



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA  
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
MESTRADO EM MATEMÁTICA

## **Parabolicidade em variedades com bordo e aplicações**

**IDALINA MARIA RIBEIRO SILVA**

**Teresina - 2022**

**Idalina Maria Ribeiro Silva**

**Dissertação de Mestrado:**

**Parabolicidade em variedades com bordo e aplicações**

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Leandro de Freitas Pessoa

**Teresina - 2022**



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

*Parabolicidade em variedades com bordo e aplicações*

Idalina Maria Ribeiro Silva

Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 18 de fevereiro de 2022.

**Banca Examinadora:**

Leandro de Freitas Pessoa

Prof. Dr. Leandro de Freitas Pessoa - Orientador

Antonio Wilson Rodrigues da Cunha

Prof. Dr. Antonio Wilson Rodrigues da Cunha - UFPI

Gregório Pacelli Feitosa Bessa

Prof. Dr. Gregório Pacelli Feitosa Bessa - UFC

FICHA CATALOGRÁFICA  
Universidade Federal do Piauí  
Sistema de Bibliotecas da UFPI – SIBi/UFPI  
Biblioteca Setorial do CCN

S5861p Silva, Idalina Maria Ribeiro.  
Parabolicidade em variedades com bordo e aplicações /  
Idalina Maria Ribeiro Silva. – 2022.  
198 f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí,  
Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em  
Matemática, Teresina, 2022.

“Orientador: Prof. Dr. Leandro de Freitas Pessoa”.

1. Geometria Diferencial. 2. Resultados *Slice*. 3.  
Resultados *Slice*. I. Pessoa, Leandro de Freitas. II. Título.

CDD 516.36

*À minha avó Maria Teresa de Jesus (In memoriam)  
e à minha avó Maria Lúcia da Silva.*

# Agradecimentos

Agradeço a Deus, pelas suas infinitas misericórdias na minha vida, por ter me dado a vida até este momento e ter me mantido com saúde. Agradeço também por estar comigo nos momentos difíceis, não me deixando desistir, dando consolo e paz nas horas de desespero.(Salmos 34.1).

Agradeço aos meus familiares que me ajudaram de forma direta e indireta, em especial, à minha avó Maria Lúcia da Silva por ter sido meu suporte nos momentos mais caóticos dessa minha jornada.

Agradeço ao meu orientador Leandro de Freitas Pessoa, por ter me confiado a responsabilidade de desenvolver este trabalho com base em dois artigos de temas atuais. Agradeço pelo incentivo recebido durante a orientação, pelos conselhos, pelas broncas, pelas conversas. Sou grata pelo apoio que recebi durante a orientação e que ainda recebo. Uma coisa que tenho em mente é que não me arrependo em nenhum momento da minha escolha para orientador.

Agradeço a todos os meus professores que tive durante a minha vida acadêmica. Aos professores do departamento de Matemática da UFPI-CSHNB, em especial, ao professor Daniel Silva pelos conselhos e o apoio nos estudos durante o período que estive estudando para a seleção do mestrado, ao professor Josimar, também pelo apoio nos estudos e por me animar nos momentos de desânimo.

Agradeço ao professor Alex Sandro, por acreditar em mim e incentivar a tentar novamente a seleção do mestrado mesmo depois do balde de água fria na primeira vez que tentei. Por ter me auxiliado nos estudos diretamente me ensinando e corrigindo as minhas falhas de escrita. Sou grata pelo suporte emocional que proporcionou durante esse tempo e até hoje. Ganhei muito mais que professor/orientador, levo para a vida como um grande amigo que pesso conta sempre.

Aos professores da Pós-Graduação em Matemática da UFPI, em especial, aos professores Jurandir Lopes, Gleison Nascimento, Cícero Aquino, Ítalo Dowell e Halysn Baltazar, obrigada pela dedicação ao ensino e pelas ótimas aulas ministradas.

Agradeço aos professores Gregório Pacelli e Antonio Wilson Rodrigues da Cunha, por terem aceitado o convite para fazerem parte da banca examinadora e pelo esforço com as correções desse trabalho.

Agradeço aos meus amigos do mestrado Jean, Ruan, João Vinicius, Jonas Bloch, Erisvaldo pelo companheirismos nos estudos, foi um prazer ter conhecido vocês.

Agradeço a minha amiga Jaciane, pelo companheirismo durante os 2 anos de mestrado.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

*“Ó Deus, tu és o meu Deus, eu te busco intensamente; a minha alma tem sede de ti! Todo o meu ser anseia por ti, numa terra seca, exausta e sem água”.*

Salmos 63:1.

# Resumo

Neste trabalho investigamos o conceito de parabolicidade em variedades Riemannianas completas com bordo. Caracterizações em termos da capacidade, do princípio do máximo de Ahlfors e do critério integral de Kelvin-Nevanlinna-Royden são estudados, além da relação com a existência do núcleo de Green com dado de bordo do tipo Neumann ou Dirichlet. Contribuições à Geometria Diferencial são dadas em termos de estimativas de altura e resultados do tipo *slice* para gráficos com curvatura média constante definidos em domínios ilimitados. Do ponto de vista da Teoria do Potencial, apresentamos condições analítico-geométricas suficientes para a validade da propriedade  $L^1$ -Liouville para funções superharmônicas positivas. Ademais, através das técnicas aqui estudadas são exibidos exemplos de variedades estocasticamente incompletas que satisfazem a propriedade  $L^1$ -Liouville.

**Palavras chaves:** Parabolicidade; Variedades com bordo; Propriedade  $L^1$ -Liouville; CMC-Gráficos; Resultados do tipo *slice*.

# Abstract

In this work we investigate the concept of parabolicity in Riemannian manifolds complete with boundary. Characterizations in terms of capacity, the Ahlfors maximum principle and the Kelvin-Nevanlinna-Royden integral criterion are studied, besides the relationship with the existence of the Green kernel with Neumann or Dirichlet boundary data. Contributions to Differential Geometry are given in terms of height estimates and *slice* type results for graphs with constant mean curvature defined in unbounded domains. From the potential theoretic point of view we present sufficient analytical and geometric conditions for the validity of the  $L^1$ -Liouville property for positive superharmonic functions. Furthermore, through the techniques studied here, examples of stochastically incomplete manifolds that satisfy the  $L^1$ -Liouville property are shown.

**Key words:** Parabolicity; Manifolds with boundary;  $L^1$ -Liouville property; CMC-Graphs; Slice type results.

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vi</b>
<b>1 Noções Preliminares</b>	<b>7</b>
1.1 O Princípio do Máximo . . . . .	12
1.2 Teorema da Comparação da Hessiana e Laplaciano . . . . .	17
1.3 Espaços de Sobolev . . . . .	27
1.4 Núcleo do Calor e função de Green . . . . .	31
1.5 Desigualdade de Harnack . . . . .	34
<b>2 Parabolicidade em Variedades Riemanniana</b>	<b>42</b>
2.1 Capacidade e potenciais de equilíbrio . . . . .	46
2.2 Princípio do Máximo de Ahlfors, parabolicidade e gráficos mínimos . . . . .	61
<b>3 Aplicações</b>	<b>91</b>
3.1 Estimativas de altura para hipersuperfície CMC em espaços produto . . . . .	91
3.2 O Teorema de Stokes $L^2$ e resultados do tipo slice . . . . .	115
3.3 Propriedade Dirichlet $L^1$ -Liouville . . . . .	137
3.4 Completude estocástica vs propriedade $L^1$ -Liouville . . . . .	148
3.5 Condições geométricas localizadas para a propriedade $L^1$ -Liouville . . . . .	156

# Introdução

É notório que algumas propriedades oriundas da Teoria do Potencial dependem apenas da geometria no infinito de uma variedade Riemanniana completa não compacta, isto é, das propriedades de seus fins, a saber, suas componentes conexas ilimitadas. Destacam-se dentre tais propriedades a parabolicidade e a completude estocástica cuja validade em uma variedade é equivalente à suas respectivas validades em todos os fins da variedade, veja [1, 39] para parabolicidade e [19, 23] para completude estocástica.

Os fins de uma variedade Riemanniana sem bordo podem ser interpretados como uma variedade com bordo compacto. Mais geralmente, em variedades Riemannianas com bordo (possivelmente não compacto) o conceito de parabolicidade tem-se revelado de suma importância na investigação de problemas em Geometria Diferencial e Análise Geométrica. Neste sentido, cabe diferenciar dois conceitos de parabolicidade para variedades com bordo que dependem das condições de contorno impostas, a saber, condições de Neumann ou Dirichlet. Sob a ótica estocástica, a parabolicidade sob condições de Neumann significa que o movimento Browniano se reflete no bordo e é recorrente, i.e., ele visita infinita vezes um conjunto compacto fixado com probabilidade 1 (ver [2, 5, 1, 4]). Já para dados de Dirichlet, a parabolicidade é interpretada em termos da recorrência da absorção do movimento Browniano pelo bordo, i.e., qualquer caminho aleatório iniciado no interior da variedade atinge o bordo (e morre) em tempo finito com probabilidade 1.

Neste trabalho iremos discutir sobre esses diferentes conceitos de parabolicidade para variedades com bordo, determinar sua relação hierárquica através de caracterizações via princípios do máximo de Ahlfors, além de apresentar aplicações geométricas e analítico-funcionais desenvolvidas recentemente, mais especificamente discutiremos em detalhes os resultados provados por D. Impera, S. Pigola e A.G. Setti em [15] e L.F. Pessoa, S. Pigola e A.G. Setti em [31]. Um aspecto relevante neste estudo é representado pela diferença crucial das condições de bordo para com a existência da função de Green para a variedade.

Com vistas nas importantes aplicações investigadas para superfícies mínimas (vide [37, 29, 17, 45]), e tendo em mãos esta nova abordagem via Teoria do Potencial para variedades com bordo, uma importante estimativa de altura para gráficos com curvatura média constante definidos sobre domínios ilimitados é obtida.

**Teorema 17** (Estimativa de altura, [15]). *Seja  $(N, g)$  uma variedade Riemanniana sem bordo e curvatura de Ricci satisfazendo  $\text{Ric}_N \geq 0$ . Seja  $\Sigma$  uma hipersuperfície compacta e orientada em  $N \times \mathbb{R}$  com bordo  $\partial\Sigma \neq \emptyset$  e satisfazendo os seguintes requisitos:*

i–  $\Sigma$  tem crescimento de volume intrínseco quadrático

$$\text{vol}(B_R^\Sigma(o)) = \mathcal{O}(R^2), \quad \text{quando } R \rightarrow +\infty;$$

ii–  $\partial\Sigma$  está contida no slice  $N \times \{0\}$ ;

iii– Para uma escolha adequada do aplicação de Gauss  $\mathcal{N}$  de  $\Sigma$ , a hipersuperfície  $\Sigma$  tem curvatura média constante  $H > 0$  e o ângulo  $\theta$  entre  $\mathcal{N}$  e o campo vetorial vertical  $\frac{\partial}{\partial t}$  está contido no intervalo  $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ , ou seja,

$$\cos \theta = \left\langle \mathcal{N}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \leq 0.$$

Se  $\Sigma$  está contido no bloco  $N \times [-T, T]$  para algum  $T > 0$ , então

$$\Sigma \subset N \times \left[0, \frac{1}{H}\right].$$

Observamos que a condição de volume  $\text{vol}(B_R^\Sigma(o)) = \mathcal{O}(R^2)$ , quando  $R \rightarrow +\infty$  pode ser substituída pela condição extrínseca mais forte

$$\text{vol}(B_R^N(o) \cap \Sigma) = \mathcal{O}(R^2), \quad \text{quando } R \rightarrow +\infty;$$

que, por sua vez, decorre da relação

$$B_R^\Sigma(o) \subseteq B_R^N(o) \cap \Sigma.$$

Para variedades sem bordo, um trabalho clássico de T. Lyons e D. Sullivan [50] diz que a validade do Teorema da Divergência  $L^2$  é equivalente à parabolicidade do espaço. Dada a relevância deste tipo de resultado, uma extensão do Teorema da Divergência  $L^2$  para variedades não compactas com bordo foi também provada em [15].

**Teorema 19** (Teorema da Divergência  $L^2$ , [15]). *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana com bordo  $\partial M \neq \emptyset$  e seja  $\nu$  o seu campo normal unitário exterior. Então  $M$  é parabólico se, e somente se, o seguinte for válido: Seja  $X$  um campo vetorial em  $M$  satisfazendo as seguintes condições:*

- a)  $|X| \in L^2(M)_{\text{loc}}(M)$ ;
- b)  $\langle X, \nu \rangle \in L^1(\partial M)$ ;
- c)  $\text{div } X \in L^1_{\text{loc}}(M)$ ,  $(\text{div } X)_- \in L^1(M)$ .

Então,

$$\int_M \text{div } X = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle.$$

Uma versão mais fraca do Teorema da Divergência  $L^2$  para campos  $X$  satisfazendo  $\text{div } X \geq f$ , com condições de bordo  $\langle X, \nu \rangle \leq 0$ , pode ser implementada para investigar hipersuperfícies em espaços produtos do tipo  $N \times \mathbb{R}$ . De fato, o seguinte resultado obtém ridigez sob certas condições para tais hipersuperfícies.

**Teorema 20** (Teorema do Slice). *Seja  $(N, g)$  uma variedade Riemanniana sem bordo. Seja  $\Sigma \subset N \times [0, +\infty)$  uma hipersuperfície completa e orientada com bordo  $\partial \Sigma \neq \emptyset$  contido no slice  $N \times \{0\}$  e satisfazendo a condição de crescimento de volume*

$$\text{vol}(B_{\mathbb{R}}^{\Sigma}(\mathbf{o})) = \mathcal{O}(R^2) \quad \text{quando } R \rightarrow +\infty.$$

*Suponha que, para uma escolha adequada do aplicação de Gauss  $\mathcal{N}$  de  $\Sigma$ , a hipersuperfície  $\Sigma$  tem curvatura média não positiva  $H(x) \leq 0$  e o ângulo  $\theta$  entre  $\mathcal{N}$  satisfaça*

$$\cos \theta = \left\langle \mathcal{N}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \leq 0.$$

*Se existe algum semi-espaço  $N \times [t, +\infty)$  de  $N \times \mathbb{R}$  tal que*

$$\text{vol}(\Sigma \cap (N \times [t, +\infty))) < +\infty,$$

*então  $\Sigma \subset N \times \{0\}$ .*

Intimamente relacionada com a completude estocástica da variedade, a propriedade de Liouville para funções positivas, superharmônicas e integráveis representa uma linha de pesquisa ainda não totalmente compreendida na Teoria do Potencial em variedades.

De fato, A. Grigor'yan em [1], [6] mostrou que essa propriedade é equivalente à não integrabilidade do núcleo de Green positivo do operador de Laplace. Com isto, Grigor'yan provou que toda variedade estocasticamente completa satisfaz a propriedade  $L^1$ -Liouville, e além disso, mostrou a equivalência entre estas propriedades em qualquer variedade modelo.

A equivalência entre completude estocástica e a propriedade  $L^1$ -Liouville em geral permaneceu em aberto até que G.P. Bessa, S. Pigola e A.G. Setti em [23] apresentaram exemplos de variedades estocasticamente incompletas em dimensão 2 que satisfazem a propriedade  $L^1$ -Liouville. A construção dos exemplos utiliza de modo crucial a invariância conforme do núcleo de Green e do operador de Laplace em dimensão 2 o que impossibilitou sua generalização para dimensões maiores.

Inspirados em [23], L.F. Pessoa, S. Pigola e A.G. Setti em [31] puseram nova luz sobre a propriedade  $L^1$ -Liouville através do desenvolvimento supracitado da Teoria do Potencial para variedades com bordo. Introduzindo um novo conceito para a propriedade  $L^1$ -Liouville para variedades com bordo chamada de Dirichlet  $L^1$ -Liouville, eles provaram que a propriedade  $L^1$ -Liouville difere completamente da completude estocástica devido à sua anisotropia com relação aos fins. De fato, eles mostraram que para uma variedade ser  $L^1$ -Liouville apenas um fim deve ser Dirichlet  $L^1$ -Liouville. Através disso, eles mostraram para quaisquer dimensão diversos exemplos de variedades estocasticamente incompletas que não possuem a propriedade  $L^1$ -Liouville.

Como segunda parte deste trabalho, além de apresentarmos em detalhes os resultados descritos acima sobre a propriedade  $L^1$ -Liouville, também descreveremos os resultados geométricos provados em [31] para a validade de tal propriedade. Tais resultados se utilizam apenas de hipóteses sobre uma porção significativa da variedade, expondo a característica anisotrópica desta propriedade. Como principais aplicações iremos assumir condições geométricas sobre a curvatura da variedade localizadas dentro de um semi-espaco  $M^+$  com respeito a algum raio geodésico  $\gamma$ . Por um semiespaço geométrico, queremos dizer o seguinte

**Definição 1.** *Seja  $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$  um raio geodésico, parametrizado pelo comprimento de arco na variedade Riemanniana completa  $(M, g)$ . O semiespaço  $M^+$  em relação a  $\gamma$  é o domínio*

$$M^+ = \cup_{t>0} B_t(\gamma(t)),$$

onde  $B_t(\mathbf{p})$  é a bola métrica aberta de raio  $t > 0$  centrada em  $\mathbf{p}$ .

**Teorema 26** (Pessoa-Pigola-Setti, [31]). *Suponha que  $(M, g)$  é uma variedade Riemanniana completa satisfazendo*

$$\text{Ric}(x) \geq -\frac{(m-1)B^2}{1+r_{\gamma(0)}^2(x)}$$

sobre o semiespaço  $M^+$ , para algum  $0 \leq B < \frac{\sqrt{m}}{m-1}$ , onde  $r_{\gamma(0)}$  denota a função de distância em  $M$  de  $\gamma(0)$ . Então,  $(M, g)$  é  $L^1$ -Liouville.

O caso onde a curvatura é negativamente pinçada também é estudado seguindo as mesmas ideias. Porém neste caso, a porção significativa da variedade na qual impomos condições geométricas é dada pelo complementar de um semi-espaço hiperbólico dado através da função de Busemann.

**Teorema 27** (Pessoa-Pigola-Setti, [31]). *Seja  $(M, g)$  uma variedade Cartan-Hadamard satisfazendo*

$$\text{Ric} \geq -(m-1)B^2 \quad \text{e} \quad \text{Sec} \leq -A^2,$$

para alguma constante  $B \geq A > 0$  no complementar  $\complement \mathcal{B}_\gamma(\mathbf{R})$  do semiespaço  $\mathcal{B}_\gamma(\mathbf{R})$  com respeito a algum raio geodésico  $\gamma$ . Se é uma métrica Riemanniana qualquer em  $M$  satisfazendo  $h = g$  sobre  $\complement \mathcal{B}_\gamma(\mathbf{R})$ , então  $(M, h)$  é  $L^1$ -Liouville.

Por último, uma curiosa relação espectral e a propriedade  $L^1$ -Liouville são investigada para variedades contendo cones, onde para qualquer  $\Omega$  em  $\Sigma$  com contorno suave, denotamos por  $C_\Omega$  como sendo este cone em  $M$  sobre  $\Sigma$ , ou seja,

$$C_\Omega = \{(r, \theta), r \geq 0, \theta \in \Omega\}.$$

**Teorema 28.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana suave  $m$ -dimensional. Suponha que exista uma região  $M_0$  em  $M$  isométrica a um cone de produto deformado  $C_\Omega$ . Se  $\lambda_\Omega \leq 2m$ , então  $M$  é  $L^1$ -Liouville.*

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: no Capítulo 1 expomos alguns resultados preliminares que irão auxiliar nas demonstrações dos resultados colocados no decorrer do texto. No Capítulo 2 introduzimos as definições de capacidade e potencial de equilíbrio juntamente com os princípios do máximo de Ahlfors que caracterizam as

diferentes noções de parabolicidade em variedades com bordo. Expomos ainda diferentes noções de parabolicidade onde é apresentado uma hierarquia entre tais definições. Também apresentamos uma construção onde verificamos que toda variedade com bordo admite um núcleo de Green de Dirichlet. No Capítulo 3 expomos aplicações dos conceitos vistos no Capítulo 2. A partir do princípio do máximo global obtemos estimativas tanto para  $H$ -hipersuperfícies com bordo em espaços produtos como para  $H$ -gráficos. Em seguida apresentamos uma demonstração para o Teorema da Divergência  $L^2$  juntamente com uma versão mais fraca do mesmo teorema. A partir daí verificamos resultados do tipo slice. A propriedade  $L^1$ -Liouville de Dirichlet para variedades com bordo é introduzida e sua relação com a integrabilidade do núcleo de Green de Dirichlet é investigada. Por fim, mostramos que a propriedade  $L^1$ -Liouville depende apenas da geometria de um de seus fins, apresentamos exemplos de variedades estocasticamente incompletas que satisfazem a propriedade  $L^1$ -Liouville e demonstramos condições geométricas localizadas suficientes para que uma variedade seja  $L^1$ -Liouville.

# Capítulo 1

## Noções Preliminares

Neste capítulo, iremos apresentar algumas definições, conceitos e resultados que serão utilizados nos capítulos seguintes. É necessário que o leitor tenha o conhecimento básico de algumas linguagens e resultados fundamentais em Geometria de Variedades e Riemanniana onde aqui omitiremos tais conceitos e resultados como: variedade, espaços tangentes, métricas, conexão entre outras ideias que podem se encontradas em um bom livro que introduza esses conceitos, a saber, [12], [10].

A derivação covariante de tensores apresentadas em [12] permite estender às variedades Riemannianas de certos operadores diferenciais (Gradiente, Laplaciano, entre outros.) que são utilizadas frequentemente no  $\mathbb{R}^n$ . Nesta seção apresentaremos alguns destes operadores. Em tudo que segue,  $(M^n, g = \langle \cdot, \cdot \rangle_g)$  denotará uma variedade Riemanniana de  $n$ -dimencional com métrica  $g = \langle \cdot, \cdot \rangle_g$  e conexão de Levi-Civita denotada por  $\nabla$ .

**Definição 2.** *Seja  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave. O gradiente de  $f$  é o campo vetorial suave  $\nabla f$ , definido sobre  $M$  por*

$$\langle \nabla f(p), v \rangle = X(f), \quad (1.1)$$

para todo  $X \in \chi(M)$ .

A partir da definição acima que temos que o gradiente de uma função suave, caso exista, é unicamente determinado por (1.1). A existência é assegurada pela seguinte

**Proposição 1.** *Seja  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave e  $\{e_1, \dots, e_n\}$  um referencial ortonormal em uma vizinhança aberta  $U \subset M$ . Então, em  $U$  temos*

$$\nabla f = \sum_j e_j(f) e_j.$$

Ademais, o segundo membro da igualdade acima independe do referencial escolhido.

*Demonstração.* Para a primeira parte basta ver que, sendo  $X = a_i e_i$  em  $U$ , temos que

$$X(f) = \sum_j a_i e_i(f) = \sum_j \langle a_i e_i, e_j(f) e_j \rangle = \sum_j \langle X, e_j(f) e_j \rangle.$$

Por outro lado, se  $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$  for outro referencial ortonormal em  $U$ , com  $\bar{e}_j = a_{ij} e_i$  em  $U$ , então a matriz  $(a_{ij}(p))_{n \times n}$  é ortogonal em todo  $p \in U$ , e daí

$$\sum_j \bar{e}_j(f) \bar{e}_j = \sum_j a_{kj} a_{lj} e_k(f) e_l = \sum_l \delta_{kl} e_k(f) e_l = \sum_j e_k(f) e_k.$$

□

**Observação 1.** Notemos que, quando  $M^n = \mathbb{R}^n$  podemos tomar, para  $1 \leq i \leq n$ ,  $e_i = E_i$ , o  $i$ -ésimo campo canônico em  $\mathbb{R}^n$ . Desse modo,

$$\nabla f = \sum_i E_i(f) E_i = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} E_i = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Consequentemente, nossa definição de gradiente de uma função combina com a dada nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral para funções suaves  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Proposição 2.** Se  $f, g : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  são funções suaves, então

(a)  $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$ .

(b)  $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$ .

*Demonstração.* Tomemos  $X$  um campo suave  $M$ , logo

$$\begin{aligned} \langle \nabla(f + g), X \rangle &= X(f) + X(g) \\ &= \langle \nabla f, X \rangle + \langle \nabla g, X \rangle \\ &= \langle \nabla f + \nabla g, X \rangle, \end{aligned}$$

dessa forma, é verificado o item a). Agora, para o item b) teremos

$$\begin{aligned} \langle \nabla(fg), X \rangle &= gX(f) + fX(g) \\ &= \langle g\nabla f, X \rangle + \langle f\nabla g, X \rangle \\ &= \langle g\nabla f + f\nabla g, X \rangle. \end{aligned}$$

Logo, obtemos o resultado desejado.

□

**Definição 3.** *Seja  $X$  um campo vetorial suave em  $M^n$ . A divergência de  $X$  é a função suave  $\text{div}X : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ , dada para  $p \in M$  por*

$$(\text{div}X)(p) = \text{tr}\{v \mapsto (\nabla_v X)(p)\}, \quad (1.2)$$

onde  $v \in T_p M$  e  $\text{tr}$  denota o traço do operador linear entre chaves.

**Observação 2.** *Observe que, para  $M^n = \mathbb{R}^n$  e  $1 \leq i \leq n$ , podemos tomar  $e_i = E_i$ , o  $i$ -ésimo campo canônico em  $\mathbb{R}^n$ . Desde que tais campos formam um referencial geodésico em cada ponto de  $\mathbb{R}^n$ , temos*

$$\text{div}X = \sum_i E_i(a_i) = \sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_i},$$

o que concorda com a definição dada usualmente nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral para a divergência de um campo vetorial.

**Proposição 3.** *Se  $X, Y$  são campos vetoriais suaves em  $M^n$  e  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave, então*

(a)  $\text{div}(X + Y) = \text{div}X + \text{div}Y$ .

(b)  $\text{div}(fX) = f \cdot \text{div}X + \langle \nabla f, X \rangle$ .

*Demonstração.* Para o item (a) temos o seguinte cálculo

$$\begin{aligned} \text{div}(X + Y) &= \text{tr}\{Z \rightarrow \nabla_Z(X + Y)\} \\ &= \text{tr}\{Z \rightarrow (\nabla_Z X + \nabla_Z Y)\} \\ &= \text{tr}\{Z \rightarrow \nabla_Z X\} + \text{tr}\{Z \rightarrow \nabla_Z Y\} \\ &= \text{div}X + \text{div}Y. \end{aligned}$$

Agora, para o item (b) tomemos  $\{e_i\}$  um referencial, logo

$$\begin{aligned} \text{div}(fX) &= \langle \nabla_{e_i}(fX), e_i \rangle \\ &= \langle e_i(f)e_i, X \rangle + f \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle \\ &= \langle \nabla f, X \rangle + f \text{div}X. \end{aligned}$$

□

**Teorema 1** (Divergência). *Seja  $M^{n+1}$  uma variedade Riemanniana compacta e orientada, e  $X \in \chi(M)$ . Se  $M$  tem bordo  $\partial M$  possivelmente  $\partial M = \emptyset$ , munido com a orientação e a métrica induzidas pela inclusão  $\iota : \partial M \rightarrow M$ , e  $\nu$  denota a normal unitária exterior a  $M$  ao longo de  $\partial M$ , então*

$$\int_M (\operatorname{div} X) dM = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle d(\partial M), \quad (1.3)$$

onde, na igualdade acima, interpretamos  $\int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle d(\partial M)$  como sendo igual a 0 caso  $\partial M = \emptyset$ .

*Demonstração.* O Teorema da Divergência é uma consequência direta do Teorema de Stokes.

□

**Definição 4.** *Seja  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave. O Laplaciano de  $f$  é a função  $\Delta f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por*

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f).$$

**Proposição 4.** *Seja  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave em  $M^n$ , e  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  um referencial móvel em um aberto  $U \subset M$ . Então*

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \{e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i)f\}. \quad (1.4)$$

*Em particular, se o referencial for geodésico em  $p \in U$ , então tem-se em  $p$*

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n e_i(e_i(f)).$$

*Demonstração.* Observemos, inicialmente, que  $\nabla f = \sum_{i=1}^n e_i(e_i(f))$  em  $U \subset M$ . Por definição temos que  $\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$  daí, por (1.4) obtemos

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \{e_i(e_i(f)) - \langle \nabla_{e_i} e_i, \nabla f \rangle\} = \sum_{i=1}^n \{e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i)f\}.$$

Como o sistema de coordenadas tomado é geodésico teremos que  $\nabla_{e_i} e_i = 0$ , logo

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \{e_i(e_i(f))\}.$$

□

**Proposição 5.** Dadas  $f, g : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  funções suaves, tem-se

$$\Delta(fg) = g\Delta f + f\Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle. \quad (1.5)$$

Em particular,

$$\frac{1}{2}\Delta(f^2) = f\Delta f + |\nabla f|^2. \quad (1.6)$$

*Demonstração.* Notemos que, a fórmula (1.6) segue diretamente de (1.5). Assim, para esta, temos pelas Proposição 2 e 3 que

$$\begin{aligned} \Delta(fg) &= \operatorname{div}(\nabla(fg)) = \operatorname{div}(g\nabla f + f\nabla g) \\ &= g\Delta f + f\Delta g + 2\langle f, \Delta g \rangle. \end{aligned}$$

□

**Proposição 6.** Se  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave e  $U \subset M$  é uma vizinhança coordenada, com campos coordenados  $\partial_1, \dots, \partial_n$ , então o Laplaciano de  $f$  é dado em  $U$  por

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right).$$

*Demonstração.* Tomemos  $\nabla f = \sum_i \mathbf{a}_i$ , onde  $\mathbf{a}_i = \sum_j g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}$ , como

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i \sqrt{g}),$$

obtemos que

$$\begin{aligned} \Delta f &= \operatorname{div}(\nabla f) = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i \sqrt{g}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \sum_j g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right). \end{aligned}$$

□

**Proposição 7** (Identidade de Green). *Seja  $M^{n+1}$  uma variedade Riemanniana compacta orientada, com bordo  $\partial M$  munido com a orientação e a métrica induzidas pela inclusão  $\iota : \partial M \rightarrow M$  (possivelmente  $\partial M = \emptyset$ ). Se  $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$  são funções suaves e  $\nu$  denota a normal unitária exterior a  $M$  ao longo de  $\partial M$ , então*

(a) **(Primeira Identidade de Green)**

$$\int_M (\langle \nabla f, \nabla g \rangle + f \Delta g) dM = \int_{\partial M} f \frac{\partial g}{\partial \nu} d(\partial M). \quad (1.7)$$

(b) **(Segunda Identidade de Green)**

$$\int_M (f \Delta g - g \Delta f) dM = \int_{\partial M} \left( f \frac{\partial g}{\partial \nu} - g \frac{\partial f}{\partial \nu} \right) d(\partial M). \quad (1.8)$$

*Demonstração.* Para o item (a), basta aplicar o Teorema da Divergência ao campo  $X = f \nabla g$ . Já o item (b) segue imediatamente do item (a), trocando  $f$  por  $g$  em (a) e subtraindo membro a membro as duas identidades obtidas.

□

**Definição 5.** *Seja  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave. O Hessiano de  $f$  é o campo de operadores lineares  $\text{Hess}f : T_p M \rightarrow T_p M$ , definido para  $\nu \in T_p M$  por*

$$(\text{Hess}f)(\nu) = \nabla_\nu \nabla f.$$

**Proposição 8.** *Se  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave, então*

$$\Delta f = \text{tr}(\text{Hess}f).$$

*Demonstração.* É suficiente demonstrar a igualdade do enunciado em cada ponto  $p \in M$ . Para isso, seja  $U \subset M$  uma vizinhança de  $p$  onde esteja definido um referencial móvel  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ . Então

$$\begin{aligned} \text{tr}(\text{Hess}f)_p &= \sum_{i=1}^n \langle (\text{Hess}f)_p(e_i), e_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_i \rangle \\ &= \text{div}(\nabla f)(p) = \Delta f(p). \end{aligned}$$

□

## 1.1 O Princípio do Máximo

Esta seção desenvolve o princípio do máximo para equações diferenciais parciais elípticas de segunda ordem. Em particular, trataremos aqui do operador linear elíptico Laplaciano, assim como se encontra em [41].

**Lema 1.** Se  $f, h : (M, g) \rightarrow \mathbb{R}$  são funções  $C^2$  tais que  $f(p) = h(p)$  e  $f(x) \geq h(x)$  para todos os  $x$  em uma vizinhança de  $p$ , então

$$\nabla f(p) = \nabla h(p),$$

$$\text{Hess } f|_p \geq \text{Hess } h|_p$$

$$\Delta f(p) \geq \Delta h(p).$$

*Demonstração.* Se  $(M, g) \subset (\mathbb{R}, g_{\mathbb{R}})$ , então o teorema é um cálculo padrão e simples de uma variável. Mais geralmente, seja  $\lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  uma curva com  $\lambda(0) = p$ , assim obtemos as curvas  $f \circ \lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h \circ \lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$df(\lambda'(0)) = df(p) = dh(p) = dh(\lambda'(0)),$$

$$\text{Hess } f(\lambda'(0), \lambda'(0)) \geq \text{Hess } h(\lambda'(0), \lambda'(0)).$$

Isso implica claramente o Lema, se tomarmos  $v = \lambda'(0)$  em todos os  $v \in T_p M$ .

□

O Lema implica que uma função  $C^2$ ,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  tem  $\text{Hess } f|_p \geq B$ , onde  $B$  é um aplicação bilinear simétrico em  $T_p M$  (ou  $\Delta f(p) \geq \alpha \in \mathbb{R}$ ) se, e somente se, para cada  $\varepsilon > 0$  existe uma função  $f_\varepsilon(x)$  definido em uma vizinhança de  $p$  tal que

1-  $f_\varepsilon(p) = f(p)$ .

2-  $f(x) \geq f_\varepsilon$  em alguma vizinhança de  $p$ .

3-  $\text{Hess } f_\varepsilon|_p \geq B - \varepsilon \cdot g|_p$  (ou  $\Delta f_\varepsilon(p) \geq \alpha - \varepsilon$ ).

Essas funções  $f_\varepsilon$  são chamadas de funções de suporte inferior. Pode-se usar analogamente as funções de suporte superior para encontrar limites superiores para  $\text{Hess } f$  e  $\Delta f$ . As funções de suporte também são conhecidas como funções de barreira na teoria de EDP.

Para uma função contínua  $f : (M, g) \rightarrow \mathbb{R}$  dizemos que:  $\text{Hess } f|_p \geq B$  (ou  $\nabla f(p) \geq \alpha$ ) se, e somente se, para todos  $\varepsilon > 0$  existem funções de suporte suave  $f_\varepsilon$  satisfazendo (1)-(3). Também se diz que  $\text{Hess } f|_p \geq B$  (ou  $\Delta f(p) \geq \alpha$ ) segura no sentido de suporte ou de barreira. Na teoria de EDP, existem outras maneiras importantes de definir derivadas fracas. A noção usada aqui é guiada pelo que podemos obter da geometria.

Pode se verificar facilmente que se  $(M, g) \subset (\mathbb{R}, g_{\mathbb{R}})$  então  $f$  é convexa se  $\text{Hess } f \geq 0$

em todos os pontos. Assim,  $f : (M, g) \rightarrow \mathbb{R}$  é convexa se  $\text{Hess } f \geq 0$  em todos os lugares. Usando isso, pode-se provar

**Teorema 2.** *Se  $f : (M, g) \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua com  $\text{Hess } f \geq 0$  em todos os pontos, então  $f$  é constante em uma vizinhança de qualquer máximo local. Em particular,  $f$  não pode ter um máximo global, a menos que  $f$  seja constante.*

Precisaremos de uma versão mais geral desse teorema, chamada princípio do máximo. Conforme enunciado abaixo, foi provado pela primeira vez para funções suaves por E. Hopf em 1927 e, posteriormente, para funções contínuas por Calabi em 1958, usando a ideia de funções de suporte. Uma função contínua  $f : (M, g) \rightarrow \mathbb{R}$  com  $\Delta f \geq 0$  em todos os pontos é considerada subharmônica. Se  $\Delta f \leq 0$  então  $f$  é superharmônico.

**Teorema 3** (O Princípio do Máximo Forte). *Se  $f : (M, g) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua e subharmônico, então  $f$  é constante em uma vizinhança de cada máximo local. Em particular, se  $f$  tem um máximo global, então  $f$  é constante.*

*Demonstração.* Primeiramente, suponhamos que  $f > 0$  em todos os pontos, então  $f$  não pode ter nenhum ponto de máximo local. De fato, se  $f$  possui um máximo local em  $p \in M$ , então existe uma função de suporte suave  $f_\epsilon(x)$  com

- i)  $f_\epsilon(p) = f(p)$ ,
- ii)  $f_\epsilon(x) \geq f(x)$  para todo  $x$  perto de  $p$ ,
- iii)  $\Delta f_\epsilon(p) > 0$ .

Aqui (i) e (ii) implicam que  $f_\epsilon$  também deve ter um ponto de máximo local em  $p$ . Contudo isso implica que  $\text{Hess } f_\epsilon(p) \leq 0$  o que contradiz (iii).

Agora, suponhamos que  $\Delta f \geq 0$  e seja  $p \in M$  um ponto de máximo local para  $f$ . Para  $r < \text{inj}(p)$  suficientemente pequeno, a restrição  $f : B(p, r) \rightarrow \mathbb{R}$  terá um máximo global em  $p$ . Se  $f$  for constante em  $B(p, r)$  então obtemos o resultado desejado. Caso contrário, assumamos (possivelmente diminuindo  $r$ ) que  $f(x_0) \neq f(p)$  para alguns

$$x_0 \in \partial B(p, r) = \{x \in M, |x - p| = r\}$$

e definimos

$$V = \{x \in \partial B(p, r), f(x) = f(p)\}.$$

Nosso objetivo é construir uma função suave  $h = e^{\alpha\phi} - 1$  tal que

$$\begin{cases} h < 0 & \text{em } V, \\ h(p) = 0, \\ \Delta h > 0 & \text{sobre } \bar{B}(p, r). \end{cases}$$

Esta função é encontrada selecionando primeiro um disco aberto  $D \subset \partial B(p, r)$  que contém  $V$  e então  $\phi$  é tal que

$$\begin{cases} \phi(p) = 0, \\ \phi < 0, & \text{em } D \\ \nabla\phi \neq 0 & \text{sobre } \bar{B}(p, r). \end{cases}$$

Como  $\phi$  pode ser encontrada tomando  $\phi = x_1$  em um sistema de coordenadas  $x_1, \dots, x_n$  centrado no ponto  $p$  onde  $D$  está no semiplano inferior:  $x_1 < 0$  (veja também a Figura 1.1). Por último, escolhemos  $\alpha$  tão grande que

$$\Delta h = \alpha e^{\phi} (\alpha |\nabla\phi|^2 + \Delta\phi) > 0 \quad \text{sobre } \bar{B}(p, r).$$

Agora considere a função  $\bar{f} = f + \delta h$  em  $B(p, r)$ . Esta função tem um máximo local no interior  $B(p, r)$ , desde que  $\delta$  seja muito pequeno, uma vez que isso obrigaria

$$\bar{f}(p) = f(p) > \max\{\bar{f}(x), z \in \partial B(p, r)\}.$$

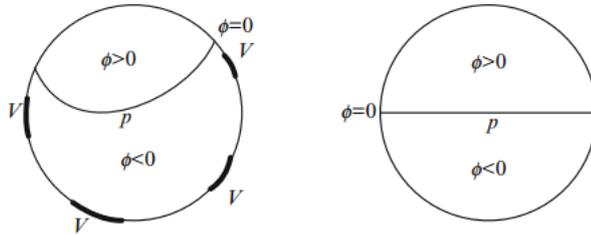


Figura 1.1: Construção da função coordenada

Por outro lado, também podemos mostrar que  $\bar{f}$  é tal que  $\Delta f > c$ , obtendo assim uma contradição como na primeira parte da prova. Para ver que o Laplaciano é positivo, tomemos  $f_\varepsilon$  como uma função de suporte inferior para  $f$  em  $q \in B(p, r)$ . Então  $f_\varepsilon + \delta h$  é uma função de suporte inferior para  $\bar{f}$  em  $q$ . O Laplaciano desta função de suporte é

estimado por

$$\begin{aligned}\Delta(f_\varepsilon + \delta h)(q) &= \Delta f_\varepsilon(p) + \delta \Delta h(q) \\ &\geq -\varepsilon + \delta \Delta h(q),\end{aligned}$$

que para determinado  $\delta$  deve se tornar positivo quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

□

Uma função contínua  $f : (M, g) \rightarrow \mathbb{R}$  é considerada linear se  $\text{Hess } f \equiv 0$ , isto é, ambas as desigualdades  $\text{Hess } f \geq 0$ ,  $\text{Hess } f \leq 0$  são válidas em todos os pontos. Isso facilmente implica que

$$(f \circ \lambda)(t) = f(\lambda(0)) + \alpha t,$$

para cada geodésica  $\lambda$  quando  $f \circ \lambda$  é convexa e côncava. Assim

$$f \circ \exp_p(x) = f(p) + g(v_p, x),$$

para cada  $p \in M$  e alguns  $v_p \in T_p M$ . Em particular,  $f$  é  $C^\infty$  com  $\nabla f|_p = v_p$ .

De maneira mais geral, temos o conceito de função harmônica. Esta é uma função contínua  $f : (M, g) \rightarrow \mathbb{R}$  com  $\Delta f = 0$ . O princípio do máximo mostra que, se  $M$  for fechada, todas as funções harmônicas são constantes. Em variedades abertas incompletas ou completas, entretanto, muitas vezes há muitas funções harmônicas. Isso contrasta com a existência de funções lineares, onde  $\nabla f$  é necessário em paralelo e, portanto, divide a variedade localmente em um produto em que um fator é um intervalo. É um fato importante que qualquer função harmônica seja  $C^\infty$  se a métrica for  $C^\infty$ . Usando o princípio do máximo acima, este é um resultado padrão na teoria de EDP.

**Teorema 4** (Regularidade das funções harmônicas). *Se  $f : (M, g) \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua e harmônica no sentido fraco, então  $f$  é suave.*

*Demonstração.* Fixamos  $p \in M$  e uma vizinhança  $\Omega$  em torno de  $p$  com bordo suave. Além disso, podemos assumir que  $\Omega$  está contido em uma vizinhança coordenada. É um fato padrão, mas não trivial, da teoria EDP que o seguinte problema de valor no bordo de Dirichlet tem uma solução:

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0, \\ u|_{\partial\Omega} &= f|_{\partial\Omega}.\end{aligned}$$

Além disso, tal solução  $u$  é suave no interior de  $\Omega$ . Agora, considere as duas funções  $u - f$  e  $f - u$  em  $\Omega$ . Se ambas forem não positivas, então elas devem ser ideticamente nulas e, portanto,  $f = u$  é suave perto de  $p$ .

Caso contrário, uma dessas funções deve ser positiva em algum lugar. No entanto, como  $u$  é nula no bordo de  $\Omega$  e é subharmônico, isso implica que a mesma tem um máximo global interior. O princípio do máximo mostra, então, que a função é constante, mas isso só é possível se ela for nula.

□

## 1.2 Teorema da Comparação da Hessiana e Laplaciano

Nesta seção, descrevemos alguns resultados de comparação para o Hessiano e o Laplaciano da função distância onde tomamos como referencia o livro [48]. Começamos mostrando que um limite inferior (resp. Superior) na curvatura da seccional radial da forma

$$\text{Sect}_{rad} \geq -G(r(x)) \quad (\text{resp. } \text{Sect}_{rad} \leq -G(r(x))), \quad (1.9)$$

implica uma estimativa superior para o Hessiano,  $\text{Hess}_r$ , da função de distância  $r(x)$  do tipo

$$\text{Hess}(r) \leq \frac{h'(r)}{h(r)} (\langle \cdot, \cdot \rangle_g - dr \otimes dr) \quad \text{resp.} \quad \text{Hess}(r) \geq \frac{h'(r)}{h(r)} (\langle \cdot, \cdot \rangle_g - dr \otimes dr), \quad (1.10)$$

para alguma função apropriada  $h$ . Pegando traços, obteremos então estimativas correspondentes para o Laplaciano  $\Delta r$ . Como veremos, uma estimativa superior para  $\Delta r$  requer apenas um limite inferior para a curvatura radial de Ricci, enquanto uma estimativa inferior requer um limite superior para a curvatura seccional radial.

Precisaremos do seguinte resultado de comparação de Sturm. Antes disso iremos dizer o que é uma função absolutamente contínua.

**Definição 6.** *Seja  $(0, +\infty)$  um intervalo em  $\mathbb{R}$ . Uma função  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função absolutamente convergente em  $(0, +\infty)$  se para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que sempre que uma sequência finita de subintervalos disjuntos aos pares  $(x_k, y_k)$  de  $(0, +\infty)$  com  $x_k < y_k$  em  $(0, +\infty)$  satisfaz,*

$$\sum_k (y_k - x_k) < \delta,$$

então

$$\sum_k |f(y_k) - f(x_k)| < \epsilon.$$

A coleção de todas as funções absolutamente contínuas em  $(0, +\infty)$  é denotada por  $AC((0, +\infty))$ .

**Lema 2.** *Seja  $G$  uma função contínua em  $[0, +\infty)$  e seja  $\phi, \psi \in C^1([0, +\infty))$  com  $\phi', \psi \in AC((0, +\infty))$  as soluções dos problemas*

$$\begin{cases} \phi'' - G\phi \leq 0 & \text{no } (0, +\infty), \\ \phi(0) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \psi'' - G\psi \geq 0 & \text{no } (0, +\infty), \\ \psi(0) = 0; \psi'(0) > 0. \end{cases}$$

Se  $\phi(r) > 0$  para  $r \in (0, T)$  e  $\psi'(0) \geq \phi'(0)$ , então  $\psi(r) > 0$  em  $(0, T)$  e

$$\frac{\phi'}{\phi} \leq \frac{\psi'}{\psi} \quad \text{e} \quad \psi \geq \phi \quad \text{em } (0, T).$$

*Demonstração.* Como  $\psi'(0) > 0$ , temos que  $\psi > 0$  em uma vizinhança de 0. Observamos que se  $G$  for assumido como não negativo, integrando a desigualdade diferencial satisfeita por  $\psi$  temos

$$\psi'(r) = \psi(0) + \int_0^r G(s)\psi(s)ds,$$

de forma que  $\psi$  é positivo no intervalo onde  $\psi \geq 0$ , e concluímos que, de fato,  $\psi > 0$  em  $(0, +\infty)$ .

No caso geral, onde nenhuma suposição é feita no sinal de  $G$ , sejam  $\beta = \sup\{t : \psi > 0 \text{ em } (0, t)\}$  e  $\tau = \min\{\beta, T\}$ , de modo que  $\phi$  e  $\psi$  são ambos positivos em  $(0, \tau)$ . A função  $\psi'\phi - \psi\phi'$  é contínua em  $[0, +\infty)$  desaparece em  $r = 0$ , e satisfaz

$$(\psi'\phi - \psi\phi')' = \psi''\phi - \psi\phi'' \geq 0,$$

em  $(0, \tau)$ . Assim,  $\psi'\phi - \psi\phi' \geq 0$  em  $[0, \tau)$ , e dividindo por  $\phi\psi$  deduzimos que

$$\frac{\psi'}{\psi} \geq \frac{\phi'}{\phi} \quad \text{em } (0, \tau).$$

Integrando entre  $\epsilon$  e  $r$  ( $0 < \epsilon < r < \tau$ ) obtemos

$$\phi(r) \leq \frac{\phi(\epsilon)}{\psi(\epsilon)}\psi(r)$$

e como

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\phi(\epsilon)}{\psi(\epsilon)} = \frac{\phi'(0)}{\psi'(0)} \leq 1,$$

podemos concluir, desse fato, que

$$\phi(r) \leq \psi(r) \quad \text{em } [0, \tau].$$

Como  $\phi > 0$  em  $(0, T)$  por suposição, isso por sua vez força  $\tau = T$ , pois caso contrário,  $\tau = \beta < T$ , e teríamos,  $\phi(\beta) > 0$ , enquanto por continuidade,  $\psi(\beta) = 0$ , o que é uma contradição.

□

Usando o resultado da comparação de Sturm acima, deduzimos um resultado de comparação para soluções de Riccati igualdades da forma

$$\phi' + \phi^2 = G \quad (\geq G, \leq G),$$

em  $(0, T)$  com comportamento assintótico apropriado com  $r \rightarrow 0^+$ . Observe a este respeito que a substituição  $g = \phi'/\phi$  transforma a desigualdade de Riccati na desigualdade linear de segunda ordem

$$g'' = Gg \quad (\geq Gg, \leq Gg),$$

e vice-versa.

**Corolário 1.** *Seja  $G$  uma função contínua em  $[0, +\infty)$  e seja  $g_i \in AC(0, T_i)$  soluções das desigualdades diferenciais de Riccati*

$$g_1' + \frac{g_1^2}{\alpha} - \alpha G \leq 0 \quad g_2' + \frac{g_2^2}{\alpha} - \alpha G \geq 0,$$

*quase em todo ponto de  $(0, T_i)$  satisfazendo a condição assintótica*

$$g_i(t) = \frac{\alpha}{t} + O(1) \quad \text{quando } t \rightarrow 0^+,$$

*para todo  $\alpha > 0$ . Então,  $T_1 \leq T_2$  e  $g_1(t) \leq g_2(t)$  em  $(0, T_1)$ .*

*Demonstração.* Como  $\bar{g}_i = \alpha^{-1}g_i$  satisfaz as condições do enunciado com  $\alpha = 1$ , sem perda de generalidade, podemos assumir que  $\alpha = 1$ . Observe que a função  $g_i(s) - \frac{1}{s}$  é limitada e integrável em uma vizinhança de  $s = 0$ , e seja  $\phi_i \in C^1([0, T_i])$  a função positiva em  $[0, T_i)$  definida por

$$\phi_i(t) = t \exp \left\{ \int_0^t \left( g_i(s) - \frac{1}{s} \right) ds \right\}.$$

Então  $\phi_i(0) = 0$ ,  $\phi_i > 0$  em  $(0, T_i)$ ,  $\phi_i \in AC(0, T_i)$  e por cálculos diretos verificamos que

$$\phi_i(t) = g_i \phi_i(t), \quad \phi_i'(0) = 1$$

e

$$\phi_1'' \leq G\phi_1 \quad \text{em } (0, T_1), \quad \phi_2'' \geq G\phi_2 \quad \text{em } (0, T_2).$$

Uma aplicação do Lema 2 mostra que  $T_1 \leq T_2$  e

$$g_1 = \frac{\phi_1'}{\phi_1} \leq \frac{\phi_2'}{\phi_2} \quad \text{em } (0, T_1),$$

conforme necessário. □

Após esta preparação, estamos prontos para apresentar nosso resultado de comparação para o Hessiana.

**Teorema 5.** *Seja  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle_g)$  uma variedade completa de dimensão  $n$ . Tendo fixado um ponto de referência  $\mathbf{o} \in M$ , seja  $r(x) = \text{dist}_M(x, \mathbf{o})$ , e seja  $D_{\mathbf{o}} = M \setminus \text{cut}(\mathbf{o})$  o domínio das coordenadas geodésicas normais centradas em  $\mathbf{o}$ . Dada uma função uniforme suave  $G$  em  $\mathbb{R}$ , seja  $h$  a solução do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} h'' - Gh = 0 \\ h(0) = 0, \quad h'(0) = 1, \end{cases}$$

e seja  $I = [0, r_0) \subset [0, +\infty)$  o intervalo máximo onde  $h$  é positiva. Se a curvatura da seção radial de  $M$  satisfaz

$$\text{Sect}_{\text{rad}} \geq -G(r(x)) \quad \text{em } B_0(\mathbf{o}), \tag{1.11}$$

então

$$\text{Hess}(r) \leq \frac{h'}{h} \{ \langle \cdot, \cdot \rangle_g - dr \otimes dr \}, \tag{1.12}$$

em  $(D_0 \setminus \{\mathbf{o}\}) \cap B_{r_0}(\mathbf{o})$ , no sentido de formas quadráticas. Por outro lado, se

$$\text{Sect}_{\text{rad}} \leq -G(r(x)) \quad \text{em } B_0(\mathbf{o}), \tag{1.13}$$

então

$$\text{Hess}(r) \geq \frac{h'}{h} \{ \langle \cdot, \cdot \rangle_g - dr \otimes dr \}. \tag{1.14}$$

*Demonstração.* Essencialmente seguimos a abordagem direta de P. Petersen, [41], evitando assim o uso clássico de campos de Jacobi.

Observe, inicialmente, que  $\text{Hess}(\mathbf{r})(\text{grad } \mathbf{r}, \mathbf{X}) = 0$  para todo  $\mathbf{X} \in \mathbb{T}_x\mathbb{M}$  e  $\mathbf{x} \in \mathbb{D}_o \setminus \{\mathbf{o}\}$ . De fato, seja  $\gamma$  uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco partindo de  $\mathbf{o}$  com  $\gamma(s_0) = \mathbf{x}$ , então  $\gamma$  é uma curva integral de  $\text{grad } \mathbf{r}$ , a saber,  $\dot{\gamma}(s) = \text{grad } \mathbf{r}(\gamma(s))$  de modo que  $\nabla_{\text{grad } \mathbf{r}} \text{grad } \mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbb{D}_{\gamma(s_0)} \dot{\gamma} = 0$ .

Em seguida, como  $\text{Hess}(\mathbf{r})$  é simétrico,  $\mathbb{T}_x\mathbb{M}$  tem uma base ortonormal que consiste em autovetores de  $\text{Hess}(\mathbf{r})$ . Denotando por  $\lambda_{\max}(\mathbf{x})$  e  $\lambda_{\min}(\mathbf{x})$ , respectivamente, o maior e o menor autovalores de  $\text{Hess}(\mathbf{r})$  no complemento ortogonal de  $\text{grad } \mathbf{r}(\mathbf{x})$ , o teorema equivale a mostrar que em  $(\mathbb{D}_o \setminus \{\mathbf{o}\}) \cap \mathbb{B}_{r_0}(\mathbf{o})$ ,

i) se (1.11) acontece, então  $\lambda_{\max}(\mathbf{x}) \leq \frac{h'}{h}(\mathbf{r}(\mathbf{x}))$ ,

ii) se (1.13) acontece, então  $\lambda_{\min}(\mathbf{x}) \geq \frac{h'}{h}(\mathbf{r}(\mathbf{x}))$ .

