
da Universidade Federal do Piauí, como  
requisito parcial para obtenção do grau de  
Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Rondinelle Marcolino Batista

**Teresina - 2021**



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

*Um Teorema da Massa Positiva para Métricas  
Estáticas com Constante Cosmológica Positiva*

Maria Jaciane Costa Gonçalves

Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 14 de Setembro de 2021.

**Banca Examinadora:**

*Rondinelle Marcolino Batista*

Prof. Dr. Rondinelle Marcolino Batista - Orientador

*Paulo Alexandre Araújo Sousa*

Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo de Sousa - UFPI

*Abdênago Alves de Barros*

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros - UFC

FICHA CATALOGRÁFICA  
Universidade Federal do Piauí  
Biblioteca Setorial de Ciências da Natureza – CCN  
Serviço de Processamento Técnico

G635t Gonçalves, Maria Jaciane Costa.  
Um teorema da massa positiva para métricas estáticas com constante cosmológica positiva / Maria Jaciane Costa Gonçalves. – 2021.  
122 f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Teresina, 2021.  
“Orientador: Prof. Dr. Rondinelle Marcolino Batista.”

1. Geometria Diferencial. 2. Métricas Estáticas. 3. Teorema da Massa Positiva. I. Batista, Rondinelle Marcolino. II. Título.

CDD 516.36

*Aos meus pais, Maria e José.*

# Agradecimentos

A Deus, pela minha saúde e coragem, fatores essenciais para conseguir enfrentar uma árdua rotina diária de estudos, me tornando capaz de lutar pelos meus objetivos. Obrigada por me permitir realizar mais um sonho.

Ao professor Rondinelle Marcolino, pela escolha do tema desse trabalho, pela perfeita orientação, competência, profissionalismo, incentivo e apoio que sempre demonstrou durante a elaboração dessa dissertação. Finalizo o mestrado tendo a certeza de ter tido uma excelente formação sob sua orientação. Serei eternamente grata por todos os seus ensinamentos.

Aos meus pais Maria e José, por todo amor, cuidado, orações e apoio incondicional. Em especial agradeço a minha mãe, que sempre se esforçou muito para que eu pudesse ter o privilégio de usar todo o meu tempo para estudar. Aos meus irmãos Jakeline e Werlei, pelo carinho, amizade, confiança e pela compreensão nos momentos que estive ausente por conta dos estudos. A minha sobrinha Esther, que durante as pequenas pausas no desenvolvimento desse trabalho me proporcionou muitos momentos de alegria, obrigada por existir e ser luz na minha vida.

A todos os professores do departamento de Matemática da UFPI-CSHNB, em especial aos professores Alex Sandro, Anísia Nogueira, Daniel Silva, João Santos e Bruno Vasconcelos por acreditarem no meu potencial, por todos os ensinamentos, pelo apoio e momentos de descontração, em especial agradeço ao Bruno que me orientou do segundo ao sexto período da graduação, obrigada por ter me incentivado a fazer mestrado e pela ajuda durante a minha preparação para seleção, sem você eu não teria chegado tão rápido até aqui.

Aos professores da Pós-Graduação em Matemática da UFPI, em especial aos professores Leandro Freitas, Jurandir Lopes, Gleison Nascimento, Cícero Aquino, Ítalo Dowell e Halysen Baltazar que contribuíram de forma direta para minha formação, obrigada pelos

excelentes cursos ministrados.

Aos professores Abdênago Barros e Paulo Alexandre Sousa por terem aceitos o convite para participar da banca examinadora e pelas sugestões para a versão final dessa dissertação, também agradeço mais uma vez ao professor Halyson Baltazar por ter aceitado ser membro suplente da banca examinadora.

Aos meus amigos da graduação Severino, Paula Kauanne, Adriana, Lahanna Ellen, Angela Marina e Jéssica e a todos os meus amigos que conheci durante o mestrado, em especial ao Jean, Ruan, João Vinicius, Edilson, Jonas Bloch, Erisvaldo, Christopher e Jefferson Brito, eu agradeço por terem deixado a minha caminhada acadêmica mais leve e por todo conhecimento matemático compartilhado.

A minha amiga Idalina, pelo companheirismo durante esses 2 anos de mestrado, e ao meu amigo Edimilson Júnior por sempre ouvir minhas reclamações acadêmicas, por todos os memes compartilhados durante essa jornada e sobretudo pela ajuda com o latéx.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

“Foi o tempo que dedicaste à tua rosa que  
a fez tão importante.”

Antoine Saint-Exupéry .

# Resumo

Nessa dissertação estudamos métricas estáticas, tais métricas aparecem no contexto de Relatividade Geral através das equações de campo de Einstein e são objetos de grande interesse em Geometria Diferencial pois impõem restrições na geometria da variedade. Nesse trabalho apresentaremos resultados sobre algumas propriedades de métricas estáticas com constante cosmológica positiva. Além disso, introduziremos uma noção de massa para tais métricas, chamada *massa virtual*, e finalmente, mostraremos a boa definição da massa virtual provando um teorema do tipo Massa Positiva, a saber, a massa virtual de uma componente conexa do complementar do conjunto dos pontos de máximo da função potencial é não negativa, sendo nula somente para solução de Sitter.

**Palavras-Chave:** Métricas estáticas. Solução de Sitter. Teorema da massa positiva.

# Abstract

In this dissertation we study static metrics, such metrics appear in the context of General Relativity through Einstein's field equations and are objects of great interest in Differential Geometry because they impose restrictions on the geometry of the manifold. In this work we will present results about some properties of static metrics with positive cosmological constant. Furthermore, we will introduce a notion of mass for such metrics, called *virtual mass*, and finally, we will show the good definition of virtual mass by proving a Positive Mass theorem, namely, the virtual mass of a connected component of the complement of the set of maximum points of the potential function is non-negative, being null only for de Sitter solution.

**Keywords:** Static metrics. de Sitter solution. Positive mass theorem.

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vi</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>1</b>
<b>1 Noções preliminares</b>	<b>9</b>
1.1 Tensores em variedades Riemannianas . . . . .	9
1.2 Operadores diferenciais . . . . .	15
1.3 Campos de Jacobi . . . . .	24
1.4 Variações do comprimento de arco; Variedades completas . . . . .	26
1.5 A equação de Gauss . . . . .	30
1.6 Mudanças conformes de métrica . . . . .	34
1.7 Alguns resultados sobre equações diferenciais parciais . . . . .	36
1.8 Produtos warped . . . . .	39
1.9 Medida de Hausdorff . . . . .	43
<b>2 Métricas estáticas</b>	<b>45</b>
2.1 Definição e propriedades . . . . .	45
2.2 Exemplos de métricas estáticas com $\Lambda > 0$ . . . . .	51
2.3 Gravidade superficial e massa virtual . . . . .	66
<b>3 Resultados auxiliares</b>	<b>75</b>
3.1 Lema de Reilly . . . . .	75
3.2 A identidade de Shen e lemas chaves . . . . .	81
3.3 Fórmula de monotonicidade . . . . .	85
3.4 Desigualdade reversa de Lojasiewicz . . . . .	87

---

<b>4 Resultados principais</b>	<b>90</b>
4.1 Estimativas da área do bordo de métricas estáticas com $\Lambda > 0$ . . . . .	90
4.2 Caracterizações da solução de Sitter . . . . .	96
4.3 Teorema da massa positiva para métricas estáticas com constante cosmológica positiva . . . . .	105
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>106</b>

# Lista de Figuras

2.1	Soluções rotacionalmente simétricas para o problema (2.9). . . . .	66
2.2	Gráfico das gravidades superficiais $\frac{ \nabla u }{u_{\max}}$ das componentes conexas do bordo da solução de Sitter-Schwarzschild como funções da massa para $n = 3$ . . .	72
3.1	Ilustração da superfície parametrizada. . . . .	77

# Introdução

É conhecido em Relatividade Geral que um espaço-tempo  $(X, \gamma)$  admite uma hipersuperfície  $(M, g)$  tipo-espaço satisfazendo as *equações de restrições de Einstein*, ou seja,

$$R_g - |K|_g^2 + (\text{tr}_g K)^2 = 2\Lambda + 16\pi\rho, \quad (1)$$

$$\text{div}_g K - d(\text{tr}_g K) = 8\pi J, \quad (2)$$

onde  $K$  é a segunda forma fundamental induzida por  $\gamma$  em  $M$ ,  $\Lambda \in \mathbb{R}$  é a constante cosmológica,  $\rho$  é a densidade de energia local e  $J$  é a densidade de momento local. Uma tripla  $(M, g, K)$  onde  $(M, g)$  é uma variedade Riemanniana de dimensão  $n$  e  $K$  um  $(0, 2)$ -tensor simétrico satisfazendo as equações (1) e (2) acima, é normalmente chamado de *conjunto de dado inicial*. Existe uma correspondência entre conjuntos de dados iniciais, no sentido de que para qualquer conjunto de dados iniciais  $(M, g, K)$ , existe um único (a menos de uma isometria) espaço-tempo máximo  $(X, \gamma)$  tal que  $(M, g) \subset (X, \gamma)$ , é uma hipersuperfície de Cauchy com segunda forma fundamental  $K$ . A boa definição e estabilidade da formulação do valor inicial da Relatividade Geral é um grande tópico na literatura, devido à sua importância em tornar a teoria de Einstein fisicamente viável, para um entendimento completo sobre esse assunto recomendamos algumas referências [[24], [14],[22], [30]]. Tal correspondência é importante, pois geralmente é mais fácil estudar um problema físico em sua formulação de valor inicial, caso exista. Além disso, algumas questões físicas são formuladas mais naturalmente em termos de conjuntos de dados iniciais. Esse é o caso do problema desafiador de definir noções adequadas de energia e massa. Exigindo que o conjunto de dado inicial  $(M, g, K)$  seja simétrico no tempo, ou seja, o tensor  $K$  é nulo, sob essa hipótese, a equação (2) nos diz que a densidade de momento local é zero, enquanto a equação (1) se reduz a

$$R_g = 2\Lambda + 16\pi\rho. \quad (3)$$

Portanto, a suposição fisicamente natural de densidade de massa ( $\rho \geq 0$ ) torna-se equivalente a condição de que a curvatura escalar dos dado inicial  $(M, g)$  satisfaz

$$R_g \geq 2\Lambda.$$

Os casos em que  $\Lambda = 0$ ,  $\Lambda < 0$  e  $\Lambda > 0$  requerem análises diferentes, já que aspectos da geometria local, sugerida da aplicação da Relatividade Geral e da métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker, diz que o parâmetro  $\Lambda$  está relacionado com a curvatura do espaço. O caso mais estudado é quando  $\Lambda = 0$ , nesse caso é fisicamente razoável supor que a variedade Riemanniana  $(M, g)$  é assintoticamente plana, a grosso modo, isso significa que a métrica  $g$  converge para métrica Euclidiana no infinito. No caso em que  $\Lambda = 0$  e  $(M, g)$  é assintoticamente plana, existe uma noção de massa bem compreendida, chamada de *massa ADM*, que de acordo com Arnowitt, Deser e Misner em [2] é definida como

$$m_{\text{ADM}}(M, g) = \frac{1}{2(n-1)|\mathbb{S}^{n-1}|} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\{|x|=R\}} \sum_{i,j} \left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i} \right) v^j d\sigma.$$

Bartnik em [4] mostrou a boa definição da massa ADM, ou seja, a definição acima não depende das coordenadas. Além disso, o resultado abaixo diz que a massa ADM é sempre não negativa.

**Teorema 0.1** (Teorema da Massa Positiva para Variedades Assintoticamente Plana). *Seja  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana assintoticamente plana com curvatura escalar não negativa. Se  $\partial M = \emptyset$ , então*

$$m_{\text{ADM}} \geq 0. \tag{4}$$

*Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se,  $(M, g)$  for isométrica ao espaço Euclidiano.*

Esse teorema foi provado pela primeira vez por Schoen e Yau em [48] para dimensões  $3 \leq n \leq 7$ , usando superfícies mínimas como ferramenta fundamental, uma segunda prova para  $n = 3$  foi fornecida por Witten em [54], e esta abordagem mostrou-se facilmente generalizável para provar o Teorema 0.1 para variedades de Spin em qualquer dimensão  $n \geq 3$ .

Assim, surge naturalmente a questão de saber se existe uma noção de massa total semelhante a massa ADM para conjuntos de dados iniciais simétricos no tempo com  $\Lambda \neq 0$ ,

isso levou ao estudo de variedades assintoticamente hiperbólicas, que em analogia com variedades assintoticamente planas, são variedades Riemannianas  $(M, g)$  tais que a métrica  $g$  converge adequadamente no infinito para a métrica hiperbólica. Está provado que uma definição análoga de massa pode ser introduzida nesse caso, satisfazendo propriedades análogas a da massa ADM, como também existe um teorema da massa positiva nesse contexto, veja [1], [17], [52] e [55], mencionamos que a definição dessa massa foi estendida em [18] e [38] para conjuntos de dados iniciais que não são necessariamente simétricos no tempo.

Por outro lado, não existe uma noção universalmente aceita de massa, no caso de constante cosmológica positiva. De acordo com a teoria física, nesse caso é razoável supor que o conjunto de dado inicial seja compacto, isso levou a famosa conjectura de Min-Oo, que propôs uma caracterização da esfera, que pode ser interpretada como uma caracterização análoga dos espaços formas plano e hiperbólico como as variedade Riemannianas com massa zero nos casos do Teorema da Massa Positiva para variedades Riemannianas assintoticamente plana e hiperbólica.

**Conjectura 0.1** (Conjectura de Min-Oo ([39], Teorema 4)). *Seja  $g$  uma métrica no hemisfério  $\mathbb{S}_+^n$ ,  $n \geq 3$ , se as seguintes propriedades forem satisfeitas*

- (i) *A curvatura escalar  $R_g \geq n(n-1)$  em  $\mathbb{S}_+^n$ ;*
- (ii) *A métrica induzida por  $g$  em  $\partial\mathbb{S}_+^n = \mathbb{S}^{n-1}$  é a métrica canônica de  $\mathbb{S}^{n-1}$ ;*
- (iii) *O bordo  $\partial\mathbb{S}_+^n = \mathbb{S}^{n-1}$  é totalmente geodésico com respeito a  $g$ .*

*Então  $g$  é a métrica canônica em  $\mathbb{S}_+^n$ .*

Por vários anos essa conjectura foi considerada verdadeira, inclusive vários resultados parciais foram provados, veja a introdução de [10], mas nesse mesmo artigo Brendle, Marques e Neves provaram que essa conjectura é falsa, exibindo contra-exemplos, com isso passou a não existir um teorema análogo do tipo Massa Positiva para caso esférico. Essa foi uma das principais motivações que levaram Borghini e Mazzieri em [6] a introduzir uma noção de massa no caso em que  $\Lambda > 0$  (caso esférico), eles se preocuparam com a definição de uma massa adequada no caso mais básico, que é o de espaços-tempos estáticos no vácuo. Estes são espaços-tempos no vácuo  $(X, \gamma)$ , definidos da forma

$$X = \mathbb{R} \times M, \quad \gamma = -u^2 dt \otimes dt + g,$$

onde  $(M, g)$  é uma variedade Riemanniana de dimensão  $n$ . Partindo desse pressuposto, mostraremos na seção 2.1 que as equações de campo de Einstein forçam o *potencial estático*  $u$  a satisfazer o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} u\text{Ric}_g = \nabla_g^2 u + \frac{2\Lambda}{n-1}ug, & \text{em } M, \\ \Delta_g u = -\frac{2\Lambda}{n-1}u, & \text{em } M. \end{cases} \quad (5)$$

É conveniente assumir que  $u$  é positivo no interior de  $M$  e zero no bordo  $\partial M$ . Essas triplas  $(M, g, u)$  são chamadas de *triplas estáticas* ou simplesmente *métricas estáticas* e elas são o principal objeto de estudo dessa dissertação. Veremos no capítulo 2 que métricas estáticas tem algumas propriedades geométricas importantes que ajudarão na análise. Dentre elas, destacamos que sua curvatura escalar é constante e igual a

$$R_g = 2\Lambda.$$

Além disso, a quantidade  $|\nabla_g u|$  é localmente constante e positivo em  $\partial M$ , o fato que leva a definição de *gravidade superficial*. Como comentado anteriormente, nosso foco será em métricas estáticas com  $\Lambda > 0$  e assumiremos que nossa variedade é compacta, com isso, o potencial estático assume seu máximo no interior de  $M$ , em um conjunto que denotaremos  $\text{MAX}(u)$ . Este conjunto compartilha analogias importantes com os fins de variedades assintoticamente planas e assintoticamente hiperbólicas, como foi notado em [9] por Bousso e Hawking. Portanto, podemos esperar que uma definição adequada de massa deva levar em consideração o comportamento de  $u$  em  $\text{MAX}(u)$ .

Para explicar o processo proposto por Borginhi e Mazziere para a definição da massa, o primeiro passo será considerar uma componente conexa  $N$  de  $M \setminus \text{MAX}(u)$ , veremos no lema 3.2 que  $N$  tem necessariamente componente de bordo  $\partial N = \partial M \cap N$  não vazio. Para simplificar a nossa argumentação, vamos supor que  $\partial N$  é conexo, assim,  $|\nabla_g u|$  é constante em  $\partial N$ . Isso dá origem a noção de gravidade superficial de  $\partial N$ , que de acordo com [9] e [43] é definida por

$$\kappa(\partial N) = \frac{|\nabla u|}{\max_M(u)}. \quad (6)$$

A gravidade superficial  $\kappa(\partial N)$  admite uma interpretação como a força experimentada por uma partícula teste repousando em  $\partial N$  (veja [53], seção 12.5), como veremos na seção 2.3, é natural esperar que a gravidade superficial esteja relacionado com a massa. Essa

consideração leva a definir a massa por meio de uma comparação da gravidades superficiais dos três modelos de métricas estáticas com constante cosmológica positiva.

**Exemplo 0.1** (Solução de Sitter-Schwarchild com massa  $0 < \mathbf{m} < \mathbf{m}_{\max}$ ).

$$\mathbf{M} = \overline{\mathbf{B}(0, r_+(\mathbf{m}))} \setminus \mathbf{B}(0, r_-(\mathbf{m})) \subset \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{g} = \frac{d|\mathbf{x}| \otimes d|\mathbf{x}|}{1 - |\mathbf{x}|^2 - 2\mathbf{m}|\mathbf{x}|^{2-n}} + |\mathbf{x}|^2 \mathbf{g}_{\mathbb{S}^{n-1}},$$

$$\mathbf{u} = \sqrt{1 - |\mathbf{x}|^2 - 2\mathbf{m}|\mathbf{x}|^{2-n}},$$

onde  $\mathbf{m}_{\max} = \sqrt{\frac{(\mathbf{n}-2)^{\mathbf{n}-2}}{\mathbf{n}^{\mathbf{n}}}}$  e  $r_-(\mathbf{m}), r_+(\mathbf{m})$  são as duas raízes positivas da equação  $1 - r^2 - 2\mathbf{m}r^{2-n} = 0$ .

**Exemplo 0.2** (Solução de Sitter ( $\mathbf{m} = 0$ )).

$$\left( \mathbf{M} = \overline{\mathbf{B}(0, 1)}, \mathbf{g} = \frac{d|\mathbf{x}| \otimes d|\mathbf{x}|}{1 - |\mathbf{x}|^2} + |\mathbf{x}|^2 \mathbf{g}_{\mathbb{S}^{n-1}}, \mathbf{u} = \sqrt{1 - |\mathbf{x}|^2} \right).$$

**Exemplo 0.3** (Solução Nariai ( $\mathbf{m} = \mathbf{m}_{\max}$ )).

$$\left( \mathbf{M} = [0, \pi] \times \mathbb{S}^{n-1}, \mathbf{g} = \frac{1}{\mathbf{n}}[d\mathbf{r} \otimes d\mathbf{r} + (\mathbf{n} - 2)\mathbf{g}_{\mathbb{S}^{n-1}}], \mathbf{u} = \sin(\mathbf{r}) \right).$$

A solução de Sitter é o limite da solução de Sitter-Schwarchild quando  $\mathbf{m} \rightarrow 0^+$  e a solução Nariai é o limite da solução de Sitter-Schwarchild quando  $\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{m}_{\max}$ , isso será comentado melhor na seção 2.2. A ideia é que a massa a ser definida coincida com o parâmetro de massa  $\mathbf{m}$  que aparece nas soluções acima. Essa consideração leva a definir a massa em uma região  $\mathbf{N}$  de  $\mathbf{M} \setminus \mathbf{MAX}(\mathbf{u})$  de uma tripla estática  $(\mathbf{M}, \mathbf{g}, \mathbf{u})$  como o valor do parâmetro  $\mathbf{m}$  das soluções listadas acima, que induziria em um dos bordos a gravidade superficial  $\kappa(\partial\mathbf{N})$ . No caso em que  $\partial\mathbf{N}$  não é conexo, a definição é semelhante, primeiramente considera-se o máximo da gravidade superficial das componentes conexas de  $\partial\mathbf{N}$  e então compara este valor com a solução do modelo.

Mostraremos que a definição da massa, chamada de *massa virtual*, é consistente demonstrando o seguinte teorema do tipo Massa Positiva.

**Teorema 0.2** (Teorema da Massa Positiva para Métricas Estáticas com Constante Cosmológica Positiva). *Seja  $(\mathbf{M}^n, \mathbf{g}, \mathbf{u})$ , com  $\mathbf{n} \geq 3$  uma tripla estática com constante cosmológica positiva, considere  $\mathbf{M}$  compacta. Então, cada componente conexa de  $\mathbf{M} \setminus \mathbf{MAX}(\mathbf{u})$  tem massa virtual bem definida, e portanto, não negativa. Além disso, se a massa virtual de alguma componente conexa for nula, então a menos de uma normalização de  $\mathbf{u}$ , a tripla  $(\mathbf{M}, \mathbf{g}, \mathbf{u})$  é isométrica a solução de Sitter.*

Na seção 2.2 mostraremos que a variedade Riemanniana  $(M, g)$  que define a solução de Sitter é apenas o hemisfério  $\mathbb{S}_+^n$  com a métrica canônica, assim o teorema acima pode ser interpretado como uma caracterização da métrica esférica dentro do contexto de soluções estáticas.

A prova do Teorema 0.2 é consequência direta do teorema abaixo.

**Teorema 0.3.** *Seja  $(M^n, g, u)$ , com  $n \geq 3$ , uma tripla estática com constante cosmológica positiva, com  $M$  compacta, e seja  $N$  uma componente conexa de  $M \setminus \text{MAX}(u)$  e  $\partial N = \partial M \cap N$ , uma porção não vazia e possivelmente desconexa de  $\partial M$  que está em  $N$ . Então*

$$\max_{\Sigma \in \pi_0(\partial N)} \kappa(\Sigma) \geq 1.$$

*Além disso, se a igualdade ocorre, então a menos de uma normalização de  $u$ , a tripla  $(M, g, u)$  é isométrica a solução de Sitter.*

Este por sua vez, é uma versão local do seguinte resultado.

**Teorema 0.4.** *Seja  $(M^n, g, u)$ , com  $n \geq 3$ , uma tripla estática com constante cosmológica positiva, com  $M$  compacta. Então*

$$\max_{\Sigma \in \pi_0(\partial M)} \kappa(\Sigma) \geq 1.$$

*Além disso, se a igualdade ocorre, então a menos de uma normalização de  $u$ , a tripla  $(M, g, u)$  é isométrica a solução de Sitter.*

Os demais resultados principais a serem demonstrados nesse trabalho, são sobre estimativas da área do bordo de métricas estáticas com constante cosmológica positiva, veremos que tais métricas possuem curvatura escalar constante e positiva, nesse caso, existe uma clássica conjectura chamada *Cosmic no-hair conjecture* formulada por Boucher, Gibbons e Horowitz (1984), que afirma:

**Conjectura 0.2** (Cosmic no-hair conjecture). *A única tripla estática compacta  $(M^n, g, u)$  com curvatura escalar positiva e bordo conexo  $\Sigma$  é dada pelo hemisfério canônico  $\mathbb{S}_+^n$ , onde  $u$  é a função altura correspondente.*

O resultado abaixo trata-se de uma resposta parcial para essa conjectura, no caso tridimensional.

**Teorema 0.5** (Boucher-Gibbons-Horowitz (1984), Shen (1997)). *Seja  $(M^3, g, u)$  uma tripla estática com constante cosmológica positiva, com  $M$  compacta e bordo  $\partial M$  conexo. Então  $\partial M$  é uma esfera topológica cuja área satisfaz a desigualdade*

$$|\partial M| \leq 4\pi.$$

*Além disso, se a igualdade ocorre, então  $(M^3, g)$  é isométrica ao hemisfério canônico  $(\mathbb{S}_+^3, g_{\mathbb{S}^3})$ .*

Chruściel em [15] generalizou o teorema acima para dimensão  $n \geq 3$ , e obteve a seguinte desigualdade integral

$$0 \leq \int_{\partial M} |\nabla u| [R^{\partial M} - (n-1)(n-2)] d\sigma.$$

Motivados por esse resultado, Borghini e Mazzieri em [6] fizeram a seguinte versão local dessa desigualdade.

**Teorema 0.6.** *Seja  $(M^n, g, u)$  uma tripla estática com constante cosmológica positiva, com  $M$  compacta,  $N$  uma componente conexa de  $M \setminus \text{MAX}(u)$  e  $\partial N = \partial M \cap N$  uma porção não vazia e possivelmente desconexa de  $\partial M$  de  $\partial M$  que está em  $N$ . Então*

$$0 \leq \int_{\partial N} |\nabla u| [R^{\partial N} - (n-1)(n-2)] d\sigma,$$

*onde  $R^{\partial N}$  é a curvatura escalar da métrica induzida por  $g$  em  $\partial N$ . Além disso, se a igualdade ocorre, então  $(M^n, g)$  é isométrica ao hemisfério canônico  $(\mathbb{S}_+^n, g_{\mathbb{S}^n})$ .*

**Corolário 0.1.** *Seja  $(M^3, g, u)$  uma tripla estática com constante cosmológica positiva, com  $M$  compacta e orientável, e  $N$  uma componente conexa de  $M \setminus \text{MAX}(u)$ . Suponha que  $\partial N = \partial M \cap N$  é conexo, então  $\partial N$  é uma 2-esfera topológica e vale a desigualdade*

$$|\partial N| \leq 4\pi.$$

*Além disso, se a igualdade ocorre, então  $(M^3, g)$  é isométrica ao hemisfério canônico  $(\mathbb{S}_+^3, g_{\mathbb{S}^3})$ .*

# Capítulo 1

## Noções preliminares

Nesse capítulo vamos introduzir vários conceitos e resultados que serão utilizados no decorrer do trabalho. Iremos omitir a parte inicial do curso de Geometria Riemanniana, onde se introduz os conceitos de métrica, conexão, derivada covariante, geodésicas, dentre outros conceitos que podem ser facilmente encontrados em qualquer bom livro de introdução à referida disciplina, ver por exemplo [13].

### 1.1 Tensores em variedades Riemannianas

Para um maior aprofundamento do que iremos abordar nessa seção recomendamos o leitor as referências [27] e [13]. Em tudo que se segue  $(M^n, g = \langle , \rangle)$  denotará uma variedade Riemanniana conexa de dimensão  $n$  e munida da sua conexão Riemanniana que será denotada por  $\nabla$ .

**Definição 1.1.** *Um  $(1, r)$ -tensor em uma Variedade diferenciável  $M$  é uma aplicação*

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_r \rightarrow \mathfrak{X}(M),$$

*multilinear sobre o espaço dos campos diferenciáveis sobre  $M$ , denotado por  $\mathfrak{X}(M)$ . Enquanto que, num  $(0, r)$ -tensor o contradomínio é  $C^\infty(M)$ . Formalmente,*

$$T(Y_1, \dots, fX + hY, \dots, Y_r) = fT(Y_1, \dots, X, \dots, Y_r) + hT(Y_1, \dots, Y, \dots, Y_r)$$

*para todos  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f, h \in C^\infty(M)$ .*

O valor do campo  $T(Y_1, \dots, Y_r)$  (ou da função, no caso dos  $(0, r)$ -tensores) num ponto  $p \in M$  depende unicamente do valor dos campos de vetores  $Y_1, Y_2, \dots, Y_r \in \mathfrak{X}(M)$  no ponto

$p$ . Isto é, se  $Z_1, Z_2, \dots, Z_r \in \mathfrak{X}(M)$  são tais que  $Z_j(p) = Y_j(p)$  para  $(1 \leq j \leq r)$ . Então

$$T(Y_1, Y_2, \dots, Y_r)(p) = T(Z_1, \dots, Z_r)(p)$$

Com efeito, seja  $\alpha : U \rightarrow M^n$  uma parametrização local em torno do ponto  $p$ , considere um campo  $W_j \in \mathfrak{X}(M)$  tal que

$$W_j(p) = 0,$$

para algum  $j \in [1, r]$ . Escrevendo  $W_j$  em termos dos campos coordenados  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$  temos

$$W_j = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde  $W_j \in \mathfrak{X}(V)$  com  $V = \alpha(U)$ . Seja  $f$  uma função bump em  $p$ , tal que  $\text{supp } f \subset V$  e  $f(p) = 1$ , daí  $f \cdot \alpha_i \in C^\infty(M)$  e  $f \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathfrak{X}(M)$ , assim

$$\begin{aligned} T(W_1, \dots, f^2 W_j, \dots, W_r) &= T(W_1, \dots, f^2 \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \dots, W_r) \\ &= \sum_{i=1}^n f \alpha_i T(W_1, \dots, f \frac{\partial}{\partial x_i}, \dots, W_r), \end{aligned}$$

por outro lado,

$$f^2 T(W_1, \dots, W_j, \dots, W_r) = \sum_{i=1}^n f \cdot \alpha_i T(W_1, \dots, f \frac{\partial}{\partial x_i}, \dots, W_r).$$

Em  $p$  temos que  $f(p) = 1$  e  $W_j(p) = 0$ , portanto  $\alpha_i(p) = 0$  para todo  $1 \leq i \leq n$ . Logo concluímos que

$$T(W_1, \dots, W_r)(p) = 0.$$

Agora escolha  $W_j = Y_j - Z_j$ , então no ponto  $p$  temos  $W_j(p) = 0$  para todo  $1 \leq j \leq r$ . Observe que

$$\begin{aligned} T(Y_1, \dots, Y_r) - T(Z_1, \dots, Z_r) &= T(Y_1, \dots, Y_r) - T(Z_1, Y_2, \dots, Y_r) + \\ &\quad + T(Z_1, Y_2, \dots, Y_r) - T(Z_1, Z_2, Y_3, \dots, Y_r) + \\ &\quad + T(Z_1, Z_2, Y_3, \dots, Y_r) - T(Z_1, Z_2, Z_3, Y_4, \dots, Y_r) + \\ &\quad + T(Z_1, Z_2, Z_3, Y_4, \dots, Y_r) + \dots + \\ &\quad + T(Z_1, Z_2, \dots, Z_{r+1}, Y_r) - \\ &\quad - T(Z_1, Z_2, \dots, Z_{r+1}, Y_r) - T(Z_1, \dots, Z_r), \end{aligned}$$

daí, segue que

$$\begin{aligned} T(Y_1, \dots, Y_r) - T(Z_1, \dots, Z_r) &= T(Y_1 - Z_1, Y_2, \dots, Y_r) + T(Z_1, Y_2 - Z_2, Y_3, \dots, Y_r) + \\ &\quad + T(Z_1, Z_2, Y_3 - Z_3, Y_4, \dots, Y_r) + \dots + \\ &\quad + T(Z_1, \dots, Z_{r+1}, Y_r - Z_r) \\ &= T(W_1, Y_2, \dots, Y_r) + T(Z_1, W_2, Y_3, \dots, Y_r) + \\ &\quad + T(Z_1, Z_2, W_3, Y_4, \dots, Y_r) + \dots + T(Z_1, \dots, Z_{r+1}, W_r), \end{aligned}$$

avaliando no ponto  $\mathfrak{p}$  e lembrando que  $W_j(\mathfrak{p}) = 0$  para todo  $1 \leq j \leq r$ , temos que

$$\begin{aligned} T(Y_1, \dots, Y_r)(\mathfrak{p}) - T(Z_1, \dots, Z_r)(\mathfrak{p}) &= T(W_1(\mathfrak{p}), \dots, Y_r(\mathfrak{p})) + \\ &\quad + T(Z_1(\mathfrak{p}), W_2(\mathfrak{p}), Y_3(\mathfrak{p}), \dots, Y_r(\mathfrak{p})) + \\ &\quad + \dots + T(Z_1(\mathfrak{p}), \dots, Z_r(\mathfrak{p}), W_r(\mathfrak{p})) \\ &= 0, \end{aligned}$$

logo,

$$T(Y_1, Y_2, \dots, Y_r)(\mathfrak{p}) = T(Z_1, Z_2, \dots, Z_r)(\mathfrak{p}).$$

Como havíamos afirmado, a esse fato vamos nos referir ao caráter pontual dos tensores.

**Exemplo 1.1.** *O tensor métrico  $g : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$  que faz corresponder a cada ponto  $\mathfrak{p} \in M$  e a cada par  $X, Y \in T_{\mathfrak{p}}M$ , o produto interno de  $X$  e  $Y$  na métrica Riemanniana de  $M$ , isto é,  $g_{\mathfrak{p}}(X, Y) = \langle X, Y \rangle_{\mathfrak{p}}$ , é um  $(0, 2)$ -tensor e suas coordenadas em um referencial  $\partial_i$  são os coeficientes  $g_{ij}$  da métrica Riemanniana no sistema de coordenadas dado.*

Mais geralmente, dado um  $(0, r)$ -tensor em uma variedade Riemanniana  $(M, g = \langle, \rangle)$ , podemos identificá-lo com um  $(0, r - 1)$ -tensor  $\tilde{T}$  mediante a métrica Riemanniana  $\langle, \rangle$ , fazendo

$$\langle \tilde{T}(Y_1, \dots, Y_{r-1}), Y_r \rangle := T(Y_1, \dots, Y_r).$$

Por simplicidade de notação, e desde que não haja confusão, omitiremos o "  $\sim$  " no  $(0, r - 1)$ -tensor correspondente ao  $(1, r)$ -tensor  $T$ . Em particular, para o tensor métrico  $g$  temos:

$$g(X, Y) := \langle g(X), Y \rangle.$$

Mas por outro lado,  $g(X, Y) = \langle X, Y \rangle$ , logo  $g(X) = X, \forall X \in \mathfrak{X}(M)$ . Portanto,  $g$  será identificado, sempre que necessário, com o  $(1, 1)$ -tensor identidade  $I$  em  $\mathfrak{X}(M)$ . Em uma

variedade diferenciável, é possível estender a noção de derivada covariante a tensores como veremos agora.

**Definição 1.2.** *A derivada covariante de um  $(1, r)$ -tensor  $T$  é um  $(1, r + 1)$ -tensor  $\nabla T$  dado por*

$$\nabla T(X, Y_1, \dots, Y_r) = \nabla(T(Y_1, \dots, Y_r)) - T(\nabla_X Y_1, \dots, Y_r) - \dots - T(Y_1, \dots, \nabla_X Y_r). \quad (1.1)$$

Para cada  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , definimos a derivada covariante  $\nabla_X T$  de  $T$  em relação a  $X$  como um tensor de mesma ordem que  $T$ , dado por

$$\nabla_X T(Y_1, \dots, Y_r) := \nabla T(X, Y_1, \dots, Y_r).$$

Analogamente, a derivada covariante de um  $(0, r)$ -tensor  $T$  é um  $(0, r + 1)$ -tensor  $\nabla T$  dado por (1.1). Dizemos que um tensor  $T$  é paralelo quando  $\nabla T = 0$ . Observe que uma métrica Riemanniana  $g$  é um tensor paralelo. De fato,

$$\begin{aligned} \nabla g(X, Y, Z) &= (\nabla_X g)(Y, Z) \\ &= \nabla_X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) \\ &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) \\ &= 0, \end{aligned}$$

para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ .

**Observação 1.1.** *Por várias razões, convém identificar o campo  $X \in \mathfrak{X}(M)$  com o tensor  $X : \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$  dado por  $X(Y) = \langle X, Y \rangle$ , para todo  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ .*

**Exemplo 1.2.** *Seja  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Identifiquemos  $X$  com o tensor que faz corresponder ao campo  $Y \in \mathfrak{X}(M)$  a função  $\langle X, Y \rangle$  (Obs. 1.1). A derivada covariante do tensor  $X$  em relação ao campo  $Y \in \mathfrak{X}(M)$  é tal que, para todo  $Z \in \mathfrak{X}(M)$ ,*

$$\begin{aligned} (\nabla_Y X)(Z) &= \nabla X(Y, Z) = Y(X(Z)) - X(\nabla_Y Z) \\ &= Y\langle X, Y \rangle - \langle X, \nabla_Y Z \rangle \\ &= \langle \nabla_Y X, Z \rangle. \end{aligned}$$

*Decorre daí que o tensor  $\nabla_Y X$  pode ser identificado ao campo  $\nabla_Y X$ .*

Motivados pelo resultado do exemplo 1.2, para cada  $Z \in \mathfrak{X}(M)$ , convém considerar o  $(1, 1)$ -tensor  $\nabla Z : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  dado por  $\nabla Z(X) = \nabla_X Z$ .

**Definição 1.3.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana. O tensor curvatura de Riemann é o  $(1, 3)$ -tensor*

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M),$$

dado por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z. \quad (1.2)$$

Observemos que a notação  $R(X, Y, Z)$  também é adequada para esse tensor. Além disso, alertamos para o fato de que vários autores costumam considerar o tensor de curvatura com o sinal trocado de (1.2).

Usando o tensor métrico podemos definir o tensor curvatura como sendo o  $(0, 4)$ -tensor

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M),$$

dado por

$$R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle.$$

**Proposição 1.1.** *O tensor curvatura de Riemann satisfaz as seguintes propriedades:*

(1)  $R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W) = R(Y, X, W, Z).$

(2)  $R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y).$

(3) *Primeira identidade de Bianchi*

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0.$$

(4) *Segunda identidade de Bianchi*

$$(\nabla_X R)(Y, Z, W) + (\nabla_Y R)(Z, X, W) + (\nabla_Z R)(X, Y, W) = 0.$$

*Demonstração.* Veja [27] e [13]. □

A partir da definição do tensor de curvatura definiremos os seguintes entes geométricos:

**Definição 1.4.** *A curvatura seccional  $K_p(\sigma)$  num ponto  $p \in M$  segundo um subespaço bidimensional  $\sigma \subset T_p M$ , é definida por*

$$K(\sigma) = \frac{\langle R(x, y)y, x \rangle}{|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2},$$

onde  $x, y \in \sigma$  são vetores linearmente independentes. Convém considerarmos também a notação  $K_p(x, y) = K_p(\sigma)$ .

Essa definição independe da escolha dos vetores  $x$  e  $y$ , para uma demonstração desse fato veja [13].

**Proposição 1.2.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $p$  um ponto de  $M$ . Defina uma aplicação trilinear  $R' : T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$  por*

$$\langle R'(X, Y, Z), W \rangle = \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle Y, W \rangle \langle X, Z \rangle,$$

para todo  $X, Y, Z, W \in T_p M$ . Então  $(M, g)$  tem curvatura seccional constante igual a  $K_0$  se e só se  $R = K_0 R'$ , onde  $R$  é a curvatura de  $M$ .

**Definição 1.5.** *Seja  $\{e_1, \dots, e_n\}$  uma base ortonormal de  $T_p M$ . O tensor de curvatura de Ricci de  $M$ , é a aplicação  $\text{Ric}_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por*

$$\text{Ric}(X, Y) = \sum_{j=1}^n \langle R(e_j, X)Y, e_j \rangle.$$

**Definição 1.6.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana. A curvatura escalar de  $M$ , denotada por  $R$ , é a função real  $R : M \rightarrow \mathbb{R}$  definida como o traço em relação à métrica do tensor de Ricci*

$$R(p) = \sum_{i=1}^n \text{Ric}(e_i, e_i),$$

onde  $\{e_1, \dots, e_n\}$ , é uma base ortonormal de  $T_p M$ .