Seja  $\mathbf{x} \in \mathbb{D}_o \setminus \{\mathbf{o}\}$  e, novamente,  $\gamma$  a geodésica minimizadora que liga  $\mathbf{o}$  a  $\mathbf{x}$ . Afirmamos que, se (1.11) é válido, então a função de Lipschitz  $\lambda_{\max}$  satisfaz

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}(\lambda_{\max} \circ \gamma) + (\lambda_{\max} \circ \gamma)^2 \leq G, & \text{em } s > 0, \\ \lambda_{\max} \circ \gamma = \frac{1}{s} + o(1), & \text{quando } s \rightarrow 0^+. \end{cases} \quad (1.15)$$

Similarmente, se (1.13) é válido, então a função de Lipschitz  $\lambda_{\min}$  satisfaz

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}(\lambda_{\min} \circ \gamma) + (\lambda_{\min} \circ \gamma)^2 \geq G, & \text{em } s > 0, \\ \lambda_{\min} \circ \gamma = \frac{1}{s} + o(1), & \text{quando } s \rightarrow 0^+. \end{cases} \quad (1.16)$$

Como  $\phi = \frac{h'}{h}$  satisfaz

$$\phi' + \phi^2 = G \quad \text{em } (0, r_0), \quad \phi(s) = \frac{1}{s} + o(s) \quad \text{quando } s \rightarrow 0^+,$$

a conclusão necessária segue imediatamente do Corolário 1. Resta provar que  $\lambda_{\max}$  e  $\lambda_{\min}$  satisfazem às desigualdades diferenciais exigidas. Para este fim, dada uma função real suave, denote por  $\text{hess}(\mathbf{u})$  o campo tensor simétrico (1,1) definido por

$$\text{hess}(\mathbf{u})(\mathbf{X}) = \nabla_{\mathbf{X}} \text{grad } \mathbf{u},$$

de modo que,

$$\text{Hess}(\mathbf{u})(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \langle \text{hess}(\mathbf{u})(\mathbf{X}), \mathbf{Y} \rangle.$$

Por definição de derivada covariante em  $TM^* \otimes TM$ ,

$$\nabla_X(\text{hess}(\mathbf{u}))(Y) = \nabla_X[\text{hess}(\mathbf{u})(Y)] - \text{hess}(\mathbf{u})(\nabla_X Y),$$

de modo que, lembrando a definição do tensor de curvatura, deduzimos a regra de comutação de Ricci

$$\nabla_X(\text{hess}(\mathbf{u}))(Y) - \nabla_Y(\text{hess}(\mathbf{u}))(X) = R(X, Y)\text{grad } \mathbf{u}.$$

Agora, tomemos  $\mathbf{u} = r(x)$ ,  $X = \text{grad } r$ , e seja  $\gamma$  a geodésica minimizadora que liga o a  $x \in D_o \setminus \{o\}$ . Para cada vetor unitário  $Y \in T_x M$  tal que  $Y \perp \dot{\gamma}(s_o)$ , defina um campo vetorial  $Y \perp \dot{\gamma}$ , por translação paralela ao longo de  $\gamma$ . Uma vez que, como observado acima,  $\text{hess}(r)(\text{grad } r) \equiv 0$ , calculamos

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{\gamma}(t_0)}[\text{hess}(r)(Y)] &= \nabla_{\dot{\gamma}(t_0)}(\text{hess}(r))(Y) + \text{hess}(r)(D_{\dot{\gamma}(t_0)}(Y)) \\ &= \nabla_{\text{grad}(r)}(\text{hess}(r))(Y) \\ &= \nabla_Y(\text{hess}(r))(\text{grad } r) + R(\text{grad } r, Y)\text{grad } r \\ &= \nabla_Y[(\text{hess}(r))(\text{grad } r)] - \text{hess}(r)(\nabla_Y \nabla r) - R(Y, \text{grad } r)\text{grad } r \\ &= -\text{hess}(r)(\text{hess}(r)(Y)) - R(Y, \text{grad } r)\text{grad } r, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t_0)}[\text{hess}(r)(Y)] + \text{hess}(r)(\text{hess}(r)(Y)) = -R(Y, \text{grad } r)\text{grad } r.$$

Como  $Y$  é paralelo temos

$$\frac{d}{dt} \langle \text{hess}(r)(\mathbf{y}), Y \rangle = \langle \nabla_{\dot{\gamma}}[\text{hess}(r)(Y)], Y \rangle,$$

e concluímos que

$$\frac{d}{ds} (\text{Hess}(s))(\gamma)(Y, Y) + \langle \text{hess}(r)(\gamma)(Y), \text{hess}(r)(\gamma)(Y) \rangle = -\text{Sect}_{\gamma}(Y \wedge \dot{\gamma}). \quad (1.17)$$

Agora suponha que  $\text{Sect}_{\text{rad}} \geq -G(r(x))$ . Observe que, para qualquer campo de vetor unitário  $X \perp \Delta r$ ,

$$\text{Hess}(r)(X, X) \leq \lambda_{\max}.$$

Assim, se  $Y$  é escolhido de modo que, em  $s_0$ ,

$$\text{Hess}(\mathbf{r})(\gamma)(Y, Y) = \lambda_{\max}(\gamma(s_0)),$$

então a função

$$\text{Hess}(\mathbf{r})(\gamma)(Y, Y) - \lambda_{\max} \circ \gamma,$$

atinge seu máximo em  $s = s_0$  e, se neste ponto  $\lambda_{\max}$  é diferenciável, então sua derivada desaparece:

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s_0} \text{Hess}(Y, Y) - \frac{d}{ds}\Big|_{s_0} \lambda_{\max} \circ \gamma = 0.$$

Donde, usando (1.17), obtemos, em  $s_0$ ,

$$\frac{d}{ds}(\lambda_{\max} \circ \gamma) + (\lambda_{\max} \circ \gamma)^2 \leq G,$$

que é a desigualdade desejada em (1.17). O comportamento assintótico de  $\lambda_{\max} \circ \gamma$  próximo a  $s = 0^+$  segue do fato de que

$$\text{Hess}(\mathbf{r})\frac{1}{r}(\langle, \rangle - d\mathbf{r} \otimes d\mathbf{r}) + o(1); \quad r \rightarrow 0^+,$$

como se pode verificar por um cálculo padrão em coordenadas normais em  $\mathbf{o} \in M$ . O argumento no caso em que  $\text{Sect}_{\text{rad}} \leq -G$  é completamente semelhante.

□

Conforme mencionado acima, tomando os traços no Teorema 5, obtemos imediatamente estimativas correspondentes para  $\Delta \mathbf{r}$ . Em particular, se  $\text{Sect}_{\text{rad}} \leq -G(\mathbf{r}(\mathbf{x}))$  segue que

$$\Delta \mathbf{r}(\mathbf{x}) \geq (\mathbf{m} - 1) \frac{\mathbf{h}'(\mathbf{r}(\mathbf{x}))}{\mathbf{h}(\mathbf{r}(\mathbf{x}))},$$

em  $((D_0(\mathbf{o})) \setminus \{\mathbf{o}\}) \cap B_{r_0}(\mathbf{o})$ . Claramente, a estimativa superior correspondente se mantém se assumirmos, em vez disso, que a curvatura seccional radial é limitada inferiormente por  $-G$ . No entanto, neste caso, a conclusão é válida sob a suposição mais fraca de que a curvatura radial de Ricci é limitada inferiormente por  $-(\mathbf{m} - 1)G(\mathbf{r}(\mathbf{x}))$ . Na verdade, temos o seguinte teorema de comparação do Laplaciano,

**Teorema 6.** *Mantendo a notação do teorema anterior, suponha que a curvatura radial de Ricci de  $M$  satisfaz*

$$\text{Ric}_{(M, \langle \cdot, \cdot \rangle_g)}(\text{grad } r, \text{grad } r) \geq -(m-1)G(r), \quad (1.18)$$

para alguma função  $G \in C_0([0, +\infty))$ , e seja  $h \in C^2([0, +\infty))$  uma solução do problema

$$\begin{cases} h'' - Gh \geq 0, \\ h(0) = 0, \quad h'(0) = 1. \end{cases} \quad (1.19)$$

Então a desigualdade

$$\Delta r(x) \leq (m-1) \frac{h'(r(x))}{h(r(x))}, \quad (1.20)$$

mantém-se pontualmente em  $M \setminus (\text{cut}(\mathbf{o}) \cup \{\mathbf{o}\})$ , e fracamente em todo  $M$ .

*Demonstração.* Seja  $[0, r_0) \subseteq [0, +\infty)$  o intervalo máximo onde  $h$  é positivo. Observe que comparando  $h$  com a solução da equação diferencial associada a (1.19) e usando a observação no início da prova do Lema 2 mostra que se  $G$  for não negativo, então  $r_0 = +\infty$ .

Como na prova do Teorema 5, seja  $D_{\mathbf{o}} = M \setminus \text{cut}(\mathbf{o})$  o domínio máximo estrelado das coordenadas normais. Fixando qualquer  $x \in D_{\mathbf{o}} \cap (B_{r_0}(\mathbf{o}) \setminus \{\mathbf{o}\})$  e seja  $\gamma : [0, l] \rightarrow M$  a geodésica minimizadora de  $\mathbf{o}$  a  $x$  parametrizada pelo comprimento do arco. Dessa forma, definimos

$$\varphi(s) = (\Delta r) \circ \gamma(s), \quad s \in (0, l].$$

Afirmamos que  $\varphi$  satisfaz:

$$\begin{cases} \text{i) } \varphi(s) = \frac{m-1}{s} + o(1), & \text{quando } s \rightarrow 0^+, \\ \text{ii) } \varphi' + \frac{1}{m-1} \varphi^2 \leq (m-1)G, & \text{sobre } (0, l]. \end{cases} \quad (1.21)$$

De fato (1.21) i) segue do fato bem conhecido que

$$\Delta r = \frac{m-1}{r} + o(1), \quad \text{quando } r \rightarrow 0^+.$$

Quanto a (1.21) ii), observe que, traçando em (2.10), deduzimos que

$$\frac{d}{dt}(\Delta r \circ \gamma) + |\text{Hess } r|^2(\gamma) = -\text{Ric}(\text{grad } r, \text{grad } r)(\gamma).$$

Usando a desigualdade elementar

$$\frac{(\Delta r)^2}{m-1} \leq |\text{Hess}(r)|^2,$$

que por sua vez decorre facilmente da desigualdade de Cauchy-Schwarz, assim teremos que

$$\frac{d}{dt}(\Delta r \circ \gamma) + \frac{\Delta r \circ \gamma}{m-1} \leq -\text{Ric}(\text{grad } r, \text{grad } r)(\gamma). \quad (1.22)$$

A desigualdade (1.21) ii) decorre da suposição sobre Ric. Argumentando como na prova do Teorema 5 mostra que (1.20) vale pontualmente em  $D_o \cap (B_{r_o}(o) \setminus \{o\})$ . Observe agora que um cálculo em coordenadas geodésicas polares mostra que

$$\Delta r \circ \gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{g(t, \theta)}} \frac{\partial \sqrt{g(t, \theta)}}{\partial t},$$

onde  $\theta = \gamma(0)$  e  $g(r, \theta)$  é o determinante da métrica em coordenadas geodésicas polares. Assim (1.20) pode ser reescrito na forma

$$\frac{1}{\sqrt{g(t, \theta)}} \frac{\partial \sqrt{g(t, \theta)}}{\partial t} \leq \frac{h'(t)}{h(t)},$$

de onde, integrando e usando o comportamento assintótico de  $h$  e  $\sqrt{g}$  com  $t \rightarrow 0^+$ , verifica que para cada unidade de comprimento  $\theta \in T_o M$ ,

$$\sqrt{g(t, \theta)} \leq h(t); \quad t < \min\{r_o, c(\theta)\},$$

onde  $c(\theta)$  denota a distância de  $o$  do  $\text{cut}(o)$  ao longo da geodésica  $\gamma_\theta$ . Uma vez que  $g(t, \theta) > 0$  se  $(t, \theta)$  pertence ao domínio das coordenadas polares geodésicas enquanto, se  $r_o < +\infty$ , então  $h(r_o) = 0$ , deduzimos que para todo  $\theta$ ,  $c(\theta) \leq r_o$  e, portanto,  $D_o \subset B_{r_o}(o)$ .

Assim, (1.20) vale pontualmente em  $M \setminus (\{o\} \cup \text{cut}(o))$ . Dessa forma, resta provar que a desigualdade se aplica fracamente em todo  $M$ . Isso é garantido pelo seguinte Lema.

□

**Lema 3.** *Defina  $D_o = M \setminus \text{cut}(o)$  e suponha que*

$$\Delta r \leq \alpha(r) \quad \text{pontualmente em } \Omega \setminus \{o\}, \quad (1.23)$$

para algum  $\alpha \in C^0((0, +\infty))$ . Seja  $v \in C^2(\mathbb{R})$  não negativo e defina  $u(x) = v(r(x))$  em  $M$ . Suponha que

$$\text{i) } v' \leq 0 \quad \text{ou} \quad \text{ii) } v' \geq 0. \quad (1.24)$$

Então, temos respectivamente que

$$\text{iii) } \Delta u \geq v''(r) + \alpha(r)v'(r); \quad \text{iv) } \Delta u \leq v''(r) + \alpha(r)v'(r), \quad (1.25)$$

fracamente em  $M$ .

*Demonstração.* Seja  $E_o$  domínio máximo estrelado no qual  $\exp_o$  é um difeomorfismo em sua imagem, de modo que  $D_o = \exp(E_o)$  e temos  $\text{cut}(o) = \partial(\exp_o(E_o))$ . Uma vez que  $E_o$  é um domínio em forma de estrela, podemos exaurir  $E_o$  por uma família  $\{E_o^n\}$  de domínios em forma de estrela relativamente compactos com bordo suave. Definimos  $\Omega_n = \exp_o(E_o^n)$  para que

$$\overline{\Omega}^n \subset \Omega_{n+1}, \quad \text{e} \quad \bigcup_n \Omega_n = D_o.$$

O fato de cada  $E_o^n$  ser em forma de estrela implica

$$\frac{\partial r}{\partial \nu_n} > 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega_n, \quad (1.26)$$

onde  $\nu_n$  denota o vetor normal unitário externo a  $\partial\Omega_n$ . Agora, assumimos a validade de (1.24) i). Como  $r \in C^\infty(\Omega_n \setminus \{o\})$ , calculando obtemos

$$\Delta u \geq v'' + \alpha(r)v' \quad \text{pontualmente em } \Omega_n \setminus \{o\}.$$

Seja  $0 \leq \varphi \in C_0^\infty(M)$ . Afirmamos que, para todo  $n$ ,

$$\int_{\Omega_n} u \Delta \varphi \geq \int_{\Omega_n} (v'' + \alpha(r)v') \varphi + \varepsilon_n,$$

com  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  como  $n \rightarrow +\infty$ . Como  $M = \Omega \cup \text{cut}(o)$  e  $\text{cut}(o)$  tem medida nula, a desigualdade (1.25) i) seguirá fazendo  $n \rightarrow +\infty$ . Para provar a afirmação, fixamos  $\delta > 0$  suficientemente pequeno e aplicamos a segunda fórmula de Green em  $\Omega_n \setminus B_\delta(o)$  para obter

$$\int_{\Omega_n \setminus B_\delta(o)} u \Delta \varphi = \int_{\Omega_n \setminus B_\delta(o)} \varphi \Delta u - \int_{\partial\Omega_n \cup \partial B_\delta(o)} \varphi \left( \varphi \frac{\partial u}{\partial \nu_n} - u \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_n} \right), \quad (1.27)$$

onde  $\nu_n$  é o vetor unitário normal exterior a  $\partial\Omega_n \cup \partial B_\delta(o)$ . Notamos que, de acordo com (1.24) i) e (1.26),

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_n} = v'(r) \frac{\partial r}{\partial \nu_n} \leq 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega_n.$$

Usando isto, (1.2) e (1.27), obtemos

$$\int_{\Omega_n} u \Delta \varphi \geq \int_{\Omega_n} (v'' + \alpha(r)v') \varphi + \varepsilon_n + I_n,$$

com

$$\varepsilon_n = \int_{\partial\Omega_n} \mathbf{u} \frac{\partial\varphi}{\partial\nu_n},$$

e

$$I_n = \int_{B_\delta(\mathfrak{o})} [\mathbf{u}\Delta\varphi - (\nu'' + \alpha(r)\nu')\varphi] - \int_{\partial B_\delta(\mathfrak{o})} \left[ \mathbf{u} \frac{\partial\varphi}{\partial r} - \varphi \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial r} \right].$$

Claramente,  $I_\delta \rightarrow 0$  quando  $\delta \rightarrow 0^+$ . Por outro lado, como  $\varphi \in C_0^\infty(M)$  e  $\text{cut}(\mathfrak{o})$  tem medida nula, usando os Teoremas da divergência e de Lebesgue vemos que, quando  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$\varepsilon_n \int_{\Omega_n} \text{div}(\mathbf{u}\nabla\varphi) \rightarrow \int_{\Omega} \text{div}(\mathbf{u}\nabla\varphi) = \int_M \text{div}(\mathbf{u}\nabla\varphi) = 0.$$

Isso prova a afirmação e a validade de (1.25) ii). O caso de (1.24) iv) e (1.25) iv) pode ser tratado de forma semelhante.

□

### 1.3 Espaços de Sobolev

Os espaços de Sobolev são ferramentas naturais e poderosas em análise não linear e geometria diferencial. Eles são de grande ajuda na resolução de equações diferenciais parciais. Por exemplo, dado  $\Omega$  um domínio de  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$ ) e  $f \in C^1(\mathbb{R})$ , é clássico considerar o problema de encontrar uma função  $\mathbf{u} \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$  tal que

$$\Delta\mathbf{u} = f'(\mathbf{u}),$$

em  $\Omega$  e  $\mathbf{u} = 0$  em  $\partial\Omega$ , onde  $\Delta = -\sum_i \frac{\partial^2}{\partial_i \partial_i}$ . Essa função  $\mathbf{u}$  pode ser vista como um ponto crítico do funcional

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla\mathbf{u}|^2 dx - \int_{\Omega} f(\mathbf{u}) dx.$$

Quando  $f$  tem um crescimento razoável, por exemplo, do tipo quadrático, a definição de  $J(\mathbf{u})$  faz sentido assim que  $\mathbf{u}, |\nabla\mathbf{u}| \in L^2(\Omega)$ , que é, a grosso modo, a definição de um dos espaços de Sobolev mais usados. Em várias situações, os espaços de Sobolev estão naturalmente associados a problemas variacionais. Sua definição no contexto euclidiano pode ser estendida ao contexto das variedades Riemannianas. Os espaços de Sobolev em  $\mathbb{R}^n$  são bem compreendidos. Surpresas e sutilezas ocorrem no contexto das variedades

Riemannianas. Na sequência,  $C$  denota uma constante positiva, cujo valor pode mudar de linha para linha e até mesmo nela mesma.

Damos início com algumas linhas sobre a teoria dos espaços de Sobolev em  $\mathbb{R}^n$ . As referências clássicas sobre o assunto são os livros de Adams [42] e de Mazj'a [52]. Dada uma função  $\mathbf{u} \in L^1(\Omega)$  e dado um multi-índice  $\alpha$ , definimos a derivada distributiva  $D_\alpha \mathbf{u}$  de  $\mathbf{u}$  por

$$\langle D_\alpha \mathbf{u}, \varphi \rangle = (-1)^\alpha \int_\Omega D_\alpha \varphi dx,$$

para toda  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ . Aqui, e no que se segue,  $C_c^\infty(X)$  representa o conjunto de funções suaves com suporte compacto em  $X$ . Diz-se que uma distribuição  $T$  está no espaço  $L^2$  se existe  $f \in L^2(\Omega)$  tal que  $\langle T, \varphi \rangle = \int_\Omega f \varphi dx$ .

**Definição 7.** Dado  $k \in \mathbb{N}$   $k \geq 1$  e  $p \geq 1$ , definimos

$$W^{k,p}(\Omega) = \{\mathbf{u} \in L^p(\Omega), \text{ para qualquer } |\alpha| \leq k, D_\alpha \mathbf{u} \in L^p(\Omega)\}.$$

Por definição,  $W^{k,p}(\Omega)$  é o espaço de Sobolev de ordem  $p$  em integrabilidade e ordem  $k$  em diferenciabilidade. O espaço  $W^{k,p}(\Omega)$  é um espaço de Banach quando dotado da norma

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \sum_{i=0}^k \sum_{|\alpha|=i} \|D_\alpha \mathbf{u}\|_{L^p(\Omega)}.$$

Outra possibilidade é definir um espaço de Sobolev  $H_k^p(\Omega)$  como o fecho em relação à norma acima  $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$  do conjunto que consiste das funções  $\mathbf{u} \in C^\infty(\Omega)$  para as quais  $\|\mathbf{u}\|_{W^{k,p}} < +\infty$ . Por um Teorema de Meyers e Serrin [36], para qualquer inteiro  $k$ , e qualquer vale  $p \geq 1$ ,  $W_{k,p}(\Omega) = H_k^p(\Omega)$ .

Agora voltamos nossa atenção para o caso das variedades Riemannianas. No que se segue, seja  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle_g)$  uma variedade Riemanniana (suave) de dimensão  $n \geq 1$ . Além disso, para  $k \in \mathbb{N}$  e  $p \geq 1$ , definimos  $\mathcal{C}^{p,k}(M)$  como o conjunto de funções  $\mathbf{u} \in C^\infty(M)$  para o qual  $\int_M |\nabla^i \mathbf{u}|^p dv < +\infty$  para todo  $i \in \{0, \dots, k\}$ . Então, imitando a definição acima de  $H_k^p(\Omega)$ , definimos o espaço de Sobolev  $H_k^p(M, \langle \cdot, \cdot \rangle_g)$  como segue

**Definição 8.** O espaço de Sobolev  $H_k^p(M, \langle \cdot, \cdot \rangle_g)$  é o fecho em  $L^p(M)$  de  $\mathcal{C}_k^p(M)$  para a norma

$$\mathbf{u} \mapsto \|\mathbf{u}\|_{H_k^p} = \sum_{i=1}^k \|\nabla^i \mathbf{u}\|_p.$$

Aqui,  $\|\nabla^i \mathbf{u}\|_p$  é a norma  $L^p$  da função  $|\nabla^i \mathbf{u}|$  que, por definição, é a norma pontual do tensor  $\nabla^i \mathbf{u}$  com respeito a métrica  $\langle, \rangle_g$ . O espaço de Sobolev  $H_k^p(M, \langle, \rangle)$  é o fecho de  $C_c^\infty(M)$  para a norma  $\|\cdot\|_{H_k^p}$  em  $H_k^p(M, \langle, \rangle)$  ou, similarmente, o fecho de  $C_c^\infty(M)$  em  $H_k^p(M, \langle, \rangle)$ .

No caso dos estudos realizado neste dado trabalho, estamos tomando o caso particular onde  $k = 1$  e  $p = 2$ . Assim utilizaremos  $W^{1,2}(M)$  para denotar o espaço de Sobolev onde a norma será dada por

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{1,2}} = \|\mathbf{u}\|_{L^2} + \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}.$$

Vamos denotar com  $W_0^{1,2}(D)$  o fecho de  $C_c^\infty(D)$  em  $W^{1,2}(D)$  onde  $D \subset M$  é domínio da variedade Riemanniana  $M$ . Observe que, se  $D = M$  for completa, então  $W_0^{1,2}(M) = W^{1,2}(\text{int}M)$ .

**Definição 9.** *O espaço  $W_{\text{loc}}^{1,2}(\text{int}D)$  das funções localmente  $W^{1,2}$ -Sobolev é classicamente definido pela condição de que  $\mathbf{u} \cdot \chi \in W^{1,2}(\text{int}(D))$  para cada função de corte  $\chi \in C_c^\infty(\text{int}D)$ . Esse fato é aprensentado na forma do Teorema de Meyers-Serrin*

**Teorema 7** (Meyers-Serrin, I). *Seja  $D \subset M$  um domínio. Então,*

$$W^{1,2}(\text{int}D) = \overline{C^\infty(\text{int}D) \cap W^{1,2}(\text{int}D)}^{W^{1,2}}.$$

*Demonstração.* Com efeito, seja  $N = \text{int}D$  uma variedade suave sem bordo, então podemos tomar um atlas enumerável, localmente finito e suave  $\{V_k \rightarrow \mathbb{R}^m\}$  com  $V_k$  compacto. Usando o Lema de encolhimento, encontramos uma cobertura localmente finita e aberta  $\{U_k\}$  tal que  $\bar{U}_k \subset V_k$ . Definimos uma partição da unidade  $\{\chi_k\}$  subordinada à cobertura  $\{U_k\}$  e decompomos  $\mathbf{u} \in W^{1,2}(N)$  como  $\mathbf{u} = \sum_k \mathbf{u}_k$  com  $\mathbf{u}_k = \mathbf{u} \cdot \chi_k$ .

Agora, fixado  $\varepsilon > 0$ , e usando mollifiers, encontramos uma função  $f_k \in C_c^\infty(U_k)$  tal que

$$\|\mathbf{u}_k - f_k\|_{W^{1,2}} \leq \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Assim, a soma localmente finita  $f = \sum_k f_k$  é suave em  $N$  e dá uma  $\varepsilon$ -aproximação de  $\mathbf{u}$  no espaço  $W^{1,2}(\text{int}M)$ .

□

Além disso, funções com suporte compacto podem ser aproximadas usando aproximações com suporte em uma vizinhança arbitrariamente pequena do suporte da função.

**Teorema 8** (Meyers-Serrin, II). *Seja  $D \subset M$  um domínio. Então,*

$$W^{1,2}(intD) = \overline{C^\infty(intD) \cap W^{1,2}(intD)}^{W^{1,2}}.$$

*Além disso, se  $f \in W^{1,2}(intD)$  tem suporte compacto contido em  $D$ , existe uma sequência de funções  $\{f_n\} \in C_c^\infty(M)$  tal que*

$$\|f - f_n\|_{W^{1,2}(intD)} \rightarrow 0,$$

*e pode ser organizado de forma que  $\text{supp}f_n$  esteja contido em uma  $\varepsilon$ -vizinhança do  $\text{supp}f$ .*

*Demonstração.* Veja [15].

□

Usando o resultado acima e a sequência padrão uniforme de Lipschitz de funções de corte  $\{\chi_n\}$  definidas por

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } r(x) \leq n \\ n + 1 - r(x) & \text{se } n \leq r(x) \leq n + 1 \\ 0 & \text{se } r(x) \geq n + 1, \end{cases}$$

onde  $r(x)$  é a função de distância de um ponto fixo de  $o \in intM$ , verifiquemos que se  $M$  é completa, então

$$W^{1,2}(intM) = \overline{\text{Lip}_c(M)}^{W^{1,2}}.$$

De fato, seja  $u \in W^{1,2}(intM)$ . Sem perda de generalidade, pela primeira metade do Teorema 8, podemos assumir que  $u \in C^\infty(M)$ . Portanto,  $u_n = \chi_n u \in \text{Lip}_c(M) \subset W^{1,2}(intM)$  e seu gradiente distributivo satisfaz a regra do produto

$$\nabla u_n = u \nabla \chi_n + \chi_n \nabla u$$

no  $intM$ . Como  $u \in W^{1,2}(intM)$ , notemos que  $\|\nabla \chi_n\|_\infty \rightarrow 0$  e  $\chi_n \rightarrow 1$  quando  $n \rightarrow +\infty$ , utilizando o Teorema da convergência dominada podemos concluir que  $\|u - u_n\|_{W^{1,2}} \rightarrow 0$ , com  $n \rightarrow +\infty$ .

Combinando isso com o Teorema 8, deduzimos

**Corolário 2.** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana completa. Então,*

$$W^{1,2}(intM) = \overline{C_c^\infty(M)}^{W^{1,2}}.$$

*Demonstração.* Seja  $u \in W^{1,2}(\text{int}M)$ . Fixando  $\varepsilon > 0$ , obtemos  $u_1 \in \text{Lip}_c(M)$  tal que

$$\|u - u_1\|_{W^{1,2}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por outro lado, de acordo com a segunda metade do Teorema 8, existe  $u_2 \in C_c^\infty(M)$  satisfazendo

$$\|u_1 - u_2\|_{W^{1,2}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Segue, então, que  $u_2$  é a  $\varepsilon$ -aproximação desejada de  $u$  em  $W^{1,2}(\text{int}M)$ .

□

## 1.4 Núcleo do Calor e função de Green

O Núcleo do calor será denotado por  $p(t, x, y)$  onde  $t > 0$  é um tempo e  $x, y$  são pontos em  $M$ . Assim, a probabilidade de que o movimento browniano começando no ponto  $x$  esteja em um conjunto mensurável  $\Omega \subset M$  no tempo  $t$  é dado por

$$\int_{\Omega} p(t, x, y) d\mu(y),$$

onde  $\mu$  é o volume Riemanniano. Em  $\mathbb{R}^n$ , o Núcleo do calor é dado pela fórmula clássica

$$p(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{2t}\right).$$

É conhecido por satisfazer a equação do calor

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \Delta p, \tag{1.28}$$

nas variáveis  $(t, x)$  (o ponto  $y$  é considerado fixo) e os dados iniciais

$$p(t, \cdot, y) \rightarrow \delta_y \text{ quando } t \rightarrow 0^+, \tag{1.29}$$

onde  $\delta_y$  é a função delta de Dirac.

As propriedades (1.28) e (1.29) podem ser usadas para definir o Núcleo do calor em uma variedade Riemanniana arbitrária  $M$ , o que é feito a seguir.

Qualquer função em  $(0, +\infty) \times M \times M$  satisfazendo (1.28) e (1.29) é chamada de solução fundamental da equação do calor (1.28) em  $M$ . O Núcleo do calor é a menor solução fundamental positiva da equação do calor em  $M$ . Foi demonstrado por J.Dodziuk

em [14] que o Núcleo do calor sempre existe (independentemente da completude geodésica) e é suave em  $(t, x, y)$ . Além disso, o Núcleo do calor possui as seguintes propriedades:

1. Simetria em  $x, y$ , isto é,  $p(t, x, y) = p(t, y, x)$ .
2. A identidade de semigrupo: para qualquer  $s \in (0, t)$

$$p(t, x, y) = \int_M p(s, x, z)p(t-s, z, y)d\mu(z).$$

3. Para todo  $t > 0$  e  $x \in M$ ,

$$\int_M p(t, x, y)d\mu(y) \leq 1.$$

Seja  $M$  uma variedade Riemanniana não compacta e completa. Para um conjunto compacto  $K \subset M$ , denote  $\Omega = M \setminus K$  e considere o Núcleo do calor de Dirichlet  $p^\Omega(t, x, y)$  em  $\Omega$ .

**Definição 10.** *Definimos  $p^\Omega$  como uma função de  $t$  e  $x$  tal que é uma solução positiva mínima do seguinte problema misto em  $\Omega$ :*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \\ u(0, x) = \delta_y(x). \end{cases}$$

A maneira mais simples de introduzir a função de Green  $G(x, y)$  é a seguinte

**Definição 11.** *A função de Green é definida por*

$$G(x, y) = \int_0^\infty p(t, x, y). \tag{1.30}$$

Uma definição independente é a seguinte:  $G(x, y)$  é a menor solução fundamental positiva da equação de Laplace em  $M$ . Seguimos a convenção de que  $G \equiv +\infty$  se não houver solução fundamental positiva, que corresponde ao caso quando a integral em (1.30) diverge. Se  $G \neq \infty$  então temos, para qualquer  $y$  fixo

$$\Delta G(\cdot, y) = \delta_y.$$

**Observação 3.** *Em  $\mathbb{R}^2$ , temos que  $G \equiv \infty$  (de fato, a solução fundamental é dada por  $\log|x - y|$ .)*

Descrevemos agora brevemente a condição de  ${}^{\mathcal{D}}G$  do núcleo de Green de Dirichlet de uma variedade  $M$  com bordo  $\partial M$ , ou seja, a solução mínima positiva de

$$\begin{cases} \Delta_x^{\mathcal{D}} G = -\delta_y(x), & \text{para todo } x, y \in \text{int}M \\ {}^{\mathcal{D}}G(x, y) = 0 & \text{se } x \text{ ou } y \in \partial M. \end{cases}$$

Como no caso de variedades sem bordo, o núcleo de Green  ${}^{\mathcal{D}}G(x, y)$  pode ser definido por um procedimento de exaustão.

Considere uma exaustão crescente de  $M$  por meio de conjuntos relativamente compactos com contorno de Dirichlet suave  $\overline{\partial\Omega_k}$  interceptando  $\partial M$  transversalmente. Então a sequência  $\{{}^{\mathcal{D}}G^{\Omega_k}\}$  dos núcleo de Green de Dirichlet de  $\Omega_k$  está aumentando e pela desigualdade local de Harnack, a sequência  $\{{}^{\mathcal{D}}G^{\Omega_k}\}$  diverge em todos os pontos de  $\text{int}M$ , ou converge localmente uniformemente para uma função suave fora da diagonal do  $\text{int}M$  satisfazendo

$$\Delta_x^{\mathcal{D}} G(x, y) = -\delta_y(x).$$

Além disso, se  $y \in \text{int}M$  e  $R > 0$  tal que  $\overline{B_R}(y) \Subset \text{int}M$ , então para todo  $k$  tal que  $\overline{B_R}(y) \Subset \text{int}\Omega_k$  e todo  $x \in \Omega_k \setminus B_R(y)$  temos

$${}^{\mathcal{D}}G^{\Omega_k}(x, y) \leq \sup_{\partial B_R(y)} {}^{\mathcal{D}}G^{\Omega_k}(\cdot, y) \leq \sup_{\partial B_R(y)} {}^{\mathcal{D}}G(\cdot, y).$$

Pelas estimativas de limite de Schauder, segue-se que  ${}^{\mathcal{D}}G^{\Omega_k}(\cdot, y)$  converge localmente de maneira uniforme em  $M$  e, portanto,  ${}^{\mathcal{D}}G(\cdot, y)$  é contínua até o bordo e desaparece sobre  $\partial M$ .

O Núcleo  ${}^{\mathcal{N}}G$  de Green de Neumann, que é necessário para satisfazer a condição de contorno de Neumann em  $M$ , é obtido usando um procedimento de limitação e, uma vez que, por comparação,

$${}^{\mathcal{D}}G^{\Omega_k} \leq {}^{\mathcal{N}}G^{\Omega_k}, \quad \forall k,$$

temos

$${}^{\mathcal{D}}G \leq {}^{\mathcal{N}}G.$$

As seguintes propriedades de  $G(x, y)$  serão usadas com frequência.

1. A função de Green  $G(x, y)$  é finita para todo  $x \neq y$  ou infinita para todo  $x, y$ . No

primeiro caso, diremos que  $G$  é finito. O valor na diagonal  $G(x, x)$  é sempre infinito. Além disso, a singularidade de  $G(x, y)$  com  $x \rightarrow y$  é da mesma ordem que em  $\mathbb{R}^n$ , ou seja,

$$G(x, y) \asymp \begin{cases} r^{2-n}, & n > 2, \\ \log \frac{1}{r}, & n = 2, \end{cases}$$

quando  $r = \text{dist}(x, y) \rightarrow 0$ .

2. Positividade:  $G(x, y) > 0$ .

3. Simetria:  $G(x, y) = G(y, x)$ .

4.  $G(\cdot, y)$  é harmônico longe de  $y$  (na verdade,  $G(\cdot, y)$  é superharmônico em  $M$  se for permitido  $+\infty$  como um valor da função).

5. Uma consequência da minimalidade

$$\inf_{x \in M} G(x, y) = 0.$$

## 1.5 Desigualdade de Harnack

Nesta seção, discutimos uma estimativa importante que é essencial para o estudo das funções harmônicas, bem como de muitos problemas elípticos. Todas as informações apresentadas nessa seção foram adquiridas no livro de Peter Li, [39], onde lá são apresentados argumentos utilizando hipótese sobre a curvatura de Ricci.

No tratamento a seguir, apresentaremos uma prova para a estimativa de gradiente acentuado para funções positivas que satisfaçam a equação

$$\Delta u = 0.$$

O argumento fornecerá as estimativas locais e globais. Várias consequências imediatas da estimativa do gradiente também serão obtidas.

O seguinte Lema será útil,

**Lema 4.** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana  $m$ -dimensional completa. Suponha que a curvatura de Ricci de  $M$  seja limitada inferiormente por*

$$\text{Ric} \geq -(m-1)R,$$

para algum  $R \geq 0$  constante. Seja  $u$  uma função definida em  $M$  satisfazendo a equação

$$\Delta u = 0,$$

e se definirmos

$$h = |\nabla \log(a + u)|^2,$$

então

$$\Delta h - \frac{m}{m-1} |\nabla h|^2 h^{-1} + \frac{2(m-2)}{m-1} \langle \nabla v, \nabla h \rangle \geq \frac{2}{m-1} h^2 - 2(m-1)Rh.$$

*Demonstração.* Definindo a função  $v = \log(a + u)$ , um cálculo direto mostra que  $v$  satisfaz a equação

$$\Delta v = -|\nabla v|^2.$$

Usando a fórmula de Bochner, obtemos

$$\begin{aligned} \Delta h &= \Delta(|\nabla \log(a + u)|^2) = \Delta|\nabla v|^2 \\ &= 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + 2R_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + 2 \langle \nabla v, \nabla(\Delta v) \rangle \\ &= 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + 2R_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} - 2 \langle \nabla v, \nabla|\nabla v|^2 \rangle \\ &\geq 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} - 2(m-1)Rh - 2 \langle \nabla v, \nabla h \rangle. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Escolhendo um referencial ortonormal  $\{e_1, \dots, e_m\}$  em um ponto de modo que  $|\nabla v|e_1 = \nabla v$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} |\nabla|\nabla v|^2|^2 &= 4 \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^m \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 \\ &= 4 \left( \frac{\partial v}{\partial x_1} \right)^2 \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_j} \right)^2 \\ &= 4|\nabla v|^2 \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_j} \right)^2. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 &\geq \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_1} \right)^2 + 2 \sum_{\alpha=2}^m \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_\alpha} \right)^2 + \sum_{\alpha=2}^m \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} \right)^2 \\
 &\geq \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_1} \right)^2 + 2 \sum_{\alpha=2}^m \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_\alpha} \right)^2 + \frac{\left( \sum_{\alpha=2}^m \frac{\partial^2 v}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} \right)^2}{m-1} \\
 &= \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_1} \right)^2 + 2 \sum_{\alpha=2}^m \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_\alpha} \right)^2 + \frac{\left( \Delta v - \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_1} \right)^2}{m-1} \\
 &= \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_1} \right)^2 + 2 \sum_{\alpha=2}^m \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_\alpha} \right)^2 + \frac{\left( |\Delta v|^2 + \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_1} \right)^2}{m-1} \\
 &= \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_1} \right)^2 + 2 \sum_{\alpha=2}^m \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_\alpha} \right)^2 + \frac{|\Delta v|^4}{m-1} + \frac{\left( 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_1} |\nabla v|^2 \right)}{m-1} + \frac{\left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_1} \right)}{m-1} \\
 &\geq \frac{m}{m-1} \sum_{\alpha=1}^m \left( \frac{\partial^2 v}{\partial_1 \partial_\alpha} \right)^2 + \frac{1}{m-1} |\nabla v|^4 + \frac{1}{m-1} \frac{\partial^2 v}{\partial_1 \partial_1}. \tag{1.33}
 \end{aligned}$$

No entanto, usando a identidade

$$2 \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_1} = e_1(|\nabla v|^2) = \langle \nabla |\nabla v|^2, \nabla v \rangle |\nabla v|^2,$$

concluimos que

$$2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial_1} = |\nabla v|^{-2} \langle \nabla |\nabla v|^2, \nabla v \rangle.$$

Substituindo a identidade acima em (1.33), obtemos

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 &\geq \frac{m}{m-1} \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_j} \right)^2 + \frac{1}{m-1} |\nabla v|^4 + \frac{1}{m} \langle \nabla |\nabla v|^2, \nabla v \rangle |\nabla v|^{-2} |\nabla v|^2 \\
 &= \frac{m}{m-1} \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_j} \right)^2 + \frac{1}{m-1} |\nabla v|^4 + \frac{1}{m-1} \langle \nabla |\nabla v|^2, \nabla v \rangle.
 \end{aligned}$$

Combinando a desigualdade acima com (1.31) e (1.32) resulta

$$\Delta h \geq \frac{m}{2(m-1)} |\nabla h|^2 h^{-1} - 2(m-1) R h - \frac{2(m-2)}{m-1} \langle \nabla v, \nabla h \rangle + \frac{2}{m-1} h^2$$

□

Agora, vamos apresentar o toerema de estimativa para o gradiente.

**Teorema 9.** *Seja  $M^m$  uma variedade Riemanniana completa de dimensão  $m$ . Suponha que a bola geodésica  $B_p(2\rho) \cap \partial M \neq \emptyset$ . Suponha que a curvatura de Ricci em  $B_p(2\rho)$  seja limitada inferiormente por*

$$\text{Ric} \geq -(m-1)R,$$

para alguma constante  $R \geq 0$ . Se  $u$  é uma função positiva definida em  $B_p(2\rho) \subset M$  satisfazendo

$$\Delta u = 0,$$

então existe uma constante  $C$  dependendo de  $m$  tal que

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^2}(x) \leq \frac{[4(m-1)^2 + 2\varepsilon]R}{4-2\varepsilon} + C(1 + \varepsilon^{-1})\rho^{-2},$$

para todo  $x \in B_p(\rho)$  e para qualquer  $\varepsilon < 2$ .

Além disso, se  $\partial M = \emptyset$  com  $\text{Ric} \geq -(m-1)R$  em todos os pontos e  $u$  são definidos em  $M$ , então

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^2}(x) \leq (m-1)^2R,$$

e

$$0 \leq \frac{(m-1)^2R}{4}.$$

*Demonstração.* Definindo  $v = \log u$  e  $h = |\nabla v|^2$ , o Lema 4 afirma que

$$\Delta h - \frac{m}{2(m-1)}|\nabla h|^2 h \nabla^{-1} + \frac{2(m-2)}{m-1} \langle \nabla v, \nabla h \rangle \geq \frac{2}{m-1}h^2 - 2(m-1)Rh.$$

Seja  $\phi$  uma função de corte não negativa e  $G = \phi h$ , então temos

$$\begin{aligned} \Delta G &= (\Delta \phi)h + 2\langle \nabla \phi, \nabla h \rangle + \phi \Delta h \\ &= \frac{\Delta \phi}{\phi} \phi h + 2\frac{1}{\phi} \langle \nabla \phi, \nabla(\phi h) \rangle + \phi \Delta h \\ &\geq \frac{\Delta \phi}{\phi} \phi h + 2\phi_{-1} \langle \nabla \phi, \nabla(\phi h) \rangle - 2|\nabla \phi|^2 \phi^{-2}G + \frac{m}{2(m-1)}|\nabla G|^2 G^{-1} \\ &\quad + \frac{m}{2(m-1)}|\nabla \phi|^2 \phi^{-2}G - \frac{m}{m-1} \phi^{-1} \langle \nabla \phi, \nabla G \rangle \\ &\quad - \frac{2(m-2)}{m-1} \langle \nabla v, \nabla G \rangle + \frac{2(m-2)}{m-1} \langle v, \nabla \phi \rangle h \\ &\quad + \frac{2}{m-1} \phi^{-1}G^2 - 2(m-1)RG. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Usando a desigualdade

$$|\langle \nabla v, \nabla \phi \rangle| \leq |\nabla \phi| \phi^{-1/2} G^{1/2},$$

temos que (1.34) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \Delta G &\geq \frac{\Delta \phi}{\phi} G + \frac{m-2}{m-1} \phi^{-1} \langle \phi, \nabla G \rangle - \frac{3m-4}{2(m-1)} |\nabla \phi|^2 \phi^{-2} G \\ &\quad + \frac{m}{2(m-1)} |\nabla G|^2 G^{-1} - 2(m-1) R G - \frac{2(m-2)}{m-1} \langle \nabla v, \nabla G \rangle \\ &\quad - \frac{2(m-2)}{m-1} |\nabla \phi| \phi^{-3/2} G^{3/2} + \frac{2}{m-1} \phi^{-1} G^2. \end{aligned}$$

No entanto, no ponto máximo  $x_0$  de  $G$ , o princípio do máximo afirma que

$$\Delta G(x_0) \leq 0$$

e

$$\nabla G(x_0) = 0.$$

Portanto, em  $x_0$ , temos

$$\begin{aligned} 0 &\geq (m-1)(\Delta \phi)G - \frac{3m-4}{2} |\nabla \phi|^2 \phi^{-1} G - 2(m-1)^2 R \phi G \\ &\quad - 2(m-1) |\nabla \phi|^{-1/2} G^{3/2} + 2G^2. \end{aligned} \tag{1.35}$$

Escolha  $\phi(x) = \phi(r(x))$  para ser uma função da distância  $r$  ao ponto fixo  $p$  com a propriedade que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \phi = 1 & \text{em } B_p(\rho) \\ \phi = 0 & \text{em } M \setminus B_p(2\rho) \\ -C\rho^{-1}\phi^{1/2} \leq \phi' \leq 0 & \text{em } B_p(2\rho) \setminus B_p(\rho), \end{array} \right.$$

e

$$|\phi''| \leq C\rho^{-2} \quad \text{em } B_p(2\rho) \setminus B_p(\rho).$$

Em seguida, o Teorema de Comparação do Laplaciano afirma que

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= \phi' \Delta r + \phi'' \\ &\geq -C_1(\rho^{-1} \sqrt{R} + \rho^{-2}), \end{aligned}$$

e também

$$|\nabla\phi|^2\phi^{-1} \leq C_2\rho^{-2}.$$

Portanto, (1.35) produz

$$\begin{aligned} 0 &\geq -(C_3\rho^{-1}\sqrt{R} + C_4\rho^{-2})G - 2(m-1)^2R\phi G \\ &\quad - C_5\rho^{-1}G^{3/2} + 2G^2 \\ &= -(C_3\rho^{-1}G^{3/2}\sqrt{R} + C_4\rho^{-2} + 2(m-1)^2R)G - C_5\rho^{-1}G^{3/2} + 2G^2. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Por outro lado, a desigualdade de Schwarz afirma que

$$-C_5\rho^{-1}G^{3/2} \geq -\varepsilon G^2 - \frac{C_5^2}{4}\varepsilon^{-2}\rho^2G$$

e

$$-C_3\rho^{-1}\sqrt{R} \geq -\varepsilon R - C_7\varepsilon^{-1}\rho^{-2},$$

para  $\varepsilon > 0$ . Portanto, combinando isso com (1.36), obtemos

$$0 \geq -(C_8(1 + \varepsilon^{-1})\rho^{-2} + [2(m-1)^2 + \varepsilon]R)G + (2 - \varepsilon)G^2.$$

Em particular, se  $\varepsilon < 2$ , então para qualquer  $x \in B_\rho(\rho)$  concluímos que

$$|\nabla v|^2(x) \leq G(x_0) \leq \frac{2B}{4 - 2\varepsilon}, \quad (1.37)$$

onde

$$B = C_8(1 + \varepsilon^{-1})\rho^{-2} + (2(m-1)^2 + \varepsilon)R.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{|\nabla u|^2}{u^2}(x) &\leq \frac{2C_8(1 + \varepsilon^{-1})\rho^{-2}R}{4 - 2\varepsilon} + \frac{(2(m-1)^2 + 2\varepsilon)R}{4 - 2\varepsilon} \\ &= C(1 + \varepsilon^{-1})\rho^{-2} + \frac{(2(m-1)^2 + 2\varepsilon)R}{4 - 2\varepsilon}, \end{aligned}$$

para todos os pontos  $x \in B_\rho(\rho)$  e para todos  $\varepsilon < 2$ .

Se  $u$  for definida em  $M$ , segue que  $|\nabla v|^2$  é uma função limitada. Em particular, se tomarmos  $\rho \rightarrow +\infty$  em (1.37), então

$$\begin{aligned} \frac{|\nabla u|^2}{u^2}(x) &\leq \lim_{\rho \rightarrow +\infty} [C(1 + \varepsilon^{-1})\rho^{-2}] + \frac{(2(m-1)^2 + 2\varepsilon)R}{4 - 2\varepsilon} \\ &= \frac{(2(m-1)^2 + 2\varepsilon)R}{4 - 2\varepsilon}, \end{aligned}$$

agora fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{|\nabla \mathbf{u}|^2}{\mathbf{u}^2}(\mathbf{x}) &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(2(\mathbf{m} - 1)^2 + 2\varepsilon)\mathbf{R}}{4 - 2\varepsilon} \\ &= 2(\mathbf{m} - 1)^2\mathbf{R}. \end{aligned}$$

Isso dá uma contradição se  $0 > (\mathbf{m} - 1)^2\mathbf{R}/4$ , e assim, obtemos a segunda afirmação.  $\square$

A seguinte desigualdade de tipo de Harnack é uma consequência direta da estimativa do gradiente

**Corolário 3** (Desigualdade de Harnack). *Seja  $M^m$  uma variedade completa com a curvatura de Ricci limitada inferiormente por*

$$\text{Ric} \geq -(\mathbf{m} - 1)\mathbf{R},$$

*para alguma constante  $\mathbf{R} \geq 0$ . Se  $\mathbf{u}$  é uma função positiva definida na bola geodésica  $B_p(2\rho) \subset M$  satisfazendo*

$$\Delta \mathbf{u} = 0,$$

*para alguma constante  $\lambda \geq 0$ , então existem constantes  $C_9, C_{10} > 0$  dependendo de  $\mathbf{m}$  tal que*

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{u}(\mathbf{y})C_9 \exp(C_{10}\rho\sqrt{\mathbf{R}}),$$

*para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B_p(\rho/2)$ .*

*Demonstração.* Seja  $\gamma$  a menor curva em  $B_p(\rho)$  unindo  $\mathbf{y}$  a  $\mathbf{x}$ , e claramente o comprimento de  $\gamma$  é no máximo  $2\rho$ . Integrando  $|\nabla \log \mathbf{u}|$  ao longo de  $\gamma$  obtemos

$$\log \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \log \mathbf{u}(\mathbf{y}) \leq \int_{\gamma} |\nabla \log \mathbf{u}|. \quad (1.38)$$

Por outro lado, aplicando a estimativa do gradiente do Teorema 9, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} |\nabla \log \mathbf{u}| &\leq \int_{\gamma} \left( \frac{[4(\mathbf{m} - 1)^2 + 2\varepsilon]\mathbf{R}}{4 - 2\varepsilon} + C(1 + \varepsilon^{-1})\rho^{-2} \right)^{1/2} \\ &\leq \int_{\gamma} \left( C_{10}\sqrt{\mathbf{R}} + C_{12}\rho^{-1} \right) \\ &\leq C_{10}\rho\sqrt{\mathbf{R}} + 2C_{12}. \end{aligned}$$

O corolário segue combinando essa desigualdade com (1.38), logo

$$\log \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \log \mathbf{u}(\mathbf{y}) \leq \int_{\gamma} |\nabla \log \mathbf{u}| \leq C_{10} \rho \sqrt{R} + 2C_{12}$$

aplicando a exponencial na desigualdade acima obtemos

$$\exp(\log \mathbf{u}(\mathbf{x})) \cdot \exp(-\log \mathbf{u}(\mathbf{y})) \leq \exp(C_{10} \rho \sqrt{R}) \cdot \exp(2C_{12}),$$

obtemos que

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{u}(\mathbf{y}) C_9 \exp(C_{10} \rho \sqrt{R}).$$

□

## Capítulo 2

# Parabolicidade em Variedades Riemanniana

Seja  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle_g)$  uma variedade Riemanniana orientada com bordo suave  $\partial M \neq \emptyset$  e  $\nu$  o vetor normal unitário exterior. No que se segue, durante esse capítulo omitimos o  $g$  situado na métrica. O interior de  $M$  (como uma variedade com bordo) é denotado por  $\text{int}M = M \setminus \partial M$ . Um domínio em  $M$ , é um conjunto aberto não necessariamente conexo  $D \subseteq M$ . Dizemos que o domínio  $D$  é suave se sua fronteira topológica  $\partial D$  é uma hipersuperfície suave  $\Gamma$  com fronteira  $\partial \Gamma = \partial D \cup \partial M$ . Claramente, se  $\partial M = \emptyset$  então a condição de suavidade se reduz à usual. É um fato padrão que cada variedade com bordo (possivelmente vazio) possui uma exaustão por domínios pré-compactos suaves. Para isso, escolhemos uma função apropriada  $\rho : M \rightarrow [0, +\infty)$  dada por

$$\rho = \sum_j \rho_j$$

onde  $\{\rho_j\}$  é uma partição da unidade suave com suporte compacto. Segue do Teorema de Sard que o conjunto dos valores críticos de  $\rho$  possuem medida nula em  $\mathbb{R}$ , assim podemos tomar uma sequência crescente  $\{t_k\} \rightarrow +\infty$  de tal forma que  $t_k$  é um valor regular para  $\rho|_{\text{int}M}$  e  $\rho|_M$ . Portanto,  $D_k = \{\rho < t_k\}$  define a exaustão desejada com bordo  $\partial D_k = \{\rho = t_k\}$  suave, pois  $t_k$  é um valor regular. Adotando a notação em [5], para qualquer domínio  $D \subseteq M$  definimos

$$\partial_0 D = \partial D \cap \text{int}M,$$

que chamaremos de bordo de Dirichlet do domínio. Observe também que  $D$  pode incluir parte do bordo de  $M$ . Portanto, definimos

$$\partial_1 D = \partial M \cap D,$$

que pode ser chamado de bordo de Neumann de  $D$  (embora não esteja no bordo topológico do domínio).

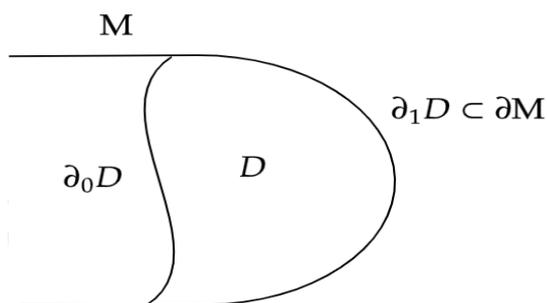


Figura 2.1: Bordo de Dirichlet e bordo de Neumann.

Finalmente, a parte interior de  $D$ , no sentido de variedades com bordo, é definida como

$$\text{int}D = D \cap \text{int}M,$$

tal que, em particular,

$$D = \text{int}D \cup \partial_1 D.$$

Agora, suponha que  $D \subseteq M$  seja qualquer domínio. Estendemos a noção de  $W_{\text{loc}}^{1,2}(D)$  incluindo a fronteira de Neumann do domínio: isso é essencial para introduzir um significado distributivo de (sub)soluções do problema de Neumann. Assim, com um leve abuso de notação, escrevemos

$$W_{\text{loc}}^{1,2}(D) = \{\mathbf{u} \in W^{1,2}(\text{int}\Omega), \forall \text{ domínio } \Omega \subset\subset D = \text{int}D \cup \partial_1 D\}.$$

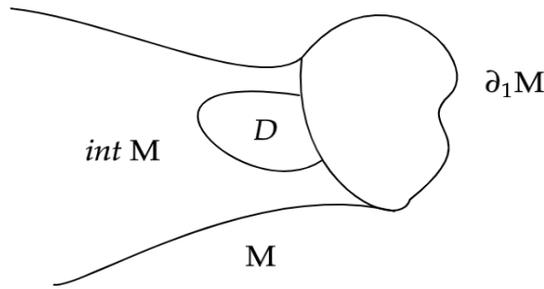


Figura 2.2: Interior de D no sentido de variedades com bordo.

Agora, suponha que  $D \subset M$  seja qualquer domínio. Teremos a seguinte definição

**Definição 12.** *Por uma subsolução fraca de Neumann  $u \in W_{loc}^{1,2}(D)$  da função de Laplace, isto é, uma solução fraca para o problema*

$$\begin{cases} \Delta u \geq 0 & \text{no } \text{int}D \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} \leq 0 & \text{sobre } \partial_1 D \end{cases} \quad (2.1)$$

queremos dizer que a seguinte desigualdade

$$-\int_{\text{int}D} \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle \geq 0 \quad (2.2)$$

vale para toda função  $0 \leq \varphi \in C_c^\infty(D)$ . Na verdade, uma vez que  $\partial_1 D$  tem medida nula, podemos sempre pensar em  $u$  e  $\nabla u$  como definidos em todo o domínio  $D$  e escrever

$$-\int_D \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle \geq 0$$

Da mesma maneira, tomando  $D = M$ , define-se a noção de subsolução de Neumann fraca da equação de Laplace em  $M$  como uma função  $u \in W_{loc}^{1,2}(M)$  que satisfaz (2.2) para cada  $0 \leq \varphi \in C_c^\infty(M)$ . De forma análoga, a noção de supersolução fraca pode ser obtida invertendo a desigualdade e, finalmente, falamos de uma solução fraca quando a igualdade se mantém em (2.2) sem qualquer condição de sinal em  $\varphi$ .