Usando a curvatura seccional podemos dar interpretações geométricas para as curvaturas de Ricci e Escalar. Fixe  $x \in T_p M$  com  $\|x\| = 1$ , considere  $\{x, e_2, \dots, e_n\}$  uma base ortonormal de  $T_p M$ , temos

$$\begin{aligned} \text{Ric}(x, x) &= \sum_{i=1}^n \langle R(e_i, x)x, e_i \rangle \\ &= \langle R(x, x)x, x \rangle + \sum_{i=2}^n \langle R(e_i, x)x, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=2}^n \langle R(e_i, x)x, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=2}^n K_p(e_i, x). \end{aligned}$$

Em outras palavras, para cada vetor unitário  $x \in T_p M$ ,  $\text{Ric}(x, x)$  é a soma das curvaturas seccionais de planos gerados por  $x$  e os outros vetores de uma base ortonormal.

Similarmente se  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  é uma base ortonormal de  $T_pM$ , então

$$\begin{aligned} R(p) &= \sum_{i=1}^n \text{Ric}(e_i, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle R(e_j, e_i)e_i, e_j \rangle \\ &= \sum_{i \neq j}^n \langle R(e_j, e_i)e_i, e_j \rangle \\ &= \sum_{i \neq j}^n K_p(e_i, e_j). \end{aligned}$$

Em outras palavras, a curvatura escalar é a soma de todas as curvaturas seccionais dos planos gerados por pares de vetores de uma base ortonormal.

**Observação 1.2.** *No caso de variedades Riemannianas  $(M, g)$  de dimensão 2, para cada  $p \in M$ , existe apenas um plano em  $T_pM$ : o próprio. Para essas variedades, a curvatura seccional pode ser considerada uma função  $K : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Além disso, se  $\{e_1, e_2\}$  é uma base para  $T_pM$ , segue do que foi discutido acima que*

$$R(p) = 2K(e_1, e_2) = 2K(p).$$

*Ou seja, para variedades Riemannianas bidimensionais a curvatura escalar é o dobro da curvatura Gaussiana.*

Relembramos que qualquer variedade Riemanniana bidimensional compacta sem bordo  $(M^2, g)$ , satisfaz a conhecida Fórmula de Gauss-Bonnet

$$\int_M R d\sigma = 4\pi\chi(M), \tag{1.3}$$

que nos diz que a integral da curvatura escalar em toda variedade  $M$ , depende apenas da topologia da variedade  $M$ .

## 1.2 Operadores diferenciais

A derivação covariante de tensores permite estender às variedades Riemannianas certos operadores diferenciais (gradiente, laplaciano, hessiano, etc.) de uso frequente em  $\mathbb{R}^n$ . Tendo como referência [27] e [11], passaremos a uma breve exposição desses operadores, para uma leitura mais detalhada encaminhamos o leitor as referidas referências. Como

antes,  $(M^n, g = \langle, \rangle)$  denotará uma variedade Riemanniana de dimensão  $n$  com conexão de Levi-Civita  $\nabla$ .

**Definição 1.7.** *Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. O **gradiente** de  $f$  é o campo vetorial  $\nabla f$ , definido sobre  $M$  por*

$$\langle \nabla f, X \rangle = \nabla_X f = X(f),$$

para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ .

**Proposição 1.3.** *Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave e  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  um referencial ortonormal em uma vizinhança aberta  $U \subset M$ . Então, em  $U$  temos que*

$$\nabla f = \sum_{j=1}^n e_j(f) e_j.$$

*Demonstração.* Em  $U$  podemos escrever  $\nabla f = \sum_{j=1}^n a^j e_j$ , daí temos que

$$\langle \nabla f, e_k \rangle = \sum_{j=1}^n a^j \langle e_j, e_k \rangle = a^k.$$

Por outro lado, por definição temos  $\langle \nabla f, e_k \rangle = e_k(f)$ , logo  $a^k = e_k(f)$ , e assim obtemos

$$\nabla f = \sum_{j=1}^n e_j(f) e_j.$$

□

**Proposição 1.4.** *Se  $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$  são funções suaves, então*

(a)  $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$ .

(b)  $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$ .

*Demonstração.* Veja Proposição 1.4 de [11].

□

**Definição 1.8.** *Dada uma função suave  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , dizemos que  $p \in M$  é um **ponto crítico** de  $f$ , se  $\nabla f(p) = 0$ .*

**Proposição 1.5.** *Sejam  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funções suaves, então*

$$\nabla(\phi \circ f) = \phi'(f)\nabla f.$$

*Demonstração.* Veja Corolário 1.6 de [11].

□

**Proposição 1.6.** *Seja  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana conexa e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave. Se  $\nabla f = 0$  então  $f$  é constante em  $M$ .*

*Demonstração.* Veja Corolário 1.8 de [11]. □

**Definição 1.9.** *Seja  $X$  um campo de vetores diferenciável em  $M$ . A **divergência** de  $X$  é a função diferenciável  $\operatorname{div}X : M \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por*

$$(\operatorname{div}X)(p) = \operatorname{tr}\{v \rightarrow \nabla_v X(p)\},$$

onde  $\operatorname{tr}$  denota o traço do operador linear  $T_p M \mapsto \nabla_v X(p)$ , onde  $v \in T_p M$ .

**Proposição 1.7.** *Se  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave, então:*

(a)  $\operatorname{div}(X + Y) = \operatorname{div}X + \operatorname{div}Y$ .

(b)  $\operatorname{div}(fX) = f\operatorname{div}X + \langle \nabla f, X \rangle$ .

*Demonstração.* Veja Proposição 1.13 de [11]. □

**Definição 1.10.** *Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. O **Laplaciano** de  $f$  é a função suave  $\Delta f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por*

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f).$$

**Proposição 1.8.** *Dadas  $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$  funções suaves, então*

$$\Delta(fg) = g\Delta f + f\Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle. \tag{1.4}$$

*Demonstração.* Veja Proposição 1.20 de [11]. □

**Definição 1.11.** *Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Definimos o **Hessiano** de  $f$  como o  $(1,1)$ -tensor dado por*

$$(\nabla^2 f)(X) = \nabla_X \nabla f.$$

*Ou como o  $(0,2)$ -tensor, dado por*

$$\nabla^2 f(X, Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle,$$

para quaisquer  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . A igualdade acima é motivada pelo fato do hessiano ser um operador linear auto-adjunto, logo determina uma forma bilinear simétrica. Esse fato por ser encontrado em [11].

**Proposição 1.9.** *Se  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave, então*

$$\Delta f = \text{tr}(\nabla^2 f). \quad (1.5)$$

*Demonstração.* É suficiente provar a igualdade do enunciado em cada  $\mathbf{p} \in M$ . Assim, seja  $U \subset M$  uma vizinhança de  $\mathbf{p}$  onde esteja definido um referencial ortonormal  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ , então

$$\text{tr}(\nabla^2 f)_\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n \langle (\nabla^2 f)_\mathbf{p}(\mathbf{e}_i), \mathbf{e}_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{\mathbf{e}_i} \nabla f, \mathbf{e}_i \rangle_\mathbf{p} = \text{div}(\nabla f)(\mathbf{p}) = \Delta f(\mathbf{p}).$$

□

**Proposição 1.10.** *Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave. Se  $\mathbf{p} \in M$  é um ponto crítico de  $f$ ,  $\mathbf{v} \in T_\mathbf{p}M$  e  $\mathbf{c} : (-\epsilon, +\epsilon) \rightarrow M$  é uma curva suave tal que  $\mathbf{c}(0) = \mathbf{p}$  e  $\mathbf{c}'(0) = \mathbf{v}$ , então*

$$(\nabla^2 f)_\mathbf{p}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \frac{d^2}{dt^2}(f \circ \mathbf{c})(t) \Big|_{t=0}$$

*Demonstração.* Por definição de hessiana, segue que

$$\begin{aligned} (\nabla^2 f)_\mathbf{p}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= \langle \nabla_{\mathbf{v}} \nabla f, \mathbf{v} \rangle_\mathbf{p} \\ &= \frac{d}{dt} \langle \nabla f, \mathbf{c}' \rangle \Big|_{t=0} - \langle \nabla f, \frac{D\mathbf{c}'}{dt} \rangle_\mathbf{p} \\ &= \frac{d}{dt} \langle \nabla f, \frac{d\mathbf{c}}{dt} \rangle \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d^2}{dt^2}(f \circ \mathbf{c}) \Big|_{t=0}. \end{aligned}$$

□

**Proposição 1.11.** *Se  $\mathbf{p} \in M$  é ponto crítico de  $f$  e  $(\nabla^2 f)_\mathbf{p}$  é positiva (resp. negativa) definida, então  $\mathbf{p}$  é ponto de mínimo (resp. máximo) local estrito para  $f$ .*

*Demonstração.* Uma demonstração para esse fato pode ser encontrado em [11]. □

Agora veremos algumas propriedades importantes dos tensores, as quais envolvem operadores diferenciais, que serão úteis nas demonstrações de alguns resultados mais adiante.

**Definição 1.12.** *Considere os  $(0, 2)$ -tensores  $T$  e  $S$  e seus respectivos  $(1, 1)$ -tensores, dados por  $T(X, Y) = \langle T(X), Y \rangle$  e  $S(X, Y) = \langle S(X), Y \rangle$ , se  $S^*$  é o operador adjunto de  $S$ , definimos o produto interno de Hilbert-Schmidt dos tensores  $T$  e  $S$  como*

$$\langle T, S \rangle := \text{tr}(TS^*).$$

**Observação 1.3.** Em um referencial ortornormal em um aberto  $U \subset M$  de  $\mathfrak{p}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \text{tr}(TS^*) &= \sum_i \langle TS^*(e_i), e_i \rangle = \sum_i \langle S^*(e_i), T^*(e_i) \rangle \\ &= \sum_i \langle \sum_j \langle S^*(e_i), e_j \rangle e_j, \sum_k \langle T^*(e_i), e_k \rangle e_k \rangle \\ &= \sum_{i,j,k} \langle e_i, S(e_j) \rangle \langle e_i, T(e_k) \rangle \delta_{jk} \\ &= \sum_{i,j} \langle e_i, S(e_j) \rangle \langle e_i, T(e_j) \rangle, \end{aligned}$$

logo,

$$\text{tr}(TS^*) = \sum_j \langle \sum_i \langle e_i, T(e_j) \rangle, e_i, S(e_j) \rangle = \sum_j \langle T(e_j), S(e_j) \rangle$$

assim,

$$\text{tr}(TS^*) = \sum_j \langle T(e_j), S(e_j) \rangle. \quad (1.6)$$

**Proposição 1.12.** Para quaisquer campos de vetores diferenciável  $X$  e  $Y$  em uma variedade Riemanniana  $(M, g = \langle, \rangle)$  vale

$$\text{Ric}(X, Y) = \text{div}(\nabla_X Y) - \langle X, \nabla(\text{div} Y) \rangle - \langle \nabla X, {}^* \nabla Y \rangle,$$

onde  ${}^* \nabla Y$  é o dual de  $\nabla Y$ .

*Demonstração.* Considere  $\{e_1, \dots, e_n\}$  um referencial geodésico em um ponto  $\mathfrak{p} \in M$ , então temos que

$$\nabla_X e_i(\mathfrak{p}) = \nabla_{\sum_j a^j e_j} e_i(\mathfrak{p}) = \sum_j a^j \nabla_{e_j} e_i(\mathfrak{p}) = 0.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \text{Ric}(X, Y) &= \sum_i \langle R(e_i, X)Y, e_i \rangle \\ &= \sum_i \langle \nabla_{e_i} \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_{e_i} Y - \nabla_{[e_i, X]} Y, e_i \rangle \\ &= \sum_i \langle \nabla_{e_i} \nabla_X Y, e_i \rangle - \sum_i \langle \nabla_X \nabla_{e_i} Y, e_i \rangle - \sum_i \langle \nabla_{\nabla_{e_i} X} Y, e_i \rangle \\ &= \text{div}(\nabla_X Y) - X(\sum_i \langle \nabla_{e_i} Y, e_i \rangle) - \sum_i \langle \nabla Y(\nabla_{e_i} X), e_i \rangle, \end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos a compatibilidade da métrica e o fato de  $\nabla_X \mathbf{e}_i(\mathbf{p}) = 0$ , logo

$$\begin{aligned}
 \text{Ric}(X, Y) &= \text{div}(\nabla_X Y) - X \text{div}(Y) - \sum_i \langle \nabla_{\mathbf{e}_i} X, {}^* \nabla Y(\mathbf{e}_i) \rangle \\
 &= \text{div}(\nabla_X Y) - \langle X, \nabla(\text{div} Y) \rangle - \sum_i \langle \nabla X(\mathbf{e}_i), {}^* \nabla Y(\mathbf{e}_i) \rangle \\
 &= \text{div}(\nabla_X Y) - \langle X, \nabla(\text{div} Y) \rangle - \text{tr}(\nabla X \nabla Y) \\
 &= \text{div}(\nabla_X Y) - \langle X, \nabla(\text{div} Y) \rangle - \langle \nabla X, {}^* \nabla Y \rangle.
 \end{aligned}$$

Onde na última igualdade usamos (1.6), pelo caráter pontual de um tensor, segue o resultado.  $\square$

**Definição 1.13.** *Definimos a divergência de um  $(1, r)$ -tensor  $T$  em  $M$ , como sendo o  $(0, r)$ -tensor dado por*

$$(\text{div} T)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r)(\mathbf{p}) = \text{tr}(\mathbf{w} \mapsto (\nabla_{\mathbf{w}} T)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r)(\mathbf{p})),$$

onde  $\mathbf{p} \in M$  e  $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r) \in T_{\mathbf{p}}M \times \dots \times T_{\mathbf{p}}M$ .

Sejam  $T$  um  $(0, 2)$ -tensor e  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  um referencial ortonormal local em uma variedade Riemanniana  $(M, g = \langle, \rangle)$ . Consideremos o seu  $(1, 1)$ -tensor correspondente  $T$ . Então,  $\text{div} T$  é um  $(0, 1)$ -tensor que satisfaz, para cada  $Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned}
 (\text{div} T)(Z) &= \sum_i g((\nabla_{\mathbf{e}_i} T)(Z), \mathbf{e}_i) = \sum_i g(\nabla T(\mathbf{e}_i, Z), \mathbf{e}_i) \\
 &= \sum_i g(\nabla_{\mathbf{e}_i}(T(Z)) - T(\nabla_{\mathbf{e}_i} Z), \mathbf{e}_i) \\
 &= \sum_i g(\nabla_{\mathbf{e}_i}(T(Z)), \mathbf{e}_i) - \sum_i g(T(\nabla_{\mathbf{e}_i} Z), \mathbf{e}_i) \\
 &= \text{div}(T(Z)) - \sum_i \langle \nabla_{\mathbf{e}_i} Z, T^*(\mathbf{e}_i) \rangle,
 \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}
 (\text{div} T)(Z) &= \text{div}(T(Z)) - \sum_i \langle \nabla Z(\mathbf{e}_i), T^*(\mathbf{e}_i) \rangle \\
 &= \text{div}(T(Z)) - \text{tr}(\nabla Z T) \\
 &= \text{div}(T(Z)) - \langle \nabla Z, T^* \rangle,
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$(\text{div} T)(Z) = \text{div}(T(Z)) - \langle \nabla Z, T^* \rangle. \tag{1.7}$$

**Corolário 1.1.** *Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave, então*

$$\operatorname{div}(\nabla^2 f) = d\Delta f + \operatorname{Ric}(\nabla f, \cdot).$$

*Demonstração.* Provamos na Proposição 1.12, que

$$\operatorname{Ric}(X, Y) = \operatorname{div}(\nabla_X Y) - \langle X, \nabla(\operatorname{div} Y) \rangle - \langle \nabla X, {}^* \nabla Y \rangle,$$

para quaisquer  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Em particular, fazendo  $Y = \nabla f$  na expressão acima, temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{Ric}(X, \nabla f) &= \operatorname{div}(\nabla_X \nabla f) - \langle X, \nabla(\operatorname{div} \nabla f) \rangle - \langle \nabla X, \nabla^2 f \rangle \\ &= \operatorname{div}(\nabla^2 f(X)) - \langle X, \nabla(\Delta f) \rangle - \langle \nabla X, \nabla^2 f \rangle \\ &= (\operatorname{div}(\nabla^2 f(X)) - \langle \nabla X, \nabla^2 f \rangle) - d(\Delta f)(X) \\ &= (\operatorname{div} \nabla^2 f)(X) - d(\Delta f)(X), \end{aligned}$$

onde na primeira igualdade usamos o fato do hessiano ser um operador linear auto-adjunto e na última igualdade usamos (1.7). Portanto,

$$(\operatorname{div} \nabla^2 f)(X) = \operatorname{Ric}(X, \nabla f) + d(\Delta f)(X),$$

para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Portanto

$$\operatorname{div} \nabla^2 f = d(\Delta f) + \operatorname{Ric}(\nabla f, \cdot),$$

pois o tensor de Ricci é simétrico. □

**Proposição 1.13.** *As seguintes fórmulas são válidas em qualquer variedade Riemanniana  $(M, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ :*

- (a)  $\operatorname{div}(fg) = df$ , para toda  $f \in C^\infty(M)$ .
- (b)  $\operatorname{div}(f\operatorname{Ric}) = f(\operatorname{div}\operatorname{Ric}) + \operatorname{Ric}(\nabla f, \cdot)$  para toda  $f \in C^\infty(M)$ .
- (c)  $\operatorname{div}\operatorname{Ric} = \frac{1}{2}dR$  (segunda identidade de Bianchi contraída).

*Demonstração.* Seja  $\{e_1, \dots, e_n\}$  um referencial ortonormal local em  $(M, g)$ , usando a definição de divergência de tensores e o fato de  $g$  ser um tensor paralelo, temos que

$$(\operatorname{div}(fg))(Z) = \sum_i \langle (\nabla_{e_i} fg)(Z), e_i \rangle = \sum_i \langle e_i(f)g(Z) + f(\nabla_{e_i} g)(Z), e_i \rangle = \sum_i \langle e_i(f)Z, e_i \rangle,$$

logo,

$$(\operatorname{div}(fg))(Z) = \sum_i \langle e_i(f) \sum_i z^i e_i, e_i \rangle = \left\langle \sum_i e_i(f) e_i, Z \right\rangle = \langle \nabla f, Z \rangle = df(Z),$$

para todo  $Z \in \mathfrak{X}(M)$ , isso prova o item (a). Para provar o item (b), considere o tensor de Ricci e seu  $(1, 1)$ -tensor correspondente  $\operatorname{Ric}$ . Assim, temos que

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} f\operatorname{Ric})(e_k) &= \sum_i \langle (\nabla_i f\operatorname{Ric})(e_k), e_i \rangle \\ &= \sum_i \langle e_i(f)\operatorname{Ric}(e_k) + f(\nabla_i \operatorname{Ric})(e_k), e_i \rangle \\ &= \sum_i \langle e_i(f)\operatorname{Ric}(e_k), e_i \rangle + f \sum_i \langle (\nabla_i \operatorname{Ric})(e_k), e_i \rangle \\ &= \sum_i \langle e_i(f) \sum_i a^i e_i, e_i \rangle + f(\operatorname{div}\operatorname{Ric})(e_k) \\ &= \left\langle \sum_i e_i(f) e_i, \operatorname{Ric}(e_k) \right\rangle + f(\operatorname{div}\operatorname{Ric})(e_k) \\ &= \operatorname{Ric}(\nabla f, e_k) + f(\operatorname{div}\operatorname{Ric})(e_k), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\operatorname{div}(f\operatorname{Ric}) = \operatorname{Ric}(\nabla f, \cdot) + f\operatorname{div}(\operatorname{Ric}).$$

Para provar o item (c), considere um referencial geodésico  $\{e_1, \dots, e_n\}$  em  $\mathfrak{p} \in M$  e as notações  $R(e_i, e_j, e_k) = R_{ijk}$ ,  $\nabla_{e_i} = \nabla_i$ . A segunda identidade de Bianchi nos diz que

$$\nabla_i R_{jkl} + \nabla_j R_{kil} + \nabla_k R_{ijl} = 0,$$

sendo assim, no ponto  $\mathfrak{p} \in M$ , temos que

$$dR(e_k) = e_k(R) = e_k\left(\sum_i \operatorname{Ric}(e_i, e_i)\right) = \sum_{i,j} e_k \langle R_{jii}, e_j \rangle = \sum_{i,j} \langle \nabla_k R_{jii}, e_j \rangle = - \sum_{i,j} \langle \nabla_k R_{ijj}, e_j \rangle.$$

Agora, usando a segunda identidade de Bianchi, temos que

$$\begin{aligned} dR(e_k) &= \sum_{i,j} \langle \nabla_i R_{jki}, e_j \rangle + \sum_{i,j} \langle \nabla_j R_{kii}, e_j \rangle \\ &= \sum_{i,j} \langle \nabla_i R_{jki}, e_j \rangle + \sum_{i,j} e_j \langle R_{kii}, e_j \rangle \\ &= \sum_{i,j} \langle \nabla_i R_{jki}, e_j \rangle + \sum_{i,j} (R_{kiij}) \\ &= \sum_{i,j} \langle \nabla_i R_{jki}, e_j \rangle + \sum_{j,i} e_j (R_{ikji}) \\ &= \sum_{i,j} \langle \nabla_i R_{jki}, e_j \rangle + \sum_{j,i} \langle \nabla_j R_{ikj}, e_i \rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado, ainda no ponto  $\mathfrak{p}$ , temos que

$$\begin{aligned}
 (\operatorname{div}\operatorname{Ric})(\mathbf{e}_k) &= \sum_i \langle (\nabla_i \operatorname{Ric})(\mathbf{e}_k), \mathbf{e}_i \rangle \\
 &= \sum_i \langle \nabla_i \operatorname{Ric}(\mathbf{e}_k) - \operatorname{Ric}(\nabla_i \mathbf{e}_k), \mathbf{e}_i \rangle \\
 &= \sum_i \langle \nabla_i \operatorname{Ric}(\mathbf{e}_k), \mathbf{e}_i \rangle \\
 &= \sum_i \mathbf{e}_i \langle \operatorname{Ric}(\mathbf{e}_k), \mathbf{e}_i \rangle. \\
 &= \sum_i \mathbf{e}_i (\operatorname{Ric}(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i)) \\
 &= \sum_{i,j} \mathbf{e}_i \langle \mathbf{R}_{jki}, \mathbf{e}_j \rangle \\
 &= \sum_{i,j} \langle \nabla_i \mathbf{R}_{jki}, \mathbf{e}_j \rangle.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathbf{dR}(\mathbf{e}_k) = 2(\operatorname{div}\operatorname{Ric})(\mathbf{e}_k),$$

pelo carácter pontual de um tensor, segue o resultado.  $\square$

**Teorema 1.1** (Fórmula de Bochner). *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave. Então*

$$\frac{1}{2} \Delta |\nabla f|^2 = \operatorname{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f) \rangle + |\nabla^2 f|^2.$$

*Demonstração.* Para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , temos

$$\langle \nabla |\nabla f|^2, X \rangle = X |\nabla f|^2 = 2 \langle \nabla_X \nabla f, \nabla f \rangle,$$

donde

$$\nabla |\nabla f|^2 = 2 \nabla_{\nabla f} \nabla f,$$

logo

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \Delta |\nabla f|^2 &= \frac{1}{2} \operatorname{div}(\nabla |\nabla f|^2) \\
 &= \operatorname{div}(\nabla_{\nabla f} \nabla f) \\
 &= \operatorname{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f) \rangle + |\nabla^2 f|^2,
 \end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos a Proposição 1.12.  $\square$

Para o lema a seguir, se  $T : V \rightarrow V$  é um operador linear auto-adjunto em um espaço vetorial real de dimensão finita e com produto interno, denotamos  $|T|^2 = \text{tr}(T^2)$ . Assim, sendo  $\{e_1, \dots, e_n\}$  uma base ortonormal de  $V$ , segue que

$$|T|^2 = \sum_i \langle T^2(e_i), e_i \rangle = \sum_i |T(e_i)|^2. \quad (1.8)$$

**Lema 1.1.** *Seja  $V$  um espaço vetorial real  $n$ -dimensional com produto interno. Se  $T : V \rightarrow V$  é um operador linear auto-adjunto, então*

$$|T|^2 \geq \frac{1}{n}(\text{tr}T)^2$$

*Com igualdade ocorrendo se, e só se,  $T$  for um múltiplo do operador identidade. Em particular, em uma variedade Riemanniana  $(M, g)$  temos  $|\nabla^2 f|^2 \geq \frac{(\Delta f)^2}{n}$ , e a igualdade ocorre se, e somente se,  $\nabla^2 f = \frac{\Delta f}{n}g$ .*

*Demonstração.* Como  $T$  é um operador linear auto-adjunto, pelo Teorema Espectral (Teorema 9, capítulo 9 de [32]), existe uma base ortonormal  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $V$  formada por autovetores de  $T$ , tal que  $T(e_i) = \lambda_i e_i$  para  $1 \leq i \leq n$ . Assim, pela equação (1.8) e da desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$|T|^2 = \sum_i |T(e_i)|^2 = \sum_i (\lambda_i)^2 \geq \frac{1}{n} \left( \sum_i \lambda_i \right)^2 = \frac{1}{n} (\text{tr}T)^2,$$

e a igualdade ocorre se, e somente se,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n$ , ou seja, se, e só se,  $T$  for um múltiplo do operador identidade. Em particular, como  $\Delta f = \text{tr} \nabla^2 f$ , temos que  $|\nabla^2 f|^2 \geq \frac{(\Delta f)^2}{n}$ , e a igualdade ocorre se, e somente se, para alguma função  $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ , tem-se  $\nabla^2 f = \lambda g$ , daí considerando um referencial ortonormal  $\{E_1, \dots, E_n\}$  de  $\mathfrak{X}(M)$ , tem-se

$$\Delta f = \sum_i \nabla^2 f(E_i, E_i) = \sum_i \lambda g = n\lambda.$$

Portanto  $|\nabla^2 f|^2 = \frac{(\Delta f)^2}{n}$  se, e somente se,  $\nabla^2 f = \frac{\Delta f}{n}g$ . □

### 1.3 Campos de Jacobi

Nessa seção introduzimos os campos de Jacobi, que são campos de vetores ao longo de geodésicas, definidas por meio de uma equação diferencial que aparece naturalmente no estudo da aplicação exponencial.

**Definição 1.14.** *Seja  $\gamma : I \rightarrow M$  uma geodésica em uma variedade Riemanniana  $(M, g)$ . Um campo de vetores  $J$  ao longo de  $\gamma$  é denominado campo de Jacobi, se satisfaz a equação diferencial*

$$J''(t) - R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0,$$

para todo  $t \in I$ , onde  $J''(t) = \frac{D^2 J}{dt^2}(t)$ .

Para uma construção dos campos de Jacobi, veja página 123 de [13].

**Exemplo 1.3** (Campos de Jacobi na esfera  $\mathbb{S}^n$ ). *É conhecido que a esfera unitária  $\mathbb{S}^n$  com a métrica canônica, tem curvatura seccional constante igual à 1. Consideremos  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^n$  uma geodésica normalizada e  $J$  um campo de Jacobi ao longo de  $\gamma$  e normal a  $\gamma'$ . Dado qualquer campo de vetores  $X$  ao longo de  $\gamma'$ , pela proposição 1.2, temos que*

$$\langle R(\gamma', J)\gamma', X \rangle = \langle \gamma', X \rangle \langle J, \gamma' \rangle - \langle \gamma', \gamma' \rangle \langle J, X \rangle = -\langle J, X \rangle.$$

Então pela equação que define um campo de Jacobi, segue que

$$J''(t) + J(t) = 0. \tag{1.9}$$

Fixando as condições iniciais  $J(0) = 0$  e  $J'(0) = w$ , considere  $w(t)$  o transporte paralelo de  $w$  ao longo de  $\gamma$  com  $w(0) = w$ . Tomando  $J(t) = f(t)w(t)$ , segue de (1.9) e das condições iniciais de  $J$  e o fato de  $w(t)$  ser paralelo que

$$\begin{cases} f''(t) + f(t) = 0 \\ f(0) = 0 \\ f'(0) = 1. \end{cases}$$

Logo,  $f(t) = \sin(t)$  e assim  $J(t) = \sin(t)w(t)$  é a expressão de um campo de Jacobi em  $\mathbb{S}^n$ .

O resultado a seguir exhibe uma propriedade dos campos de Jacobi, cuja demonstração podem ser encontradas em [13].

**Proposição 1.14.** *Seja  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  uma geodésica em uma variedade Riemanniana  $(M, g)$ . Então um campo de Jacobi ao longo de  $\gamma$ , é dado por*

$$J(t) = d(\exp_p)_{t\gamma'(0)}(tJ'(0)),$$

$t \in [0, a]$ .

Seja  $\gamma : [0, \mathbf{a}] \rightarrow M$  uma geodésica. O ponto  $\gamma(\mathbf{t}_0)$  é conjugado de  $\gamma(0)$  ao longo de  $\gamma$ ,  $\mathbf{t}_0 \in (0, \mathbf{a}]$ , se existe um campo de Jacobi  $J$  ao longo de  $\gamma$ , não identicamente nulo, com  $J(0) = 0 = J(\mathbf{t}_0)$ . O número máximo de tais campos linearmente independentes é a multiplicidade do ponto conjugado  $\gamma(\mathbf{t}_0)$ .

A proposição a seguir nos fornece uma relação entre os pontos conjugados e os pontos críticos da aplicação exponencial cuja demonstração pode ser encontrada em [13].

**Proposição 1.15.** *Sejam  $\gamma : [0, \mathbf{a}] \rightarrow M$  uma geodésica e  $\mathbf{p} = \gamma(0) \in M$ . O ponto  $\mathbf{q} = \gamma(\mathbf{t}_0)$ ,  $\mathbf{t}_0 \in [0, \mathbf{a}]$  é conjugado de  $\mathbf{p}$  ao longo de  $\gamma$  se, e somente se,  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{t}_0 \gamma'(0)$  é um ponto crítico de  $\exp_{\mathbf{p}}$ . Além disso, a multiplicidade de  $\mathbf{q}$  como ponto conjugado de  $\mathbf{p}$  é igual a dimensão do núcleo da aplicação linear  $\mathbf{d}(\exp_{\mathbf{p}})_{\mathbf{v}_0}$ .*

## 1.4 Variações do comprimento de arco; Variedades completas

Nessa seção calcularemos as fórmulas da primeira e segunda variação do comprimento de arco de uma geodésica tendo como referência [33], iremos mostrar também que as curvas integrais do campo  $\nabla \mathbf{r}$ , onde  $\mathbf{r}$  é a função distância definida em uma variedade completa, são geodésicas. Tais resultados serão de grande utilidade na prova do Lema de Reilly.

Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $\gamma : [0, \mathbf{t}_0] \rightarrow M$  uma geodésica normalizada em  $M$ . Uma variação de  $\gamma$  é uma superfície parametrizada (veja definição 3.3 em [13]).

$$\begin{aligned} \mathbf{b} : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, \mathbf{t}_0] &\rightarrow M \\ (s, t) &\mapsto \mathbf{b}(s, t), \end{aligned}$$

tal que  $\mathbf{b}(0, t) = \gamma(t)$ . Denotamos por  $\gamma_s$  a curva  $t \mapsto \mathbf{b}(s, t)$ . Suponhamos que as curvas  $\alpha_1, \alpha_2 : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ , dadas por  $\alpha_1(s) = \mathbf{b}(s, 0)$  e  $\alpha_2(s) = \mathbf{b}(s, \mathbf{t}_0)$  sejam geodésicas em  $M$ . Para a proposição a seguir iremos lembrar alguns fatos cujas demonstrações podem ser encontradas em [13].

**Lema 1.2** (de simetria). *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $\mathbf{b} : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  uma superfície parametrizada. Então,*

$$\frac{D}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s} = \frac{D}{\partial s} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}.$$

**Lema 1.3** (Curvatura como medida da não comutatividade da Derivada Covariante).

Seja  $\mathbf{b} : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  uma superfície parametrizada e seja  $V(s, t)$  um campo vetorial ao longo de  $\mathbf{b}$ . Então

$$\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} V - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} V = R \left( \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s} \right) V.$$

**Proposição 1.16.** Considere a função

$$\begin{aligned} L : (-\epsilon, \epsilon) &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\mapsto L(s) = \int_0^s |\gamma'_s| dt, \end{aligned}$$

onde  $L(s)$  é o comprimento da curva  $\gamma_s$ . Com as notações anteriores, temos que

$$L'(0) = \left\langle \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s}(0, t_0), \gamma'(t_0) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s}(0, 0), \gamma'(0) \right\rangle$$

e

$$L''(0) = \int_0^{t_0} \left( \left| \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s} \right|^2 - \left\langle R \left( \gamma', \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s} \right) \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s}, \gamma' \right\rangle - \left\langle \gamma', \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s} \right\rangle^2 \right) dt.$$

*Demonstração.* Como  $L(s) = \int_0^{t_0} \left| \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}(s, t) \right| dt$  e  $\gamma_s$  é diferenciável, temos

$$\begin{aligned} L'(s) &= \int_0^{t_0} \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right\rangle^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right\rangle dt \\ &= \int_0^{t_0} \left| \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right|^{-1} \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right\rangle dt \\ &= \int_0^{t_0} \left| \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right|^{-1} \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s}, \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right\rangle dt \\ &= \int_0^{t_0} \left| \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right| \left( \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s}, \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right\rangle \right) dt, \end{aligned}$$

Onde na segunda igualdade usamos o Lema de Simetria. Como  $\gamma_0(t) = \mathbf{b}(0, t) = \gamma(t)$  isso implica que  $\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}(0, t) = \frac{d\gamma}{dt}(t)$ , daí  $\left| \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}(0, t) \right| = 1$ , pois  $\gamma$  está normalizada e como  $\gamma$  é geodésica temos que  $\frac{D}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}(0, t) = 0$ . Então, fazendo  $s = 0$  em  $L'(s)$  temos

$$\begin{aligned} L'(0) &= \int_0^{t_0} \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s}(0, t), \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}(0, t) \right\rangle dt \\ &= \int_0^{t_0} \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s}(0, t), \gamma'(t) \right\rangle dt, \end{aligned}$$

portanto,

$$L'(0) = \left\langle \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s}(0, t_0), \gamma'(t_0) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s}(0, 0), \gamma'(0) \right\rangle.$$

Agora vamos obter a expressão para  $L''(0)$ . Como

$$L'(s) = \int_0^{t_0} \frac{\left\langle \frac{D}{dt} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s}, \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right\rangle}{\left| \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right|} dt,$$

então

$$L''(s) = \int_0^{t_0} \left( \frac{\left\langle \frac{D}{ds} \frac{D}{dt} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s}, \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{D}{dt} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s}, \frac{D}{ds} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right\rangle}{\left| \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right|} - \frac{\left\langle \frac{D}{dt} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s}, \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right\rangle^2}{\left| \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right|^3} \right) dt.$$

Usando o lema 1.3 temos

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{D}{ds} \frac{D}{dt} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s}, \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right\rangle &= \left\langle \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s} - \mathbf{R} \left( \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s} \right) \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right\rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{D}{ds} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s}, \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right\rangle - \left\langle \frac{D}{ds} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s}, \frac{D}{dt} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right\rangle - \left\langle \mathbf{R} \left( \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s} \right) \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s}, \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right\rangle, \end{aligned}$$

como  $\frac{D}{dt} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}(0, t) = \nabla_{\gamma'} \gamma'(t) = 0$ , então em  $s = 0$  temos

$$\left\langle \frac{D}{ds} \frac{D}{dt} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{D}{ds} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s}, \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right\rangle - \left\langle \mathbf{R} \left( \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s} \right) \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s}, \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right\rangle.$$

Além disso,  $\left| \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}(0, t) \right| = |\gamma'(t)| = 1$ . Logo,

$$\begin{aligned} L''(0) &= \int_0^{t_0} \left( \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{D}{ds} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s}, \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right\rangle - \left\langle \mathbf{R} \left( \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s} \right) \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s}, \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right\rangle \right) dt \\ &\quad + \int_0^{t_0} \left( \left| \frac{D}{dt} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s} \right|^2 - \left\langle \frac{D}{dt} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s}, \gamma' \right\rangle^2 \right) dt \\ &= \int_0^{t_0} \left( \left| \frac{D}{dt} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s} \right|^2 - \left\langle \mathbf{R} \left( \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s} \right) \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s}, \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right\rangle - \left\langle \frac{D}{dt} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s}, \gamma' \right\rangle^2 \right) dt \\ &\quad + \left\langle \frac{D}{ds} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s}(0, t_0), \gamma'(t_0) \right\rangle - \left\langle \frac{D}{ds} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s}(0, 0), \gamma'(0) \right\rangle \\ &= \int_0^{t_0} \left( \left| \frac{D}{dt} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s} \right|^2 - \left\langle \mathbf{R} \left( \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s} \right) \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s}, \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right\rangle - \left\langle \frac{D}{dt} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s}, \gamma' \right\rangle^2 \right) dt. \end{aligned}$$

Pois como as curvas  $\alpha_1(s) = \mathbf{b}(s, 0)$  e  $\alpha_2(s) = \mathbf{b}(s, t_0)$  são geodésicas, temos que  $\frac{D}{ds} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s}(0, t_0) = \nabla_{\alpha_1'} \alpha_1'(0)$  e  $\frac{D}{ds} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s}(0, 0) = \nabla_{\alpha_2'} \alpha_2'(0) = 0$ .  $\square$

**Definição 1.15.** *Uma variedade Riemanniana  $(M, g)$  é dita completa se toda geodésica de  $M$  está definida para todo  $\mathbb{R}$ .*

Um segmento de geodésica é chamado *minimizante*, se  $\ell(\gamma) \leq \ell(c)$ , onde  $c$  é qualquer curva diferenciável por partes ligando os extremos de  $\gamma$ .

**Definição 1.16.** *Dados  $p, q \in M$ , a distância de  $p$  a  $q$  é definida como  $d(p, q) = \text{ínfimo}$  dos comprimentos de todas as curvas  $\alpha_{p,q}$ , onde  $\alpha_{p,q}$  é uma curva diferenciável por partes ligando  $p$  a  $q$ .*

Se  $(M, g)$  é uma variedade Riemanniana completa, então  $(M, d)$  é um espaço métrico. Para uma demonstração desse fato veja [13] pág.161, por exemplo. Observamos que, se existe uma geodésica minimizante  $\gamma$  ligando  $p$  a  $q$ , o que nem sempre é verdade, então  $d(p, q) = \ell(\gamma)$ .

**Teorema 1.2** (Hopf e Rinow). *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $p \in M$ . Se  $M$  é completa, então para todo  $q$  em  $M$ , existe uma geodésica  $\gamma$  ligando  $p$  a  $q$  com  $\ell(\gamma) = d(p, q)$ .*

**Corolário 1.2.** *Se  $(M, g)$  é compacta então  $(M, g)$  é completa.*

**Proposição 1.17.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana completa, dado  $p \in M$  seja  $r \in C^\infty(M)$  a função distância ao ponto  $p$ . Então,  $|\nabla r| = 1$  e as curvas integrais do campo  $\nabla r$  são geodésicas.*

*Demonstração.* Pelo Teorema de Hopf e Rinow, para todo  $q \in M$  existe uma geodésica minimizante e normalizada  $\gamma : [0, s] \rightarrow M$ , tal que  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma(s) = q$ . Como  $\nabla r$  é ortogonal as curvas de níveis que nesse caso são esferas geodésicas centradas em  $p$ , então  $\nabla r$  é múltiplo de  $\gamma'$ . Além disso,

$$r(p, \gamma(s)) = \ell(\gamma) = \int_0^s |\gamma'(s)| ds = s.$$

Assim, temos que

$$\langle \nabla r(p, \gamma(s)), \gamma'(s) \rangle = 1,$$

o que implica  $\nabla r(p, \gamma(s)) = \gamma'(s)$ , daí  $|\nabla r| = 1$ . Agora considere  $\alpha : (0, \epsilon) \rightarrow M$  uma trajetória do campo  $\nabla r$ , ou seja,  $\nabla r(\alpha(t)) = \alpha'(t) \quad \forall t \in (0, \epsilon)$ . Além disso,  $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ , temos

$$\langle \nabla_X \nabla r, \nabla r \rangle = \frac{X}{2} \langle \nabla r, \nabla r \rangle = \frac{1}{2} X(|\nabla r|^2) = 0.$$

Pela simetria da conexão  $\nabla$  de  $M$ , temos que

$$[X, \nabla r](r) = \nabla_X \nabla r(r) - \nabla_{\nabla r} X(r),$$

segue daí que

$$X(\nabla r(r)) - \nabla r(X(r)) = \langle \nabla_X \nabla r, \nabla r \rangle - \langle \nabla_{\nabla r} X, \nabla r \rangle,$$

donde

$$X\langle \nabla r, \nabla r \rangle - \nabla r(\langle X, \nabla r \rangle) = -\langle \nabla_{\nabla r} X, \nabla r \rangle,$$

novamente usando  $|\nabla r| = 1$ , temos que

$$-\langle \nabla_{\nabla r} X, \nabla r \rangle - \langle X, \nabla_{\nabla r} \nabla r \rangle = -\langle \nabla_{\nabla r} X, \nabla r \rangle,$$

assim  $\langle X, \nabla_{\nabla r} \nabla r \rangle = 0$ , para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Logo,

$$\nabla_{\nabla r} \nabla r = 0.$$

Portanto, segue da igualdade  $\nabla r(\alpha(t)) = \alpha'(t)$ , que

$$\frac{D\alpha'}{dt} = \nabla_{\alpha'(t)} \nabla r = \nabla_{\nabla r} \nabla r = 0,$$

ou seja,  $\alpha$  é geodésica. □

## 1.5 A equação de Gauss

Nessa seção vamos obter a equação de Gauss associada a uma imersão isométrica, que relaciona as curvaturas das duas variedades e a segunda forma fundamental da imersão. Veremos que no caso particular em que a codimensão da imersão é 1, a equação de Gauss assume uma nova expressão que relaciona as curvaturas escalares de ambas as variedades com a curvatura média da imersão. Antes iremos fazer um breve resumo sobre os conceitos básicos de imersões isométricas, as demonstrações omitidas podem ser encontradas em [13].

Seja  $f : M \rightarrow \overline{M}$  uma imersão de uma variedade diferenciável  $M$  de dimensão  $n$  em uma variedade Riemanniana  $(\overline{M}, \overline{g})$  de dimensão igual a  $k = m + n$ . A métrica Riemanniana de  $\overline{M}$  induz de maneira natural uma métrica Riemanniana em  $M$  da seguinte forma, se  $v_1, v_2 \in T_p M$ , define-se em  $M^n$  a métrica  $g = f^*(\overline{g})$ , ou seja,

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)},$$

para todo  $\mathbf{p} \in M$  e quaisquer  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}M$ . Nessa situação,  $f$  passa a ser uma imersão isométrica de  $M$  em  $\overline{M}$ . Como  $f : M^n \rightarrow \overline{M}^k$  é localmente um mergulho, então para cada  $\mathbf{p} \in M$ , existe uma vizinhança  $U \subset M$  de  $\mathbf{p}$ , tal que  $f(U) \subset \overline{M}$  é uma subvariedade de  $\overline{M}$ . Para simplificar a notação, identificaremos  $U$  com  $f(U)$  e cada vetor  $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{q}}M$ ,  $\mathbf{q} \in U$ , com  $df_{\mathbf{q}}(\mathbf{v}) \in T_{f(\mathbf{q})}\overline{M}$ .

Usando tais identificações, para cada  $\mathbf{p} \in M$ , o produto interno em  $T_{\mathbf{p}}\overline{M}$  decompõe  $T_{\mathbf{p}}\overline{M}$  na soma direta

$$T_{\mathbf{p}}\overline{M} = T_{\mathbf{p}}M \oplus (T_{\mathbf{p}}M)^{\perp},$$

onde  $(T_{\mathbf{p}}M)^{\perp}$  é o complemento ortogonal de  $T_{\mathbf{p}}M$  em  $T_{\mathbf{p}}\overline{M}$ . Assim, se  $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}\overline{M}$  com  $\mathbf{p} \in M$ , podemos escrever

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^T + \mathbf{v}^N, \quad \mathbf{v}^T \in T_{\mathbf{p}}M, \quad \mathbf{v}^N \in (T_{\mathbf{p}}M)^{\perp}.$$

Denotaremos por  $\nabla$  e  $\overline{\nabla}$  as conexões de  $M$  e  $\overline{M}$  respectivamente. Então se  $X$  e  $Y$  são campos locais (isto é, definidos em  $U$ ) de vetores em  $M$ , e  $\overline{X}, \overline{Y}$  suas extensões locais em  $\overline{M}$ , então

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^T. \quad (1.10)$$

Denotaremos por  $\mathfrak{X}(U)^{\perp}$  o conjunto dos campos diferenciáveis em  $U$  de vetores normais a  $f(U) \approx U$ .

**Proposição 1.18.** *Sejam  $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$  campos locais em  $M$ , a aplicação  $B : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \rightarrow \mathfrak{X}(U)^{\perp}$  dada por*

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y,$$

*é bilinear e simétrica.*

Como  $B$  é bilinear, o valor de  $B(X, Y)(\mathbf{p})$  só depende dos valores de  $X(\mathbf{p})$  e  $Y(\mathbf{p})$ . Assim, podemos considerar  $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = B(X, Y)(\mathbf{p})$  onde  $\mathbf{x} = X(\mathbf{p}), \mathbf{y} = Y(\mathbf{p}) \in T_{\mathbf{p}}M$ . Sejam  $\mathbf{p} \in M$  e  $\boldsymbol{\eta} \in (T_{\mathbf{p}}M)^{\perp}$ , pela proposição anterior, a aplicação

$$H_{\boldsymbol{\eta}} : T_{\mathbf{p}}M \times T_{\mathbf{p}}M \rightarrow \mathbb{R},$$

definida por  $H_{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle B(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \boldsymbol{\eta} \rangle$  é uma forma bilinear e simétrica.

**Definição 1.17.** *A forma quadrática  $\Pi_{\boldsymbol{\eta}}$  definida em  $T_{\mathbf{p}}M$  por*

$$\Pi_{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{x}) = H_{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}),$$

*é chamada a segunda forma fundamental da imersão  $f$  em  $\mathbf{p}$  segundo o vetor normal  $\boldsymbol{\eta}$ .*

Às vezes se utiliza também a expressão segunda forma fundamental para designar a aplicação  $B$  que em cada  $p \in M$  é uma aplicação bilinear, simétrica, tomando valores em  $(T_p M)^\perp$ .

Assim como toda forma bilinear, temos que  $H_\eta$  está associada a uma aplicação linear auto-adjunta  $S_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$  dada por

$$\langle S_\eta(x), y \rangle = H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle.$$

**Proposição 1.19.** *Seja  $p \in M$ ,  $x \in T_p M$  e  $\eta \in (T_p M)^\perp$ . Se  $N$  é uma extensão local de  $\eta$  normal a  $M$ . Então*

$$S_\eta(x) = -(\bar{\nabla}_x N)^\top.$$

**Definição 1.18.** *Uma imersão  $f : M \rightarrow \bar{M}$  é geodésica em  $p \in M$  se, para todo  $\eta \in (T_p M)^\perp$ , a segunda forma fundamental  $II_\eta$  é identicamente nula em  $p$ . A imersão  $f$  é totalmente geodésica se ela é geodésica para todo  $p \in M$ .*

**Proposição 1.20.** *Uma imersão  $f : M \rightarrow \bar{M}$  é geodésica em  $p \in M$  se e só se toda geodésica  $\gamma$  de  $M$  partindo de  $p$  é geodésica de  $\bar{M}$  em  $p$ .*

Uma condição mais fraca do que a de totalmente geodésica é a condição de mínima.

**Definição 1.19.** *Uma imersão  $f : M \rightarrow \bar{M}$  é mínima se para todo  $p \in M$  e todo  $\eta \in (T_p M)^\perp$  tem-se  $\text{tr } S_\eta = 0$ .*

Quando consideramos o caso em que a codimensão da imersão é 1, ou seja,  $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$ ,  $M$  é denominada *hipersuperfície* de  $\bar{M}$  e a dimensão de  $(T_p M)^\perp$  é igual a 1, para todo  $p$  em  $M$ . Se  $M$  e  $\bar{M}$  são orientáveis e estão orientadas (isto é, escolhemos orientações para  $M$  e  $\bar{M}$ ), o vetor unitário  $\eta$  normal a  $M$  fica univocamente determinado se exigimos que  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é uma base de orientação de  $M$  e  $\{e_1, \dots, e_n, \eta\}$  é uma base de orientação de  $\bar{M}$ . Assim, nesse caso, escrevemos somente  $II$ ,  $H$ ,  $S$  para indicar  $II_\eta$ ,  $H_\eta$ ,  $S_\eta$ . Para codimensão  $k \geq 1$ , tomemos um referencial ortonormal  $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  de vetores em  $\mathfrak{X}(U)^\perp$ , onde  $U$  é uma vizinhança na qual  $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+k}$  é um mergulho, como  $B(X, Y) \in \mathfrak{X}(U)^\perp$ , então podemos escrever

$$B(X, Y) = \sum_{j=1}^k \langle B(X, Y), e_j \rangle e_j.$$

Se agora  $\{E_1, \dots, E_n\}$  é um referencial ortonormal (de campos vetoriais tangentes) em  $U$ , então podemos definir o vetor *curvatura média* da imersão, por

$$H = \sum_{j=1}^k \left( \sum_{i=1}^n \langle B(E_i, E_i), e_j \rangle \right) e_j.$$

Em particular, se  $M$  é uma hipersuperfície de  $\bar{M}$ , isto é,  $k = 1$ , então essencialmente a curvatura média é um traço, da segunda forma fundamental.

**Proposição 1.21** (Equação de Gauss). *Seja  $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+k}$  uma imersão, então*

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(X, Y, Z), W \rangle - \langle B(X, W), B(Y, Z) \rangle + \langle B(Y, W), B(X, Z) \rangle.$$

**Corolário 1.3** (Gauss). *Se  $p \in M$  e  $X, Y \in T_p M$  são vetores ortonormais, então*

$$\bar{K}(X, Y) = K(X, Y) + \|B(X, Y)\|^2 - \langle B(X, X), B(Y, Y) \rangle. \quad (1.11)$$

Onde  $\bar{K}(X, Y)$ ,  $K(X, Y)$  são as curvaturas seccionais do plano gerado por  $X$  e  $Y$ .

*Demonstração.* Basta usar a proposição anterior e lembrar que se  $X, Y$  são ortonormais, então

$$K(X, Y) = R(X, Y, Y, X).$$

□

**Proposição 1.22** (Equação de Gauss). *Seja  $M$  uma hipersuperfície de  $\bar{M}$ , se  $\bar{R}$  e  $R$  são as curvaturas escalares de  $\bar{M}$  e  $M$  respectivamente, então*

$$\bar{R} = R + 2\bar{\text{Ric}}(\mathbf{n}, \mathbf{n}) + \|B\|^2 - H^2,$$

onde  $\mathbf{n}$  é um vetor normal a  $M$  e  $\bar{\text{Ric}}$  é o tensor de curvatura de Ricci de  $\bar{M}$ .

*Demonstração.* Considere  $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$  imersão, seja  $\mathbf{n}$  vetor normal unitário em  $\mathfrak{X}(U)^\perp$ , onde  $U$  é uma vizinhança na qual  $f$  é um mergulho, e  $\{E_1, \dots, E_n\}$  um referencial ortonormal (de vetores tangentes) nessa mesma vizinhança. Pela Proposição 1.21, temos

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle B(Y, W), B(X, Z) \rangle - \langle B(X, W), B(Y, Z) \rangle.$$

Tomando o traço em  $X, W$  obtemos

$$\sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(E_i, Y)Z, E_i \rangle = \text{Ric}(Y, Z) + \sum_{i=1}^n \langle B(Y, E_i), B(E_i, Z) \rangle - H \langle B(Y, Z), \mathbf{n} \rangle,$$

somando  $\langle \bar{R}(n, Y)Z, n \rangle$ , em ambos os lados da igualdade, temos que

$$\bar{Ric}(Y, Z) = Ric(Y, Z) + \langle \bar{R}(n, Y)Z, n \rangle + \sum_{i=1}^n \langle B(Y, E_i), B(E_i, Z) \rangle - H \langle B(Y, Z), n \rangle$$

tomando o traço novamente, obtemos

$$\sum_{j=1}^n \bar{Ric}(E_j, E_j) = R + \sum_{j=1}^n \langle \bar{R}(n, E_j)E_j, n \rangle + \sum_{i,j=1}^n |B(E_i, E_j)|^2 - H^2,$$

daí, segue que

$$\sum_{j=1}^n \bar{Ric}(E_j, E_j) = R + \bar{Ric}(n, n) + \sum_{i,j=1}^n |B(E_i, E_j)|^2 - H^2, \quad (1.12)$$

como  $\bar{R} = \sum_{j=1}^n \bar{Ric}(E_j, E_j) + \bar{Ric}(n, n)$ , então somando  $\bar{Ric}(n, n)$  em ambos os lados de (1.12), concluímos que

$$\bar{R} = R + 2\bar{Ric}(n, n) + |B|^2 - H^2,$$

onde  $|B|^2 = \sum_{i,j=1}^n |B(E_i, E_j)|^2$ . □

## 1.6 Mudanças conformes de métrica

O objetivo dessa seção é apresentar algumas relações existentes com respeito a métricas conformes. Veremos como a conexão de Levi-Civita, o gradiente, o divergente, o laplaciano e o tensor de Ricci mudam em uma variedade Riemanniana sob uma mudança conforme da métrica. Tais relações serão de grande importância no próximo capítulo, a maioria das demonstrações serão omitidas mas podem ser encontradas em [11].

**Definição 1.20.** *Duas métricas  $g$  e  $\bar{g}$  são ditas conformes, se existe uma função  $h \in C^\infty(M)$  tal que  $\bar{g} = e^{2h}g$ .*

No restante dessa seção,  $(M, g)$  é uma variedade Riemanniana de dimensão  $n$ , e  $\bar{g} = e^{2h}g$ , com  $h \in C^\infty(M)$ , outra métrica em  $M$  conforme a  $g$ . Objetos geométricos com uma barra superior se referirão a métrica  $\bar{g}$ , enquanto os objetos correspondentes sem barra se referirão a  $g$ .

**Proposição 1.23.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $\bar{g} = e^{2h}g$ , com  $h \in C^\infty(M)$ .  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave, então*

$$\bar{\nabla} f = e^{-2h} \nabla f.$$

*Demonstração.* Seja  $\{e_1, \dots, e_n\}$  um referencial local em  $U \subset M$ , ortonormal com relação a métrica  $g$ , é imediato verificar que  $\{e^{-h}e_1, \dots, e^{-h}e_n\}$  é um referencial ortonormal com relação a  $\bar{g}$ . Daí, pela Proposição 1.3, temos

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}f &= \sum_{j=1}^n e^{-h}e_j(f)e^{-h}e_j \\ &= e^{-2h} \sum_{j=1}^n e_j(f)e_j \\ &= e^{-2h}\nabla f.\end{aligned}$$

□

A proposição a seguir, mostra a relação entre as conexões de Levi-Civita de  $g$  e  $\bar{g}$ .

**Proposição 1.24.** *Sejam  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $\bar{g} = e^{2h}g$ ,  $h \in C^\infty(M)$ . Se  $\nabla$  e  $\bar{\nabla}$  denotam respectivamente as conexões de Levi-Civita de  $g$  e  $\bar{g}$ , então para todos  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , temos que*

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X(h)Y + Y(h)X - g(X, Y)\nabla h, \quad (1.13)$$

onde  $\nabla h$  denota o gradiente de  $h$  na métrica  $g$ .

O próximo resultado mostra como a divergência de um campo muda com a mudança conforme de métrica.

**Proposição 1.25.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $\bar{g} = e^{2h}g$ , com  $h \in C^\infty(M)$ . Para  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , temos*

$$\bar{\operatorname{div}} X = \operatorname{div} X + nX(h). \quad (1.14)$$

*Demonstração.* Seja  $\{e_1, \dots, e_n\}$  um referencial em uma vizinhança  $U \subset M$  ortonormal em relação a  $g$ . Pondo  $\bar{e}_i = e^{-h}e_i$ , já vimos que  $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$  é um referencial ortonormal em relação a  $\bar{g}$ . Dai, temos que

$$\bar{\operatorname{div}} X = \sum_{j=1}^n \bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{e}_j} X, \bar{e}_j) = \sum_{j=1}^n e^{2h}g(\bar{\nabla}_{e^{-h}e_j} X, e^{-h}e_j) = \sum_{j=1}^n g(\bar{\nabla}_{e_j} X, e_j),$$

segue de (1.16), que

$$\begin{aligned}
 \overline{\operatorname{div}} X &= \sum_{j=1}^n g(\nabla_{e_i} X + e_i(h)X + X(h)e_i - g(e_i, X)\nabla h, e_i) \\
 &= \sum_{j=1}^n g(\nabla_{e_i} X, e_i) + \sum_{j=1}^n e_i(h)g(X, e_i) + \\
 &\quad + \sum_{j=1}^n X(h)g(e_i, e_i) - \sum_{j=1}^n g(e_i, X)g(\nabla h, e_i) \\
 &= \operatorname{div} X + nX(h).
 \end{aligned}$$

□

**Corolário 1.4.** *Das proposições anteriores, se  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave, então*

$$\overline{\Delta} f = e^{-2h}(\Delta f + (n-2)g(\nabla f, \nabla h)). \quad (1.15)$$

O próximo e último resultado dessa seção mostra a relação entre as curvaturas de Ricci com respeito a duas métricas conformes.

**Proposição 1.26.** *Se  $\operatorname{Ric}$  e  $\overline{\operatorname{Ric}}$  denotam respectivamente as curvaturas de Ricci de  $M$  com respeito às métricas  $g$  e  $\overline{g} = e^{2h}g$ , então*

$$\overline{R}_{ij} = R_{ij} - (n-2)(\nabla^2 h)_{ij} + (n-2)\nabla_i h \nabla_j h - (\Delta h + (n-2)|\nabla h|^2)g_{ij}. \quad (1.16)$$

*Demonstração.* Veja Proposição 1.8, página 25 de [44].

□

## 1.7 Alguns resultados sobre equações diferenciais parciais

Nessa seção definiremos o conceito de operador elíptico e enunciaremos alguns resultados envolvendo esse tipo de operador. Para escrita dessa seção tivemos como referência [11] e [25].

Seja  $M$  uma variedade Riemanniana com bordo, escreveremos  $u \in C^\infty(M)$  para denotar que  $u \in C^\infty(M) \cap C^0(\partial M)$ .

Um operador

$$\begin{aligned}
 L : C^\infty(M) &\rightarrow C^\infty(M) \\
 u &\mapsto L(u),
 \end{aligned}$$

é dito um *operador diferenciável linear de segunda ordem*, se quando escrito em um sistema de coordenadas locais  $(\mathbf{U}, \mathbf{x})$ , é expresso da forma

$$L\mathbf{u} = \sum_{i,j=1}^n \mathbf{a}_{ij} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n \mathbf{b}_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} + \mathbf{c}\mathbf{u},$$

onde  $\mathbf{a}_{ij}$ ,  $\mathbf{b}_i$ ,  $\mathbf{c} : \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  são funções contínuas e limitadas, com  $\mathbf{a}_{ij} = \mathbf{a}_{ji}$ , para todo  $1 \leq i \leq n$ .

O operador diferencial linear  $L$  é dito *elíptico em um ponto*  $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ , se a matriz coeficiente  $(\mathbf{a}_{ij}(\mathbf{x}))$  for positiva definida;  $L$  é *elíptico em*  $\mathbf{U}$  se for elíptico para todo  $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ . Pelo Teorema Espectral, um operador  $L$  como acima é elíptico em  $\mathbf{x} \in \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^n$  se, e só se, os autovalores da matriz  $(\mathbf{a}_{ij}(\mathbf{x}))$  forem todos positivos. Ademais, se  $\lambda(\mathbf{x})$  e  $\Lambda(\mathbf{x})$  são respectivamente o menor e o maior de tais autovalores, então

$$0 < \lambda(\mathbf{x})|\xi(\mathbf{x})|^2 \leq \sum_{i,j} \mathbf{a}_{ij}(\mathbf{x})\xi_i\xi_j \leq \Lambda(\mathbf{x})|\xi|^2,$$

para todo  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ .  $L$  é dito *estritamente elíptico em*  $\mathbf{U}$  se, para todo  $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ ,  $\lambda(\mathbf{x}) > \lambda_0 > 0$  para alguma constante  $\lambda_0$ . Se  $\frac{\Lambda}{\lambda}$  for limitado em  $\mathbf{U}$ , dizemos que  $L$  é *uniformemente elíptico em*  $\mathbf{U}$ .

Para o que segue, um campo de operadores (lineares) em uma variedade Riemanniana  $(M, g)$  é uma coleção de operadores lineares  $\Phi_p : T_p M \rightarrow T_p M$ , que varia suavemente com  $p \in M$  no seguinte sentido: para todo campo suave de vetores  $X$  em  $M$ , o campo  $p \mapsto \Phi_p(X_p)$  é também suave em  $M$ . Um campo  $\Phi$  como acima é *auto-adjunto* (resp. *positivo definido*) se  $\Phi_p$  for auto-adjunto (resp. positivo definido) para todo  $p \in M$ .

**Proposição 1.27.** *Se  $(M^n, g)$  é uma variedade Riemanniana e  $\Phi$  é um campo auto-adjunto de operadores lineares sobre  $M$ , então o operador  $L : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  dado por*

$$Lf = \operatorname{div}(\Phi \nabla f),$$

*é um operador diferenciável linear de segunda ordem em  $M$ . Além disso,  $L$  é elíptico em  $p \in M$ , se, e só se,  $\Phi_p : T_p M \rightarrow T_p M$  for positivo definido.*

*Demonstração.* Veja Proposição 4.5 em [11]. □

**Exemplo 1.4.** *O operador laplaciano  $\Delta : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  é um operador diferenciável linear elíptico de segunda ordem.*

*Demonstração.* Temos que  $\Delta f = \operatorname{div}(\Phi \nabla f)$ , onde  $\Phi$  é o campo de operadores identidade, logo auto-adjunto e positivo definido.  $\square$

O teorema a seguir é conhecido como Princípio do Máximo Fraco.

**Teorema 1.3.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana compacta com bordo. Suponhamos que*

$$c \equiv 0 \text{ e } Lu \geq 0 (\leq 0), \text{ em } M,$$

com  $u \in C^\infty(M)$ . Então o máximo (mínimo) de  $u$  é atingido sobre o  $\partial M$ , ou seja,

$$\max_M u = \max_{\partial M} u \quad (\min_M u = \min_{\partial M} u).$$

**Corolário 1.5.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana compacta com bordo. Seja  $\Omega \subset M$ , suponhamos que em  $\Omega$*

$$Lf + cf \geq 0 (\leq 0), c \leq 0,$$

com  $f \in C^\infty(M)$ . Então

$$\max_\Omega f \leq \max_{\partial\Omega} f^+ \quad (\min_\Omega f \geq \min_{\partial\Omega} f^-),$$

onde  $f^+ = \max\{f, 0\}$  e  $f^- = \min\{f, 0\}$ .

O teorema a seguir é conhecido como Princípio do Máximo de Hopf ou simplesmente Princípio do Máximo.

**Teorema 1.4.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana conexa,  $\Phi$  um campo auto-adjunto e positivo definido de operadores lineares em  $M$ , e  $c$  uma função suave em  $M$ . Defina o operador  $L : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  por*

$$Lf = \operatorname{div}(\Phi \nabla f) + cf,$$

e seja  $f \in C^\infty(M)$ , tal que  $Lf \geq 0$  em  $M$ . Se  $c = 0$  e  $f$  atinge um máximo local em  $M \setminus \partial M$ , ou  $c \leq 0$  e  $f$  atinge um máximo local não negativo em  $M \setminus \partial M$ , então  $f$  é constante em  $M$ .

*Demonstração.* Veja corolário 4.7 de [11].  $\square$

## 1.8 Produtos warped

Nessa seção, introduziremos o conceito de *produto warped Riemanniano* e estabeleceremos algumas fórmulas referentes ao tensor de curvatura desse ambiente. Tais fórmulas serão importante no próximo capítulo onde exibiremos alguns exemplos de triplas estáticas.

**Definição 1.21** (Produto warped Riemanniano). *Sejam  $(B, g_B = \langle \cdot, \cdot \rangle_B)$  e  $(F, g_F = \langle \cdot, \cdot \rangle_F)$  variedades Riemannianas e seja  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave e positiva. O produto warped  $M = B \times_f F$  é a variedade produto munida com a métrica*

$$g = \pi_B^*(g_B) + (f \circ \pi_B)^2 \pi_F^*(g_F),$$

onde  $\pi_B$  e  $\pi_F$  são as projeções de  $M$  sobre  $B$  e  $F$ , nesta ordem. Explicitamente, se  $u$  e  $v$  são tangentes a  $M = B \times F$  em  $r = (p, q)$ , então

$$\langle u, v \rangle^r = \langle d\pi_B^r(u), d\pi_B^r(v) \rangle_B^p + f^2(p) \langle d\pi_F^r(u), d\pi_F^r(v) \rangle_F^q. \quad (1.17)$$

A variedade  $B$  é dita base de  $M = B \times_f F$ , a variedade  $F$  é chamada de fibra e a função  $f$  é denominada função warping.

Veja que se  $f \equiv 1$ , então  $B \times_f F$  é simplesmente a variedade produto. Assim como no caso de uma variedade produto, as fibras  $\{p\} \times F = \pi_B^{-1}(p)$  e as folhas  $B \times \{q\} = \pi_F^{-1}(q)$  são subvariedades de  $M$ .

**Observação 1.4.** *Na métrica warped temos que para cada ponto  $r = (p, q) \in M$ , a folha  $B \times \{q\}$  e a fibra  $\{p\} \times M$  são ortogonais em  $r = (p, q)$ . Com efeito, dados  $v, w \in T_r(B \times F)$  tal que  $v \in T_r(B \times \{q\}) \cong T_p B$  e  $w \in T_r(\{p\} \times F) \cong T_q F$  por (1.17), temos que*

$$\langle v, w \rangle^r = \langle d\pi_B^r(v), d\pi_B^r(w) \rangle_B^p + f^2(p) \langle d\pi_F^r(v), d\pi_F^r(w) \rangle_F^q,$$

como  $\pi_B$  é constante nas fibras  $\{p\} \times F$  e  $\pi_F$  é constante nas folhas  $B \times \{q\}$ , segue que  $d\pi_B^r(w) = 0$  e  $d\pi_F^r(v) = 0$ , logo  $\langle v, w \rangle^r = 0$ .

Vetores tangentes às folhas serão chamados de *horizontais*, vetores tangentes às fibras serão chamados de *verticais*. Pela observação anterior, um vetor horizontal é ortogonal a uma fibra assim como um vetor vertical é ortogonal à uma folha. Um campo é dito *horizontal* se for composto apenas por vetores horizontais. Complementarmente, um campo é dito *vertical* se for composto apenas por vetores verticais. Denotaremos por **nor**

a projeção ortogonal de  $T_r M$ ,  $r = (p, q) \in M$ , sobre seu subespaço horizontal  $T_r(B \times \{q\}) \cong T_p B$  e por **tan** a projeção sobre o subespaço vertical  $T_r(\{p\} \times F) \cong T_q F$ . Pela observação 1.4, temos que

$$(T_r(\{p\} \times F))^\perp = T_r(B \times \{q\}).$$

Portanto, para campos de vetores verticais  $V, W$  em  $M$ , a fórmula

$$B(V, W) = \mathbf{nor} \nabla_V W,$$

em que  $\nabla$  é a conexão de Levi-Civita de  $M$ , fornece a segunda forma fundamental de todas as fibras.

Relembrando a noção de levantamento de campo de vetores, dizemos que  $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(B \times F)$  é o levantamento de  $X \in \mathfrak{X}(B)$ , se  $\tilde{X}$  é o único elemento de  $\mathfrak{X}(B \times F)$  tal que está  $\pi_B$ -relacionado a  $X$  e  $\pi_F$ -relacionado ao campo vetorial zero em  $F$ . Denotaremos o conjunto de todos os *levantamentos horizontais*  $\tilde{X}$  por  $\mathcal{L}(B)$ . Da mesma forma, usando a projeção  $\pi_F$ ,  $\mathcal{L}(F)$  denotará o conjunto de todos os *levantamentos verticais*.

**Lema 1.4.** *No produto warped  $M = B \times_f F$  se  $X, Y \in \mathcal{L}(B)$  e  $U, V \in \mathcal{L}(F)$  então:*

(i)  $[X, Y] \in \mathcal{L}(B)$ .

(ii)  $[X, U] = 0$ .

(iii)  $[U, V] \in \mathcal{L}(F)$ .

*Demonstração.* Veja corolário 1.44 de [42]. □

**Lema 1.5.** *No produto warped  $M = B \times_f F$ , se  $h \in C^\infty(B)$  então o gradiente de  $h \circ \pi_B$  coincide com o levantamento horizontal do gradiente de  $h$  em  $B$ .*

*Demonstração.* Primeiramente mostraremos que  $\nabla(h \circ \pi_B)$  é horizontal. Seja  $v$  um vetor vertical então

$$\langle \nabla(h \circ \pi_B), v \rangle = v(h \circ \pi_B) = d\pi_B(v)(h) = 0,$$

pois  $d\pi_B(v) = 0$ . Agora considere  $x$  um vetor horizontal, logo

$$\langle d\pi_B(\nabla(h \circ \pi_B)), d\pi_B(x) \rangle_B = \langle \nabla(h \circ \pi_B), x \rangle = x(h \circ \pi_B) = d\pi_B(x)h = \langle \nabla^B h, d\pi_B(x) \rangle_B,$$

assim, em cada ponto de  $M$ ,  $d\pi_B(\nabla(h \circ \pi_B)) = \nabla^B h$ , ou seja,  $\text{grad}(h \circ \pi_B)$  é  $\pi_B$ -relacionado a  $\text{grad} h$  em  $B$ . □

**Observação 1.5.** *Devido o resultado acima, desde que não haja confusão, simplificaremos a notação escrevendo  $\mathfrak{h}$  e  $\text{grad } \mathfrak{h}$  em lugar de  $\mathfrak{h} \circ \pi_B$  e  $\text{grad}(\mathfrak{h} \circ \pi_B)$  respectivamente. Igualmente com a intenção de simplificar a notação escreveremos  $X$  para designar tanto um campo de vetores  $X \in \mathfrak{X}(B)$  quanto seu levantamento  $\tilde{X} \in \mathcal{L}(B)$ , assim como denotaremos por  $Y$  tanto  $Y \in \mathfrak{X}(F)$  quanto seu levantamento  $\tilde{Y} \in \mathcal{L}(F)$ .*

**Proposição 1.28.** *Se  $X, Y \in \mathcal{L}(B)$  e  $V, W \in \mathcal{L}(F)$  então :*

(1)  $\nabla_X Y$  é o levantamento de  $\nabla_X^B Y$  em  $B$ , ou seja,  $\nabla_X Y \in \mathcal{L}(B)$ .

(2)  $\nabla_X V = \nabla_V X = \frac{X(f)}{f} V$ .

(3)  $\text{nor } \nabla_V W = B(V, W) = -\frac{\langle V, W \rangle}{f} \nabla(f)$ .

*Demonstração.* Para a prova de (1) veja Proposição 35 de [42]. Provaremos (2) e (3). Pelo item (ii) do lema anterior, temos que  $[X, V] = 0$ , logo  $\nabla_X V = \nabla_V X$ . Tais campos são verticais pois como  $\langle V, Y \rangle = 0$ , então  $\langle \nabla_X V, Y \rangle = -\langle V, \nabla_X Y \rangle$ , daí por (1) temos que  $\nabla_X Y \in \mathcal{L}(B)$ , logo  $\langle \nabla_X V, Y \rangle = -\langle V, \nabla_X Y \rangle = 0$ . Pela fórmula de Kozul, temos que

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X V, W \rangle &= X\langle V, W \rangle + V\langle X, W \rangle - W\langle X, V \rangle - \langle X, [V, W] \rangle - \langle V, [X, W] \rangle + \langle W, [X, V] \rangle \\ &= X\langle V, W \rangle. \end{aligned}$$

Como  $V, W$  são  $\pi_B$ -relacionados ao campo nulo em  $B$ , pela definição do tensor métrico warped temos  $\langle V, W \rangle_{(p, q)} = f^2(p) \langle V_q, W_q \rangle_F$ , escrevendo  $f$  em lugar de  $f \circ \pi_B$ , segue que

$$\langle V, W \rangle = f^2(\langle V, W \rangle_F \circ \pi_F),$$

a expressão entre parênteses do lado direito da última igualdade é constante nas folhas, as quais  $X$  é tangente. Logo

$$\begin{aligned} X\langle V, W \rangle &= X[f^2(\langle V, W \rangle_F \circ \pi_F)] \\ &= 2fXf(\langle V, W \rangle_F \circ \pi_F) \\ &= 2\left(\frac{Xf}{f}\right)\langle V, W \rangle, \end{aligned}$$

daí usando o fato que  $2\langle \nabla_X V, W \rangle = X\langle V, W \rangle$ , concluímos que  $\nabla_X V = \frac{Xf}{f} V$ , provando assim (2).

Para prova de (3), como  $\langle W, X \rangle = 0$ , então  $\langle \nabla_V W, X \rangle = -\langle W, \nabla_V X \rangle$ , por (2) temos

$$\begin{aligned} \langle \nabla_V W, X \rangle &= -\langle W, \nabla_V X \rangle \\ &= -\langle W, \frac{Xf}{f} V \rangle \\ &= \frac{(Xf)}{f} \langle V, W \rangle. \end{aligned}$$

Pelo Lema 1.5,  $Xf = \langle \nabla f, X \rangle$ , em  $M$  como em  $B$ . Assim, para todo  $X \in \mathcal{L}(B)$ ,

$$\langle \nabla_V W, X \rangle = -\left\langle \frac{\langle V, W \rangle}{f} \text{grad } f, X \right\rangle.$$

□

A proposição a seguir apresenta duas propriedades do tensor de curvatura de  $M = B \times_f F$ .

**Proposição 1.29.** *Seja  $M = B \times_f F$  um produto warped com tensor de curvatura  $R$ . Se  $X, Y, Z \in \mathcal{L}(B)$  e  $U, V, W \in \mathcal{L}(F)$ , então:*

$$(1) R(X, Y)V = R(V, W)X = 0.$$

$$(2) R(X, V)W = \frac{\langle V, W \rangle}{f} \nabla_X \nabla f.$$

*Demonstração.* Veja proposição 42 de [42].

□

Agora, considere a curvatura de Ricci de  $M$  que denotaremos por  $\text{Ric}$ , escrevendo  $\text{Ric}^B$  para o levantamento (pullback por  $\pi_B$ ) da curvatura de Ricci de  $B$  e  $\text{Ric}^F$  para o levantamento (pullback por  $\pi_F$ ) da curvatura de Ricci de  $F$ , o resultado a seguir mostra como a curvatura de Ricci do produto warped  $M = B \times_f F$  depende das curvaturas de Ricci de  $B$  e  $F$  e da função warping  $f$ .

**Proposição 1.30.** *Em um produto warped  $M = B \times_f F$  com  $d := \dim F > 1$ . Sejam  $X$  e  $Y$  horizontais e  $V, W$  verticais. Então*

$$(1) \text{Ric}(X, Y) = \text{Ric}^B(X, Y) - \frac{d}{f} \nabla f(X, Y).$$

$$(2) \text{Ric}(X, V) = 0.$$

$$(3) \text{Ric}(V, W) = \text{Ric}^F(V, W) - \langle V, W \rangle f^*, \text{ onde}$$

$$f^* = \frac{\Delta f}{f} + (d-1) \frac{\langle V, W \rangle}{f^2},$$

e  $\Delta f$  é o laplaciano de  $f$  em  $B$ .

*Demonstração.* Veja pág.211 de [42].

□

## 1.9 Medida de Hausdorff

Dedicaremos essa seção, a atenção para um breve resumo sobre a noção de medida de Hausdorff. Em muitos problemas matemáticos, é necessário calcular o “tamanho” de um conjunto. Essa noção, no entanto, depende da dimensão deste conjunto. Por exemplo, para medir uma curva calcula-se o seu comprimento, enquanto que superfície é medida pela sua área. Intuitivamente, comprimento é uma medida unidimensional e área é uma medida bidimensional. A medida de Hausdorff, que será denotada nesse trabalho por  $\mathcal{H}^n$ , generaliza essa noção de medida  $n$ -dimensional. Assim, por exemplo,  $\mathcal{H}^1$  calcula comprimentos,  $\mathcal{H}^2$  estima áreas, etc. Comparada com a medida de Lebesgue definida em  $\mathbb{R}^n$ , a medida de Hausdorff tem a vantagem de poder estimar um conjunto na dimensão correta. Por exemplo, qualquer superfície regular  $S$  em  $\mathbb{R}^3$  tem medida de Lebesgue nula, visto que o seu volume é zero. Esta é uma resposta que na maioria das vezes não é interessante, já que estamos mais preocupados na área de  $S$  que pode ser obtida por  $\mathcal{H}^2$ . Isso não impede, no entanto, que se calcule a medida de Hausdorff de um conjunto com uma dimensão diferente da esperada. Podemos calcular  $\mathcal{H}^3(S)$  que é zero, bem como  $\mathcal{H}^1(S)$  que é infinita. Para entender essa última, basta observar que é possível colocar dentro de  $S$  curvas com comprimento arbitrariamente grandes, ou seja,  $S$  tem “comprimento” infinito. Constatamos assim, que a medida  $\mathcal{H}^n(S)$  é nula quando  $n > \dim S$  e é infinita quando  $n < \dim S$ .

Para definirmos a medida de Hausdorff  $n$ -dimensional, previamente precisaremos de três definições auxiliares:

**Definição 1.22 (Diâmetro).** *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico. O diâmetro de um conjunto  $S \subset X$  é definido por*

$$\text{diam } S = \sup_{x, y \in S} d(x, y),$$

*isto é, a maior distância que separa os pontos de  $S$ .*

**Definição 1.23 ( $\delta$ -Cobertura).** *Dado  $E \subset X$ , uma  $\delta$ -cobertura de  $E$  é uma coleção enumerável de conjuntos  $\{S_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  (não necessariamente abertos) de diâmetro no máximo  $\delta > 0$ , ou seja,*

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j.$$

**Definição 1.24 (Medida de Hausdorff n-dimensional).** *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico.*

*Dado  $n$  um número positivo, define-se  $\mathcal{H}^n : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  como o seguinte limite*

$$\mathcal{H}^n(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^n(E),$$

sendo

$$\mathcal{H}_\delta^n(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } S_i)^n; \cup_{i=1}^{\infty} S_i \supseteq E, \text{diam } S_i < \delta \right\},$$

$\mathcal{P}(X)$  o conjunto das partes de  $X$  e  $E \subset X$ . Denominados  $\mathcal{H}^n(E)$  a medida de Hausdorff  $n$ -dimensional de  $E$ .

**Proposição 1.31 (Propriedade de escala).** *Se  $E \subset \mathbb{R}^n$  e  $\lambda > 0$ , então*

$$\mathcal{H}^n(\lambda E) = \lambda^n \mathcal{H}^n(E),$$

onde  $\lambda E = \{\lambda x; x \in E\}$ , i.e, o conjunto  $E$  multiplicado por um fator  $\lambda$ .

*Demonstração.* Se  $\{S_i\}$  for uma  $\delta$ -cobertura de  $E$ , então  $\{\lambda S_i\}$  é uma  $\lambda\delta$ -cobertura de  $\lambda E$ .