**Observação 4.** *A igualdade em (2.2), na definição acima, se mantém independente do sinal da  $\varphi$ .*

Com efeito, seja  $\mathbf{u} \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbf{D})$  uma solução do problema (2.1). Daí, tomemos  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{D})$  e  $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$  onde  $\varphi^+$  e  $\varphi^-$  são a parte positiva e negativa de  $\varphi$ , respectivamente. Como  $\langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \varphi \rangle \neq 0$  obtemos que  $\int_{\text{intD}} \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \varphi \rangle \neq 0$  e, conseqüentemente,

$$\int_{\text{intD}} \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \varphi^+ \rangle \geq 0 \quad \text{e} \quad \int_{\text{intD}} \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \varphi^- \rangle \leq 0.$$

Assim,

$$-\int_{\text{intD}} \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \varphi^+ \rangle \leq 0 \quad \text{e} \quad -\int_{\text{intD}} \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \varphi^- \rangle \geq 0. \quad (2.3)$$

Por outro lado, pela Identidade de Green, temos que

$$\begin{aligned} -\int_{\text{intD}} \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \varphi^+ \rangle &= \int_{\text{intD}} \varphi^+ \nabla \mathbf{u} - \int_{\partial \mathbf{D}} \varphi^+ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \nu} \\ &= \int_{\text{intD}} \varphi^+ \nabla \mathbf{u} - \int_{\partial_1 \mathbf{D}} \varphi^+ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \nu} \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

logo,

$$\int_{\text{intD}} \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \varphi^+ \rangle \geq 0. \quad (2.4)$$

Aplicando o argumento anterior para  $\varphi^-$  temos

$$\begin{aligned} -\int_{\text{intD}} \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \varphi^- \rangle &= \int_{\text{intD}} \varphi^- \nabla \mathbf{u} - \int_{\partial \mathbf{D}} \varphi^- \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \nu} \\ &= \int_{\text{intD}} \varphi^- \nabla \mathbf{u} - \int_{\partial_1 \mathbf{D}} \varphi^- \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \nu} \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

isto é,

$$-\int_{\text{intD}} \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \varphi^- \rangle \leq 0. \quad (2.5)$$

Segue de (2.3), (2.4) e (2.5) que  $\int_{\text{intD}} \langle \nabla \mathbf{u}, \varphi^+ \rangle = 0$  e  $\int_{\text{intD}} \langle \nabla \mathbf{u}, \varphi^- \rangle = 0$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{\text{intD}} \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \varphi \rangle &= \int_{\text{intD}} \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \varphi^+ \rangle - \int_{\text{intD}} \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \varphi^- \rangle \\ &= \int_{\text{intD}} \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \varphi^+ \rangle - \int_{\text{intD}} \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \varphi^- \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

e assim, obtemos o resultado desejado.

**Observação 5.** *Claramente, na definição acima, é equivalente exigir que (2.2) seja válido para cada  $0 \leq \varphi \in \text{Lip}_c(\mathbb{D})$ . Além disso, são lembrados acima, que os argumentos de densidade padrão funcionam mesmo para variedades com bordo e, portanto, (2.2) se estende a todos compactamente suportados  $0 \leq \varphi \in W_0^{1,2}(\mathbb{D})$ .*

Agora estamos prontos para dar a seguinte definição de parabolicidade na forma de um resultado do tipo Liouville.

**Definição 13.** *Uma variedade Riemanniana orientada  $M$  com bordo  $\partial M \neq \emptyset$  é parabólica se para cada  $u \in C^0(M) \cap W_{\text{loc}}^{1,2}(M)$  satisfazendo*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u \geq 0 & \text{em } \text{int}M, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} \leq 0 & \text{sobre } \partial M, \\ \sup_M u < +\infty. \end{array} \right. , \quad (2.6)$$

*temos que,  $u$  é constante.*

## 2.1 Capacidade e potenciais de equilíbrio

Seja  $M$  uma variedade sem bordo, dado um conjunto compacto  $K$  e um conjunto aberto  $\Omega$  contendo  $K$ , a capacidade do condensador  $(K, \Omega)$  é definida por

$$\text{Cap}(K, \Omega) = \inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^2; \quad u \in C_c^\infty; \quad u \geq 1 \text{ em } K \right\}.$$

Quando  $\Omega=M$ , escrevemos  $\text{Cap}(K, \Omega) = \text{Cap}(K)$  e nos referimos a ele como a capacidade(abstrata) de  $K$ . Um argumento de aproximação simples mostra que o ínfimo no lado direito pode ser calculado de forma equivalente sobre o conjunto

$$\{u \in \text{Lip}_c(\Omega); \quad u = 1 \text{ em } K\},$$

ou mesmo em

$$W_0(K, \Omega) = \{u \in C(\overline{\Omega}) \cap W_0^{1,2}(\Omega); \quad u = 1 \text{ em } K\}.$$

Referimo-nos às funções em  $W_0(K, \Omega)$  como potenciais admissíveis para o condensador  $(K, \Omega)$ . As propriedades de monotonicidade são mantidas pela capacidade, ou seja, se  $K \subset K_1$  são conjuntos compactos e  $\Omega \subset \Omega_1$  são abertos, então

$$\text{Cap}(K, \Omega_1) \leq \text{Cap}(K_1, \Omega_1) \leq \text{Cap}(K_1, \Omega).$$

De fato, fixando o conjunto aberto  $\Omega_1$  teremos que

$$\{\mathbf{u} \in \text{Lip}_c(\Omega_1); \mathbf{u} = 1 \text{ em } \mathbf{K}\} \supseteq \{\mathbf{u} \in \text{Lip}_c(\Omega_1); \mathbf{u} = 1 \text{ em } \mathbf{K}_1\},$$

então, pela propriedade de infimo obtemos

$$\inf \left\{ \int_{\Omega_1} |\nabla \mathbf{u}|^2; \mathbf{u} \in \text{Lip}_c(\Omega_1); \mathbf{u} = 1 \text{ em } \mathbf{K} \right\} \leq \inf \left\{ \int_{\Omega_1} |\nabla \mathbf{u}|^2; \mathbf{u} \in \text{Lip}_c(\Omega_1); \mathbf{u} = 1 \text{ em } \mathbf{K}_1 \right\}$$

e assim, podemos concluir que

$$\text{Cap}(\mathbf{K}, \Omega_1) \leq \text{Cap}(\mathbf{K}_1, \Omega_1).$$

Agora, fixemos o conjunto compacto  $\mathbf{K}_1$ . Como  $\Omega \subset \Omega_1$ , teremos que dado  $\mathbf{u} \in \{\mathbf{v} \in \text{Lip}_c(\Omega); \mathbf{v} = 1 \text{ em } \mathbf{K}_1\}$  então  $w|_{\Omega_1} = \mathbf{u}$  para algum  $w \in \{z \in \text{Lip}_c(\Omega_1); z = 1 \text{ em } \mathbf{K}_1\}$  e, conseqüentemente,

$$\{\mathbf{v} \in \text{Lip}_c(\Omega); \mathbf{v} = 1 \text{ em } \mathbf{K}_1\} \subset \{z \in \text{Lip}_c(\Omega_1); z = 1 \text{ em } \mathbf{K}_1\}.$$

Segue das propriedades de ínfimo que

$$\inf \left\{ \int_{\Omega_1} |\nabla \mathbf{u}|^2; \mathbf{u} \in \text{Lip}_c(\Omega_1); \mathbf{u} = 1; \text{ em } \mathbf{K}_1 \right\} \leq \inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2; \mathbf{u} \in \text{Lip}_c(\Omega); \mathbf{u} = 1 \text{ em } \mathbf{K}_1 \right\}.$$

Portanto,

$$\text{Cap}(\mathbf{K}_1, \Omega_1) \leq \text{Cap}(\mathbf{K}_1, \Omega).$$

Dessa forma, obtemos (2.7). Com as considerações acima podemos definir, primeiramente, a capacidade de um conjunto aberto  $\mathbf{U} \in \Omega$  como

$$\text{Cap}(\mathbf{U}, \Omega) = \sup_{\mathbf{U} \supset \mathbf{K}} \text{Cap}(\mathbf{K}, \Omega), \text{ onde } \mathbf{K} \text{ é compacto,}$$

e então a capacidade de um conjunto arbitrário  $\mathbf{E} \in \Omega$  como

$$\text{Cap}(\mathbf{E}, \Omega) = \inf_{\mathbf{E} \supset \mathbf{U}} \text{Cap}(\mathbf{U}, \Omega), \text{ onde } \mathbf{U} \text{ é aberto.}$$

O seguinte Lema será útil na prova das Proposições apresentadas neste Capítulo.

**Lema 5.** *Seja  $\mathbf{D} \subseteq \Omega$  um conjunto aberto, e sejam  $\mathbf{D}_n$  e  $\Omega_n$  seqüências de conjuntos abertos tais que*

$$\overline{\mathbf{D}} \subseteq \mathbf{D}_{n+1} \subseteq \mathbf{D}_n \subseteq \overline{\mathbf{D}}_n \subseteq \Omega_n \subseteq \Omega_{n+1} \subseteq \Omega; \cap_n \overline{\mathbf{D}}_n = \overline{\mathbf{D}}; \cup_n \Omega_n = \Omega.$$

Então,

$$\lim_n \text{Cap}(\overline{\mathbf{D}}_n, \Omega_n) = \text{Cap}(\mathbf{D}, \Omega). \tag{2.7}$$

*Demonstração.* Sejam  $D \in \Omega$  conjuntos abertos e  $D_n, \Omega_n$  seqüências de conjuntos abertos tais que

$$\bar{D} \subseteq D_{n+1} \subseteq D_n \subseteq \bar{D}_n \subseteq \Omega_n \subseteq \Omega_{n+1} \subseteq \Omega; \quad \bigcap_n \bar{D}_n = \bar{D}; \quad \bigcup_n \Omega_n = \Omega.$$

Obtemos, pela monotonicidade da capacidade, que se  $\bar{D}_{n+1} \subseteq \bar{D}_n$  e  $\Omega_n \subseteq \Omega_{n+1}$  então

$$\text{Cap}(\bar{D}_{n+1}, \Omega_{n+1}) \leq \text{Cap}(\bar{D}_{n+1}, \Omega_n) \leq \text{Cap}(\bar{D}_n, \Omega_n)$$

Portanto, a  $\text{Cap}(\bar{D}_n, \Omega_n)$  é monótona e ainda, como  $\bar{D} \subseteq \bar{D}_{n+1}$ ,  $\Omega_{n+1} \subseteq \Omega$  podemos concluir que

$$\text{Cap}(\bar{D}, \Omega) \leq \text{Cap}(\bar{D}_{n+1}, \Omega) \leq \text{Cap}(\bar{D}_{n+1}, \Omega_{n+1}) \leq \text{Cap}(\bar{D}_n, \Omega_n),$$

então

$$\text{Cap}(\bar{D}, \Omega) \leq \text{Cap}(\bar{D}_n, \Omega_n).$$

Assim  $\text{Cap}(\bar{D}_n, \Omega_n)$  é uma seqüência monótona decrescente limitada superiormente. Segue daí que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Cap}(\bar{D}_n, \Omega_n)$  existe e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Cap}(\bar{D}_n, \Omega_n) \geq \text{Cap}(\bar{D}, \Omega). \quad (2.8)$$

Agora, vamos calcular a desigualdade contrária. Para isto, tomemos uma função teste  $\phi \in \text{Lip}_c(\Omega)$  com  $\phi = 1$  em  $\bar{D}$  e para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno definimos a função

$$\phi_\varepsilon = \min \left\{ 1, \left( \frac{\phi - \varepsilon}{1 - 2\varepsilon} \right)_+ \right\} \quad (2.9)$$

Para  $n$  suficientemente grande temos que

$$\bar{D}_n \subseteq \{x : 1 - \varepsilon \leq \phi(x) \leq 1\} \quad (2.10)$$

e

$$\{x : \varepsilon \leq \phi(x) \leq 1\} \subset \Omega_n. \quad (2.11)$$

Com efeito, no conjunto  $\{x : 1 - \varepsilon \leq \phi(x) \leq 1\}$  teremos que  $\phi_\varepsilon \equiv 1$  pois

$$1 - \varepsilon \leq \phi.$$

Somando e subtraindo  $\varepsilon$  nos dois lado da desigualdade obtemos

$$1 - 2\varepsilon \leq \phi - \varepsilon.$$

Agora multiplicando por  $\frac{1}{1-2\varepsilon}$  tem-se

$$\frac{1-2\varepsilon}{1-2\varepsilon} \leq \frac{\phi-\varepsilon}{1-2\varepsilon},$$

então  $1 \leq \frac{\phi-\varepsilon}{1-2\varepsilon}$ . Assim, por (2.9) obtemos o desejado. De maneira análoga, podemos concluir que  $\phi_\varepsilon = \frac{\phi-\varepsilon}{1-2\varepsilon}$ . Logo, dado  $x \in \overline{D}_n$  teremos que  $\phi \equiv 1$ , então

$$\phi_\varepsilon = \min \left\{ 1, \left( \frac{1-\varepsilon}{1-2\varepsilon} \right)_+ \right\},$$

em  $\overline{D}_n$ , daí se  $\phi_\varepsilon = \frac{1-\varepsilon}{1-2\varepsilon}$  teremos

$$\frac{1-\varepsilon}{1-2\varepsilon} < 1,$$

mutiplicando a desigualdade acima por  $1-2\varepsilon$  teremos

$$1-\varepsilon < 1-2\varepsilon,$$

isso implica que  $0 > \varepsilon$ , que é um absurdo, já que estamos admitindo  $\varepsilon > 0$ . Portando,  $\frac{1-\varepsilon}{1-2\varepsilon} > 1$  e, conseqüentemente,  $\phi_\varepsilon \equiv 1$  em  $\overline{D}_n$  então teremos (2.10). Agora, notemos que  $\left( \frac{\phi-\varepsilon}{1-2\varepsilon} \right)_+$  é a parte positiva da função  $\frac{\phi-\varepsilon}{1-2\varepsilon}$  logo

$$\frac{\phi-\varepsilon}{1-2\varepsilon} > 0,$$

multiplicando por  $1-2\varepsilon$  teremos

$$\phi - \varepsilon > 0,$$

logo  $\phi > \varepsilon > 0$ . Por outro lado, temos que  $\phi$  é Lipschitziana com suporte compacto em  $\Omega$  e, em particular, sobre cada  $\Omega_n$ , já que  $\Omega = \cup_n \Omega_n$  então  $\phi(x) \neq 0$  em  $\Omega_n$ . Como para todo ponto em  $\{x : \varepsilon \leq \phi(x) \leq 1\}$  temos que  $\phi_\varepsilon(x) \neq 0$  e, conseqüentemente,  $\phi(x) \neq 0$  nesse mesmo conjunto, teremos (2.11). Segue que  $\phi_\varepsilon$  é Lipschitziana com suporte compacto em  $\Omega_n$  e  $\phi_\varepsilon \equiv 1$  em  $\overline{D}_n$ , então  $\phi_\varepsilon$  será um potencial admissível para o condensador  $(\overline{D}_n, \Omega_n)$  de modo que

$$\int |\nabla \phi_\varepsilon|^2 \geq \text{Cap}(\overline{D}_n, \Omega_n).$$

Assim, aplicando o limite com  $n \rightarrow \infty$  obtemos

$$\int |\nabla \phi_\varepsilon|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int |\nabla \phi_\varepsilon|^2 \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Cap}(\overline{D}_n, \Omega_n).$$

Agora, notemos que no conjunto  $\{x : \varepsilon \leq \phi(x) \leq 1 - \varepsilon\}$

$$\phi_\varepsilon = \frac{\phi - \varepsilon}{1 - 2\varepsilon},$$

assim aplicando o gradiente

$$\nabla \phi_\varepsilon = \nabla \left( \frac{\phi - \varepsilon}{1 - 2\varepsilon} \right),$$

então o gradiente de  $\phi$  será igual a  $\frac{\nabla \phi}{1 - 2\varepsilon}$ , portanto,  $|\nabla \phi_\varepsilon|^2 = \frac{|\nabla \phi|^2}{(1 - 2\varepsilon)^2}$ . Segue daí que

$$\int |\nabla \phi_\varepsilon|^2 = \int_{\{x : \varepsilon \leq \phi(x) \leq 1 - \varepsilon\}} \frac{|\nabla \phi|^2}{(1 - 2\varepsilon)^2} = \frac{1}{(1 - 2\varepsilon)^2} \int_{\{x : \varepsilon \leq \phi(x) \leq 1 - \varepsilon\}} |\nabla \phi|^2.$$

Como  $\{x : \varepsilon \leq \phi(x) \leq 1 - \varepsilon\} \subseteq \Omega_n \subseteq \cup_n \Omega_n = \Omega$ , teremos, pela monotonicidade da integral de Lebesgue, que

$$\int_{\{x : \varepsilon \leq \phi(x) \leq 1 - \varepsilon\}} |\nabla \phi|^2 \leq \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int |\nabla \phi|^2 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(1 - 2\varepsilon)^2} \int_{\{x : \varepsilon \leq \phi(x) \leq 1 - \varepsilon\}} |\nabla \phi|^2 \\ &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(1 - 2\varepsilon)^2} \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 \\ &= \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2, \end{aligned}$$

e concluímos que,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Cap}(\overline{D}_n, \Omega_n) \right) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int |\nabla \phi_\varepsilon|^2 \leq \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2.$$

Como  $n$  não depende de  $\varepsilon > 0$  teremos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Cap}(\overline{D}_n, \Omega_n) \leq \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2.$$

Assim, da definição de ínfimo, que dado  $\delta > 0$  obtemos  $\phi \in \{\text{Lip}_c; \phi = 1 \text{ em } \overline{D}\}$  tal que

$$\int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 < \text{Cap}(\overline{D}, \Omega) + \delta.$$

Isso implica que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Cap}(\overline{D}_n, \Omega_n) \leq \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 < \text{Cap}(\overline{D}, \Omega) + \delta.$$

Como  $\delta > 0$  foi tomado de maneira arbitrária, podemos concluir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Cap}(\overline{D}_n, \Omega_n) \leq \text{Cap}(\overline{D}, \Omega). \quad (2.12)$$

Portanto, de (2.12) e (2.8) podemos concluir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Cap}(\overline{D}_n, \Omega_n) = \text{Cap}(\overline{D}, \Omega).$$

□

**Proposição 9.** *Sejam  $D \Subset \Omega$  domínios relativamente compactos com contornos suaves  $\partial_0 \overline{D}$  e  $\partial_0 \overline{\Omega}$  transversais a  $\partial M$ . Então, existe  $u \in W_0(\overline{D}, \Omega) \cap C^\infty((\Omega \setminus \overline{D}) \cup \partial_1(\Omega \setminus \overline{D}))$  tal que  $0 \leq u \leq 1$  e*

$$\text{Cap}(\overline{D}, \Omega) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2.$$

*Demonstração.* Consideremos o problema do valor misto no bordo

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \text{int}(\Omega \setminus \overline{D}) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{em } \partial_1(\Omega \setminus \overline{D}) \\ u = 0 & \text{em } \partial_0 \Omega; \quad u = 1 \text{ em } \partial_0 D. \end{cases} \quad (2.13)$$

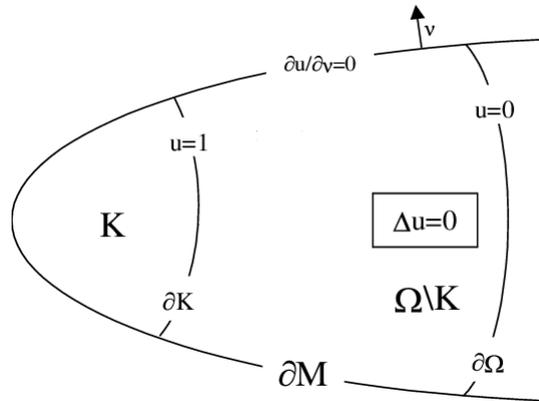


Figura 2.3: O potencial de capacidade para o capacitor  $(K, \Omega)$ . Fonte: A. Grigor'yan em [1].

Segue de [22] e da conhecida Teoria de Regularidade Local, que (2.13) tem uma solução clássica  $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega \setminus \overline{D}) \cup \partial_1(\Omega \setminus \overline{D})$ . Pelo Princípio do Máximo Forte e o Lema do Ponto de Fronteira, segue que  $0 < u < 1$  em  $\Omega \setminus \overline{D}$ . Estendemos  $u$  para  $\Omega$  definindo-o igual a 1 em  $D$ . Para mostrar que  $u \in W^{1,2}(\Omega)$ , escolhemos  $\varepsilon \in (0, 1)$

suficientemente pequeno tal que  $\varepsilon$  e  $1 - \varepsilon$  sejam valores regulares de  $\mathbf{u}$  no  $\text{int}(\Omega \setminus \bar{D})$  e em  $\partial_1(\Omega \setminus \bar{D})$

$$\Omega_\varepsilon = \{x; \mathbf{u}(x) \geq \varepsilon\}; \quad D_\varepsilon = \{x; \mathbf{u}(x) > 1 - \varepsilon\} \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_\varepsilon = \frac{\mathbf{u} - \varepsilon}{1 - 2\varepsilon}$$

de modo que  $\mathbf{u}_\varepsilon \in C^2(\bar{\Omega}_\varepsilon \setminus D_\varepsilon)$  satisfaz

$$\begin{cases} \nabla \mathbf{u}_\varepsilon = 0 & \text{em } \text{int}(\Omega_\varepsilon \setminus \bar{D}_\varepsilon) \\ \frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 & \text{em } \partial_1(\Omega_\varepsilon \setminus \bar{D}_\varepsilon) \\ \mathbf{u}_\varepsilon = 0 & \text{em } \partial_0 \Omega_\varepsilon; \quad \mathbf{u}_\varepsilon = 1 & \text{em } \partial_0 D_\varepsilon \end{cases}$$

De fato, pois como  $\mathbf{u}$  satisfaz (2.13) teremos que

$$\nabla \mathbf{u}_\varepsilon = \nabla \left( \frac{\mathbf{u} - \varepsilon}{1 - 2\varepsilon} \right) = \frac{\nabla \mathbf{u}}{1 - 2\varepsilon} = 0 \quad \text{em } \text{int}(\Omega_\varepsilon \setminus \bar{D}_\varepsilon),$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon}{\partial \nu} = \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{\mathbf{u} - \varepsilon}{1 - 2\varepsilon} \right) = \frac{1}{1 - 2\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \nu} = 0 \quad \text{em } \partial_1(\Omega_\varepsilon \setminus \bar{D}_\varepsilon),$$

$$\mathbf{u}_\varepsilon = \frac{\mathbf{u} - \varepsilon}{1 - 2\varepsilon} = 0 \quad \text{em } \partial_0 \Omega_\varepsilon \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_\varepsilon = \frac{\mathbf{u} - \varepsilon}{1 - 2\varepsilon} = 1 \quad \text{em } \partial_0 D_\varepsilon.$$

Agora, afirmamos que pelo princípio usual de Dirichlet  $\mathbf{u}_\varepsilon$  é o potencial de equilíbrio do capacitor  $(D_\varepsilon, \Omega_\varepsilon)$  e, em particular,

$$\frac{1}{1 - 2\varepsilon} \int_{\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon} |\nabla \mathbf{u}|^2 = \int_{\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon} |\nabla \mathbf{u}_\varepsilon|^2 = \text{Cap}(\bar{D}_\varepsilon, \Omega_\varepsilon).$$

Com efeito, seja  $\phi \in \text{Lip}_c(\Omega_\varepsilon)$  com  $\phi = 1$  em  $\bar{D}_\varepsilon$  uma função teste e ainda definimos  $\mathbf{v} = \mathbf{u}_\varepsilon - \phi$ , assim  $\phi = \mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}$  e teremos que

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \phi|^2 = \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla(\mathbf{u}_\varepsilon - \phi)|^2$$

Segue do Teorema de Sard que o conjunto dos pontos críticos de  $\phi$  possuem medida nula, logo integrando sobre  $\Omega_\varepsilon$  é o mesmo que integrando sobre  $\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon$ , ou seja,

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \phi|^2 = \int_{\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon} |\nabla \phi|^2,$$

então,

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon} |\nabla \phi|^2 &= \int_{\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon} |\nabla(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v})|^2 \\
 &= \int_{\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon} \langle \nabla(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}), \nabla(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}) \rangle \\
 &= \int_{\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon} \langle \nabla \mathbf{u}_\varepsilon, \nabla \mathbf{u}_\varepsilon \rangle - 2 \int_{\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon} \langle \nabla \mathbf{u}_\varepsilon, \nabla \mathbf{v} \rangle \\
 &\quad + \int_{\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon} \langle \nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{v} \rangle \\
 &= \int_{\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon} |\nabla \mathbf{u}_\varepsilon|^2 - 2 \int_{\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon} \langle \nabla \mathbf{u}_\varepsilon, \nabla \mathbf{v} \rangle \\
 &\quad + \int_{\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon} |\nabla \mathbf{v}|^2.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon} |\nabla \phi|^2 = \int_{\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon} |\nabla \mathbf{u}_\varepsilon|^2 - 2 \int_{\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon} \langle \nabla \mathbf{u}_\varepsilon, \nabla \mathbf{v} \rangle + \int_{\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon} |\nabla \mathbf{v}|^2. \quad (2.14)$$

Notemos que  $\nabla \mathbf{u}_\varepsilon = 0$  em  $\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon$  e  $\partial_0(\Omega_\varepsilon \setminus \overline{D}_\varepsilon) = \partial_0 \Omega_\varepsilon \cup \partial_0 \overline{D}_\varepsilon$ . Assim, se  $\mathbf{x} \in \partial_0 \Omega_\varepsilon$  temos que  $\phi \equiv 0$  e  $\mathbf{u}_\varepsilon \equiv 0$ , logo  $\mathbf{v} = 0$ . Agora, se  $\mathbf{x} \in \partial_0 \overline{D}_\varepsilon$  teremos que  $\mathbf{u}_\varepsilon \equiv 1$  e  $\phi \equiv 1$ , então  $\mathbf{v} = 0$ .

No caso em que  $\mathbf{x} \in \partial_0 \Omega_\varepsilon$  e  $\mathbf{x} \in \partial_0 \overline{D}_\varepsilon$  obtemos diretamente que  $\mathbf{v} = 0$ . Segue que  $\mathbf{v} = 0$  em  $\partial_0(\Omega_\varepsilon \setminus \overline{D}_\varepsilon)$  e ainda  $\frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon}{\partial \mathbf{v}} = 0$  sobre  $\partial_1(\Omega_\varepsilon \setminus \overline{D}_\varepsilon)$ . Pela fórmula de Green, obtemos que

$$\int_{\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon} \mathbf{v} \Delta \mathbf{u}_\varepsilon = \int_{\partial(\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon)} \langle \nabla \mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v} - \int_{\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon} \langle \nabla \mathbf{u}_\varepsilon, \nabla \mathbf{v} \rangle.$$

assim

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon} \langle \nabla \mathbf{u}_\varepsilon, \nabla \mathbf{v} \rangle &= - \int_{\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon} \mathbf{v} \Delta \mathbf{u}_\varepsilon + \int_{\partial_0(\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon) \cup \partial_1(\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon)} \langle \nabla \mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v} \\
 &= - \int_{\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon} \mathbf{v} \Delta \mathbf{u}_\varepsilon + \int_{\partial_0(\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon)(\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon)} \langle \nabla \mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v} + \int_{\partial_1(\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon)} \langle \nabla \mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}.
 \end{aligned}$$

Como

$$- \int_{\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon} \mathbf{v} \Delta \mathbf{u}_\varepsilon = \int_{\partial_0(\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon)(\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon)} \langle \nabla \mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v} = \int_{\partial_1(\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon)} \langle \nabla \mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v} = 0,$$

podemos concluir que,

$$\int_{\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon} \langle \nabla \mathbf{u}_\varepsilon, \nabla \mathbf{v} \rangle = 0. \quad (2.15)$$

Substituindo (2.15) em (2.14) teremos que

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla\phi|^2 = \int_{\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon} |\nabla\mathbf{u}_\varepsilon|^2 + |\nabla v|^2 = \int_{\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon} |\nabla\mathbf{u}_\varepsilon|^2 + \int_{\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon} |\nabla v|^2.$$

Sendo  $v = 0$  em  $\partial_0(\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon)$  teremos que  $v \neq 0$  em  $\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon$  então,

$$\int_{\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon} |\nabla v|^2 > 0.$$

Segue daí que

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla\phi|^2 = \int_{\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon} |\nabla\mathbf{u}_\varepsilon|^2 + \int_{\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon} |\nabla v|^2 > \int_{\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon} |\nabla\mathbf{u}_\varepsilon|^2$$

e, conseqüentemente,

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla\phi|^2 > \int_{\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon} |\nabla\mathbf{u}_\varepsilon|^2,$$

como queriamos demonstrar. Agora, utilizando (2.14) fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  teremos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Cap}(\overline{D}_\varepsilon, \Omega_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon} |\nabla\mathbf{u}_\varepsilon|^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(1 - 2\varepsilon)^2} \int_{\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon} |\nabla\mathbf{u}|^2.$$

Pelo Teorema da Convergencia Monotona, obtemos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(1 - 2\varepsilon)^2} \int_{\Omega_\varepsilon \setminus D_\varepsilon} |\nabla\mathbf{u}|^2 = \int_{\Omega \setminus D} |\nabla\mathbf{u}|^2$$

e, portanto,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Cap}(\overline{D}_\varepsilon, \Omega_\varepsilon) = \int_{\Omega \setminus D} |\nabla\mathbf{u}|^2.$$

Por outro lado, pelo Lema 5 podemos concluir que

$$\text{Cap}(\overline{D}, \Omega) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Cap}(\overline{D}_\varepsilon, \Omega_\varepsilon) = \int_{\Omega \setminus D} |\nabla\mathbf{u}|^2 \Rightarrow \text{Cap}(\overline{D}, \Omega) = \int_{\Omega \setminus D} |\nabla\mathbf{u}|^2$$

e, concluimos que  $\mathbf{u} \in W^{1,2}(\Omega)$  tal que  $\mathbf{u} \in W_0(\overline{D}, \Omega)$  e

$$\text{Cap}(\overline{D}, \Omega) = \int_{\Omega \setminus D} |\nabla\mathbf{u}|^2 = \int_{\Omega} |\nabla\mathbf{u}|^2.$$

Portanto,

$$\text{Cap}(\overline{D}, \Omega) = \int_{\Omega} |\nabla\mathbf{u}|^2.$$

□

**Proposição 10.** *Seja  $D$  um domínio relativamente compacto e seja  $\Omega_j$  uma exaustão crescente de  $M$  por domínios abertos relativamente compactos com  $\bar{D} \subset \Omega_j$ . Suponha que  $\bar{\partial}_0 \bar{D}$  e  $\bar{\partial} \Omega_j$  são suaves e transversais a  $\partial M$ , e para todo  $j$  seja  $u_j$  o potencial de equilíbrio do capacitor  $(\bar{D}, \Omega_j)$  construído na Proposição 9. Então  $u_j$  converge monotonicamente para uma função  $u \in C(M) \cap W_{loc}^{1,2}(M) \cap C^2(M \setminus \bar{D})$  tal que  $0 \leq u \leq 1$ ,  $u = 1$  em  $\bar{D}$ ,  $u$  é harmônica em  $M \setminus \bar{D}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$  em  $\partial_1(M \setminus \bar{D})$  e  $u$  é uma supersolução de Neumann fraca da equação de Laplace em  $M$ . Além disso,  $\nabla u \in L^2(M)$  e*

$$\text{Cap}(\bar{D}) = \int_M |\nabla u|^2.$$

*Demonstração.* Sejam  $D$  um domínio relativamente compacto e  $\Omega_j$  uma exaustão crescente de  $M$  por domínios abertos relativamente compactos com  $\bar{D} \subset \Omega_j$ , logo  $\Omega_j \subset \text{int} \Omega_{j+1}$  e  $M = \cup_j \Omega_j$ . Temos, ainda, que para todo  $j$  as funções  $u_j$  são potenciais de equilíbrio do capacitor  $(\bar{D}, \Omega_j)$ , assim, inicialmente, vamos estender as  $u_j$  de tal modo que a mesma fique definida em toda  $M$ . Para isso, tomemos  $u_j = 0$  em  $M \setminus \Omega_j$ . Segue do princípio da comparação que

$$0 \leq u_j \leq u_{j+1} \leq 1 \text{ em } \Omega_j \setminus \bar{D}$$

e, portanto,  $\{u_j\}$  é uma sequência monótona e limitada que, conseqüentemente, converge para uma função  $u$ . Notemos que, como  $u_j(x) \leq u(x) \leq 1$  então  $u_j \equiv 1$  em  $\partial_0 D$ . Dessa forma, aplicando o limite com  $x \rightarrow y$  onde  $y \in \partial_0 D$  obtemos

$$\lim_{x \rightarrow y} u_j(x) = 1.$$

Daí, como  $u_j$  são funções contínuas em  $\bar{D}$ , pois  $u_j \equiv 1$  em  $\bar{D}$ , e  $u_j \rightarrow u$  monotonicamente podemos concluir, pelo Teorema de Dini, que  $u_j \rightarrow u$  uniformemente e, conseqüentemente,  $u$  é uma função contínua, e ainda

$$u(x) = \lim_{j \rightarrow +\infty} u_j(x) = 1 \text{ em } \bar{D}.$$

Além disso, pelo tipo de estimativa de Schauder contida no Lema 1 em [22] para cada  $\alpha \in (0, 1)$ , para cada  $j_0$ , para  $\eta > 0$  suficientemente pequeno, existe uma constante  $C$  dependendo apenas de  $\alpha, \eta, j_0$  e da geometria de  $M$  em uma vizinhança

$$B_{j_0, \eta} = \{x \in \Omega_{j_0} \setminus \bar{D}; \text{ dist}(x, \partial_0 D \cup \partial_0 \Omega_{j_0}) \geq \eta\},$$

tal que para todo  $j \geq j_0$

$$\|u_j\|_{C^{2,\alpha}(B_{j_0, \eta})} \leq C \sup_{B_{\eta/2}} |u_j(x)|.$$

Como  $\{\mathbf{u}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  é uma sequência limitada em  $C^{2,\alpha}(B_{j_0,\eta})$ , passando a uma subsequência se necessário, podemos concluir que a sequência  $\{\mathbf{u}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  converge em  $C^{2,\alpha}(B_{j_0,\eta})$  para todo  $j_0$  e  $\eta > 0$  de modo que a função limite  $\mathbf{u}$  é harmônica em  $\text{int}M \setminus \bar{D}$  e  $C^2$  sobre  $\partial_1(M \setminus \bar{D})$ , onde satisfaz a condição de contorno de Neumann  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \nu} = 0$ , pois  $\mathbf{u}_j$  são sequências de soluções de Dirichlet e, portanto,  $\mathbf{u}_j = 0$  no  $\partial M$ , em particular,  $\mathbf{u}_j = 0$  em  $\partial_1(M \setminus \bar{D})$ . Resumindo,  $\mathbf{u} \in C^0(M \setminus \bar{D}) \cup C^2((M \setminus \bar{D}) \cup (\partial_1(M \setminus \bar{D})))$  é a solução clássica do problema de fronteira mista

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u} \geq 0 & \text{no } \text{int}(M \setminus \bar{D}) \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \nu} \leq 0 & \text{sobre } \partial_1(M \setminus \bar{D}) \\ \mathbf{u} = 1 & \text{sobre } \partial_0 D \\ 0 \leq \mathbf{u} \leq 1. \end{cases}$$

Por outro lado, temos que

$$\int_{\Omega_j} |\nabla \mathbf{u}_j|^2 = \text{Cap}(\bar{D}, \Omega_j) \quad \text{onde} \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \text{Cap}(\bar{D}, \Omega_j) = \text{Cap}(\bar{D}, \Omega).$$

Como  $\mathbf{u}_j \in C_c^0(M) \cap W^{1,2}(\text{int}M)$  converge uniformemente para  $\mathbf{u}$ , em particular,  $\mathbf{u}_j$  converge pontualmente para  $\mathbf{u}$  e ainda  $\nabla \mathbf{u}_j$  é limitado pois,

$$\|\nabla \mathbf{u}_j\|_{L^2(M)} = \left( \int_M |\nabla \mathbf{u}_j|^2 \right)^{1/2} = (\text{Cap}(\bar{D}, M))^{1/2}.$$

Sendo  $M = \cup_j \Omega_j$  e  $\Omega_j \subset M$  obtemos que

$$\|\nabla \mathbf{u}_j\|_{L^2(M)} = (\text{Cap}(\bar{D}, M))^{1/2} \leq (\text{Cap}(\bar{D}, \Omega_j))^{1/2}.$$

Assim, obtemos a afirmação feita anteriormente. Segue facilmente (ver, por exemplo, Lema 1.33 em [27]) que  $\nabla \mathbf{u}_j \in L^2(M)$  e  $\nabla \mathbf{u}_j \rightarrow \nabla \mathbf{u}$  fracamente em  $L^2(M)$ . Pela semi-continuidade fraca do funcional energia segue que

$$\int_M |\nabla \mathbf{u}|^2 \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_M |\nabla \mathbf{u}_j|^2 = \lim_{j \rightarrow \infty} \text{Cap}(\bar{D}, M) = \text{Cap}(\bar{D})$$

e, portanto,

$$\int_M |\nabla \mathbf{u}|^2 \leq \text{Cap}(\bar{D})$$

Por outro lado, pelo Lema de Mazur, uma combinação convexa  $\tilde{\mathbf{u}}_j$  de  $\mathbf{u}_j$  é tal que  $\nabla \tilde{\mathbf{u}}_j \rightarrow \nabla \mathbf{u}$  fortemente em  $L^2(M)$  e para cada  $\tilde{\mathbf{u}}_j \in C^0(M) \cap W^{1,2}(\text{int}M)$  tem suporte compacto, e igual a 1 em  $\bar{D}$ , é um potencial admissível para o capacitor  $(D, \Omega)$  e ainda teremos que

$$\int_M |\nabla \mathbf{u}|^2 = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_M |\nabla \tilde{\mathbf{u}}_j|^2 \geq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_M |\nabla \tilde{\mathbf{u}}_j|^2 = \text{Cap}(\bar{D}).$$

Segue daí que

$$\int_{\mathcal{M}} |\nabla \mathbf{u}|^2 \geq \text{Cap}(\overline{\mathcal{D}}),$$

e podemos concluir que

$$\int_{\mathcal{M}} |\nabla \mathbf{u}|^2 = \text{Cap}(\overline{\mathcal{D}}).$$

Finalmente, suponhamos que  $\mathbf{u}$  não seja constante de modo que, pelo Princípio do Máximo Forte,  $\mathbf{u} < 1$  em  $\mathcal{M} \setminus \overline{\mathcal{D}}$ . Tomando  $\eta_n \rightarrow 1$  uma sequência de valores regulares de  $\mathbf{u}|_{\text{int}(\mathcal{M} \setminus \overline{\mathcal{D}})}$  e  $\mathbf{u}|_{\partial_0 \mathcal{M} \setminus \overline{\mathcal{D}}}$  ainda definimos  $\Gamma_n = \{\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}) < \eta_n\}$ . Assim, utilizando o fato de que

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u} = 0 & \text{em } \Gamma_n \subset \mathcal{M} \setminus \overline{\mathcal{D}} \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial_1 \Gamma_n = \Gamma_n \cap \partial \mathcal{M} \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \nu} \geq 0 & \text{sobre } \partial_0 \Gamma_n = \partial \Gamma_n \cap \text{int} \mathcal{M}. \end{cases}$$

Temos que, dado  $0 \leq \rho \in C_c^\infty(\mathcal{M})$  segue, da Identidade de Green e  $\int_{\Gamma_n} \rho \Delta \mathbf{u} = 0$ , que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \rho \rangle &= \lim_n \int_{\Gamma_n} \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \rho \rangle \\ &= \lim_n \left\{ - \int_{\Gamma_n} \rho \Delta \mathbf{u} + \int_{\partial_0 \Gamma_n \cup \partial_1 \Gamma_n} \rho \langle \nabla \mathbf{u}, \nu \rangle \right\} \\ &= \lim_n \int_{\partial_0 \Gamma_n \cup \partial_1 \Gamma_n} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \nu} \\ &= \lim_n \int_{\partial_0 \Gamma_n} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \nu} + \lim_n \int_{\partial_1 \Gamma_n} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \nu}. \end{aligned}$$

Como  $\int_{\partial_1 \Gamma_n} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \nu} = 0$ , teremos

$$\int_{\mathcal{M}} \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \rho \rangle = \lim_n \int_{\partial_0 \Gamma_n} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \nu} \geq 0,$$

e podemos concluir que

$$\int_{\mathcal{M}} \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \rho \rangle \geq 0.$$

Segue daí que  $\mathbf{u}$  é uma supersolução de Neumann fraca da equação de Laplace em  $\mathcal{M}$ . □

Agora vamos obter a caracterização equivalente anunciada de parabolicidade para uma variedade com bordo não vazio.

**Teorema 10.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana conexa e orientada com bordo  $\partial M \neq \emptyset$ . Os seguintes são equivalentes:*

(i) *A capacidade de cada conjunto compacto  $K$  em  $M$  é zero.*

(ii) *Para cada domínio aberto relativamente compacto  $D \Subset M$  existe uma sequência crescente de funções  $u_j \in C_c(M) \cap W^{1,2}(\text{int}M)$  com  $u_j = 1$  em  $D$ ,  $0 \leq u_j \leq u_{j+1} \leq 1$  harmônica no conjunto*

$$\{x, 0 < u_j(x) < 1\} \cap \text{int}(M)$$

tal que,

$$\int_M |\nabla u_j|^2 \rightarrow 0 \text{ quando } j \rightarrow +\infty.$$

(iii)  *$M$  é parabólica.*

*Demonstração.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana, orientada e com  $\partial M \neq \emptyset$ . Suponhamos que  $\text{Cap}(K) = 0$  para cada conjunto compacto  $K$  em  $M$  e tomemos  $D \Subset M$  relativamente compacto. Temos que toda variedade com bordo possui uma exaustão por domínios pré-compactos suaves. Assim, tomemos  $\{\Omega_j\}$  uma exaustão crescente de  $M$  por conjuntos abertos relativamente compactos com bordos  $\partial_0 D$ ,  $\partial_0 \Omega_j$  suaves transversais a  $\partial M$  com  $D \subset \Omega_j$ . Teremos que  $u_j$  satisfaz às condições acima, e pela Proposição 9 obtemos que

$$\int_{\Omega_j} |\nabla u_j|^2 = \text{Cap}(\bar{D}, \Omega_j).$$

Daí,

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow +\infty} \int_M |\nabla u_j|^2 &= \lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_j} |\nabla u_j|^2 \\ &= \lim_{j \rightarrow +\infty} \text{Cap}(\bar{D}, \Omega_j) \\ &= \text{Cap}(\bar{D}) = 0. \end{aligned}$$

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Agora, suponhamos que para cada domínio aberto relativamente compacto  $D \Subset M$  existe uma sequência de pontos  $u_j \in C_c^0 \cap W^{1,2}(\text{int}M)$  com  $u_j = 1$  em  $D$ ,  $0 \leq u_j \leq u_{j+1} \leq 1$  harmônica no conjunto  $\{x, 0 < u_j < 1\} \cap \text{int}M$  temos ainda

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_M |\nabla u_j|^2 = 0.$$

Assim, é suficiente provar que  $\text{Cap}(\bar{D}) = 0$  para todo domínio aberto relativamente compacto  $D$  com contorno suave  $\partial_0 D$  transversal a  $\partial M$ . Para isto, tomemos uma exaustão crescente de  $M$  por domínios relativamente compactos com  $\partial_0 \Omega_j$  suave transversal a  $\partial M$ , tal que  $\text{supp } u_j \in \Omega_j$ . Então,

$$\text{Cap}(\bar{D}) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \text{Cap}(\bar{D}, \Omega_j) \leq \lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_j} |\nabla u_j|^2 = 0.$$

Por outro lado, como cada função  $u_j \in \text{Lip}_c(\Omega_j)$ ,  $u_j = 1$  em  $\bar{D}$  possui suporte compacto, teremos que  $u_j \neq 0$  para todo  $x \in \Omega_j$  logo,

$$\int_{\Omega_j} |\nabla u_j|^2 > 0,$$

e assim  $0 \leq \text{Cap}(\bar{D}) \leq 0$  e, conseqüentemente,  $\text{Cap}(\bar{D}) = 0$ .

(i)  $\Rightarrow$  (iii) Suponhamos que  $\text{Cap}(K) = 0$  para cada conjunto compacto  $K$  em  $M$  e tomemos  $u \in C^0(M) \cap W_{\text{loc}}^{1,2}(M)$  que satisfaz, no sentido Neumann fraco,

$$\begin{cases} \Delta u \geq 0 & \text{no } \text{int}M \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} \leq 0 & \text{sobre } \partial M \\ \sup_M u < +\infty. \end{cases} \quad (2.16)$$

Seja  $v = \sup_M u - u + 1$ , de modo que  $v \geq 1$ . Daí, pela definição de solução fraca do problema diferencial (2.16),  $v$  satisfaz a seguinte condição

$$\int \langle \nabla v, \nabla \rho \rangle \geq 0, \quad \text{para todo } 0 \leq \rho \in C^0(M) \cap W_0^{1,2}.$$

Em seguida, para cada domínio  $D$  relativamente compacto, tomemos  $\varphi \in \text{Lip}_c(M)$  com  $\varphi = 1$  em  $D$  e  $0 \leq \varphi \leq 1$ . Fazendo  $\rho = \varphi^2 v^{-1} \in C^0(M) \cap W_0^{1,2}(M)$  como uma função teste, teremos que

$$\begin{aligned} 0 \leq \int \langle \nabla v, \nabla \rho \rangle &= \int \langle \nabla v, \nabla(\varphi^2 v^{-1}) \rangle \\ &= \int \langle \nabla v, \nabla(\varphi^2) v^{-1} + \varphi^2 \nabla(v^{-1}) \rangle \\ &= \int \langle \nabla v, 2\varphi \nabla \varphi v^{-1} - \varphi^2 v^{-2} \nabla v \rangle \\ &= \int \langle \nabla v, 2\varphi \nabla \varphi v^{-1} \rangle - \int \langle \nabla v, \varphi^2 v^{-2} \nabla v \rangle \\ &= \int 2\varphi \langle \nabla v, \nabla \varphi v^{-1} \rangle - \int \varphi^2 \langle \nabla v, v^{-2} \nabla v \rangle \\ &= \int 2\varphi \langle \nabla \varphi v^{-1}, \nabla v \rangle - \int \varphi^2 \langle v^{-1} \nabla v, v^{-1} \nabla v \rangle. \end{aligned}$$

Segue da Desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$0 \leq \int \langle \nabla v, \nabla \rho \rangle = 2 \int \varphi \langle \nabla \varphi, v^{-1} \nabla v \rangle - \int \varphi^2 |v^{-1} \nabla v|^2 \leq 2 \int \varphi |v^{-1} \nabla v| |\nabla \varphi| - \int \varphi^2 |v^{-1} \nabla v|^2.$$

Como  $\varphi = 1$  em  $D$  e usando a desigualdade de Young  $2ab \leq 2a^2 + 1/2b^2$ , obtemos que

$$0 \leq 2 \int_D |v^{-1} \nabla \varphi| - \int_D |v^{-1} \nabla v|^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_D |v^{-1} \nabla v|^2 &\leq 2 \int_D |v^{-1} \nabla \varphi| \\ &\leq \int_D 2|\nabla \varphi|^2 + 1/2 |v^{-1} \nabla v|^2 \\ &\leq \int_D 2|\nabla \varphi|^2 + \int_D 1/2 |v^{-1} \nabla v|^2. \end{aligned}$$

Segue daí que

$$\int_D |v^{-1} \nabla v|^2 \leq \int_D 2|\nabla \varphi|^2 + 1/2 \int_D |v^{-1} \nabla v|^2,$$

e conseqüentemente,

$$\int_D |v^{-1} \nabla v|^2 - 1/2 \int_D |v^{-1} \nabla v|^2 \leq 2 \int_D |\nabla \varphi|^2,$$

isto é,

$$\int_D |v^{-1} \nabla v|^2 \leq 4 \int_D |\nabla \varphi|^2.$$

Tomando o ínfimo do lado direito sobre todas funções  $\varphi \in \text{Lip}_c$  que são igual a 1 em  $D$ , podemos tal que

$$\int_D |v^{-1} \nabla v|^2 \leq 4 \text{Cap}(\bar{D}) = 0,$$

portanto,  $|v^{-1} \nabla v|^2 = 0$  implicando que  $\nabla v = 0$  e, conseqüentemente,  $v$  é constante. Sendo  $v = \sup_M u - u + 1$  teremos que  $u = \sup_M u - v + 1 = \text{const}$ . Então,  $u = \text{const}$  em todo domínio relativamente compacto  $D$ . Assim,  $u$  é constante em  $M$ , portanto podemos concluir que  $M$  é parabólica no sentido da definição.

(iii)  $\Rightarrow$  (i) Suponhamos, por absurdo, que existe um conjunto compacto  $K$  com capacidade diferente de zero, ou seja,  $\text{Cap}(K) \neq 0$ . Daí, sem perda de generalidade, podemos supor que  $K$  é fechado de um domínio  $D$  relativamente compacto com contorno  $\partial_0 D$  suave

transversal a  $\partial M$ . Seja  $u$  o potencial de equilíbrio de  $D$  tal que  $u \in C^0 \cap W^{1,2}(\text{int}M)$  é solução clássica do problema de fronteira misto

$$\begin{cases} \Delta u \geq 0 & \text{no } \text{int}M \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} \leq 0 & \text{sobre } \partial M \\ 0 \leq u \leq 1 \text{ e } u \equiv 1 & \text{sobre } \partial_0 D, \end{cases}$$

que é não constante pois, como  $\text{Cap}(\bar{D}) \neq 0$  podemos supor, sem perda de generalidade, que  $\text{Cap}(\bar{D}) > 0$ , então

$$0 < \text{Cap}(\bar{D}) = \int_M |\nabla u|^2,$$

e, portanto,  $|\nabla u|^2 \neq 0$ . Logo,  $u \in C^0(M) \cap W^{1,2}(\text{int}M)$  é uma função super-harmônica de Neumann fraca limitada não constante. Contudo, isso contradiz o fato de que  $M$  é parabólica, portanto,  $\text{Cap}(K) = 0$ .  $\square$

## 2.2 Princípio do Máximo de Ahlfors, parabolicidade e gráficos mínimos

Um resultado clássico de L.V. Ahlfors diz que uma variedade Riemanniana  $N$  (sem fronteira) é parabólica se e, somente se, para todo domínio  $D \subseteq N$  com  $\partial D \neq \emptyset$  e para cada bordo acima, a função subharmônica  $u$  em  $D$  satisfaz  $\sup_D u = \sup_{\partial D} u$ . O resultado foi estendido no cenário de  $p$ -parabolicidade em [46]. Esta Seção visa fornecer uma nova forma de caracterização de Ahlfors que é válida em variedades com bordo. Este, por sua vez, será usado para obter estimativa da função altura de hipersuperfícies completas com curvatura média constante (CMC para abreviar) imersas em espaços de produto da forma  $N \times \mathbb{R}$ .

### Princípio do máximo global

Vamos provar a caracterização da parabolicidade do tipo Ahlfors declarada no Teorema 11. Na verdade, uma versão deste Princípio do Máximo Global envolvendo toda a variedade e sem nenhuma condição de Neumann será crucial nas aplicações geométricas. Este é o conteúdo do Teorema 12 que será demonstrado no final desta Seção.

**Teorema 11** (Princípio do Máximo de Ahlfors). *Uma variedade  $M$  com bordo é parabólica se, e somente se, o seguinte Princípio do Máximo for válido. Para cada domínio  $D \subseteq M$  com  $\partial_0 D \neq \emptyset$  e para todo  $u \in C^0(\bar{D}) \cap W_{loc}^{1,2}(D)$  satisfazendo*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u \geq 0 & \text{no } \text{int}D \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} \leq 0 & \text{sobre } \partial_1 D \\ \sup_D u < +\infty, \end{array} \right.$$

no sentido fraco, vale,

$$\sup_D u = \sup_{\partial_0 D} u.$$

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Seja  $M$  uma variedade que é parabólica e suponhamos, por absurdo, que exista um domínio  $D \subseteq M$  e uma função  $u \in C^0(\bar{D}) \cap W_{loc}^{1,2}(D)$  satisfazendo

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u \geq 0 & \text{no } \text{int}M \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} \leq 0 & \text{sobre } \partial_1 D \\ \sup_D u < +\infty, \end{array} \right.$$

tal que

$$\sup_D u > \sup_{\partial_0 D} u.$$

Assim, tomemos  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno tal que

$$\sup_D u > \sup_{\partial_0 D} u + \varepsilon,$$

então, definimos o conjunto aberto

$$D_\varepsilon = \{x \in D; u > \sup_D u - \varepsilon\} \neq \emptyset,$$

e  $\bar{D}_\varepsilon \subset D$ . Assim, definimos a  $u_\varepsilon : M \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$u_\varepsilon = \begin{cases} \max\{u, \sup_D u\} & \text{em } D \\ \sup_D u - \varepsilon & \text{em } M \setminus D. \end{cases}$$

Afirmamos que  $u_\varepsilon$  define bem uma  $C^0(M) \cap W_{loc}^{1,2}(M)$ -subsolução da equação de Laplace em  $M$ . De fato, em  $D$  temos que

$$u_\varepsilon(x) = \max\{u(x), \sup_D u - \varepsilon\},$$

então, se  $u(x) < \sup_D u - \varepsilon$  teremos que

$$u_\varepsilon(x) = \sup_D u - \varepsilon,$$

e assim,

$$\Delta u_\varepsilon(x) = \Delta(\sup_D u - \varepsilon) = 0 \text{ no } \text{int}D.$$

Agora, se  $u(x) > \sup_D u - \varepsilon$  obtemos

$$u_\varepsilon(x) = u(x)$$

e, conseqüentemente,

$$\Delta u_\varepsilon(x) = \Delta u(x) \geq 0 \text{ no } \text{int}D.$$

Agora, em  $M \setminus D$  teremos que

$$u_\varepsilon = \sup_D u - \varepsilon$$

e, portanto,

$$\Delta u_\varepsilon = \Delta(\sup_D u - \varepsilon) = 0.$$

Segue daí que  $\Delta u_\varepsilon \geq 0$  no  $\text{int}M$ . Por um lado, em  $D$  se  $u < \sup_D u - \varepsilon$  temos que

$$u_\varepsilon(x) = \sup_D u - \varepsilon,$$

logo,

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = \frac{\partial}{\partial \nu}(\sup_D u - \varepsilon) = 0 \text{ sobre } \partial_1 D$$

Por outro lado, se  $u > \sup_D u - \varepsilon$  tem-se

$$u_\varepsilon(x) = u(x),$$

então,

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial \nu} \leq 0 \text{ sobre } \partial_1 D.$$

Por último, em  $M \setminus D$  obtemos

$$u_\varepsilon = \sup_D u - \varepsilon$$

e, conseqüentemente,

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = \frac{\partial}{\partial \nu} (\sup_D u - \varepsilon) = 0 \text{ sobre } \partial_1(M \setminus D).$$

Portanto,  $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} \leq 0$  sobre  $\partial M$ . Assim, pela Identidade de Green, obtemos que

$$\int_{\text{int}M} \varphi \Delta u_\varepsilon = \int_{\partial M} \varphi \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} - \int_{\text{int}M} \langle \nabla u_\varepsilon, \nabla \varphi \rangle,$$

onde  $0 \leq \varphi \in C_c^\infty$ , então

$$0 \leq \int_{\text{int}M} \varphi \Delta u_\varepsilon - \int_{\partial M} \varphi \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = - \int_{\text{int}M} \langle \nabla u_\varepsilon, \nabla \varphi \rangle.$$

Logo, obtemos o resultado desejado. Além disso,

$$\sup_M u_\varepsilon = \sup_D u < +\infty.$$

Como  $M$  é parabólica e  $u_\varepsilon$  satisfaz

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u_\varepsilon \geq 0 & \text{no } \text{int}M \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} \leq 0 & \text{sobre } \partial M \\ \sup_M u_\varepsilon < +\infty, \end{array} \right.$$

podemos concluir que,  $u_\varepsilon$  é constante em  $M$ . Em particular, suponhamos ter escolhido  $\varepsilon > 0$  de tal forma que  $\sup_D u - \varepsilon$  não é um máximo local para  $u$ , então,

$$u_\varepsilon(x) = \sup_M u - \varepsilon \text{ em } \partial D_\varepsilon \neq \emptyset.$$

Como  $u_\varepsilon$  é constante em  $M$ , em particular, é constante em  $D$ , assim, podemos concluir que

$$u = \sup_M u - \varepsilon \text{ em } D.$$

Logo,  $u$  é constante que é um absurdo. Portanto,

$$\sup_D u = \sup_{\partial_0 D} u.$$

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos, agora, que para todo domínio  $D \subseteq M$  com  $\partial_0 D \neq \emptyset$  e para toda função  $u \in C^0(\bar{D}) \cap W_{\text{loc}}^{1,2}(D)$  satisfazendo

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u \geq 0 & \text{no } \text{int}M \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} \leq 0 & \text{sobre } \partial_1 D \\ \sup_D u < +\infty, \end{array} \right.$$

no sentido fraco, satisfaz

$$\sup_D u = \sup_{\partial_0 D} u.$$

De maneira análoga, suponhamos, por absurdo, que  $M$  não seja parabólica. Então, existe uma função não constante  $v \in C^0(M) \cap W_{loc}^{1,2}(M)$  que satisfaz

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta v \geq 0 & \text{no } \text{int}M \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} \leq 0 & \text{sobre } \partial M \\ v^* = \sup_M v < +\infty. \end{array} \right.$$

Assim, dado  $\eta < v^*$  consideremos o domínio

$$\Omega_\eta = \{x \in M; v(x) > \eta\} \neq \emptyset.$$

Podemos escolher  $\eta$  suficientemente próximo de  $v^*$  de tal forma que  $\text{int}M \not\subseteq \Omega_\eta$ . Em particular, teremos que

$$\partial\Omega_\eta \subset \{v = \eta\} \text{ e } \partial_0\Omega_\eta = \partial\Omega_\eta \cap M \neq \emptyset.$$

Assim,  $v \in C^0(\overline{\Omega_\eta}) \cap W_{loc}^{1,2}(\Omega_\eta)$  é uma subsolução fraca de Neumann limitada em  $\Omega_\eta$ . Além disso,

$$\sup_{\partial_0\Omega_\eta} v = \eta < v^* = \sup_{\Omega_\eta} v,$$

o que é um absurdo, portanto,  $M$  é parabólica.  $\square$

Se tomarmos  $D = M$  na primeira metade da prova acima, parece que a condição de Neumann não desempenha nenhum papel.