Reciprocamente, se  $\{V_i\}$  for uma  $\lambda\delta$ -cobertura de  $\lambda E$ , então  $\{\frac{1}{\lambda}V_i\}$  é uma  $\delta$ -cobertura de

$E$ . Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^n(E) &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda \text{diam } S_i)^n; \cup_{i=1}^{\infty} S_i \supseteq E, \text{diam } S_i < \delta \right\} \\ &= \inf \left\{ \lambda^n \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } S_i)^n; \cup_{i=1}^{\infty} S_i \supseteq E, \text{diam } S_i < \delta \right\} \\ &= \lambda^n \mathcal{H}_\delta^n(E). \end{aligned}$$

Fazendo  $\delta \rightarrow 0$ , obtemos  $\mathcal{H}^n(\lambda E) = \lambda^n \mathcal{H}^n(E)$ . □

# Capítulo 2

## Métricas estáticas

Nesse capítulo estabeleceremos os principais conceitos a serem usados no restante desse trabalho. Nessa primeira seção iremos definir o conceito de métrica estática e mostrar sua relação com a Teoria da Relatividade Geral criada por Einstein em 1915, como também suas propriedades. Na Seção 2.2 apresentaremos os principais modelos de métricas estáticas com constante cosmológica positiva, e na Seção 2.3 introduziremos a importante noção de gravidade superficial, e a partir daí exporemos o conceito de massa virtual, que constitui o conteúdo do teorema principal desse trabalho.

### 2.1 Definição e propriedades

**Definição 2.1.** *Uma variedade Riemanniana conexa  $(M^n, g)$  com  $n \geq 3$  e bordo compacto suave  $\partial M$  (possivelmente não vazio) é dita ser estática, se existe uma função não negativa  $u \in C^\infty(M)$ , satisfazendo*

$$-(\Delta_g u)g + \nabla_g^2 u - u \text{Ric}_g = 0, \quad (2.1)$$

em  $M \setminus \partial M$ , e  $\partial M = u^{-1}(0)$  (se  $\partial M \neq \emptyset$ ). Nesse caso, a tripla  $(M, g, u)$  é chamada de tripla estática, ou solução estática ou simplesmente métrica estática e a função  $u$  é chamada de potencial estático.

Métricas estáticas aparecem no contexto de Relatividade Geral através das equações de Einstein. De fato, mostraremos que a equação

$$-(\Delta_g u)g + \nabla_g^2 u - u \text{Ric}_g = 0,$$

está relacionada a espaços-tempo estáticos em Relatividade Geral. Do ponto de vista físico,

$$\mathcal{V} = \mathbb{R} \times M, \quad \bar{g} = -u^2 dt^2 + g,$$

onde  $(M, g)$  é uma variedade Riemanniana e  $u$  é uma função positiva sobre  $M$ , representa uma variedade Lorentziana de dimensão  $n$ . Neste caso, dizemos que  $(\mathcal{V}, \bar{g})$  é um *vacuum* espaço-tempo estático com *constante cosmológica*  $\Lambda \in \mathbb{R}$ , se ela satisfaz à equação de campo de Einstein

$$\text{Ric}_{\bar{g}} - \frac{R_{\bar{g}}}{2} \bar{g} + \Lambda \bar{g} = 0. \quad (2.2)$$

Tomando o traço na equação acima temos

$$R_{\bar{g}} - \frac{R_{\bar{g}}}{2}(n+1) + \Lambda(n+1) = 0,$$

daí segue que  $R_{\bar{g}} = 2 \frac{(n+1)}{n-1} \Lambda = 2 \frac{(n-1+2)}{n-1} \Lambda$ . Logo,

$$R_{\bar{g}} = 2\Lambda + \frac{4}{n-1} \Lambda. \quad (2.3)$$

Agora substituindo (2.3) em (2.2), obtemos

$$\text{Ric}_{\bar{g}} = \frac{2\Lambda}{n-1} \bar{g}. \quad (2.4)$$

Em particular, as equações de campo de Einstein são equivalentes a exigir que a métrica  $\bar{g}$  seja Einstein. Afirmamos que a equação de Einstein (2.4) pode ser reescrita em termos de  $u$  e  $g$  como

$$u \text{Ric}_g = \nabla_g^2 u + \frac{2\Lambda}{n-1} u g, \quad (2.5)$$

$$\Delta_g u = -\frac{2\Lambda}{n-1} u. \quad (2.6)$$

De fato, usando as fórmulas para o tensor de Ricci do produto warped  $(M \times_u \mathbb{R}, \bar{g})$ , temos que

$$\begin{aligned} \text{Ric}_{\bar{g}}(X, Y) &= \text{Ric}_g(X, Y) - \frac{\nabla^2 u(X, Y)}{u}; \\ \text{Ric}_{\bar{g}}(X, V) &= 0; \\ \text{Ric}_{\bar{g}}(V, W) &= -\bar{g}(V, W) \frac{\Delta_g u}{u}; \end{aligned}$$

onde  $X, Y$  são tangentes a  $M$  e  $W, V$  são tangentes a fibra  $\mathbb{R}$ . Agora, basta substituir (2.4) nas equações acima para provar o afirmado. Tomando o traço na equação (2.5) e substituindo em (2.6), obtemos a seguinte relação

$$R_g = 2\Lambda, \quad (2.7)$$

donde vem a motivação para definição 2.1, pois as equações (2.5) e (2.6) onde  $R_g = 2\Lambda$  são equivalentes a equação (2.1). A recíproca também é verdadeira, ou seja, se  $(M, g, u)$  é uma métrica estática, então a métrica de Lorentzian

$$\bar{g} = -u^2 dt^2 + g, \text{ em } X = \mathbb{R} \times (M - \partial M),$$

é de Einstein. De fato, aplicando as fórmulas do tensor de Ricci do produto warped  $(M \times_u \mathbb{R}, \bar{g})$ , com  $u \in \text{int}M$ ,  $X, Y$  tangentes à  $M$  e  $V, W$  tangentes à  $\mathbb{R}$ , temos que

$$\begin{aligned} \text{Ric}_{\bar{g}}(X, Y) &= \text{Ric}_g - \frac{\nabla^2 u(X, Y)}{u} \\ \text{Ric}_{\bar{g}}(X, V) &= 0 \\ \text{Ric}_{\bar{g}}(V, W) &= -\bar{g}(V, W) \frac{\Delta_g u}{u}, \end{aligned}$$

pois  $d = 1$  e  $\text{Ric}^{\mathbb{R}}(V, W) = 0$ . Como

$$-(\Delta_g u)g + \nabla_g^2 u - u \text{Ric}_g = 0,$$

pois  $(M, g, u)$  é uma métrica estática, segue que

$$\begin{aligned} \text{Ric}_{\bar{g}}(X, Y) &= -\frac{\Delta_g u}{u} g(X, Y) = -\frac{\Delta_g u}{u} \bar{g}(X, Y) \\ \text{Ric}_{\bar{g}}(X, V) &= 0 = \bar{g}(X, V) \\ \text{Ric}_{\bar{g}}(V, W) &= -\frac{\Delta_g u}{u} \bar{g}(V, W), \end{aligned}$$

tomando o traço na equação (2.1) obtemos que  $\Delta_g u = \frac{R_g}{1-n} u$ . Portanto  $\bar{g}$  é de Einstein com  $\text{Ric}_{\bar{g}} = \frac{R_g}{n-1} \bar{g}$ .

Assim, provamos o seguinte resultado de Corvino (2000), que mostra a relação de métricas estáticas com os espaços-tempos estáticos em Relatividade Geral.

**Proposição 2.1.** *Seja  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana e  $u \in C^\infty(M)$  uma função não negativa. Então  $(M^n, g, u)$  é uma métrica estática, se e somente se, a métrica produto  $\bar{g} = -u^2 dt^2 + g$  for de Einstein. (Note que em  $\partial M = u^{-1}(0)$ , a métrica  $\bar{g}$  é degenerada).*

Devido a esse resultado, a definição 2.1 e a definição abaixo são equivalentes.

**Definição 2.2.** *Uma variedade Riemanniana conexa  $(M^n, g)$ , com  $n \geq 3$  e bordo suave  $\partial M$  (possivelmente não vazio) é dita ser estática, se existe uma função não negativa  $u \in C^\infty(M)$  satisfazendo*

$$\begin{cases} u \text{Ric}_g = \nabla^2 u + \frac{2\Lambda}{n-1} u g, & \text{em } M, \\ \Delta_g u = -\frac{2\Lambda}{n-1} u, & \text{em } M, \end{cases} \quad (2.8)$$

e  $u^{-1}(0) = \partial M$ , onde  $\Lambda \in \mathbb{R}$  é uma constante chamada constante cosmológica.

**Observação 2.1.** Quando  $\Lambda \neq 0$  é possível tomar um scalign da métrica  $g$  de modo que  $|\Lambda| = \frac{n(n-1)}{2}$ . O caso de nosso interesse é o caso em que  $\Lambda > 0$ , i.e.,  $\Lambda = \frac{n(n-1)}{2}$ , e de acordo com (2.7) tais métricas estáticas possuem curvatura escalar  $R \equiv n(n-1)$ . Através dessa normalização para constante cosmológica, somos levados a estudar o seguinte sistema.

$$\left\{ \begin{array}{ll} u\text{Ric}_g = \nabla_g^2 u + nu g, & \text{em } M \\ \Delta_g u = -nu, & \text{em } M \\ u > 0, & \text{em } M - \partial M \\ u = 0, & \text{em } \partial M \end{array} \right. \quad \text{Com } M \text{ compacta e } R \equiv n(n-1). \quad (2.9)$$

O sistema acima é equivalente a (2.8) com algumas suposições tornadas mais explícitas.

A seguir, provaremos algumas propriedades básicas de métricas estáticas.

**Proposição 2.2.** Seja  $(M^n, g, u)$  uma tripla estática, então:

- (a) A quantidade  $|\nabla_g u|$  é localmente constante e positiva em  $\partial M$ .
- (b) 0 é valor regular de  $u$ .
- (c) O bordo  $\partial M$  é uma hipersuperfície totalmente geodésica em  $M$ .
- (d) A curvatura escalar  $R_g$  é constante em  $M$ .

*Demonstração.* (a) Como  $(M, g, u)$  é uma métrica estática, então

$$-(\Delta_g u)g + \nabla_g^2 u - u\text{Ric}_g = 0,$$

ou equivalentemente,

$$\left\{ \begin{array}{l} u\text{Ric}_g = \nabla_g^2 u + \frac{2\Lambda}{n-1} u g, \\ \Delta_g u = -\frac{2\Lambda}{n-1} u. \end{array} \right.$$

Daí, obtemos que

$$\nabla_g^2 u = u \left( \text{Ric}_g - \frac{2\Lambda}{n-1} g \right),$$

como  $u \equiv 0$  em  $\partial M$  segue que  $\nabla_g^2 u = 0$  em  $\partial M$ . Agora, dado  $X \in \mathfrak{X}(\partial M)$ , temos que

$$X|\nabla_g u|^2 = X\langle \nabla_g u, \nabla_g u \rangle_g = 2\langle (\nabla_g^2 u)X, \nabla_g u \rangle_g = 0,$$

donde,

$$\langle \nabla_g |\nabla_g u|^2, X \rangle_g = X |\nabla_g u|^2 = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\partial M),$$

isso implica que  $\nabla_g |\nabla_g u|^2 = 0$ , logo  $|\nabla_g u|$  é localmente constante em  $\partial M$ . Agora mostraremos que  $|\nabla_g u|$  é positivo em  $\partial M$ . Suponha que,  $\nabla_g u(\mathbf{p}) = 0$  para algum  $\mathbf{p} \in \Sigma \subset \partial M$ , e considere  $\gamma : [0, \mathbf{a}] \rightarrow M$  uma geodésica não constante, normalizada que parte do ponto  $\mathbf{p}$ , tal que  $\gamma(t) \in \text{int } M$  para  $0 < t < \epsilon < \mathbf{a}$ . Considerando  $h(t) = u(\gamma(t))$  e  $\theta(t) = \text{Ric}(\gamma'(t), \gamma'(t)) - \frac{2\Lambda}{n-1}g(\gamma'(t), \gamma'(t))$ , temos que  $h'(t) = \langle \nabla_g u(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$ , derivando  $h'$ , e usando o fato de  $\gamma$  ser geodésica, obtemos

$$\begin{aligned} h''(t) &= \langle \nabla_g^2 u(\gamma(t))(\gamma'(t)), \gamma'(t) \rangle_g \\ &= \nabla^2(u \circ \gamma)(t)(\gamma'(t), \gamma'(t)) \\ &= u(\gamma(t))\text{Ric}_g(\gamma'(t), \gamma'(t)) - u(\gamma(t))\frac{2\Lambda}{n-1}g(\gamma'(t), \gamma'(t)) \\ &= h(t)\theta(t), \end{aligned}$$

onde na terceira igualdade usamos a primeira equação do sistema acima. Por outro lado,

$$h(0) = u(\gamma(0)) = u(\mathbf{p}) = 0 \quad \text{e} \quad h'(0) = \nabla_g u(\gamma(0))\gamma'(0) = \nabla_g u(\mathbf{p})\gamma'(0) = 0,$$

pois  $\mathbf{p} \in \Sigma \subset \partial M$  e  $\nabla_g u(\mathbf{p}) = 0$  por hipótese. Então temos o seguinte problema de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} h''(t) = \theta(t)h(t) \\ h(0) = 0 \\ h'(0) = 0, \end{array} \right.$$

que tem como única solução a função identicamente nula  $h \equiv 0$  ao longo de  $\gamma$ , mas desde que  $\gamma(t) \in \text{int } M$  para  $0 < t < \epsilon < \mathbf{a}$ , obtemos uma contradição pois  $u > 0$  em  $\text{int } M$ . Portanto  $|\nabla_g u|$  é positivo em  $\partial M$ .

(b) Na demonstração do item (a) vimos que não podemos ter  $\nabla_g u(\mathbf{p}) = 0$  com  $u(\mathbf{p}) = 0$ , ou seja, 0 não pode ser valor crítico de  $u$  donde segue que é valor regular.

(c) Como 0 é valor regular de  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ , então  $u^{-1}(0) = \partial M$  é uma subvariedade de dimensão  $n - 1$ , ou seja,  $\partial M$  é uma hipersuperfície de  $M$ . Dado  $\mathbf{p} \in \partial M$  e  $v \in T_{\mathbf{p}}\partial M$ , considere uma curva  $c : (0, \delta) \rightarrow \partial M$  tal que  $c(0) = \mathbf{p}$  e  $c'(0) = v$ , como  $c(t) \in \partial M$ , então

$$u(c(t)) = 0 \quad \forall t \in (0, \delta),$$

daí em  $t = 0$ , temos que

$$\nabla_g \mathbf{u}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v} = 0,$$

como  $\nabla_g \mathbf{u}(\mathbf{p}) \neq 0$ , segue que  $\mathbf{v} \perp \nabla_g \mathbf{u}(\mathbf{p})$ , como  $\mathbf{p}$  é arbitrário temos que  $\nabla_g \mathbf{u}|_{\partial M}$  é um campo vetorial normal. Com a mesma notação que usamos na Seção 1.5, a segunda forma fundamental de  $\partial M$  em  $\mathbf{p}$  com respeito ao vetor  $\eta \in (T_{\mathbf{p}} \partial M)^\perp$  é dada por

$$H_\eta = \langle -(\nabla_X \mathbf{N})^T, Y \rangle_g, \quad X, Y \in T_{\mathbf{p}} \partial M,$$

onde  $\mathbf{N}$  é uma extensão local de  $\eta$  normal a  $\partial M$ . Mas, como  $\partial M$  só tem uma direção normal, temos que  $\nabla_g \mathbf{u} = b\mathbf{N}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ . Logo

$$H_\eta = -b \langle (\nabla_X \nabla \mathbf{u}), Y \rangle_g = -b \nabla_g^2 \mathbf{u}(X, Y).$$

Vimos na demonstração do item (a) que  $\nabla_g^2 \mathbf{u} = 0$  em  $\partial M$ , então segue que  $H_\eta = 0$  para toda direção normal  $\eta \in (T_{\mathbf{p}} \partial M)^\perp$ . Assim, a imersão  $i : \partial M \hookrightarrow M$  é geodésica em  $M$  no ponto  $\mathbf{p}$ , como  $\mathbf{p}$  é arbitrário, segue que a imersão  $i$  é totalmente geodésica em  $M$ .

(d)- Tomando o divergente em (2.1) e fazendo o uso do Corolário 1.1 e da Proposição 1.13 itens (a) e (b), temos que

$$\operatorname{div}(\nabla_g^2 \mathbf{u}) - \operatorname{div}(\mathbf{u} \operatorname{Ric}_g) - \operatorname{div}(\Delta_g \mathbf{u} g) = 0,$$

$$\operatorname{Ric}(\nabla_g \mathbf{u}, \cdot) + d(\nabla_g \mathbf{u}) - \mathbf{u} \operatorname{div}(\operatorname{Ric}_g) - \operatorname{Ric}(\nabla_g \mathbf{u}, \cdot) - d \nabla_g \mathbf{u} = 0,$$

$$-\mathbf{u} \operatorname{div} \operatorname{Ric} = 0,$$

agora usando a segunda identidade de Bianchi contraída (item (c), Proposição 1.13), obtemos

$$-\frac{\mathbf{u}}{2} dR_g = 0.$$

Mas,  $\mathbf{u} > 0$  em  $\operatorname{int} M$ , logo  $dR_g = 0$  em  $\operatorname{int} M$ . Como  $\partial M$  é uma hipersuperfície de  $M$ , então  $\partial M$  tem medida nula em  $M$ , conseqüentemente  $\operatorname{int} M = M - \partial M$  é denso em  $M$ , portanto  $dR_g = 0$  em toda variedade, daí usando a conexidade de  $M$  concluimos que  $R_g$  é constante.  $\square$

Agora, iremos relembrar a definição de função analítica real definida em uma variedade  $M$ . Uma *cobertura analítica* de  $M^n$  é uma família de cartas diferenciáveis  $(U_i, \phi_i)$  de modo que  $M = \cup_i U_i$  e, se  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  para algum  $i \neq j$ , então a mudança de coordenadas  $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$  é uma função analítica em  $\mathbb{R}^n$ . Uma métrica  $g$  em  $M$  é considerada *analítica*,

se existe uma cobertura analítica  $(U_i, \phi_i)$  de  $M$ , tal que a métrica pull-back  $(\phi_i^{-1})^*g$  é analítica em  $\mathbb{R}^n$ , para todo  $i$ . Analogamente, dizemos que uma função  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é *analítica*, se existe uma cobertura analítica  $(U_i, \phi_i)$ , tal que  $f \circ \phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$  é analítica  $\forall i$ . Em [16] e [56], os autores mostram que a função potencial de uma métrica estática é uma função analítica, além disso em [21] o autor mostra que a métrica  $g$  que define uma solução estática também é analítica. Nos próximos capítulos, encontraremos funções analíticas com frequência, para demonstração de alguns resultados será crucial entender o comportamento de seus pontos críticos. A este respeito, faremos o uso repetidamente do resultado a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [51].

**Teorema 2.1.** *Se  $f \in C^\infty(M)$  é analítica, então seu conjunto de nível crítico é discreto.*

## 2.2 Exemplos de métricas estáticas com $\Lambda > 0$

Nessa seção apresentaremos exemplos explícitos de métricas estáticas com constante cosmológica positiva. Na dimensão  $n = 3$ , esses são os únicos conhecidos.

Para os exemplos a seguir, convém considerar as notações

$$u_{\max} = \max_M u \quad \text{e} \quad \text{MAX}(u) = \{p \in M; u(p) = u_{\max}\},$$

para o potencial estático  $u$ .

**Exemplo 2.1.** *Um exemplo de tripla estática com constante cosmológica positiva e bordo conexo, é obtido escolhendo  $(S_+^n, g, u)$ , onde  $S_+^n$  é o hemisfério superior de raio 1 em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , dotado com a métrica euclidiana  $g$ , e  $u$  é a função altura  $u(x) = g(x, e_{n+1}) \forall x \in S_+^n$ , onde  $e_{n+1} = (0, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , ou seja,  $u(x) = x_{n+1} \forall x \in S_+^n$ . De fato, temos que  $u$  é estritamente positiva em  $S_+^n$  e anula-se precisamente em  $\partial S_+^n = S^{n-1}$ . Para provar que tripla  $(S_+^n, g, u)$  satisfaz as demais equações de (2.9), considere  $p = (p_1, \dots, p_{n+1}) \in S_+^n$ ,  $\bar{\nabla}$  a conexão do  $\mathbb{R}^{n+1}$  e  $\nabla$  a conexão do hemisfério. Então*

$$\bar{\nabla}x_{n+1}(p) = \nabla x_{n+1}(p) + \lambda(p)\eta(p),$$

onde  $\eta$  é o campo de vetores em  $\mathbb{R}^{n+1}$  normal a  $S_+^n$ , ou seja,  $\eta(p) = p \forall p \in S_+^n$ . Mas,

$$\bar{\nabla}x_{n+1}(p) = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_j} e_j = e_{n+1}.$$

Logo,  $\nabla x_{n+1}(\mathbf{p}) = \mathbf{e}_{n+1} - \lambda(\mathbf{p})\mathbf{p}$ . Note que,

$$x_{n+1} = \mathbf{u}(\mathbf{p}) = \langle \mathbf{p}, \mathbf{e}_{n+1} \rangle_g = \langle \mathbf{p}, \nabla x_{n+1}(\mathbf{p}) + \lambda(\mathbf{p})\mathbf{p} \rangle_g = \lambda(\mathbf{p}),$$

pois  $\nabla x_{n+1}(\mathbf{p}) \in T_{\mathbf{p}}\mathbb{S}_+^n$ . Assim,  $\nabla x_{n+1}(\mathbf{p}) = \mathbf{e}_{n+1} - x_{n+1}\mathbf{p}$  e portanto,

$$\nabla x_{n+1} = \mathbf{e}_{n+1} - x_{n+1}\boldsymbol{\eta}. \quad (2.10)$$

Agora, calcularemos  $\nabla^2 x_{n+1}$ . Considere  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  um referencial local, então temos

$$\begin{aligned} \nabla^2 x_{n+1}(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j) &= \langle \nabla_{\mathbf{e}_k} \nabla x_{n+1}, \mathbf{e}_j \rangle_g \\ &= \langle \nabla_{\mathbf{e}_k} (\mathbf{e}_{n+1} - x_{n+1}\boldsymbol{\eta}), \mathbf{e}_j \rangle_g \\ &= \langle (\overline{\nabla}_{\mathbf{e}_k} (\mathbf{e}_{n+1} - x_{n+1}\boldsymbol{\eta}))^\top, \mathbf{e}_j \rangle_g, \end{aligned}$$

onde na segunda igualdade usamos (2.10). Daí, segue que

$$\begin{aligned} \nabla^2 x_{n+1}(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j) &= \langle \overline{\nabla}_{\mathbf{e}_k} (\mathbf{e}_{n+1} - x_{n+1}\boldsymbol{\eta}), \mathbf{e}_j \rangle_g \\ &= - \langle \overline{\nabla}_{\mathbf{e}_k} x_{n+1}\boldsymbol{\eta}, \mathbf{e}_j \rangle_g \\ &= - \langle \mathbf{e}_k(x_{n+1})\boldsymbol{\eta} + x_{n+1}\overline{\nabla}_{\mathbf{e}_k}\boldsymbol{\eta}, \mathbf{e}_j \rangle_g \\ &= - x_{n+1} \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j \rangle_g, \end{aligned}$$

onde na segunda igualdade usamos o fato de  $\mathbf{e}_{n+1}$  ser um campo constante e na última o fato de  $\boldsymbol{\eta} = \text{Id}_{\mathbb{S}_+^n}$ . Logo,

$$\nabla^2 x_{n+1} = -x_{n+1}\mathbf{g}.$$

Assim, teremos que

$$\begin{aligned} \Delta x_{n+1} &= \sum_{i=1}^n \nabla^2 x_{n+1}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) \\ &= -x_{n+1} \sum_{i=1}^n g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) \\ &= -n x_{n+1}. \end{aligned}$$

Como  $\mathbb{S}_+^n$  tem curvatura seccional constante igual a 1, então  $\mathbb{S}_+^n$  é uma variedade de Einstein, donde  $\text{Ric} = (n-1)\mathbf{g}$ . Finalmente, obtemos

$$\left\{ \begin{array}{ll} u\text{Ric}_g = \nabla^2 u + nu\mathbf{g}, & \text{em } M, \\ \Delta u = -nu, & \text{em } M. \end{array} \right.$$

O que prova que  $(\mathbb{S}_+^n, \mathbf{g}, \mathbf{u})$  é uma métrica estática com  $\Lambda > 0$ . De (2.10), temos que

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0 &\Leftrightarrow \mathbf{u}(\mathbf{x})\mathbf{x} = \mathbf{e}_{n+1} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{u}(\mathbf{x})(\mathbf{e}_1x_1 + \dots + \mathbf{e}_{n+1}x_{n+1}) = \mathbf{e}_{n+1} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{u}^2(\mathbf{x}) = 1 \\ &\Leftrightarrow x_{n+1} = 1 \text{ ou } x_{n+1} = -1. \end{aligned}$$

Como  $(0, \dots, -1) \notin \mathbb{S}_+^n$ , temos que  $\mathbf{x} = (0, \dots, 1)$  é o único ponto crítico de  $\mathbf{u}$  e como  $\nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\mathbf{g} < 0$ , temos pela Proposição 1.11, que  $\mathbf{x} = (0, \dots, 1)$  é único ponto de máximo de  $\mathbf{u}$ . Portanto

$$\mathbf{u}_{\max} = 1 \text{ e } \text{MAX}(\mathbf{u}) = \{\mathbf{x} = (0, \dots, 1)\}.$$

□

Os próximos três exemplos a seguir são os modelos de soluções rotacionalmente simétricas para o sistema de equações (2.9), tais soluções tem comportamento diferentes, dependendo do valor do parâmetro de massa  $\mathbf{m}$  que pode variar no intervalo real  $[0, \mathbf{m}_{\max}]$ , com  $\mathbf{m}_{\max}$  definido por

$$\mathbf{m}_{\max} = \sqrt{\frac{(\mathbf{n} - 2)^{\mathbf{n}-2}}{\mathbf{n}^{\mathbf{n}}}}. \quad (2.11)$$

**Observação 2.2.** Observamos que para cada  $0 < \mathbf{m} < \mathbf{m}_{\max}$ , a equação  $f_{\mathbf{m}}(\mathbf{r}) = 0$ , onde  $f_{\mathbf{m}}(\mathbf{r}) = 1 - \mathbf{r}^2 - 2\mathbf{m}\mathbf{r}^{2-\mathbf{n}}$  tem exatamente duas soluções positivas  $0 < \mathbf{r}_-(\mathbf{m}) < \mathbf{r}_+(\mathbf{m})$ . De fato, considere

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}^{\mathbf{n}-2}f_{\mathbf{m}}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}^{\mathbf{n}-2} - \mathbf{r}^{\mathbf{n}} - 2\mathbf{m},$$

com  $0 < \mathbf{m} < \mathbf{m}_{\max}$ , daí

$$\mathbf{p}'(\mathbf{r}) = (\mathbf{n} - 2)\mathbf{r}^{\mathbf{n}-3} - \mathbf{n}\mathbf{r}^{\mathbf{n}-1} \text{ e } \mathbf{p}''(\mathbf{r}) = (\mathbf{n} - 2)(\mathbf{n} - 3)\mathbf{r}^{\mathbf{n}-4} - \mathbf{n}(\mathbf{n} - 1)\mathbf{r}^{\mathbf{n}-2}.$$

Logo,  $\mathbf{p}'(\mathbf{r}) = 0$  se, e somente se,  $\mathbf{r}^{\mathbf{n}-3}(\mathbf{n} - 2 - \mathbf{n}\mathbf{r}^2) = 0$ , ou seja,  $\mathbf{r} = 0$  ou  $\mathbf{r} = \sqrt{\frac{\mathbf{n} - 2}{\mathbf{n}}}$ .

Não é difícil verificar que

$$\mathbf{p}''\left(\sqrt{\frac{\mathbf{n} - 2}{\mathbf{n}}}\right) = -2\mathbf{n}\left(\frac{\mathbf{n} - 2}{\mathbf{n}}\right)^{\frac{\mathbf{n}-2}{2}} < 0,$$

para todo  $\mathbf{n} \geq 3$ . Logo,  $\mathbf{r} = \sqrt{\frac{\mathbf{n} - 2}{\mathbf{n}}}$  é o único ponto de máximo de  $\mathbf{p}$ . Como  $\mathbf{p}(0) = -2\mathbf{m} < 0$ , então para que  $\mathbf{p}$  tenha exatamente duas raízes positivas é necessário que

$$\mathbf{p}\left(\sqrt{\frac{\mathbf{n} - 2}{\mathbf{n}}}\right) > 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} 2m &< \left(\frac{n-2}{n}\right)^{\frac{n-2}{2}} - \left(\frac{n-2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \\ &= \left(\frac{n-2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \left(-1 + \frac{n}{n-2}\right) \\ &= 2 \frac{(n-2)^{\frac{n}{2}-1}}{n^{\frac{n}{2}}}, \end{aligned}$$

isto é,  $m < m_{\max}$ . Além disso, no intervalo  $[r_-(m), r_+(m)]$  a função  $f_m(r)$  atinge o máximo em  $r_0(m) = [(n-2)m]^{\frac{1}{n}}$ . Se  $m = 0$ , então  $r_0(0) = r_-(0) = 0$  e  $r_+(0) = 1$ , e para  $m = m_{\max}$  tem-se  $r_0(m_{\max}) = r_-(m_{\max}) = r_+(m_{\max}) = [(n-2)/n]^{\frac{1}{2}}$ , pois  $f_{\max}([(n-2)/n]^{\frac{1}{2}}) = 0$ .  $\square$

**Exemplo 2.2** (de Sitter-Schwarzschild ( $0 < m < m_{\max}$ ), Figura 2.1 (b)). A solução de Sitter-Schwarzschild é definida como

$$M = \overline{B(0, r_+(m))} \setminus B(0, r_-(m)) \subset \mathbb{R}^n, \quad g = \frac{d|x| \otimes d|x|}{1 - |x|^2 - 2m|x|^{2-n}} + |x|^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}},$$

e função potencial dada por

$$u = \sqrt{1 - |x|^2 - 2m|x|^{2-n}},$$

onde  $r_-(m), r_+(m)$  são as duas soluções positivas de  $1 - r^2 - 2mr^{2-n}$ . Vimos acima que para  $r_-(m), r_+(m)$  ser real e positivo é necessário que  $m < m_{\max}$ . Veremos mais adiante que a métrica  $g$  que a priori está bem definida apenas no interior de  $M$ , se estende até o bordo. Esta solução estática tem duas componentes conexas

$$\partial M_+ = \{|x| = r_+(m)\} \quad \text{e} \quad \partial M_- = \{|x| = r_-(m)\},$$

que possuem características diferentes, veja (seção 2.3). Verificaremos agora que

$$u_{\max} = \sqrt{1 - \left(\frac{m}{m_{\max}}\right)^{\frac{2}{n}}}, \quad \text{MAX}(u) = \left\{x \in M; |x| = [(n-2)m]^{\frac{1}{n}}\right\}.$$

Para facilitar os cálculos podemos escrever  $u = \sqrt{1 - r^2 - 2m|r|^{2-n}}$ , onde  $r = |x| \in (r_-(m), r_+(m))$ . Segue de (2.14), que o conjunto dos pontos críticos de  $u$ , no caso ponto de máximo, é dado por  $r = |x| = [m(n-2)]^{\frac{1}{n}}$ .

De fato, considere  $\mathbf{p} = [m(n-2)]^{\frac{1}{n}}$  e uma curva  $c : [0, a] \rightarrow M$  tal que  $c(0) = \mathbf{p}$  e  $c'(0) = \mathbf{v}$ . Pela Proposição 1.10, temos que

$$(\nabla^2 \mathbf{u})_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{u} \circ c)(t) \Big|_{t=0}.$$

Após alguns cálculos, obtemos que

$$\begin{aligned} (\nabla^2 \mathbf{u})_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= -\frac{n\mathbf{v}^2}{\mathbf{u}(\mathbf{p})} + \frac{(\mathbf{p}\mathbf{v} - [m(n-2)]^{\frac{1}{n}}\mathbf{v})(-\mathbf{p}\mathbf{v} + m(n-2)\mathbf{p}^{1-n}\mathbf{v})}{\mathbf{u}^3(\mathbf{p})} \\ &= -\frac{n\mathbf{v}^2}{\mathbf{u}(\mathbf{p})} + \frac{(\mathbf{p}\mathbf{v} - [m(n-2)]^{\frac{1}{n}}\mathbf{v})(-\mathbf{p}\mathbf{v} + [m(n-2)]^{\frac{1}{n}}\mathbf{v})}{\mathbf{u}^3(\mathbf{p})} \\ &= -\frac{n\mathbf{v}^2}{\mathbf{u}(\mathbf{p})} - \frac{(-\mathbf{p}\mathbf{v} + [m(n-2)]^{\frac{1}{n}}\mathbf{v})^2}{\mathbf{u}^3(\mathbf{p})} \\ &< 0. \end{aligned}$$

Pela Proposição 1.11, concluímos que o ponto de máximo de  $\mathbf{u}$  satisfaz  $\mathbf{p} = |\mathbf{x}| = [m(n-2)]^{\frac{1}{n}}$ , daí

$$\text{MAX}(\mathbf{u}) = \left\{ \mathbf{x} \in M; |\mathbf{x}| = [(n-2)m]^{\frac{1}{n}} \right\}.$$

Assim  $M \setminus \text{MAX}(\mathbf{u})$  tem exatamente duas componentes conexas,  $M_+$  com bordo  $\partial M_+$  e  $M_-$  com bordo  $\partial M_-$ .

Agora, calcularemos o máximo de  $\mathbf{u}$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\max} = \mathbf{u}([m(n-2)]^{\frac{1}{n}}) &= \sqrt{1 - 2m \left([m(n-2)]^{\frac{1}{n}}\right)^{2-n} - [m(n-2)]^{\frac{2}{n}}} \\ &= \sqrt{1 - [m(n-2)]^{\frac{2}{n}} \left(\frac{n}{n-2}\right)} \\ &= \sqrt{1 - m^{\frac{2}{n}} \frac{n}{(n-2)^{1-\frac{2}{n}}}} \\ &= \sqrt{1 - m^{\frac{2}{n}} \left(\frac{n^n}{(n-2)^{n-2}}\right)^{\frac{1}{n}}} \\ &= \sqrt{1 - \left[ m \left(\frac{n^n}{(n-2)^{n-2}}\right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{2}{n}}} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{m}{m_{\max}}\right)^{\frac{2}{n}}}, \end{aligned}$$

como desejado. □

Convém destacar que o modelo descrito acima possui uma generalização, onde as fibras esféricas são substituídas por alguma variedade de Einstein  $(E^{n-1}, g_{E^{n-1}})$ , é comum

encontrar na literatura tal variedade de Einstein sendo a esfera  $\mathbb{S}^{n-1}$  munida com sua métrica canônica  $(\mathbb{S}^{n-1}, g_{\mathbb{S}^{n-1}})$ , a tripla obtida ainda é uma tripla estática com  $\Lambda > 0$ , como mostraremos a seguir.

**Exemplo 2.3** (de Sitter-Schwarzschild generalizado com massa  $0 < m < m_{\max}$ ). A solução de Sitter-Schwarzschild generalizado é definida como

$$M = (r_-(m), r_+(m)) \times \mathbb{S}^{n-1}, \quad g = \frac{dr^2}{1 - 2mr^{2-n} - r^2} + r^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}},$$

e função potencial dada por

$$u(r) = \sqrt{1 - 2mr^{2-n} - r^2},$$

onde  $0 < r_-(m) < r_+(m)$  são as duas raízes positivas de  $u$  e  $g_{\mathbb{S}^{n-1}}$  denota a métrica canônica da esfera unitária  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Nesse caso,  $(M, g, u)$  é uma tripla estática com  $\Lambda > 0$ .

De fato, definindo a métrica

$$\tilde{g} = dr^2 + \phi(r)^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}},$$

onde  $\phi(r) = r\sqrt{1 - 2mr^{2-n} - r^2}$ , podemos escrever a métrica  $g$  como

$$g = (1 - 2mr^{2-n} - r^2)^{-1} \tilde{g},$$

logo  $\tilde{g}$  e  $g$  são duas métricas conformes. Afim de facilitar os cálculos, escrevemos

$$e^{2h} = (1 - 2mr^{2-n} - r^2)^{-1}, \quad (2.12)$$

isso implica que  $h = \ln(r) - \ln(\phi(r))$ . Para o que segue-se, considere  $\{\tilde{e}_1 = \partial r, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_n\}$  um referencial ortonormal local para  $(M, \tilde{g})$ , com  $\{\tilde{e}_i\}_{i \geq 2}$  tangentes à esfera  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Daí, temos que  $\{e_1 = e^{-h} \partial r, \dots, e_n = e^{-h} \tilde{e}_n\}$  é um referencial ortonormal para  $(M, g)$ . Note que, de (2.12) obtemos

$$e^{-h} = u = \sqrt{1 - 2mr^{2-n} - r^2}. \quad (2.13)$$

Denotando por  $\nabla^g u$  e  $\nabla^{\tilde{g}} u$  o gradiente de  $u$  com respeito as métricas  $g$  e  $\tilde{g}$  respectivamente, temos que

$$\nabla^g u = e^{-2h} \nabla^{\tilde{g}} u = e^{-2h} \frac{m(n-2)r^{1-n} - r}{e^{-h}} \partial r = (m(n-2)r^{1-n} - r) e_1, \quad (2.14)$$

onde na primeira igualdade usamos a Proposição 1.23 e na segunda usamos (2.13). Agora calculemos o hessiano de  $u$  na métrica  $g$

$$\begin{aligned} \nabla_g^2 u(e_i, e_j) &= \langle \nabla_{e_i}^g (m(n-2)r^{1-n} - r) e_1, e_j \rangle_g \\ &= e_i(m(n-2)r^{1-n} - r) \langle e_1, e_j \rangle_g \\ &\quad + (m(n-2)r^{1-n} - r) \langle \nabla_{e_i}^g e_1, e_j \rangle_g, \end{aligned}$$

daí,

$$\begin{aligned}\nabla_g^2 \mathbf{u}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) &= \mathbf{e}_i(\mathbf{m}(\mathbf{n} - 2)r^{1-n} - r)\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_j \rangle_g \\ &\quad + (\mathbf{m}(\mathbf{n} - 2)r^{1-n} - r)\langle \nabla_{\tilde{\mathbf{e}}_i}^g \mathbf{e}_1, \tilde{\mathbf{e}}_j \rangle_{\tilde{g}}.\end{aligned}$$

Fazendo o uso da Proposição 1.24, obtemos

$$\begin{aligned}\nabla_g^2 \mathbf{u}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) &= \mathbf{e}_i(\mathbf{m}(\mathbf{n} - 2)r^{1-n} - r)\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_j \rangle_g \\ &\quad + (\mathbf{m}(\mathbf{n} - 2)r^{1-n} - r)\{\langle \nabla_{\tilde{\mathbf{e}}_i}^g \mathbf{u} \partial r, \tilde{\mathbf{e}}_j \rangle_{\tilde{g}} + \tilde{\mathbf{e}}_i(\mathbf{h})\langle \mathbf{e}_1, \tilde{\mathbf{e}}_j \rangle_{\tilde{g}} \\ &\quad + \mathbf{e}_1(\mathbf{h})\langle \tilde{\mathbf{e}}_i, \tilde{\mathbf{e}}_j \rangle_{\tilde{g}} - \mathbf{u}\mathbf{h}'\langle \tilde{\mathbf{e}}_i, \partial r \rangle_{\tilde{g}}\langle \partial r, \tilde{\mathbf{e}}_j \rangle_{\tilde{g}}\},\end{aligned}$$

onde no primeiro e último termo dentro do parênteses, usamos o fato que  $\mathbf{e}_1 = e^{-h}\partial r = \mathbf{u}\partial r$ . Logo

$$\begin{aligned}\nabla_g^2 \mathbf{u}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) &= \mathbf{e}_i(\mathbf{m}(\mathbf{n} - 2)r^{1-n} - r)\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_j \rangle_g \\ &\quad + (\mathbf{m}(\mathbf{n} - 2)r^{1-n} - r)\{\tilde{\mathbf{e}}_i(\mathbf{u})\langle \partial r, \tilde{\mathbf{e}}_j \rangle_{\tilde{g}} + \mathbf{u}\langle \nabla_{\tilde{\mathbf{e}}_i}^g \partial r, \tilde{\mathbf{e}}_j \rangle_{\tilde{g}} \\ &\quad + \tilde{\mathbf{e}}_i(\mathbf{h})\langle \mathbf{e}_1, \tilde{\mathbf{e}}_j \rangle_{\tilde{g}} + \mathbf{e}_1(\mathbf{h})\langle \tilde{\mathbf{e}}_i, \tilde{\mathbf{e}}_j \rangle_{\tilde{g}} - \mathbf{u}\mathbf{h}'\langle \tilde{\mathbf{e}}_i, \partial r \rangle_{\tilde{g}}\langle \partial r, \tilde{\mathbf{e}}_j \rangle_{\tilde{g}}\}.\end{aligned}$$

Em particular, para  $i, j \geq 2$  obtemos

$$\nabla_g^2 \mathbf{u}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = (\mathbf{m}(\mathbf{n} - 2)r^{1-n} - r) \left\{ \mathbf{u}\langle \nabla_{\tilde{\mathbf{e}}_i}^g \partial r, \tilde{\mathbf{e}}_j \rangle_{\tilde{g}} + \mathbf{e}_1(\mathbf{h})\tilde{g}(\tilde{\mathbf{e}}_i, \tilde{\mathbf{e}}_j) \right\}. \quad (2.15)$$

Pelo item (2) da Proposição 1.28, temos que

$$\nabla_{\tilde{\mathbf{e}}_i}^g \partial r = \frac{\Phi'}{\Phi} \tilde{\mathbf{e}}_i,$$

para todo  $i, j \geq 2$ . Como  $\mathbf{e}_1(\mathbf{h}) = \left(\frac{1}{r} - \frac{\Phi'}{\Phi}\right)\mathbf{u}$ , então substituindo essas duas últimas igualdades em (2.15), obtemos uma expressão mais simplificada para  $\nabla_g^2 \mathbf{u}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$  com  $i, j \geq 2$ , a saber,

$$\nabla_g^2 \mathbf{u}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = (\mathbf{m}(\mathbf{n} - 2)r^{-n} - 1)\mathbf{u}g_{ij}. \quad (2.16)$$

Usando (2.16), temos que

$$\begin{aligned}\Delta_g \mathbf{u} &= \nabla_g^2 \mathbf{u}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + (\mathbf{m}(\mathbf{n} - 2)r^{-n} - 1)\mathbf{u}(\mathbf{n} - 1) \\ &= \mathbf{e}_1(\mathbf{m}(\mathbf{n} - 2)r^{1-n} - r) + (\mathbf{m}(\mathbf{n} - 2)r^{1-n} - r)\{\mathbf{u}' + \mathbf{u}\mathbf{h}' + \mathbf{e}_1(\mathbf{h}) - \mathbf{u}\mathbf{h}'\} \\ &\quad + (\mathbf{m}(\mathbf{n} - 2)r^{-n} - 1)\mathbf{u}(\mathbf{n} - 1) \\ &= (\mathbf{m}(\mathbf{n} - 2)(1 - \mathbf{n})r^{-n} - 1)\mathbf{u} + (\mathbf{m}(\mathbf{n} - 2)r^{1-n} - r) \left\{ \mathbf{u}' + \left(\frac{1}{r} - \frac{\Phi'}{\Phi}\right)\mathbf{u} \right\} \\ &\quad + \mathbf{m}(\mathbf{n} - 2)(\mathbf{n} - 1)r^{-n}\mathbf{u} - \mathbf{u}(\mathbf{n} - 1),\end{aligned}$$

onde na terceira igualdade acima, usamos novamente o fato que  $e_1 = u\partial r$  e  $\nabla_{\partial r}^{\tilde{g}}\partial r = 0$ .

Portanto, obtemos

$$\Delta_g u = -nu + (m(n-2)r^{1-n} - r) \left\{ u' + \left( \frac{1}{r} - \frac{u+ru'}{ru} \right) u \right\} = -nu. \quad (2.17)$$

Assim, para  $i, j \geq 2$ , temos que

$$-(\Delta_g u)g_{ij} + \nabla_g^2 u(e_i, e_j) = (m(n-2)r^{-n} + n-1)ug_{ij}. \quad (2.18)$$

Agora, basta verificar que

$$\text{Ric}_g(e_i, e_j) = (m(n-2)r^{-n} + n-1)g_{ij}.$$

Pelo que vimos na Seção 1.6, temos que as curvaturas de Ricci nas métricas  $g$  e  $\tilde{g}$  se relacionam da seguinte forma

$$\begin{aligned} \text{Ric}_g(e_i, e_j) &= \text{Ric}_{\tilde{g}}(e_i, e_j) - (n-2)\nabla_{\tilde{g}}^2 h(e_i, e_j) + (n-2)\nabla_{e_i}^{\tilde{g}} h \nabla_{e_j}^{\tilde{g}} h \\ &\quad - (\Delta_{\tilde{g}} h + (n-2)|\nabla_{\tilde{g}} h|^2)\tilde{g}(e_i, e_j). \end{aligned}$$

Mas para  $i, j \geq 2$ , temos que

$$\text{Ric}_g(e_i, e_j) = \text{Ric}_{\tilde{g}}(e_i, e_j) - (n-2)\nabla_{\tilde{g}}^2 h(e_i, e_j) - (\Delta_{\tilde{g}} h + (n-2)|\nabla_{\tilde{g}} h|^2)\tilde{g}(e_i, e_j).$$

Como  $e^{-2h} = u^2$ , podemos reescrever a expressão acima como

$$\text{Ric}_g(e_i, e_j) = u^2 \left\{ \text{Ric}_{\tilde{g}}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) + (2-n)\nabla_{\tilde{g}}^2 h(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) + (-\Delta_{\tilde{g}} h + (2-n)|\nabla_{\tilde{g}} h|^2)\tilde{g}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) \right\}. \quad (2.19)$$

Agora, calculemos os termos da expressão acima separadamente, começamos pelo cálculo do Ricci de  $M$  na métrica  $\tilde{g}$ . Para  $i, j \geq 2$ , temos pelo item (3) da Proposição 1.30, que

$$\text{Ric}_{\tilde{g}}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) = \text{Ric}^{\mathbb{S}^{n-1}}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) - \tilde{g}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) \left\{ \frac{\Delta\phi}{\phi} + (n-2)\frac{|\nabla_{\tilde{g}}\phi|_{\tilde{g}}^2}{\phi^2} \right\}, \quad (2.20)$$

onde  $\Delta\phi$  é o laplaciano de  $\phi$  em  $(r_-(m), r_+(m))$ . Como  $\mathbb{S}^{n-1}$  com a métrica canônica é de Einstein, então

$$\text{Ric}^{\mathbb{S}^{n-1}}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) = (n-2)g_{\mathbb{S}^{n-1}}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j).$$

Mas, para  $i, j \geq 2$ , temos que  $\tilde{g}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) = \phi^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j)$ . Assim, obtemos a igualdade

$$\text{Ric}^{\mathbb{S}^{n-1}}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) = \frac{(n-2)}{\phi^2}\tilde{g}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j). \quad (2.21)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \operatorname{div}(\nabla\phi) = \operatorname{div}(\phi'\partial r) \\ &= \phi'\operatorname{div}(\partial r) + \operatorname{dr} \otimes \operatorname{dr}(\nabla\phi', \partial r) \\ &= \phi' \sum_{i=1}^n \operatorname{dr} \otimes \operatorname{dr}(\nabla_{\tilde{e}_i} \partial r, \tilde{e}_i) + \phi'',\end{aligned}$$

logo,

$$\Delta\phi = \phi''. \quad (2.22)$$

Substituindo (2.21) e (2.22) em (2.20), temos que

$$\operatorname{Ric}_{\tilde{g}}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) = \left[ -\frac{\phi''}{\phi} + (n-2) \left( \frac{1-\phi'^2}{\phi^2} \right) \right] \tilde{g}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j), \quad (2.23)$$

para todo  $i, j \geq 2$ . Como  $\nabla_{\tilde{g}}\mathbf{h} = \left( \frac{1}{r} - \frac{\phi'}{\phi} \right) \partial r$ , então

$$\nabla_{\tilde{g}}^2\mathbf{h}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) = \tilde{e}_i \left( \frac{1}{r} - \frac{\phi'}{\phi} \right) \langle \partial r, \tilde{e}_j \rangle_{\tilde{g}} + \left( \frac{1}{r} - \frac{\phi'}{\phi} \right) \langle \nabla_{\tilde{e}_i}^{\tilde{g}} \partial r, \tilde{e}_j \rangle_{\tilde{g}}.$$

Fazendo uso do item (2) da Proposição 1.28, obtemos

$$\nabla_{\tilde{g}}^2\mathbf{h}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) = \left( \frac{1}{r} - \frac{\phi'}{\phi} \right) \frac{\phi'}{\phi} \tilde{g}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j), \quad (2.24)$$

para todo  $i, j \geq 2$ . Logo,

$$\Delta_{\tilde{g}}\mathbf{h} = \nabla_{\tilde{g}}^2\mathbf{h}(\partial r, \partial r) + \left( \frac{1}{r} - \frac{\phi'}{\phi} \right) \frac{\phi'}{\phi} (n-1).$$

Como  $\nabla_{\partial r}^{\tilde{g}}\partial r = 0$ , obtemos que

$$\Delta_{\tilde{g}}\mathbf{h} = -\frac{1}{r^2} - \frac{\phi''}{\phi} - (n-2) \left( \frac{\phi'}{\phi} \right)^2 + (n-1) \frac{\phi'}{r\phi}. \quad (2.25)$$

Finalmente, é fácil ver que

$$|\nabla_{\tilde{g}}\mathbf{h}|^2 = \frac{1}{r^2} + \left( \frac{\phi'}{\phi} \right)^2 - \frac{2\phi'}{r\phi}. \quad (2.26)$$

Portanto, substituindo (2.23), (2.24), (2.25) e (2.26) em (2.19) e fazendo algumas simplificações, obtemos

$$\operatorname{Ric}_g(e_i, e_j) = u^2 \left\{ \frac{n-2}{\phi^2} - \frac{n-3}{r^2} - \frac{\phi'}{r\phi} \right\} g(e_i, e_j),$$

para todo  $i, j \geq 2$ . Como  $\phi = ru = r\sqrt{1 - 2mr^{2-n} - r^2}$ , temos

$$\begin{aligned} \text{Ric}_g(e_i, e_j) &= \frac{1}{r^2} \left\{ n - 2 - (n - 3)(1 - 2mr^{2-n} - r^2) - \frac{\phi' \phi}{r} \right\} g(e_i, e_j) \\ &= \frac{1}{r^2} \left\{ n - 2 - (n - 2)(1 - 2mr^{2-n} - r^2) - (m(n - 2)r^{2-n} - r^2) \right\} g(e_i, e_j), \end{aligned}$$

logo,

$$\text{Ric}_g(e_i, e_j) = (mr^{-n}(n - 2) + n - 1)g(e_i, e_j). \quad (2.27)$$

Portanto, por (2.17), (2.18) e (2.27), temos que

$$u\text{Ric}_g(e_i, e_j) = \nabla_g^2 u - (\Delta_g u)g_{ij},$$

para todo  $i, j \geq 2$ . Destacamos que os demais casos são feitos de maneira análoga. Claramente,  $u > 0$  em  $\text{int } M$  e se anula nas duas componentes do bordo

$$\partial M_+ := \{r = r_+(\mathbf{m})\} \text{ e } \partial M_- := \{r = r_-(\mathbf{m})\}.$$

Portanto, provamos que  $(M, g, u)$  é solução para o sistema (2.9).  $\square$

**Observação 2.3.** A métrica  $g$  do exemplo acima que a priori está bem definida apenas no  $\text{int } M$  pode ser estendida até o bordo  $\partial M = \partial M_+ \cup \partial M_-$ . De fato, como vimos acima, a métrica  $g$  do de Sitter-Schwarschild é dada por

$$g = \frac{dr^2}{1 - 2mr^{2-n} - r^2} + r^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}.$$

Considere  $V : (r_-(\mathbf{m}), r_+(\mathbf{m})) \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$V(r) = (1 - 2mr^{2-n} - r^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Observe que,  $V$  é uma função positiva, já que  $(r_-(\mathbf{m}), r_+(\mathbf{m})) = \{r > 0; 1 - 2mr^{2-n} - r^2 > 0\}$ .

Agora considere

$$F(r) = \int_{r_-(\mathbf{m})}^r (1 - 2mrt^{2-n} - t^2)^{-\frac{1}{2}} dt,$$

pelo Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$\frac{dF}{dr} = (1 - 2mr^{2-n} - r^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{V(r)} > 0.$$

Além disso, pelo Teorema da Função Inversa, existe uma função  $f : (0, b) \rightarrow (r_-(\mathbf{m}), r_+(\mathbf{m}))$  que é a inversa de  $F$ . Pela continuidade da  $f$ , podemos estende-la fazendo

$$f(0) = r_-(\mathbf{m}) \text{ e } f(b) = r_+(\mathbf{m}).$$

Assim, pondo  $s = F(r)$ , temos que

$$f(s) = r \Rightarrow dr = f'(s)ds \Rightarrow dr^2 = \frac{1}{(F^{-1})'^2}(r)ds^2.$$

Portanto, podemos reescrever  $g$  da seguinte forma

$$g = ds^2 + f(s)g_{\mathbb{S}^{n-1}},$$

que está definida em  $[0, b] \times \mathbb{S}^{n-1}$ .

**Exemplo 2.4** (Solução de Sitter ( espaço forma esférico,  $m = 0$ ), Figura 2.1 (a)). A solução de Sitter é definida como sendo a tripla

$$\left( M = \overline{B(0, 1)} \subset \mathbb{R}^n, g = \frac{d|x| \otimes d|x|}{1 - |x|^2} + |x|^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}, u = \sqrt{1 - |x|^2} \right). \quad (2.28)$$

Esse modelo de solução para (2.9) pode ser vista como o limite da solução de Sitter-Schwarzschild, descrita no exemplo 2.2, quando  $m \rightarrow 0_+$ . A solução de Sitter é tal que o máximo da função potencial é atingido na origem,  $u_{\max} = 1$  e possui bordo conexo. A métrica  $g$ , que a priori está bem definida apenas no interior de  $M - \{0\}$ , estende-se até o bordo e a origem.

Um fato interessante e de grande relevância na exposição dos principais modelos de métricas estáticas com constante cosmológica positiva, diz respeito ao fato que a solução de Sitter (2.28) é isométrica a tripla estática  $(\mathbb{S}_+^n, g_{\mathbb{S}^n}, u = x_{n+1})$ . Para verificar isso, definiremos primeiramente o conceito de isometria entre métricas estáticas.

**Definição 2.3.** Sejam  $(M, g_0, u)$  e  $(\overline{M}, \overline{g}_0, \overline{u})$  duas triplas estáticas. Diz-se que,  $(M, g_0, u)$  e  $(\overline{M}, \overline{g}_0, \overline{u})$  são isométricas, se existe uma isometria  $F : (M, g_0) \rightarrow (\overline{M}, \overline{g})$  tal que, a menos de uma normalização de  $u$ , tem-se que  $u = \overline{u} \circ F$ .

**Fato 2.1.** A solução de Sitter (2.28) é isométrica a tripla estática  $(\mathbb{S}_+^n, g_{\mathbb{S}^n}, x_{n+1})$ .

*Demonstração.* Em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , todo ponto  $x' \neq 0$  pode ser representado em coordenadas polares  $(r, \theta)$ , onde  $r = |x'| > 0$  é o raio polar e  $\theta := \frac{x'}{|x'|} \in \mathbb{S}^{n-1}$  é o ângulo polar. Através da identidade  $x' = r\theta$ , as coordenadas cartesianas  $x'_1, \dots, x'_n$  podem ser expressas nas coordenadas polares  $r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}$  da seguinte forma

$$x'_i = r f^i(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}), \quad i = 1, \dots, n,$$

onde  $f^i$  são as  $x'_i$ -coordenadas em  $\mathbb{R}$  do ponto  $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Claramente,  $f^1, \dots, f^n$  são funções de  $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$  e

$$(f^1)^2 + \dots + (f^n)^2 \equiv 1.$$

Como pode ser facilmente visto em Grigor'yan [28], a métrica euclidiana pode ser expressa em coordenadas polares, da forma

$$g_{\mathbb{R}^n} = dr^2 + r^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}},$$

onde  $g_{\mathbb{S}^{n-1}} = \sum_{i=1}^n (df^i)^2$ . Agora, iremos introduzir um sistema de coordenadas polares em  $\mathbb{S}^n$ . Sejam  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$  o polo sul e o polo norte da esfera  $\mathbb{S}^n$ , respectivamente. Para todo ponto  $x \in \mathbb{S}^n \setminus \{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}$ , seja  $r \in (0, \pi)$  e  $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ , tal que

$$\cos r = x_{n+1}, \quad e \quad \theta = \frac{x'}{|x'|},$$

onde  $x'$  é a projeção do ponto  $x$  em  $\mathbb{R}^n$ . Claramente o raio polar  $r$  é o ângulo entre os vetores posição de  $x$  e  $\mathbf{p}$ , e  $r$  pode ser também considerado como a latitude do ponto  $x$  a partir do polo. O ângulo polar  $\theta$  pode ser considerado como a longitude do ponto  $x$ . Obviamente, para todo ponto  $x \in \mathbb{S}^n \setminus \{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}$ , temos  $|x'| = \sin r$ , donde  $x' = (\sin r)\theta$ . Então, as coordenadas cartesianas  $x_1, \dots, x_{n+1}$  do ponto  $x$  podem ser expressas da seguinte forma

$$x_i = \sin r f^i(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}), \quad i = 1, \dots, n,$$

$$x_{n+1} = \cos r,$$

onde  $f^i$  são as funções definidas acima. Assim, considere a função diferenciável

$$F : \overline{\mathbb{B}(0, 1)} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{S}_+^n \setminus \{\mathbf{p}\},$$

definida por

$$F(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, \sqrt{1 - |x|^2}),$$

onde

$$x_i = \sin r f^i(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}), \quad i = 1, \dots, n, \quad r \in (0, \frac{\pi}{2}). \quad (2.29)$$

A função  $F$  possui inversa  $G : \mathbb{S}_+^n \setminus \{\mathbf{p}\} \longrightarrow \overline{\mathbb{B}(0, 1)} \setminus \{0\}$  diferenciável dada por

$$G(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n),$$

onde  $x_i$  é dada por (2.29) e  $x_{n+1} = \cos r$ ,  $r \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Portanto,  $F$  é um difeomorfismo e

$$\begin{aligned} F^*(g_{\mathbb{S}^n}) &= F^*((dx^1)^2 + \dots + (dx^{n+1})^2) \\ &= \sum_{i=1}^n (f^i \cos r dr + \sin r df^i)^2 + \sin^2 r dr^2 \\ &= \sum_{i=1}^n ((f^i)^2 \cos^2 r dr^2 + \sin^2 r (df^i)^2) + \sum_{i=1}^n (\sin r \cos r dr)(f^i df^i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n (f^i df^i)(\sin r \cos r dr) + \sin^2 r dr^2. \end{aligned}$$

Como,

$$(f^1)^2 + \dots + (f^n)^2 \equiv 1,$$

então

$$\sum_{i=1}^n f^i df^i = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} F^*(g_{\mathbb{S}^n}) &= \cos^2 r dr^2 + \sin^2 r \sum_{i=1}^n (df^i)^2 + \sin^2 r dr^2 \\ &= dr^2 + \sin^2 r g_{\mathbb{S}^{n-1}}. \end{aligned}$$

Por outro lado, a métrica de Sitter é tal que  $g = \frac{d|x| \otimes d|x|}{1-|x|^2} + |x|^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}$ , como

$$|x|^2 = \sin^2 r \sum_{i=1}^n (f^i)^2 = \sin^2 r,$$

segue que  $F^*(g_{\mathbb{S}^n}) = g$ . Finalmente, de  $\sqrt{1-|x|^2} = x_{n+1} \circ F$ , concluimos que a solução de Sitter (2.28) é isométrica a tripla estática  $(\mathbb{S}_+^n, g_{\mathbb{S}^n}, x_{n+1})$ .  $\square$

**Exemplo 2.5** (Solução Nariai (Cilindro redondo compacto,  $\mathbf{m} = \mathbf{m}_{\max}$ ) Figura 2.1 (c)).

A solução Nariai é definida como sendo a tripla

$$\left( M = [0, \pi] \times \mathbb{S}^{n-1}, g = \frac{1}{n} [dr \otimes dr + (n-2)g_{\mathbb{S}^{n-1}}], u = \text{sen}(r) \right). \quad (2.30)$$

Esse modelo de solução para (2.9) pode ser visto como sendo o limite da solução de Sitter-Schwarzschild quando o parâmetro  $\mathbf{m}$  se aproxima de  $\mathbf{m}_{\max}$ , isso foi mostrado para  $n = 3$  em [26] e para todas as dimensões  $n \geq 3$  em [12]. Nesse caso, temos que  $u_{\max} = 1$  e  $\text{MAX}(u) = \{\frac{\pi}{2}\} \times \mathbb{S}^{n-1}$ . Além disso, o bordo de  $M$

$$\partial M = \{0\} \times \mathbb{S}^{n-1} \cup \{\pi\} \times \mathbb{S}^{n-1},$$

tem duas componentes conexas. Mostraremos que de fato (2.30) é uma solução para (2.9). Considere  $\tilde{g} = dr^2 + (n-2)g_{\mathbb{S}^{n-1}}$ , então  $g = \frac{1}{n}\tilde{g}$ , logo  $g$  é uma métrica conforme a  $\tilde{g}$  com fator de conformidade  $e^{2h} = \frac{1}{n}$ , onde  $h = -\frac{1}{2}\ln(n)$ . Seja  $\{\tilde{e}_1 = \partial r, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_n\}$  um referencial ortonormal para  $(M, \tilde{g})$  com  $\{\tilde{e}_i\}_{i \geq 2}$  tangente a  $\mathbb{S}^{n-1}$ , então  $\{e_1 = e^{-h}\tilde{e}_1, \dots, e_n = e^{-h}\tilde{e}_n\}$  é um referencial ortonormal para  $(M, g)$ . Assim temos

$$\nabla_g \mathbf{u} = e^{-2h} \nabla_{\tilde{g}} \mathbf{u} = n \cos(r) \partial r. \quad (2.31)$$

Pelo que vimos na seção de métricas conformes,

$$\nabla_X^g Y = \nabla_X^{\tilde{g}} Y,$$

para todo  $X, Y \in M$ . Assim,

$$\begin{aligned} \nabla_g^2 \mathbf{u}(e_i, e_j) &= \langle \nabla_{e_i}^{\tilde{g}} \nabla^g \mathbf{u}, e_j \rangle_g \\ &= \langle \nabla_{e_i}^{\tilde{g}} (n \cos(r) \partial r), e_j \rangle_g \\ &= e_i(n \cos(r)) \langle \partial r, e_j \rangle_g + n \cos(r) \langle \nabla_{e_i}^{\tilde{g}} \partial r, e_j \rangle_g \\ &= -n \sin(r) \langle \partial r, e_i \rangle_g \langle \partial r, e_j \rangle_g + n \cos(r) \langle \nabla_{e_i}^{\tilde{g}} \partial r, e_j \rangle_g. \end{aligned}$$

Agora, como  $\tilde{g} = dr^2 + \phi^2(r)g_{\mathbb{S}^{n-1}}$  onde  $\phi(r) = \sqrt{n-2}$  para todo  $r \in M$ , segue do item (2) da Proposição 1.28, que

$$\nabla_{e_i}^{\tilde{g}} \partial r = 0,$$

daí,

$$\nabla_g^2 \mathbf{u}(e_i, e_j) = -n \sin(r) \langle \partial r, e_i \rangle_g \langle \partial r, e_j \rangle_g, \quad (2.32)$$

tomando o traço, temos que

$$\Delta_g \mathbf{u} = -n \sin(r). \quad (2.33)$$

Como  $h = -\frac{\ln(n)}{2}$  é constante, então usando a Proposição 1.26, obtemos

$$\text{Ric}_g(e_i, e_j) = \text{Ric}_{\tilde{g}}(e_i, e_j),$$

mas  $e^{-2h} = n$ , daí

$$\text{Ric}_g(e_i, e_j) = n \text{Ric}_{\tilde{g}}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j). \quad (2.34)$$

Pelo item (3) da Proposição 1.30, obtemos

$$\text{Ric}_{\tilde{g}}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) = \text{Ric}^{\mathbb{S}^{n-1}}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j). \quad (2.35)$$

Como  $\mathbb{S}^{n-1}$  com a métrica canônica é de Einstein então

$$\text{Ric}^{\mathbb{S}^{n-1}}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) = (n-2)g_{\mathbb{S}^{n-1}}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j),$$

mas para  $i, j \geq 2$ , vale

$$\tilde{g}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) = (n-2)g_{\mathbb{S}^{n-1}}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j),$$

portanto, para  $i, j \geq 2$ , temos que

$$\text{Ric}^{\mathbb{S}^{n-1}}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) = \tilde{g}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) \quad (2.36)$$

Substituindo (2.36) em (2.35), obtemos

$$\text{Ric}_{\tilde{g}}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) = \tilde{g}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j), \quad (2.37)$$

para todo  $i, j \geq 2$ . Pelos demais itens da Proposição 1.30 obtemos que

$$\text{Ric}_{\tilde{g}}(\tilde{e}_1, \tilde{e}_i) = 0, \quad (2.38)$$

para todo  $i \geq 1$ . Portanto, de (2.37) e (2.38) deduzimos que a expressão do tensor de Ricci de  $M$  na métrica  $\tilde{g}$  tem a seguinte expressão

$$\text{Ric}_{\tilde{g}} = -dr^2 + \tilde{g}. \quad (2.39)$$

Segue daí e de (2.34) que

$$\text{Ric}_g = -ndr^2 + ng. \quad (2.40)$$

Agora analisaremos os casos,

- Caso 1:  $2 \leq i, j \leq n$ . Nesse caso, temos por (2.32) e (2.40), que

$$\nabla_g^2 u(e_i, e_j) = 0, \quad \text{Ric}_g(e_i, e_j) = ng(e_i, e_j),$$

assim, segue de (2.33) que

$$u\text{Ric}_g(e_i, e_j) - \nabla_g^2 u(e_i, e_j) + \Delta_g u(e_i, e_j) = nu g_{ij} - nu g_{ij} = 0.$$

- Caso 2:  $i = j = 1$ . Nesse caso temos que  $\text{Ric}_g(e_i, e_j) = 0$  e  $\nabla_g^2 u = -nu$ , logo

$$u\text{Ric}_g(e_i, e_j) - \nabla_g^2 u(e_i, e_j) + \Delta_g u(e_i, e_j) = nu - nu = 0.$$

- *Caso 3:  $i = 1$  e  $j \geq 2$ . Nesse caso, é imediato ver que*

$$\nabla_g^2(e_i, e_j) = \text{Ric}_g(e_i, e_j) = 0,$$

*assim*

$$u \text{Ric}_g(e_i, e_j) - \nabla_g^2 u(e_i, e_j) + \Delta_g u g(e_i, e_j) = 0.$$

Como  $u = \sin(r) \geq 0$  em  $M$  com  $u = 0$  em  $\partial M = \{0\} \times \mathbb{S}^{n-1} \cup \{\pi\} \times \mathbb{S}^{n-1}$ , segue que (2.30) é solução para (2.9).  $\square$

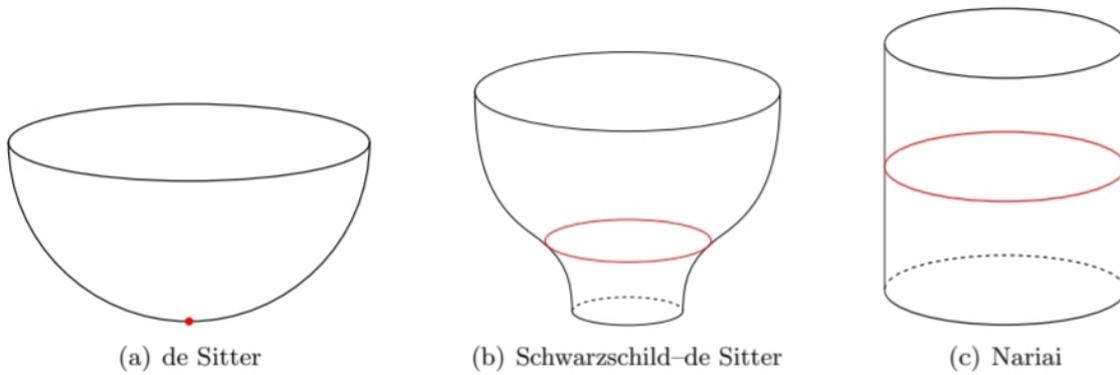


Figura 2.1: Soluções rotacionalmente simétricas para o problema (2.9).

O ponto vermelho e as linhas vermelhas representam o conjunto  $\text{MAX}(u)$  para os três modelos.

## 2.3 Gravidade superficial e massa virtual

Vimos na seção anterior que a quantidade  $|\nabla u|$  é localmente constante e positiva em  $\partial M$ . As componentes conexas de  $\partial M$  são chamadas de *horizontes*, no caso em que  $\Lambda > 0$ , veremos que os horizontes são divididos em três classes, horizontes do tipo buraco negro, do tipo cilíndrico e do tipo cosmológico. O valor de  $|\nabla u|$  em um determinado horizonte dá origem a importante noção de *gravidade superficial*. A este respeito, é importante notar que por um lado as equações em (2.8) são invariantes por rescaling do potencial estático, enquanto que, por outro lado, o valor de  $|\nabla u|$  depende fortemente de tal escolha. Portanto, para lidar com objetos significativos, os autores em [6] notaram que era preciso remover essa ambiguidade, fixando uma normalização da função  $u$ . Isso foi feito de maneiras diferentes, dependendo do sinal da constante cosmológica, bem como de algumas suposições geométricas naturais.

- No caso em que  $\Lambda > 0$  e  $M$  é compacta, que é o caso de interesse dessa dissertação, a gravidade de superfície de um horizonte  $\Sigma \subset \partial M$  é definida como sendo a quantidade

$$\kappa(\Sigma) = \frac{|\nabla \mathbf{u}|_{\Sigma}}{\max_M \mathbf{u}}.$$

Essa definição coincide com uma sugerida em [9] e [43]. Claro, normalizando  $\mathbf{u}$  de modo que  $\max_M \mathbf{u} = 1$ , a definição acima se reduz a

$$\kappa(\Sigma) = |\nabla \mathbf{u}|_{\Sigma}.$$

- No caso em que  $\Lambda = 0$  e  $(M, \mathbf{g}, \mathbf{u})$  é assintoticamente plana com potencial estático limitado, a gravidade superficial de um horizonte  $\Sigma \subset \partial M$  é definida como

$$\kappa(\Sigma) = \frac{|\nabla \mathbf{u}|_{\Sigma}}{\sup_M \mathbf{u}}.$$

Novamente, sob a normalização usual  $\sup_M \mathbf{u} = 1$ , a definição acima se reduz a

$$\kappa(\Sigma) = |\nabla \mathbf{u}|_{\Sigma}.$$

- No caso em que  $\Lambda < 0$  e  $(M, \mathbf{g}, \mathbf{u})$  é uma solução estática compactamente conforme, de modo que a curvatura escalar  $R^{\partial_{\infty} M}$  da métrica induzida por (a extensão suave) de  $\bar{\mathbf{g}} = \mathbf{u}^{-2} \mathbf{g}$  na fronteira do infinito  $\partial_{\infty} M$  é uma constante não-nula. Nesse caso, a gravidade superficial de um horizonte  $\Sigma \subset \partial M$  é definida como

$$\kappa(\Sigma) = \frac{|\nabla \mathbf{u}|_{\Sigma}}{\sqrt{\left| \frac{n R^{\partial_{\infty} M}}{2(n-2)\Lambda} \right|}}.$$

Nesse caso, de acordo com [[19], seção VII], uma normalização natural para o potencial estático é aquela para o qual, sob as premissas acima, se tem que o valor da constante de  $|R^{\partial_{\infty} M}|$  coincide com  $\frac{-2(n-2)\Lambda}{n}$ , tendo fixado este valor, a gravidade superficial pode ser calculada como

$$\kappa(\Sigma) = |\nabla \mathbf{u}|_{\Sigma}.$$

Os conceitos de variedade assintoticamente plana e compactamente conforme, bem como uma motivação para as normalizações acima podem ser encontradas no apêndice em [6]. Veja também seções 2.1.2, 2.1.3 e 2.1.4 de [7].

Antes de prosseguir, faremos alguns comentários sobre a noção de gravidade superficial. No caso newtoniano, esse termo se refere a aceleração devido a gravidade que todos os

objetos que estão na superfície de um grande objeto ou próximo a ela experimentam. É a gravidade da superfície, por exemplo, que nos puxa, assim como os objetos ao nosso redor, em direção ao centro da Terra. No caso newtoniano, a gravidade superficial pode ser muito bem compreendida e calculada através de duas leis na física, ambas criadas por Isaac Newton, uma delas é a *Lei da Gravitação Universal* que diz que a força gravitacional entre corpos que apresentem massa é sempre atrativa e pode ser calculada com base na expressão

$$F = \frac{GMm}{r^2}, \quad (2.41)$$

onde  $F$  é a força de atração gravitacional ou força peso (N),  $G$  é a constante gravitacional universal ( $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$ ),  $m$  e  $M$  são as massas dos corpos (kg), e  $r$  é a distância entre os corpos (m). A outra lei de Newton que consideraremos é a *Segunda Lei de Movimento*. Essa lei nos diz que a força resultante em um objeto é igual a massa do objeto multiplicada por sua aceleração, ou seja,

$$F_R = m \cdot a, \quad (2.42)$$

essa força resultante agindo sobre um determinado objeto de massa  $m$ , também é interpretada na literatura física como sendo a força gravitacional que tal objeto experimenta entre si mesmo e algum outro objeto de massa maior  $M$ . Em outras palavras, imaginamos que essas duas massas  $m$  e  $M$ , são as únicas massas no universo. Nesse caso, a única força agindo sobre essa massa menor é a força gravitacional entre ela e a maior. É nesse sentido que diz-se que a força resultante atuando sobre a massa  $m$  é igual a força gravitacional sobre ela. Com isso, através de (2.41) e (2.42), é possível obter uma expressão para o cálculo da aceleração gravitacional ( $g$ ) da massa  $m$

$$g = \frac{GM}{r^2}, \quad (2.43)$$

essa aceleração experimentada pela massa menor  $m$  não depende de  $m$ , mas sim da posição que este objeto de massa  $m$  se encontra em relação à massa maior  $M$ . Com isso, fica entendido o fato de que todos os objetos próximos a superfície de um grande objeto caem na mesma taxa, independente da sua massa. Segue de (2.43), o conhecido valor de  $g = 9,8 \text{m/s}^2$  para a gravidade da Terra, de  $2,53g$  para gravidade de Júpiter e de  $28,02g$  para gravidade do Sol. Mas no caso de buracos negros, a gravidade de superfície newtoniana não é mais um conceito significativo, uma vez que se torna infinito quando

calculada no horizonte. Com isso, somos levados a introduzir um conceito relativístico da gravidade superficial. A Teoria da Relatividade desenvolvida por Einstein em 1915, teve como principal objetivo esclarecer algumas lacunas deixadas pelas leis de Newton, trata-se de um conjunto de hipóteses que generaliza a lei de gravitação universal de Newton, fornecendo uma descrição unificada da gravidade como uma propriedade geométrica do espaço e do tempo, ou espaço-tempo, as equações da relatividade sugerem que a geometria do espaço-tempo é alterada na presença de objetos muito massivos, como planetas, estrelas e buracos negros. Na Teoria da Relatividade, gravidade superficial é naturalmente definida em *horizontes de Killing* cuja definição traremos agora.

**Definição 2.4.** *Seja  $(X, \gamma)$  um espaço-tempo estático no vácuo com dimensão  $(n + 1)$ . Suponha que exista um campo vetorial de Killing  $K$  em  $X$ , ou seja,  $\mathcal{L}_K \gamma = 0$  em  $X$ . Um horizonte de Killing  $S \subset X$ , é uma hipersuperfície nula  $n$ -dimensional, invariante sob o fluxo de  $K$ , de modo que*

$$|K|_\gamma^2 = 0 \text{ e } K \neq 0, \text{ em } S.$$

**Definição 2.5.** *A gravidade de superfície de um horizonte de Killing  $S$  é definida como sendo a quantidade  $\kappa$  que satisfaz*

$$2\kappa K|_S = -(\nabla |K|_\gamma^2)|_S. \quad (2.44)$$

A priori,  $\kappa$  é uma função em  $S$ , mas pode-se mostrar que  $\kappa$  é constante em qualquer horizonte de Killing  $S$ , isso pode ser visto em [3] ou [[31], Teorema 7.1]. No que diz respeito a interpretação física da definição acima, é provado na seção 2.1.2 de [7] que a gravidade superficial mede a aceleração experimentada ao longo das curvas integrais de  $K$  no horizonte de Killing  $S$ .

A proposição seguinte dá uma fórmula alternativa para calcular a superfície de gravidade de um horizonte de Killing.

**Proposição 2.3.** *Seja  $S$  um horizonte de Killing em relação ao campo de Killing  $K$ . A gravidade superficial de  $S$  pode ser explicitamente calculada como*

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2}(|\nabla |K|_\gamma^2)|_S. \quad (2.45)$$

*Demonstração.* Veja Proposição 2.1.1 de [7]. □

Deve-se notar que o valor de  $\kappa$  em 2.44 e 2.45 muda quando redimensionamos o vetor de Killing  $K$ . Portanto, para que a noção de gravidade superficial seja de algum interesse, isso deve ser corrigido, fixando uma normalização, isso é feito em [7]. O leitor atento deve ter observado que no início dessa seção demos uma definição para gravidade superficial no caso estático e depois introduzimos a definição geral de gravidade superficial, porém as duas definições são coerentes, isso é mostrado na seção 2.1.4 de [7], as escolhas das normalizações no início da seção são feitas daquela forma, exatamente para que ambas as definições coincidam no caso estático.