**Teorema 12.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade parabólica com bordo  $\partial M \neq \emptyset$ . Se  $u \in C^0(M) \cap W_{loc}^{1,2}(\text{int}(M))$  satisfaz*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u \geq 0 & \text{no } \text{int}M \\ \sup_M u < +\infty, \end{array} \right.$$

então,

$$\sup_M u = \sup_{\partial M} u.$$

*Demonstração.* Seja  $(M, g)$  uma variedade parabólica com bordo  $\partial M \neq \emptyset$  e  $u \in C^0(M) \cap W_{loc}^{1,2}(\text{int}(M))$  uma função que satisfaz

$$\begin{cases} \Delta u \geq 0 & \text{no } \text{int}M \\ \sup_M u < +\infty. \end{cases}$$

Suponhamos, por absurdo, que

$$\sup_M u > \sup_{\partial M} u.$$

Então, podemos tomar  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno tal que,

$$\sup_M u > \sup_{\partial M} u + 2\varepsilon,$$

assim definimos a função  $u_\varepsilon \in C^0(M) \cap W_{loc}^{1,2}((M))$  dada por

$$u_\varepsilon = \begin{cases} \max(u, \sup_M u - \varepsilon) & \text{em } \Omega_{2\varepsilon} \\ \sup_M u - \varepsilon & \text{no } M \setminus \Omega_{2\varepsilon}, \end{cases} \quad (2.17)$$

onde definimos o conjunto

$$\Omega_{2\varepsilon} = \{x \in M, u(x) > \sup_M u - 2\varepsilon\}.$$

Como  $\overline{\Omega_{2\varepsilon}} \subset \text{int}M$ , temos que  $u_\varepsilon$  é constante em uma vizinhança  $W$  de  $\partial M$ . Afirmamos que se  $\Delta u \geq 0$  fracamente no  $\text{int}M$  segue que  $u_\varepsilon$  é uma subsolução de Neumann fraca em  $M$ . Com efeito, por hipótese temos que  $\Delta u \geq 0$  fracamente no  $\text{int}M$ , logo,  $u$  é uma função subharmônica e ainda, o máximo de uma função subharmônica é subharmônica.

Por (2.17) obtemos que  $u_\varepsilon$  também será subharmônica fracamente no  $\text{int}M$ . Tomemos uma função teste  $0 \leq \varphi \in C_c^\infty(M)$  e notemos que  $u_\varepsilon$  é constante em  $W \cap \text{supp}(\varphi)$ , assim encontramos uma função de corte  $0 \leq \eta \in C_c^\infty(\text{int}M)$  tal que

$$\langle \nabla u_\varepsilon, \nabla \varphi \rangle = \langle \nabla u_\varepsilon, \nabla(\eta \cdot \varphi) \rangle.$$

Para isto, basta considerar o conjunto compacto  $K = (M \setminus W) \cap \text{supp}M$  no  $\text{int}M$  e ainda tomemos uma vizinhança  $\Omega \Subset \text{int}M$  de  $K$  e escolhemos  $0 \leq \eta \leq 1$  de tal modo que  $\eta = 1$  em  $\Omega$ ,  $\text{supp}(\eta) \subset \text{int}M$ . Podemos concluir que

$$-\int_M \langle \nabla u_\varepsilon, \nabla \varphi \rangle = -\int_{\text{int}M} \langle \nabla u_\varepsilon, \nabla(\eta \cdot \varphi) \rangle \geq 0,$$

para toda  $0 \leq \phi \in C_c^\infty(M)$ . Portanto,  $u_\varepsilon \in W_{loc}^{1,2}(M)$  é uma subsolução de Neumann fraca da equação de Laplace em  $M$ . Além disso,

$$\sup_M u_\varepsilon = \sup_M u < +\infty.$$

Como  $M$  é parabólica podemos concluir que  $u_\varepsilon$  é constante, ou seja,

$$u_\varepsilon \equiv \sup_M -\varepsilon \text{ em } M,$$

então  $u \leq \sup_M u$  em  $M$  e, conseqüentemente,  $\Omega_{2\varepsilon} = \emptyset$  que é um absurdo. Portanto,

$$\sup_M u = \sup_{\partial M} u.$$

□

## Diferentes noções de parabolicidade e observações sobre mapas mínimos

Nesta seção, levantamos diferentes conceitos de parabolicidade que podem ser encontrados na literatura e estabelecemos algumas relações entre eles. Também mostramos como o ponto de vista do Princípio do Máximo de Ahlfors pode ser usado para deduzir resultados em gráficos mínimos em  $\mathbb{R}^3$ .

Se  $M$  tem bordo não vazio  $\partial M \neq \emptyset$ , uma verificação rápida da literatura mostra que existem muitas definições (não equivalentes) de parabolicidade. O mais clássico, que também é o que adotamos ao longo do texto, foi sistematicamente usado por A. Grigor'yan a partir de [2], [5], e afirma que  $M$  é parabólica, desde que o movimento browniano refletido em  $M$  seja recorrente. Isso é, equivalente a exigir a propriedade do tipo Liouville declarada na Definição 12 acima, que impõe condições de contorno do tipo Neumann nas funções relevantes. Por essas razões, ao longo desta seção iremos nos referir a essa propriedade como Neumann-parabolicidade ou, resumidamente, N-parabolicidade.

Uma segunda definição interessante pode ser encontrada em um artigo de R. F. De Lima, [43], que estava interessado em princípios de máximo no infinito para superfícies CMC. Sua definição vai na direção da caracterização clássica do Princípio Máximo de Ahlfors de variedades parabólicas sem bordo.

Na terminologia de De Lima, temos o seguinte

**Definição 14.** Uma variedade Riemanniana  $(M, g)$  com bordo  $\partial M \neq \emptyset$  é  $\mathcal{A}$ -parabólica se para toda  $u \in C^0(M) \cap W_{loc}^{1,2}(M)$  solução do problema

$$\begin{cases} \Delta u \geq 0 & \text{no } \text{int}M \\ \sup_M u < +\infty, \end{cases}$$

assegura que

$$\sup_M u = \sup_{\partial M} u.$$

Como já observamos na subseção anterior no Teorema 12, temos que a definição clássica (ou seja, Neumann) de parabolicidade implica aquela introduzida por De Lima.

**Proposição 11** (Teorema 12). *Assuma que  $(M, g)$  é uma variedade  $\mathcal{N}$ -parabólica com contorno  $\partial M \neq \emptyset$  e seja  $u$  uma solução fraca do problema*

$$\begin{cases} \Delta u \geq 0 & \text{no } \text{int}M \\ \sup_M u < +\infty. \end{cases}$$

Então,

$$\sup_M u = \sup_{\partial M} u.$$

Em particular, uma variedade  $\mathcal{N}$ -parabólica com bordo é  $\mathcal{A}$ -parabólica.

*Demonstração.* A mesma argumentação apresentada no Teorema 12.

□

Finalmente, uma terceira definição proveitosa vem de trabalhos muito recentes na teoria das superfícies mínimas no espaço Euclidiano, [37], [17], [40] e [45]. Uma variedade Riemanniana é dita parabólica se funções harmônicas limitadas são determinadas por seus valores de bordo. Isso é equivalente ao seguinte

**Definição 15.** Uma variedade Riemanniana  $M$  com bordo  $\partial M \neq \emptyset$  é  $\mathcal{D}$ -parabólica se a única solução do problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{no } \text{int}M \\ u = 0 & \text{sobre } \partial M \\ \sup_M |u| < +\infty \end{cases}$$

é a função constante  $u = 0$ .

A noção de  $\mathcal{D}$ -parabólica está relacionado com a clássica de Neumann através do Princípio do Máximo de Ahlfors.

**Proposição 12.** *Suponha que  $(M, g)$  é uma variedade  $\mathcal{A}$ -parabólica com bordo  $\partial M \neq \emptyset$  e seja  $u$  uma solução do problema*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{no } \text{int}M \\ u = 0 & \text{sobre } \partial M \\ \sup_M |u| < +\infty. \end{cases}$$

Então,  $u = 0$ . Em particular, uma variedade  $\mathcal{N}$ -parabólica é  $\mathcal{D}$ -parabólica.

*Demonstração.* Seja  $(M, g)$  uma variedade  $\mathcal{A}$ -parabólica com bordo  $\partial M \neq \emptyset$  e ainda  $u$  uma solução do problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{no } \text{int}M \\ u = 0 & \text{sobre } \partial M \\ \sup_M |u| < +\infty. \end{cases}$$

Aplicando a definição de  $\mathcal{A}$ -parabólica às funções  $u$  e  $-u$  obtemos que

$$\sup_M u = \sup_{\partial M} u$$

e

$$\sup_M (-u) = \sup_{\partial M} (-u)$$

$$\inf_M u = \inf_{\partial M} u.$$

Por outro lado, temos que  $u = 0$  sobre  $\partial M$  então,

$$\sup_M u = \sup_{\partial M} u = 0.$$

e

$$\inf_M u = \inf_{\partial M} u = 0,$$

portanto,

$$\sup_M u = \inf_M u = 0.$$

Assim, para todo  $x \in M$  temos que

$$\begin{aligned} 0 = \inf_M u \leq u(x) \leq \sup_M u = 0 \\ 0 \leq u(x) \leq 0. \end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que  $u = 0$  para todo  $x \in M$  e daí, obter o resultado desejado.  $\square$

No entanto, o inverso não se aplica em geral.

**Exemplo 1.** *O semi-espaço fechado*

$$\overline{\mathbb{R}}_+^{m+1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}; y \geq 0\} \text{ de } \mathbb{R}^{m+1}, m \geq 2,$$

é  $\mathcal{D}$ -parabólica.

Com efeito, seja  $u$  uma função harmônica limitada em  $\mathbb{R}_+^{m+1}$  que é identicamente nula em  $\partial\mathbb{R}_+^{m+1}$ , em outras palavras,

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \mathbb{R}_+^{m+1} \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\mathbb{R}_+^{m+1}. \end{cases}$$

Então, sua reflexão ímpar é limitada e harmônica em  $\mathbb{R}^{m+1}$  e, portanto, pelo Teorema de Liouville podemos concluir que  $u$  é constante em todo o  $\mathbb{R}^{m+1}$ . Contudo,  $u = 0$  sobre  $\partial\mathbb{R}_+^{m+1}$  e assim,  $u = 0$  em todo o  $\mathbb{R}^{m+1}$ . Logo,

$$u = 0 \text{ em } \overline{\mathbb{R}}_+^{m+1}$$

e, conseqüentemente,  $\overline{\mathbb{R}}_+^{m+1}$  é  $\mathcal{D}$ -parabólico.

Uma demonstração alternativa, que pode ser passível de extensões para configurações geométricas mais gerais, dependem do fato de que, usando o Núcleo de Poisson do semi-espaço, pode-se provar que, para cada função limitada  $u \in C^0(\overline{\mathbb{R}}_+^{m+1})$  que é harmônica tem a estimativa

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^{m+1})} \leq \|u\|_{L^\infty(\partial\mathbb{R}_+^{m+1})},$$

que, novamente, produz a  $\mathcal{D}$ -parabolicidade de  $\overline{\mathbb{R}}_+^{m+1}$  pois,  $u = 0$  sobre  $\partial\mathbb{R}_+^{m+1}$  logo

$$\|u\|_{L^\infty(\partial\mathbb{R}_+^{m+1})} = 0,$$

então,

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^{m+1})} \leq \|u\|_{L^\infty(\partial\mathbb{R}_+^{m+1})} = 0,$$

consequentemente,  $\|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^{m+1})} = 0$  em  $\mathbb{R}_+^{m+1}$ . Assim, pela propriedade de norma podemos concluir que  $\mathbf{u} = 0$  em  $\mathbb{R}_+^{m+1}$ . Daí, segue o resultado desejado. Por outro lado, não é Neumann parabólica, uma vez que possui Núcleo de Green de Neumann que é dado explicitamente em termos de todos o Núcleos de Green de  $\mathbb{R}^{m+1}$  por

$${}^N G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + G(\mathbf{x}, \mathbf{y}') \text{ com } \mathbf{y}' = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m, -\mathbf{y}_{m+1}).$$

É conhecido de [5] que, se  $M$  é completa com respeito à função de distância intrínseca  $d$ , então as condições geométricas que implicam parabolicidade dependem das propriedades de crescimento de volume do espaço. Para darmos uma declaração mais precisa, é conveniente introduzir algumas notações. Tendo fixado uma origem de referência,  $\mathbf{o} \in \text{int}M$ , definimos  $B_R^M(\mathbf{o}) = \{x \in M; d(x, \mathbf{o}) < R\}$  e  $\partial B_R^M(\mathbf{o}) = \{x \in M; d(x, \mathbf{o}) = R\}$ , a bola e a esfera métricas de  $M$  centradas em  $\mathbf{o}$  e de raio  $R > 0$  tais que esses conjuntos são relativamente compactos. Denotamos também por  $r(x) = d(x, \mathbf{o})$  a função distância de  $\mathbf{o}$ . Claramente,  $r(x)$  é Lipschitz, portanto, diferenciável em  $\text{int}M$ . Portanto, pela fórmula de co-área aplicada a  $r|_{\text{int}M}$  e o fato de que  $\text{vol}B_R^M(\mathbf{o}) = \text{vol}(B_R^M(\mathbf{o}) \cap \text{int}M)$ , temos

$$\frac{d}{dR} \text{vol}B_R^M(\mathbf{o}) = \text{Area}(\partial_0 B_R^M(\mathbf{o})), \tag{2.18}$$

para todo  $R > 0$ . Daí, podemos enunciar o seguinte resultado

**Teorema 13.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana com bordo  $\partial M \neq \emptyset$ . Se, para algum ponto de referência  $\mathbf{o} \in M$ ,*

$$\int_0^\infty \frac{1}{\text{Area}(\partial_0 B_R^M(\mathbf{o}))} = +\infty,$$

*então  $M$  é  $N$ -parabólica.*

*Demonstração.* Veja [5]. □

**Observação 6.** *É uma consequência da fórmula de co-área que a condição de crescimento da área seja implicada pela condição de crescimento do volume*

$$\int_0^\infty \frac{R}{\text{vol}B_R^M(\mathbf{o})} = +\infty.$$

*Este último, por sua vez, segue de uma hipótese de crescimento de volume quadrático*

$$\text{vol}B_R^M(\mathbf{o}) = \mathcal{O}(R^2), \text{ quando } R \rightarrow +\infty \tag{2.19}$$

**Proposição 13.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana completa com bordo não vazio  $\partial M$ , e assume que*

$$\frac{1}{\text{vol}(\partial_0 B_R^M(o))} \notin L^1(+\infty) \quad (2.20)$$

ou

$$\frac{R}{\text{vol}(B_R^M(o))} \notin L^1(+\infty), \quad (2.21)$$

vale para alguma origem  $o \in \text{int}M$ . Então,  $(M, g)$  é  $\mathcal{N}$ -parabólica e, portanto,  $\mathcal{D}$ -parabólica.

*Demonstração.* Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana completa com  $\partial M \neq \emptyset$ . Assim, assumimos que

$$\frac{R}{\text{vol}(B_R^M(o))} \notin L^1(+\infty),$$

logo,

$$\int^{+\infty} \frac{R}{\text{vol}B_R^M(o)} = +\infty.$$

Então, pela Observação 6 podemos concluir que  $M$  é  $\mathcal{N}$ -parabólica.  $\square$

**Observação 7.** *Como consequência da fórmula da co-área, a condição de crescimento de volume (2.21) implica a condição de crescimento de área (2.20).*

Com efeito, pela desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{r}{\text{vol}B_r(o)} dr &= \int_0^t \frac{r}{\text{vol}B_r(o)} \frac{d}{dt} \text{vol}B_t(o)|_{t=r} \left( \frac{d}{dt} \text{vol}B_t(o)|_{t=r} \right)^{-1/2} dr \\ &\leq \left( \int_0^t \left( \frac{r}{\text{vol}B_r(o)} \right)^2 \frac{d}{dt} \text{vol}B_t(o)|_{t=r} dr \right)^{1/2} \left( \int_0^t \frac{d}{dt} \text{vol}B_t(o)|_{t=r} dr \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Agora, utilizando integração por partes obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{r}{\text{vol}B_r(o)} \frac{d}{dt} \text{vol}B_t(o)|_{t=r} dr &= \left( \frac{r}{\text{vol}B_r(o)} \right)^2 \text{vol}B_r(o)|_0^t \\ &\quad - \int_0^t \frac{2r \text{vol}B_r(o) - 2r^2 \frac{d}{dt} \text{vol}B_t(o)|_{t=r}}{(\text{vol}B_r(o))^2} \\ &= \frac{r^2}{\text{vol}B_r(o)}|_0^t - \int_0^t \frac{2r}{\text{vol}B_r(o)} dr \\ &\quad + 2 \int_0^t \left( \frac{r}{\text{vol}B_r(o)} \right)^2 \frac{d}{dt} \text{vol}B_t(o)|_{t=r} dr. \end{aligned}$$

Utilizando novamente integração por partes, teremos que

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{r}{\text{vol}B_r(o)} \frac{d}{dt} \text{vol}B_t(o)|_{t=r} dr &= \frac{r^2}{\text{vol}B_r(o)} \Big|_0^t - 2 \int_0^t \frac{r}{\text{vol}B_r(o)} dr \\ &+ 2 \frac{r^2}{\text{vol}B_r(o)} \Big|_0^t - 4 \int_0^t \frac{r}{\text{vol}B_r(o)} dr \\ &+ 4 \int_0^t \left( \frac{r}{\text{vol}B_r(o)} \right)^2 \frac{d}{dt} \text{vol}B_t(o)|_{t=r} dr. \end{aligned}$$

Organizando a equação acima, teremos que

$$-3 \int_0^t \frac{r}{\text{vol}B_r(o)} \frac{d}{dt} \text{vol}B_t(o)|_{t=r} dr = 3 \frac{r^2}{\text{vol}B_r(o)} \Big|_0^t - 6 \int_0^t \frac{r}{\text{vol}B_r(o)} dr,$$

portanto,

$$\int_0^t \frac{r}{\text{vol}B_r(o)} \frac{d}{dt} \text{vol}B_t(o)|_{t=r} dr = -\frac{r^2}{\text{vol}B_r(o)} \Big|_0^t + 2 \int_0^t \frac{r}{\text{vol}B_r(o)} dr.$$

Como  $-\frac{r^2}{\text{vol}B_r(o)} \Big|_0^t \leq 0$ , teremos que

$$\int_0^t \frac{r}{\text{vol}B_r(o)} \frac{d}{dt} \text{vol}B_t(o)|_{t=r} dr \leq 2 \int_0^t \frac{r}{\text{vol}B_r(o)} dr.$$

Então,

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{r}{\text{vol}B_r(o)} dr &\leq \left( 2 \int_0^t \frac{r}{\text{vol}B_r(o)} dr \right)^{1/2} \left( \int_0^t \frac{d}{dt} \text{vol}B_t(o)|_{t=r} dr \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{2} \left( \int_0^t \frac{r}{\text{vol}B_r(o)} dr \right)^{1/2} (\text{vol}B_r(o))^{1/2}. \end{aligned}$$

Como  $\text{vol}B_r(o) = \int_0^t \text{Area}(\partial B_r(o))$ , teremos

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \int_0^t \frac{r}{\text{vol}B_r(o)} dr \right)^{1/2} \leq \int_0^t \text{Area}(\partial B_r(o)),$$

fazendo  $t \rightarrow +\infty$ , obtemos

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \int_0^{+\infty} \frac{r}{\text{vol}B_r(o)} dr \right)^{1/2} \leq \int_0^{+\infty} \text{Area}(\partial B_r(o)).$$

Por hipótese, podemos concluir que

$$\int_0^{+\infty} \text{Area}(\partial B_r(o)) = +\infty.$$

Segue que a condição de crescimento de volume em (2.20) implica em crescimento da área em (2.21).

Em vista das aplicações, vale a pena observar algumas formas equivalentes importantes de  $\mathcal{D}$ -parabolicidade. Começamos com uma caracterização útil descrita em [18] e que em uma forma germinativa pode ser rastreada até [1] (ver a Observação 8 abaixo).

Se  $\{\Omega_k\}$  é uma exaustão de  $M$  por uma sequência crescente de conjuntos abertos relativamente compactos  $\Omega_k \Subset \Omega_{k+1}$  com  $\partial_0\Omega_k \neq \emptyset$  transversal a  $\partial M$ , denotamos por  $v_k$  a solução do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta v_k = 0 & \text{no } \text{int}M, \\ v_k = 0 & \text{sobre } \partial_1\Omega_k, \\ v_k = 1 & \text{sobre } \partial_0\Omega_k. \end{cases} \quad (2.22)$$

Note que a solução  $v_k$  que pode ser obtida por uma aplicação padrão do procedimento de Perron, satisfaz  $0 \leq v_k \leq 1$  e é em todos os pontos exceto em  $\partial_1\Omega_k \cap \overline{\partial_0\Omega_k}$ . Uma vez que  $v_{k+1}$  é contínua em  $\overline{\Omega_k}$ , pelo Princípio do Máximo Fraco usual, a sequência  $\{v_k\}$  é decrescente.

**Proposição 14.** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana com bordo  $\partial M$  diferente de vazio.*

*As seguintes afirmações são equivalentes:*

i—  $M$  é  $\mathcal{D}$ -parabólica.

ii— Para toda exaustão crescente  $\Omega_k$  com as propriedades descritas acima, a solução  $v_k$  do problema de Dirichlet (2.22) satisfaz  $v_k \rightarrow 0$  sobre  $M$  quando  $k \rightarrow +\infty$ .

iii— Então existe uma exaustão crescente  $\Omega_k$  com as propriedades descritas acima para que  $v_k \rightarrow +\infty$  quando  $k \rightarrow +\infty$ .

*Demonstração.* i)  $\Rightarrow$  ii) Seja  $M$  variedade Riemanniana com  $\partial M \neq \emptyset$ , suponhamos que  $M$  seja  $\mathcal{D}$ -parabólica, e ainda, para toda exaustão crescente  $\{\Omega_k\}$  de conjuntos relativamente compactos  $\Omega_k \Subset \Omega_{k+1}$  com  $\partial_0\Omega_k \neq \emptyset$  transversal ao  $\partial M$  onde  $v_k$  é a solução de problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta v_k = 0 & \text{no } \text{int}\Omega_k, \\ v_k = 0 & \text{sobre } \partial_1\Omega_k, \\ v_k = 1 & \text{sobre } \partial_0\Omega_k. \end{cases}$$

Como  $v_{k+1}$  é contínua em  $\overline{\Omega_k}$  segue do Princípio do Máximo Fraco que  $\{v_k\}$  é uma sequência decrescente, ou seja,

$$0 \leq v_{k+1} \leq v_k \leq 1.$$

Sendo  $\{v_k\}$  é uma sequência monótona e limitada, teremos que a mesma converge monotonicamente para alguma função  $v$  sobre  $\overline{\Omega}_k$ . Assim, pelo Teorema de Dini, podemos dizer que essa sequência converge localmente uniformemente para a função  $v$  limitada em  $M$  que é solução de

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{no } \text{int}M, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial M. \end{cases}$$

Portanto, pela definição de  $\mathcal{D}$ -parabolicidade podemos concluir que  $v = 0$  e, assim,

$$v_k \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow +\infty.$$

ii)  $\Rightarrow$  iii) É notório que essas condições são equivalentes.

iii)  $\Rightarrow$  i) Suponhamos que exista uma exaustão crescente  $\{\Omega_k\}$  de abertos relativamente compactos  $\Omega_k \Subset \Omega_{k+1}$  com  $\partial_0 \Omega_k \neq \emptyset$  transversal ao  $\partial M$  tal que  $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  é uma sequência que satisfaz

$$\begin{cases} \Delta v_k = 0 & \text{no } \text{int}M, \\ v_k = 0 & \text{sobre } \partial_1 \Omega_k, \\ v_k = 1 & \text{sobre } \partial_0 \Omega_k, \end{cases}$$

onde  $v_k \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow +\infty$ . Tomemos  $u \in C^2(\text{int}M) \cap C^0(M)$  limitada que satisfaz

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{no } \text{int}M \\ u = 0 & \text{sobre } \partial M. \end{cases}$$

Ao dimensionar, podemos supor, sem perda de generalidade, que  $|u| \leq 1$  em  $M$ . Como

$$u = 0 \leq v_k \Rightarrow u \leq v_k \text{ sobre } \partial \Omega_k,$$

segue do Princípio do Máximo Fraco que  $u \leq v_k$  em  $\Omega_k$ . Aplicando o limite com  $k \rightarrow +\infty$  obtemos

$$u = \lim_{k \rightarrow +\infty} u \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} v_k = 0 \Rightarrow u \leq 0,$$

e, realizando o mesmo processo para  $-u$ , obtemos  $-u \leq v_k$  sobre  $\partial \Omega_k$  e, portanto,  $-u \leq v_k$  em  $\Omega_k$ . Então, aplicando o limite com  $k \rightarrow +\infty$  teremos que

$$-u = \lim_{k \rightarrow +\infty} -u \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} v_k = 0 \Rightarrow -u \leq 0 \Rightarrow u \geq 0.$$

Portanto,  $u = 0$  em cada  $\Omega_k$  e, conseqüentemente,  $u = 0$  em  $M$ , pois,  $M = \cup_k \Omega_k$ .  $\square$

**Observação 8.** *Observamos que quando  $M$  é um domínio suave de uma variedade suave  $N$  sem bordo, a caracterização dada na Proposição 14 coincide com a noção de não massividade de  $M$  apresentada em [1], ou seja, a propriedade de que  $M$  não suporta uma função subharmônica limitada não negativa de modo que  $v = 0$  sobre  $N \setminus \text{int}M$  e  $\sup_M v > 0$ .*

De fato, [1], Proposição 4.3 mostra que a média harmônica do conjunto complementar de  $M$  é o limite das soluções para o problema (2.22) e é igual a 0 se, e somente se,  $M$  não for maciço. No caso de variedade sem bordo, a existência de um conjunto maciço apropriado acaba sendo equivalente à não parabolicidade da variedade [1], Teorema 6.1.

Como veremos na próxima subseção, Lema 7, toda variedade Riemanniana com bordo não pode ser considerada como um domínio em uma variedade Riemanniana sem fronteira, entretanto está extensão não é parabólica.

**Proposição 15.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana com bordo  $\partial M$  diferente de vazio. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i)  $M$  é  $\mathcal{D}$ -parabólica.

(ii) Para toda função limitada  $u \in C^\infty(\text{int}M) \cap C^0(M)$  tal que  $\Delta u = 0$  em  $\text{int}M$  teremos

$$\sup_M u = \sup_{\partial M} u \quad e \quad \inf_M u = \inf_{\partial M} u,$$

(iii) Para todo domínio  $\Omega$  conexo em  $M$  e toda função limitada  $u \in C^\infty(\text{int}\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$  satisfazendo  $\Delta u = 0$  em  $\text{int}\Omega$  temos que

$$\sup_\Omega u = \sup_{\partial\Omega} u \quad e \quad \inf_\Omega u = \inf_{\partial\Omega} u.$$

*Demonstração.* (iii)  $\Rightarrow$  (ii) Seja  $\Omega$  um domínio conexo em  $M$  e  $u \in C^\infty(\text{int}\Omega) \cap C^0(\Omega)$  uma função limitada que satisfazendo  $\Delta u = 0$  em  $\text{int}\Omega$  tal que

$$\sup_\Omega u = \sup_{\partial\Omega} u \quad e \quad \inf_\Omega u = \inf_{\partial\Omega} u.$$

Pela conexidade de  $\Omega$ , podemos concluir que para qualquer função  $u \in C^\infty(\text{int}M) \cap C^0(M)$  tal que  $\Delta u = 0$  no  $\text{int}M$  vale

$$\sup_M u = \sup_{\partial M} u \quad e \quad \inf_M u = \inf_{\partial M} u.$$

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Agora, suponhamos que para toda função limitada  $u \in C^\infty(\text{int}M) \cap C^0(M)$  tal que  $\Delta u = 0$  no  $\text{int}M$  vale

$$\sup_M u = \sup_{\partial M} u \quad e \quad \inf_M u = \inf_{\partial M} u.$$

Tomemos a função limitada  $u \in C^\infty(\text{int}M) \cap C^0(M)$  onde a mesma satisfaz

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{no } \text{int}M \\ u = 0 & \text{sobre } \partial M, \end{cases}$$

então,

$$\sup_M u = \sup_{\partial M} u = 0 \quad \text{e} \quad \inf_M u = \inf_{\partial M} u = 0.$$

Assim, para todo  $x \in M$  obtemos que

$$0 = \inf_M u \leq u(x) \leq \sup_M u = 0,$$

isto é,

$$u(x) = 0,$$

para todo  $x \in M$ . Segue daí que  $u \equiv 0$  sobre  $M$  e, conseqüentemente,  $M$  é  $\mathcal{D}$ -parabólica.

(i)  $\Rightarrow$  (iii) Suponhamos que  $M$  seja  $\mathcal{D}$ -parabólico e ainda  $\Omega$  é um domínio em  $M$  onde dado  $u \in C^\infty(\text{int}\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$  uma função limitada tal que  $\Delta u = 0$  sobre  $\text{int}\Omega$ . Ao dimensionar, podemos assumir, sem perda de generalidade, que  $|u| \leq 1$  sobre  $M$ . Agora, consideremos a função

$$\bar{u} = u - \sup_{\partial\Omega} u,$$

de forma que

$$u \leq \sup_{\partial\Omega} u \Rightarrow \bar{u} = u - \sup_{\partial\Omega} u \leq 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega$$

e  $\Delta \bar{u} = \Delta u = 0$  em  $\text{int}\Omega$ . Seja  $\{\Omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  uma exaustão crescente de  $M$  e  $v_k$  uma seqüência de funções descritas na Proposição 14. Como

$$\bar{u} \leq 0 \leq v_k,$$

sobre  $\partial(\Omega \cap \Omega_k)$ , segue do Princípio do Máximo Fraco que

$$\bar{u} \leq v_k \quad \text{no } \Omega \cap \Omega_k,$$

e ainda, aplicando o limite com  $k \rightarrow +\infty$  obtemos que

$$\bar{u} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \bar{u} \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} v_k = 0 \quad \text{sobre } \Omega.$$

Então,

$$u - \sup_{\partial\Omega} u = \bar{u} \leq 0 \Rightarrow u \leq \sup_{\partial\Omega} u.$$

Portanto,  $\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u$ . Agora, tomemos a função  $-u \in C^{\infty}(\text{int}M) \cap C^0(\bar{\Omega})$  limitada tal que  $\Delta(-u) = 0$  sobre  $\Omega$ . Ao dimensionar, podemos assumir, sem perda de generalidade, que  $|u| \leq 1$  sobre  $M$ . Assim, consideremos outra função

$$\bar{v} = (-u) - \sup_{\partial\Omega}(-u) = -u + \inf_{\partial\Omega} u \leq 0,$$

de tal modo que

$$u \geq \inf_{\partial\Omega} u \Rightarrow 0 \geq -u + \inf_{\partial\Omega} u = \bar{v},$$

sobre  $\Omega$ . Assim,

$$0 \geq \bar{v} \text{ sobre } \partial\Omega$$

e  $\Delta\bar{v} = \Delta u = 0$  em  $\text{int}M$ . Seja  $\{\Omega_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  uma exaustão de  $M$  e  $v_k$  uma sequência de funções descrita na Proposição 14. Daí,

$$\bar{v} \leq 0 \leq v_k \Rightarrow \bar{v} \leq v_k \text{ sobre } \partial(\Omega \cap \Omega_k).$$

Segue pelo Princípio do Máximo Fraco que

$$\bar{v} \leq v_k \text{ sobre } \Omega \cap \Omega_k$$

e ainda, aplicando o limite com  $k \rightarrow +\infty$  teremos

$$\bar{v} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \bar{v} \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} v_k = 0 \text{ sobre } \Omega.$$

Logo,

$$-u + \inf_{\partial\Omega} u \leq 0 \Rightarrow \inf_{\partial\Omega} u \leq u \text{ sobre } \Omega.$$

Portanto,  $\inf_{\partial\Omega} u = \inf_M u$  e, assim, obtemos o resultado desejado. □

Talvez surpreendentemente, a parabolicidade de Dirichlet implica uma versão mais forte do Princípio do Máximo de Ahlfors, que envolve funções subharmônica e define a diferença final entre a parabolicidade de Neumann e de Dirichlet. O último lida com funções subharmônicas limitadas, cujo supremo é atingindo em  $\partial\Omega = \partial_0\Omega \cup \partial_1\Omega$ , enquanto no primeiro considera as funções subharmônicas limitadas superiormente, que atinge seu supremo em  $\partial_0\Omega$ .

**Proposição 16.** *Seja  $M$  uma variedade com bordo  $\partial M \neq \emptyset$ . Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i)  $M$  é  $\mathcal{D}$ -parabólica.

(ii) Para todo domínio  $\Omega \subset M$  e toda função limitada  $u \in C^\infty(\Omega) \cap W_{loc}^{1,2}(\text{int}\Omega)$  satisfazendo  $\Delta u \geq 0$  em  $\text{int}\Omega$  implica

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u.$$

(iii) Para toda função limitada  $u \in C^0(M) \cap W_{loc}^{1,2}(\text{int}M)$  satisfazendo  $\Delta u \geq 0$  sobre  $\text{int}M$  implica

$$\sup_M u = \sup_{\partial M} u.$$

*Demonstração.* (i)  $\Leftrightarrow$  (iii)

Pela Proposição 15 temos imediatamente que (iii)  $\Rightarrow$  (i). Assim, basta verificar que (i)  $\Rightarrow$  (iii). Suponhamos, por absurdo, que  $u$  é uma função limitada em  $M$  e que satisfaz a condição que  $\Delta u \geq 0$  no  $\text{int}M$  e

$$\sup_M u > \sup_{\partial M} u = \mu.$$

Definimos a função  $\tilde{u} : M \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\tilde{u}(x) = \frac{\max\{u(x) - \mu, 0\}}{\sup_M |u| + |\mu|},$$

e observe que  $0 \leq \tilde{u} \in C^0(M) \cap W_{loc}^{1,2}(\text{int}M) \cap L^\infty(M)$  satisfaz

$$\Delta \tilde{u} = \Delta \left( \frac{\max\{u(x) - \mu, 0\}}{\sup_M |u| + |\mu|} \right) = \frac{1}{\sup_M |u| + |\mu|} \Delta(\max\{u(x) - \mu, 0\}) \geq 0 \text{ sobre } \text{int}M.$$

Como  $u(x) \leq \mu$  sobre  $\partial M$  podemos concluir que

$$\tilde{u} = \frac{\max\{u(x) - \mu, 0\}}{\sup_M |u| + |\mu|} \Rightarrow \Delta \tilde{u} = 0.$$

Por último,  $0 < \sup_M \tilde{u} \leq 1$ . Portanto, de  $\tilde{u}$  é padrão concluir que uma função harmônica  $v \in C^0(M) \cap C^\infty(\text{int}M) \cap L^\infty(M)$  é tal que

$$v \geq \tilde{u} \text{ sobre } M, v = 0 \text{ sobre } \partial M.$$

Isso ocorre por meio do procedimento de exaustão em [1], p.157 ou aplicando  $-\tilde{u}$  à técnica de redução descrita em [32], p.132; Teorema 4.3.2. No último caso, o desaparecimento de

$v$  sobre  $\partial M$  é provado construindo para cada ponto de  $\partial M$  uma barreira global maior que  $\tilde{u}$ . Como,

$$\sup_M v > 0 = \sup_{\partial M} v \Rightarrow \sup_M v > \sup_{\partial M} v,$$

segue que  $v$  não é uma aplicação constante e, conseqüentemente,  $v \neq 0$  em  $M$  o que é um absurdo pois,  $M$  é  $\mathcal{D}$ -parabólica.

(ii)  $\Leftrightarrow$  (iii)

Segue, novamente, da Proposição 15 que (ii)  $\Rightarrow$  (iii). Por outro lado, Suponhamos que (ii) não seja satisfeito. Então, existe um domínio  $\Omega$  de  $M$  e uma função limitada  $u \in C^0(\Omega) \cap W_{loc}^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  satisfazendo  $\Delta u \geq 0$  em  $\text{int}\Omega$  e

$$\sup_\Omega u > \sup_{\partial\Omega} u = \mu.$$

Dado um  $0 < \varepsilon \ll 1$  suficientemente pequeno, podemos construir uma função  $u \in C^0(M) \cap W_{loc}^{1,2}(\text{int}M) \cap L^\infty(M)$  dada por

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} \max\{u(x) - \mu - \varepsilon, 0\} & \text{em } \Omega \\ 0 & \text{em } M \setminus \Omega \end{cases}$$

de tal modo que as seguintes condições são satisfeitas:

$$\Delta u_\varepsilon = \Delta(\max\{u(x) - \mu - \varepsilon, 0\}) \geq 0$$

no  $\text{int}M$ . Como  $u \leq \mu$  sobre  $\partial M$ , logo  $u - \mu - \varepsilon \leq 0$ , segue que

$$u_\varepsilon = \max\{u(x) - \mu - \varepsilon, 0\},$$

sobre  $\partial M$  e, por último,  $0 < \sup_M u_\varepsilon$ . Portanto,

$$\sup_M u_\varepsilon > 0 = \sup_{\partial M} u_\varepsilon.$$

Segue então que (iii) não está sendo satisfeito, e com isso obtemos o resultado desejado.  $\square$

Como conseqüência das proposições acima, temos

**Corolário 4.** *Seja  $M$  uma variedade com bordo e  $\Omega$  um domínio suave em  $M$ . Se  $M$  é  $\mathcal{D}$ -parabólica então  $M \setminus \Omega$  é  $\mathcal{D}$ -parabólica. Se  $\Omega$  é relativamente compacto, e  $M \setminus \Omega$  é  $\mathcal{D}$ -parabólica, então  $M$  é  $\mathcal{D}$ -parabólica.*

*Demonstração.* A primeira afirmação segue imediatamente da Proposição anterior (i)  $\Leftrightarrow$  (iii). Suponhamos agora que  $\Omega$  é um domínio relativamente compacto em  $M$  e  $M \setminus \Omega$  é  $\mathcal{D}$ -parabólica. Assim, seja a função limitada  $u \in C^0(\text{int}M) \cap C^0(M)$  que satisfaz

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{no } \text{int}M \\ u = 0 & \text{sobre } \partial M. \end{cases}$$

Por um lado, como  $M \setminus \Omega$  é  $\mathcal{D}$ -parabólica obtemos que

$$\sup_{M \setminus \Omega} u = \sup_{\partial(M \setminus \Omega)} u = \sup_{\partial_0 \Omega \cup (\partial M \setminus \partial_1 \Omega)} u,$$

como  $\Omega$  é relativamente compacto teremos que

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial \Omega} u$$

tal que, se  $\sup_{\partial_0 \Omega} u = \sup_{M \setminus \Omega} u$  então o máximo de  $u$  é atingido no  $\text{int}M$ . Segue do Princípio do Máximo Forte que  $u$  é constante em  $M$  e, portanto,  $u = 0$  sobre  $\partial M$ . Por outro lado,

$$\sup_{\partial_0 \Omega} u < \sup_{\partial M} u = 0$$

e, portanto,  $u \leq 0$ . Argumentando de maneira similar para  $-u$  obtemos que

$$\begin{aligned} \sup_{\partial_0 \Omega} (-u) &< \sup_{\partial M} (-u), \\ \Rightarrow -\inf_{\partial_0 \Omega} u &< -\inf_{\partial M} u, \\ \Rightarrow \inf_{\partial_0 \Omega} u &> \inf_{\partial M} u, \end{aligned}$$

logo,

$$\inf_{\partial_0 \Omega} u > \inf_{\partial M} u = 0$$

então  $u \geq 0$ . Assim,  $u = 0$  em  $M$  e, conseqüentemente,  $M$  é  $\mathcal{D}$ -parabólica. □

**Observação 9.** No corolário acima, aplicando o Lema 7 abaixo, podemos pensar em  $M$  como um domínio de uma variedade Riemanniana  $N$  sem bordo, e olhando para a  $\mathcal{D}$ -parabolicidade como não massividade de  $M$ , recuperamos [1], Proposição 4.2.

O Corolário 4 por sua vez, implica a invariância da  $\mathcal{D}$ -parabolicidade sob perturbações compactas.

**Corolário 5.** *Seja  $M_1$  e  $M_2$  variedades Riemannianas e suponha que existam conjuntos relativamente compactos  $\Omega_1 \subset M_1$  e  $\Omega_2 \subset M_2$  tal que  $M_1 \setminus \Omega_1$  é isométrico a  $M_2 \setminus \Omega_2$ . Então,  $M_1$  é  $\mathcal{D}$ -parabólica se, e somente se,  $M_2$  o é.*

*Demonstração.* Sejam  $M_1$  e  $M_2$  duas variedades Riemannianas e ainda suponhamos que existam conjuntos relativamente compactos  $\Omega_1 \subset M_1$  e  $\Omega_2 \subset M_2$ . Pelo Corolário 4 teremos que  $M_1 \setminus \Omega_1$  é  $\mathcal{D}$ -parabólica. Como  $M_1 \setminus \Omega_1$  é isométrico a  $M_2 \setminus \Omega_2$ , existe um difeomorfismo  $f : M_1 \setminus \Omega_1 \rightarrow M_2 \setminus \Omega_2$ . Assim, dado a função  $u \in C^\infty(\text{int}(M_1 \setminus \Omega_1)) \cap C^0(M_1 \setminus \Omega_1)$  que satisfaz

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{no } \text{int}(M_1 \setminus \Omega_1) \\ u = 0 & \text{sobre } \partial(M_1 \setminus \Omega_1), \end{cases}$$

obtemos a função composta  $v = u \circ f^{-1} \in C^\infty(\text{int}(M_2 \setminus \Omega_2)) \cap C^0(M_2 \setminus \Omega_2)$  que satisfaz

$$\Delta v = \Delta(u \circ f^{-1}) = 0 \text{ no } \text{int}(M_2 \setminus \Omega_2),$$

e

$$v = (u \circ f^{-1}) = 0 \text{ sobre } \partial(M_2 \setminus \Omega_2).$$

Segue que,

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{no } \text{int}(M_2 \setminus \Omega_2) \\ v = 0 & \text{sobre } \partial(M_2 \setminus \Omega_2). \end{cases}$$

Como  $(M_1 \setminus \Omega_1)$  é  $\mathcal{D}$ -parabólico temos que  $u = 0$  sobre  $M_1 \setminus \Omega_1$  e assim,

$$\begin{aligned} v &= (u \circ f^{-1}) = 0 \text{ em } M_2 \setminus \Omega_2 = f(M_1 \setminus \Omega_1) \\ &\Rightarrow v = 0 \text{ em } f^{-1}(M_2 \setminus \Omega_2) = M_1 \setminus \Omega_1. \end{aligned}$$

Portanto,  $M_2 \setminus \Omega_2$  é  $\mathcal{D}$ -parabólica. Segue do Corolário 4 que  $M_2$  é  $\mathcal{D}$ -parabólica.  $\square$

Como última condição suficiente para a  $\mathcal{D}$ -parabolicidade, temos a seguinte versão do teste de Khas'minskii.

**Lema 6** (Teste de Khas'minskii). *Seja  $M$  uma variedade suave com bordo  $\partial M$ . Se existe um conjunto compacto  $K \subset M$  e uma função  $0 \leq \phi \in C^0(M \setminus \text{int}K) \cap W_{\text{loc}}^{1,2}(\text{int}M \setminus K)$  tal que  $\phi(x) \rightarrow +\infty$  quando  $x$  diverge, e*

$$-\int_{\text{int}M \setminus K} \langle \nabla \phi, \nabla \rho \rangle \leq 0 \quad \forall 0 \leq \rho \in C^0(M \setminus \text{int}K) \cap W_{\text{loc}}^{1,2}(\text{int}M \setminus K),$$

então  $M$  é  $\mathcal{D}$ -parabólica.

*Demonstração.* Sejam  $M$  uma variedade suave e  $u \in C^0(M) \cap C^\infty(\text{int}M)$  uma função limitada que satisfaz

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{no } \text{int}M \\ u = 0 & \text{sobre } \partial M. \end{cases}$$

Assim, vamos verificar que  $u \leq 0$  sobre  $M$  e ainda, por um argumento similar podemos mostrar também que  $u \geq 0$  sobre  $M$ , e concluir que  $u = 0$  em  $M$ . Para isto, suponhamos, por absurdo, que

$$\sup_M u > 0.$$

Como  $u$  não pode atingir seu supremo no  $\text{int}M$  teremos pelo Princípio do Máximo Forte e  $u = 0$  sobre  $\partial M$  que  $u$  não atinge seu supremo em  $M$  e, portanto,

$$\sup_K u < \sup_M u.$$

Daí, afirmamos que, dado  $\gamma > 0$  tal que

$$\sup_K u < \gamma < \sup_M u,$$

e ainda, escolhendo  $x_0 \in M \setminus K$  tal que

$$u(x_0) > \gamma; \quad v = u - \gamma - \varepsilon\phi,$$

onde  $\varepsilon > 0$  é suficientemente pequeno e  $0 \leq \phi \in C^0(M \setminus \text{int}K) \cap W_{\text{loc}}^{1,2}(\text{int}M \setminus K)$  de tal forma que

$$v(x_0) = u(x_0) - \gamma - \varepsilon\phi > 0.$$

Com efeito, tomemos  $\varepsilon = \frac{u(x_0) - \gamma}{2} > 0$  então

$$\begin{aligned} v(x_0) &= u(x_0) - \gamma - \varepsilon\phi(x_0) \\ &= \frac{2u(x_0) - 2\gamma - (\gamma - u(x_0))\phi(x_0)}{2} \\ &= \frac{(u(x_0) - \gamma)(2 - \phi(x_0))}{2} > 0. \end{aligned}$$

Obtemos assim o resultado desejado. Agora, definimos o conjunto

$$\Omega = \{x; \quad v(x) > 0\}.$$

Temos que  $u = 0$  sobre  $\partial M$ , logo  $v = -\gamma - \varepsilon\phi$  como  $0 \leq \phi \in C^0(M \setminus \overset{\circ}{K}) \cap W_{loc}^{1,2}(\text{int}M \setminus K)$  teremos que  $\phi \equiv 0$  em  $K$  então

$$v = -\gamma < 0 \Rightarrow v < 0,$$

e ainda,  $\overline{\Omega} = \{x; v(x) \geq 0\}$ , segue que  $\overline{\Omega} \cap (K \cup \partial M) = \emptyset$ .

Agora, suponhamos que  $\Omega$  não seja limitado. Logo, existe uma sequência de pontos  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  em  $\Omega$  tal que  $x_k \rightarrow +\infty$ , então

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} v(x_k) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} (u(x_k) - \gamma - \varepsilon\phi(x_k)) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} (u(x_k) - \gamma) - \varepsilon \lim_{k \rightarrow +\infty} \phi(x_k). \end{aligned}$$

Como  $u$  é uma função contínua e limitada em  $M$ , teremos que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} u(x_k)$  existe e é finito, logo

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} v(x_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (u(x_k) - \gamma) - \varepsilon \lim_{k \rightarrow +\infty} \phi(x_k) = -\infty.$$

Contudo, isto é um absurdo, pois,  $v(x) > 0$  para todo  $x \in \Omega$ . Assim,  $\Omega$  é um conjunto limitado quando  $x$  diverge. Além disso,  $v = u - \gamma - \varepsilon\phi$ , obtemos

$$v = \Delta(u - \varepsilon\phi) = \Delta u - \varepsilon\Delta\phi.$$

Sendo  $\phi$  uma função subharmônica, pela Identidade de Green temos

$$0 \geq - \int_{\text{int}M \setminus K} \langle \nabla\phi, \nabla\rho \rangle = \int_{\text{int}M \setminus K} \rho\Delta\phi - \int_{\partial(M \setminus K)} \frac{\partial\phi}{\partial\nu}\rho.$$

Como  $\rho \geq 0$ , teremos que  $\Delta\phi \leq 0$ ,  $\frac{\partial\phi}{\partial\nu} \geq 0$  e assim

$$\Delta v = -\varepsilon\Delta\phi \geq 0 \Rightarrow \Delta v = 0 \text{ fracamente em } \Omega$$

e ainda,

$$v = u - \gamma - \varepsilon\phi \leq 0 \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Logo, pelo Teorema da Comparação, teremos que  $v \leq 0$  em  $\Omega$ , o que é um absurdo. Portanto,  $\sup_M u = 0$ . Agora, suponhamos, por absurdo, que

$$-\inf_M u = \sup_M(-u) > 0 \Rightarrow \inf_M u < 0.$$

Como  $-u$  não pode atingir seu supremo no  $\text{int}M$  então pelo Princípio do Máximo Forte e  $u = 0$  sobre  $\partial M$  segue que  $-u$  não pode atingir seu supremo em  $M$  e, portanto,

$$\sup_K(-u) \leq \sup_M(-u) \Rightarrow \inf_K u \geq \inf_M u.$$

Logo existe  $\alpha > 0$  tal que

$$\inf_K u \geq \alpha \geq \inf_M u,$$

e assim, é possível escolher  $x_0 \in M \setminus K$  tal que

$$-u(x_0) > \alpha; \quad v = -u - \alpha - \varepsilon\phi$$

onde  $\varepsilon = \frac{-\alpha - u(x)}{2} > 0$  é suficientemente pequeno e  $0 \leq \phi \in C^0(M \setminus \text{int}K) \cap W_{\text{loc}}^{1,2}(\text{int}M \setminus K)$  de tal modo que

$$\begin{aligned} v(x_0) &= -\alpha - u(x_0) + \frac{(u(x_0) - \alpha)\phi(x_0)}{2} \\ &= \frac{-2\alpha - 2u(x_0) + u(x_0)\phi(x_0) - \alpha\phi(x_0)}{2} \\ &= \frac{(-\alpha - u(x_0))(2 - \phi(x_0))}{2} > 0. \end{aligned}$$

Assim, podemos definir o conjunto

$$\Omega = \{x; v(x) > 0\}.$$

Temos que  $\Omega \neq \emptyset$  pois,  $x_0 \in \Omega$ . Como  $u = 0$  sobre  $\partial M$  temos que

$$v = -\alpha - \varepsilon\phi < 0 \Rightarrow v < 0 \text{ sobre } K \cup \partial M$$

e ainda  $\bar{\Omega} = \{x; v(x) \geq 0\}$ , portanto,  $\bar{\Omega} \cap (K \cup \partial M) = \emptyset$ . Utilizando o mesmo argumento apresentado anteriormente, podemos concluir que  $\Omega$  é limitado quando  $\phi(x) \rightarrow +\infty$  com  $k \rightarrow +\infty$  e ainda, teremos que

$$\begin{cases} \Delta v \geq 0 & \text{fracamente em } \Omega \\ v \leq 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

gerando, assim, um absurdo. Portanto,

$$\sup_M(-u) = 0 \Rightarrow \inf_M u = 0.$$

Assim, podemos concluir que

$$0 = \inf_M u \leq u \leq \sup_M u = 0 \quad \forall x \in M,$$

logo  $u = 0$  para todo  $x \in M$  e, conseqüentemente,  $M$  é parabólica.

□

## Núcleo de Green de Dirichlet

A partir das considerações realizadas da Seção 1.4, vamos mostrar que cada variedade com bordo admite um Núcleo de Green de Dirichlet. No entanto, ao contrário do cenário de Neumann, a existência de um Núcleo de Dirichlet Green não está relacionada com a parabolicidade de Dirichlet da variedade subjacente. Daremos início a essa Seção com o seguinte exemplo,

**Exemplo 2** (Semi-espaço euclidiano). *Revisitando o Exemplo 1. Seja*

$$\overline{\mathbb{R}}_+^{m+1} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}; \mathbf{y} \geq 0\}.$$

*Seja o semi-espaço fechado do  $\mathbb{R}^{m+1}$ ,  $m \geq 1$ . Se  $m = 1$ , já sabemos que a partir de considerações de crescimento de volume, na Proposição 13, que  $\overline{\mathbb{R}}_+^2$  é conforme equivalente ao disco unitário  $\mathbf{D}(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$  via a aplicação conforme que envia  $\partial\mathbb{R}^2$  para  $\partial\mathbf{D}(0, 1) \setminus \{e^{i\pi/2}\}$ . Podemos transplantar para  $\overline{\mathbb{R}}_+^2$  o Núcleo de Green de Dirichlet*

$$u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\log |(x, y)| \text{ de } \overline{\mathbf{D}}(0, 1)$$

*com polos na origem.*

*Se  $m \geq 2$ , a harmonicidade não é mais uma propriedade conforme e o crescimento de volume de  $\overline{\mathbb{R}}_+^{m+1}$  é muito rápido para ser relacionado com a parabolicidade. No entanto, como vimos no Exemplo 1, as conclusões acima podem ser estendidas até mesmo para  $m \geq 2$  por meio de diferentes argumentos. Por outro lado,  $\overline{\mathbb{R}}_+^{m+1}$  possui um Núcleo de Green de Dirichlet com polo  $\mathbf{o} = (x_0, y_0) \in \overline{\mathbb{R}}_+^{m+1}$ . E u é dado explicitamente por*

$${}^{\mathcal{D}}G_{\overline{\mathbb{R}}_+^{m+1}}(\mathbf{p}, \mathbf{o}) = C \left\{ \frac{1}{|\mathbf{p} - \mathbf{c}|^{m-1}} - \frac{1}{|\mathbf{p} - \mathbf{c}'|^{m-1}} \right\}$$

*com  $C = C(m)$  é uma constante dimensional e  $\mathbf{o}' = (x_0, -y_0)$ .*

**Teorema 14.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana com bordo  $\partial M$  não vazio. Então, para todo  $\mathbf{o} \in \text{int}M$ , existe o Núcleo de Green de Dirichlet  ${}^{\mathcal{D}}G(\mathbf{x}, \mathbf{o})$  de  $M$  com polo em  $\mathbf{o}$ .*

A prova que atualmente descrevemos depende do próximo Lema de interesse independente. Ele afirma que toda variedade com bordo tem uma exaustão Riemanniana não parabólica. Na seção seguinte, fornecemos uma prova alternativa baseada na teoria da criticidade.