Tendo isso em mente, não é surpreendente que o comportamento de  $|\nabla\mathbf{u}|$ , seja nos horizontes ou ao longo das extremidades geométricas de uma solução estática, pode ser colocado como um aspecto de massa da própria solução. No caso em que  $(M, \mathbf{g}, \mathbf{u})$  é uma solução estática para (2.8) com  $\Lambda = 0$  e assintoticamente plana, existe a noção (tipo newtoniana) de massa que por [6] e [7] pode ser calculada de duas maneiras

$$m(M, \mathbf{g}, \mathbf{u}) = \frac{1}{(\mathbf{n} - 2)|\mathbb{S}^{\mathbf{n}-1}|} \int_{\partial M} |\nabla\mathbf{u}| d\sigma = \frac{1}{(\mathbf{n} - 2)|\mathbb{S}^{\mathbf{n}-1}|} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} \langle \nabla\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle d\sigma,$$

onde  $S_R$  é uma esfera euclidiana de raio  $R$  e  $\mathbf{v}$  o campo normal unitário apontando para fora de  $S_R$ . Em ([5], fórmula (4)) foi provado que a definição acima concorda com a noção de massa ADM da variedade assintoticamente plana  $(M, \mathbf{g})$ , que de acordo com [2] e [4] é definida como

$$M_{\text{ADM}}(m, \mathbf{g}) = \frac{1}{2(\mathbf{n} - 1)|\mathbb{S}^{\mathbf{n}-1}|} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} \sum_{ij} \left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j} \right) v^j d\sigma,$$

onde  $\{x^i\}_{i=1}^{\mathbf{n}}$  é um sistema de coordenadas em  $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ . Observe que quando  $\partial M$  é não vazio e conexo, a gravidade da superfície e a massa são proporcionais entre si. Em resumo, para uma solução assintoticamente plana de (2.8) com  $\Lambda = 0$ , com bordo compacto e conexo  $\partial M$ , temos que

$$\frac{|\partial M|}{(\mathbf{n} - 2)|\mathbb{S}^{\mathbf{n}-1}|} \kappa(\partial M) = m_{\text{ADM}}(m, \mathbf{g}). \quad (2.46)$$

Para mais informações sobre a massa ADM sugerimos o leitor as referências [48] e [49]. No caso em que  $(M, \mathbf{g}, \mathbf{u})$  é solução para 2.8 com  $\Lambda < 0$  e  $(M, \mathbf{g})$  é assintoticamente hiperbólica (ver definição 1.2.11 em [7]), também há uma noção de massa bastante compreendida (veja [17] e [52]). Para o caso em que  $(M, \mathbf{g}, \mathbf{u})$  é uma solução para (2.9), não havia uma noção de massa bem definida, foi a partir dos casos acima que os autores em [6] se motivaram a definir uma noção de massa para soluções estáticas com constante

cosmológica positiva. Tal massa é chamada de *massa virtual* cuja definição veremos um pouco mais adiante. Na literatura física, há um consenso geral sobre o fato de que o parâmetro de massa  $m$  que aparece nos exemplos modelos de métricas estáticas, deve ser fisicamente interpretado como a massa da solução. Com isso, os exemplos de métricas estáticas com  $\Lambda > 0$  listados na seção anterior, que são os exemplos explícitos existentes até o momento, serviram de referência para os autores em [6] definir o conceito de massa virtual de uma solução  $(M, g, u)$  de (2.9). Por esta razão, é útil introduzir desde agora as funções  $k_+$  e  $k_-$ , cujos gráficos são traçados para  $n = 3$ , na figura 2.2. Elas representam as gravidades superficiais das soluções do modelo como funções do parâmetro de massa  $m$ .

**Definição 2.6.** *A função de gravidade da superfície externa*

$$k_+ : [0, m_{\max}) \rightarrow [1, \sqrt{n}), \quad (2.47)$$

é definida por

$$k_+(m) = \begin{cases} 1, & \text{se } m = 0, \\ \sqrt{\frac{r_+^2(m)[1 - (n-2)mr_+^{-n}(m)]^2}{1 - (\frac{m}{m_{\max}})^{\frac{2}{n}}}}, & \text{se } 0 < m < m_{\max}, \end{cases}$$

onde  $r_+(m)$  é a maior solução positiva para  $1 - r^2 - 2mr^{2-n} = 0$ .

Observamos que,  $k_+(m)$  nada mais é que o valor da constante de  $\frac{|\nabla u|}{u_{\max}}$  em  $\{|x| = r_+(m)\}$  para a solução de Sitter-Schwarzschild com parâmetro de massa igual a  $m$ . Observamos também que  $k_+$  é contínuo, estritamente crescente e  $k_+ \rightarrow \sqrt{n}$ , quando  $m \rightarrow m_{\max}^-$ .

**Definição 2.7.** *A função de gravidade da superfície interna*

$$k_- : (0, m_{\max}] \rightarrow [\sqrt{n}, +\infty), \quad (2.48)$$

é definida por

$$k_-(m) = \begin{cases} \sqrt{n}, & \text{se } m = m_{\max}, \\ \sqrt{\frac{r_-^2(m)[1 - (n-2)mr_-^{-n}(m)]^2}{1 - (\frac{m}{m_{\max}})^{\frac{2}{n}}}}, & \text{se } 0 < m < m_{\max}, \end{cases}$$

onde  $r_-(m)$  é a menor solução positiva para  $1 - r^2 - 2mr^{2-n} = 0$ .

Observamos que o valor de  $k_-(\mathbf{m})$ , onde  $0 < \mathbf{m} < \mathbf{m}_{\max}$ , nada mais é que o valor da constante  $\frac{|\nabla \mathbf{u}|}{\mathbf{u}_{\max}}$  em  $\{|\mathbf{x}| = r_-(\mathbf{m})\}$  para a solução de Sitter-Schwarzschild com parâmetro de massa igual a  $\mathbf{m}$ . Também observamos que,  $k_-$  é contínuo, estritamente decrescente e  $k_-(\mathbf{m}) \rightarrow +\infty$ , quando  $\mathbf{m} \rightarrow 0^+$ .

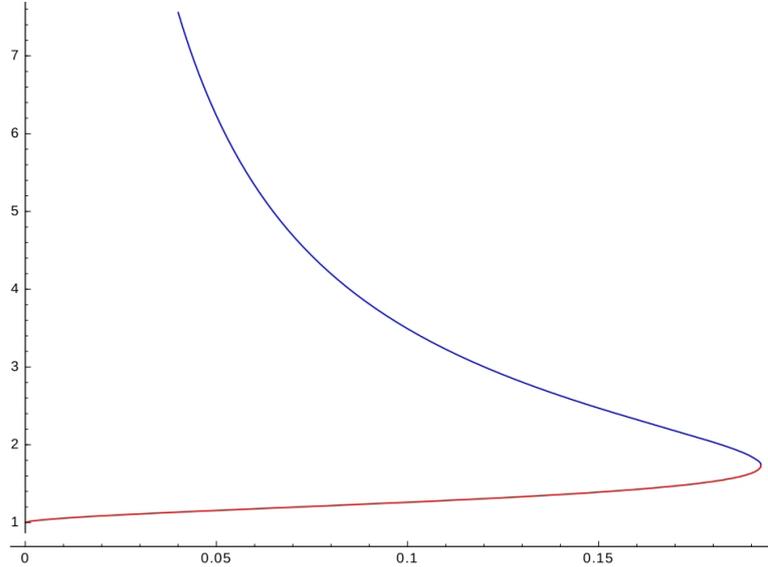


Figura 2.2: Gráfico das gravidades superficiais  $\frac{|\nabla \mathbf{u}|}{\mathbf{u}_{\max}}$  das componentes conexas do bordo da solução de Sitter-Schwarzschild como funções da massa para  $n = 3$ .

A parte do gráfico que está de vermelho representa a gravidade da superfície do bordo  $\partial M_+ = \{r = r_+(\mathbf{m})\}$ , enquanto que a parte superior que está de azul representa a gravidade da superfície do bordo  $\partial M_- = \{r = r_-(\mathbf{m})\}$ . Observe que, para  $\mathbf{m} = 0$  recuperamos o valor constante  $|\nabla \mathbf{u}| = 1$  da gravidade superficial no bordo da solução de Sitter. Outra situação especial é quando  $\mathbf{m} = \mathbf{m}_{\max}$ . Neste caso, o gráfico atribui  $\mathbf{m}_{\max} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$  alcançado pela gravidade da superfície em ambas as componentes conexas do bordo da solução Nariai.

Antes de apresentarmos a noção de massa virtual, é necessário introduzir alguns conceitos.

**Definição 2.8.** *Seja  $(M, g, \mathbf{u})$  uma solução para (2.9). Um horizonte  $\Sigma \subset \partial M$  é:*

- *Do tipo cosmológico, se  $\kappa(\Sigma) < \sqrt{n}$ ;*
- *Do tipo buraco negro, se  $\kappa(\Sigma) > \sqrt{n}$ ;*
- *Do tipo cilíndrico, se  $\kappa(\Sigma) = \sqrt{n}$ ,*

onde  $\kappa(\Sigma) = \frac{|\nabla \mathbf{u}|_\Sigma}{\mathbf{u}_{\max}}$  é a gravidade superficial de  $\Sigma$ .

**Definição 2.9.** Uma componente conexa  $N$  de  $M \setminus \text{MAX}(\mathbf{u})$  é chamado de:

- Uma região externa, se todos os seus horizontes forem do tipo cosmológico, ou seja, se

$$\max_{\Sigma \in \pi_0(\partial N)} \kappa(\Sigma) < \sqrt{\mathbf{n}}.$$

- Uma região interna, se tiver pelo menos um horizonte do tipo buraco negro, ou seja, se

$$\max_{\Sigma \in \pi_0(\partial N)} \kappa(\Sigma) > \sqrt{\mathbf{n}}.$$

- Uma região cilíndrica, se não houver horizontes do tipo buraco negro e houver pelo menos um horizonte cilíndrico, ou seja, se

$$\max_{\Sigma \in \pi_0(\partial N)} \kappa(\Sigma) = \sqrt{\mathbf{n}}.$$

**Observação 2.4.** Na solução de Sitter 2.28 temos que  $|\nabla \mathbf{u}| \equiv 1$  em  $\partial M$ , portanto de acordo com a Definição 2.8, tem-se que esse horizonte é do tipo cosmológico. Na solução de Sitter-Schwarzschild, a gravidade superficial satisfaz

$$\kappa(\partial M_+) = \frac{|\nabla \mathbf{u}|}{\mathbf{u}_{\max}} = k_+(\mathbf{m}) < \sqrt{\mathbf{n}} \text{ em } \partial M_+$$

$$\kappa(\partial M_-) = \frac{|\nabla \mathbf{u}|}{\mathbf{u}_{\max}} = k_-(\mathbf{m}) > \sqrt{\mathbf{n}} \text{ em } \partial M_-,$$

para  $0 < \mathbf{m} < \mathbf{m}_{\max}$ . Assim, de acordo com a Definição 2.8, tem-se que  $\partial M_+$  é do tipo cosmológico, enquanto que  $\partial M_-$  é do tipo buraco-negro. Vimos no exemplo 2.2 que  $M \setminus \text{MAX}(\mathbf{u})$  tem exatamente duas componentes conexas,  $M_+$  com bordo  $\partial M_+$  e  $M_-$  com bordo  $\partial M_-$ . Portanto, pela Definição 2.9, tem-se que  $M_+$  é uma região externa, enquanto que  $M_-$  é uma região interna. No caso da solução Nariai 2.30, temos que

$$|\nabla \mathbf{u}| \equiv \sqrt{\mathbf{n}} \text{ em } \partial M = \{0\} \times \mathbb{S}^{n-1} \cup \{\pi\} \times \mathbb{S}^{n-1}.$$

Logo as duas componentes de bordo  $\{0\} \times \mathbb{S}^{n-1}$  e  $\{\pi\} \times \mathbb{S}^{n-1}$  são do tipo cilíndrico. E pela definição acima, tem-se também que as duas componentes conexas de  $M \setminus \text{MAX}(\mathbf{u})$  são regiões cilíndricas.

Apresentaremos agora o conceito de massa virtual de uma determinada componente conexa de  $M \setminus \text{MAX}(\mathbf{u})$ .

**Definição 2.10.** *Seja  $(M, \mathbf{g}, \mathbf{u})$  uma solução de (2.9) e  $N$  uma componente conexa de  $M \setminus \text{MAX}(\mathbf{u})$ . A massa virtual de  $N$  é denotada por  $\mu(N, \mathbf{g}, \mathbf{u})$  e é definida da seguinte forma:*

(i) *Se  $N$  é uma região externa, então definimos*

$$\mu(N, \mathbf{g}, \mathbf{u}) = k_+^{-1} \left( \max_{\partial N} \frac{|\nabla \mathbf{u}|}{\mathbf{u}_{\max}} \right), \quad (2.49)$$

*onde  $k_+^{-1}$  é a inversa da função de gravidade da superfície externa  $k_+$  definida em 2.47.*

(ii) *Se  $N$  é uma região interna, então definimos*

$$\mu(N, \mathbf{g}, \mathbf{u}) = k_-^{-1} \left( \max_{\partial N} \frac{|\nabla \mathbf{u}|}{\mathbf{u}_{\max}} \right). \quad (2.50)$$

*onde  $k_-^{-1}$  é a inversa da função gravidade da superfície interna  $k_-$  definida em 2.48.*

Em outras palavras, a massa virtual de uma componente conexa  $N$  de  $M \setminus \text{MAX}(\mathbf{u})$  pode ser pensada como a massa (parâmetro) de uma solução modelo que seria responsável pelo (o máximo da) gravidade da superfície calculada em  $\partial N$ . Nesse sentido, as soluções rotacionalmente simétricas descritas na seção 2.2 desempenham aqui o papel de referência. É fácil ver que se  $(M, \mathbf{g}, \mathbf{u})$  é o de Sitter, ou de Sitter-Schwarzschild, ou a solução Nariai, então a massa virtual coincide com o parâmetro de massa explícito  $\mathbf{m}$  que aparece na seção 2.2.

# Capítulo 3

## Resultados auxiliares

Nesse capítulo apresentaremos resultados auxiliares que serão usados nas demonstrações dos teoremas do próximo capítulo.

### 3.1 Lema de Reilly

Uma importante caracterização de esferas entre a classe de variedades Riemannianas compactas e conexas é dada por Obata em [41], a saber, uma condição necessária e suficiente para uma variedade Riemanniana  $(M^n, g)$  completa ser isométrica a uma esfera  $S^n(c)$  deve ser, a existência de uma função suave não constante  $f$  sobre  $M$ , satisfazendo

$$\nabla_g^2 f = -c f g,$$

para alguma constante  $c > 0$ . Motivado por esse resultado, Reilly em [46] obteve a seguinte caracterização dos hemisférios para variedades com bordo suave e não vazio. A demonstração desse resultado que apresentaremos aqui foi baseada na presente em [33].

**Lema 3.1** (Lema de Reilly). *Seja  $(M^n, g)$  variedade Riemanniana compacta com bordo  $\Sigma = \partial M$  totalmente geodésico. Suponhamos que existe uma função  $f$  sobre  $M$  tal que  $f = 0$  sobre  $\Sigma$ ,  $f \geq 0$  sobre  $M$  e  $\nabla_g^2 f = -f g$ . Então  $(M, g)$  é isométrica ao hemisfério  $(S_+^n, g_{S^n})$ .*

*Demonstração.* Como  $M$  é compacta então  $M$  é completa. Como o bordo é totalmente geodésico, podemos concluir usando o Teorema de Hopf e Rinow que toda geodésica de  $M$  que não está contida no bordo, pode ser estendida, ou indefinidamente ou até tocar o bordo. Além disso, dados quaisquer dois pontos em  $M$  existe uma geodésica minimizante

em  $M$  que os une. Como  $M$  é compacta então  $f$  atinge seu valor máximo em algum ponto  $p_0 \in M$ . Suponhamos, sem perda de generalidade, que  $f(p_0) = 1$ .

Seja  $\gamma(s)$  qualquer geodésica normalizada partindo de  $p_0$  e  $\phi(s) = f(\gamma(s))$ . Então temos

$$\begin{aligned}\phi(0) &= f(\gamma(0)) = 1; \\ \phi'(0) &= \langle \nabla f(p_0), \gamma'(0) \rangle_g = 0; \\ \phi''(s) &= \frac{d}{ds} \langle \nabla f(\gamma(s)), \gamma'(s) \rangle_g + \langle \nabla f(\gamma(s)), \nabla_{\gamma'(s)} \gamma'(s) \rangle_g \\ &= \langle \nabla_{\gamma'(s)} \nabla f(\gamma(s)), \gamma'(s) \rangle_g \\ &= \nabla^2 f(\gamma(s))(\gamma'(s), \gamma'(s)) \\ &= -f(\gamma(s)) \\ &= -\phi(s).\end{aligned}$$

Logo,  $\phi(s) = \cos s$ . Em particular, concluímos que  $f = \cos r$  onde  $r$  é a função distância ao ponto  $p_0$ . Como  $M$  é completa, cada tal geodésica  $\gamma$  pode ser estendida ou indefinidamente ou até encontrar o bordo  $\Sigma$ . Como  $f = 0$  em  $\Sigma$  e  $f(\gamma(s)) = \phi(s) = \cos s$  não se anula para  $0 \leq s < \frac{\pi}{2}$ , então  $\gamma$  certamente está definida para  $0 \leq s \leq \frac{\pi}{2}$ .

Como por hipótese  $f \geq 0$  em  $M$ , então  $\gamma$  não pode estar definida para  $s > \frac{\pi}{2}$ , já que sobre esses pontos  $f(\gamma(s)) = \cos s < 0$ . Portanto, qualquer geodésica em  $M$  partindo de  $p_0$  tem como intervalo máximo de definição  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . Além disso, concluímos também que  $\exp_{p_0}(\partial B[0, \frac{\pi}{2}]) = \Sigma$ , onde  $B[0, \frac{\pi}{2}] = \overline{B(0, \frac{\pi}{2})} \subset T_{p_0}M$  é a bola fechada de raio  $\frac{\pi}{2}$  centrada na origem.

Como qualquer ponto de  $M$  pode ser ligado a  $p_0$  por uma geodésica minimizante e esta por sua vez está definida em  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , então a aplicação  $\exp_{p_0} : B[0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow M$  é sobrejetiva.

**Afirmção 3.1.**  $\exp_{p_0} : B[0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow M$  é injetiva.

Com efeito, suponhamos que existam  $v_1, v_2 \in B[0, \frac{\pi}{2}]$  tais que  $\exp_{p_0}(v_1) = \exp_{p_0}(v_2) = q$ . Então existem geodésicas normalizadas  $\gamma_1, \gamma_2 : B[0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow M$  tais que  $\gamma'(0) = \frac{v_1}{|v_1|}$ ,  $\gamma'(0) = \frac{v_2}{|v_2|}$  e  $\gamma_1(t_1) = q = \gamma_2(t_2)$  onde  $t_1 = |v_1|$  e  $t_2 = |v_2|$ . Como  $r$  é a função distância, então  $|\nabla r| = 1$  e conseqüentemente as curvas integrais do campo  $\nabla r$  são geodésicas, assim, como  $f = \cos r$ , temos que

$$\nabla f(q) = -\sin t_1 \nabla r(\gamma_1(t_1)) = -\sin t_1 \gamma_1'(t_1),$$

e,

$$\nabla f(q) = -\sin t_2 \nabla r(\gamma_2(t_2)) = -\sin t_2 \gamma_2'(t_2).$$

Daí,

$$-\sin t_1 \gamma'_1(t_1) = -\sin t_2 \gamma'_2(t_2),$$

como  $|\gamma'_1(t_1)| = |\gamma'_2(t_2)| = 1$  então  $\sin t_1 = \sin t_2$ . Mais ainda,  $\gamma'_1(t_1) = \gamma'_2(t_2)$  logo  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$  e portanto  $\exp_{p_0} : B[0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow M$  é injetiva.

**Afirmção 3.2.** *A aplicação  $\exp_{p_0} : B(0, \frac{\pi}{2}) \subset T_{p_0}M \rightarrow B(p_0, \frac{\pi}{2}) \subset M$  é um difeomorfismo.*

Seja  $\gamma : [0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow M$  uma geodésica normalizada em  $M$  com  $\gamma(0) = p_0$  e seja  $J$  um campo de Jacobi ao longo de  $\gamma$  tal que  $J(0) = 0$  e  $\gamma'(t) \perp J(t)$ . Fixemos  $t_0 \in [0, \frac{\pi}{2})$  e suponhamos, inicialmente que  $|J(t_0)| = 1$ . Consideremos  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  a geodésica normalizada tal que  $\alpha(0) = \gamma(t_0)$  e  $\alpha'(0) = J(t_0)$ . Esta geodésica  $\alpha$  determina por sua vez, uma família  $\gamma_s$  de geodésicas partindo de  $p_0$  tal que o campo de Jacobi  $J$  é realizado por esta família, ou seja,  $J$  é o campo variacional, (veja página 132 de [13]). Temos então uma superfície parametrizada  $\mathbf{b}(s, t) = \gamma_s(t)$  tal que as curvas  $\alpha_1(s) = \mathbf{b}(s, 0) = p_0$   $\alpha(s) = \mathbf{b}(s, t_0)$  são geodésicas. Além disso,  $\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s}(0, t) = J(t)$  e  $\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}(0, t) = \gamma'(t)$ .

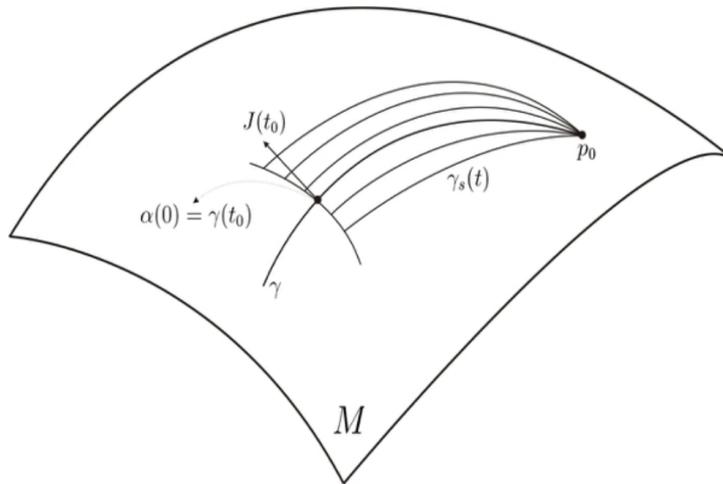


Figura 3.1: Ilustração da superfície parametrizada.

Assim, pela Proposição 1.16, temos que

$$\begin{aligned} L'(0) &= \left\langle \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s}(0, t_0), \gamma'(t_0) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s}(0, 0), \gamma'(0) \right\rangle \\ &= \langle J(t_0), \gamma'(t_0) \rangle - \langle J(0), \gamma'(0) \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}
 L''(0) &= \int_0^{t_0} \left( \left| \frac{D}{dt} \frac{\partial b}{\partial s} \right|^2 - \left\langle \mathbf{R} \left( \gamma', \frac{\partial b}{\partial s} \right) \frac{\partial b}{\partial s}, \gamma' \right\rangle - \left\langle \gamma', \frac{D}{dt} \frac{\partial b}{\partial s} \right\rangle^2 \right) dt \\
 &= \int_0^{t_0} (|J'(t)|^2 - \langle \mathbf{R}(\gamma', J)J, \gamma' \rangle - \langle \gamma', J' \rangle^2) dt \\
 &= \int_0^{t_0} (|J'(t)|^2 + \langle \mathbf{R}(\gamma', J)\gamma', J \rangle - \langle \gamma', J' \rangle^2) dt \\
 &= \int_0^{t_0} (|J'(t)|^2 + \langle J'', J \rangle - \langle \gamma', J' \rangle^2) dt \\
 &= \int_0^{t_0} \left( \frac{d}{dt} \langle J', J \rangle - \langle \gamma', J' \rangle^2 \right) dt \\
 &= \langle J'(t_0), J(t_0) \rangle - \langle J'(0), J(0) \rangle - \int_0^{t_0} \langle \gamma', J' \rangle^2 dt \\
 &= \langle J'(t_0), J(t_0) \rangle,
 \end{aligned}$$

pois  $J(0) = 0$  e  $0 = \frac{d}{dt} \langle J, \gamma' \rangle = \langle J', \gamma' \rangle + \langle J, \nabla_{\gamma'} \gamma' \rangle = \langle \gamma', J' \rangle$ . Logo,

$$L''(0) = \langle J'(t_0), J(t_0) \rangle.$$

Por outro lado, como  $\alpha(s) = \gamma_s(t_0)$  e  $\gamma_s$  é uma geodésica partindo de  $p_0$ , então

$$\begin{aligned}
 f(\alpha(s)) &= \cos d(\alpha(s), p_0) \\
 &= \cos d(\gamma_s(t_0), \gamma_s(0)) \\
 &= \cos \ell(\gamma_s|_{[0, t_0]}),
 \end{aligned}$$

logo,

$$f(\alpha(s)) = \cos L(s), \tag{3.1}$$

onde  $L(s)$  é o comprimento de  $\gamma_s$ . Como  $\nabla^2 f = -fg$ , segue que

$$\begin{aligned}
 (f \circ \alpha)''(s) &= \frac{d}{ds} \langle \nabla f(\alpha(s)), \alpha'(s) \rangle \\
 &= \langle \nabla_{\alpha'(s)} \nabla f(\alpha(s)), \alpha'(s) \rangle + \langle \nabla f(\alpha(s)), \alpha''(s) \rangle \\
 &= \nabla^2 f(\alpha(s))(\alpha'(s), \alpha'(s)) \\
 &= -f(\alpha(s)).
 \end{aligned}$$

Daí,  $f \circ \alpha(s) = A \cos s + B \sin s$ , onde

$$A = f \circ \alpha(0) = f(\gamma(t_0)) = \cos t_0,$$

e,

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{d}{ds} (f(\alpha(s)))|_{s=0} \\
 &= \langle \nabla f(\alpha(0)), \alpha'(0) \rangle \\
 &= \langle \nabla f(\gamma(\mathbf{t}_0)), J(\mathbf{t}_0) \rangle \\
 &= -\sin \mathbf{t}_0 \langle \gamma'(\mathbf{t}_0), J(\mathbf{t}_0) \rangle \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

donde segue que

$$f(\alpha(s)) = \cos \mathbf{t}_0 \cos s. \quad (3.2)$$

Por (3.1) e (3.2) segue que

$$\cos \mathbf{t}_0 \cos s = \cos L(s).$$

Derivando com respeito a  $s$ , obtemos

$$-\cos \mathbf{t}_0 \sin s = -L'(s) \sin L(s).$$

Derivando novamente, segue que

$$\cos \mathbf{t}_0 \cos s = (L'(s))^2 \cos L(s) + L''(s) \sin L(s).$$

Em  $s = 0$ , temos que

$$\cos \mathbf{t}_0 = L''(0) \sin \mathbf{t}_0.$$

Pois,  $L(0) = \text{comprimento de } \gamma|_{[0, \mathbf{t}_0]} = \mathbf{t}_0$  e, como vimos acima,  $L'(0) = 0$ . Logo,

$$L''(0) = \frac{\cos \mathbf{t}_0}{\sin \mathbf{t}_0}.$$

Por outro lado, sabemos que  $L''(0) = \langle J(\mathbf{t}_0), J'(\mathbf{t}_0) \rangle$ . Então

$$\langle J(\mathbf{t}_0), J'(\mathbf{t}_0) \rangle = \frac{\cos \mathbf{t}_0}{\sin \mathbf{t}_0}.$$

Como  $J(\mathbf{t}_0)$  é unitário, podemos escrever

$$\frac{\langle J(\mathbf{t}_0), J'(\mathbf{t}_0) \rangle}{|J(\mathbf{t}_0)|^2} = \frac{\cos \mathbf{t}_0}{\sin \mathbf{t}_0}. \quad (3.3)$$

Para o caso geral em que  $J(\mathbf{t}_0)$  não é unitário, consideramos o campo de Jacobi  $W = \frac{J(\mathbf{t})}{|J(\mathbf{t}_0)|}$  e repetimos o processo acima, obtendo também

$$\langle W(\mathbf{t}_0), W'(\mathbf{t}_0) \rangle = \frac{\cos \mathbf{t}_0}{\sin \mathbf{t}_0}.$$

Observemos que a expressão (3.3) é equivalente a

$$\frac{d}{dt}(\log |J(t)|)|_{t=t_0} = \frac{d}{dt}(\log \sin t)|_{t=t_0}.$$

Integrando a expressão acima de  $\delta > 0$  a  $t_0$ , e usando a injetividade do logaritmo, obtemos

$$\log \left( \frac{|J(t_0)|}{|J(\delta)|} \right) = \log \left( \frac{\sin t_0}{\sin \delta} \right) \Rightarrow \frac{|J(t_0)|}{|J(\delta)|} = \frac{\sin t_0}{\sin \delta}.$$

Como  $J(0) = 0$ , então  $|J(\delta)| = \delta |J'(0)| + R(\delta)$  com  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{R(\delta)}{\delta} = 0$ . Daí,

$$\frac{|J(\delta)|}{\sin \delta} = \frac{\delta}{\sin \delta} |J'(0)| + \frac{R(\delta)}{\delta} \frac{\delta}{\sin \delta}.$$

O que implica que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{|J(\delta)|}{\sin \delta} = |J'(0)|,$$

mas como vimos acima,

$$\frac{|J(\delta)|}{\sin \delta} = \frac{|J(t_0)|}{\sin t_0},$$

assim,

$$|J(t_0)| = |J'(0)| \sin t_0.$$

Como  $t_0 \in [0, \frac{\pi}{2})$  é arbitrário, segue que

$$|J(t)| = |J'(0)| \sin t. \tag{3.4}$$

Portanto, pela Proposição 1.14, temos que

$$|(d \exp_{p_0})_{t\gamma'(0)} tJ'(0)| = |J(t)| = |J'(0)| \sin t. \tag{3.5}$$

Isso mostra que  $\exp_{p_0} : B(0, \frac{\pi}{2}) \subset T_{p_0}M \rightarrow B(p_0, \frac{\pi}{2}) \subset M$  é além de bijeção, um difeomorfismo. O que prova a afirmação 3.2.

Agora fixemos um ponto  $q_0 \in S^n$  e consideremos  $h : T_{p_0}M \rightarrow T_{q_0}S^n$  uma isometria qualquer. Seja  $\psi : B(p_0, \frac{\pi}{2}) \subset M \rightarrow B(q_0, \frac{\pi}{2}) \subset S^n$  definida por  $\psi(\exp_{p_0} sv) = \exp_{q_0} sh(v)$ , ou seja,  $\psi = \exp_{q_0} \circ h \circ (\exp_{p_0})^{-1}$ .

**Afirmção 3.3.**  $\psi$  é isometria.

Com efeito, vimos no Exemplo 1.3 que os campos de Jacobi na esfera  $S^n$  são da forma

$$(d \exp_{q_0})_{t\beta'(0)} (tJ'(0)) = J(t) = \sin tw(t),$$

onde  $w(t)$  é um campo paralelo ao longo de  $\gamma$  com  $\langle \gamma'(t), w(t) \rangle = 0$  e  $w(0) = J'(0)$ . Ou seja,

$$(\mathbf{d} \exp_{q_0})_{t\beta'(0)}(J'(0)) = \frac{\sin t}{t} w(t), \quad (3.6)$$

para qualquer geodésica normalizada  $\beta$  em  $\mathbb{S}^n$  partindo de  $q_0$ . Por outro lado, se  $q = \exp_{p_0} u \in B(p_0, \frac{\pi}{2})$ , então

$$\mathbf{d}\psi_q = (\mathbf{d} \exp_{q_0})_{h_0(\exp_{p_0})^{-1}(q)} \circ \mathbf{d}h_{(\exp_{p_0})^{-1}(q)} \circ \mathbf{d}[(\exp_{p_0})^{-1}]_q.$$

Por (3.5), dado  $v \in T_q M$ , temos que

$$\left| \mathbf{d}[(\exp_{p_0})^{-1}]_q v \right| = \frac{|u|}{\sin |u|} |v|,$$

e por (3.6), dados  $x, y \in T_{q_0} \mathbb{S}^n$ , obtemos

$$|\mathbf{d}(\exp_{q_0})_x y| = \frac{\sin |x|}{|x|} |y|.$$

Portanto,

$$|\mathbf{d}\psi_q v| = |v|,$$

ou seja,  $\mathbf{d}\psi_q$  é isometria linear, logo isometria local. Como  $\psi$  é um difeomorfismo, então  $\psi$  é uma isometria. Como  $\Sigma = \exp_{p_0}(\partial B[0, \frac{\pi}{2}])$ ,  $\partial \mathbb{S}_+^n = \exp_{q_0}(\partial B[0, \frac{\pi}{2}])$ ,  $M = \exp_{p_0}(B[0, \frac{\pi}{2}])$  e  $\mathbb{S}_+^n = \exp_{q_0}(B[0, \frac{\pi}{2}])$ , então definindo

$$\begin{aligned} \bar{\psi} : M &\rightarrow \mathbb{S}_+^n \\ \exp_{p_0} sv &\mapsto \exp_{q_0} sh(v) \end{aligned}$$

concluimos que  $\bar{\psi}$  é uma isometria. □

## 3.2 A identidade de Shen e lemas chaves

A identidade de Shen é essencial para a prova de alguns dos próximos resultados que apresentaremos nesse trabalho. Trata-se de uma simples aplicação da fórmula de Bochner, provada no Teorema 1.1.

**Proposição 3.1** (A identidade de Shen). *Se  $(M, g, u)$  é uma solução do sistema 2.9.*

*Então*

$$\operatorname{div} \left[ \frac{1}{u} (\nabla |\nabla u|^2 - \frac{2}{n} \Delta u \nabla u) \right] = \frac{2}{u} \left[ |\nabla^2 u|^2 - \frac{(\Delta u)^2}{n} \right] \geq 0. \quad (3.7)$$

*Demonstração.* A fórmula de Bochner nos diz que

$$\Delta|\nabla\mathbf{u}|^2 = 2|\nabla^2\mathbf{u}|^2 + 2\text{Ric}(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{u}) + 2\langle\nabla\Delta\mathbf{u}, \nabla\mathbf{u}\rangle.$$

Por hipótese, temos que  $\Delta\mathbf{u} = -n\mathbf{u}$  e  $\text{Ric} = \frac{1}{u}(\nabla^2\mathbf{u} + n\mathbf{u}g)$  em  $M$ . Logo,

$$\begin{aligned} \Delta|\nabla\mathbf{u}|^2 &= 2|\nabla^2\mathbf{u}|^2 + 2\left(\frac{1}{u}\nabla^2\mathbf{u}(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{u}) + n|\nabla\mathbf{u}|^2\right) - 2n|\nabla\mathbf{u}|^2 \\ &= 2|\nabla^2\mathbf{u}|^2 + \frac{2}{u}\nabla^2\mathbf{u}(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{u}) \\ &= 2|\nabla^2\mathbf{u}|^2 + \frac{2}{u}\langle\nabla_{\nabla\mathbf{u}}\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{u}\rangle \\ &= 2|\nabla^2\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{u}\nabla\mathbf{u}(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{u}) \\ &= 2|\nabla^2\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{u}\nabla\mathbf{u}|\nabla\mathbf{u}|^2, \end{aligned}$$

onde na quarta igualdade usamos a compatibilidade da métrica. Segue daí e da definição de gradiente que

$$\Delta|\nabla\mathbf{u}|^2 = 2|\nabla^2\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{u}\langle\nabla|\nabla\mathbf{u}|^2, \nabla\mathbf{u}\rangle. \quad (3.8)$$

Considerando o campo  $Y = \nabla|\nabla\mathbf{u}|^2 - \frac{2}{n}\Delta\mathbf{u}\nabla\mathbf{u}$ , temos que

$$\text{div}Y = \Delta|\nabla\mathbf{u}|^2 - \frac{2}{n}\left((\Delta\mathbf{u})^2 + \langle\nabla(\Delta\mathbf{u}), \nabla\mathbf{u}\rangle\right). \quad (3.9)$$

Substituindo (3.8) em (3.9) e usando o fato de  $\Delta\mathbf{u} = -n\mathbf{u}$ , obtemos

$$\text{div}(Y) = 2\left[|\nabla^2\mathbf{u}|^2 - \frac{(\Delta\mathbf{u})^2}{n}\right] + \frac{1}{u}\langle\nabla|\nabla\mathbf{u}|^2, \nabla\mathbf{u}\rangle + 2|\nabla\mathbf{u}|^2. \quad (3.10)$$

De modo geral, se  $\alpha = \alpha(\mathbf{u})$  é uma função de classe  $C^1$  que não se anula, então denotando por  $\dot{\alpha}$  a derivada de  $\alpha$  com respeito a  $\mathbf{u}$ , temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha}\text{div}(\alpha Y) &= \text{div}(Y) + \frac{1}{\alpha}\langle\nabla\alpha(\mathbf{u}), Y\rangle \\ &= \text{div}(Y) + \frac{1}{\alpha}\langle\dot{\alpha}\nabla\mathbf{u}, Y\rangle \\ &= 2\left[|\nabla^2\mathbf{u}|^2 - \frac{(\Delta\mathbf{u})^2}{n}\right] + \frac{1}{u}\langle\nabla|\nabla\mathbf{u}|^2, \nabla\mathbf{u}\rangle + 2|\nabla\mathbf{u}|^2 + \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\langle Y, \nabla\mathbf{u}\rangle \\ &= 2\left[|\nabla^2\mathbf{u}|^2 - \frac{(\Delta\mathbf{u})^2}{n}\right] + \frac{1}{u}\langle\nabla|\nabla\mathbf{u}|^2, \nabla\mathbf{u}\rangle + 2|\nabla\mathbf{u}|^2 \\ &\quad + \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\left(\langle\nabla|\nabla\mathbf{u}|^2, \nabla\mathbf{u}\rangle - \frac{2}{n}\langle\Delta\mathbf{u}\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{u}\rangle\right) \\ &= 2\left[|\nabla^2\mathbf{u}|^2 - \frac{(\Delta\mathbf{u})^2}{n}\right] + \left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} + \frac{1}{u}\right)\langle\nabla|\nabla\mathbf{u}|^2, \nabla\mathbf{u}\rangle + 2|\nabla\mathbf{u}|^2 + \frac{2\dot{\alpha}}{\alpha}\mathbf{u}|\nabla\mathbf{u}|^2, \end{aligned}$$

onde na terceira igualdade usamos (3.10) e na quarta usamos a expressão de  $Y$ . Logo,

$$\frac{1}{\alpha} \operatorname{div}(\alpha Y) = 2 \left[ |\nabla^2 \mathbf{u}|^2 - \frac{(\Delta \mathbf{u})^2}{n} \right] + \left( \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} + \frac{1}{\mathbf{u}} \right) (\langle \nabla |\nabla \mathbf{u}|^2, \nabla \mathbf{u} \rangle + 2\mathbf{u} |\nabla \mathbf{u}|^2). \quad (3.11)$$

Em particular, fazendo  $\alpha(\mathbf{u}) = \frac{1}{\mathbf{u}}$ , temos que  $\dot{\alpha} = -\frac{1}{\mathbf{u}^2}$  e  $\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} = -\frac{1}{\mathbf{u}}$ . Então, obtemos

$$\mathbf{u} \operatorname{div}\left(\frac{1}{\mathbf{u}} Y\right) = 2 \left[ |\nabla^2 \mathbf{u}|^2 - \frac{(\Delta \mathbf{u})^2}{n} \right].$$

Pelo Lema 1.1, concluímos que

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{\mathbf{u}} Y\right) = \frac{2}{\mathbf{u}} \left[ |\nabla^2 \mathbf{u}|^2 - \frac{(\Delta \mathbf{u})^2}{n} \right] \geq 0,$$

onde  $Y = \nabla |\nabla \mathbf{u}|^2 - \frac{2}{n} \Delta \nabla \mathbf{u}$ . □

Seja  $N$  uma componente conexa de  $M \setminus \operatorname{MAX}(\mathbf{u})$ . O próximo lema mostra que o conjunto  $\partial N = \partial M \cap N$  é sempre não vazio e, portanto, necessariamente é dado por uma união disjunta de horizontes.

**Lema 3.2.** *Seja  $(M, g, \mathbf{u})$  uma solução do problema (2.9) e  $N$  uma componente conexa de  $M \setminus \operatorname{MAX}(\mathbf{u})$ . Então  $N \cap \partial M \neq \emptyset$ .*

*Demonstração.* Suponhamos por contradição que  $N \cap \partial M = \emptyset$ . É claro que  $\operatorname{MAX}(\mathbf{u}) \cap \partial M = \emptyset$ , pois  $\mathbf{u} \geq 0$  em  $M$  sendo  $\partial M = \mathbf{u}^{-1}(0)$  e  $\mathbf{u} > 0$  em  $\operatorname{int} M$ . Assim  $\overline{N} \setminus N \subseteq \operatorname{MAX}(\mathbf{u})$ . Por outro lado, por hipótese, temos que

$$\Delta \mathbf{u} = -n\mathbf{u} \leq 0, \quad \text{em } N \subset M \setminus \operatorname{MAX}(\mathbf{u}).$$

Assim, pelo Princípio do Mínimo Fraco (veja Teorema 1.3), temos que

$$\min_{\overline{N}} \mathbf{u} = \min_{\overline{N} \setminus N} \mathbf{u}.$$

Como  $\overline{N} \setminus N \subseteq \operatorname{MAX}(\mathbf{u})$  e  $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}_{\max}$  em  $\operatorname{MAX}(\mathbf{u})$ , temos

$$\min_{\overline{N}} \mathbf{u} = \min_{\overline{N} \setminus N} \mathbf{u} \geq \min_{\operatorname{MAX}(\mathbf{u})} \mathbf{u} = \mathbf{u}_{\max} = \max_M \mathbf{u}.$$

Isso implica que  $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}_{\max}$  em  $N$ . Como  $N$  não tem interior vazio, então pelo princípio da continuação analítica, temos que  $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}_{\max}$  em  $M$ , o que é uma contradição. Logo,  $N \cap \partial M \neq \emptyset$ . □

O próximo lema é uma consequência da Identidade de Shen.