**Lema 7.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana de dimensão  $m$  com bordo  $\partial M \neq \emptyset$ . Então, existe uma variedade Riemanniana  $(N, h)$  de dimensão  $m$  com  $\partial N = \emptyset$  tal que:*

- a)  $(M, g)$  é isometricamente mergulhada em  $(N, h)$  como um subconjunto fechado.
- b)  $(N, h)$  não é parabólica (como uma variedade sem bordo).

*Demonstração.* Primeiramente, estendemos a variedade Riemanniana  $n$ -dimensional  $(M, g)$  além do seu bordo  $\partial M \neq \emptyset$  para obtermos uma nova variedade Riemanniana  $(M', g')$  (possivelmente incompleta) sem bordo que contém  $(M, g)$  isometricamente. Como  $M'$  pode ser obtido adicionando a  $M$  um colar dentro do *diffeomorphic double* de  $M$ , podemos assim supor que  $M$  é um subconjunto fechado (ver por exemplo [47]). Em seguida, excluimos de  $M' \setminus M$  uma pequena bola compacta  $\bar{B}'$ . Seja  $(N, h)$  a variedade Riemanniana resultante, ou seja,  $N = (M' \setminus M) \setminus \bar{B}'$ . Como  $\text{Cap} \bar{B}' > 0$ , segue de [35] Teoremas 3.5 e 4.4, que  $N$  é não parabólica.  $\square$

Também precisamos de exaustões suaves de uma variedade ambiente que se restrinja às exaustões de Lipschitz de uma dada subvariedade aberta suave.

**Lema 8.** *Seja  $M$  subvariedade aberta com bordo  $\partial M$  suave dentro da variedade suave  $N$  sem bordo. Então, existe uma exaustão de conjuntos relativamente compactos  $\{\Omega_k\} \nearrow N$  tal que, para todo  $k$ ,  $\partial \Omega_k^N$  é uma hipersuperfície suave que intersecta transversalmente o  $\partial M$ .*

*Demonstração.* Fixemos uma exaustão por conjuntos relativamente compactos  $\{\mathcal{U}_k^N\} \nearrow N$  da variedade Riemanniana  $N$ , com bordo suave  $\partial \mathcal{U}_k^N \neq \emptyset$  e definimos  $\mathcal{U}_{-1}^N = \emptyset$ . Usando indução sobre  $k$ , vamos modificar cada hipersuperfície  $\partial \mathcal{U}_{2k}^N$  compacta suave dentro da variedade aberta  $\mathcal{U}_{2k+1}^N \setminus \mathcal{U}_{2k-1}^N$  para obter uma nova hipersuperfície  $\Sigma_{2k}$  tal que:

- c)  $\Sigma_{2k}$  é um bordo de um domínio  $\Omega_{2k}^N$  tal que  $\mathcal{U}_{2k-1}^N \subseteq \Omega_{2k}^N \subseteq \mathcal{U}_{2k+1}^N$ ;
- d)  $\Sigma_{2k}$  intersecta transversalmente  $\partial M$  (possivelmente em um conjunto vazio).

Com efeito, para isso, consideremos a inclusão

$$i_k : \bar{\mathcal{U}}_{2k}^N \hookrightarrow N,$$

e aplicando o Teorema da Homotopia da Transversalidade, ([51], pág 70) obtemos um aplicação homotópico

$$j_k : \bar{\mathcal{U}}_{2k}^N \hookrightarrow N,$$

tal que,  $\Sigma_{2k} = j_k(\partial U_{2k}^N)$  é transversal a  $\partial M$ , ou seja, a propriedade d) é válida. Visto que tanto o "posto máximo" de uma aplicação quanto os "mergulhos" são propriedades estáveis, ou seja, são preservadas por homotopia, ([51], pág. 35) podemos assumir que  $j_k$  e  $j_k|_{\partial U_{2k}^N}$  ainda são mergulhadas. Finalmente, a homotopia pode ser obtida modificando  $i_k$  apenas em uma vizinhança arbitrariamente pequena de  $\partial U_{2k}^N$  (veja [51] pág. 72). Portanto, se definirmos

$$j_k(U_{2k}^N) = \Omega_{2k}^N,$$

obtemos que  $\Sigma_{2k} = j_k(\partial U_{2k}^N)$  é o bordo do domínio  $j_k(U_{2k}^N) = \Omega_{2k}^N$  em  $M$  onde

$$i_k(U_{2k-1}^N) \Subset j_k(U_{2k}^N) \Subset i_k(U_{2k+1}^N),$$

temos que

$$U_{2k-1}^N \Subset \Omega_{2k}^N \Subset U_{2k+1}^N.$$

Assim, obtemos c). □

*Demonstração do Teorema 21.* Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana com bordo  $\partial M$  não vazio daí, pelo Lema 7, existe uma variedade Riemanniana  $(N, h)$  onde com  $\partial N = \emptyset$  tal que,  $(M, g)$  está isometricamente mergulhada em  $(N, h)$  de tal modo que  $(M, g)$  é um subconjunto fechado. Também,  $(N, h)$  não é parabólica com  $G^N$  sendo o Núcleo de Green de  $N$ . Assim, fixemos  $\mathbf{o} \in \text{int}M$  e recordemos que  $G^N(\cdot, \mathbf{o})$  e  ${}^{\mathcal{D}}G^M(\cdot, \mathbf{o})$  são obtidos como limite dos Núcleos de Green de Dirichhlet de uma exaustão relativamente compacta.

De acordo com Lema 8, temos que existe uma exaustão suave de conjuntos relativamente compactos  $\{\Omega_k^N\} \nearrow N$  tal que  $\mathbf{o} \in \Omega_0$  e cada interseção  $\partial\Omega_k^N \cap M$  é transversal. Para cada  $k$ , definimos

$$\Omega_k^M = \Omega_k^N \cap M.$$

Como  $M \subset N$  é fechado, podemos concluir que  $\Omega_k^M$  é relativamente compacto. Além disso, pelas condições de interseção e transversalidade, podemos dizer que  $\partial\Omega_k^M$  é Lipschitz. Portanto,  $\{\Omega_k^M\} \nearrow M$  é uma boa exaustão relativamente compacta de  $M$ . Assim, por comparação obtemos

$$\Omega_k^M \subset \Omega_k^N \subset N,$$

e então,

$${}^{\mathcal{D}}G^{\Omega_k^M}(x, o) \leqslant {}^{\mathcal{D}}G^{\Omega_k^N}(x, o) \leqslant G^N(x, o) \text{ sobre } \Omega_k^M.$$

Agora, aplicando o limite com  $k \rightarrow +\infty$  concluimos que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} {}^{\mathcal{D}}G^{\Omega_k^M}(x, o) \leqslant \lim_{k \rightarrow +\infty} {}^{\mathcal{D}}G^{\Omega_k^N}(x, o) \leqslant G^N(x, o) \text{ sobre } \lim_{k \rightarrow +\infty} \Omega_k^M = M.$$

Então,

$${}^{\mathcal{D}}G^M(x, o) \leqslant {}^{\mathcal{D}}G^N(x, o) \leqslant G^N(x, o) \text{ sobre } M,$$

o que implica que  ${}^{\mathcal{D}}G^M(x, o) \leqslant G^N(x, o)$  sobre  $M$ .

□

Observe que, a prova acima mostra que se  $M$  é uma variedade com bordo situado dentro de uma variedade  $N$ , então

$${}^{\mathcal{D}}G^M \leqslant G^N. \tag{2.23}$$

**Teorema 15.** *Seja  $M$  uma variedade com bordo  $\partial M \neq \emptyset$ . Então para todo  $o \in \text{int}M$  existe um Núcleo de Green positivo mínimo  $G^{\text{int}M}(\cdot, o)$  com polo em  $o$ . Além disso,*

$$G^{\text{int}M}(\cdot, o) = {}^{\mathcal{D}}G^M(\cdot, o).$$

*Demonstração.* Seja  $M$  uma variedade com bordo  $\partial M \neq \emptyset$  e  $\text{int}M$  uma subvariedade de  $M$ . Podemos definir o Núcleo de Green  $G^{\text{int}M}$  do  $\text{int}M$  como sendo o limite  $\lim_{k \rightarrow +\infty} {}^{\mathcal{D}}G^{\Omega'_k}$  onde  $\{\Omega'_k\}$  é uma exaustão crescente do  $\text{int}M$  por abertos relativamente compactos ( $\text{int}M$ ) com bordo suave, assim, teremos que

$${}^{\mathcal{D}}G^{\Omega'_k}(x, o) \leqslant {}^{\mathcal{D}}G^{\Omega_k^M}(x, o),$$

passando o limite

$$G^{\text{int}M}(x, o) \leqslant {}^{\mathcal{D}}G^M(x, o) \text{ sobre } \text{int}M.$$

Como  ${}^{\mathcal{D}}G^M$  é o Núcleo de Green de Dirichlet de  $M$  teremos que

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} G^{\text{int}M}(x, o) \leqslant \lim_{x \rightarrow \bar{x}} {}^{\mathcal{D}}G^M(x, o) = 0 \text{ com } \bar{x} \in \partial M,$$

isto é,

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} G^{\text{int}M}(x, o) = 0 \text{ quando } \bar{x} \in \partial M.$$

Mostrando que  $G^{\text{int}M}$  pode ser estendida para uma função contínua fora da diagonal de  $M$ . Agora, utilizaremos o argumento de comparação usual. Temos que para cada conjunto aberto  $\{\Omega_k^M\}$  na extensão de  $M$ ,  $\Omega_k^M \subset \text{int}M$  fora da diagonal de  $\Omega_k$  então,

$${}^{\mathcal{D}}G^{\Omega_k^M}(x, o) \leq G^{\text{int}M}(x, o) \text{ sobre } \Omega_k^M,$$

assim, quando aplicamos o limite com  $k \rightarrow +\infty$  obtemos que

$${}^{\mathcal{D}}G^M(x, o) \leq G^{\text{int}M}(x, o),$$

sobre  $M$ . Portanto, podemos concluir que

$${}^{\mathcal{D}}G^M(\cdot, o) = G^{\text{int}M}(\cdot, o).$$

□

# Capítulo 3

## Aplicações

### 3.1 Estimativas de altura para hipersuperfície CMC em espaços produto

Apresentamos aqui algumas aplicações desse princípio de máximo global para obter estimativas de altura tanto para H-hipersuperfícies com bordo em espaços de produto quanto para H-gráficos sobre variedades com bordo.

Por uma H-hipersuperfície de  $N \times \mathbb{R}$  queremos dizer que uma hipersuperfície orientada  $\Sigma$  com curvatura média contante H em relação a uma escolha de uma aplicação de Gauss. Um H-gráfico sobre a variedade Riemanniana  $m$ -dimensional  $M$  com bordo  $\partial M \neq \emptyset$  é uma H-hipersuperfície mergulhada dada por

$$\Sigma = \Gamma_{\mathbf{u}}(M),$$

onde  $\Gamma_{\mathbf{u}} : M \rightarrow M \times \mathbb{R}$  é definida, como de costume, por

$$\Gamma_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}))$$

para alguma função suave  $\mathbf{u} : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Às vezes, também permitiremos que  $\mathbf{u} \in C^\infty(\text{int}M) \cap C^0(M)$  e, neste caso, vamos falar de um H-gráfico adequado.

O vetor normal unitário para  $\Sigma$  é definido por

$$\mathcal{N} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla_M \mathbf{u}|^2}} (\nabla_M \mathbf{u}, -1).$$

Com relação a  $\mathcal{N}$ , a curvatura média do gráfico suave  $\Sigma$  é escrito como

$$H = -\frac{1}{m} \text{div}_M \left( \frac{\nabla_M \mathbf{u}}{\sqrt{1 + |\nabla_M \mathbf{u}|^2}} \right). \quad (3.1)$$

Por outro lado, seja  $M_\Sigma$  a variedade original  $M$  dotada da métrica retirada de  $M \times \mathbb{R}$  através de  $\Gamma_u$ , de modo que  $M_\Sigma$  seja isométrico à hipersuperfície  $\Sigma$  de  $M \times \mathbb{R}$  com sua métrica induzida.

Sabe-se que o campo vetorial de curvatura média da imersão isométrica  $\Gamma_u$

$$\mathbf{H} = H(\mathbf{x})\mathcal{N}(\mathbf{x}),$$

satisfaz

$$\Delta_\Sigma \Gamma_u = m\mathbf{H},$$

onde  $\Delta_\Sigma$  denota o Laplaciano em aplicações de variáveis múltiplas. Uma vez que  $\Delta_\Sigma$  é linear em relação à estrutura Riemanniana no contradomínio, obtemos

$$\Delta_\Sigma \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla_M \mathbf{u}|^2}} \operatorname{div}_M \left( \frac{\nabla_M \mathbf{u}}{\sqrt{1 + |\nabla_M \mathbf{u}|^2}} \right).$$

Por (3.1) podemos concluir que

$$\Delta_\Sigma \mathbf{u} = -\frac{m}{\sqrt{1 + |\nabla_m \mathbf{u}|^2}} H(\mathbf{x}).$$

Com esta preparação, começamos observando a seguinte versão do Lema 1 em [40].

**Lema 9.** *Seja  $(N, g)$  uma variedade completa  $m$ -dimensional sem bordo e  $M \subset N$  um domínio fechado com bordo suave  $\partial M \neq \emptyset$ . Considere um gráfico suave  $\Sigma = \Gamma_u(M) \subset N \times \mathbb{R}$  sobre  $M$  com bordo suave*

$$\partial \Sigma \subset N \times \{0\}.$$

Assuma que

$$\sup_M |u| + \sup_M |H| < +\infty. \tag{3.2}$$

Então, existe uma constante  $C = C(m, \sup_M |u|, \sup_M |H|) > 0$  tal que para todo  $\delta > 0$  e  $R > 1$ ,

$$\operatorname{vol} B_R^\Sigma(\bar{\mathbf{p}}) \leq C \left( 1 + \frac{1}{\delta R} \right) \operatorname{vol} \left( M \cap B_{(1+\delta)R}^N(\mathbf{x}) \right),$$

onde  $\bar{\mathbf{x}}$  é um ponto de referência em  $N$  e  $\bar{\mathbf{p}} = (\bar{\mathbf{x}}, u(\bar{\mathbf{x}}))$ . Além disso, a seguinte estimativa

$$\operatorname{vol} B_R^\Sigma(\bar{\mathbf{p}}) \leq C \{ \operatorname{vol} B_R^\Sigma(\bar{\mathbf{x}}) + \operatorname{Area}(\partial B_R^\Sigma(\bar{\mathbf{x}})) \},$$

vale para quase todo  $R > 1$ .

*Demonstração.* Seja  $(N, g)$  uma variedade completa  $m$ -dimensional,  $M \subset N$  um domínio fechado com bordo suave  $\partial M \neq \emptyset$  e ainda, consideremos o gráfico  $\Sigma = \Gamma_u(M) \subset N \times \mathbb{R}$  sobre  $M$ . Assim, notemos que

$$\begin{aligned} d_\Sigma((\bar{x}, u(\bar{x})); (x, u(x))) &\geq d_{N \times \mathbb{R}}((\bar{x}, u(\bar{x})); (x, u(x))) \\ &\geq \max\{d_N(\bar{x}, x); |u(\bar{x}) - u(x)|\}. \end{aligned}$$

Tomando  $\bar{p} = (\bar{x}, u(\bar{x}))$  teremos que

$$B_R^\Sigma(\bar{p}) \subseteq \Sigma \cap B_R^{N \times \mathbb{R}}(\bar{p}).$$

Como

$$\max\{d_N(\bar{x}, x), |u(x) - u(\bar{x})|\} \leq d_\Sigma(\bar{p}, (x, u(x))) < R,$$

temos,

$$d_N(\bar{x}, x) < R \text{ e } |u(x) - u(\bar{x})| < R.$$

Logo,

$$B_R^\Sigma(\bar{p}) \subseteq \Sigma \cap B_R^{N \times \mathbb{R}}(\bar{p}) \subseteq (M \cap B_R^N(\bar{x})) \times (-R + u(\bar{x}), R + u(\bar{x}))$$

Denotando por  $\Pi_N : \Sigma \rightarrow N$  a projeção no fator  $N$ , segue que

$$\text{vol} B_R^\Sigma(\bar{p}) = \int_{\Pi_N(B_R^\Sigma(\bar{p}))} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} d\text{vol}_N.$$

Tomemos,

$$\Omega_R = \{x \in M \cap B_R^N(\bar{x}); |u(x) - u(\bar{x})| < R\} \subseteq M \cap B_R^N(\bar{x}).$$

Afirmamos que

$$\Pi_N(B_R^\Sigma(\bar{p})) \subset \Omega_R.$$

Com efeito, dado  $y \in \Pi_N(B_R^\Sigma(\bar{p}))$ , existe  $(x, u(x)) \in B_R^\Sigma(\bar{p})$  tal que,

$$x = \Pi_N(x, u(x)) = y.$$

Por outro lado, como  $(x, u(x)) \in B_R^\Sigma(\bar{p})$  obtemos que

$$(x, u(x)) \in (M \cap B_R^N(\bar{x})) \times (-R + u(\bar{x}), R + u(\bar{x})),$$

logo,

$$d_N(\bar{x}, x) < R \quad \text{e} \quad |u(\bar{x}) - u(x)| < R,$$

$$d_N(\bar{x}, y) < R \quad \text{e} \quad |u(\bar{x}) - u(y)| < R.$$

Portanto,  $y \in \Omega_R$  e, conseqüentemente,  $\Pi_N(B_R^\Sigma(\bar{p})) \subset \Omega_R$ . Assim,

$$\begin{aligned} \text{vol} B_R^\Sigma(\bar{p}) &\leq \int_{\Omega_R} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} \, d\text{vol}_N \\ &= \int_{\Omega_R} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} \cdot \frac{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \, d\text{vol}_N \\ &= \int_{\Omega_R} \frac{1 + |\nabla u|^2}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \, d\text{vol}_N \\ &= \int_{\Omega_R} \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \, d\text{vol}_N + \int_{\Omega_R} \frac{|\nabla u|^2}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \, d\text{vol}_N \\ &\leq \int_{M \cap B_R^N(\bar{x})} \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \, d\text{vol}_N + \int_{\Omega_R} \frac{|\nabla u|^2}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \, d\text{vol}_N \\ &\leq \text{vol}(M \cap B_R^N(\bar{x})) + \int_{\Omega_R} \frac{|\nabla u|^2}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \, d\text{vol}_N. \end{aligned}$$

Para qualquer  $\delta > 0$ , escolhemos uma função de corte  $\rho$  da seguinte maneira;

$$\rho(x) = \begin{cases} 1 & \text{em} \quad B_R(\bar{x}), \\ \frac{(1 + \delta)R - r(x)}{\delta R} & \text{em} \quad B_{(1+\delta)R}(\bar{x}) \setminus B_R(\bar{x}), \\ 0 & \text{em outro lugar} \quad , \end{cases} \quad (3.3)$$

onde  $r(x) = d_N(x, \bar{x})$ . Assim, teremos que

$$X = \rho u \cdot \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}},$$

é um compo vetorial compactamente suportado que é nulo no  $\partial M$  e  $\partial B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x})$ . Segue do Teorema da Divergência que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial M \cap \partial B_{(1+\delta)R}^N} \langle X, \nu \rangle \, d(\partial M \cap \partial B_{(1+\delta)R}^N) \\ &= \int_{M \cap B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x})} \text{div}(X) \, d\text{vol}_N \\ &= \int_{M \cap (B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x}))} \text{div} \left( \rho u \cdot \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) \, d\text{vol}_N. \end{aligned}$$

Usando (3.1) e (3.3) temos que

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{M \cap B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x})} \operatorname{div} \left( \rho \mathbf{u} \cdot \frac{\nabla \mathbf{u}}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} \right) d\operatorname{vol}_N \\
 &= \int_{M \cap B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x})} \rho \mathbf{u} (-mH) d\operatorname{vol}_N + \int_{M \cap B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x})} \rho \frac{|\nabla \mathbf{u}|^2}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} d\operatorname{vol}_N \\
 &\quad + \int_{M \cap (B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x}) \setminus B_R^N(\bar{x}))} \mathbf{u} \left\langle \nabla \left( \frac{(1+\delta)R - r(x)}{\delta R} \right), \frac{\nabla \mathbf{u}}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} \right\rangle d\operatorname{vol}_N \\
 &= -m \int_{M \cap B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x})} \rho H \mathbf{u} d\operatorname{vol}_N + \int_{M \cap B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x})} \rho \frac{|\nabla \mathbf{u}|^2}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} d\operatorname{vol}_N \\
 &\quad + \int_{M \cap (B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x}) \setminus B_R^N(\bar{x}))} \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} \left\langle -\frac{\nabla r}{\delta R}, \nabla \mathbf{u} \right\rangle d\operatorname{vol}_N.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 0 &= -m \int_{M \cap B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x})} \rho H \mathbf{u} d\operatorname{vol}_N + \int_{M \cap B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x})} \rho \frac{|\nabla \mathbf{u}|^2}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} d\operatorname{vol}_N \\
 &\quad - \frac{1}{\delta R} \int_{M \cap (B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x}) \setminus B_R^N(\bar{x}))} \mathbf{u} \frac{\langle \nabla r, \nabla \mathbf{u} \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} d\operatorname{vol}_N.
 \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
 \int_{M \cap B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x})} \rho \frac{|\nabla \mathbf{u}|^2}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} d\operatorname{vol}_N &= m \int_{M \cap B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x})} \rho H \mathbf{u} d\operatorname{vol}_N \\
 &\quad + \frac{1}{\delta R} \int_{M \cap (B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x}) \setminus B_R^N(\bar{x}))} \mathbf{u} \frac{\langle \nabla r, \nabla \mathbf{u} \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} d\operatorname{vol}_N,
 \end{aligned}$$

consequentemente,

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_R} \frac{|\nabla \mathbf{u}|^2}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} d\operatorname{vol}_N &\leq \int_{M \cap B_R^N(\bar{x})} \frac{|\nabla \mathbf{u}|^2}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} d\operatorname{vol}_N \\
 &\leq \int_{M \cap B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x})} \rho \frac{|\nabla \mathbf{u}|^2}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} d\operatorname{vol}_N \\
 &= m \int_{M \cap B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x})} \rho H \mathbf{u} d\operatorname{vol}_N \\
 &\quad + \frac{1}{\delta R} \int_{M \cap (B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x}) \setminus B_R^N(\bar{x}))} \mathbf{u} \frac{\langle \nabla r, \nabla \mathbf{u} \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} d\operatorname{vol}_N.
 \end{aligned}$$

Por (3.2) teremos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_R} \frac{|\nabla \mathbf{u}|^2}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} \, d\text{vol}_{\mathbb{N}} &\leq m \int_{M \cap B_{(1+\delta)R}^{\mathbb{N}}(\bar{x})} \rho \sup_M |\mathbf{u}| \sup_M |\mathbf{H}| \, d\text{vol}_{\mathbb{N}} \\ &\quad + \frac{1}{\delta R} \int_{M \cap (B_{(1+\delta)R}^{\mathbb{N}}(\bar{x}) \setminus B_R^{\mathbb{N}}(\bar{x}))} \sup_M |\mathbf{u}| \frac{\langle \nabla r, \nabla \mathbf{u} \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} \, d\text{vol}_{\mathbb{N}}. \end{aligned}$$

Como  $0 < \rho < 1$  em  $B_{(1+\delta)R}^{\mathbb{N}}(\bar{x})$  obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_R} \frac{|\nabla \mathbf{u}|^2}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} \, d\text{vol}_{\mathbb{N}} &\leq m \int_{M \cap B_{(1+\delta)R}^{\mathbb{N}}(\bar{x})} \rho \sup_M |\mathbf{u}| \sup_M |\mathbf{H}| \, d\text{vol}_{\mathbb{N}} \\ &\quad + \frac{1}{\delta R} \int_{M \cap (B_{(1+\delta)R}^{\mathbb{N}}(\bar{x}) \setminus B_R^{\mathbb{N}}(\bar{x}))} \sup_M |\mathbf{u}| \frac{\langle \nabla r, \nabla \mathbf{u} \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} \, d\text{vol}_{\mathbb{N}} \\ &\leq m \sup_M |\mathbf{u}| \sup_M |\mathbf{H}| \text{vol}(M \cap B_{(1+\delta)R}^{\mathbb{N}}) \\ &\quad + \frac{\sup_M |\mathbf{u}|}{\delta R} \text{vol} \left( M \cap \left( B_{(1+\delta)R}^{\mathbb{N}}(\bar{x}) \setminus B_R^{\mathbb{N}}(\bar{x}) \right) \right). \end{aligned}$$

Portanto, para todo  $R > 1$  temos que

$$\begin{aligned} \text{vol} B_R^{\Sigma}(\bar{p}) &\leq \int_{\Omega_R} \frac{|\nabla \mathbf{u}|^2}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} \, d\text{vol}_{\mathbb{N}} + \text{vol}(M \cap B_R^{\mathbb{N}}(\bar{x})) \\ &\leq m \sup_M |\mathbf{u}| \sup_M |\mathbf{H}| \text{vol}(M \cap B_{(1+\delta)R}^{\mathbb{N}}) \\ &\quad + \frac{\sup_M |\mathbf{u}|}{\delta R} \text{vol} \left( M \cap \left( B_{(1+\delta)R}^{\mathbb{N}}(\bar{x}) \setminus B_R^{\mathbb{N}}(\bar{x}) \right) \right) \\ &\quad + \text{vol}(M \cap B_R^{\mathbb{N}}(\bar{x})). \end{aligned}$$

Tomando,  $0 < C = \max\{\sup_M |\mathbf{u}|, \sup_M |\mathbf{H}|, m\}$  teremos que

$$\begin{aligned} \text{vol} B_R^{\Sigma}(\bar{p}) &\leq \frac{C}{2} \left\{ \text{vol}(M \cap B_{(1+\delta)R}^{\mathbb{N}}(\bar{x})) + \frac{1}{\delta R} \text{vol} \left( M \cap \left( B_{(1+\delta)R}^{\mathbb{N}}(\bar{x}) \setminus B_R^{\mathbb{N}}(\bar{x}) \right) \right) \right\} \\ &\quad + \frac{C}{2} \text{vol}(M \cap B_R^{\mathbb{N}}(\bar{x})) \end{aligned}$$

Agora, note que

$$M \cap B_R^{\mathbb{N}}(\bar{x}) \subset M \cap B_{(1+\delta)R}^{\mathbb{N}}(\bar{x}) \text{ e } M \cap \left( B_{(1+\delta)R}^{\mathbb{N}}(\bar{x}) \setminus B_R^{\mathbb{N}}(\bar{x}) \right) \subset M \cap B_{(1+\delta)R}^{\mathbb{N}}(\bar{x}),$$

então,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta R} \text{vol} \left( M \cap \left( B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x}) \setminus B_R^N(\bar{x}) \right) \right) &= \frac{1}{\delta R} \int_{M \cap (B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x}) \setminus B_R^N(\bar{x}))} d\text{vol}_N \\ &\leq \frac{1}{\delta R} \int_{M \cap B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x})} d\text{vol}_N \\ &< \frac{2}{\delta R} \text{vol}(M \cap B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x})), \end{aligned}$$

e

$$\text{vol}(M \cap B_R^N(\bar{x})) = \int_{M \cap B_R^N(\bar{x})} d\text{vol}_N \leq \int_{M \cap B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x})} d\text{vol}_N = \text{vol}(M \cap B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x})),$$

logo,

$$\frac{1}{\delta R} \text{vol} \left( M \cap \left( B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x}) \setminus B_R^N(\bar{x}) \right) \right) < \frac{2}{\delta R} \text{vol}(M \cap B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x}))$$

e

$$\text{vol}(M \cap B_R^N(\bar{x})) \leq \text{vol}(M \cap B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x})).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \text{vol} B_R^\Sigma(\bar{p}) &\leq \frac{C}{2} \left\{ \text{vol}(M \cap M_{(1+\delta)R}^N(\bar{x})) + \frac{2}{\delta R} \text{vol}(M \cap B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x})) + \text{vol}(M \cap B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x})) \right\} \\ &= \frac{C}{2} \left[ 2 \left( 1 + \frac{1}{\delta R} \right) \text{vol}(M \cap B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x})) \right] \\ &= C \left( 1 + \frac{1}{\delta R} \right) \text{vol}(M \cap B_{(1+\delta)R}^N), \end{aligned}$$

assim,

$$\text{vol} B_R^\Sigma(\bar{p}) \leq C \left( 1 + \frac{1}{\delta R} \right) \text{vol}(M \cap B_{(1+\delta)R}^N).$$

Em particular, como  $\delta > 0$ , temos que

$$-\delta R < -\delta < 1$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\delta R} > 1,$$

pois  $R > 1$ . Assim,

$$\begin{aligned}
 \text{vol}B_R^\Sigma(\bar{p}) &\leq \frac{C}{2} \left\{ \frac{1}{\delta R} \text{vol} \left( M \cap \left( B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x}) \setminus B_R^N(\bar{x}) \right) \right) + \text{vol}(M \cap B_R^N(\bar{x})) \right\} \\
 &\quad + \frac{C}{2} \text{vol}(M \cap B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x})) \\
 &< C \left\{ \frac{1}{\delta R} \text{vol} \left( M \cap \left( B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x}) \setminus B_R^N(\bar{x}) \right) \right) + \text{vol}(M \cap B_R^N(\bar{x})) \right\} \\
 &\quad + C \text{vol}(M \cap B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x})) \\
 &< C \left\{ \frac{1}{\delta R} \text{vol} \left( M \cap \left( B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x}) \setminus B_R^N(\bar{x}) \right) \right) - \frac{1}{\delta R} \text{vol}(M \cap B_R^N(\bar{x})) \right\} \\
 &\quad + C \text{vol}(M \cap B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x})) \\
 &= \frac{C}{\delta R} \left[ \text{vol} \left( M \cap \left( B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x}) \setminus B_R^N(\bar{x}) \right) \right) - \text{vol}(M \cap B_R^N(\bar{x})) \right] \\
 &\quad + C \text{vol}(M \cap B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x})).
 \end{aligned}$$

Agora, aplicando o limite com  $\delta \rightarrow 0$  obtemos que

$$\begin{aligned}
 \text{vol}B_R^\Sigma(\bar{p}) &\leq C \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[ \text{vol}(M \cap B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x})) \right] \\
 &\quad + C \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\delta R} \left[ \text{vol} \left( M \cap \left( B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x}) \setminus B_R^N(\bar{x}) \right) \right) - \text{vol}(M \cap B_R^N(\bar{x})) \right] \right\} \\
 &= C \text{vol}(M \cap B_R^N(\bar{x})) + C \frac{d}{ds} \text{vol}(M \cap B_s^N(\bar{x}))|_{s=R}.
 \end{aligned}$$

Pela fórmula da co-área obtemos

$$\text{vol}B_R^\Sigma(\bar{p}) \leq C \text{vol}(M \cap B_R^N(\bar{x})) + C \text{Area}(\partial B_R^N) = C \left( \text{vol}(M \cap B_R^N(\bar{x})) + \text{Area}(\partial B_R^N(\bar{x})) \right).$$

Portanto,

$$\text{vol}B_R^\Sigma(\bar{p}) \leq C \left( \text{vol}(M \cap B_R^N(\bar{x})) + \text{Area}(\partial B_R^N(\bar{x})) \right).$$

□

**Observação 10.** *Notemos que, na verdade, as condições um pouco mais fracas*

$$\text{vol}B_N^\Sigma(\bar{p}) \leq C \left( 1 + \frac{1}{\delta} \right) \text{vol}(M \cap B^N(1+\delta)R(\bar{x})) \tag{3.4}$$

e

$$\text{vol}B_R^\Sigma(\bar{p}) \leq C \{ \text{vol}B_R^N(\bar{x}) + R \text{Area}(\partial B_R^n)(\bar{x}) \}. \tag{3.5}$$

são obtidas mantendo a seguinte suposição

$$\sup_M |u_H| < +\infty \quad (3.6)$$

Com efeito, para superar o problema de que  $u$  pode ser ilimitado, seguindo a prova no caso mínimo  $H \equiv 0$ , podemos aplicar o Teorema da Divergencia para o campo vetorial

$$X = \rho u_R \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}, \quad (3.7)$$

onde definimos a função  $u_R : M \cap B_R^N(\bar{x}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$u_R = \begin{cases} u(\bar{x}) - R & \text{se } u(x) \leq u(\bar{x}) - R \\ u(x) & \text{se } |u(x) - u(\bar{x})| < R \\ u(\bar{x}) + R & \text{se } u \geq u(\bar{x}) + R, \end{cases}$$

para todo  $R$  tal que  $u(\bar{x}) - R < 0$ . Observe que por definição

$$\int_{\Omega_R} \frac{|\nabla u|^2}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \, d\text{vol}_N = \int_{M \cap B_R^N(\bar{x})} \frac{|\nabla u_R|^2}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \, d\text{vol}_N.$$

De maneira análoga ao que foi feito no Lema 9 teremos

$$\begin{aligned} \text{vol} B_R^\Sigma(\bar{p}) &\leq \text{vol}(M \cap B_R^N(\bar{x})) + \int_{\Omega_R} \frac{|\nabla u|^2}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \, d\text{vol}_N \\ &= \text{vol}(M \cap B_R^N(\bar{x})) + \int_{M \cap B_R^N(\bar{x})} \frac{|\nabla u|^2}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \, d\text{vol}_N \end{aligned}$$

Por (3.7) obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{M \cap B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x})} \text{div}(X) \, d\text{vol}_N \\ &= \int_{M \cap B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x})} \text{div} \left( \rho u_R \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) \, d\text{vol}_N \\ &= \int_{M \cap B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x})} -m \rho u_R \, d\text{vol}_N + \int_{M \cap B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x})} \rho \frac{|\nabla u_R|^2}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \, d\text{vol}_N \\ &\quad + \int_{M \cap B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x})} \frac{u_R}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \langle \nabla \rho, \nabla u_R \rangle \, d\text{vol}_N, \end{aligned}$$

logo

$$0 = -m \int_{M \cap B_{(1+\delta)\mathbf{R}}^{\mathbf{N}}(\bar{x})} \rho \mathbf{u}_{\mathbf{R}} H \, d\text{vol}_{\mathbf{N}} + \int_{M \cap B_{(1+\delta)\mathbf{R}}^{\mathbf{N}}(\bar{x})} \rho \frac{|\nabla \mathbf{u}_{\mathbf{R}}|^2}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} \, d\text{vol}_{\mathbf{N}}$$

$$- \frac{1}{\delta \mathbf{R}} \int_{M \cap (B_{(1+\delta)\mathbf{R}}^{\mathbf{N}}(\bar{x}) \setminus B_{\mathbf{R}}^{\mathbf{N}}(\bar{x}))} \mathbf{u}_{\mathbf{R}} \frac{\langle \nabla \mathbf{r}, \nabla \mathbf{u}_{\mathbf{R}} \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} \, d\text{vol}_{\mathbf{N}}$$

e, conseqüentemente,

$$\int_{M \cap B_{(1+\delta)\mathbf{R}}^{\mathbf{N}}(\bar{x})} \rho \frac{|\nabla \mathbf{u}_{\mathbf{R}}|^2}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} \, d\text{vol}_{\mathbf{N}} = m \int_{M \cap B_{(1+\delta)\mathbf{R}}^{\mathbf{N}}(\bar{x})} \rho \mathbf{u}_{\mathbf{R}} H \, d\text{vol}_{\mathbf{N}}$$

$$+ \frac{1}{\delta \mathbf{R}} \int_{M \cap (B_{(1+\delta)\mathbf{R}}^{\mathbf{N}}(\bar{x}) \setminus B_{\mathbf{R}}^{\mathbf{N}}(\bar{x}))} \mathbf{u}_{\mathbf{R}} \frac{\langle \nabla \mathbf{r}, \nabla \mathbf{u}_{\mathbf{R}} \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} \, d\text{vol}_{\mathbf{N}}.$$

Segue daí que,

$$\int_{\Omega_{\mathbf{R}}} \frac{|\nabla \mathbf{u}|^2}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} \, d\text{vol}_{\mathbf{N}} = \int_{M \cap B_{\mathbf{R}}^{\mathbf{N}}(\bar{x})} \frac{|\nabla \mathbf{u}_{\mathbf{R}}|^2}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} \, d\text{vol}_{\mathbf{N}}$$

$$\leq \int_{M \cap B_{\mathbf{R}}^{\mathbf{N}}(\bar{x})} \frac{\rho |\nabla \mathbf{u}_{\mathbf{R}}|^2}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} \, d\text{vol}_{\mathbf{N}}$$

$$= m \int_{M \cap B_{(1+\delta)\mathbf{R}}^{\mathbf{N}}(\bar{x})} \rho \mathbf{u}_{\mathbf{R}} H \, d\text{vol}_{\mathbf{N}}$$

$$+ \frac{1}{\delta \mathbf{R}} \int_{M \cap (B_{(1+\delta)\mathbf{R}}^{\mathbf{N}}(\bar{x}) \setminus B_{\mathbf{R}}^{\mathbf{N}}(\bar{x}))} \mathbf{u}_{\mathbf{R}} \frac{\langle \nabla \mathbf{r}, \nabla \mathbf{u}_{\mathbf{R}} \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} \, d\text{vol}_{\mathbf{N}}.$$

Por (3.6) obtemos

$$\int_{\Omega_{\mathbf{R}}} \frac{|\nabla \mathbf{u}|^2}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} \, d\text{vol}_{\mathbf{N}} \leq m \int_{M \cap B_{(1+\delta)\mathbf{R}}^{\mathbf{N}}(\bar{x})} \rho \sup_M |\mathbf{u}_{\mathbf{R}} H| \, d\text{vol}_{\mathbf{N}}$$

$$+ \frac{\sup_M \mathbf{u}_{\mathbf{R}}}{\delta \mathbf{R}} \int_{M \cap (B_{(1+\delta)\mathbf{R}}^{\mathbf{N}}(\bar{x}) \setminus B_{\mathbf{R}}^{\mathbf{N}}(\bar{x}))} \frac{\langle \nabla \mathbf{r}, \nabla \mathbf{u}_{\mathbf{R}} \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} \, d\text{vol}_{\mathbf{N}}.$$

Como  $u_R < R$  teremos que  $\sup_M u_R < R$  e, assim,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_R} \frac{|\nabla u|^2}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \, d\text{vol}_N &\leq m \cdot \sup_M |u_R H| \int_{M \cap B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x})} \rho \, d\text{vol}_N \\ &\quad + \frac{1}{\delta} \int_{M \cap (B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x}) \setminus B_R^N(\bar{x}))} \frac{\langle \nabla r, \nabla u_R \rangle}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \, d\text{vol}_N \\ &= m \cdot \sup_M |u_R H|^2 \, \text{vol}(M \cap B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x})) \\ &\quad + \frac{1}{\delta} \, \text{vol}(M \cap (B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x}) \setminus B_R^N(\bar{x}))). \end{aligned}$$

Tomando  $C = \max\{m, \sup_M |u_R H|\}$  obtemos que

$$\begin{aligned} \text{vol} B_R^\Sigma &\leq \int_{\Omega_R} \frac{|\nabla u|^2}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \, d\text{vol}_N + \text{vol}(M \cap B_R^N(\bar{x})) \\ &\leq m \cdot \sup_M |u_R H|^2 \, \text{vol}(M \cap B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x})) + \frac{1}{\delta} \, \text{vol}(M \cap (B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x}) \setminus B_R^N(\bar{x}))) \\ &\quad + \text{vol}(M \cap B_R^N(\bar{x})) \\ &\leq \frac{C}{2} \left\{ \text{vol}(M \cap B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x})) + \frac{1}{\delta} \, \text{vol}(M \cap (B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x}) \setminus B_R^N(\bar{x}))) \right\} \\ &\quad + \frac{C}{2} [\text{vol}(M \cap B_R^N(\bar{x}))]. \end{aligned}$$

Com o mesmo argumento apresentado no Lema 9 podemos concluir que

$$\text{vol} B_R^\Omega(\bar{p}) \leq C \left( 1 + \frac{1}{\delta} \, \text{vol}(M \cap B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x})) \right),$$

em particular, como  $\delta > 0$  teremos que  $-\delta < 1$ , então  $-\frac{1}{\delta} > -1$ , e assim,

$$\begin{aligned} \text{vol} B_R^\Sigma(\bar{p}) &\leq C \left\{ \text{vol}(M \cap B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x})) + \frac{1}{\delta} \, \text{vol}(M \cap (B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x}) \setminus B_R^N(\bar{x}))) \right\} \\ &\quad + C [\text{vol}(M \cap B_R^N(\bar{x}))] \\ &< C \left\{ \text{vol}(M \cap B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x})) + \frac{1}{\delta} \, \text{vol}(M \cap (B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x}) \setminus B_R^N(\bar{x}))) \right\} \\ &\quad - \frac{C}{\delta} [\text{vol}(M \cap B_R^N(\bar{x}))] \\ &= C [\text{vol}(M \cap B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x}))] \\ &\quad + \frac{C}{\delta} [\text{vol}(M \cap (B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x}) \setminus B_R^N(\bar{x}))) - \text{vol}(M \cap B_R^N(\bar{x}))]. \end{aligned}$$

Aplicando o limite com  $\delta \rightarrow 0$  obtemos que

$$\begin{aligned} \text{vol}B_R^\Sigma(\bar{p}) &\leq C \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[ \text{vol}(\mathcal{M} \cap B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x})) \right] \\ &\quad + C \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{R}{\delta R} \left[ \text{vol}(\mathcal{M} \cap (B_{(1+\delta)R}^N(\bar{x}) \setminus B_R^N(\bar{x}))) - \text{vol}(\mathcal{M} \cap B_R^N(\bar{x})) \right] \\ &\leq C \text{vol}(\mathcal{M} \cap B_R^N(\bar{x})) + CR \frac{d}{ds} (\text{vol}(\mathcal{M} \cap B_s^N(\bar{x}))|_{s=R}). \end{aligned}$$

Pela fórmula da co-área teremos

$$\text{vol}B_R^\Sigma(\bar{p}) \leq C \text{vol}(\mathcal{M} \cap B_R^N(\bar{x})) + CR \text{Area}(\partial B_R^N(\bar{x})) = C (\text{vol}(\mathcal{M} \cap B_R^N(\bar{x})) + R \text{Area}(\partial B_R^N(\bar{x}))).$$

Portanto,

$$\text{vol}B_R^\Sigma(\bar{p}) \leq C (\text{vol}B_R^N(\bar{x}) + R \text{Area}(\partial B_R^N(\bar{x}))).$$

**Observação 11.** *Notemos também que conclusões semelhantes continuam a valer se a condição de que  $\mathbf{u}$  se anula em  $\partial\mathcal{M}$  é substituída pela suposição de que  $\langle \mathcal{N}, \mathcal{N}_0 \rangle$  tem sinal constante em  $\partial\Sigma$ , onde  $\mathcal{N}_0 = (-\mathbf{v}, 0)$  é o vetor normal unitário interior ao  $\partial\mathcal{M} \times \mathbb{R}$  e assumimos que*

$$\sup_M |\mathbf{u}| + \sup_M |\mathbf{H}| < +\infty, \tag{3.8}$$

ou  $\mathbf{H} = 0$ .

Com efeito, temos que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{N}, \mathcal{N}_0 \rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} (\nabla \mathbf{u}, -1), (-\mathbf{v}, 0) \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} \langle (\nabla \mathbf{u}, -1), (-\mathbf{v}, 0) \rangle \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} \langle (\nabla \mathbf{u}, -1), (\mathbf{v}, 0) \rangle. \end{aligned}$$

Logo,

$$\langle \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2} \langle \mathcal{N}, \mathcal{N}_0 \rangle.$$

Como  $\langle \mathcal{N}, \mathcal{N}_0 \rangle$  possui sinal constante podemos concluir que  $\langle \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  também possui sinal constante. Daí, aplicando o Teorema da Divergência ao compo vetorial

$$\mathbf{X} = \rho(\mathbf{u} + \mathbf{c} \cdot \sup_M |\mathbf{u}|) \cdot \frac{\nabla \mathbf{u}}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}}, \tag{3.9}$$

onde  $\mathbf{c} = -\text{sgn}\langle \nabla \mathbf{u}, \boldsymbol{\nu} \rangle^1$ , e observando que, por definição, o termo de bordo é negativo, temos

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_{\partial M \cap \partial B_{(1+\delta)\mathbb{R}}^N} \langle X, \boldsymbol{\nu} \rangle d(\partial M \cap \partial B_{(1+\delta)\mathbb{R}}^N) \\ &= \int_{M \cap B_{(1+\delta)\mathbb{R}}^N} \text{div}(X) d\text{vol}_N. \end{aligned}$$

De (3.9) obtemos que

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_{M \cap B_{(1+\delta)\mathbb{R}}^N(\bar{x})} \rho(\mathbf{u} + \mathbf{c} \cdot \sup_M |\mathbf{u}|) \text{div} \left( \frac{\nabla \mathbf{u}}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} \right) \\ &\quad + \int_{M \cap B_{(1+\delta)\mathbb{R}}^N(\bar{x})} \rho \frac{\langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u} \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} d\text{vol}_N \\ &\quad + \int_{M \cap B_{(1+\delta)\mathbb{R}}^N(\bar{x})} (\mathbf{u} + \mathbf{c} \cdot \sup_M |\mathbf{u}|) \cdot \frac{\langle \nabla \rho, \nabla \mathbf{u} \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} d\text{vol}_M. \end{aligned}$$

Por (3.3) e (3.1) temos

$$\begin{aligned} 0 &\geq -m \int_{M \cap B_{(1+\delta)\mathbb{R}}^N(\bar{x})} \rho(\mathbf{u} + \mathbf{c} \cdot \sup_M |\mathbf{u}|) \cdot H d\text{vol}_N + \int_{M \cap B_{(1+\delta)\mathbb{R}}^N(\bar{x})} \rho \cdot \frac{|\nabla \mathbf{u}|^2}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} d\text{vol}_N \\ &\quad - \frac{1}{\delta R} \int_{M \cap (B_{(1+\delta)\mathbb{R}}^N(\bar{x}) \setminus B_R^N(\bar{x}))} (\mathbf{u} + \mathbf{c} \cdot \sup_M |\mathbf{u}|) \frac{\langle \nabla r, \nabla \mathbf{u} \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} d\text{vol}_N. \end{aligned}$$

Segue daí que

$$\begin{aligned} - \int_{M \cap B_{(1+\delta)\mathbb{R}}^N(\bar{x})} \rho \cdot \frac{|\nabla \mathbf{u}|^2}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} d\text{vol}_N &\geq -m \int_{M \cap B_{(1+\delta)\mathbb{R}}^N(\bar{x})} \rho(\mathbf{u} + \mathbf{c} \cdot \sup_M |\mathbf{u}|) \cdot H d\text{vol}_N \\ &\quad - \frac{1}{\delta R} \int_{M \cap (B_{(1+\delta)\mathbb{R}}^N(\bar{x}) \setminus B_R^N(\bar{x}))} \mathbf{u} \frac{\langle \nabla r, \nabla \mathbf{u} \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} d\text{vol}_N \\ &\quad - \frac{1}{\delta R} \int_{M \cap (B_{(1+\delta)\mathbb{R}}^N(\bar{x}) \setminus B_R^N(\bar{x}))} \mathbf{c} \cdot \sup_M |\mathbf{u}| \frac{\langle \nabla r, \nabla \mathbf{u} \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} d\text{vol}_N \end{aligned}$$

assim,

---

<sup>1</sup>Sinal da função

$$\begin{aligned}
 \int_{M \cap B_{(1+\delta)\mathbf{R}}^N(\bar{x})} \rho \cdot \frac{|\nabla \mathbf{u}|^2}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} \, d\text{vol}_N &\leq m \int_{M \cap B_{(1+\delta)\mathbf{R}}^N(\bar{x})} \rho(\mathbf{u} + \mathbf{c} \cdot \sup_M |\mathbf{u}|) \cdot H \, d\text{vol}_N \\
 &+ \frac{1}{\delta \mathbf{R}} \int_{M \cap (B_{(1+\delta)\mathbf{R}}^N(\bar{x}) \setminus B_{\mathbf{R}}^N(\bar{x}))} \mathbf{u} \frac{\langle \nabla \mathbf{r}, \nabla \mathbf{u} \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} \, d\text{vol}_N. \\
 &+ \frac{1}{\delta \mathbf{R}} \int_{M \cap (B_{(1+\delta)\mathbf{R}}^N(\bar{x}) \setminus B_{\mathbf{R}}^N(\bar{x}))} \mathbf{c} \cdot \sup_M |\mathbf{u}| \frac{\langle \nabla \mathbf{r}, \nabla \mathbf{u} \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} \, d\text{vol}_N.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_{\mathbf{R}}} \frac{|\nabla \mathbf{u}|^2}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} \, d\text{vol}_N &\leq \int_{M \cap B_{(1+\delta)\mathbf{R}}^N(\bar{x})} \frac{|\nabla \mathbf{u}|^2}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} \, d\text{vol}_N \\
 &\leq \int_{M \cap B_{(1+\delta)\mathbf{R}}^N(\bar{x})} \rho \cdot \frac{|\nabla \mathbf{u}|^2}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} \\
 &\leq m \int_{M \cap B_{(1+\delta)\mathbf{R}}^N(\bar{x})} \rho(\mathbf{u} + \mathbf{c} \cdot \sup_M |\mathbf{u}|) \cdot H \, d\text{vol}_N \\
 &+ \frac{1}{\delta \mathbf{R}} \int_{M \cap (B_{(1+\delta)\mathbf{R}}^N(\bar{x}) \setminus B_{\mathbf{R}}^N(\bar{x}))} (\mathbf{u} + \mathbf{c} \cdot \sup_M |\mathbf{u}|) \frac{\langle \nabla \mathbf{r}, \nabla \mathbf{u} \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} \, d\text{vol}_N.
 \end{aligned}$$

Agora, utilizando (3.8) obtemos que

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_{\mathbf{R}}} \frac{|\nabla \mathbf{u}|^2}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} \, d\text{vol}_N &\leq m \int_{M \cap B_{(1+\delta)\mathbf{R}}^N(\bar{x})} \rho(\sup_M |\mathbf{u}| + \mathbf{c} \cdot \sup_M |\mathbf{u}|) \cdot \sup_M |H| \, d\text{vol}_N \\
 &+ \frac{1}{\delta \mathbf{R}} \int_{M \cap (B_{(1+\delta)\mathbf{R}}^N(\bar{x}) \setminus B_{\mathbf{R}}^N(\bar{x}))} (\sup_M |\mathbf{u}| + \mathbf{c} \cdot \sup_M |\mathbf{u}|) \frac{\langle \nabla \mathbf{r}, \nabla \mathbf{u} \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} \, d\text{vol}_N \\
 &= m(1 + \mathbf{c}) \sup_M |\mathbf{u}| \cdot \sup_M |H| \int_{M \cap B_{(1+\delta)\mathbf{R}}^N(\bar{x})} \rho \, d\text{vol}_N \\
 &+ \frac{1}{\delta \mathbf{R}} (1 + \mathbf{c}) \cdot \sup_M |\mathbf{u}| \int_{M \cap (B_{(1+\delta)\mathbf{R}}^N(\bar{x}) \setminus B_{\mathbf{R}}^N(\bar{x}))} \frac{\langle \nabla \mathbf{r}, \nabla \mathbf{u} \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} \, d\text{vol}_N.
 \end{aligned}$$

Daí, tomando  $D = \max\{m, \sup_M |\mathbf{u}|, \sup_M |\mathbf{H}|\}$  teremos que

$$\begin{aligned} \text{vol}B_R^\Sigma &\leq \int_{\Omega_R} \frac{|\nabla \mathbf{u}|^2}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} \, d\text{vol}_N + \text{vol}(M \cap B_{(1+\delta)R}^N(\bar{\mathbf{x}})) \\ &\leq m(1 + c) \sup_M |\mathbf{u}| \cdot \sup_M |\mathbf{H}| \text{vol}(M \cap B_{(1+\delta)R}^N(\bar{\mathbf{x}})) \\ &\quad + \frac{1}{\delta R} (1 + c) \cdot \sup_M |\mathbf{u}| \text{vol}(M \cap (B_{(1+\delta)R}^N(\bar{\mathbf{x}}) \setminus B_R^N(\bar{\mathbf{x}}))) + \text{vol}(M \cap B_{(1+\delta)R}^N(\bar{\mathbf{x}})) \\ &\leq D \left[ \text{vol}(M \cap B_{(1+\delta)R}^N(\bar{\mathbf{x}})) + \frac{1}{\delta R} \text{vol}(M \cap (B_{(1+\delta)R}^N(\bar{\mathbf{x}}) \setminus B_R^N(\bar{\mathbf{x}}))) \right] \\ &\quad + D \text{vol}(M \cap B_{(1+\delta)R}^N(\bar{\mathbf{x}})). \end{aligned}$$

Realizando o mesmo processo do Lema 9, obtemos o resultado desejado. Agora, utilizando a hipótese de  $\mathbf{H} = 0$  no lugar de (3.8) juntamente com o argumento sobre o bordo de  $M$  apresentado anteriormente e as ferramentas constadas em (3.1) aplicadas no campo vetorial

$$\mathbf{X} = \rho[\mathbf{u}_R + c(|\mathbf{u}_R| + R)] \cdot \frac{\nabla \mathbf{u}}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}},$$

obtemos (3.4) e (3.5).

**Lema 10.** *Seja  $(N, g)$  uma variedade Riemanniana completa  $m$ -dimensional (sem bordo) satisfazendo  $\text{Sec}_N \geq -K$  e seja  $M \subset N$  um domínio fechado com bordo suave  $\partial M \neq \emptyset$ . Suponhamos que são dados um gráfico limitado  $\Sigma_\varepsilon = \Gamma_{\mathbf{u}}(\mathcal{U}(M))$  com curvatura média limitada  $\mathbf{H}$ , parametrizado sobre uma  $\varepsilon$ -vizinhança  $\mathcal{U}(M)$  de  $M$ . Seja  $\Sigma = \Gamma_{\mathbf{u}}(M)$ . Então, existe uma constante  $C = C(m, \varepsilon, H, K, \sup_M |\mathbf{u}|, \sup_M |\mathbf{H}|) > 0$  tal que*

$$\text{vol}B_R^\Sigma(\bar{\mathbf{p}}) \leq C \text{vol}(M \cap B_R^N(\bar{\mathbf{x}})),$$

para todo  $R > 0$ , onde  $\bar{\mathbf{x}} \in \text{int}M$  é um ponto referencial e  $\bar{\mathbf{p}} = (\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}))$ .

*Demonstração.* Seja  $(N, g)$  uma variedade Riemanniana completa  $m$ -dimensional que satisfaz

$$\text{Sec}_N \geq -K,$$

e ainda, seja  $M \subset N$  um domínio fechado com bordo suave  $\partial M \neq \emptyset$ . Denotemos, como no Lema 9,  $\Pi_N : \Sigma \rightarrow N$  a projeção no fator  $N$ . Assim teremos que

$$\text{vol}B_R^\Sigma(\bar{\mathbf{p}}) = \int_{\Pi_N(B_R^\Sigma(\bar{\mathbf{p}}))} \sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2} \, d\text{vol}_N.$$

Como  $\Pi_{\mathbb{N}}(B_{\mathbb{R}}^{\Sigma}(\bar{p})) \subset \Omega_{\mathbb{R}} \subset M \cap B_{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}(\bar{x})$  podemos dizer que

$$\text{vol} B_{\mathbb{R}}^{\Sigma}(\bar{p}) = \int_{\Pi_{\mathbb{N}}(B_{\mathbb{R}}^{\Sigma}(\bar{p}))} \sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2} \, d\text{vol}_{\mathbb{N}} \leq \int_{M \cap B_{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}(\bar{p})} \sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2} \, d\text{vol}_{\mathbb{N}}.$$

Logo, devemos verificar que  $|\nabla \mathbf{u}|$  é uniformemente limitado em  $M$ . Para isto, notemos que  $\mathbf{u} : \mathcal{U}_{\varepsilon}(M) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função limitada pois,  $\mathcal{U}(M)$  é limitado e  $\mathbf{u}$  é suave em todo  $M$  e que define um gráfico

$$\Gamma_{\mathbf{u}}(\mathcal{U}(M)) = \Sigma_{\varepsilon},$$

limitado, de curvatura média  $H$  também limitada. Portanto, aplicando o Teorema 1.1 de [28] as funções

$$w(x) = \sup_M \mathbf{u} - \mathbf{u}(x) \geq 0 \quad \text{ou} \quad w(x) = \mathbf{u}(x) - \inf_M \mathbf{u} \geq 0,$$

obtemos, para todo  $\bar{x} \in B_{\varepsilon/2}^{\mathbb{N}}(x) \subset \mathcal{U}_{\varepsilon}(M)$  com  $x \in M$

$$\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2} \leq 32 \cdot \max \left\{ 1, \left( \frac{w(x)}{\varepsilon/2} \right)^2 \right\} \cdot e^{16w(x)} \cdot e^{16C \left( \frac{w(x)}{\varepsilon/2} \right)^2},$$

onde  $C = C(m, H, K, \sup_M |w|, \sup_M |H|)$ . Como  $\mathbf{u}(x)$  é limitada em  $\mathcal{U}_{\varepsilon}(M)$  teremos que

$$\mathbf{u}(x) \leq \varepsilon/2,$$

segue daí que

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2} &\leq 32 \max \left\{ 1, \left[ \left( \sup_M \mathbf{u} - \varepsilon/2 \right) 2/\varepsilon \right] \right\} e^{16C(\sup_M \mathbf{u} - \varepsilon/2)} e^{16C((\sup_M \mathbf{u} - \varepsilon/2)2/\varepsilon)^2} \\ &= C'(m, \varepsilon, H, K, \sup_M |\mathbf{u}|, \sup_M |H|). \end{aligned}$$

Logo,

$$|\nabla \mathbf{u}| \leq C'(m, \varepsilon, H, K, \sup_M |\mathbf{u}|, \sup_M |H|)$$

e,  $|\nabla \mathbf{u}|$  é uniformemente limitado em cada bola  $B_{\varepsilon/2}^{\mathbb{N}}(x) \subset \mathcal{U}_{\varepsilon}(M)$  com  $x \in M$ . Assim,

$$\begin{aligned} \text{vol} B_{\mathbb{R}}^{\Sigma}(\bar{p}) &\leq \int_{M \cap B_{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}(\bar{p})} \sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2} \, d\text{vol}_{\mathbb{N}} \\ &\leq \int_{M \cap B_{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}(\bar{p})} C' \, d\text{vol}_{\mathbb{N}} \\ &= C' \text{vol}(M \cap B_{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}(\bar{p})). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\text{vol} B_{\mathbb{R}}^{\Sigma}(\bar{p}) \leq C' \text{vol}(M \cap B_{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}(\bar{p})).$$

□

Lembramos que um gráfico próprio em  $\mathbf{N} \times \mathbb{R}$  é uma superfície gráfica (topológica) com bordo  $\Sigma = \{(x, u(x)); x \in \Omega\}$  parametrizado por uma função  $u \in C^\infty(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  sobre um domínio  $\Omega \subset \mathbf{N}$ . O bordo (topológico) de  $\Sigma$  é claramente dado por  $\partial\Sigma = \{(x, u(x)); x \in \partial\Omega\}$ , enquanto seu interior  $\text{int}\Sigma = \{(x, u(x)); x \in \Omega\}$  é uma hipersuperfície suave de  $\mathbf{N} \times \mathbb{R}$ . Digamos que o gráfico próprio  $\Sigma$  é um H-gráfico (ou um gráfico com curvatura média constante H) se a hipersuperfície suave  $\text{int}\Sigma$  tem curvatura média constante H em relação a uma aplicação de Gauss escolhida.

O Lema 10 permite provar o seguinte teorema,

**Teorema 16** (Estimativas de altura para gráficos). *Seja  $(\mathbf{N}, g)$  uma variedade Riemanniana completa sem bordo satisfazendo  $\text{Ric}_{\mathbf{N}} \geq 0$  e*

$$\text{vol}\mathbb{B}_{\mathbf{R}}^{\mathbf{N}}(\mathbf{o}) = \mathcal{O}(\mathbf{R}^2) \quad \text{com } \mathbf{R} \rightarrow +\infty. \quad (3.10)$$

*Seja  $M \subset \mathbf{N}$  um domínio fechado com bordo suave  $\partial M \neq \emptyset$ . Suponha que é dado um gráfico próprio  $\Sigma$  sobre  $M$  com  $\partial\Sigma \subset \mathbf{N} \times \{0\}$  e curvatura média constante  $H > 0$  em relação a aplicação de Gauss. Se  $\Sigma$  estiver contido em uma slice vertical, então*

$$\Sigma \subseteq \mathbf{N} \times \left[0, \frac{1}{H}\right].$$

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, podemos assumir que

$$\Sigma = \{(x, u(x)); x \in M\},$$

é uma hipersuperfície gráfica com bordo suave. Na verdade se apenas tivermos  $u \in C^\infty(\text{int}M) \cap C^0(M)$ , podemos sempre considerar o  $H(> 0)$ -gráfico

$$\Sigma = \{(x, u_\varepsilon(x)); x \in M_\varepsilon\},$$

onde de acordo com o Teorema de Sard,  $0 < \varepsilon < 1$  é um valor regular de  $u|_{\text{int}M}$  e obtemos

$$M_\varepsilon = \{x \in M, u(x) \geq \varepsilon\} \text{ e } u_\varepsilon(x) = u(x) - \varepsilon.$$

Então, usando a Estimativa da altura no caso suave, temos

$$\begin{aligned} u(x) - \varepsilon = u_\varepsilon(x) &\leq \frac{1}{H} \\ \Rightarrow u(x) &\leq \frac{1}{H} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  podemos concluir que  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \leq \frac{1}{H}$ . De maneira análoga, tem-se

$$0 \leq \mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \varepsilon.$$

Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  teremos que  $0 \leq \mathbf{u}(\mathbf{x})$ . Portanto,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in \left[0, \frac{1}{H}\right]$  e, conseqüentemente, e, conseqüentemente,

$$\Sigma \subset \mathbb{N} \times \left[0, \frac{1}{H}\right].$$

Assim, podemos olhar  $\Sigma$  como uma hipersuperfície gráfica com bordo suave  $\partial\Sigma$ . Observemos, inicialmente, que  $\Sigma$  é completa. Com efeito, temos que  $\mathbf{u} : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua, logo existe um homeomorfismo  $f : \mathbb{M} \rightarrow \Sigma$ . Como  $\mathbb{M}$  é fechado em  $\mathbb{N}$ , teremos que  $\Sigma$  é fechado em  $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ , assim,  $\Sigma$  é um subconjunto fechado e limitado de uma variedade completa  $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ . Logo, pelo teorema de Hopf e Rinow podemos concluir que  $\Sigma$  é compacta e, portanto, completa. Assim, da seguinte relação

$$\overline{B}_R^\Sigma(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}})) \subset \Sigma(B_R^{\mathbb{N}}(\bar{\mathbf{x}}) \times [\mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}) - R, \mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}) + R]), \quad (3.11)$$

segue que as bolas fechadas intrínsecas em  $\Sigma$  são compactas. Além disso, pelo Lema 10 teremos que

$$\text{vol}B_R^\Sigma(\bar{\mathbf{p}}) \leq C \text{vol}B_R^{\mathbb{N}}(\bar{\mathbf{x}}).$$

Contudo, de (3.10) temos que

$$\text{vol}B_R^{\mathbb{N}}(\bar{\mathbf{x}}) \leq C'R^2,$$

logo,

$$\text{vol}B_R^\Sigma(\bar{\mathbf{p}}) \leq C \text{vol}B_R^{\mathbb{N}}(\bar{\mathbf{x}}) \leq CC'R^2 = C''R^2.$$

Segue daí que

$$\text{vol}B_R^\Sigma(\bar{\mathbf{p}}) = \mathcal{O}(R^2) \text{ com } R \rightarrow +\infty.$$

Portanto,  $\Sigma$  possui crescimento de volume quadrático. Em particular, pelo Teorema 13, se denotarmos por  $M_\Sigma$  o domínio original  $\mathbb{M}$  dotado da métrica induzida por  $\Sigma$ , pela aplicação  $\Gamma_{\mathbf{u}} : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M} \times \mathbb{R}$ , concluímos que  $M_\Sigma$  é parabólica. Agora, consideremos uma função real  $w \in C^\infty(M_\Sigma)$ , onde  $w : M_\Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  dada é por

$$w(\mathbf{x}) = H \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})|^2}}.$$

Como  $\text{Ric}_N \geq 0$  obtemos pelo Teorema 3.1 de [30] que  $w$  é uma função subharmônica. Além disso,  $w \leq 0$  sobre  $\partial M_\Sigma$

$$\begin{aligned} \sup_{M_\Sigma} w &= \sup_{M_\Sigma} u \left( H \cdot u(x) - \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u(x)|^2}} \right) \\ &\leq \sup_{M_\Sigma} H \cdot u(x) \\ &= H \cdot \sup_{M_\Sigma} u(x) < +\infty. \end{aligned}$$

Logo,  $(M_\Sigma, g_{M_\Sigma})$  é uma variedade parabólica com bordo  $\partial M_\Sigma \neq \emptyset$  tal que  $w \in C^\infty(M_\Sigma) \cap W_{\text{loc}}^{1,2}(M_\Sigma)$  satisfaz

$$\begin{cases} \Delta w \geq 0 & \text{no } \text{int}M_\Sigma \\ \sup_{M_\Sigma} w < +\infty, \end{cases}$$

assim, pelo Teorema 12, podemos concluir que

$$\sup_{M_\Sigma} w = \sup_{\partial M_\Sigma} w \leq 0,$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} H \sup_{M_\Sigma} w - 1 &\leq \sup_{M_\Sigma} w \leq 0 \\ \Rightarrow \sup_{M_\Sigma} w &\leq \frac{1}{H}, \end{aligned}$$

e conseqüentemente,

$$u(x) \leq \sup_{M_\Sigma} w \leq \frac{1}{H}.$$

Daí, para concluir a demonstração, observemos que

$$\begin{aligned} \Delta_\Sigma u &= -\frac{m}{\sqrt{1 + |\Delta_{M_\Sigma} u|^2}} \cdot H(x) \leq 0 \\ \Delta_\Sigma u &\leq 0, \end{aligned}$$

logo,  $u \in C^\infty(M_\Sigma)$  é uma função superharmônica. Além disso, como  $\partial \Sigma \subset N \times \{0\}$  e  $\Sigma$  está contida em alguma slice, teremos que  $u$  é limitada e  $u = 0$  em  $\partial M_\Sigma$ . Segue do Teorema 12 que  $\inf_{M_\Sigma} u = \inf_{\partial M_\Sigma} u = 0$ . Portanto,

$$u(x) \geq \inf_{M_\Sigma} u = 0 \quad \forall x \in M_\Sigma,$$

e assim,

$$\mathbf{u} \in \left[0, \frac{1}{H}\right] \text{ para todo } \mathbf{x} \in M_\Sigma.$$

Podemos concluir que

$$\Sigma \subset \mathbb{N} \times \left[0, \frac{1}{H}\right].$$

□

**Observação 12.** *Sabe-se que no caso com bordo, a suposição de crescimento de volume acima implica que o H-gráfico verticalmente limitado deve ser necessariamente mínimo. Na verdade, de acordo com o Teorema 5.1 em [34], a mesma conclusão é válida se*

$$\text{vol}B_R \leq C_1 e^{C_2 R^2} \text{ para algumas constantes } C_1, C_2 > 0. \quad (3.12)$$

Com efeito, tomemos  $\partial M = \emptyset$  assim, pelo Princípio do Máximo/Mínimo de Omari-Yau, temos que existe uma sequência de pontos  $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  em  $M$  tais que:

i)  $\mathbf{u}(\mathbf{x}_k) < \inf_M \mathbf{u} + \frac{1}{k},$

ii)  $\Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}_k) > -\frac{1}{k}.$  Daí,

$$-\text{div} \left( \frac{\nabla_M \mathbf{u}(\mathbf{x}_k)}{\sqrt{1 + |\nabla_M \mathbf{u}|^2(\mathbf{x}_k)}} \right) < \frac{1}{k},$$

e conseqüentemente,

$$mH = -\text{div} \left( \frac{\nabla_M \mathbf{u}(\mathbf{x}_k)}{\sqrt{1 + |\nabla_M \mathbf{u}|^2(\mathbf{x}_k)}} \right) < \frac{1}{k}. \quad (3.13)$$

De maneira análoga, temos:

iii)  $\sup_M -\frac{1}{k} \mathbf{u} < \mathbf{u}(\mathbf{x}_k)$

iv)  $\Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}_k) < \frac{1}{k}.$  Daí,

$$-\text{div} \left( \frac{\nabla_M \mathbf{u}(\mathbf{x}_k)}{\sqrt{1 + |\nabla_M \mathbf{u}|^2(\mathbf{x}_k)}} \right) > -\frac{1}{k}$$

e, portanto,

$$mH = -\text{div} \left( \frac{\nabla_M \mathbf{u}(\mathbf{x}_k)}{\sqrt{1 + |\nabla_M \mathbf{u}|^2(\mathbf{x}_k)}} \right) > -\frac{1}{k}. \quad (3.14)$$

Logo, obtemos que por (3.14) e (3.13)

$$-\frac{1}{k} < mH < \frac{1}{k},$$

aplicando o limite  $k \rightarrow +\infty$  obtemos  $H = 0$ . O mesmo resultado é obtido se (3.12) for satisfeita, pois pelo Teorema 5.1 de [34] teremos que o Princípio do Máximo/Mínimo de Omori-Yau é válido. Daí realizando o mesmo processo como acima concluímos que  $H = 0$ .

**Observação 13.** *O Teorema 16, vai na direção de generalizar o Teorema 6 em [7] de A. Ros e H. Rosenberg para domínios não homogêneos.*

Com efeito, assumamos que  $m = 2, 3, 4$  e  $\text{Sec}_N \geq 0$ . Daí para cada  $|H| > 0$ , uma  $H$ -gráfica  $\Sigma = \Gamma_u(M)$  em  $N \times \mathbb{R}$  sobre o domínio  $M \subseteq N$  é necessariamente limitado [31, 3, 8]. Além disso, no caso  $m = 2$ , segue do Teorema da Comparação Bishop-Gromov que se  $\text{Sec}_N \geq 0$  então  $N$  possui crescimento de volume quadrático, ou seja,

$$\text{vol}B_{\mathbb{R}}^N \leq w_2 R^2,$$

onde  $w_2$  denota a área da bola unitária em  $\mathbb{R}^2$ .

À luz das considerações acima, obtemos o colorário abaixo

**Corolário 6.** *Seja  $(N, g)$  uma variedade Riemanniana bidimensional completa sem bordo de curvatura de Gauss não negativa. Seja  $M \subset N$  um domínio fechado com bordo suave  $\partial M \neq \emptyset$ . Suponha que temos um gráfico adequado  $\Sigma$  sobre  $N$  com bordo  $\partial\Sigma \subset N \times \{0\}$  e curvatura média constante  $H > 0$  em relação a aplicação de Gauss. Então,*

$$\Sigma \subset N \times \left[0, \frac{1}{H}\right].$$

*Demonstração.* Seja  $(N, g)$  uma variedade Riemanniana bidimensional completa com curvatura gaussiana não negativa. Como em uma variedade bidimensional a curvatura gaussiana coincide com a curvatura seccional, teremos que

$$\text{Sec}_N \geq 0.$$

Assim, pela Observação 13 temos que  $N$  possui crescimento de volume quadrático, isto é,

$$\text{vol}B_{\mathbb{R}}^N(\bar{x}) \leq w_2 R^2,$$

onde  $w_2$  denota a área da bola unitária em  $\mathbb{R}^2$ . Logo, pelo Teorema 16, podemos concluir que

$$\Sigma \subset N \times \left[0, \frac{1}{H}\right].$$

□

Terminaremos essa seção considerando o caso geral de uma hipersuperfície CMC orientada no produto Riemanniano  $\mathbf{N} \times \mathbb{R}$ . Usando os argumentos anteriores, e usando cálculos mais complexos como em [30], obtemos a prova do teorema abaixo.

**Teorema 17** (Estimativa de altura). *Seja  $(\mathbf{N}, g)$  uma variedade Riemanniana sem bordo e curvatura de Ricci satisfazendo  $\text{Ric}_{\mathbf{N}} \geq 0$ . Seja  $\Sigma$  uma hipersuperfície compacta e orientada em  $\mathbf{N} \times \mathbb{R}$  com bordo  $\partial\Sigma \neq \emptyset$  e satisfazendo os seguintes:*

i–  $\Sigma$  tem crescimento de volume intrínseco quadrático

$$\text{vol}B_{\mathbb{R}}^{\Sigma}(\mathbf{o}) = \mathcal{O}(\mathbb{R}^2), \quad \text{com } \mathbb{R} \rightarrow +\infty; \quad (3.15)$$

ii–  $\partial\Sigma$  está contida na slice  $\mathbf{N} \times \{0\}$ ;

iii– Para uma escolha adequada da aplicação de Gauss  $\mathcal{N}$  de  $\Sigma$ , a hipersuperfície  $\Sigma$  tem curvatura média constante  $H > 0$  e o ângulo  $\theta$  entre  $\mathcal{N}$  e o campo vetorial vertical  $\frac{\partial}{\partial t}$  está contido no intervalo  $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ , ou seja,

$$\cos \theta = \left\langle \mathcal{N}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \leq 0.$$

Se  $\Sigma$  está contido no bloco  $\mathbf{N} \times [-T, T]$  para algum  $T > 0$ , então

$$\Sigma \subset \mathbf{N} \times \left[0, \frac{1}{H}\right].$$

*Demonstração.* Seja  $(\mathbf{N}, g)$  uma variedade Riemanniana sem bordo e com curvatura de Ricci satisfazendo

$$\text{Ric}_{\mathbf{N}} \geq 0.$$

Daí, definimos a aplicação  $f : \Sigma^m \rightarrow \mathbf{N}^m \times \mathbb{R}$ , que é uma  $H$ -hipersuperfície completa orientável isometricamente imersa em  $\mathbf{N} \times \mathbb{R}$  e ainda, denotemos por  $h : \Sigma^m \rightarrow \mathbb{R}$  a projeção da imagem de  $\Sigma$  em  $\mathbb{R}$  sobre a imersão, ou seja,  $h = \pi_{\mathbb{R}} \circ f$ , onde  $\pi_{\mathbb{R}} : \mathbf{N}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é a projeção da imagem do  $\mathbf{N}^m \times \mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ . Observe que,

$$\begin{aligned} \Delta_{\Sigma} h &= mH \\ &= mH(x)\mathcal{N} \\ &= m \left\langle H(x)\mathcal{N}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \\ &= mH(x) \cdot \left\langle \mathcal{N}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle, \end{aligned}$$

logo,

$$\Delta_{\Sigma} h = m \cos \theta H \leq 0$$

onde  $\theta \in \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$  representa o ângulo formado entre a aplicação de Gauss  $\mathcal{N}$  e o campo vetorial  $\frac{\partial}{\partial t}$ . Como  $\Sigma$  tem crescimento de volume quadrático por (3.15) podemos concluir, pelo Teorema 13 que  $\Sigma$  é parabólica e ainda,  $h$  é uma função superharmônica limitada inferiormente. Assim, podemos aplicar o Princípio do Máximo de Alfors e, dessa forma, obter

$$\inf_{\Sigma} h = \inf_{\partial \Sigma} h.$$

Contudo, temos que  $\partial \Sigma \subset \mathbb{N} \times \{0\}$  e, conseqüentemente,  $h = 0$  sobre  $\partial \Sigma$  logo

$$\inf_{\Sigma} h = \inf_{\partial \Sigma} h = 0$$

Por outro lado, teremos que  $h(x) \geq \inf_{\Sigma} h$  para todo  $x \in \Sigma$ , logo,  $h(x) \geq \inf_{\Sigma} h = 0$ , para todo  $x \in \Sigma$ . Agora, consideremos a função  $\phi : \Sigma^m \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\phi(x) = Hh(x) + \cos \theta.$$

Assim, pelo Teorema 3.1 em [30] podemos concluir que  $\phi$  é subharmônica. Como  $h$ ,  $\cos \theta$  são limitados inferiormente e  $H$  é constante teremos que

$$\begin{aligned} |\phi(x)| &= |Hh(x) + \cos \theta| \\ &\leq H|h(x)| + |\cos \theta| \\ &\leq C, \end{aligned}$$

logo,  $\phi$  é limitada. Dessa forma,  $\phi$  satisfaz às hipóteses do Princípio do Máximo de Ahlfors e assim,

$$\phi(x) \leq \sup_{\Sigma} \phi \leq 0.$$

Por outro lado, temos  $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ . Logo,

$$\begin{aligned} \phi(x) &= Hh(x) + \cos \theta \\ &\geq Hh(x) - 1, \end{aligned}$$

portanto,

$$Hh(x) - 1 \leq \phi \leq \sup_{\Sigma} \phi = \sup_{\partial\Sigma} \phi \leq 0.$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned} Hh(x) - 1 &\leq 0 \\ \Rightarrow h(x) &\leq \frac{1}{H}. \end{aligned}$$

Assim, podemos concluir que  $0 \leq h \leq \frac{1}{H}$ . Segue, então, que

$$\Sigma \subset \mathbb{N} \times \left[0, \frac{1}{H}\right].$$

□

**Observação 14.** *Observamos explicitamente que (3.15) pode ser substituído pela condição extrínseca mais forte*

$$\text{vol}(B_{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}(\mathbf{o}) \cap \Sigma) = \mathcal{O}(\mathbb{R}^2), \quad \text{quando } \mathbb{R} \rightarrow +\infty,$$

que, por sua vez, decorre da relação

$$B_{\mathbb{R}}^{\Sigma}(\mathbf{o}) \subseteq B_{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}(\mathbf{o}) \cap \Sigma.$$

Tendo em vista a Proposição 12, será exposto a demonstração do seguinte teorema

**Teorema 18.** *Qualquer gráfico mínimo completo  $\Sigma$  em  $\mathbb{R}^3$  definido em um domínio do plano que possui valores de contorno ou tal que  $\langle \mathcal{N}, \mathcal{N}_0 \rangle$  tem sinal constante ao longo de  $\partial\Sigma$  é  $\mathcal{D}$ -parabólico.*

*Demonstração.* Seja  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  um gráfico mínimo completo definido em um domínio do plano que valora de contorno constantes, ou melhor, tal que  $\langle \mathcal{N}, \mathcal{N}_0 \rangle$  tem sinal constante ao longo do  $\partial\Sigma$ . Assim, pela Observação 11, podemos concluir que  $\Sigma$  tem a seguinte propriedade de crescimento de volume

$$\text{vol}B_{\mathbb{R}}^{\Sigma}(\mathbf{o}) \leq CR^2,$$

onde  $B_{\mathbb{R}}^{\Sigma}(\mathbf{o})$  denota a bola geodésica de raio  $\mathbb{R} > 0$  centrada em um ponto  $\mathbf{o} \in \text{int}\Sigma$ . Segue daí,

$$\frac{1}{CR} \leq \frac{\mathbb{R}}{\text{vol}B_{\mathbb{R}}^{\Sigma}(\mathbf{o})},$$

integrando no intervalo  $[1, L]$ , obtemos

$$\int_1^L \frac{1}{CR} \leq \int_1^L \frac{R}{\text{vol}B_R^\Sigma(\mathbf{o})},$$

dessa forma,

$$\frac{1}{C} \ln |R|_1^L \leq \int_1^L \frac{R}{\text{vol}B_R^\Sigma(\mathbf{o})},$$

aplicando o limte com  $L \rightarrow +\infty$ , temos

$$\int_1^L \frac{R}{\text{vol}B_R^\Sigma(\mathbf{o})} = +\infty.$$

Segue da Observação 7 que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\text{Area}(\partial_0 B_R^\Sigma(\mathbf{o}))} = +\infty.$$

Portanto pelo Teorema 13,  $\Sigma$  é  $\mathcal{N}$ -parabólica e da Proposição 12 podemos concluir que  $\Sigma$  é  $\mathcal{D}$ -parabólica.  $\square$

## 3.2 O Teorema de Stokes $L^2$ e resultados do tipo slice

Nesta seção, apresentamos o Teorema da Divergência Global e expomos uma demonstração desse resultado, também fornecemos uma forma um pouco mais fraca desse resultado, que envolve desigualdades diferenciais do tipo  $\text{div}X \geq f$  (veja a Proposição 17 abaixo). Este último, junto com o Princípio do Máximo de Ahlfors, é então aplicado para provar resultados do tipo slice para hipersuperfícies em espaços produto e para gráficos (veja os Teoremas 20 e 22). Na verdade, a versão gráfica deste resultado também requer um teorema do tipo Liouville para o operador de curvatura média em variedades com bordo, sob condições de crescimento de volume. Isso é modelado em [34].

### Teorema de divergência global

Lembremos que, para um dado campo vetorial suave e compactamente suportado  $X$  em uma variedade Riemanniana orientada  $(M, g)$  com bordo  $\partial M \neq \emptyset$ , o Teorema de Stokes afirma que

$$\int_M \text{div}X = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle, \tag{3.16}$$

onde  $\nu$  é o vetor normal exterior suave sobre  $\partial M$ . Em particular, isso vale para todo campo vetorial suave se  $M$  for compacta. O resultado ainda é válido se diminuirmos as condições de regularidade em  $X$  para interpretar sua divergência no sentido de distribuições. Para ser mais preciso, apresentamos a seguinte definição:

**Definição 16.** *Seja  $X$  um campo vetorial em  $M$  satisfazendo  $|X| \in L^1_{\text{loc}}(M)$  e  $\langle X, \nu \rangle \in L^1_{\text{loc}}(\partial M)$ . A divergência distributiva de  $X$  é definida por*

$$(\text{div}X, \varphi) = - \int_M \langle X, \nabla \varphi \rangle + \int_{\partial M} \varphi \langle X, \nu \rangle, \quad (3.17)$$

para toda  $\varphi \in C_c^\infty(M)$ .

**Observação 15.** *A definição acima se estende trivialmente para  $\varphi \in \text{Lip}_c(M)$ .*

**Observação 16.** *Lembremos que, dado um domínio  $D \subseteq M$ ,  $W_0^{1,2}(D)$  denota o fecho de  $C_c^\infty(D)$  em  $W^{1,2}(D)$ . Então, por argumentos de densidade, a definição anterior se estende a toda  $\varphi \in C_c^0(M) \cap W_0^{1,2}(M)$ .*

Com efeito, suponhamos que  $\varphi \in C_c^0(M) \cap W_0^{1,2}(M)$  logo  $\varphi \in W_0^{1,2}(M)$ . Segue que, existe uma sequência  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_c^0(M)$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = \varphi \text{ em } W^{1,2}(\text{int}M).$$

Como  $\varphi$  possui suporte compacto em  $M$ , podemos assumir que existe um domínio  $\Omega \subset\subset M$  tal que  $\text{supp}\varphi_n \subset \Omega$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Além disso, como  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente para a função  $\varphi$ , obtemos uma subsequência tal que a mesma converge pontualmente para  $\varphi$ . Assim, tomemos  $c = \max_M |\varphi| + 1$  e definimos a aplicação  $\psi_n = f \circ \varphi_n : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\psi_n = f \circ \varphi_n \in \text{Lip}_c(M)$  onde

$$f(t) = \begin{cases} c, & t \geq c \\ t, & -c \leq t \leq c \\ -c, & t \leq -c. \end{cases}$$

Notemos que  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência equilimitada pois,

$$|\psi_n(x)| = |f \circ \varphi_n(x)| = |f(\varphi_n(x))| = \begin{cases} c, & \varphi_n(x) \geq c \\ |\varphi_n(x)|, & -c \leq \varphi_n(x) \leq c \\ |-c|, & \varphi_n(x) \leq -c. \end{cases}$$

Como o suporte das  $\varphi_n$ 's é compacto, teremos que a mesma é limitada, conseqüentemente, as  $\psi_n$ 's serão limitadas e  $\text{supp}\psi_n \subset \mathcal{U}$ . Além disso,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (f \circ \varphi_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} f(\varphi_n) \\ &= f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n\right) \\ &= f(\varphi) \\ &= \varphi \end{aligned}$$

no  $W^{1,2}(\text{int}M)$ , e ainda,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \psi_n(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (f \circ \varphi_n)(x) \\ &= f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi_n(x)\right) \\ &= f(\varphi_n(x_0)) \\ &= \varphi_n(x_0), \end{aligned}$$

no  $\text{int}M$  logo,  $\psi_n$  converge pontualmente em  $M$ . Portanto,

$$(\text{div}X, \psi_n) = - \int_M \langle X, \nabla \psi_n \rangle + \int_{\partial M} \psi_n \langle X, \nu \rangle.$$

Aplicando o limite com  $n \rightarrow +\infty$  temos

$$(\text{div}X, \varphi) = - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_M \langle X, \nabla \psi_n \rangle \right) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_{\partial M} \psi_n \langle X, \nu \rangle \right),$$

e pelo Teorema da Convergencia Dominada podemos concluir que

$$\begin{aligned} (\text{div}X, \varphi) &= - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_M \langle X, \nabla \psi_n \rangle \right) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_{\partial M} \psi_n \langle X, \nu \rangle \right) \\ &= - \int_M \langle X, \nabla \varphi \rangle + \int_{\partial M} \varphi \langle X, \nu \rangle. \end{aligned}$$

Assim, obtemos o resultado desejado.

Agora, suponha também que  $\text{div}X \in L^1_{\text{loc}}(M)$ . Então podemos escrever

$$(\text{div}X, \varphi) = \int_M \varphi \text{div}X$$

e, portanto,

$$\int_{\mathbf{M}} \varphi \operatorname{div} \mathbf{X} = (\operatorname{div} \mathbf{X}, \varphi) = - \int_{\mathbf{M}} \langle \mathbf{X}, \nabla \varphi \rangle + \int_{\partial \mathbf{M}} \varphi \langle \mathbf{X}, \mathbf{v} \rangle.$$

Em particular, se  $\mathbf{X}$  for compactamente suportado, escolhendo  $\varphi = 1$  no suporte de  $\mathbf{X}$ , recuperamos a fórmula de Stokes (3.16) para um dado campo vetorial compactamente suportado  $\mathbf{X}$  que satisfaz  $\mathbf{X} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{M})$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{X} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{M})$  e  $\langle \mathbf{X}, \mathbf{v} \rangle \in L^1_{\text{loc}}(\partial \mathbf{M})$ .

**Observação 17.** *Notemos que, por um raciocínio semelhante, se o campo vetorial  $|\mathbf{X}| \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{M})$  tem uma divergência fraca  $\operatorname{div} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{M})$  e  $\langle \mathbf{X}, \mathbf{v} \rangle \in L^1_{\text{loc}}(\partial \mathbf{M})$ , então, para cada  $\rho \in C_c^0(\mathbf{M}) \cap W_0^{1,2}(\mathbf{M})$  temos que  $\operatorname{div}(\rho \mathbf{X}) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{M})$ . Além disso, como no caso suave,*

$$\int_{\mathbf{M}} \operatorname{div}(\rho \mathbf{X}) = \int_{\mathbf{M}} \langle \nabla \rho, \mathbf{X} \rangle + \int_{\mathbf{M}} \rho \operatorname{div} \mathbf{X}.$$

Com efeito, para isto tomemos  $\varphi \in C_c^\infty$  e usando (3.17) na forma da Observação 16 obtemos

$$(\operatorname{div}(\rho \mathbf{X}), \varphi) = - \int_{\mathbf{M}} \langle \rho \mathbf{X}, \nabla \varphi \rangle + c \int_{\partial \mathbf{M}} \rho \varphi \langle \mathbf{X}, \mathbf{v} \rangle.$$

Por outro lado, temos que

$$\nabla(\rho \varphi) = \nabla \rho \cdot \varphi + \rho \cdot \nabla \varphi$$

$$\nabla(\rho \varphi) - \nabla \rho \cdot \varphi = \rho \cdot \nabla \varphi,$$

logo,

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} \rho \mathbf{X}, \varphi) &= - \int_{\mathbf{M}} \langle \mathbf{X}, \nabla(\rho \varphi) - \nabla \rho \cdot \varphi \rangle + \int_{\partial \mathbf{M}} \rho \varphi \langle \mathbf{X}, \mathbf{v} \rangle \\ &= - \int_{\mathbf{M}} \langle \mathbf{X}, \nabla(\rho \varphi) \rangle + \int_{\mathbf{M}} \varphi \langle \mathbf{X}, \nabla \rho \rangle + \int_{\partial \mathbf{M}} \rho \varphi \langle \mathbf{X}, \mathbf{v} \rangle \\ &= (\operatorname{div} \mathbf{X}, \rho \varphi) + \int_{\mathbf{M}} \varphi \langle \mathbf{X}, \nabla \rho \rangle \\ &= \int_{\mathbf{M}} \rho \varphi \operatorname{div} \mathbf{X} + \int_{\mathbf{M}} \varphi \langle \mathbf{X}, \nabla \rho \rangle \\ &= \int_{\mathbf{M}} \rho \varphi \operatorname{div} \mathbf{X} + \varphi \langle \mathbf{X}, \nabla \rho \rangle \\ &= \int_{\mathbf{M}} (\rho \operatorname{div} \mathbf{X} + \langle \mathbf{X}, \nabla \rho \rangle) \varphi \\ &= (\rho \operatorname{div} \mathbf{X} + \langle \mathbf{X}, \nabla \rho \rangle, \varphi). \end{aligned}$$

Portanto, podemos concluir que

$$\operatorname{div}(\rho X) = \rho \operatorname{div} X + \langle X, \nabla \rho \rangle \in L^1_{\text{loc}}(M)$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \int_M \operatorname{div}(\rho X) &= \int_M \rho \operatorname{div} X + \langle X, \nabla \rho \rangle \\ &= \int_M \rho \operatorname{div} X + \int_M \langle X, \nabla \rho \rangle. \end{aligned}$$

Assim, obtemos o resultado desejado.

Se  $M$  não for compacta, ainda podemos provar uma versão global do Teorema de Stokes para campos de vetores com comportamento assintóticos prescritos no infinito. Este é o conteúdo do teorema abaixo

**Teorema 19** (Teorema  $L^2$ -divergente). *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana com bordo  $\partial M \neq \emptyset$  e  $\nu$  o normal unitário apontando para fora. Então  $M$  é parabólica se, e somente se, o seguinte for válido. Seja  $X$  um campo vetorial em  $M$  satisfazendo as seguintes condições:*

- (a)  $|X| \in L^2(M)_{\text{loc}}(M)$  (3.18)
- (b)  $\langle X, \nu \rangle \in L^1(\partial M)$
- (c)  $\operatorname{div} X \in L^1_{\text{loc}}(M)$ ,  $(\operatorname{div} X)_- \in L^1(M)$ .

Então,

$$\int_M \operatorname{div} X = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle.$$

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Suponhamos que  $M$  é uma variedade Riemanniana parabólica. Pelo Teorema 10, item (ii), existe uma exaustão  $\{\Omega_K\}$  de  $M$  e uma seqüência crescente de funções  $\varphi_n \in C_c(M) \cap W^{1,2}(\text{int}M)$  suportadas em  $\Omega_n$  tal que  $0 \leq \varphi_n \leq 1$  e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = 1 \text{ localmente uniformemente em } M \text{ e } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_M |\nabla \varphi_n|^2 = 0.$$

Considerando, qualquer compo vetorial  $X$  que satisfaz (3.18), teremos que  $\varphi_n X$  é compactamente suportado e aplicando o Teorema da Divergencia usual fraca,

$$\int_M \operatorname{div}(\varphi_n X) = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\varphi_n X) = \int_{\partial_1 \Omega_n} \varphi_n \langle X, \nu \rangle \tag{3.19}$$

Por outro lado, temos que

$$\int_{\mathcal{M}} \operatorname{div}(\varphi_n \mathbf{X}) = \int_{\mathcal{M}} \langle \nabla \varphi_n, \mathbf{X} \rangle + \int_{\mathcal{M}} \varphi_n \operatorname{div} \mathbf{X}$$

e então,

$$\int_{\mathcal{M}} \varphi_n \langle \mathbf{X}, \mathbf{v} \rangle = \int_{\mathcal{M}} \operatorname{div}(\varphi_n \mathbf{X}) = \int_{\mathcal{M}} \langle \nabla \varphi_n, \mathbf{X} \rangle + \int_{\mathcal{M}} \varphi_n \operatorname{div} \mathbf{X}$$

Agora, pela Desigualdade de Hölder temos

$$\left| \int_{\mathcal{M}} \langle \nabla \varphi_n, \mathbf{X} \rangle \right| \leq \left( \int_{\mathcal{M}} |\nabla \varphi_n|^2 \right)^{1/2} + \left( \int_{\mathcal{M}} |\mathbf{X}|^2 \right)^{1/2},$$

e aplicando o limite com  $n \rightarrow +\infty$  temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_{\mathcal{M}} \langle \nabla \varphi_n, \mathbf{X} \rangle \right| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \left( \int_{\mathcal{M}} |\nabla \varphi_n|^2 \right)^{1/2} + \left( \int_{\mathcal{M}} |\mathbf{X}|^2 \right)^{1/2} \right] = 0.$$

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathcal{M}} \langle \nabla \varphi_n, \mathbf{X} \rangle = 0. \quad (3.20)$$

Além disso, tomando a parte positiva e a parte negativa do  $\operatorname{div} \mathbf{X}$  obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} \varphi_n \operatorname{div} \mathbf{X} &= \int_{\mathcal{M}} \varphi_n [(\operatorname{div} \mathbf{X})_+ - (\operatorname{div} \mathbf{X})_-] \\ &= \int_{\mathcal{M}} \varphi_n (\operatorname{div} \mathbf{X})_+ - \int_{\mathcal{M}} \varphi_n (\operatorname{div} \mathbf{X})_-. \end{aligned}$$

Também,

$$\int_{\mathcal{M}} \varphi_n (\operatorname{div} \mathbf{X})_+ \leq \int_{\mathcal{M}} \varphi_n (\operatorname{div} \mathbf{X})_- + \int_{\partial_1 \Omega_n} \varphi_n \langle \mathbf{X}, \mathbf{v} \rangle - \int_{\mathcal{M}} \langle \nabla \varphi_n, \mathbf{X} \rangle.$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Monótona e Dominada e o fato de que  $0 \leq \varphi_n \leq 1$  podemos concluir que

$$\int_{\mathcal{M}} (\operatorname{div} \mathbf{X})_+ \leq \int_{\mathcal{M}} (\operatorname{div} \mathbf{X})_- + \int_{\partial_1 \mathcal{M}} \langle \mathbf{X}, \mathbf{v} \rangle - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathcal{M}} \langle \nabla \varphi_n, \mathbf{X} \rangle.$$

Usando (3.20) tem-se

$$\int_{\mathcal{M}} (\operatorname{div} \mathbf{X})_+ \leq \int_{\mathcal{M}} (\operatorname{div} \mathbf{X})_- + \int_{\partial_1 \mathcal{M}} \langle \mathbf{X}, \mathbf{v} \rangle < +\infty.$$

Portanto,  $\operatorname{div}X \in L^1(M)$  e por (3.19) concluimos

$$\int_M \operatorname{div}X = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle.$$

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos que  $M$  não seja parabólica, de forma que  $M$  possui Núcleo de Green positivo finito e suave, onde a aplicação  $G(x, y)$  pode ser vista como a menor solução fundamental positiva da equação de Laplace em  $M$ , [5] e [4]. Assim, vamos mostrar que o Teorema Global de Stokes falha. Com efeito, para isto, tomemos uma exaustão  $\{\Omega_n\}$  de  $M$  por domínios suaves e relativamente compactos. Logo, o Núcleo de Green de Neumann  $G(x, y)$  de  $M$  é obtido como limite das funções de Green  $G_n(x, y)$  de  $\Omega_n$  que satisfazem

$$\begin{cases} \Delta G_n(x, y) = -\delta_x(y) & \text{no } \operatorname{int}M \\ \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial_1 \Omega_n = \Omega_n \cap \partial M \\ G_n = 0 & \text{sobre } \partial_0 \Omega_n = \partial \Omega_n \cap \operatorname{int}M. \end{cases} \quad (3.21)$$

Seja  $0 \leq f \neq 0$  uma função suave compactamente suportada no  $\operatorname{int}M$ . Assim, para cada  $n$  definimos a aplicação

$$u_n(x) = \int_{\Omega_n} G(x, y)f(y)dy.$$

Então, cada  $u_n$  é solução clássica positiva do problema de contorno

$$\begin{cases} \Delta u_n = -f & \text{no } \operatorname{int}\Omega_n \\ \frac{\partial u_n}{\partial \nu} & \text{sobre } \partial_1 \Omega_n \\ u_n = 0 & \text{sobre } \partial_0 \Omega_n. \end{cases}$$

Esse fato segue de (3.21). Assim, pelo Princípio do Máximo e o Lema do ponto limite, a sequência é monotonicamente crescente em um domínio relativamente compacto. Logo, pelo Teorema de Dini podemos concluir que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente para a função  $u$  que é solução de

$$\begin{cases} \Delta u = -f & \text{no } \operatorname{int}M \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial M. \end{cases}$$

Segue do Lema de Fatou que

$$\int_M |\nabla u|^2 = \int_M \liminf_{n \rightarrow +\infty} |\nabla u_n| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_M |\nabla u_n|^2 = \int_M |\nabla u_n|^2$$

isto é,

$$\int_{\mathcal{M}} |\nabla \mathbf{u}|^2 \leq \int_{\mathcal{M}} |\nabla \mathbf{u}_n|^2. \quad (3.22)$$

Agora, consideremos o campo vetorial  $\mathbf{X} = \nabla \mathbf{u}$ . Note que,  $\mathbf{X}$  satisfaz as condições de (3.18) pois,  $\nabla \mathbf{u} \in L^1(\mathcal{M})$  por (3.22). Então

$$|\mathbf{X}| = |\nabla \mathbf{u}| \in L^1_{\text{loc}}(\mathcal{M}),$$

e como  $\langle \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{v}} = 0$  sobre  $\partial \mathcal{M}$  podemos concluir que

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{v} \rangle = \langle \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \in L^1_{\text{loc}}(\mathcal{M}).$$

Por último, tem-se

$$\text{div} \mathbf{X} = \text{div} \nabla \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u} \in L^1_{\text{loc}}(\mathcal{M}).$$

Por um lado, temos

$$\int_{\mathcal{M}} \text{div} \mathbf{X} = \int_{\mathcal{M}} \Delta \mathbf{u} = \int_{\mathcal{M}} -f \neq 0 \Rightarrow \int_{\mathcal{M}} \text{div} \mathbf{X} \neq 0,$$

e por outro lado,

$$\int_{\partial \mathcal{M}} \langle \mathbf{X}, \mathbf{v} \rangle = \int_{\partial \mathcal{M}} \langle \Delta \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \int_{\partial \mathcal{M}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{v}} = 0.$$

Portanto,

$$\int_{\mathcal{M}} \text{div} \mathbf{X} \neq \int_{\partial \mathcal{M}} \langle \mathbf{X}, \mathbf{v} \rangle.$$

Segue que o Teorema de Stokes não vale e, portanto, obtemos o resultado desejado.  $\square$

Usando a Definição 16, pode-se introduzir a noção de solução fraca de uma desigualdade diferencial como  $\text{div} \mathbf{X} \geq f$ . Ressaltamos que  $\text{div} \mathbf{X}$  não precisa ser uma função.

**Definição 17.** *Seja  $|\mathbf{X}| \in L^1_{\text{loc}}(\mathcal{M})$  um campo vetorial que satisfaz  $\langle \mathbf{X}, \mathbf{v} \rangle \in L^1_{\text{loc}}(\partial \mathcal{M})$  e  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathcal{M})$ . Dizemos que  $\text{div} \mathbf{X} \geq f$  no sentido distributivo no  $\text{int} \mathcal{M}$  se*

$$(\text{div} \mathbf{X}) \geq \int_{\mathcal{M}} f \varphi,$$

para cada  $0 \leq \varphi \in C_c^\infty(\mathcal{M})$ . Na verdade, de acordo com a Observação 16, a definição se estende a toda  $0 < \varphi \in C_c^0(\mathcal{M}) \cap W^{1,2}(\text{int} \mathcal{M})$ .

No caso especial onde  $f = 0$  e  $\mathbf{X} = \nabla \mathbf{u}$  para algum  $\mathbf{u} \in W^{1,2}_{\text{loc}}(\mathcal{M})$  satisfazendo  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{v}} \in L^1_{\text{loc}}(\partial \mathcal{M})$  obtemos a noção correspondente de solução fraca de  $\Delta \mathbf{u} \geq 0$  no  $\text{int} \mathcal{M}$ .

Embora elementar, é importante perceber que, como na configuração suave, a definição acima é compatível com a subsolução de Neumann fraca dada no Capítulo 2.

**Lema 11.** *Seja  $u \in W_{loc}^{1,2}(M)$  tal que  $\frac{\partial u}{\partial \nu} \in L_{loc}^1(\partial M)$ . Então  $u$  é uma subsolução de Neumann fraca da equação de Laplace desde que  $u$  satisfaça*

$$\begin{cases} \Delta u \geq 0 & \text{no } \text{int}M \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} \leq 0 & \text{sobre } \partial M, \end{cases}$$

onde a desigualdade diferencial é interpretada de acordo com a Definição 17.

*Demonstração.* Seja  $u \in W_{loc}^{1,2}(M)$  tal que  $\frac{\partial u}{\partial \nu} \in L_{loc}^1(\partial M)$ , logo,  $\langle \Delta u, \varphi \rangle \in L_{loc}^1(\partial M)$ .

Assim, por definição obtemos

$$(\Delta u, \varphi) = (\text{div} \nabla u, \varphi) = - \int_M \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle + \int_{\partial M} \varphi \langle \nabla u, \nu \rangle,$$

onde  $0 \leq \varphi \in C_c^\infty(M)$ . Então,

$$\int_M \varphi \Delta u = (\Delta u, \varphi) = - \int_M \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle + \int_{\partial M} \varphi \frac{\partial u}{\partial \nu},$$

e, conseqüentemente,

$$0 \leq \int_M \varphi \Delta u - \int_{\partial M} \varphi \frac{\partial u}{\partial \nu} = - \int_M \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle.$$

Dessa forma, obtemos o resultado desejado.  $\square$

Raciocinando como na prova do Teorema 19, podemos agora provar o seguinte resultado, que se estende a variedades com bordo como consta em [26].

**Proposição 17.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade parabólica  $m$ -dimensional com bordo  $\partial M$ . Seja  $X$  um campo vetorial em  $M$  satisfazendo:*

$$(a) \quad |X| \in L^2(M)$$

$$(b) \quad 0 \geq \langle X, \nu \rangle \in L_{loc}^1(\partial M).$$

*Suponha que  $\text{div} X \geq f$  para alguma  $f \in L^1(M)$  no sentido de distribuições. Então,*

$$\int_M f \leq \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle.$$

*A mesma conclusão é válida se  $0 \leq f \in L_{loc}^1(M)$  e produz  $f \equiv 0$ . Além disso, se  $\text{div} X \geq 0$  no sentido das distribuições, então*

$$\int_M \langle X, \nabla \alpha \rangle \leq \int_{\partial M} \alpha \langle X, \nu \rangle,$$

para todo  $0 \leq \alpha \in C_c^\infty(M)$ .

*Demonstração.* Seja  $M$  uma variedade parabólica  $m$ -dimensional. Assim, tomemos uma exaustão  $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  suave relativamente compacto de  $M$  e ainda denotemos por  $\varphi_n$  o potencial de equilíbrio do capacitor  $(\overline{\Omega}_0, \Omega_n)$ . Agora, estendemos  $\varphi_n$  para ser idênticamente igual a 1 em  $\overline{\Omega}_0$  e idênticamente nula em  $M \setminus \Omega_n$ . Então,  $\varphi_n \nearrow 1$  pontualmente em  $M$ , e como  $M$  é parabólica, obtemos pelo Teorema 10, que

$$\int_M |\nabla \varphi_n|^2 \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow +\infty.$$

Contudo, uma vez que

$$\|\nabla \varphi_n\|_{L^2} = \left[ \int_{\Omega_n} |\nabla \varphi_n|^2 \right]^{1/2},$$

Obtemos,

$$\|\nabla \varphi_n\|_{L^2} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow +\infty.$$

Mas, por hipótese, temos

$$\begin{aligned} \int_M \varphi_n f &\leq (\operatorname{div} X, \varphi_n) \\ &= - \int_M \langle X, \nabla \varphi_n \rangle + \int_{\partial M} \varphi_n \langle X, \nu \rangle, \end{aligned}$$

e aplicando a Desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \int_M \varphi_n f &\leq \left( \int_M |X|^2 \right)^{1/2} \left( \int_M |\nabla \varphi_n|^2 \right)^{1/2} + \int_{\partial M} \varphi_n \langle X, \nu \rangle \\ &= \left( \int_M |X|^2 \right)^{1/2} \|\nabla \varphi_n\|_{L^2} + \int_{\partial M} \varphi_n \langle X, \nu \rangle. \end{aligned}$$

Aplicando o limite com  $n \rightarrow +\infty$  obtemos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_M \varphi_n f \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \left( \int_M |X|^2 \right)^{1/2} \|\nabla \varphi_n\|_{L^2} \right] + \int_{\partial M} \varphi_n \langle X, \nu \rangle,$$

e pela o Teorema da Convergência Manótona à integral de contorno, e a convergência monótona ou o Teorema da Convergência Dominada ao lado esquerdo, dependendo se  $0 \leq f \in L^1_{\text{loc}}(M)$  ou se  $f \in L^1(M)$  obtemos que

$$\int_M f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_M \varphi_n f \leq \int_{\partial M} \varphi_n \langle X, \nu \rangle = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle.$$

Agora, para a segunda parte do resultado, consideremos a função teste  $\eta = \varphi_n \alpha$ , onde  $0 \leq \alpha \in C_c^\infty(M)$ . Então,

$$\begin{aligned} 0 \leq (\operatorname{div} X, \alpha \varphi_n) &= - \int_M \langle X, \nabla(\alpha \varphi_n) \rangle + \int_{\partial M} \alpha \varphi_n \langle X, \nu \rangle \\ &= - \int_M \langle X, \alpha \nabla \varphi_n + \varphi_n \nabla \alpha \rangle + \int_{\partial M} \alpha \varphi_n \langle X, \nu \rangle \\ &= -\alpha \int_M \langle X, \nabla \varphi_n \rangle - \int_M \varphi_n \langle X, \nabla \alpha \rangle + \int_{\partial M} \alpha \varphi_n \langle X, \nu \rangle \\ &\leq \sup_M |\alpha| \left( \int_M |X|^2 \right)^{1/2} \|\nabla \varphi_n\|_{L^2} - \int_M \varphi_n \langle X, \nabla \alpha \rangle + \int_{\partial M} \alpha \varphi_n \langle X, \nu \rangle. \end{aligned}$$

Aplicando o limite com  $n \rightarrow +\infty$  e utilizando o Teorema da Convergência Monótona podemos concluir que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \sup_M |\alpha| \left( \int_M |X|^2 \right)^{1/2} \|\nabla \varphi_n\|_{L^2} \right] - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_M \varphi_n \langle X, \nabla \alpha \rangle + \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\partial M} \alpha \varphi_n \langle X, \nu \rangle \\ &= - \int_M \langle X, \nabla \alpha \rangle + \int_{\partial M} \alpha \langle X, \nu \rangle. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_M \langle X, \nabla \alpha \rangle \leq \int_{\partial M} \alpha \langle X, \nu \rangle.$$

□

### Teoremas do tipo slice para hipersuperfície em um semi-espaço

Esta subseção é dedicada a prova dos Teoremas 20 e 22. O primeiro desses resultados envolve uma hipersuperfície completa  $\Sigma$  contida no semi espaço  $\mathbb{N} \times [0, +\infty)$  do espaço produto ambiente  $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ . Assumimos que o bordo  $\partial \Sigma \neq \emptyset$  encontra-se na slice  $\mathbb{N} \times \{0\}$  e que  $\Sigma$  tem curvatura média não positiva  $H \leq 0$  em relação a aplicação de Gauss "para baixo". O resultado afirma que, sob uma suposição de crescimento quadrático de área em  $\Sigma$  e independentemente da geometria de  $\mathbb{N}$ , o pedaço da hipersuperfície  $\Sigma$  em qualquer semi espaço superior de  $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$  deve ter volume infinito, a menos que  $\Sigma$  esteja contido na slice totalmente geodésica  $\mathbb{N} \times \{0\}$ .

O segundo resultado fornece uma versão gráfica deste teorema quando  $\Sigma = \Gamma_u(M)$ , onde  $(M, g)$  é uma variedade orientada completa com bordo. Se  $M$  satisfaz uma suposição de crescimento quadrático de volume, então cada conjunto de supernível  $M_t = \{u \geq t >$

$0\} \subseteq M$  tem volume infinito, a menos que  $\Sigma$  esteja contido na slice totalmente geodésica  $M \times \{0\}$ . Observe que  $M_t$  é a projeção ortogonal de  $\Sigma \cap [t, +\infty)$  na slice  $M \times \{0\}$ .

**Teorema 20** (Teorema de Slice). *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana sem bordo. Seja  $\Sigma \subset N \times [0, +\infty)$  uma hipersuperfície completa e orientada com bordo  $\partial\Sigma \neq \emptyset$  contido na slice  $N \times \{0\}$  e satisfazendo à condição de crescimento de volume*

$$\text{vol}B_{\mathbb{R}}^{\Sigma}(\mathbf{o}) = \mathcal{O}(\mathbb{R}^2) \quad \text{com } \mathbb{R} \rightarrow +\infty.$$

Suponha que, para uma escolha adequada da aplicação de Gauss  $\mathcal{N}$  de  $\Sigma$ , a hipersuperfície  $\Sigma$  tem curvatura média não positiva  $H(\mathbf{x}) \leq 0$  e o ângulo  $\theta$  entre  $\mathcal{N}$  e o campo vetorial  $\frac{\partial}{\partial t}$  está contido no intervalo  $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ , ou seja,

$$\cos \theta = \left\langle \mathcal{N}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \leq 0.$$

Se existe algum semi espaço  $N \times [t, +\infty)$  de  $N \times \mathbb{R}$  tal que

$$\text{vol}(\Sigma \cap (N \times [t, +\infty))) < +\infty,$$

então  $\Sigma \subset N \times \{0\}$ .