**Lema 3.3.** *Seja  $(M, g, u)$  uma solução de (2.9),  $N$  uma componente conexa de  $M \setminus \text{MAX}(u)$  e  $\partial N = \partial M \cap N$  uma porção não vazia e possivelmente desconexa de  $\partial M$  contida em  $N$ . Se  $|\nabla u| \leq u_{\max}$  em  $\partial N$ , então  $|\nabla u|^2 \leq u_{\max}^2 - u^2$  em  $N$ .*

*Demonstração.* Por (3.7) e pela hipótese de  $\Delta u = -nu$ , temos que

$$0 \leq \operatorname{div} \left[ \frac{1}{u} (\nabla |\nabla u|^2 - \frac{2}{n} \Delta u \nabla u) \right] = \operatorname{div} \left[ \frac{1}{u} \nabla (|\nabla u|^2 + u^2) \right].$$

Considere  $\Phi = \frac{1}{u}I$ , onde  $I$  é o campo de operadores identidade, e o operador  $L : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ , definido por

$$Lf = \operatorname{div}(\Phi \nabla f),$$

onde  $f = |\nabla u|^2 + u^2$ . Então temos que

$$Lf = \operatorname{div}(\Phi \nabla f) \geq 0.$$

Mas, para que o campo  $\phi$  seja positivo definido é necessário que  $\frac{1}{u}$  seja limitado. Dessa forma, não podemos aplicar o Princípio do Máximo na variedade inteira, uma vez que  $\frac{1}{u}$  é ilimitado quando se aproxima do bordo  $\partial M$ . Mas, como  $u$  é analítica, temos que seu conjunto de nível crítico é discreto, logo existe  $\eta > 0$  tal que para todo  $0 < \epsilon \leq \eta$ , os conjuntos  $\{u = \epsilon\}$  e  $\{u = u_{\max} - \epsilon\}$  são regulares. Também é importante notar que  $\bar{N} \cap \text{MAX}(u)$  não é necessariamente uma hipersuperfície regular. Então, considere os subdomínios da forma

$$N_\epsilon = N \cap \{\epsilon \leq u \leq u_{\max} - \epsilon\}.$$

Agora,  $\frac{1}{u}$  é limitado em  $N_\epsilon$ , assim pelo Princípio do Máximo Fraco, obtemos

$$\max_{N_\epsilon} (|\nabla u|^2 + u^2) = \max_{\partial N_\epsilon} (|\nabla u|^2 + u^2). \quad (3.12)$$

Por outro lado, dado qualquer  $p \in \text{MAX}(u)$  temos que  $\nabla u(p) = 0$ , assim

$$|\nabla u|^2 + u^2 = u_{\max}^2 \quad \text{em } \text{MAX}(u). \quad (3.13)$$

Por hipótese,  $|\nabla u| \leq u_{\max}$  em  $\partial N = \partial M \cap M$ , então

$$|\nabla u|^2 + u^2 \leq u_{\max}^2 \quad \text{em } \partial N = \partial M \cap N, \quad (3.14)$$

já que em  $u = 0$  em  $\partial N$ . É importante ressaltar que estamos adotando o mesmo tratamento para  $\partial N$  e  $\bar{N} \cap \text{MAX}(u)$ . Para deixar claro,  $\partial N$  é uma porção não vazia e

possivelmente desconexa de  $\partial M$ , que está em  $N$ , já  $\bar{N} \cap \text{MAX}(\mathbf{u})$  é uma componente do bordo de  $N$  que está em  $\text{MAX}(\mathbf{u})$ . Assim, passando o limite em (3.12) com  $\epsilon \rightarrow 0$ , obtemos

$$\max_N(|\nabla \mathbf{u}|^2 + \mathbf{u}^2) = \max_{\partial N \cup (\bar{N} \cap \text{MAX}(\mathbf{u}))}(|\nabla \mathbf{u}|^2 + \mathbf{u}^2).$$

Por outro lado, em  $\partial N = \partial M \cap N$ , temos por (3.14) que

$$\max_N(|\nabla \mathbf{u}|^2 + \mathbf{u}^2) \leq \mathbf{u}_{\max}^2.$$

Além disso, em  $\bar{N} \cap \text{MAX}(\mathbf{u})$ , temos por (3.13), que

$$\max_N(|\nabla \mathbf{u}|^2 + \mathbf{u}^2) = \mathbf{u}_{\max}^2.$$

Portanto,  $|\nabla \mathbf{u}|^2 + \mathbf{u}^2 \leq \mathbf{u}_{\max}^2$  em  $N$ . □

### 3.3 Fórmula de monotonicidade

Seja  $(M, g, \mathbf{u})$  uma solução para (2.9), e  $N$  uma componente conexa de  $M \setminus \text{MAX}(\mathbf{u})$ . Consideremos a função  $\mathbf{U} : [0, \mathbf{u}_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\mathbf{U}(t) = \left( \frac{1}{\mathbf{u}_{\max}^2 - t^2} \right)^{\frac{n}{2}} \int_{\{\mathbf{u}=t\} \cap N} |\nabla \mathbf{u}| d\sigma, \quad (3.15)$$

para cada  $t \in [0, \mathbf{u}_{\max})$ . A função  $t \mapsto \mathbf{U}(t)$  está bem definida, uma vez que o integrando é globalmente limitado e pelos resultados de [35], tem-se que as hipersuperfícies obtidas como conjuntos de níveis de  $\mathbf{u}$  têm área finita.

**Observação 3.1.** *As quantidades*

$$M \ni x \mapsto \frac{|\nabla \mathbf{u}|}{\sqrt{\mathbf{u}_{\max}^2 - \mathbf{u}^2}}(x) \quad \text{e} \quad [0, \mathbf{u}_{\max}) \ni \int_{\{\mathbf{u}=t\}} \left( \frac{1}{\mathbf{u}_{\max}^2 - \mathbf{u}^2} \right)^{\frac{n-1}{2}} d\sigma,$$

*são constantes na solução de Sitter.*

*Demonstração.* De fato, pelo Exemplo 2.4 temos que  $|\nabla \mathbf{u}| = \sqrt{1 - \mathbf{u}^2}$  e  $\mathbf{u}_{\max} = 1$ , logo

$$\frac{|\nabla \mathbf{u}|}{\sqrt{\mathbf{u}_{\max}^2 - \mathbf{u}^2}} \equiv 1.$$

Agora, note que  $\{\mathbf{u} = t\} = \mathbb{S}^{n-1}(r)$ , onde  $r = \sqrt{1 - t^2}$ . Assim,

$$|\{\mathbf{u} = t\}| = (1 - t^2)^{\frac{n-1}{2}} |\mathbb{S}^{n-1}(1)|.$$

Portanto,

$$\int_{\{u=t\}} \left( \frac{1}{u_{\max}^2 - u^2} \right)^{\frac{n-1}{2}} d\sigma = \left( \frac{1}{1-t^2} \right)^{\frac{n-1}{2}} |\{u=t\}| = |\mathbb{S}^{n-1}(1)|.$$

□

A função  $t \mapsto \mathbf{U}(t)$  definida em (3.15), pode ser reescrita como

$$\mathbf{U}(t) = \int_{\{u=t\} \cap N} \left( \frac{|\nabla u|}{\sqrt{u_{\max}^2 - u^2}} \right) \left( \frac{1}{u_{\max}^2 - u^2} \right)^{\frac{n-1}{2}} d\sigma,$$

então pela observação acima, temos que a função  $t \mapsto \mathbf{U}(t)$  é constante na solução de Sitter. A próxima proposição nos diz que, para uma tripla estática com  $\Lambda > 0$ , a função  $U$  é monótona não crescente, desde que a gravidade superficial de cada componente conexa de  $\partial N$  seja limitada superiormente por 1.

**Proposição 3.2.** *Seja  $(M, g, u)$  uma solução para 2.9,  $N$  uma componente conexa de  $M \setminus \text{MAX}(u)$  e  $\partial N = \partial M \cap N$  uma parte não vazia e possivelmente desconexa de  $\partial M$  que está em  $N$ . Se  $|\nabla u| \leq u_{\max}$  em  $\partial N$ , então a função  $\mathbf{U}(t)$  definida em (3.15) é monótona não crescente.*

*Demonstração.* Por hipótese, temos que  $\Delta u = -nu$ , logo

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left[ \frac{\nabla u}{(u_{\max}^2 - u^2)^{\frac{n}{2}}} \right] &= - \frac{nu}{(u_{\max}^2 - u^2)^{\frac{n}{2}}} + \langle \nabla (u_{\max}^2 - u^2)^{-\frac{n}{2}}, \nabla u \rangle \\ &= - \frac{nu}{(u_{\max}^2 - u^2)^{\frac{n}{2}}} + nu \frac{|\nabla u|^2}{(u_{\max}^2 - u^2)^{\frac{n}{2}+1}} \\ &= - \frac{nu}{(u_{\max}^2 - u^2)^{\frac{n}{2}+1}} (u_{\max}^2 - u^2 - |\nabla u|^2), \end{aligned}$$

mas por hipótese  $|\nabla u| \leq u_{\max}$  em  $\partial N$ , então segue do Lema 3.3 que

$$\operatorname{div} \left[ \frac{\nabla u}{(u_{\max}^2 - u^2)^{\frac{n}{2}}} \right] = - \frac{nu}{(u_{\max}^2 - u^2)^{\frac{n}{2}+1}} (u_{\max}^2 - u^2 - |\nabla u|^2) \leq 0,$$

integrando em  $\{t_1 \leq u \leq t_2\} \cap N$  para  $t_1 < t_2$  e aplicando o Teorema da Divergência, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\{u=t_1\} \cap N} \left\langle \frac{\nabla u}{(u_{\max}^2 - u^2)^{\frac{n}{2}}}, \nu \right\rangle d\sigma + \int_{\{u=t_2\} \cap N} \left\langle \frac{\nabla u}{(u_{\max}^2 - u^2)^{\frac{n}{2}}}, \nu \right\rangle d\sigma \\ = - \int_{\{t_1 \leq u \leq t_2\} \cap N} \frac{nu(u_{\max}^2 - u^2 - |\nabla u|^2)}{(u_{\max}^2 - u^2)^{\frac{n}{2}+1}} d\sigma \\ \leq 0, \end{aligned}$$

onde  $\nu$  é a normal unitária, com relação a métrica  $g$  externa a  $N \cap \{t_1 \leq u \leq t_2\}$  ao longo do bordo  $\{u = t_1\} \cup \{u = t_2\}$ , ou seja,  $\nu = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$  em  $\{u = t_2\}$  e  $\nu = -\frac{\nabla u}{|\nabla u|}$  em  $\{u = t_1\}$ , logo concluímos que

$$\int_{\{u=t_2\} \cap N} \frac{|\nabla u|}{(u_{\max}^2 - u^2)^{\frac{n}{2}}} d\sigma \leq \int_{\{u=t_2\} \cap N} \frac{|\nabla u|}{(u_{\max}^2 - u^2)^{\frac{n}{2}}} d\sigma,$$

assim  $U(t_2) \leq U(t_1)$ . □

### 3.4 Desigualdade reversa de Lojasiewicz

Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana de dimensão  $n \geq 2$ . Dada a função suave  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , quando alcançado, denotaremos por  $f_{\max}$  o valor máximo de  $f$ , e por

$$\text{MAX}(f) = \{x \in M; f(x) = f_{\max}\},$$

o conjunto do máximo de  $f$ , quando não vazio. Começaremos relembrando o seguinte resultado clássico de Lojasiewicz, referente ao comportamento de uma função analítica perto de um ponto crítico.

**Teorema 3.1** (Desigualdade de Lojasiewicz). *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função analítica. Então para todo ponto  $p \in M$ , existe uma vizinhança  $U_p \ni p$ , um número real  $c_p > 0$  e  $1 \leq \theta_p < 2$  tal que para todo  $x \in U_p$*

$$|\nabla f|^2(x) \geq c_p [f(x) - f(p)]^{\theta_p}. \tag{3.16}$$

*Demonstração.* Veja Teorema 4 em [37]. □

Observamos que o teorema acima só é relevante quando  $p$  é um ponto crítico, caso contrário, a prova é trivial. Outra observação é que sempre se pode definir  $c_p = 1$  em (3.16), ao custo de aumentar o valor de  $\theta_p$  e restringir a vizinhança  $U_p$ .

**Teorema 3.2** (Desigualdade reversa de Lojasiewicz). *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana, seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave e  $\Sigma$  uma componente conexa de  $\text{MAX}(f)$ . Se  $\Sigma$  é compacta, então para todo  $0 < \theta < 1$ , existe uma vizinhança  $\Omega \supset \Sigma$  e um número real  $c > 0$  tal que para todo  $x \in \Omega$ , temos a desigualdade*

$$|\nabla f|^2(x) \leq c [f_{\max} - f(x)]^\theta.$$

*Demonstração.* Defina a função

$$w = |\nabla f|^2 - c(f_{\max} - f)^\theta,$$

onde  $c$  é uma constante que será escolhida de maneira conveniente depois. Calcularemos  $\nabla w$ .

$$\begin{aligned} \nabla w &= \nabla |\nabla f|^2 - c \nabla (f_{\max} - f)^\theta \\ &= \nabla |\nabla f|^2 + c\theta (f_{\max} - f)^{-(1-\theta)} \nabla f, \end{aligned}$$

tomando a divergência do campo acima, temos que

$$\begin{aligned} \Delta w &= \Delta |\nabla f|^2 + c\theta \frac{\Delta f}{(f_{\max} - f)^{1-\theta}} + \langle \nabla (c\theta (f_{\max} - f)^{-(1-\theta)}), \nabla f \rangle \\ &= \Delta |\nabla f|^2 + c\theta \frac{\Delta f}{(f_{\max} - f)^{1-\theta}} + c\theta(1-\theta) \frac{|\nabla f|^2}{(f_{\max} - f)^{2-\theta}}, \end{aligned}$$

Como  $|\nabla f|^2 = w + c(f_{\max} - f)^\theta$ , então

$$\begin{aligned} \Delta w &= \Delta |\nabla f|^2 + c\theta \frac{\Delta f}{(f_{\max} - f)^{1-\theta}} + c\theta(1-\theta) \frac{w}{(f_{\max} - f)^{2-\theta}} + c\theta(1-\theta) \frac{c(f_{\max} - f)^\theta}{(f_{\max} - f)^{2-\theta}} \\ &= \Delta |\nabla f|^2 + c\theta \frac{\Delta f}{(f_{\max} - f)^{1-\theta}} + c\theta(1-\theta) \frac{w}{(f_{\max} - f)^{2-\theta}} + c^2\theta(1-\theta) \frac{1}{(f_{\max} - f)^{2-2\theta}}, \end{aligned}$$

assim,

$$\Delta w - c\theta(1-\theta) \frac{1}{(f_{\max} - f)^{2-\theta}} w = \theta \frac{c}{(f_{\max} - f)^{1-\theta}} \Delta f + \theta(1-\theta) \left( \frac{c}{(f_{\max} - f)^{1-\theta}} \right)^2 + \Delta |\nabla f|^2,$$

Seja  $F = \frac{c}{(f_{\max} - f)^{1-\theta}}$ , então

$$\begin{aligned} \Delta w - c\theta(1-\theta) \frac{1}{(f_{\max} - f)^{2-\theta}} w &= \theta F \Delta f + \theta(1-\theta) F^2 + \Delta |\nabla f|^2 \\ &= \theta F [\Delta f + (1-\theta)F] + \Delta |\nabla f|^2. \end{aligned}$$

Fixe uma vizinhança conexa  $\Omega$  de  $\Sigma$  com bordo suave  $\partial\Omega$ . Desde que  $\Sigma$  é compacta, podemos supor que  $\overline{\Omega}$  é compacta. Por definição, temos que

$$F \geq \frac{c}{\max_{\overline{\Omega}} (f_{\max} - f)^{1-\theta}} \text{ em } \overline{\Omega}.$$

Em particular, aumentando o valor de  $c$  se necessário, podemos tornar  $F$  tão grande quanto desejado, como  $\nabla f$  e  $\Delta |\nabla f|^2$  são contínuos e portanto limitados em  $\overline{\Omega}$  e uma vez que  $0 < \theta < 1$ , segue-se que para qualquer  $c$  suficientemente grande, temos

$$\theta F [(1-\theta)F + \Delta f] + \Delta |\nabla f|^2 \geq 0,$$

em  $\overline{\Omega}$ . Então para tais valores de  $c$ , obtemos

$$\Delta w - \frac{\theta(1-\theta)c}{(f_{\max} - f)^{2-\theta}} w \geq 0, \quad \text{em } \overline{\Omega}.$$

Observe que o coeficiente que multiplica  $w$  é negativo, pois  $f \leq f_{\max}$  e  $0 < \theta < 1$ . Portanto, podemos aplicar o Princípio do Máximo Fraco (Corolário 1.5) em qualquer subconjunto de  $\Omega$  que não intercepta  $\Sigma$ . Por este motivo, é conveniente escolher um número  $\epsilon > 0$  pequeno o suficiente para que a vizinhança turbular

$$B_\epsilon(\Sigma) = \{x \in M : d(x, \Sigma) < \epsilon\}$$

esteja contido dentro de  $\Omega$ , e considere o conjunto  $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \overline{B_\epsilon(\Sigma)}$ . Até aumentar o valor de  $c$  se necessário, podemos supor que

$$c \geq \frac{\max_{\partial\Omega} |\nabla f|^2}{\min_{\partial\Omega} (f_{\max} - f)^\theta} \geq \frac{\max_{\partial\Omega} |\nabla f|^2}{(f_{\max} - f)^\theta}.$$

De modo que  $w \leq 0$  em  $\partial\Omega$ . Agora aplicamos o Princípio do Máximo Fraco a função  $w$  no aberto  $\Omega_\epsilon$ , obtendo

$$w \leq \max_{\Omega_\epsilon} (w) \leq \max_{\partial\Omega_\epsilon} (w) = \max \left\{ \max_{\partial\Omega} (w), \max_{\partial B_\epsilon(\Sigma)} (w) \right\} \leq \max \left\{ 0, \max_{\partial B_\epsilon(\Sigma)} (w) \right\},$$

lembrando da definição de  $w$ , tomando o limite com  $\epsilon \rightarrow 0$ , a partir da continuidade de  $f$  e  $|\nabla f|$ , segue que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \max_{\partial B_\epsilon(\Sigma)} (w) = 0,$$

logo obtemos que  $w \leq 0$  em  $\Omega$ . Assim,

$$|\nabla f|^2 \leq c(f_{\max} - f)^\theta$$

em  $\Omega$ , que é a vizinhança de  $\Sigma$  que estávamos procurando. □

# Capítulo 4

## Resultados principais

### 4.1 Estimativas da área do bordo de métricas estáticas com $\Lambda > 0$

Nessa seção, temos como principal objetivo apresentar algumas estimativas da área do bordo de métricas estáticas que possuem curvatura escalar positiva. Nesse caso, existe uma clássica conjectura chamada *Cosmic no-hair conjecture* formulada por Boucher, Gibbons e Horowitz (1984), que afirma:

**Conjectura 4.1** (Cosmic no-hair conjecture). *A única tripla estática compacta  $(M^n, g, u)$  com curvatura escalar positiva e bordo conexo  $\Sigma$  é dada por um hemisfério canônico  $S_+^n$ , onde  $u$  é a função altura correspondente.*

Em outras palavras, a conjectura afirma que o exemplo 2.1 é a única solução para o problema 2.9 que possui bordo conexo. O primeiro resultado que apresentaremos nesse capítulo trata-se de uma resposta parcial para essa conjectura, que foi obtida por Boucher, Gibbons e Horowitz (1984) e Shen (1997), para o caso tridimensional. Mais precisamente, o resultado nos diz que o hemisfério canônico tem a maior área de bordo possível dentre as variedades estáticas tridimensionais com curvatura escalar positiva e bordo conexo.

**Teorema 4.1** (Boucher-Gibbons-Horowitz (1984), Shen (1997)). *Seja  $(M^3, g, u)$  uma solução de (2.9) com bordo  $\partial M$  conexo. Então  $\partial M$  é uma esfera topológica cuja área satisfaz a desigualdade*

$$|\partial M| \leq 4\pi. \tag{4.1}$$

Além disso, se a igualdade ocorre, então  $(M^3, g)$  é isométrica ao hemisfério canônico  $(S_+^3, g_{S^3})$ .

*Demonstração.* Por hipótese, temos que  $\Delta u = -3u$ , então segue da identidade de Shen (3.7), que

$$\operatorname{div} \left[ \frac{1}{u} (\nabla |\nabla u|^2 + 2u \nabla u) \right] = \frac{2}{u} \left[ |\nabla^2 u|^2 - \frac{(\Delta u)^2}{3} \right] \geq 0. \quad (4.2)$$

Para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , temos

$$\langle \nabla |\nabla u|^2, X \rangle = X |\nabla u|^2 = X \langle \nabla u, \nabla u \rangle = 2 \langle \nabla_X \nabla u, \nabla u \rangle,$$

donde

$$\nabla |\nabla u|^2 = 2 \nabla_{\nabla u} \nabla u = 2 \nabla^2 u (\nabla u).$$

Como  $u$  satisfaz (2.9), então

$$\nabla |\nabla u|^2 = 2 \nabla^2 u (\nabla u) = 2u \operatorname{Ric}(\nabla u) - 6u \nabla u. \quad (4.3)$$

Substituindo (4.3) em (4.2), obtemos

$$0 \leq \operatorname{div} (2 \operatorname{Ric}(\nabla u) - 4 \nabla u).$$

Integrando e usando o Teorema da Divergência, temos que

$$0 \leq \int_M \operatorname{div} (2 \operatorname{Ric}(\nabla u) - 4 \nabla u) dM = \int_{\partial M} \langle 2 \operatorname{Ric}(\nabla u) - 4 \nabla u, \nu \rangle d(\partial M),$$

onde  $\nu$  denota a normal unitária exterior a  $M$  ao longo do bordo, como  $\partial M = u^{-1}(0)$ , onde  $0$  é valor regular, temos que  $\nabla u$  é um vetor normal e como  $\partial M$  é hipersuperfície, segue que  $\nu = -\frac{\nabla u}{|\nabla u|}$ . Então temos,

$$0 \leq \int_{\partial M} \left( 2 \left\langle \operatorname{Ric}(\nabla u), -\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right\rangle + 4 |\nabla u| \right) d(\partial M) = \int_{\partial M} -2 |\nabla u| (\operatorname{Ric}(\nu, \nu) - 2) d(\partial M).$$

Como  $|\nabla u|$  é constante e positivo em  $\partial M$ , segue que

$$0 \leq \int_{\partial M} (2 - \operatorname{Ric}(\nu, \nu)) d(\partial M). \quad (4.4)$$

Pela equação de Gauss,

$$R^M = R^{\partial M} + 2 \operatorname{Ric}(\nu, \nu) + |B|^2 - H^2,$$

mas  $\partial M$  é totalmente geodésico, donde

$$R^M = R^{\partial M} + 2 \operatorname{Ric}(\nu, \nu).$$

Por hipótese,  $R^M = 6$ , assim

$$\text{Ric}(v, v) = 3 - \frac{R^{\partial M}}{2},$$

substituindo a igualdade acima em (4.4) e usando a Fórmula de Gauss-Bonnet, obtemos

$$0 < |\partial M| \leq \frac{1}{2} \int_{\partial M} R^{\partial M} d(\partial M) = 2\pi\chi(\partial M),$$

isso implica que  $\chi(\partial M) > 0$ , portanto  $\partial M$  é uma 2-esfera topológica e  $\chi(\partial M) = 2$ , daí segue

$$|\partial M| \leq 4\pi.$$

Se  $|\partial M| = 4\pi$ , onde há desigualdade teremos igualdade, em particular

$$0 = \text{div} \left[ \frac{1}{u} (\nabla |\nabla u|^2 + 2u \nabla u) \right] = \frac{2}{u} \left[ |\nabla^2 u|^2 - \frac{(\Delta u)^2}{3} \right],$$

isso implica que  $|\nabla^2 u|^2 = \frac{(\Delta u)^2}{3}$ , então segue do Lema 1.1 que

$$\nabla^2 u = \frac{\Delta u}{3} g = -u g,$$

agora usando o Lema de Reilly concluimos que  $(M, g)$  é isométrica ao hemisfério  $(S_+^3, g_{S^3})$

□

Chruściel em [15] generalizou o teorema acima para dimensão  $n \geq 3$ , e obteve a seguinte desigualdade integral

$$0 \leq \int_{\partial M} |\nabla u| [R^{\partial M} - (n-1)(n-2)] d\sigma.$$

O teorema a seguir é devido a Borghini e Mazzieri [6], eles obtiveram uma versão local da desigualdade integral acima, a diferença é que em vez de trabalhar com a variedade inteira  $M$ , eles se concentraram apenas em uma componente conexa  $N$  de  $M \setminus \text{MAX}(u)$ . Antes de enuncia-lo relembremos a fórmula da Coarea.

**Teorema 4.2.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana,  $u$  uma função integrável em  $M$ ,  $\Gamma_t = \{p \in M; f(p) = t\}$ , onde  $f \in C^\infty(M)$  e  $t$  um valor regular de  $f$ , e seja  $g_t$  a métrica induzida em  $\Gamma_t$  por  $g$ . Então*

$$\int_M u |\nabla f| dv_g = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\Gamma_t} u dv_{g_t}.$$

*Demonstração.* Veja Teorema 5.8 em [47].

□

**Teorema 4.3.** *Seja  $(M, g, u)$  solução de (2.9),  $N$  uma componente conexa de  $M \setminus \text{MAX}(u)$ , e seja  $\partial N = \partial M \cap N$  uma parte não vazia e possivelmente desconexa de  $\partial M$  que limita  $N$ . Então temos*

$$0 \leq \int_{\partial N} |\nabla u| [\mathbf{R}^{\partial N} - (n-1)(n-2)] d\sigma, \quad (4.5)$$

onde  $\mathbf{R}^{\partial N}$  é a curvatura escalar da restrição da métrica  $g$  a  $\partial N$ . Além disso, se a igualdade ocorre então,  $(M, g)$  é isométrica ao hemisfério canônico  $(\mathbb{S}_+^n, g_{\mathbb{S}^n})$ .

*Demonstração.* Como  $u$  é analítica então o conjunto  $\{u = u_{\max}\}$  é discreto, pela compacidade de  $M$  é possível escolher  $\epsilon > 0$  de modo que os conjuntos de níveis  $\{u = t\}$  são regulares para todo  $0 \leq t \leq \epsilon$  e para todo  $u_{\max} - \epsilon \leq t < u_{\max}$ . Como  $\Delta u = -nu$ , então

$$-\frac{2}{n} \Delta u \nabla u = 2u \nabla u = \nabla u^2.$$

Segue da identidade de Shen (3.7), e da igualdade acima que

$$\text{div} \left[ \frac{1}{u} \nabla (|\nabla u|^2 + u^2) \right] = \frac{2}{n} \left[ |\nabla^2 u|^2 - \frac{(\Delta u)^2}{n} \right] \geq 0.$$

Para simplificar os cálculos, considere

$$\text{div} \left[ \frac{1}{u} \nabla (|\nabla u|^2 + u^2) \right] \geq 0. \quad (4.6)$$

Integrando ambos os membros da desigualdade acima no domínio  $\{\epsilon < u < u_{\max} - \epsilon\} \cap N$  e usando o Teorema da divergência, temos

$$0 \leq \int_{\{\epsilon < u < u_{\max} - \epsilon\} \cap N} \text{div} \left[ \frac{1}{u} \nabla (|\nabla u|^2 + u^2) \right] d\sigma = \int_{\{u=\epsilon\} \cap N} \left\langle \frac{\nabla (|\nabla u|^2 + u^2)}{u}, -\nu \right\rangle d\sigma + \int_{\{u=u_{\max}-\epsilon\} \cap N} \left\langle \frac{\nabla (|\nabla u|^2 + u^2)}{u}, \nu \right\rangle d\sigma,$$

onde estamos usando a notação  $\nu = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$  para a normal unitária a  $N \cap \{\epsilon < u < u_{\max} - \epsilon\}$  ao longo do bordo  $\{u = \epsilon\} \cup \{u = u_{\max} - \epsilon\}$ . Então,

$$\int_{\{u=\epsilon\} \cap N} \left\langle \frac{\nabla (|\nabla u|^2 + u^2)}{u}, \nu \right\rangle d\sigma \leq \int_{\{u=u_{\max}-\epsilon\} \cap N} \left\langle \frac{\nabla (|\nabla u|^2 + u^2)}{u}, \nu \right\rangle d\sigma. \quad (4.7)$$

Observe que,

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{\nabla(|\nabla\mathbf{u}|^2 + \mathbf{u}^2)}{\mathbf{u}}, \mathbf{v} \right\rangle &= \frac{1}{\mathbf{u}|\nabla\mathbf{u}|} (\langle \nabla|\nabla\mathbf{u}|^2, \nabla\mathbf{u} \rangle + \langle 2\mathbf{u}\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{u} \rangle) \\
 &= \frac{1}{\mathbf{u}|\nabla\mathbf{u}|} (\nabla\mathbf{u}|\nabla\mathbf{u}|^2 + 2\mathbf{u}|\nabla\mathbf{u}|^2) \\
 &= \frac{1}{\mathbf{u}|\nabla\mathbf{u}|} (2\nabla^2\mathbf{u}(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{u}) + 2\mathbf{u}|\nabla\mathbf{u}|^2) \\
 &= \frac{2}{\mathbf{u}|\nabla\mathbf{u}|} (\mathbf{u}\text{Ric}(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{u}) - n\mathbf{u}|\nabla\mathbf{u}|^2 + \mathbf{u}|\nabla\mathbf{u}|^2) \\
 &= 2|\nabla\mathbf{u}| \left( \frac{1}{|\nabla\mathbf{u}|^2} \text{Ric}(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{u}) - (n-1) \right) \\
 &= 2|\nabla\mathbf{u}| (\text{Ric}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - (n-1)),
 \end{aligned}$$

onde na terceira igualdade usamos a primeira e a segunda equação de (2.9). Substituindo em (4.7), temos que

$$\int_{\{\mathbf{u}=\epsilon\} \cap \mathbb{N}} 2|\nabla\mathbf{u}| (\text{Ric}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - (n-1)) d\sigma \leq \int_{\{\mathbf{u}=\mathbf{u}_{\max}-\epsilon\} \cap \mathbb{N}} 2|\nabla\mathbf{u}| (\text{Ric}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - (n-1)) d\sigma. \quad (4.8)$$

Afirmamos que o  $\liminf$  do lado direito se anula quando  $\epsilon \rightarrow 0$ . De fato, como  $M$  é compacta e  $\mathbf{g}$  é suave, a quantidade  $\text{Ric}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - (n-1)$  é contínua, assim limitada em  $M$ . Portanto para provar nossa afirmação é suficiente provar que

$$\liminf_{t \rightarrow \mathbf{u}_{\max}} \int_{\{\mathbf{u}=t\} \cap \mathbb{N}} |\nabla\mathbf{u}| d\sigma = 0.$$

Suponha por absurdo que

$$\liminf_{t \rightarrow \mathbf{u}_{\max}} \int_{\{\mathbf{u}=t\} \cap \mathbb{N}} |\nabla\mathbf{u}| d\sigma = \delta > 0,$$

então existe  $\alpha > 0$  suficientemente pequeno, tal que

$$\int_{\{\mathbf{u}=t\} \cap \mathbb{N}} |\nabla\mathbf{u}| d\sigma \geq \frac{\delta}{2}, \quad \forall \mathbf{u}_{\max} - \alpha < t < \mathbf{u}_{\max}.$$

Pela fórmula da Coarea, temos que para cada  $0 < \epsilon < \alpha$

$$\begin{aligned}
 \int_{\{\mathbf{u}_{\max}-\alpha < \mathbf{u} < \mathbf{u}_{\max}-\epsilon\} \cap \mathbb{N}} \left( \frac{|\nabla\mathbf{u}|^2}{\mathbf{u}_{\max} - \mathbf{u}} \right) d\mu &= \int_{\mathbf{u}_{\max}-\alpha}^{\mathbf{u}_{\max}-\epsilon} \frac{dt}{\mathbf{u}_{\max} - t} \int_{\{\mathbf{u}=t\} \cap \mathbb{N}} |\nabla\mathbf{u}| d\sigma \\
 &\geq \frac{\delta}{2} \int_{\mathbf{u}_{\max}-\alpha}^{\mathbf{u}_{\max}-\epsilon} \frac{dt}{\mathbf{u}_{\max} - t} \\
 &= \frac{\delta}{2} \int_{\epsilon}^{\alpha} \frac{d\tau}{\tau}.
 \end{aligned}$$

Pela desigualdade reversa de Lojasiewicz (Teorema 3.2), temos que  $|\nabla u|^2 \geq c[u_{\max} - u]^0$  em  $\{u_{\max} - \alpha < u < u_{\max} - \epsilon\} \cap N$ , diminuindo o valor de  $\epsilon$ , se necessário, podemos supor que  $|\nabla u|^2 \geq c(u_{\max} - u)$  em  $\{u_{\max} - \alpha < u < u_{\max} - \epsilon\} \cap N$ , para alguma constante  $c > 0$ . Então, temos que

$$\int_{\{u_{\max} - \alpha < u < u_{\max} - \epsilon\} \cap N} c d\mu \geq \int_{\{u_{\max} - \alpha < u < u_{\max} - \epsilon\} \cap N} \left( \frac{|\nabla u|^2}{u_{\max} - u} \right) d\mu \geq \frac{\delta}{2} \log(\alpha/\epsilon),$$

assim,

$$c|N| \geq c|\{u_{\max} - \alpha < u < u_{\max} - \epsilon\} \cap N| \geq \frac{\delta}{2} \log(\alpha/\epsilon),$$

fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$  temos uma contradição. Logo,

$$\liminf_{t \rightarrow u_{\max}} \int_{\{u=t\} \cap N} |\nabla u| d\sigma = 0.$$

Segue daí e de (4.8), que

$$\int_{\partial N} 2|\nabla u|(-\text{Ric}(\nu, \nu) + (n-1)) d\sigma \geq 0. \quad (4.9)$$

Como  $\partial N$  é totalmente geodésico em  $M$ , segue da equação de Gauss que

$$R^M = R^{\partial N} + 2\text{Ric}(\nu, \nu),$$

substituindo a igualdade acima em (4.9) e usando a hipótese de  $R^M = n(n-1)$ , obtemos

$$\int_{\partial N} (R^{\partial N} - (n-1)(n-2)) d\sigma \geq 0.$$

Se a igualdade ocorre, então onde temos desigualdade teremos igualdade, em particular,

$$\text{div} \left[ \frac{1}{u} \nabla (|\nabla u|^2 + u^2) \right] = \frac{2}{n} \left[ |\nabla^2 u|^2 - \frac{(\Delta u)^2}{n} \right] = 0.$$

Logo  $|\nabla u|^2 = \frac{(\Delta u)^2}{n}$ , pelo Lema 1.1 e pela hipótese temos

$$\nabla^2 u = \frac{\Delta u}{n} g = -u g, \quad \text{em } N,$$

como a métrica e a função potencial são analíticas, a igualdade acima ocorre em  $M$ . Portanto pelo lema de Reilly concluímos que  $(M, g)$  é isométrica ao hemisfério  $(\mathbb{S}_+^n, g_{\mathbb{S}^n})$ .

□

**Corolário 4.1.** *Seja  $(M, g, u)$  solução tridimensional orientável de (2.9), seja  $N$  uma componente conexa de  $M \setminus \text{MAX}(u)$ , e suponha que  $\partial N = \partial M \cap N$  é conexo. Então  $\partial N$  é uma 2-esfera topológica e vale a desigualdade*

$$|\partial N| \leq 4\pi.$$

Além disso, se a igualdade ocorre, então  $(M^3, g)$  é isométrica ao hemisfério canônico  $(S_+^3, g_{S^3})$ .