*Demonstração.* Seja  $(N, g)$  uma variedade Riemanniana sem bordo e ainda  $\Sigma \subset N \times [0, +\infty)$  uma hipersuperfície completa que satisfaz a condição de crescimento de volume

$$\text{vol}B_{\mathbb{R}}^{\Sigma}(\mathbf{o}) = \mathcal{O}(\mathbb{R}^2) \quad \text{com } \mathbb{R} \rightarrow +\infty,$$

logo,  $\Sigma$  é parabolica. Suponhamos, por absurdo, que  $\Sigma$  não esteja contido na slice  $N \times \{0\}$ . Seja  $h : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  a projeção da imagem de  $\Sigma$  em  $\mathbb{R}$  sobre a imersão, ou seja,  $h = \pi_{\mathbb{R}} \circ f$  onde  $f : \Sigma \rightarrow N \times \mathbb{R}$  é uma H-hipersuperfície completa orientável e  $\pi_{\mathbb{R}} : N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é a projeção da imagem do  $N \times \mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ . O Princípio do Máximo de Ahlfors implica que

$$\sup_{\Sigma} h = \sup_{\partial\Sigma} h.$$

Mas, temos que  $\partial\Sigma \subset N \times \{0\}$  e, conseqüentemente,  $h(\partial\Sigma) = \{0\}$ , Portanto,  $h \equiv 0$  em  $\partial\Sigma$ , segue daí que

$$h \leq \sup_M h = \sup_{\partial\Sigma} h = 0.$$

Logo,  $h(\Sigma) \subseteq (-\infty, 0]$  e, conseqüentemente,  $\Sigma \subset \mathbf{N} \times (-\infty, 0]$  o que é um absurdo. Suponhamos, agora, que  $\sup_{\Sigma} h = +\infty$  de modo que  $\Sigma \cap (\mathbf{N} \times \{t\}) \neq \emptyset$  para todo  $t > 0$ . Daí, chamamos

$$\Sigma_t = \Sigma \cap (\mathbf{N} \times [t, +\infty)) = \{p \in \Sigma; h(p) \geq t\}$$

e ainda, como  $\text{vol}(\Sigma_t) \geq \text{vol}(\Sigma_s)$ , para todo  $s \geq t$ , podemos assumir que  $\text{vol}(\Sigma_t) < +\infty$  para todo  $t \gg 1$ . Além disso, pelo Teorema de Sard podemos supor que  $t$  é um valor regular de  $h|_{\text{int}M}$ . Em particular,  $\Sigma_t$  é uma hipersuperfície suave completa com bordo igual a  $\partial\Sigma_t = \{p \in \Sigma; h(p) = t\}$  e com vetor normal unitário exterior dado por  $\nu_t = -\frac{\nabla h}{|\nabla h|}$ . Como o crescimento de volume de  $\Sigma_t$  é finito, podemos concluir que  $\Sigma_t$  é parabólica. Além disso,  $\Delta_{\Sigma} h = m\mathbf{H}$ , onde  $\mathbf{H} = H(x) \cos \theta$  então,  $\Delta_{\Sigma} h = mH \cos \theta$ . Segue de  $H \leq 0$  e  $\cos \theta \leq 0$  que

$$\Delta_{\Sigma} h = mH \cos \theta \geq 0.$$

Logo,  $h$  é uma função subharmonica em  $\Sigma_t$  e satisfaz  $|\nabla h| \leq 1$ . Em particular,  $|\nabla h| \in L^2(\Sigma)$ , assim, para qualquer  $\varepsilon > 0$  definimos  $h_{\varepsilon} = \max\{h, t + \varepsilon\}$ . Por um lado, temos

$$h_{\varepsilon} = h \Rightarrow \Delta_{\Sigma_t} h_{\varepsilon} = \Delta_{\Sigma_t} h \geq 0.$$

Por outro lado,

$$\Delta_{\Sigma_t} h_{\varepsilon} = \Delta_{\Sigma_t} (t + \varepsilon) = 0.$$

Portanto,  $h_{\varepsilon}$  é uma função subharmônica em  $\Sigma_t$  e possui energia de Dirichet finita  $|\nabla h_{\varepsilon}| \in L^2(\Sigma_t)$ . Além disso,

$$\frac{\partial h_{\varepsilon}}{\partial \nu} = \frac{\partial}{\partial \nu} (t + \varepsilon) = 0$$

em  $\partial\Sigma_t$ . Logo, podemos aplicar a Proposição 17 e obter,

$$\text{div} \nabla h_{\varepsilon} = \Delta_{\Sigma} h_{\varepsilon} \geq 0, \quad |\nabla h_{\varepsilon}| \in L^2(\Sigma_t) \text{ e } \langle \nabla h_{\varepsilon}, \nu \rangle = 0$$

então, podemos deduzir que  $h_{\varepsilon}$  tem que ser harmônica em  $\Sigma_t$ , segue que  $h_{\varepsilon}$  é constante em todas as componentes conexas de  $\Sigma_t$ . Notemos que, sobre  $\partial\Sigma_t$

$$t + \varepsilon > h = t \Rightarrow h_{\varepsilon} = t + \varepsilon.$$

Como  $h_\varepsilon$  é constante nas componentes conexas de  $\Sigma_t$  podemos dizer que  $h_\varepsilon = t + \varepsilon$  no  $\text{int}\Sigma_t$ . Portanto,  $h \leq t + \varepsilon$  no  $\text{int}\Sigma_t$ , segue daí que  $t \leq h \leq t + \varepsilon$  em  $\Sigma_t$  e como isso é válido para todo  $\varepsilon > 0$  arbitrário, podemos concluir que

$$h \equiv t \text{ em } \Sigma_t.$$

Portanto,  $\sup_\Sigma h < +\infty$ , o que contradiz a suposição de  $h$  ser ilimitado. Assim,

$$\Sigma \subset \mathbb{N} \times \{0\}$$

□

A prova do Teorema 22 é completamente semelhante, mas requer alguma preparação. O próximo resultado do tipo Liouville para o operador de curvatura média é adaptado de [34] (ver também [49], [53]). Fornecemos uma prova detalhada para fins de integridade.

**Teorema 21.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana completa com bordo  $\partial M \neq \emptyset$ . Se, para algum ponto  $o \in \text{int}M$ ,*

$$\int^{+\infty} \frac{1}{\text{Area}(\partial_0 B_R(o))} = +\infty, \quad (3.23)$$

então o seguinte é válido. Seja  $u \in C^1(M)$  uma solução fraca de Neumann para o problema

$$\begin{cases} \text{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) \geq 0 & \text{no } \text{int}M \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} \leq 0 & \text{sobre } \partial M \\ \sup_M u < +\infty, \end{cases} \quad (3.24)$$

então  $u \equiv \text{const.}$

**Observação 18.** *Já apontamos para o operador Laplace-Beltrami ser uma solução fraca Neumann do  $\text{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right)$  significa que*

$$-\int_{\text{int}M} \left\langle \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}, \nabla \varphi \right\rangle \geq 0, \quad (3.25)$$

para todo  $0 \leq \varphi \in C_c^\infty(M)$ . Como de costume, por densidade a desigualdade (3.25) pode ser estendida para funções de teste compactamente suportadas  $0 \leq \varphi \in W^{1,2}(\text{int}M)$ .

Na verdade, é notório que a mesma definição se estende a qualquer operador elíptico da forma;

$$L_{\Phi(\mathbf{u})} = \operatorname{div}(\Phi(|\nabla\mathbf{u}|)\nabla\mathbf{u}),$$

onde  $\Phi(t)$  está sujeita à algumas condições estruturais. Além disso, supondo

$$|\nabla\mathbf{u}| \in L^1_{\text{loc}}(\partial M),$$

esta notação também é coerente com a noção de divergência fraca. Ou seja,  $\mathbf{u}$  satisfaz (3.25) desde  $(\operatorname{div}\mathbf{X}, \varphi) \geq 0$  e  $\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\nu} \leq 0$  onde definimos  $\mathbf{X} = \frac{\nabla\mathbf{u}}{\sqrt{1+|\nabla\mathbf{u}|^2}}$ . Isso segue imediatamente da equação

$$(\operatorname{div}\mathbf{X}, \varphi) \stackrel{\text{def}}{=} - \int_{\operatorname{int}M} \left\langle \frac{\nabla\mathbf{u}}{\sqrt{1+|\nabla\mathbf{u}|^2}}, \nabla\varphi \right\rangle + \int_{\partial M} \frac{\varphi}{\sqrt{1+|\nabla\mathbf{u}|^2}} \cdot \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\nu}.$$

**Observação 19.** Se tomarmos  $\Phi(t) = 1$  no argumento abaixo, recuperamos o Teorema 0.7 de Grigo'yon, na forma de um resultado de Liouville para subsolução  $C^1(M)$  da equação de Laplace.

*Demonstração do Teorema 21.* Seja  $\mathbf{u} \in C^1(M)$  uma solução fraca de Neumann para o problema

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left( \frac{\nabla\mathbf{u}}{\sqrt{1+|\nabla\mathbf{u}|^2}} \right) \geq 0 & \text{no } \operatorname{int}M, \\ \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\nu} \leq 0 & \text{sobre } \partial M, \\ \sup_M \mathbf{u} < +\infty. \end{cases} \quad (3.26)$$

Suponhamos, por absurdo, que  $\mathbf{u}$  não é constante em uma bola  $B_{R_0}(\mathbf{o})$  para todo  $R_0 > 0$ . Sem perda de generalidade, podemos supor que  $\mathbf{u} \leq 0$  em  $M$ . Definimos a função  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Fixando  $R > R_0 > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  e escolha  $\rho = \rho_{\varepsilon,R}$  tal que

$$\begin{cases} 1 & \text{na } B_R(\mathbf{o}), \\ \frac{R + \varepsilon - r(x)}{\varepsilon} & \text{no } B_{r+\varepsilon}(\mathbf{o}) \setminus B_R(\mathbf{o}), \\ 0 & \text{em outro lugar} \end{cases} .$$

Inserindo a função teste  $\varphi = \rho e^u$  em (3.25) e reorganizando obtemos que

$$\begin{aligned}
 0 &\leq - \int_{\text{int}M} \left\langle \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}, \nabla u \right\rangle = - \int_{\text{int}M} \langle \Phi(|\nabla u|^2) \nabla u, \nabla(\rho e^u) \rangle \\
 &= - \int_{\text{int}M} \langle \Phi(|\nabla u|^2) \nabla u, \nabla \rho e^u + \rho \nabla u e^u \rangle \\
 &= - \int_{\text{int}M} \langle \Phi(|\nabla u|^2) \nabla u, \nabla \rho e^u \rangle \\
 &\quad - \int_{\text{int}M} \langle \Phi(|\nabla u|^2) \nabla u, \rho \nabla u e^u \rangle \\
 &= - \int_{\text{int}M} \Phi(|\nabla u|^2) e^u \langle \nabla u, \nabla \rho \rangle \\
 &\quad - \int_{\text{int}M} \rho e^u \Phi(|\nabla u|^2) |\nabla u|^2.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 0 &\leq - \int_{(\mathbb{B}_{R+\varepsilon}(\mathfrak{o}) \setminus \mathbb{B}_R(\mathfrak{o})) \cap \text{int}M} e^u \Phi(|\nabla u|) \left\langle \nabla u, \nabla \left( \frac{R + \varepsilon - r(x)}{\varepsilon} \right) \right\rangle \\
 &\quad - \int_{\mathbb{B}_R(\mathfrak{o}) \cap \text{int}M} e^u \Phi(|\nabla u|) |\nabla u|^2 \\
 &\quad - \int_{(\mathbb{B}_{R+\varepsilon}(\mathfrak{o}) \setminus \mathbb{B}_R(\mathfrak{o})) \cap \text{int}M} \frac{R + \varepsilon - r(x)}{\varepsilon} \cdot e^u \Phi(|\nabla u|) |\nabla u|^2 \\
 &= - \int_{(\mathbb{B}_{R+\varepsilon}(\mathfrak{o}) \setminus \mathbb{B}_R(\mathfrak{o})) \cap \text{int}M} e^u \Phi(|\nabla u|) \left\langle \nabla u, -\frac{\nabla r}{\varepsilon} \right\rangle - \int_{\mathbb{B}_R(\mathfrak{o}) \cap \text{int}M} e^u \Phi(|\nabla u|) |\nabla u|^2 \\
 &\quad - \int_{(\mathbb{B}_{R+\varepsilon}(\mathfrak{o}) \setminus \mathbb{B}_R(\mathfrak{o})) \cap \text{int}M} \frac{R + \varepsilon - r(x)}{\varepsilon} \cdot e^u \Phi(|\nabla u|) |\nabla u|^2.
 \end{aligned}$$

Como  $\frac{R + \varepsilon - r(x)}{\varepsilon} e^u \Phi(|\nabla u|) |\nabla u|^2 \neq 0$  teremos que

$$\int_{(\mathbb{B}_{R+\varepsilon}(\mathfrak{o}) \setminus \mathbb{B}_R(\mathfrak{o})) \cap \text{int}M} \frac{R + \varepsilon - r(x)}{\varepsilon} \cdot e^u \Phi(|\nabla u|) |\nabla u|^2 > 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \int_{(\mathbb{B}_{R+\varepsilon}(\mathfrak{o}) \setminus \mathbb{B}_R(\mathfrak{o})) \cap \text{int}M} e^u \frac{1}{\varepsilon} \Phi(|\nabla u|) \langle \nabla u, \nabla r \rangle - \int_{\mathbb{B}_R(\mathfrak{o}) \cap \text{int}M} e^u \Phi(|\nabla u|) |\nabla u|^2 \\
 &\quad \frac{1}{\varepsilon} \int_{(\mathbb{B}_{R+\varepsilon}(\mathfrak{o}) \setminus \mathbb{B}_R(\mathfrak{o})) \cap \text{int}M} e^u \Phi(|\nabla u|) \langle \nabla u, \nabla r \rangle \geq \int_{\mathbb{B}_R(\mathfrak{o}) \cap \text{int}M} e^u \Phi(|\nabla u|) |\nabla u|^2.
 \end{aligned}$$

Usando a fórmula da co-área e fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  obtemos, para  $R > R_0$ , que

$$\int_{\partial_0 \mathbb{B}_R(\mathfrak{o})} e^u \Phi(|\nabla u|) \langle \nabla u, \nabla r \rangle \geq \int_{\mathbb{B}_R(\mathfrak{o}) \cap \text{int}M} e^u \Phi(|\nabla u|) |\nabla u|^2.$$

Por outro lado, usando as desigualdades de Cauchy-Schwartz e Hölder, obtemos que

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial_0 B_R(\mathbf{o})} e^u \Phi(|\nabla \mathbf{u}|) \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{r} \rangle &\leq \int_{\partial_0 B_R(\mathbf{o})} e^u \Phi(|\nabla \mathbf{u}|) |\nabla \mathbf{u}| |\nabla \mathbf{r}| \\
 &= \int_{\partial_0 B_R(\mathbf{o})} e^u \Phi(|\nabla \mathbf{u}|) |\nabla \mathbf{u}| \\
 &= \int_{\partial_0 B_R(\mathbf{o})} (e^u \Phi(|\nabla \mathbf{u}|))^{1/2} (e^u \Phi(|\nabla \mathbf{u}|))^{1/2} |\nabla \mathbf{u}| \\
 &\leq \left( \int_{\partial_0 B_R(\mathbf{o})} e^u \Phi(|\nabla \mathbf{u}|) \right)^{1/2} \left( \int_{\partial_0 B_R(\mathbf{o})} e^u \Phi(|\nabla \mathbf{u}|) |\nabla \mathbf{u}|^2 \right)^{1/2} \\
 &= \left( \int_{\partial_0 B_R(\mathbf{o})} e^u \Phi(|\nabla \mathbf{u}|) \right)^{1/2} \left( \int_{\partial_0 B_R(\mathbf{o})} (e^u \Phi(|\nabla \mathbf{u}|) |\nabla \mathbf{u}|^2) \right)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Como  $u \leq 0$ , temos que

$$e^u \leq 1$$

e ainda,

$$\Phi(|\nabla \mathbf{u}|) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} < 1.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial_0 B_R(\mathbf{o})} e^u \Phi(|\nabla \mathbf{u}|) \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{r} \rangle &\leq \left( \int_{\partial_0 B_R(\mathbf{o})} e^u \Phi(|\nabla \mathbf{u}|) \right)^{1/2} \left( \int_{\partial_0 B_R(\mathbf{o})} (e^u \Phi(|\nabla \mathbf{u}|) |\nabla \mathbf{u}|^2) \right)^{1/2} \\
 &\leq \left( \int_{\partial_0 B_R(\mathbf{o})} \right)^{1/2} \left( \int_{\partial_0 B_R(\mathbf{o})} (e^u \Phi(|\nabla \mathbf{u}|) |\nabla \mathbf{u}|^2) \right)^{1/2} \\
 &= (\text{Area}(\partial_0 B_R(\mathbf{o})))^{1/2} \left( \int_{\partial_0 B_R(\mathbf{o})} (e^u \Phi(|\nabla \mathbf{u}|) |\nabla \mathbf{u}|^2) \right)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Agora, definimos

$$H(\mathbf{R}) = \int_{\partial_0 B_R(\mathbf{o})} (e^u \Phi(|\nabla \mathbf{u}|) |\nabla \mathbf{u}|^2).$$

Como estamos supondo  $u$  não constante na bola  $B_{R_0}(\mathbf{o})$  teremos que  $H(\mathbf{R}) \neq 0$ , para todo  $\mathbf{R} \geq R_0$ . Então,

$$H(\mathbf{R}) \leq \int_{\partial_0 B_R(\mathbf{o})} e^u \Phi(|\nabla \mathbf{u}|) \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{r} \rangle \leq (\text{Area}(\partial_0 B_R(\mathbf{o})))^{1/2} \left( \int_{\partial_0 B_R(\mathbf{o})} (e^u \Phi(|\nabla \mathbf{u}|) |\nabla \mathbf{u}|^2) \right)^{1/2}.$$

Logo,

$$[H(\mathbf{R})]^2 \leq (\text{Area}(\partial_0 B_R(\mathbf{o}))) \int_{\partial_0 B_R(\mathbf{o})} (e^u \Phi(|\nabla \mathbf{u}|) |\nabla \mathbf{u}|^2). \quad (3.27)$$

Portanto, pela fórmula da co-área obtemos

$$\begin{aligned} H'(\mathbf{R}) &= \frac{d}{dS} \left( \int_{B_S(\mathbf{o}) \cap \text{int}M} e^u \Phi(|\nabla u|) |\nabla u|^2 \right) \Big|_{S=\mathbf{R}} = \frac{d}{dS} \left( \int_{\partial_0 B_S(\mathbf{o})}^{+\infty} e^u \Phi(|\nabla u|) |\nabla u|^2 \right) \Big|_{S=\mathbf{R}} \\ &= \int_{\partial_0 B_{\mathbf{R}}(\mathbf{o})} e^u \Phi(|\nabla u|) |\nabla u|^2, \end{aligned}$$

segue que

$$H'(\mathbf{R}) = \int_{\partial_0 B_{\mathbf{R}}(\mathbf{o})} e^u \Phi(|\nabla u|) |\nabla u|^2$$

e daí por (3.27),

$$[H(\mathbf{R})]^2 \leq \text{Area}(\partial_0 B_{\mathbf{R}}(\mathbf{o})) H'(\mathbf{R})$$

ou seja,

$$\frac{1}{\text{Area}(\partial_0 B_{\mathbf{R}}(\mathbf{o}))} \leq \frac{H'(\mathbf{R})}{[H(\mathbf{R})]^2}.$$

Integrando no intervalo  $[\mathbf{R}_0, \mathbf{R}]$  e fazendo  $\mathbf{R} \rightarrow +\infty$  concluímos que

$$\int_{\mathbf{R}_0}^{\mathbf{R}} \frac{1}{\text{Area}(\partial_0 B_{\mathbf{R}}(\mathbf{o}))} \leq - \int_{\mathbf{R}_0}^{\mathbf{R}} - \frac{H'(\mathbf{R})}{[H(\mathbf{R})]^2} = - \int_{\mathbf{R}_0}^{\mathbf{R}} \frac{d}{dS} \left( \frac{1}{H(S)} \right) \Big|_{S=\mathbf{R}} = - \frac{1}{H(\mathbf{R})} \Big|_{\mathbf{R}_0}^{\mathbf{R}},$$

então,

$$\int_{\mathbf{R}_0}^{\mathbf{R}} \frac{1}{\text{Area}(\partial_0 B_{\mathbf{R}}(\mathbf{o}))} \leq \frac{1}{H(\mathbf{R}_0)} - \frac{1}{H(\mathbf{R})}.$$

Logo,

$$\lim_{\mathbf{R} \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}_0}^{\mathbf{R}} \frac{1}{\text{Area}(\partial_0 B_{\mathbf{R}}(\mathbf{o}))} \leq \frac{1}{H(\mathbf{R}_0)} - \lim_{\mathbf{R} \rightarrow +\infty} \frac{1}{H(\mathbf{R})}$$

isto é,

$$\int_{\mathbf{R}_0}^{+\infty} \frac{1}{\text{Area}(\partial_0 B_{\mathbf{R}}(\mathbf{o}))} \leq \frac{1}{H(\mathbf{R}_0)},$$

e assim,

$$H(\mathbf{R}_0) \leq \frac{1}{\int_{\mathbf{R}_0}^{+\infty} (\text{Area}(\partial_0 B_{\mathbf{R}}(\mathbf{o})))^{-1}}.$$

Usando (3.23) obtemos que

$$H(\mathbf{R}_0) \leq 0$$

e, conseqüentemente,  $H(\mathbf{R}_0) = 0$ . Portanto,

$$\int_{\mathbf{B}_{\mathbf{R}_0}(\mathbf{o}) \cap \text{int}M} e^u \Phi(|\nabla u|) |\nabla u|^2 = H(\mathbf{R}_0) = 0.$$

Como  $e^u \Phi(|\nabla u|) |\nabla u|^2 > 0$  podemos concluir que

$$e^u \Phi(|\nabla u|) |\nabla u|^2 = 0 \Rightarrow |\nabla u|^2 = 0.$$

Portanto,

$$\nabla u = 0 \Rightarrow u \equiv \text{const em } \mathbf{B}_{\mathbf{R}_0}(\mathbf{o}),$$

o que é um absurdo. Assim, concluímos que  $u \equiv \text{const}$ . □

Agora, podemos demonstrar o Teorema de Slice para gráficos.

**Teorema 22** (Teorema de Slice para gráficos). *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana orientada com bordo  $\partial M \neq \emptyset$  e vetor normal apontando para fora  $\nu$  e (no máximo) crescimento quadrático de volume, ou seja,*

$$\text{vol} \mathbf{B}_{\mathbf{R}}^M(\mathbf{o}) = \mathcal{O}(\mathbf{R}^2), \quad \text{com } \mathbf{R} \rightarrow +\infty,$$

para alguma origem  $\mathbf{o} \in M$ . Seja  $\Sigma$  um gráfico sobre  $M$  com curvatura média  $H(x) \leq 0$  em relação a orientação dada pela aplicação de Gauss  $\mathcal{N}(x)$  apontando para baixo. Suponha que  $\partial \Sigma \cap (M \times \{T\}) = \emptyset$  para algum  $T > 0$  e que pelo menos uma das seguintes condições seja satisfeita:

(a)  $\partial \Sigma \subset M \times \{0\}$  e  $\Sigma \subset M \times [0, +\infty)$ ,

(b)  $M$  e  $\Sigma$  são analíticos reais,

(c) Sobre  $\partial \Sigma$ , a aplicação de Gauss  $\mathcal{N}(x)$  de  $\Sigma$  e a aplicação de Gauss  $\mathcal{N}_0 = (-\nu(x), 0)$  do bordo  $\partial M \times \{t\}$  de qualquer slice forma um ângulo  $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Se a parte do gráfico  $\Sigma$  contida em algum semi espaço  $M \times [t, +\infty)$  tem projeção de volume finito na slice  $M \times \{0\}$ , então  $\Sigma$  é uma slice horizontal de  $M \times \mathbb{R}$ .

*Demonstração.* Seja  $\Sigma = \Gamma_u(M)$  com  $u \in C^\infty(M)$  e para todo  $s \in \mathbb{R}$  definimos o conjunto

$$M_s = \{x \in M; u(x) \geq s\}.$$

Pela suposição de  $\partial \Sigma = \Gamma_u(\partial M)$  temos que existe  $t > 0$  tal que para todo  $s > t$

$$M_s \subset\subset \text{int}M \quad \text{e} \quad \text{vol}(M_s) < +\infty,$$

já que  $M$  possui crescimento quadrático de volume. Suponhamos que  $M_s \neq \emptyset$  para todo  $s \geq t$ , caso contrário, como no Teorema 20, a prova é mais direta. Então, pelo Teorema de Sard, podemos escolher  $t < c < \sup_M u < +\infty$  tal que  $c$  é um valor regular de  $u|_{\text{int}M}$ . Portanto, o subconjunto fechado

$$M_c = \{x \in M; u(x) \geq c\}, \quad \partial M_c = \{x \in M; u(x) = c\}$$
 é uma curva suave,

é uma variedade completa, pois é fechada e limitada em  $M$  que é uma variedade completa logo,  $M_c$  é compacto, onde  $\partial M_c \neq \emptyset$  e possui normal unitária exterior dado por

$$\nu_c = -\frac{\nabla u}{|\nabla u|}.$$

Em particular, como  $M_c$  é uma variedade completa com crescimento de volume finito,  $M_c$  é parabólico. Uma vez que a função  $u$  satisfaz

$$H = -\frac{1}{m} \operatorname{div} \left( \frac{\nabla_M u}{\sqrt{1 + |\nabla_M u|^2}} \right)$$

e a curvatura média não-positiva, temos que

$$0 \leq -mH = \operatorname{div} \left( \frac{\nabla_M u}{\sqrt{1 + |\nabla_M u|^2}} \right) \Rightarrow 0 \leq \operatorname{div} \left( \frac{\nabla_M u}{\sqrt{1 + |\nabla_M u|^2}} \right) \text{ no } \text{int}M_c.$$

Assim, fixando  $\varepsilon > 0$  qualquer, teremos que a mesma desigualdade diferencial é válida, em um sentido fraco, para a função

$$u_\varepsilon = \max\{u, c + \varepsilon\}.$$

Observe que, para pontos sobre o  $\partial M_c$

$$u = c < c + \varepsilon \Rightarrow u_\varepsilon = c + \varepsilon \text{ sobre } \partial M_c,$$

logo,

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \partial M_c.$$

Assim, definimos o campo vetorial

$$X_\varepsilon = \frac{\nabla_M u_\varepsilon}{\sqrt{1 + |\nabla_M u_\varepsilon|^2}},$$

e inicialmente, notemos que

$$\operatorname{div}_M X_\varepsilon = \operatorname{div}_M \left( \frac{\nabla_M u_\varepsilon}{\sqrt{1 + |\nabla_M u_\varepsilon|^2}} \right) \geq 0 \text{ sobre } \operatorname{int} M_c$$

e

$$|X_\varepsilon|^2 = \left| \frac{\nabla_M u_\varepsilon}{\sqrt{1 + |\nabla_M u_\varepsilon|^2}} \right|^2 = \frac{|\nabla_M u_\varepsilon|^2}{1 + |\nabla_M u_\varepsilon|^2}.$$

Como  $1 + |\nabla_M u_\varepsilon|^2 > |\nabla_M u_\varepsilon|^2$  teremos que,  $\frac{1}{|\nabla_M u_\varepsilon|^2} > \frac{1}{1 + |\nabla_M u_\varepsilon|^2}$  logo,

$$|X_\varepsilon|^2 = \frac{|\nabla_M u_\varepsilon|^2}{1 + |\nabla_M u_\varepsilon|^2} \leq \frac{|\nabla_M u_\varepsilon|^2}{|\nabla_M u_\varepsilon|^2} = 1 \Rightarrow |X_\varepsilon| \leq 1,$$

e ainda  $|X_\varepsilon| \in L^2(M_c)$ . Sobre  $\partial M_c$  temos que

$$\begin{aligned} \langle X_\varepsilon, \nu_\varepsilon \rangle &= \left\langle \frac{\nabla_M u_\varepsilon}{\sqrt{1 + |\nabla_M u_\varepsilon|^2}}, -\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right\rangle \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla_M u_\varepsilon|^2}} \cdot \frac{1}{|\nabla u|} \langle \nabla_M u_\varepsilon, \nabla u \rangle = 0. \end{aligned}$$

Segue que  $X_\varepsilon$  satisfaz

$$\begin{cases} \operatorname{div}_M X_\varepsilon \geq 0 & \text{no } \operatorname{int} M \\ 1 \geq |X_\varepsilon| \in L^2(M_\varepsilon) \\ 0 = \langle X_\varepsilon, \nu_c \rangle. \end{cases}$$

Aplicando a Proposição 17, podemos deduzir que  $\operatorname{div} X_\varepsilon = 0$  sobre  $M_c$ , ou seja,

$$-mH = \operatorname{div}_M X_\varepsilon \Rightarrow H = 0,$$

logo  $\Sigma_c = \Gamma_u(M_c)$  é um gráfico mínimo. Como  $\operatorname{vol}(M_c) < +\infty$  segue do Teorema 19 que  $u_\varepsilon$  deve ser constante em cada componente conexa de  $M_c$ . Uma vez que em  $\partial M_c$  temos que  $u = c$  e assim,

$$u < c + \varepsilon \Rightarrow u_\varepsilon = c + \varepsilon \text{ sobre } \partial M_c,$$

como  $u_\varepsilon$  é constante em todas as componentes conexas de  $M_c$  podemos concluir que

$$u_\varepsilon = c + \varepsilon \text{ em } M_c.$$

Segue que  $c \leq u \leq c + \varepsilon$  sobre  $M_c$ . Como  $\varepsilon > 0$  foi tomado de maneira arbitrária teremos que  $u \equiv c$  sobre  $M_c$ .

Contudo, isso contradiz o fato de que  $M_s \neq \emptyset$  para todo  $s \geq t$ . Como  $u$  é constante em  $M_c$ , temos que  $\sup_M u < +\infty$ . Agora, distingamos em três casos:

(a) Suponha que  $\partial\Sigma \subset M \times \{0\}$  e  $\Sigma \subset M \times [0, +\infty)$ , isso significa que  $u \geq 0$  com  $u = 0$  sobre  $\partial M$ . Nesse caso, a conclusão de  $u = 0$  segue exatamente como na demonstração do Teorema 20.

(b) Suponha que  $\Sigma$  seja analítica real, isto é, descrito por uma função real. Como  $u$  é constante em  $M_c$ , onde  $c$  valor regular, podemos concluir pelo Princípio da Identidade para funções analíticas que  $u$  é constante em todo  $M$ . Assim, obtemos o resultado desejado.

(c) Suponhamos que a aplicação de Gauss  $\mathcal{N}(x)$  de  $\Sigma$  e a aplicação de Gauss  $\mathcal{N}_0 = (-\nu, 0)$  do bordo  $\partial M \times \{t\}$  de qualquer slice forma um ângulo  $\theta(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  sobre o bordo  $\partial\Sigma = \Gamma_u(\partial M)$ , isto é,

$$0 \geq \cos \theta(x) = \langle \mathcal{N}(x), \mathcal{N}_0(x) \rangle.$$

Segue que

$$\begin{aligned} 0 \geq \langle \mathcal{N}(x), \mathcal{N}_0(x) \rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}(-\nabla u, 1), (-\nu(x), 0) \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \langle (-\nabla u, 1), (-\nu(x), 0) \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \langle \nabla u, \nu \rangle, \end{aligned}$$

logo,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \langle \nabla u, \nu \rangle \leq 0.$$

Pelo Teorema 22 concluímos que  $u \equiv \text{const}$  em  $M$ . Portanto, em todos os casos obtemos o resultado desejado.  $\square$

Como uma consequência imediata da demonstração acima.

**Corolário 7.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade completa com bordo  $\partial M$  e assumamos que  $\text{vol}(M) < +\infty$ . Seja  $\Sigma = \Gamma_u(M)$  um gráfico com curvatura média não positiva  $H(x)$  em relação a aplicação de Gauss  $\mathcal{N}$ . Suponha que o ângulo  $\theta$  entre a aplicação de Gauss  $\mathcal{N}$  do gráfico e o mapa de Gauss  $\mathcal{N}_0 = (-\nu, 0)$  de  $\partial M \times \{t\} \hookrightarrow M \times \{t\}$  satisfaz  $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ . Então  $\Sigma$  é uma slice horizontal de  $M \times \mathbb{R}$ .*

*Demonstração.* Segue diretamente do item (c) do Teorema 22

□

### 3.3 Propriedade Dirichlet $L^1$ -Liouville

Nesta Seção, introduzimos a noção de Propriedade de Dirichlet  $L^1$ -Liouville para uma variedade suave  $M$  com bordo não vazio  $\partial M$  e mostramos como essa propriedade pode ser útil quando se tenta encontrar condições suficientes para garantir a Propriedade  $L^1$ -Liouville global. Inicialmente, iremos apresentar o conceito de Dirichlet  $L^1$ -Liouville.

**Definição 18.** *Seja  $M$  uma variedade suave com bordo  $\partial M$  não vazio. Dizemos que  $M$  é Dirichlet  $L^1$ -Liouville (denotamos por  $\mathcal{D}$ - $L^1$ -Liouville) se cada solução  $L^1$  não negativa de*

$$\begin{cases} \Delta u \leq 0 & \text{no } \text{int}M \\ u = 0 & \text{sobre } \partial M, \end{cases}$$

é identicamente nula em  $M$ .

Quando a variedade suave  $M$  não tem um bordo, A. Grigor'yan [6] mostra que a validade da propriedade  $L^1$ -Liouville é equivalente à não integrabilidade do Núcleo de Green, de  $M$ . Uma caracterização semelhante também é válida para  $\mathcal{D}$ - $L^1$ -Liouville em uma variedade suave com bordo não vazio temos o  ${}^{\mathcal{D}}G$  do Núcleo de Green de Dirichet. Afim de estabelecer precisamente este resultado, damos a próxima;

**Definição 19.** *O tempo médio de saída de Dirichlet  ${}^{\mathcal{D}}E$  de  $M$  é definido como a solução mínima positiva de*

$$\begin{cases} \Delta {}^{\mathcal{D}}E = -1 & \text{no } \text{int}M \\ {}^{\mathcal{D}}E = 0 & \text{sobre } \partial M. \end{cases} \quad (3.28)$$

Como no caso de variedades sem bordo, o tempo médio de saída de Dirichlet  ${}^{\mathcal{D}}E$  pode ser construído por um procedimento de exaustão.

Seja  $\{\Omega_k\}$  uma exaustão crescente de  $M$  por conjuntos abertos relativamente compactos (em  $M$ ) com bordo suave  $\overline{\partial_0 \Omega_k}$  que intersecta transversalmente  $M$ , e para cada  $k$  teremos que  ${}^{\mathcal{D}}E^{\Omega_k}$  é a solução de

$$\begin{cases} \Delta {}^{\mathcal{D}}E^{\Omega_k} = -1 & \text{no } \text{int}M \\ {}^{\mathcal{D}}E^{\Omega_k} = 0 & \text{sobre } \partial M. \end{cases} \quad (3.29)$$

Então, a sequência  ${}^{\mathcal{D}}E^{\Omega_k}$  diverge em todos os pontos no  $\text{int}M$  ou converge monotonicamente para a função  ${}^{\mathcal{D}}E$  tal que

$$-1 = \lim_{k \rightarrow +\infty} \Delta {}^{\mathcal{D}}E^{\Omega_k} = \Delta {}^{\mathcal{D}}E \text{ no } \text{int}M,$$

e ainda,

$$0 = \lim_{k \rightarrow +\infty} \Delta {}^{\mathcal{D}}E^{\Omega_k} = {}^{\mathcal{D}}E.$$

Logo,  ${}^{\mathcal{D}}E$  é solução mínima de (3.28).

A consequência acima e o Princípio de Comparação produzem o seguinte Lema 12, que será útil na Seção 3.4.

**Lema 12.** *Seja  $M$  uma variedade com bordo  $\partial M$ , e seja  $E : M \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo  $\Delta E \leq -1$  no  $\text{int}M$ ,  $E \geq 0$  sobre,  $M$ . Então,  ${}^{\mathcal{D}}E$  é finito e limitado acima por  $E$ .*

*Demonstração.* Seja  $M$  uma variedade com  $\partial M \neq \emptyset$  e  $E : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função que satisfaz

$$\begin{cases} \Delta E \leq -1 & \text{no } \text{int}M \\ E \geq 0 & \text{sobre } M. \end{cases}$$

onde  ${}^{\mathcal{D}}E$  é o limite da sequência  ${}^{\mathcal{D}}E^{\Omega_k}$ , isto é,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} {}^{\mathcal{D}}E^{\Omega_k} = {}^{\mathcal{D}}E$ . Vimos anteriormente que

$$\begin{cases} \Delta {}^{\mathcal{D}}E = -1 & \text{no } \text{int}M \\ {}^{\mathcal{D}}E = 0 & \text{sobre } M, \end{cases}$$

e segue, do Princípio de Comparação, que  ${}^{\mathcal{D}}E \leq E$  em  $M$ . Portanto,  ${}^{\mathcal{D}}E$  é finito e limitado superiormente por  $E$ .

□

A relação entre o tempo médio de saída de Dirichlet e a propriedade  $\mathcal{D}$ - $L^1$ -Liouville é dada pela seguinte versão do resultado de Grigor'yan's aludida acima.

**Teorema 23.** *Seja  $M$  uma variedade com bordo  $\partial M$ . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- i)  $M$  não é  $\mathcal{D}$ - $L^1$ -Liouville;
- ii) O Núcleo de Green de Dirichlet  ${}^{\mathcal{D}}G(x, \cdot)$  está em  $L^1(M)$  para qualquer  $x \in M$ ;
- iii) O tempo médio de saída de Dirichlet  ${}^{\mathcal{D}}E$  é finito sempre e é dado por

$${}^{\mathcal{D}}E(x) = \int_M {}^{\mathcal{D}}G(x, y) dy. \tag{3.30}$$

*Demonstração.* i)  $\Rightarrow$  ii) Seja  $u$  uma função não negativa que não satisfaz a propriedade de  $\mathcal{D}$ - $L^1$ -Liouville, ou seja,

$$\begin{cases} \Delta u \leq 0 & \text{no } \text{int}M \\ u = 0 & \text{sobre } \partial M, \end{cases}$$

de tal modo que  $u$  não é identicamente nula em  $M$ . Segue do Princípio do Máximo que  $u$  é estritamente positiva no  $\text{int}M$ . Agora, fixemos um conjunto compacto  $V \Subset \text{int}M$ , um ponto  $x \in V$  e  $C$  uma constante suficientemente grande que satisfaz

$${}^{\mathcal{D}}G(x, y) \leq Cu(y), \quad \forall y \in \partial V. \quad (3.31)$$

Tomemos uma exaustão relativamente compacta  $\{\Omega_k\} \nearrow M$  com  $V \subset \Omega_1$  e  $\overline{\partial_0 \Omega_k}$  intersectando transversalmente  $\partial M$ , como  $u$  é superharmônica e  ${}^{\mathcal{D}}G^{\Omega_k}(x, \cdot)$  é harmônica em  $M \setminus V$ , segue, novamente do Princípio do Máximo que

$${}^{\mathcal{D}}G^{\Omega_k}(x, y) \leq Cu(y), \quad \forall y \in \Omega_k \setminus V.$$

Aplicando o limite com  $k \rightarrow +\infty$  obtemos que, para todo  $y \in M \setminus V$

$${}^{\mathcal{D}}G^M(x, y) = \lim_{k \rightarrow +\infty} {}^{\mathcal{D}}G^{\Omega_k}(x, y) \leq Cu(y).$$

Portanto, sendo  ${}^{\mathcal{D}}G(x, y)$  localmente integrável obtemos

$$\begin{aligned} \int_M {}^{\mathcal{D}}G(x, y) dy &= \int_V {}^{\mathcal{D}}G(x, y) dy + \int_{M \setminus V} {}^{\mathcal{D}}G(x, y) dy \\ &\leq \int_V {}^{\mathcal{D}}G(x, y) dy + C \int_{M \setminus V} u(y) dy < +\infty. \end{aligned}$$

Segue daí que  ${}^{\mathcal{D}}G(x, \cdot)$  é integrável em todo  $M$  e, portanto,  ${}^{\mathcal{D}}G(x, \cdot) \in L^1(M)$ .

ii)  $\Rightarrow$  iii) Seja  $\{\Omega_k\} \nearrow M$  uma exaustão por domínio relativamente compactos com bordo  $\overline{\partial_0 \Omega_k}$  intersectando transversalmente  $\partial M$  e ainda denotamos  ${}^{\mathcal{D}}G^{\Omega_k}$  o Núcleo de Green de Dirichlet de cada domínio correspondente. Como  ${}^{\mathcal{D}}G^{\Omega_k}(x, \cdot)$  está em  $L^1(\Omega_k)$  para todo  $x \in \Omega_k$  teremos que

$$\int_{\Omega_k} {}^{\mathcal{D}}G^{\Omega_k}(x, y) dy < +\infty,$$

e ainda

$$\begin{cases} \Delta_x {}^{\mathcal{D}}G^{\Omega_k}(x, y) = -\delta_y(x) & \text{para todo } x, y \in \text{int}\Omega_k \\ {}^{\mathcal{D}}G^{\Omega_k}(x, y) = 0 & \text{se } y \in \partial\Omega_k. \end{cases}$$

Obtemos então

$$\begin{aligned} \Delta_x \left( \int_{\Omega_k} {}^{\mathcal{D}}G^{\Omega_k}(x, y) dy \right) &= \int_{\Omega_k} \Delta_x {}^{\mathcal{D}}G^{\Omega_k} dy \\ &= \int_{\Omega_k} -\delta_y(x) dy = -1 \text{ em } \text{int}M, \end{aligned}$$

e

$$\int_{\Omega_k} {}^{\mathcal{D}}G^{\Omega_k}(x, y) dy = 0 \text{ sobre } \partial\Omega_k,$$

logo  $\int_{\Omega_k} {}^{\mathcal{D}}G^{\Omega_k}(x, y) dy$  é uma função que satisfaz (3.29) e pela unicidade do problema de Dirichlet em conjuntos compactos podemos concluir que

$$\int_{\Omega_k} {}^{\mathcal{D}}G^{\Omega_k}(x, y) dy = {}^{\mathcal{D}}E^{\Omega_k} \text{ em } \Omega_k.$$

Como  $\lim_{k \rightarrow +\infty} {}^{\mathcal{D}}G^{\Omega_k} = {}^{\mathcal{D}}G(x, y)$  obtemos que

$${}^{\mathcal{D}}E(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} {}^{\mathcal{D}}E^{\Omega_k}(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_M {}^{\mathcal{D}}G^{\Omega_k}(x, y) \chi_{\Omega_k} dy = \int_M {}^{\mathcal{D}}G(x, y) dy.$$

iii)  $\Rightarrow$  ii) Suponhamos que o tempo médio de saída de Dirichlet  ${}^{\mathcal{D}}E$  é finito sempre e é dado por

$${}^{\mathcal{D}}E(x) = \int_M {}^{\mathcal{D}}G(x, y) dy.$$

Como  ${}^{\mathcal{D}}E < +\infty$  teremos que

$$\int_M {}^{\mathcal{D}}G(x, y) dy < +\infty \text{ para qualquer } x \in M.$$

Logo,  ${}^{\mathcal{D}}G(x, \cdot) \in L^1(M)$  para qualquer  $x \in M$ .

ii)  $\Rightarrow$  i) Suponhamos que  ${}^{\mathcal{D}}G(x, \cdot) \in L^1(M)$  daí, definimos a função  $u = \min\{{}^{\mathcal{D}}G(x, \cdot), 1\}$ .

Note que  $u$  é integrável já que  ${}^{\mathcal{D}}G(x, \cdot)$  e 1 são funções integrável. Também é não negativa, pois  ${}^{\mathcal{D}}G(x, \cdot)$  e 1 são não negativas, e ainda, como  ${}^{\mathcal{D}}G(x, \cdot)$  é não constante, podemos concluir que  $u$  também não será não constante. Como  $G \neq +\infty$  teremos que

$$\Delta_x {}^{\mathcal{D}}G(x, y) = -\delta_y(x) \leq 0 \text{ para todo } x, y \in \text{int}M,$$

consequentemente,

$$\Delta_x u = \Delta_x {}^{\mathcal{D}}G(x, y) \leq 0 \text{ no } \text{int}M,$$

então,  $u$  é superharmônica. Uma vez que  ${}^{\mathcal{D}}G(x, y) = 0$  sobre  $\partial M$ , teremos que

$$u = \min\{{}^{\mathcal{D}}G(x, y), 1\} = \min\{0, 1\} = 0 \text{ sobre } \partial M.$$

Logo,  $u$  é uma função que satisfaz

$$\begin{cases} \Delta u \leq 0 & \text{no } \text{int}M \\ u = 0 & \text{sobre } \partial M, \end{cases}$$

mas,  $u \neq 0$  sobre  $M$ , daí  $M$  não é  $\mathcal{D}$ - $L^1$ -Liouville. □

**Observação 20.** *Uma vez o Núcleo de Green de Dirichlet de uma variedade  $M$  coincide com o Núcleo de Green do  $\text{int}M$ , ou seja,*

$${}^{\mathcal{D}}G(\cdot, y) = G^{\text{int}M}(\cdot, y).$$

*O tempo médio de saída de Dirichlet é, de fato, o tempo médio de saída do  $\text{int}M$  pois,*

$$\begin{aligned} {}^{\mathcal{D}}E^M(x) &= \int_M {}^{\mathcal{D}}G(x, y) dy = \int_{\text{int}M} {}^{\mathcal{D}}G(x, y) dy + \int_{\partial M} {}^{\mathcal{D}}G(x, y) dy \\ &= \int_{\text{int}M} {}^{\mathcal{D}}G(x, y) dy \\ &= {}^{\mathcal{D}}E^{\text{int}M}(x) \end{aligned}$$

*Isto significa que  ${}^{\mathcal{D}}E$  pode ser construído por meio de uma exaustão  $\{\Omega_k\}$  consistindo de conjuntos abertos com contorno suave que são relativamente compactos no  $\text{int}M$ .*

Obtemos, como primeira consequência do Teorema 23, uma relação entre a propriedade  $L^1$ -Liouville global de uma variedade e a propriedade  $\mathcal{D}$ - $L^1$ -Liouville para uma subvariedade aberta com bordo suave.

**Corolário 8.** *Seja  $(N, h)$  uma variedade com bordo vazio e  $M \subset N$  o fecho de uma subvariedade aberta suave. Então,  $E^N \geq {}^{\mathcal{D}}E^M$ . Em particular, se  $M$  é  $\mathcal{D}$ - $L^1$ -Liouville então,  $N$  é  $L^1$ -Liouville. Além disso, se existe uma sequência suave aberta de subvariedades  $M_k$  tal que  ${}^{\mathcal{D}}E^{\Omega_k}(\bar{x}) \rightarrow +\infty$  quando  $k \rightarrow +\infty$ , então  $N$  é  $L^1$ -Liouville.*

*Demonstração.* Seja  $(N, h)$  uma variedade com bordo vazio e  $M \subset N$  uma subvariedade aberta com bordo não vazio fechada em  $N$ . Assim, podemos olhar  $(M, g)$  como sendo uma variedade isometricamente mergulhada em  $(N, h)$ , como um subconjunto fechado

também, podemos supor, sem perda de generalidade, que  $(N, h)$  é não parabólica, ou melhor, hiperbólica. Nesse caso, teremos que

$${}^{\mathcal{D}}G^M \leq G^N.$$

Integrando obtemos que

$${}^{\mathcal{D}}E^M(x) = \int_M {}^{\mathcal{D}}G^M(x, y) dy \leq \int_N G^N(x, y) dy = E^N(x). \quad (3.32)$$

Se  $M$  é  $\mathcal{D}$ - $L^1$ -Liouville então  ${}^{\mathcal{D}}E^M$  não é finito, ou seja, segue de (3.32) que

$$+\infty \leq E^N \Rightarrow E^N = +\infty.$$

Logo,  $N$  é  $L^1$ -Liouville. Da mesma forma, suponhamos a existência de uma sequência  $M_k$  de subvariedades abertas suaves tal que

$${}^{\mathcal{D}}E^{M_k}(\bar{x}) \rightarrow +\infty \text{ quando } k \rightarrow +\infty.$$

Como cada  $M_k \subset N$ , teremos que  ${}^{\mathcal{D}}E^{M_k}(\bar{x}) \leq E^N(\bar{x})$ . Aplicando o limite com  $k \rightarrow +\infty$  obtemos que

$$+\infty = \lim_{k \rightarrow +\infty} {}^{\mathcal{D}}E^{M_k}(\bar{x}) \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} E^{M_k}(\bar{x}) = E^N$$

e, portanto,  $N$  é  $L^1$ -Liouville.

□

**Observação 21.** *Observe que a primeira afirmação no enunciado do corolário não decorre imediatamente do Princípio do Máximo devido à não compacidade da subvariedade aberta  $M$ .*

Como era de se esperar, em vista do que ocorre com a completude estocástica (veja [19],[23]), a propriedade  $\mathcal{D}$ - $L^1$ -Liouville é uma propriedade assintótica. Dessa forma, vamos justificar essa afirmação por meio de dois resultados interessantes. Para começar, mostramos com um argumento muito direto que variedades que são isométricas fora de um conjunto compacto compartilham o mesmo comportamento em relação à propriedade  $L^1$ -Liouville.

**Proposição 18.** *Sejam  $M_1$  e  $M_2$  duas variedades Riemanniana com bordos  $\partial M_1$  e  $\partial M_2$  não vazios, respectivamente. Suponha que exista uma isometria entre  $M_1 \setminus K_1$  e  $M_2 \setminus K_2$  onde  $K_1 \subset \text{int}M_1$ , e  $K_2 \subset \text{int}M_2$  são conjuntos compactos. Então,  $M_1$  é  $\mathcal{D}$ - $L^1$ -Liouville se, e somente se,  $M_2$  o é. A mesma conclusão é válida no caso de variedades sem bordo.*

*Demonstração.* Sejam  $M_1$  e  $M_2$  duas variedades Riemannianas com bordos  $\partial M_1$  e  $\partial M_2$  não vazios. Suponhamos, por absurdo, que  $M_1$  é  $\mathcal{D}$ - $L^1$ -Liouville, contudo,  $M_2$  não é  $\mathcal{D}$ - $L^1$ -Liouville. Assim, existe uma função superharmônica  $u \in L^1(M_2)$  com  $u = 0$  sobre  $\partial M_2$ . Também, temos que  $\varphi : M_1 \setminus K_1 \rightarrow M_2 \setminus K_2$  é uma isometria onde  $K_1 \subset \text{int}M_1$  e  $K_2 \subset \text{int}M_2$  são conjuntos compactos, daí tomemos  $\Omega_1, \Omega_2 \subset M_1$  conjuntos abertos relativamente compactos, de tal modo que

$$K_1 \Subset \Omega_1 \Subset \Omega_2.$$

Seja  $u_1 : M_1 \setminus K_1 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função dada por  $u_1 = u \circ \varphi$ . Notemos que, sendo  $u$  integrável teremos que  $u_1$  é integrável. Além disso,

$$\Delta u_1 = \Delta(u \circ \varphi) = \Delta u(\varphi) \quad \text{para todo ponto em } \varphi(M_1 \setminus K_1) = M_2 \setminus K_2.$$

Logo,  $u_1$  é superharmônica. Por último, como  $u$  é não negativa, conseqüentemente,  $u_1$  também será não negativa. A fim de estender esta função em toda  $M_1$ , consideremos  $c \doteq \min_{\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1} u_1$ , e definimos a função

$$v_1 \doteq \begin{cases} \min\{u_1, c\} & \text{em } M_1 \setminus \overline{\Omega_1} \\ c & \text{em } \Omega_2. \end{cases}$$

Notemos que  $v_1$  está bem definido pois, como  $c \doteq \min_{\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1} u_1$ , teremos que  $u_1 > c$  em  $\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1$  e, portanto,  $v_1 = c$  em  $\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1$ . Também,  $v_1$  é superharmônica e não negativa em  $M \setminus \overline{\Omega_1}$  e  $\Omega_2$ . Já que o mínimo de uma função superharmônica ainda é superharmônica, podemos concluir  $v_1$  será, pois

$$v_1 = \min\{u_1, c\} \text{ em } M_1 \setminus \overline{\Omega_1} \text{ e } v_1 = c \text{ em } \Omega_2,$$

onde tanto  $u_1$  como  $c$  são superharmônicas. Então,  $v_1$  é superharmônica em conjuntos abertos que  $M_1$ . Como  $\varphi(\partial M_1) = \partial M_2$  teremos que

$$\begin{cases} \Delta v_1 \leq 0 & \text{no } \text{int}M_1 \\ v_1 = 0 & \text{sobre } \partial M_1. \end{cases}$$

Também,  $v_1 \in L^1(M_1)$ , mas  $v_1$  não é identicamente nula em  $M_1$ , o que é uma absurdo, pois  $M_1$  é  $\mathcal{D}$ - $L^1$ -Liouville. Logo,  $M_2$  é  $\mathcal{D}$ - $L^1$ -Liouville.

□

A seguir, mostraremos que a validade da propriedade  $L^1$ -Liouville de uma variedade sem bordo depende da propriedade  $\mathcal{D}$ - $L^1$ -Liouville de (pelo menos) uma de suas extremidades. Isso pode ser considerado como a volta do Corolário 8 quando a subvariedade aberta  $M$  tem complementar compacto em  $N$ .

**Teorema 24.** *Seja  $(N, h)$  uma subvariedade sem bordo. As seguintes afirmações são válidas:*

*i) Seja  $M$  uma subvariedade aberta em  $N$  tal  $N \setminus M$  é compacto. Se  $N$  é  $L^1$ -Liouville, então  $M$  é  $\mathcal{D}$ - $L^1$ -Liouville.*

*ii) Seja  $E$  o fim de  $N$ . Então,  $E$  é  $\mathcal{D}$ - $L^1$ -Liouville se, e somente se, seu duplo Riemanniano  $\mathcal{D}(E)$  é  $L^1$ -Liouville.*

*iii)  $N$  é  $L^1$ -Liouville se, e somente se, pelo menos uma de suas extremidades é  $\mathcal{D}$ - $L^1$ -Liouville.*

*Demonstração.* Do item i) é similar ao i) no Teorema 23. Seja  $G^N$  o Núcleo de Green de  $N$ , daí temos, por hipótese, que  $N$  é  $L^1$ -Liouville, ou seja,

$$\int_N G^N(x, y) dx = +\infty \text{ para todo } y \in N,$$

onde lembramos que  $G^N$  é obtida por um processo de exaustão

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} {}^{\mathcal{D}}G^{\Omega_k} = G^N,$$

sendo  $\Omega_k$  uma sequência de domínios abertos relativamente compactos com bordo suave.