*Demonstração.* Pelo teorema anterior, temos que

$$0 \leq \int_{\partial N} |\nabla u| [R^{\partial N} - 2] d\sigma. \quad (4.10)$$

Como  $\partial N$  é uma componente conexa de  $\partial M$  e  $|\nabla u|$  é constante e positivo em  $|\partial N|$ , então

$$0 \leq \int_{\partial N} \left( \frac{R^{\partial N}}{2} - 1 \right) d\sigma.$$

Segue daí e da Fórmula de Gauss-Bonnet que

$$0 < |\partial N| \leq \frac{1}{2} \int_{\partial N} R^{\partial N} d\sigma = 2\pi\chi(\partial N).$$

Isso implica que  $\chi(\partial N) > 0$ , logo  $\partial N$  é homeomorfo a  $S^2$  e  $\chi(\partial N) = 2$ , portanto

$$|\partial N| \leq 4\pi.$$

Se a igualdade ocorre, então teremos a igualdade em (4.10) segue do teorema anterior que  $(M^3, g)$  é isométrica ao hemisfério canônico  $(S_+^3, g_{S^3})$ .  $\square$

## 4.2 Caracterizações da solução de Sitter

Inicialmente apresentaremos uma caracterização da solução de Sitter em termos da gravidade superficial do bordo da variedade  $M$ , que nos diz que a solução de Sitter tem a menor gravidade superficial possível entre todas as soluções para o problema (2.9) com bordo conexo. Mais precisamente, temos o seguinte resultado:

**Teorema 4.4.** *Seja  $(M, g, u)$  solução do problema (2.9), então*

$$\max_{\Sigma \in \pi_0(\partial M)} \kappa(\Sigma) \geq 1.$$

*Além disso, se a igualdade ocorre, então a menos de uma normalização de  $u$ , a tripla  $(M, g, u)$  é isométrica à solução de Sitter. Em particular,  $\partial M$  é conexo.*

*Demonstração.* Suponhamos que

$$\max_{\Sigma \in \pi_0(\partial M)} \kappa(\Sigma) \leq 1.$$

Desde que a desigualdade acima ocorra, podemos concluir que

$$\frac{|\nabla \mathbf{u}|}{\mathbf{u}_{\max}} \leq 1 \text{ em } \partial M. \quad (4.11)$$

Pela identidade de Shen (3.7) e pela hipótese de  $\Delta \mathbf{u} = -n\mathbf{u}$ , temos

$$0 \leq \operatorname{div} \left[ \frac{1}{\mathbf{u}} (\nabla |\nabla \mathbf{u}|^2 - \frac{2}{n} \Delta \mathbf{u} \nabla \mathbf{u}) \right] = \operatorname{div} \left[ \frac{1}{\mathbf{u}} \nabla (|\nabla \mathbf{u}|^2 + \mathbf{u}^2) \right]. \quad (4.12)$$

Considere  $\Phi = \frac{1}{\mathbf{u}} \mathbf{I}$ , onde  $\mathbf{I}$  é o campo de operadores identidade, e o operador  $L : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ , definido por

$$L f = \operatorname{div}(\Phi \nabla f),$$

onde  $f = |\nabla \mathbf{u}|^2 + \mathbf{u}^2$ . Então por (4.12) temos que

$$L f = \operatorname{div}(\Phi \nabla f) \geq 0.$$

Mas, para que o campo  $\phi$  seja positivo definido é necessário que  $\frac{1}{\mathbf{u}}$  seja limitado. Assim não podemos aplicar o Princípio do Máximo Fraco na variedade inteira. Para superar este problema, usaremos a analiticidade da função potencial  $\mathbf{u}$ . Com efeito, como  $\mathbf{u}$  é analítica então seu conjunto de nível crítico é discreto, então é possível escolher  $\eta > 0$  de modo que conjunto  $\{\mathbf{u} = \epsilon\}$  é regular, desde que  $0 < \epsilon \leq \eta$ . Assim, definimos  $M_\epsilon = \{\mathbf{u} \geq \epsilon\}$ , agora o coeficiente  $\frac{1}{\mathbf{u}}$  é limitado por  $\frac{1}{\epsilon}$  em  $M_\epsilon$ . Pelo Princípio do Máximo Fraco, segue que

$$\max_{M_\epsilon} (|\nabla \mathbf{u}|^2 + \mathbf{u}^2) = \max_{\partial M_\epsilon} (|\nabla \mathbf{u}|^2 + \mathbf{u}^2).$$

Em particular, para  $0 < \epsilon \leq \eta$ ,

$$\max_{\partial M_\eta} (|\nabla \mathbf{u}|^2 + \mathbf{u}^2) \leq \max_{\partial M_\epsilon} (|\nabla \mathbf{u}|^2 + \mathbf{u}^2), \quad (4.13)$$

pois  $\partial M_\eta \subset M_\epsilon$ . Observamos que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \max_{\partial M_\epsilon} (|\nabla \mathbf{u}|^2 + \mathbf{u}^2) = \max_{\partial M} |\nabla \mathbf{u}|^2 = |\nabla \mathbf{u}|^2|_{\partial M},$$

de posse disso e de (4.13), obtemos

$$\max_{\partial M_\eta} (|\nabla \mathbf{u}|^2 + \mathbf{u}^2) \leq |\nabla \mathbf{u}|^2|_{\partial M}.$$

Como por hipótese,  $\frac{|\nabla \mathbf{u}|}{\mathbf{u}_{\max}} \leq 1$  em  $\partial M$ , então

$$\max_{\partial M_\eta} (|\nabla \mathbf{u}|^2 + \mathbf{u}^2) \leq \mathbf{u}_{\max}^2.$$

Por outro lado, é claro que  $\text{MAX}(\mathbf{u}) = \{\mathbf{p} \in M; \mathbf{u}(\mathbf{p}) = \mathbf{u}_{\max}\} \subset M_\eta$ , e para todo  $\mathbf{p} \in \text{MAX}(\mathbf{u})$  temos  $(|\nabla \mathbf{u}|^2 + \mathbf{u}^2)(\mathbf{p}) = \mathbf{u}_{\max}^2$ , então ganhamos que

$$\max_{\partial M_\eta} (|\nabla \mathbf{u}|^2 + \mathbf{u}^2) \leq \mathbf{u}_{\max}^2 \leq \max_{M_\eta} (|\nabla \mathbf{u}|^2 + \mathbf{u}^2).$$

O que prova que o máximo da função  $|\nabla \mathbf{u}|^2 + \mathbf{u}^2$  é atingindo no interior de  $M_\eta$ , assim pelo Princípio do Máximo Forte, temos que  $|\nabla \mathbf{u}|^2 + \mathbf{u}^2$  é constante igual a  $\mathbf{u}_{\max}^2$  em  $M_\eta$ . Desde que  $\eta > 0$  pode ser escolhido arbitrariamente pequeno, concluímos que  $|\nabla \mathbf{u}|^2 + \mathbf{u}^2 \equiv \mathbf{u}_{\max}^2$  em  $M$ , logo  $\nabla(|\nabla \mathbf{u}|^2 + \mathbf{u}^2) = 0$ , segue daí, de (4.12) e da identidade de Shen que

$$0 = \text{div} \left[ \frac{1}{\mathbf{u}} \nabla (|\nabla \mathbf{u}|^2 + \mathbf{u}^2) \right] = \frac{2}{\mathbf{u}} \left[ |\nabla^2 \mathbf{u}|^2 - \frac{(\Delta \mathbf{u})^2}{\mathbf{n}} \right] \geq 0,$$

logo

$$|\nabla^2 \mathbf{u}|^2 = \frac{(\Delta \mathbf{u})^2}{\mathbf{n}}.$$

Pelo do Lema 1.1 e pela equação  $\Delta \mathbf{u} = -\mathbf{n}\mathbf{u}$ , concluímos que

$$\nabla^2 \mathbf{u} = -\mathbf{u}\mathbf{g}.$$

Portanto, pelo Lema de Reilly temos que  $(M, \mathbf{g})$  é isométrica ao hemisfério canônico  $(\mathbb{S}_+^{\mathbf{n}}, \mathbf{g}_{\mathbb{S}^{\mathbf{n}}})$ , que é isométrico ao de Sitter.  $\square$

O teorema a seguir é uma versão localizada do Teorema 4.4.

**Teorema 4.5.** *Seja  $(M, \mathbf{g}, \mathbf{u})$  uma solução para o problema 2.9, seja  $N$  um componente conexa de  $M \setminus \text{MAX}(\mathbf{u})$ , e seja  $\partial N = \partial M \cap N$  uma parte não vazia e possivelmente desconexa de  $\partial M$  que está em  $N$ . Então*

$$\max_{\Sigma \in \pi_0(\partial N)} \kappa(\Sigma) \geq 1.$$

*Além disso, se a igualdade ocorre, então, a menos de uma normalização de  $\mathbf{u}$ , a tripla  $(M, \mathbf{g}, \mathbf{u})$  é isométrica a solução de Sitter.*

*Demonstração.* Suponhamos que

$$\max_{\Sigma \in \pi_0(\partial N)} \kappa(\Sigma) \leq 1,$$

ou seja,

$$\frac{|\nabla \mathbf{u}|}{\mathbf{u}_{\max}} \leq 1 \text{ em } \partial N. \tag{4.14}$$

Agora considere a função  $\mathbf{U} : [0, \mathbf{u}_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}$  definida em (3.15) por

$$\mathbf{U}(t) = \left( \frac{1}{\mathbf{u}_{\max}^2 - t^2} \right)^{\frac{n}{2}} \int_{\{u=t\} \cap \mathbf{N}} |\nabla \mathbf{u}| d\sigma.$$

Como foi visto na Proposição 3.2, a função  $\mathbf{U}$  é monótona não crescente, assim temos que

$$\lim_{t \rightarrow \mathbf{u}_{\max}^-} \mathbf{U}(t) \leq \mathbf{U}(0) = \frac{1}{\mathbf{u}_{\max}^n} \int_{\partial \mathbf{N}} |\nabla \mathbf{u}| d\sigma \leq \mathbf{u}_{\max}^{1-n} |\partial \mathbf{N}| < \infty,$$

onde na segunda desigualdade usamos (4.14).

**Afirmção 4.1.**  $\lim_{t \rightarrow \mathbf{u}_{\max}^-} \mathbf{U}(t) < \infty$  implica que  $\mathcal{H}^{n-1}(\text{MAX}(\mathbf{u}) \cap \overline{\mathbf{N}}) = 0$ .

Suponha que  $\mathcal{H}^{n-1}(\text{MAX}(\mathbf{u}) \cap \overline{\mathbf{N}}) > 0$ , queremos mostrar que

$$\lim_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}_{\max}} \mathbf{U}(t) = +\infty. \quad (4.15)$$

Pela desigualdade de Lojasiewicz (3.16), temos que para cada ponto  $\mathbf{p} \in \text{MAX}(\mathbf{u})$ , existe uma vizinhança  $V_{\mathbf{p}} \subset M$  de  $\mathbf{p}$  e um número real  $c_{\mathbf{p}} > 0$  e  $0 < \theta_{\mathbf{p}} < 1$ , tal que para todo  $\mathbf{x} \in V_{\mathbf{p}}$ , temos que

$$|\nabla \mathbf{u}|(\mathbf{x}) \geq c_{\mathbf{p}} [\mathbf{u}_{\max} - \mathbf{u}(\mathbf{x})]^{\theta_{\mathbf{p}}}.$$

Restringindo a vizinhança  $V_{\mathbf{p}}$  se necessário, podemos supor que  $\mathbf{u}_{\max} - \mathbf{u} < 1$  em  $V_{\mathbf{p}}$ , de modo que para cada  $\mathbf{x} \in V_{\mathbf{p}}$

$$|\nabla \mathbf{u}|(\mathbf{x}) \geq c_{\mathbf{p}} [\mathbf{u}_{\max} - \mathbf{u}(\mathbf{x})], \quad (4.16)$$

pois  $[\mathbf{u}_{\max} - \mathbf{u}(\mathbf{x})]^{\theta_{\mathbf{p}}} \geq [\mathbf{u}_{\max} - \mathbf{u}(\mathbf{x})]$ . Como  $\text{MAX}(\mathbf{u})$  é compacto, então  $\text{MAX}(\mathbf{u})$  admite uma cobertura finita de conjuntos  $V_{\mathbf{p}_1}, \dots, V_{\mathbf{p}_k}$ , assim

$$|\nabla \mathbf{u}|(\mathbf{x}) \geq c_{\mathbf{p}_i} [\mathbf{u}_{\max} - \mathbf{u}(\mathbf{x})] \quad \forall \mathbf{x} \in V_{\mathbf{p}_i}$$

$i = 1, \dots, k$ . Em particular, definindo  $\mathbf{c} = \min\{c_{\mathbf{p}_1}, \dots, c_{\mathbf{p}_k}\}$  e  $V = V_{\mathbf{p}_1} \cup \dots \cup V_{\mathbf{p}_k}$ , temos que  $V$  é uma vizinhança de  $\text{MAX}(\mathbf{u})$ . Assim, dado  $\mathbf{x} \in V$  existe  $i \in [1, k]$  tal que  $\mathbf{x} \in V_{\mathbf{p}_i}$  e então vale

$$|\nabla \mathbf{u}|(\mathbf{x}) \geq c_{\mathbf{p}_i} [\mathbf{u}_{\max} - \mathbf{u}(\mathbf{x})] \geq \mathbf{c} [\mathbf{u}_{\max} - \mathbf{u}(\mathbf{x})]. \quad (4.17)$$

Podemos reescrever  $\mathbf{U}(t)$  da seguinte forma

$$\mathbf{U}(t) = \int_{\{u=t\} \cap \mathbf{N}} \left( \frac{|\nabla \mathbf{u}|}{\sqrt{\mathbf{u}_{\max}^2 - \mathbf{u}^2}} \right) \left( \frac{1}{\mathbf{u}_{\max}^2 - \mathbf{u}^2} \right)^{\frac{n-1}{2}} d\sigma.$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(t) &= \int_{\{\mathbf{u}=t\} \cap \mathbf{N}} \frac{|\nabla \mathbf{u}|}{(\mathbf{u}_{\max}^2 - \mathbf{u}^2)^{1-\frac{1}{2}}} \left( \frac{1}{\mathbf{u}_{\max}^2 - \mathbf{u}^2} \right)^{\frac{n-1}{2}} d\sigma \\ &= \left( \frac{1}{\mathbf{u}_{\max}^2 - t^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \int_{\{\mathbf{u}=t\} \cap \mathbf{N}} \frac{|\nabla \mathbf{u}|}{(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\max})(\mathbf{u} + \mathbf{u}_{\max})} d\sigma. \end{aligned}$$

Pela compacidade de  $\mathbf{M}$  e pelo fato de  $\mathbf{u}$  ser analítica, para  $t$  suficientemente próximo de  $\mathbf{u}_{\max}$ , temos que  $\{\mathbf{u} = t\} \cap \mathbf{N} \subset \mathbf{V}$  é regular. Assim, para tais valores de  $t$ , temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(t) &= \left( \frac{1}{\mathbf{u}_{\max}^2 - t^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \int_{\{\mathbf{u}=t\} \cap \mathbf{N}} \frac{|\nabla \mathbf{u}|}{(\mathbf{u}_{\max} - \mathbf{u})(\mathbf{u}_{\max} + \mathbf{u})} d\sigma \\ &\geq \left( \frac{1}{\mathbf{u}_{\max}^2 - t^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \int_{\{\mathbf{u}=t\} \cap \mathbf{N}} \frac{\mathbf{c}(\mathbf{u}_{\max} - \mathbf{u})}{(\mathbf{u}_{\max} + \mathbf{u})(\mathbf{u}_{\max} - \mathbf{u})} \\ &= \left( \frac{1}{\mathbf{u}_{\max}^2 - t^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \frac{\mathbf{c}}{(\mathbf{u}_{\max} + t)} |\{\mathbf{u} = t\} \cap \mathbf{N}| \\ &\geq \frac{\mathbf{c}}{2\mathbf{u}_{\max}} \left( \frac{1}{\mathbf{u}_{\max}^2 - t^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} |\{\mathbf{u} = t\} \cap \mathbf{N}|, \end{aligned}$$

onde na primeira desigualdade usamos (4.17). Portanto, para concluir que

$$\lim_{t \rightarrow \mathbf{u}_{\max}} \mathbf{U}(t) = +\infty,$$

basta mostrar que,  $\mathcal{H}^{n-1}(\text{MAX}(\mathbf{u}) \cap \bar{\mathbf{N}}) > 0$  implica

$$\limsup_{t \rightarrow \mathbf{u}_{\max}} |\{\mathbf{u} = t\} \cap \mathbf{N}| > 0. \quad (4.18)$$

Como  $\mathbf{u}$  é analítica e  $\mathcal{H}^{n-1}(\text{MAX}(\mathbf{u}) \cap \bar{\mathbf{N}}) > 0$ , então por [36] (veja também Teorema 6.3.3 em [35]), temos que o conjunto  $\text{MAX}(\mathbf{u}) \cap \bar{\mathbf{N}}$  contém uma hipersuperfície relativamente aberta  $\Sigma$  tal que

$$\mathcal{H}^{n-1}((\text{MAX}(\mathbf{u}) \cap \bar{\mathbf{N}}) \setminus \Sigma) = 0.$$

Em particular, dado um ponto  $\mathbf{p}$  em  $\Sigma$ , podemos considerar uma vizinhança aberta  $\Omega$  de  $\mathbf{p}$  em  $\mathbf{M}$ , onde a distância sinalizada para  $\Sigma$

$$r(\mathbf{x}) = \begin{cases} +d(\mathbf{x}, \Sigma) & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega \cap \mathbf{N} \\ -d(\mathbf{x}, \Sigma) & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega \setminus \mathbf{N} \end{cases},$$

é uma função suave e bem definida (isso foi provado com detalhes para o espaço euclidiano em [23] e [34], e então estendido para variedades Riemannianas em [[23], observações (1) e (2)]). Afim de provar 4.18, vamos fazer uma análise local, em uma vizinhança cilíndrica

compacta  $c_\delta \subset \Omega$  de  $p$ .

Como  $\Sigma$  é uma hipersuperfície de  $\text{MAX}(u) \cap \bar{N}$  então a aplicação inclusão  $i : \Sigma \hookrightarrow \text{MAX}(u) \cap \bar{N}$  é uma imersão, como  $p \in \Sigma$ , então existe uma vizinhança  $\Sigma_0 \ni p$  tal que  $i(\Sigma_0) \approx \Sigma_0$  é uma subvariedade de  $\text{MAX}(u) \cap \bar{N}$ . Assim, podemos construir essa vizinhança da seguinte forma: considere uma imersão suave  $F_0$  da bola fechada  $(n-1)$ -dimensional  $\bar{B}^{n-1}(\alpha)$ , onde  $\alpha > 0$  é suficientemente pequeno, em  $M$

$$F_0 : \bar{B}^{n-1} \hookrightarrow M, (\theta^1, \dots, \theta^{n-1}) \mapsto F_0(\theta^1, \dots, \theta^{n-1})$$

tal que  $\Sigma_0 = F_0(\bar{B}^{n-1}) \subset \text{int } \Sigma \cap \Omega$ .

Uma vez que  $\nabla r$  é um campo diferenciável de vetores em  $\Omega$  e  $p \in \Omega \cap \Sigma_0$ , então existe uma vizinhança  $V \subset \Omega$  de  $p$ , um intervalo  $(-\delta, \delta)$ ,  $\delta > 0$  e uma aplicação diferenciável  $\Phi : (-\delta, \delta) \times V \rightarrow \Omega \subset M$  tais que a curva  $t \mapsto \Phi(t, q)$ ,  $t \in (-\delta, \delta)$ ,  $q \in V$ , é a única curva que satisfaz

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \nabla r(\Phi(t, q)) \\ \Phi(0, q) = q. \end{cases}$$

Em particular, para todo  $q \in \Sigma_0 \subset V$ , podemos usar o fluxo de  $\nabla r$  para estender a aplicação  $F_0$  para o produto cartesiano  $[-\delta, \delta] \times \bar{B}^{n-1}$ , obtendo uma nova aplicação

$$F : [-\delta, \delta] \times \bar{B}^{n-1} \hookrightarrow M, (\rho, \theta^1, \dots, \theta^{n-1}) \mapsto F(\rho, \theta^1, \dots, \theta^{n-1})$$

satisfazendo o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dF}{d\rho} = \nabla r \circ F \\ F(0, \cdot) = F_0(\cdot). \end{cases}$$

Sendo  $r$  a função distância, então  $|\nabla r| = 1$  e suas curvas integrais  $F^\theta : (-\delta, \delta) \rightarrow M$  são geodésicas. Suponhamos que

$$F(\rho, \theta) \in \Omega \cap N \quad \forall \rho \in (0, \delta], \tag{4.19}$$

e

$$F(\rho, \theta) \in \Omega \setminus N \quad \forall \rho \in [-\delta, 0). \tag{4.20}$$

Então, para todo  $\rho \in (0, \delta]$ , temos que

$$r(F(\rho, \theta)) = d(F(\rho, \theta), F(0, \theta)) = d(F^\theta(\rho), F^\theta(0)) = \ell(F^\theta) |_{(0, \rho]} = \rho.$$

Analogamente, para todo  $\rho \in [-\delta, 0)$  teremos

$$\begin{aligned} r(F(\rho, \theta)) &= -d(F^\theta(\rho), F^\theta(0)) \\ &= -\ell(F^\theta)|_{[\rho, 0)} \\ &= \rho. \end{aligned}$$

Portanto, para cada  $\rho \in [-\delta, \delta]$  a imagem  $\Sigma_\rho = F(\rho, \bar{B}^{n-1})$  pertence ao conjunto de nível  $\{r = \rho\}$  da distância sinalizada. Isso mostra que  $F([-\delta, \delta] \times \bar{B}^{n-1}) \subset \Omega$ .

Agora defina a vizinhança cilíndrica compacta  $C_\delta$  de  $\mathbf{p}$  simplesmente por  $F([-\delta, \delta] \times \bar{B}^{n-1})$ . Por construção  $F$  é uma parametrização de  $C_\delta$ . Seja  $\{\partial\rho, \frac{\partial}{\partial\theta^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial\theta^{n-1}}\}$  uma base para  $T_{\mathbf{p}}[-\delta, \delta] \times \bar{B}^{n-1}$ , então denotando por  $\mathbf{g}$  a métrica pull-back de  $M$  através da aplicação  $F$ , temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= F^*(g^M) = \langle dF_{\mathbf{p}}(\partial\rho), dF_{\mathbf{p}}(\partial\rho) \rangle_{F(\mathbf{p})} d\rho \otimes d\rho \\ &\quad + \langle dF_{\mathbf{p}}(\frac{\partial}{\partial\theta^i}), dF_{\mathbf{p}}(\frac{\partial}{\partial\theta^j}) \rangle_{F(\mathbf{p})} d\theta^i \otimes d\theta^j \\ &= \langle \frac{\partial F}{\partial\rho}(\mathbf{p}), \frac{\partial F}{\partial\rho}(\mathbf{p}) \rangle_{F(\mathbf{p})} d\rho \otimes d\rho \\ &\quad + \langle \frac{\partial F}{\partial\theta^i}(\mathbf{p}), \frac{\partial F}{\partial\theta^j}(\mathbf{p}) \rangle_{F(\mathbf{p})} d\theta^i \otimes d\theta^j, \end{aligned}$$

daí,

$$\mathbf{g} = d\rho \otimes d\rho + g_{ij}(\rho, \theta^1, \dots, \theta^{n-1}) d\theta^i \otimes d\theta^j,$$

onde  $g_{ij}(\rho, \theta) = \langle \frac{\partial F}{\partial\theta^i}(\mathbf{p}), \frac{\partial F}{\partial\theta^j}(\mathbf{p}) \rangle_{F(\mathbf{p})}$ . Em particular, para todo  $0 < \epsilon < 1$  fixado, podemos supor, diminuindo o valor de  $\delta > 0$ , se necessário, que as seguintes estimativas são verdadeiras

$$(1 - \epsilon)^2 g_{ij}(0, \theta) \leq g_{ij}(\rho, \theta) \leq (1 + \epsilon)^2 g_{ij}(0, \theta), \quad (4.21)$$

para todo  $\theta = (\theta^1, \dots, \theta^{n-1}) \in \bar{B}^{n-1}$  e para todo  $\rho \in [-\delta, \delta]$ .

Seja  $\mathbf{u}_\delta = \max_{\Sigma_\delta} \mathbf{u}$ . Por construção, teremos  $\mathbf{u}_\delta < \mathbf{u}_{\max}$ . Para  $\mathbf{u}_\delta \leq t \leq \mathbf{u}_{\max}$ , vamos considerar os conjuntos de níveis (pulled-back) de  $\mathbf{u}$  dados por

$$L_t = F^{-1}(\{\mathbf{u} = t\} \cap \bar{N}) \subset [0, \delta] \times \bar{B}^{n-1},$$

junto com sua projeção natural em  $L_{\mathbf{u}_{\max}} = \{0\} \times \bar{B}^{n-1}$ . Tais projeções são definidas por

$$\pi_t : L_t \rightarrow \{0\} \times \bar{B}^{n-1}, \quad \pi_t(\rho, \theta) = (0, \theta),$$

não é difícil perceber isso para  $\mathbf{u}_\delta \leq \mathbf{t} \leq \mathbf{u}_{\max}$ , pois a projeção  $\pi_t$  é sobrejetiva. Isso segue do fato de que dado  $\theta \in \bar{B}^{n-1}$ , a aplicação

$$[0, \delta] \ni \rho \mapsto (\mathbf{u} \circ F)(\rho, \theta)$$

é contínua e sua imagem contém o intervalo fechado  $[\mathbf{u}_\delta, \mathbf{u}_{\max}]$ .

Por outro lado, para cada  $\mathbf{u}_\delta \leq \mathbf{t} \leq \mathbf{u}_{\max}$  e cada componente aberta  $S \subset L_t$ , temos que

$$\text{diam}_g(S) \geq (1 - \epsilon) \text{diam}_g(\pi_t(S)). \quad (4.22)$$

De fato, dado  $\mathbf{t} \in [\mathbf{u}_\delta, \mathbf{u}_{\max}]$  fixo, considere a curva suave

$$\begin{aligned} \gamma : I &\rightarrow L_t \\ s &\mapsto \gamma(s) = (\rho(s), \theta(s)), \end{aligned}$$

onde  $I \subset \mathbb{R}$ , assim

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{d\rho}{ds} \partial\rho + \sum_{i=1}^n \frac{d\theta^i}{ds} \partial\theta^i.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\gamma}{ds} \right|_g^2(s) &= d\rho \otimes d\rho \left( \frac{d\gamma}{ds}, \frac{d\gamma}{ds} \right) + g_{ij}(\rho(s), \theta(s)) d\theta^i \otimes d\theta^j \left( \frac{d\gamma}{ds}, \frac{d\gamma}{ds} \right) \\ &= \left| \frac{d\rho}{ds} \right|_g^2(s) + g_{ij}(\rho(s), \theta(s)) \frac{d\theta^i(s)}{ds} \frac{d\theta^j(s)}{ds} \\ &\geq g_{ij}(\rho(s), \theta(s)) \frac{d\theta^i(s)}{ds} \frac{d\theta^j(s)}{ds} \\ &\geq (1 - \epsilon)^2 g_{ij}(0, \theta(s)) \frac{d\theta^i(s)}{ds} \frac{d\theta^j(s)}{ds} \\ &= (1 - \epsilon)^2 \left| \frac{d(\pi_t \circ \gamma)}{ds} \right|_g^2(s), \end{aligned}$$

pois  $\pi_t \circ \gamma(s) = (0, \theta(s))$  para todo  $s \in I$ . Logo,

$$\left| \frac{d\gamma}{ds} \right|_g^2(s) \geq (1 - \epsilon)^2 \left| \frac{d(\pi_t \circ \gamma)}{ds} \right|_g^2(s),$$

implicando que

$$\ell(\gamma) \geq (1 - \epsilon) \ell(\pi_t \circ \gamma),$$

para qualquer curva  $\gamma$  em  $L_t$ . Em particular, se  $\gamma$  for geodésica, temos que

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \geq (1 - \epsilon) d(\pi_t(\mathbf{p}), \pi_t(\mathbf{q})),$$

para quaisquer dois pontos  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q} \in \mathcal{S}$ . O que prova (4.22).

Por definição de medida de Hausdorff, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{L}_t) &= \lim_{b \rightarrow 0} \mathcal{H}_b^{n-1}(\mathbf{L}_t) \\ &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}_g \mathcal{S}_i)^{n-1} : \cup_{i=1}^{\infty} \mathcal{S}_i \supseteq \mathbf{L}_t, \text{diam}_g(\mathcal{S}_i) < b \right\} \end{aligned}$$

e,

$$\mathcal{H}^{n-1}(\pi_t(\mathbf{L}_t)) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}_g \pi_t(\mathcal{S}_i))^{n-1} : \cup_{i=1}^{\infty} \pi_t(\mathcal{S}_i) \supseteq \pi_t(\mathbf{L}_t), \text{diam}_g(\pi_t(\mathcal{S}_i)) < b \right\},$$

Como

$$\text{diam}_g(\mathcal{S}_i) \geq (1 - \epsilon) \text{diam}_g(\pi_t(\mathcal{S}_i)),$$

então

$$(1 - \epsilon) \pi_t(\mathbf{L}_t) \subseteq \mathbf{L}_t.$$

Assim,

$$\mathcal{H}^{n-1}((1 - \epsilon) \pi_t(\mathbf{L}_t)) \leq \mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{L}_t).$$

Pela propriedade de escala (Proposição 1.31), e da sobrejetividade de  $\pi_t$ , temos que

$$(1 - \epsilon)^{n-1} \mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{L}_{\mathbf{u}_{\max}}) \leq \mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{L}_t),$$

para todo  $\mathbf{u}_\delta \leq \mathbf{t} \leq \mathbf{u}_{\max}$ . Como  $\mathcal{H}^{n-1}(\text{Max}(\mathbf{u}) \cap \bar{\mathbf{N}}) > 0$ , então  $\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{L}_{\mathbf{u}_{\max}}) > 0$ .

Logo, para todo  $\mathbf{u}_\delta \leq \mathbf{t} \leq \mathbf{u}_{\max}$  tem-se

$$\mathcal{H}^{n-1}(\mathbf{L}_t) > 0.$$

Portanto,

$$\lim_{\mathbf{t} \rightarrow \mathbf{u}_{\max}^-} \sup \{ |\mathbf{u} = \mathbf{t} \} \cap \mathbf{N} | > 0,$$

o que finaliza a prova da Afirmação 4.1. Portanto, temos que  $\mathcal{H}^{n-1}(\text{MAX}(\mathbf{u}) \cap \bar{\mathbf{N}}) = 0$ , isso significa que o conjunto  $\text{MAX}(\mathbf{u}) \cap \bar{\mathbf{N}}$  não divide a variedade, conseqüentemente  $\mathbf{N}$  é a única componente conexa de  $M \setminus \text{MAX}(\mathbf{u})$ . Em particular,  $\partial M \cap \mathbf{N} = \partial M$ , assim aplicando o Teorema 4.4, temos o desejado.  $\square$

### 4.3 Teorema da massa positiva para métricas estáticas com constante cosmológica positiva

Iniciaremos essa seção lembrando o conceito de massa virtual de uma componente conexa de  $M \setminus \text{MAX}(\mathbf{u})$ , definido na seção 2.3.

**Definição 4.1.** *Seja  $(M, \mathbf{g}, \mathbf{u})$  uma solução de (2.9) e  $N$  uma componente conexa de  $M \setminus \text{MAX}(\mathbf{u})$ . A massa virtual de  $N$  é denotada por  $\mu(N, \mathbf{g}, \mathbf{u})$  e é definida da seguinte forma:*

(i) *Se  $N$  é uma região externa, então definimos*

$$\mu(N, \mathbf{g}, \mathbf{u}) = \kappa_+^{-1} \left( \max_{\partial N} \frac{|\nabla \mathbf{u}|}{\mathbf{u}_{\max}} \right),$$

onde  $\kappa_+^{-1}$  é a inversa da função de gravidade da superfície externa  $\kappa_+$  definida em (2.47).

(ii) *Se  $N$  é uma região interna, então definimos*

$$\mu(N, \mathbf{g}, \mathbf{u}) = \kappa_-^{-1} \left( \max_{\partial N} \frac{|\nabla \mathbf{u}|}{\mathbf{u}_{\max}} \right),$$

onde  $\kappa_-^{-1}$  é a inversa da função de gravidade da superfície interna  $\kappa_-$  definida em (2.48).

Observamos que a definição de massa virtual não está a priori, bem definida para regiões externas, seria necessário verificar que a quantidade  $\max_{\partial N} \frac{|\nabla \mathbf{u}|}{\mathbf{u}_{\max}}$  está de fato no intervalo de definição da função  $\kappa_+^{-1}$ . Este é o conteúdo do resultado principal dessa dissertação, cuja demonstração é consequência direta do Teorema 4.5.

**Teorema 4.6 (Teorema da massa positiva para métricas estáticas com constante cosmológica positiva).** *Seja  $(M^n, \mathbf{g}, \mathbf{u})$  solução para o problema 2.9. Então, cada componente conexa de  $M \setminus \text{MAX}(\mathbf{u})$  tem massa virtual bem definida e, portanto, não negativa. Além disso, se a massa virtual de alguma componente conexa for nula, então a solução  $(M, \mathbf{g}, \mathbf{u})$  é isométrica a solução de Sitter.*

*Demonstração.* Seja  $N$  uma componente conexa de  $M \setminus \text{MAX}(\mathbf{u})$ , pelo Teorema 4.5 temos que

$$\max_{\Sigma \in \pi_0(\partial N)} \kappa(\Sigma) \geq 1.$$

Logo  $N$  tem massa virtual bem definida, e portanto não negativa. Se  $\mu(N, \mathbf{g}, \mathbf{u}) = 0$ , então

$$1 = \kappa_+(0) = \max_{\partial N} \frac{|\nabla \mathbf{u}|}{\mathbf{u}_{\max}},$$

então pelo Teorema 4.5 concluímos que  $(M, \mathbf{g}, \mathbf{u})$  é isométrica a solução de Sitter.  $\square$

# Referências Bibliográficas

- [1] ANDERSON, L.; CAI, M.; GALLOWAY, G.J.: *Rigidity and positivity of mass for asymptotically hyperbolic manifolds*, vol 9, Springer, pp. 1-33, 2008.
- [2] ARNOWITT, R.; DESER, S.; MISNER, C.W.: *The dynamics of general relativity*, Gen. Relativ. Grav. 40 1997-2027 (republication), 2008.
- [3] BARDEEN, J M.; CARTER, N.; HAWKING S W.: *The four laws of black hole mechanics*, Commum. Math. Phys. 31 161-70, 1973.
- [4] BARTNIK, R.: *The mass of an asymptotically flat manifold* , Commum. Pure Appl. Math. 39 661-93, 1986.
- [5] BEIG, R.: *Arnowitt-Deser-Misner energy and  $g_{00}$*  , Phys.Lett. A 69 153-5, 1978/79.
- [6] BORGHINI, S.; MAZZIERI, L.: *on the mass of static metrics with positive cosmological constant: I*, Class. Quantum Grav. 35 125001, 2018.
- [7] BORGHINI, S.: *On the characterization of static spacetime with positive cosmological positive*. Tesi (Dottorato in Matemática)-Scuola Normale Superiore. Pisa, Itália, p.203, 2017-2018.
- [8] BOUCHER, W.; GIBBONS, G W.; HOROWITZ G T.: *Uniqueness theorem for anti-de Sitter spacetime* ,Phys. Rev. D 30 2447-51, 1984.
- [9] BOUSSO, R.; HAWKING, S W.: *Pair creation of black holes during inflation* , Physical Review, 1996.
- [10] BRENDLE, S.; MARQUES, F.C.; NEVES, A.: *Deformations of the hemisphere that increase scalar curvature*, Invent. Math. **185**, no.1, 175-197, 2011.

- [11] CAMINHA, A.: *Tópicos de Geometria Diferencial*-1a Edição.1.ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2014,v.1.424p
- [12] CARDOSO, V.; DIAS, Ó J.; LEMOS, J P.: *Nariai, Bertotti-Robinson, and anti-Nariai solutions in higher dimensions*, Physical Review D, 2004.
- [13] CARMO, M.P.: *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2011.
- [14] CHOQUET-BRUHAT, Y.; GEROCH, R.: *Global aspects of the cauchy problem in general relativity*, Comm. Math. Phys. **14**, no.4, 329-335, 1969.
- [15] CHRUSCIEL, P T.: *Remarks en rigity of the sitter metric*. <http://homepage.univie.ac.at/piotr.chrusciel/papers/deSitter/deSitter2.pdf>
- [16] CHRUSCIEL, P T.: *On analyticity of static vacuum metrics at non-degenerate horizons*, Acta Phis. Polon, 2005.
- [17] CHRUSCIEL, P T.; HERZLICH, M.: *The mass of asymptotically hyperbolic Riemannian manifolds* , Pac. J. Math. 212 231-64, 2003.
- [18] CHRUSCIEL, P T.; NAGY, G.: *The mass of spacelike hypersurfaces in asymptotically anti-de-sitter space-times*, Adv. Theor. Math. Phys. **5**, no.4, 697-754, 2001.
- [19] CHRUSCIEL, P T.; SIMON, W.: *Towards the classification of static vacuum space-times with negative cosmological constant*, J. Math. Phys. 42 1779-817, 2001.
- [20] DUARTE, M.: *Dimensão de Hausdorff Invariância sob transformações de bi-Lipschitz* (Trabalho para cadeira de Sistemas Dinâmicos Discretos), 2003.
- [21] CORVINO, J.: *Scalar Curvature Deformation and a Gluing Construction for the Einstein Constraint Equations*, Stanford University, Stanford, 2000.
- [22] FISCHER, A.E.; MARSDEN, J.E.: *The einstein evolution equations as a first-order quasi-linear symmetric hyperbolic system, i*, Comm. Math. Phys **28**, no.1, 1-38, 1972.
- [23] FOOT, R L.: *Regularity of the distance function*, Proc. Am. Math. Soc, 1984.
- [24] FOURES-BRUHAT, Y.: *Théorème d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires*, Acta Math. **88**, no.1, 141-225, 1952.

- [25] GILBARG, D.; TRUDINGER, N.S. *Elliptic partial differential equations of second order*, 3<sup>a</sup> ed, Classics in Mathematics, Springer, 2001.
- [26] GINSPARG, P.; PERRY, M J.: *Semiclassical perdurance of de Sitter space*, Nucl.Phys, 1983.
- [27] GOMES, J.N.: *Operadores Diferenciais em Variedades Riemannianas*. Notas de Aula, Universidade de São Paulo-USP, São Paulo, 86, 2015.
- [28] GRIGOR'YAN, A.: *Heat Kernel and Analysis on manifolds* AMS/IP studies in advanced mathematics, v.47, 2009.
- [29] BALTAZAR, H.: *Métricas críticas do funcional volume e não-existência de múltiplos buracos negros em espaço-tempo estático* Tese (Doutorado em Matemática)-Universidade Federal do Ceará. Fortaleza, p.68, 2017.
- [30] HAWKING, S.W.; ELLIS, G.F.R.: *The large scale structure of space-time*, vol.1, Cambridge university press, 1973.
- [31] HEUSLER, M.: *Black hole uniqueness theorems*, Cambridge Lecture Notes in Physics, vol 6, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [32] HOFFMAN, K.; KUNZE, R.: *Linear Algebra*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1961.
- [33] JESUS, A.M.: *A rigidez da curvatura de Ricci do hemisfério  $S^2_+$* . Dissertação (Mestrado em Matemática)-Universidade Federal de Alagoas. Maceió, 81, 2009.
- [34] KRANTZ, S G.; PARKS H R.: *Distance to  $C^k$  hypersurfaces*, J.Differ.Equ. 1981.
- [35] KRANTZ, S G.; PARKS H R.: *A primer of real analytic functions* Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher (Birkhäuser Advanced Texts: Basel Textbooks) 2nd edn (Boston, MA: Birkhäuser), 2002.
- [36] LOJASIEWICZ, S.: *Introduction to Complex Analytic Geometry*, (Basel: Birkhäuser)( Translated from the polish by Maciej Klimek),1991.
- [37] LOJASIEWICZ, S.: *Une propriété topologique des sous-ensembles analytiques réels*. In Les Équations aux Dérivées Partielles (Paris, 1962), pages 87-89. Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1963.

- [38] MAERTEN, D.: *Positive energy-momentum theorem for AdS-asymptotically hyperbolic manifolds*, vol.7, Springer, pp. 975-1011, 2006.
- [39] MIN-Oo, M.: *Scalar curvature rigidity of certain symmetric spaces*. Geometry, topology, and dynamics (Montreal, PQ, 1995) CRM Proc. Lecture Notes, vol 15, Amer. Math. Soc., Providence, RI, pp. 127-136, 1998.
- [40] SURFACE GRAVITY. Disponível em < <https://www.nagwa.com/en/videos/423154217824/>>.
- [41] OBATA, M.: *Certain Conditions for a Riemannian manifolds to be isometric with a sphere*, J. Math. Soc. Japan. 14 333-40, 1962.
- [42] O'NEILL, B.: *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, London, 1983.
- [43] PAPAS, T.; KANTI, P.: *Schwarchild-de Sitter spacetime: the role temperature in the emission of Hawking radiation*, Phys.Lett, 2017.
- [44] QUEIROZ, C.: *Sóliton de Ricci contrátil com integral pinçada*. Dissertação (Mestrado em Matemática)- Universidade Federal do Piauí. Teresina, p.87, 2020.
- [45] RAMPANELLI, D.; BONORINO, L.: *Medida de Hausdorff e dimensões fracionárias*, (Departamento de Matemática Pura e Aplicada, Instituto de Matemática, UFRGS).
- [46] REILLY, R.: *Applications of the hessian operator in a riemannian manifold* , Indiana University Mathematical Journaul. 23 459-472, 1977.
- [47] SAKAI, T.: *Riemannian Geometry*, AMS, 1992.
- [48] SCHOEN, R.; Yau S T.: *On the proof of the positive mass conjecture in general relativity* , Commum. Math. Phys. 65 45-76, 1979.
- [49] SCHOEN, R.; YAU S T.: *Positive scalar curvature and minimal hypersurface singularities* , (arXiv:1704.05490), 2017.
- [50] SHEN, Y.: *A note on fischer-marsden's conjecture*. Proceedings of the american mathematical society, v. 125, n.3, p. 901-905, 1997.

- 
- [51] SOUCEK, J.; SOUCEK, V.: *Morse-Sard theorem for real-analytic functions*, Comment. Math. Univ. Carolinae, 1972.
- [52] WANG, X. :. *The mass of asymptotically hyperbolic manifolds*, J. Differ. Geom. 57 273-99, 2001.
- [53] WAID, R. M.: *General Relativity* (Chicago, IL: University of Chicago Press), 1984.
- [54] WITTEN, E.: *A new proof of the positive energy theorem*, Comm. Math. Phys. **80**, no,3, 381-402, 1981.
- [55] ZHANG, X.: *A definition of total energy-momenta and the positive mass theorem on asymptotically hyperbolic 3-manifolds I*, Comm.Math. Phys. **249**, no.3, 529-548, 2004.
- [56] ZUM HAGEN, H.M.: *On the analyticity of static vacuum solutions of Einstein equations*, Proc. Cambridge Philos. Soc, 1970.