Como  $N \setminus M$  é compacto, podemos assumir que  $N \setminus M \Subset \Omega_1$ . Agora, suponhamos que  $u \geq 0$  satisfaz

$$\begin{cases} \Delta u \leq 0 & \text{em } M \\ u = 0 & \text{sobre } \partial M. \end{cases}$$

Como  $u > 0$  em  $M$  e  $\partial M \subset \Omega_1$ , teremos que  $\inf_{\partial\Omega_1} u = c_1 > 0$ . Se  $G^N \equiv +\infty$  obtemos que  $u$  não é integrável em  $N$ , o que é um absurdo. Agora, fixando  $y_0 \in \Omega_1$ , teremos que

$$\sup_{\partial\Omega_1} G^N(x, y_0) = c_2 < +\infty.$$

Assim, existe  $\lambda > 0$  tal que  $u(x) \geq \lambda G^N(x, y_0)$  para qualquer  $x \in \partial\Omega_1$  e como  $G^N \geq {}^{\mathcal{D}}G^{\Omega_k}$ , teremos que

$$u \geq \lambda G^N \geq \lambda {}^{\mathcal{D}}G^{\Omega_k} \text{ sobre } \partial\Omega_k \cup \partial\Omega_1.$$

Pelo Princípio do Máximo obtemos

$$u \geq \lambda \mathcal{D}G^{\Omega_k} \text{ no } \Omega_k \setminus \Omega_1,$$

e passando o limite com  $k \rightarrow +\infty$

$$u = \lim_{k \rightarrow +\infty} u \geq \lambda \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{D}G^{\Omega_k} = \lambda G^N \text{ no } N \setminus \Omega_1.$$

Integrando em  $M$  e lembrando que  $\Omega_1$  é compacto e  $G^N$  é localmente integrável, concluímos que

$$\int_M u(x) dx \geq \int_{M \setminus \Omega_1} u(x) dx \geq \lambda \int_{M \setminus \Omega_1} G^N(x, y_0) dx = +\infty,$$

dessa forma,  $\int_M u(x) dx \geq +\infty$  e, conseqüentemente,

$$\int_M u(x) dx = +\infty,$$

o que é um absurdo pois,  $u$  é integrável em  $M$ . Portanto,  $M$  é  $\mathcal{D}$ - $L^1$ -Liouville.

ii) ( $\Leftarrow$ ) Seja  $\mathcal{D}(E)$  uma variedade Riemanniana com  $\partial\mathcal{D}(E) = \emptyset$ , onde  $E$  é um fim de  $N$ . Seja  $G^{\mathcal{D}(E)}$  o Núcleo de Green de  $\mathcal{D}(E)$ . Por hipótese, temos que  $\mathcal{D}(E)$  é  $L^1$ -Liouville, logo

$$\int_{\mathcal{D}(E)} G^{\mathcal{D}(E)}(x, y) dx = +\infty \text{ para todo } y \in \mathcal{D}(E),$$

onde  $G^{\mathcal{D}(E)}$  é obtido através de um processo de exaustão tal que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} G^{\Omega_k} = G^{\mathcal{D}(E)}.$$

Dessa forma, seja  $\Omega_k$  uma seqüência de domínios abertos relativamente compactos com bordo suave tal que o limite acima ocorre, como os fins de uma variedade são abertos da mesma teremos que  $E$  é um subconjunto aberto de  $N$  e ainda  $\mathcal{D}(E) = E$  duplicado sem bordo, logo  $E$  é um subconjunto aberto de  $\mathcal{D}(E)$ . Segue que  $\mathcal{D}(E) \setminus E$  é um conjunto compacto. Assim podemos assumir que  $\mathcal{D}(E) \setminus E \subseteq \Omega_1$ . Agora, tomemos uma função  $u \geq 0$  que satisfaz

$$\begin{cases} \Delta u \leq 0 & \text{em } E \\ u = 0 & \text{sobre } \partial E. \end{cases}$$

Como  $u > 0$  em  $E$  e  $\partial E \subset \Omega_1$  teremos que  $\inf_{\partial\Omega_1} u = c_1 > 0$ . Se  $G^{\mathcal{D}(E)} \equiv +\infty$  teremos que  $u \equiv +\infty$  e, conseqüentemente, não será integrável em  $N$ . o que é um absurdo. Agora, fixemos  $y_0 \in \Omega_1$  um polo de  $G$  tal que

$$\sup_{\partial\Omega_1} G^{\mathcal{D}(E)}(x, y_0) = c_2 < +\infty.$$

Dessa forma, existe  $\gamma > 0$  tal que  $u(x) \geq \gamma G^{\mathcal{D}(E)}$  para qualquer  $x \in \partial\Omega_1$  e ainda, como

$$G^{\mathcal{D}(E)} \geq {}^{\mathcal{D}}G^{\Omega_k},$$

teremos que

$$u \geq \gamma G^{\mathcal{D}(E)} \geq \gamma {}^{\mathcal{D}}G^{\Omega_k} \text{ sobre } \partial\Omega_k \cup \Omega_1.$$

Segue do Principio do Máximo que

$$u \geq \gamma {}^{\mathcal{D}}G^{\Omega_k} \text{ em } \Omega_1 \setminus \Omega_k.$$

Agora aplicando o limite com  $k \rightarrow +\infty$  teremos que

$$u = \lim_{k \rightarrow +\infty} u \geq \gamma \lim_{k \rightarrow +\infty} {}^{\mathcal{D}}G^{\mathcal{D}(E)} = \gamma G^{\mathcal{D}(E)} \text{ no } \mathcal{D}(E) \setminus \Omega_1.$$

Integrando em  $E$ , lembrando que  $\Omega_1$  é compacto, e que  $G^{\mathcal{D}(E)}$  é localmente integrável, concluimos que

$$\int_E u(x) dx \geq \int_{E \setminus \Omega_1} u(x) dx \geq \int_{E \setminus \Omega_1} \gamma G^{\mathcal{D}(E)}(x, y_0) dx = +\infty.$$

Assim,  $\int_E u(x) dx \geq +\infty$  e, portanto,

$$\int_E u(x) dx = +\infty,$$

o que é um absurdo, pois  $u$  é integrável em  $E$ . Portanto, pelo Corolário 8,  $\mathcal{D}(E)$  é  $\mathcal{D}$ - $L^1$ -Liouville.

ii) ( $\Rightarrow$ ) Seja  $E$  o fim de  $N$ , que é um subconjunto aberto pré-compacto. Por hipótese, teremos que  $E$  é  $\mathcal{D}$ - $L^1$ -Liouville, e ainda, temos que  $\mathcal{D}(E)$  o seu duplo Riemanniano, assim pelo Corolário 8 podemos concluir que  $\mathcal{D}(E)$  será  $L^1$ -Liouville.

iii) ( $\Leftarrow$ ) Suponhamos que exista pelo menos uma extremidade de  $N$  satisfazendo a propriedade  $\mathcal{D}$ - $L^1$ -Liouville, logo pelo Corolário 8 teremos que  $N$  será  $L^1$ -Liouville.

iii) ( $\Rightarrow$ ) Agora, suponhamos, por absurdo, que nenhuma extremidade de  $N$  satisfaça a propriedade  $\mathcal{D}$ - $L^1$ -Liuoville, em outras palavra, existe um conjunto compacto  $K \subset N$  tal que

$$N \setminus K = \cup_{i=1}^m E_i,$$

onde cada  $E_i$  são extreminadades de  $N$  e  $\mathcal{D}E^{E_i}$  são funções finitas (veja Teorema 23), para qualquer  $i = 1, \dots, m$ . Como cada fim é um subconjunto disjunto de  $N$  teremos que

$$\partial E_i \cap \partial E_j = \emptyset.$$

Para qualquer  $i \neq j$  definimos  $\mathcal{D}E^{E_i} \equiv 0$  fora de cada  $E_i$ .

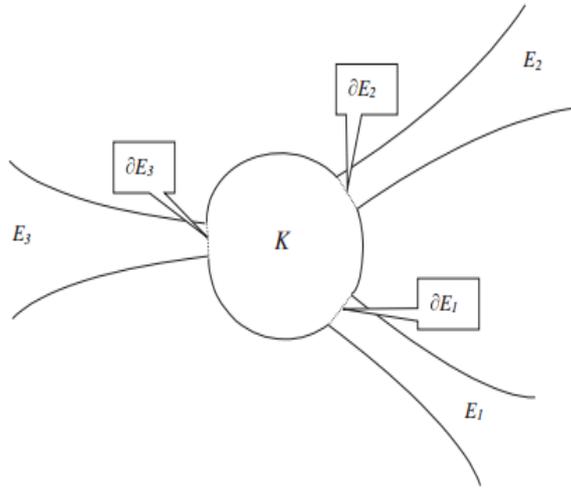


Figura 3.1: Fins de uma variedade

Afirmamos que  $\mathcal{D}E^{N \setminus K} = \sum_{i=1}^m \mathcal{D}E^{E_i}$ . Com efeito, definimos uma função  $f : N \setminus K \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f = \sum_{i=1}^m \mathcal{D}E^{E_i}$ . Notemos que

$$\Delta f = \Delta \left( \sum_{i=1}^m \mathcal{D}E^{E_i} \right) = \sum_{i=1}^m \Delta \mathcal{D}E^{E_i} = -1 \text{ no int}(N \setminus K),$$

e como  $\mathcal{D}E^{E_i} = 0$  sobre  $\partial E^{E_i}$ , teremos que

$$f = \sum_{i=1}^m \mathcal{D}E^{E_i} = 0 \text{ sobre } \partial(N \setminus K) = \cup \partial E_i.$$

Segue da unicidade do tempo médio de saída de Dirichlet que  $f = \mathcal{D}E^{N \setminus K}$  e, portanto,

$$\mathcal{D}E^{N \setminus K} = \sum_{i=1}^m \mathcal{D}E^{E_i}.$$

Então,  $\mathcal{D}E^{N \setminus K}$  é finito, pois  $\sum_{i=1}^m \mathcal{D}E^{E_i}$  é finito e, conseqüentemente,  $N \setminus K$  não é  $\mathcal{D}$ - $L^1$ -Liouville. Assim, pelo item i) teremos que  $N$  não é  $L^1$ -Liouville, o que é um absurdo. Portanto,  $N$  possui pelo menos uma extremidade  $\mathcal{D}$ - $L^1$ -Liouville. □

### 3.4 Completude estocástica vs propriedade $L^1$ -Liouville

Como vimos em, A. Grigar'yan [6], aplicando a versão do Teorema 23 para variedade sem bordo, foi provado que toda variedade estocasticamente completa é  $L^1$ -Liouville. Além disso, os dois conceitos são de fato equivalentes para uma grande classe de variedades rotacionalmente simétrica(veja [20]). Nesta seção apresentaremos alguns exemplos em qualquer dimensão mostrando que, em geral, os dois conceitos não são equivalentes. Isto completa a imagem em [20], onde apenas o caso de superfícies bidimensionais foi considerado.

Uma vez que a propriedade  $L^1$ -Liouville é equivalente à divergência da integral,

$$\int_M G(x, y) dy = \int_M \int_0^{+\infty} p(t, x, y) dt dy,$$

uma abordagem natural para investigar sua validade é por meio de estimativas de Núcleo do Calor, e do Núcleo de Green.

No primeiro exemplo empregamos argumentos parabólicos para mostrar a divergência da integral acima. Faremos uso das seguintes estimativas nesta configuração por A.Grigoar'yan e L.Saloff-Coste em [4].

Lembramos que uma variedade satisfaz a desigualdade parabólica de Harnak (PHI) se existe uma constante  $C_0$  tal que qualquer solução não negativa  $u$  da equação de calor

$$\partial_t u = \Delta u,$$

em qualquer cilindro  $\mathcal{Q} = (\tau, \tau + T) \times B(x, r)$  com  $T = r^2$  e  $\tau \in (-\infty, +\infty)$  satisfaz

$$\sup_{\mathcal{Q}_-} u \leq C_0 \inf_{\mathcal{Q}_+} u, \quad (\text{PHI})$$

onde  $\mathcal{Q}_- = \left\{ \tau + \frac{T}{4}, \tau + \frac{T}{2} \right\} \times B\left(x, \frac{r}{2}\right)$  e  $\mathcal{Q}_+ = \left\{ \tau + \frac{3T}{4}, \tau + T \right\} \times B\left(x, \frac{r}{2}\right)$ .

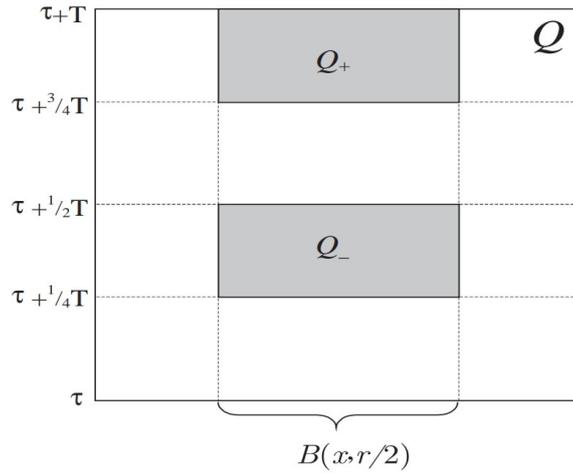


Figura 3.2: Cilindros  $\mathcal{Q}_+$  e  $\mathcal{Q}_-$  em  $\mathcal{Q}$

É bem conhecido (Veja [33], Teorema 5.5.1) que (PHI) é equivalente à validade simultânea da duplicação e das desigualdades de Poincaré invariáveis de escala, e em uma variedade completa esta implica na curvatura de Ricci não negativa.

**Teorema 25** ([4], Teorema 3.3). *Seja  $M$  uma variedade completa não parabólica completa,  $\partial M = \emptyset$ . Suponhamos que a desigualdade parabólica de Harnack (PHI) se mantenha em  $M$  e seja  $K$  um conjunto compacto em  $M$ . Então, existe  $\delta > 0$  e, para cada  $t_0 > 0$  existem as constantes positivas  $C$  e  $c$  tal que, para todo  $t > t_0$  e todo  $x, y \in \Omega = M \setminus K_\delta$ ,  $K_\delta$  a  $\delta$ -vizinhança de  $K$ ,*

$$p^\Omega(t, x, y) \geq \frac{c}{V(x, \sqrt{t})} \exp\left(-C \frac{d^2(x, y)}{t}\right) \quad (3.33)$$

Apresentamos agora um exemplo em dimensão arbitrária de uma variedade  $L^1$ -Liouville estocasticamente incompleta com pelo menos duas extremidades.

Mas, antes iremos definir o que é uma soma conexa.

**Definição 20.** *A soma conexa  $M = M_1 \# M_2$  de  $n$ -variedades  $M_1$  e  $M_2$  é formada pela exclusão dos interiores das  $n$ -bolas  $B_i^n$  em  $M_i^n$  e colando as variedades perfuradas resultantes  $M_i \setminus B_i$  umas às outras por um homeomorfismo  $h : \partial B_2 \rightarrow \partial B_1$ , de tal modo*

$$M = M_1 \# M_2 = (M_1 \setminus B_1) \cup_h (M_2 \setminus B_2).$$

**Exemplo 3.** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana,  $\partial M = \emptyset$  definida pela soma conexa  $M = M_1 \# M_2$  onde*

- i)  $M_1$  é uma variedade Riemanniana não parabólica completa que suporta (PHI);
- ii)  $M_2$  é uma variedade Riemanniana geodesicamente completa e estocasticamente incompleta.

Afirmamos que  $M$  é uma variedade  $L^1$ -Liouville estocasticamente incompleta.

Com efeito, como  $M = M_1 \# M_2$  e  $M_2$  é geodesicamente completa e estocasticamente incompleta, obtemos pelo Lema 3.1 de [19] que  $M$  é estocasticamente incompleta. Agora, tomemos  $K \subset M_1$  um subconjunto compacto contendo o disco ao longo da fronteira cuja a colagem de  $M_1$  com  $M_2$  é realizada. Daí, pelo Teorema 25 temos que existe  $\delta > 0$  e, para todo  $t_0 > 0$  existem as constantes positivas  $C$  e  $c$  tal que para todo  $t > t_0$  e todo  $x, y \in \Omega = M_1 \setminus K_\delta$ , a  $\delta$ -vizinhança de  $K$  temos

$$p^\Omega(t, x, y) \geq \frac{c}{V_1(x, \sqrt{t})} \exp\left(-C \frac{d^2(x, y)}{t}\right).$$

Consideremos o Núcleo do Calor de Dirichlet  ${}^{\mathcal{D}}p^\Omega$  e o tempo médio de saída de Dirichlet  ${}^{\mathcal{D}}E^\Omega$  de  $\Omega$ . Como  $M_1$  é uma variedade não parabólica completa que suporta o (PHI) obtemos, pelo Teorema 25, que

$$\begin{aligned} {}^{\mathcal{D}}E^\Omega(x) &= \int {}^{\mathcal{D}}G^\Omega(x, y) dy \\ &= \int_\Omega \int_0^{+\infty} {}^{\mathcal{D}}p^\Omega(t, x, y) dt dy \\ &\geq \int_\Omega \int_{t_0}^{+\infty} \frac{c}{V_1(x, \sqrt{t})} \exp\left(-C \frac{d^2(x, y)}{t}\right) dt dy. \end{aligned}$$

Como  $\Omega \supset \Omega \cap B(x, \sqrt{t})$  teremos que

$${}^{\mathcal{D}}E^\Omega(x) \geq \int_{\Omega \cap B(x, \sqrt{t})} \int_{t_0}^{+\infty} \frac{c}{V_1(x, \sqrt{t})} \exp\left(-C \frac{d^2(x, y)}{t}\right) dt dy$$

e ainda,  $y \in \Omega$ , logo  $y \in B(x, \sqrt{t})$  e, conseqüentemente,  $d(x, y) < \sqrt{t}$  e daí

$$-\frac{C}{t} d^2(x, y) > -\frac{C}{t} t > -C.$$

Assim,

$$\begin{aligned} {}^{\mathcal{D}}E^\Omega(x) &\geq \int_{\Omega \cap B(x, \sqrt{t})} \int_{t_0}^{+\infty} \frac{c}{V_1(x, \sqrt{t})} \exp\left(-C \frac{d^2(x, y)}{t}\right) dt dy \\ &\geq \int_{\Omega \cap B(x, \sqrt{t})} \int_{t_0}^{+\infty} \frac{c}{V_1(x, \sqrt{t})} \exp(-C) dt dy. \end{aligned}$$

Pelo Teorema de inversão da ordem das integrais repetidas tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{D}E^\Omega(x) &\geq \int_{t_0}^{+\infty} \frac{c}{V_1(x, \sqrt{t})} \exp(-C) \int_{\Omega \cap B(x, \sqrt{t})} dy dt \\ &= \int_{t_0}^{+\infty} \frac{c}{V_1(x, \sqrt{t})} \exp(-C) V_1(\Omega \cap B(x, \sqrt{t})) dt. \end{aligned}$$

Agora, tomando  $t_0 < t_1 < t$  de tal forma que

$$V_1(\Omega \cap B(x, \sqrt{t})) \geq V_1(x, \sqrt{t}) - V_1(K_\delta),$$

temos

$$\begin{aligned} \mathcal{D}E^\Omega(x) &\geq c \exp(-C) \int_{t_0}^{+\infty} \frac{V_1(\Omega \cap B(x, \sqrt{t}))}{V_1(x, \sqrt{t})} \\ &\geq c \exp(-C) \int_{t_1}^{+\infty} \frac{V_1(x, \sqrt{t}) - V_1(K_\delta)}{V_1(x, \sqrt{t})} \\ &= c \exp(-C) \left( \int_{t_1}^{+\infty} dt - \int_{t_1}^{+\infty} \frac{V_1(K_\delta)}{V_1(x, \sqrt{t})} dt \right) = +\infty, \end{aligned}$$

então

$$\mathcal{D}E^\Omega(x) = +\infty.$$

Segue do Corolário 8 que,

$$+\infty \leq E^M(x),$$

logo  $E^M = +\infty$  e, portanto,  $M$  é  $L^1$ -Liouville.

A seguir uma alternativa, um pouco mais geral baseada no Teorema 24. Com efeito, suponhamos que  $M_1$  seja  $L^1$ -Liouville com uma extremidade, por exemplo,  $M_1$  é uma variedade modelo estocasticamente completa (veja, por exemplo [20]) e ainda  $M_2$  e  $M = M_1 \# M_2$  seja como descritas acima. Tomemos também  $K$  um conjunto compacto com bordo suave contendo os discos ao longo dos quais  $M_1$  e  $M_2$  foram colados e denotemos por  $E_1$  o fim em  $M \setminus K$ , isométrico ao fim correspondente de  $M_1$ . Como  $M_1$  é  $L^1$ -Liouville, temos pelo Teorema 24 item iii) que  $M$  é  $L^1$ -Liouville. Por outro lado, temos que  $M$  é estocasticamente incompleta, pois  $M_2$  é estocasticamente incompleta.

No próximo exemplo, será apresentado uma variedade  $L^1$ -Liouville estocasticamente incompleta com apenas uma extremidade.

**Exemplo 4.** *Seja  $h$  qualquer métrica Riemanniana em  $\mathbb{R}^m$  que torne  $(\mathbb{R}^m, h)$  estocasticamente incompleta e tal que  $h = g_{\mathbb{R}^m}$  no semi espaço superior*

$$\bar{\mathbb{R}}_+^m \doteq \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m; x_m \geq 0\}.$$

*Por exemplo, podemos colocar  $g$  como a métrica Riemanniana dada em coordenadas polares por*

$$g = dr^2 + g_1(r)^2 d\theta^2,$$

*com  $g_1(r) = e^{r^3}$  para  $r \gg 1$ ,  $g_1$  suave e satisfazendo  $g_1(0) = 0$  e  $g_1'(0) = 1$  e definimos  $h$  como sendo*

$$g = (1 - \xi)g + \xi g_{\mathbb{R}^m},$$

*onde  $\xi$  é uma função de corte dependendo apenas de  $x_m$  e satisfazendo*

$$\xi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_m \geq 0 \\ 0 & \text{se } x_m \leq -1. \end{cases}$$

Argumentando como em ([20], pág 318), é possível construir uma função que viole o princípio do máximo fraco no infinito e, portanto,  $M$  não é estocasticamente incompleta.

Afirmamos que  $(\mathbb{R}^m, h)$  é  $L^1$ -Liouville. Temos, pelo Corolário 8, que é suficiente verificar que o semi espaço euclidiano  $\bar{\mathbb{R}}_+^m$  é  $\mathcal{D}$ - $L^1$ -Liouville. Apresentaremos três maneiras diferentes de verificar este fato. O primeiro e o segundo dependem fortemente da expressão explícita do Núcleo do Calor e Green do semi espaço. O terceiro é um método elegante, e ilustramos como funciona baseada em um princípio de comparação global.

**Estimativa do Núcleo do Calor :** Fazendo uso da expressão do Núcleo do Calor de Dirichlet de  $\bar{\mathbb{R}}_+^m$  P. Gyrya e L. Saloff-Coste em [38] nos dá a seguinte estimativa inferior

$${}^{\mathcal{D}}p_{\bar{\mathbb{R}}_+^m}(t, x, y) \geq \frac{Cx_my_m}{t^{n/2}(x_m + \sqrt{t})(y_m + \sqrt{t})} \exp\left(-\frac{c|x-y|}{4t}\right).$$

Assim, consideremos o Núcleo do Calor de Dirichlet  ${}^{\mathcal{D}}p_{\bar{\mathbb{R}}_+^m}$ , o Núcleo de Dirichlet Green  ${}^{\mathcal{D}}G_{\bar{\mathbb{R}}_+^m}$  e o tempo médio de saída de Dirichlet  ${}^{\mathcal{D}}E_{\bar{\mathbb{R}}_+^m}$  de  $\bar{\mathbb{R}}_+^m$ . Daí,

$$\begin{aligned} {}^{\mathcal{D}}E_{\bar{\mathbb{R}}_+^m} &= \int_{\bar{\mathbb{R}}_+^m} {}^{\mathcal{D}}G_{\bar{\mathbb{R}}_+^m}(x, y) dy \\ &\geq \int_{B(x, \sqrt{t})} \int_0^{+\infty} {}^{\mathcal{D}}p_{\bar{\mathbb{R}}_+^m}(t, x, y) dt dy \\ &\geq \int_{B(x, \sqrt{t})} \int_0^{+\infty} \frac{Cx_my_m}{t^{n/2}(x_m + \sqrt{t})(y_m + \sqrt{t})} \exp\left(-\frac{c|x-y|}{4t}\right) \end{aligned}$$

Argumentando como no Exemplo 3, chegamos à conclusão desejada.

**Estimativas do Nucleo de Green :** Relembrando a expressão do Núcleo Dirichlet de Green de Dirichlet do  $\overline{\mathbb{R}}_+^m$  dado no Exemplo 2, temos para  $m \geq 3$  que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}E_{\overline{\mathbb{R}}_+^m} &= \int_{\overline{\mathbb{R}}_+^m} \mathcal{D}G_{\overline{\mathbb{R}}_+^m}(x, y) dy \\ &= C_m \int_{\overline{\mathbb{R}}_+^m} \frac{1}{|x - y|^{m-2}} - \frac{1}{|x - y'|^{m-2}} dy, \end{aligned}$$

onde definimos  $y' = (y_1, \dots, y_{m-1}, -y_m)$ . Escolhendo  $x = (0, 0, \dots, 0, 1)$  e colocando em coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, x_m)$ , o integrando pode ser escolhido como  $(z, y_{m-1}, y_m) = (r \cdot \cos \theta, r \cdot \sin \theta, x_m)$ , onde  $z = (y_1, \dots, y_{m-2})$ . Logo

$$\begin{aligned} |x - y| &= \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle} \\ &= \sqrt{\langle (-y_1, \dots, -y_{m-2}, -y_{m-1}, -y_m + 1), (-y_1, \dots, -y_{m-2}, -y_{m-1}, -y_m + 1) \rangle}, \end{aligned}$$

e fazendo uma mudança de variável obtemos que

$$\begin{aligned} |x - y| &= \sqrt{\langle (-z, -y_{m+1}, 1 - y_m), (-z, -y_{m+1}, 1 - y_m) \rangle} \\ &= \sqrt{z^2 + y_{m-1}^2 + (1 - y_m)^2} \\ &= \sqrt{r^2 \cdot \cos^2 \theta + r^2 \cdot \sin^2 \theta + (1 - x_m)^2} \\ &= \sqrt{r^2 + (1 - x_m)^2}. \end{aligned}$$

De maneira análoga, teremos que

$$\begin{aligned} |x - y'| &= \sqrt{\langle (-y_1, \dots, -y_{m-2}, -y_{m-1}, y_m + 1), (-y_1, \dots, -y_{m-2}, -y_{m-1}, y_m + 1) \rangle} \\ &= \sqrt{z^2 + y_{m-1}^2 + (1 + y_m)^2} \\ &= \sqrt{r^2 + (1 + x_m)^2}. \end{aligned}$$

Agora, notemos que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|x - y|^{m-2}} - \frac{1}{|x - y'|^{m-2}} &= \frac{1}{[\sqrt{r^2 + (x_m - 1)^2}]^{m-2}} - \frac{1}{[\sqrt{r^2 + (x_m + 1)^2}]^{m-2}} \\ &= \frac{1}{[r^2 + (x_m - 1)^2]^{m-2/2}} - \frac{1}{[r^2 + (x_m + 1)^2]^{m-2/2}}. \end{aligned}$$

Dessa forma definimos a função  $f : \mathbb{R} \setminus \{r\} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(t) = \frac{1}{(r^2 + t^2)^{m-2/2}},$$

e derivando com relação a  $t$  obtemos

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{-(m-2)(r^2 + t^2)^{m-2/2}}{(r^2 + t^2)^{m-2}} \\ &= -(m-2)(r^2 + t^2)^{m-4/2-(m-2)} \cdot t \\ &= (-m+2)(r^2 + t^2)^{-m/2} \cdot t, \end{aligned}$$

assim, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{|x-y|^{m-2}} - \frac{1}{|x-y'|^{m-2}} &= f(x_m - 1) - f(x_m + 1) \\ &= -[f(x_m - 1) - f(x_m + 1)]. \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema de Lagrange, podemos concluir que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|x-y|^{m-2}} - \frac{1}{|x-y'|^{m-2}} &= -f'(\xi) \\ &= -(-m+2)(r^2 + \xi^2)^{-m/2}\xi \\ &= C(r^2 + \xi^2)^{-m/2}\xi, \end{aligned}$$

onde  $\xi \in (x_m - 1, x_m + 1)$  e, portanto, é estimado superiormente por

$$C(x_m - 1)[(x_m + 1)^2 + r^2]^{-m/2} \geq \frac{1}{2}(x_m + 1)[(x_m + 1)^2 + r^2]^{-m/2} \text{ para } x_m \geq 3.$$

Podemos, portanto, estimar

$$\mathcal{D}E_{\mathbb{R}_+^m} \geq C_m \int_0^{+\infty} r^{m-2} dr \int_3^{+\infty} (x_m + 1)[(x_m + 1)^2 + r^2]^{-m/2} = +\infty.$$

Segue daí que  $\overline{\mathbb{R}_+^m}$  é  $\mathcal{D}$ - $L^1$ -Liouville e assim, pelo Corolário 8,  $\mathbb{R}^m$  é  $L^1$ -Liouville. Calculos semelhantes levam à mesma conclusão se  $m = 2$ .

**Argumento Elíptico** : Descrevemos agora uma argumento elíptico. Notemos que, ao usar os mecanismos desenvolvido até agora, os mesmos permitem obter a conclusão necessária com uma quantidade mínima de calculos explícitos.

Dado  $k > 1$  e consideremos uma placa

$$\Omega_k = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^m \mid \frac{1}{k} \leq x_m \leq k \right\},$$

e a função

$$E_k(x) = \frac{1}{2} \left( x_m - \frac{1}{k} \right) (k - x_m).$$

Observemos que  $x_m \leq k$  e segue daí que  $k - x_m$  é não negativo, de modo análogo, como  $x_m \geq \frac{1}{k}$ , teremos que  $x_m - \frac{1}{k}$  também será não negativo. Conseqüentemente,  $E_k$  é uma função positiva e ainda

$$\begin{aligned} \Delta E_k(x) &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left[ \frac{1}{2} \left( x_m - \frac{1}{k} \right) (k - x_m) \right] \\ &= \frac{d^2}{dx_m} \left[ \frac{1}{2} \left( -x_m^2 + x_m k + \frac{x_m}{k} - 1 \right) \right] \\ &= \frac{d}{dx_m} \left\{ \frac{1}{2} \left[ (k - x_m) - \left( x_m - \frac{1}{k} \right) \right] \right\} \\ &= -1, \text{ no int}M, \end{aligned}$$

$$E_k \left( \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k} \right) \left( k - \frac{1}{k} \right) = 0 \text{ e } E_k(k) = \frac{1}{2} \left( k - \frac{1}{k} \right) (k - k) = 0, \text{ sobre } \partial\Omega_k.$$

Logo,  $E_k$  é uma solução positiva que satisfaz,

$$\begin{cases} \Delta E_k = -1 & \text{no } \text{int}\Omega_k \\ E_k = 0 & \text{sobre } \partial\Omega_k. \end{cases}$$

Além disso, temos que  $\phi_k(x) = E_k(x) + \varepsilon|x|^2$  é uma função de Khas'minskii para  $\Omega_k$  sempre que  $\varepsilon$  for suficientemente pequeno, pois tomando  $\frac{1}{k} \leq \varepsilon \leq k$  obtemos a bola fechada

$$B = \{x \in \mathbb{R}_+^{m-1}; |x - 1| \leq \varepsilon\},$$

tomando a norma do máximo podemos escrever

$$B = [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]^{m-1}.$$

Assim, dado  $y \in B \times \left[ \frac{1}{k}, k \right]$  teremos que

$$\frac{1}{k} \leq y_m \leq k,$$

consequentemente,  $B \times \left[ \frac{1}{k}, k \right] \subset \Omega_k$ . Daí, teremos que  $0 \leq \phi_k(x) \in C^0 \left( \Omega_k \setminus B \times \left[ \frac{1}{k}, k \right] \right) \cap W_{loc}^{1,2} \left( \text{int} \Omega_k \setminus B \times \left[ \frac{1}{k}, k \right] \right)$  tal que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi_k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (E_k(x) + \varepsilon|x|^2) = +\infty$$

e,

$$- \int_{\text{int}(\Omega_k \setminus B)} \langle \nabla \phi_k, \nabla \rho \rangle = \int_{\text{int}(\Omega_k \setminus B)} \rho \Delta \phi_k - \int_{\partial(\Omega_k \setminus B)} \frac{\partial \phi_k}{\partial \nu} \rho \leq 0,$$

onde  $0 \leq \rho \in C^0(\Omega_k \setminus \overset{\circ}{B}) \cap W_{loc}^{1,2}(\text{int} \Omega_k \setminus B)$ . Segue que  $\phi_k$  é uma função de Khas'minskii e, portanto, pelo Lema 6 teremos que  $\Omega_k$  é  $\mathcal{D}$ -parabólico e, consequentemente,  $E_k$  é seu tempo média de saída de Dirichet (finito). Agora, fixando  $x \in \text{int} \Omega_k$  e fazendo  $k \rightarrow +\infty$  obtemos que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} E_k(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left( x_m - \frac{1}{k} \right) (k - x_m) = +\infty.$$

Logo o limite de  $E_k$  quando  $k \rightarrow +\infty$  diverge e, consequentemente, pelo Corolário 8,  $\overline{\mathbb{R}}_+^m$  é  $\mathcal{D}$ - $L^1$ -Liouville.

### 3.5 Condições geométricas localizadas para a propriedade $L^1$ -Liouville

De acordo com a teoria desenvolvida até agora, em vista dos exemplos acima, é natural supor que a validade da propriedade  $L^1$ -Liouville depende apenas de condições geométricas confinadas em um domínio suficientemente grande de uma variedade.

Esta seção visa confirmar essa intuição ao considerar três situações diferentes: a primeira, muito geral, envolve uma condição de curvatura de Ricci (assintoticamente) não negativa em um semi espaço geométrico; o segundo diz respeito ao complemento da metade do espaço em situações hiperbólicas, e o terceiro lida com cones de produto deformado e depende de uma suposição espectral.

#### Curvatura de Ricci em semi espaço.

Inspirado no Exemplo 4, primeiro investigamos o papel dos limites de curvatura de Ricci inferiores em um semi-espaço geométrico. Basicamente, vamos trabalhar com a curvatura

de Ricci não negativa, mas uma certa quantidade de negatividade também é permitida. Para um semi espaço geométrico, queremos dizer o seguinte

**Definição 21.** *Seja  $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$  um raio geodésico, parametrizado pelo comprimento de arco na variedade Riemanniana completa  $(M, g)$ . O semi-espaço  $M^+$  em relação a  $\gamma$  é o domínio*

$$M^+ = \cup_{t>0} B_t(\gamma(t)),$$

onde  $B_t(p)$  é a bola métrica aberta de raio  $t > 0$  centrada em  $p$ .

**Teorema 26.** *Suponha que  $(M, g)$  é uma variedade Riemanniana completa satisfazendo*

$$\text{Ric} \geq -\frac{(m-1)B^2}{1+r_{\gamma(0)}^2(x)} \quad (3.34)$$

sobre o semi espaço  $M^+$  com respeito a algum raio geodésico  $\gamma$ , para algum  $0 \leq B < \frac{\sqrt{m}}{m-1}$ , onde  $r_{\gamma(0)}$  denota a função de distância em  $M$  de  $\gamma(0)$ . Então,  $(M, g)$  é  $L^1$ -Liouville.

*Demonstração.* Consideremos, inicialmente, com uma suposição mais geral de que para cada número inteiro positivo  $k$  a seguinte desigualdade é válida

$$\Delta r_k(x) \leq (m-1) \frac{\sigma'_k}{\sigma_k}(r_k(x)); \text{ para todo } x \in B_{t_k}(\gamma(t_k)), \quad (3.35)$$

onde  $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  é uma sequência crescente com  $t_1 > 1$ ,  $r_k(x) = d(x, \gamma(t_k))$  é a função distância de  $\gamma(t_k)$  e  $\sigma_k : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  é a função de deformação de uma variedade modelo  $m$ -dimensional  $M_{\sigma_k}$ . Agora, para cada número inteiro positivo  $k$  difinimos a função  $F_k : [0, t_k - 1) \rightarrow [0, +\infty)$  dada por

$$F_k(r) = \int_r^{t_k-1} \frac{\int_0^t \sigma_k^{m-1}(s) ds}{\sigma_k^{m-1}(t)} dt.$$

Derivando a expressão acima com relação a  $r$  e aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo obtemos

$$\begin{aligned} F_k(r) &= \int_r^{t_k-1} \frac{\int_0^t \sigma_k^{m-1}(s) ds}{\sigma_k^{m-1}(t)} dt = - \int_{t_k-1}^r \frac{\int_0^t \sigma_k^{m-1}(s) ds}{\sigma_k^{m-1}(t)} dt \\ &\Rightarrow F'_k(r) = - \frac{\int_0^t \sigma_k^{m-1}(s) ds}{\sigma_k^{m-1}(r)} dt < 0. \end{aligned}$$

Agora, por (3.35) a comparação com a função  $r_k : B_{t_k}(\gamma(t_k)) \rightarrow [0, +\infty)$  satisfaz

$$\begin{aligned}
 \Delta F_k(r_k(x)) &= F_k''(r_k(x)) + F_k'(r_k(x))\Delta r_k(x) \\
 &\geq F_k''(r_k(x)) + F_k'(r_k(x))(m-1)\frac{\sigma_k'}{\sigma_k}(r_k(x)) \\
 &= \Delta_{\sigma_k} F_k(r_k(x)) \\
 &= \frac{d}{ds} \left( -\frac{\int_0^t \sigma_k^{m-1}(s) ds}{\sigma_k^{m-1}(r)} dt \right) \\
 &= -\frac{\sigma_k^{m-1}(r)}{\sigma_k^{m-1}(r)} = -1.
 \end{aligned}$$

Além disso, teremos que

$$F_k(t_k - 1) = \int_{t_k-1}^{t_k-1} \frac{\int_0^t \sigma_k^{m-1}(s) ds}{\sigma_k^{m-1}(t)} dt = 0,$$

então,  $F_k \equiv 0$  na fronteira da bola  $B_{t_k-1}(\gamma(t_k))$  e, conseqüentemente, pelo princípio do máximo teremos que

$$F_k(r_k(x)) \leq {}^{\mathcal{D}}E_k(x), \tag{3.36}$$

onde  ${}^{\mathcal{D}}E_k$  denota o tempo médio de saída de Dirichlet de  $B_{t_k-1}(\gamma(t_k))$ .

Para ilustrar a ideia, suponhamos que  $\text{Ric} \geq 0$  em  $M^+$ , ou seja, (3.34) assegura que  $B = 0$ . Pelo Teorema de Comparação do Laplaciano, podemos tomar  $\sigma_k(s) = s$  para qualquer  $k$  e, assim, calcular

$$\begin{aligned}
 F_k(r_k) &= \int_{r_k}^{t_k-1} \frac{\int_0^t \sigma_k^{m-1}(s) ds}{\sigma_k^{m-1}(t)} dt \\
 &= \int_{r_k}^{t_k-1} \frac{\int_0^t s^{m-1} ds}{\sigma_k^{m-1}(t)} dt \\
 &= \int_{r_k}^{t_k-1} \frac{s^m|_0^t}{\sigma_k^{m-1}(t)} dt.
 \end{aligned}$$

Substituindo os limites de integração obtemos

$$\begin{aligned}
 F_k(r_k) &= \int_{r_k}^{t_k-1} \frac{t^m}{\sigma_k^{m-1}(t)} dt \\
 &= \int_{r_k}^{t_k-1} \frac{t^m}{m} \cdot \frac{1}{t^{m-1}} dt \\
 &= \int_{r_k}^{t_k-1} \frac{t}{m} dt \\
 &= \frac{1}{m} [(t_k - 1)^2 - r_k^2(x)].
 \end{aligned}$$

Portanto,

$${}^{\mathcal{D}}E_k(x) \geq F_k(r_k) = \frac{1}{m} [(t_k - 1)^2 - r_k^2(x)],$$

de onde escolhendo  $x_1 = \gamma(2) \in B_{t_k-1}(\gamma(t_k))$  para todo  $k$ , temos

$$\begin{aligned}
 r_k(x_1) &= d(x_1, \gamma(t_k)) \\
 &= d(\gamma(2), \gamma(t_k)) \\
 &= t_k - 2,
 \end{aligned}$$

pois,  $\gamma$  é uma geodésica. Além disso,

$$\begin{aligned}
 {}^{\mathcal{D}}E_k(x_1) &\geq \frac{1}{m} [(t_k - 1)^2 - r_k^2(x_1)] \\
 &= \frac{1}{m} [(t_k - 1)^2 - (t_k - 2)^2] \\
 &= \frac{1}{m} [t_k^2 - 2t_k + 1 - t_k^2 + 4t_k - 4] \\
 &= \frac{1}{m} (2t_k - 3).
 \end{aligned}$$

Uma vez que  $\{t_k\}$  é uma sequência crescente temos que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = +\infty$  e, assim,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} {}^{\mathcal{D}}E_k(x_1) \geq +\infty.$$

Logo  $\lim_{k \rightarrow +\infty} {}^{\mathcal{D}}E_k(x_1) = +\infty$ . Pelo Corolário 8, podemos dizer que  $M$  é  $L^1$ -Liouville.

Notemos que o ingrediente principal no argumento acima será

$$\begin{aligned} \frac{2t_k - 3}{2m} &= \frac{(t_k - 1)^2}{2m} - \frac{(t_k - 2)^2}{2m} \\ &= \frac{(t_k - 1)^2}{2m} - \frac{r_k^2(x_1)}{2m} \\ &= F_k(t_k - 2) \\ &= \int_{t_k - 2}^{t_k - 1} \frac{\int_0^t \sigma_k^{m-1}(s) ds}{\sigma_k^{m-1}(t)} dt, \end{aligned}$$

assim,

$$\lim_{t_k \rightarrow +\infty} F_k(t_k - 2) = \lim_{t_k \rightarrow +\infty} \int_{t_k - 2}^{t_k - 1} \frac{\int_0^t \sigma_k^{m-1}(s) ds}{\sigma_k^{m-1}(t)} dt = +\infty, \quad (3.37)$$

quando  $k \rightarrow +\infty$  e  $t_k \rightarrow +\infty$ . Assim, suponhamos que

$$\text{Ric} \geq -\frac{(m-1)B^2}{1 + r_{\gamma(0)}^2(x)} \text{ sobre } M^+,$$

para alguma constante  $B$ . Pela desigualdade triangular temos

$$d(\gamma(0), \gamma(t_k)) \leq d(x, \gamma(0)) + d(x, \gamma(t_k)).$$

Como  $t_k = d(\gamma(0), \gamma(t_k))$ ,  $d(x, \gamma(0)) = r_{\gamma(0)}(x)$  e  $d(x, \gamma(t_k)) = r_k(x)$ , obtem

$$t_k \leq r_{\gamma(0)}(x) + r_k(x).$$

$$\Rightarrow t_k - r_k(x) \leq r_{\gamma(0)}(x).$$

elevando os dois membros da desigualdade ao quadrado e somando um dos dois lados teremos

$$1 + (t_k - r_k(x))^2 \leq 1 + r_{\gamma(0)}^2(x),$$

e assim,

$$-\frac{1}{1 + (t_k - r_k(x))^2} \leq -\frac{1}{1 + r_{\gamma(0)}^2(x)}.$$

Logo,

$$\text{Ric} \geq -\frac{(m-1)B^2}{1 + r_{\gamma(0)}^2(x)} \geq -\frac{(m-1)B^2}{1 + (t_k - r_k(x))^2}, \text{ para todo } x \in B_{t_k}(\gamma(t_k)).$$

Novamente pelo Teorema de Comparação do Laplaciano ( Teorema 6 ) a desigualdade 3.35 é válida com  $\sigma_k \in C^2([0, +\infty))$  que é solução do seguinte problema

$$\begin{cases} \sigma_k'' - \frac{B^2}{1 + (t_k - r_k(x))^2} \sigma_k = 0 \\ \sigma_k(0) = 0, \sigma_k'(0) = 1. \end{cases} \quad (3.38)$$

Um calculo (veja [11]) mostra que a solução de  $\sigma_k$  de 3.38 é dada explicitamente por

$$\sigma_k(s) = \frac{1}{2\bar{B}} t_k^{1/2+\bar{B}} (t_k - s)^{1/2-\bar{B}} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{s}{t_k} \right)^{2\bar{B}} \right],$$

onde  $\bar{B} < \frac{\sqrt{4B^2+1}}{2}$  e  $\frac{\sqrt{4B^2+1}}{2} \geq \frac{1}{2}$ . Suponhamos, inicialmente, que  $s \in \left[ 0, \frac{t_k}{2} \right]$  e escrevemos  $\lambda = \frac{s}{t_k} \in \left[ 0, \frac{1}{2} \right]$ . Assim obtemos a função  $\rho : \left[ 0, \frac{1}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\rho(\lambda) = 1 - (1 - \lambda)^{2\bar{B}}.$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio, existe  $\bar{\lambda} \in (0, \lambda)$  tal que

$$\rho(\lambda) - \rho(0) = \rho'(\bar{\lambda}) \cdot \lambda,$$

e sendo  $\rho(0) = 0$  teremos

$$\rho(\lambda) = \rho'(\bar{\lambda}) \cdot \lambda.$$

Também,

$$\begin{aligned} \rho'(\lambda) &= 2\bar{B}(1 - \lambda)^{2\bar{B}-1} \\ &\geq 2\bar{B}(1 - 1/2)^{2\bar{B}-1}, \end{aligned}$$

segue que

$$\rho'(\lambda) \geq 2\bar{B}d_1, \text{ onde } d_1 = (1 - 1/2)^{2\bar{B}-1}.$$

Como,  $1/2 - \bar{B} \leq 0$  obtemos que

$$\begin{aligned} \sigma_k(s) &= \frac{1}{2\bar{B}} t_k^{1/2-\bar{B}} (t_k - s)^{1/2-\bar{B}} \rho(\lambda) \\ &= \frac{1}{2\bar{B}} t_k^{1/2-\bar{B}} (t_k - s)^{1/2-\bar{B}} \rho'(\lambda) \cdot \lambda \\ &\geq \frac{1}{2\bar{B}} t_k^{1/2-\bar{B}} (t_k - s)^{1/2-\bar{B}} 2\bar{B}d_1 \frac{s}{t_k} \\ &= t_k^{1/2-\bar{B}} (t_k - s)^{1/2-\bar{B}} d_1 \frac{s}{t_k}, \end{aligned}$$

logo

$$\sigma_k(s) \geq d_1 s \text{ para } s \in [0, t_k/2].$$

Quando  $s \in [t_k/2, t_k]$  teremos que  $\lambda = s/t_k \in [1/2, 1]$ . Assim, utilizando o argumento anterior, obtemos a função  $\rho : [1/2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\rho(\lambda) = 1 - \left(\frac{3}{2} - \lambda\right)^{2\bar{B}}.$$

Logo, pelo Teorema do Valor Médio, existe  $\bar{\lambda} \in (1/2, \lambda)$  tal que

$$\rho(\lambda) - \rho\left(\frac{1}{2}\right) = \rho'(\bar{\lambda}) \cdot \lambda. \quad (3.39)$$

Como  $\rho(1/2) = 0$ , temos

$$\rho(\lambda) = \rho'(\bar{\lambda}) \cdot \lambda.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \rho'(\lambda) &= 2\bar{B}(3/2 - \lambda)^{2\bar{B}-1} \\ &\geq 2\bar{B}\left(\frac{3}{2} - 1\right) \end{aligned}$$

e, conseqüentemente,

$$\rho'(\lambda) \geq 2\bar{B}d_2, \text{ onde } d_2 = (3/2 - 1)^{2\bar{B}-1}.$$

Agora, notemos que  $1 - \left(\frac{3}{2} - \lambda\right)^{2\bar{B}} < 1 - (1 - \lambda)^{2\bar{B}}$ , então

$$\begin{aligned} \sigma_k(s) &= \frac{1}{2\bar{B}} t_k^{1/2+\bar{B}} (t_k - s)^{1/2-\bar{B}} \left[1 - (1 - \lambda)^{2\bar{B}}\right] \\ &\geq \frac{1}{2\bar{B}} t_k^{1/2+\bar{B}} (t_k - s)^{1/2-\bar{B}} \left[1 - \left(\frac{3}{2} - \lambda\right)^{2\bar{B}}\right] \\ &= \frac{1}{2\bar{B}} t_k^{1/2+\bar{B}} (t_k - s)^{1/2-\bar{B}} \rho(\lambda) \\ &= \frac{1}{2\bar{B}} t_k^{1/2+\bar{B}} (t_k - s)^{1/2-\bar{B}} \rho'(\bar{\lambda}) \cdot \lambda. \end{aligned}$$

Como  $\rho(\lambda) = \rho'(\bar{\lambda}) \cdot \lambda$ , temos

$$\begin{aligned} \sigma_k(s) &\geq \frac{1}{2\bar{B}} t_k^{1/2+\bar{B}} (t_k - s)^{1/2-\bar{B}} 2\bar{B}d_2 \frac{s}{t_k} \\ &= t_k^{1/2+\bar{B}} (t_k - s)^{1/2-\bar{B}} d_2 \frac{s}{t_k} \\ &= t_k^{\bar{B}-1/2} (t_k - s)^{1/2-\bar{B}} d_2 s, \end{aligned}$$

portanto,

$$\sigma_k(s) \geq d_2 s.$$

Tomando  $\bar{d} = \min\{d_1, d_2\}$  podemos concluir que

$$\sigma_k(s) \geq \bar{d}s, \text{ para todo } s \in [0, t_k].$$

Portanto,

$$\begin{aligned} F_k(t_k - 2) &= \int_{t_k-2}^{t_k-1} \frac{\int_0^t \sigma_k^{m-1}(s) ds}{\sigma_k^{m-1}(t)} dt \\ &\geq \int_{t_k-2}^{t_k-1} \frac{\int_0^t \bar{d}s^{m-1} ds}{\sigma_k^{m-1}(t)} dt \\ &\geq \int_{t_k-2}^{t_k-1} \frac{\bar{d}}{\sigma_k^{m-1}(t)} t^m dt. \end{aligned}$$

Por outro lado, notemos que  $t_k$  é uma sequência crescente onde  $t_1 > 1$ , e ainda,  $t_k - 2 \leq t \leq t_k - 1$ . Como,  $\sigma$  é uma função monótona crescente, temos

$$\sigma_k(t_k - 2) \leq \sigma_k(t) \leq \sigma_k(t_k - 1),$$

assim, obtemos que

$$\begin{aligned} \sigma_k(t) &\leq \frac{1}{2\bar{B}} t_k^{1/2+\bar{B}} (t_k - (t_k - 1))^{1/2-\bar{B}} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{t_k - 1}{t_k} \right)^{2\bar{B}} \right] \\ &< \frac{1}{2\bar{B}} t_k^{1/2+\bar{B}} t_1^{1/2-\bar{B}} \left[ 1 - \frac{1}{t_k^{2\bar{B}}} \right] \\ &= \frac{1}{2\bar{B}} t_k^{1/2+\bar{B}} t_1^{1/2-\bar{B}} \left( \frac{t_k^{2\bar{B}} - 1}{t_k^{2\bar{B}}} \right) \\ &< \frac{1}{2\bar{B}} t_k^{1/2+\bar{B}} (t_1/2)^{1/2-\bar{B}} \end{aligned}$$

e, conseqüentemente,

$$\frac{1}{\sigma_k(t)} > \frac{1}{\frac{1}{2\bar{B}} t_k^{1/2+\bar{B}} (t_1/2)^{1/2-\bar{B}}}.$$

Dessa forma, teremos que

$$\begin{aligned}
 F_k(t_k - 2) &> \int_{t_k - 2}^{t_k - 1} \frac{\frac{\bar{d}}{m} t^m}{\frac{1}{2\bar{B}} t_k^{(1/2 + \bar{B})(m-1)} (t_1/2)^{(1/2 - \bar{B})(m-1)}} dt \\
 &= \int_{t_k - 2}^{t_k - 1} \frac{\bar{d}}{m} \cdot \frac{2\bar{B}}{t_k^{(1/2 - \bar{B})(m-1)}} (t_1/2)^{(1/2 - \bar{B})(m-1)} dt \\
 &= c \int_{t_k - 2}^{t_k - 1} \frac{t^m}{t_k^{(1/2 - \bar{B})(m-1)}} dt,
 \end{aligned}$$

onde  $c = 2\bar{B}\bar{d}/m(t_1/2)^{(1/2 - \bar{B})(m-1)}$ . Como,  $t_k - 2 < t$  temos

$$\begin{aligned}
 F_k(t_k - 2) &> c \int_{t_k - 2}^{t_k - 1} \frac{(t_k - 2)^m}{t_k^{(1/2 - \bar{B})(m-1)}} dt \\
 &= c \frac{(t_k - 2)^m}{t_k^{(1/2 - \bar{B})(m-1)}} [(t_k - 1) - (t_k - 2)] \\
 &= \frac{(t_k - 2)^m}{t_k^{(1/2 - \bar{B})(m-1)}}.
 \end{aligned}$$

Para  $m > (m - 1)(1/2 + \bar{B})$  teremos

$$m > \frac{1}{2} (m - 1) + \bar{B}(m - 1),$$

ou seja,

$$\frac{m + 1}{2(m - 1)} > \bar{B}.$$

Portanto,

$$\lim_{t_k \rightarrow +\infty} F_k(t_k - 2) = \lim_{t_k \rightarrow +\infty} \frac{(t_k - 2)^m}{t_k^{(1/2 - \bar{B})(m-1)}} = +\infty, \text{ quando } t_k \rightarrow +\infty \text{ e } \frac{m + 1}{2(m - 1)} > \bar{B}.$$

Quando  $\frac{m + 1}{2(m - 1)} > \bar{B}$ , pela suposição de que  $B < \frac{\sqrt{m}}{m - 1}$  segue que

$${}^{\mathcal{D}}E_k \rightarrow +\infty \text{ quando } k \rightarrow +\infty,$$

portanto,  $M$  é  $L^1$ -Liouville.

□

## Curvatura negativa comprimida no complementar de um semi espaço hiperbólico

Em contraste com o que acontece no caso da curvatura não negativa, no cenário de curvatura negativa os semi espaços não são grandes o suficiente para satisfazer a propriedade  $\mathcal{D}$ - $L^1$ -Liouville e, portanto, para concluir validade da propriedade  $L^1$ -Liouville global. Vamos mostrar que os domínios apropriados são representados pelo complemento do semi espaço.

Ao longo dessa subseção, consideramos  $M$  como uma variedade  $m$ -dimensional completa, simplesmente conexa, que satisfaz, para algum  $B \geq A > 0$ , às suposições de curvatura pinçada

$$\text{Ric} \geq -(m-1)B^2 \quad \text{e} \quad \text{Sect} \leq -A^2. \quad (3.40)$$

Obviamente, essas condições implicam que a variedade  $M$  (Cartan-Hadamard) possui curvatura seccional limitada inferiormente.

Sejam  $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$  um raio de velocidade unitária fixado e  $b_\gamma : M \rightarrow \mathbb{R}$  a função de Busemann associada. Por definição

$$b_\gamma(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} r_t(x) - t,$$

onde  $r_t(x) = \text{dist}_M(x, \gamma(t))$ . Então, a bola aberta de  $M$  em relação a  $\gamma$  é definido

$$\mathcal{B}_\gamma(R) = \{x \in M, b_\gamma(x) < R\}.$$

Notemos que,  $\mathcal{B}_\gamma(R)$  é um semi espaço em relação ao raio de velocidade unitário  $\gamma$ . Normalmente

$$\mathcal{B}_\gamma(R) = \cup_{t \geq 0} B_{t+R}(\gamma(t)).$$

Com efeito, seja  $\mathcal{B}_\gamma(R) = \{x \in M, b_\gamma(x) < R\}$ . Assim, dado  $y \in \mathcal{B}_\gamma(R)$  obtemos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [r_t(y) - t] = b_\gamma(y) < R.$$

Logo, dado  $\varepsilon = R > 0$  existe  $D > 0$  tal que  $t > 0$  implica que

$$r_t(y) - t < R,$$

por definição teremos,

$$\text{dist}_M(y, \gamma(t)) - t = r_t(y) - t < R.$$

Segue daí que  $\mathbf{y} \in \mathbf{B}_{t+R}(\gamma(t))$ , portanto,  $\mathcal{B}_\gamma(\mathbf{R}) \subset \cup_{t \geq 0} \mathbf{B}_{t+R}(\gamma(t))$ . Por outro lado, tomemos  $\mathbf{z} \in \cup_{t \geq 0} \mathbf{B}_{t+R/2}(\gamma(t))$ . Então, para algum  $t \geq 0$  temos

$$\text{dist}_M(\mathbf{z}, \gamma(t)) < t + R/2.$$

Subtraindo  $t$  dos dois lados da desigualdade e utilizando a definição teremos que

$$r_t(\gamma(t)) - t = \text{dist}_M(\mathbf{z}, \gamma(t)) < R/2.$$

Aplicando o limite com  $t \rightarrow +\infty$  obtemos

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (r_t(\gamma(t)) - t) \leq R/2 < R,$$

logo,

$$\mathbf{b}_\gamma(\mathbf{y}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (r_t(\gamma(t)) - t) < R.$$

Então,  $\mathbf{y} \in \mathcal{B}_\gamma(\mathbf{R})$  e, portanto,  $\cup_{t \geq 0} \mathbf{B}_{t+R}(\gamma(t)) \subset \mathcal{B}_\gamma(\mathbf{R})$ . Dessa forma, podemos concluir que  $\mathcal{B}_\gamma(\mathbf{R}) = \cup_{t \geq 0} \mathbf{B}_{t+R}(\gamma(t))$ .

**Exemplo 5.** *A bola fechada  $\overline{\mathcal{B}}_\gamma^2(\mathbf{R})$  do espaço hiperbólico bidimensional  $\mathbb{H}^2$  é  $\mathcal{D}$ -parabólica, independentemente do fato de seu crescimento de volume ser exponencial.*

Com efeito, no modelo do semi-plano do plano hiperbólico,  $\overline{\mathcal{B}}_\gamma^2(\mathbf{R})$  é realizado como um semi-plano fechado. Agora, no cenário bidimensional, a  $\mathcal{D}$ -parabolicidade é invariante em aplicações conformes. Daí, como  $\overline{\mathcal{B}}_\gamma^2(\mathbf{R})$  é conforme ao semi-plano  $\overline{\Pi}^+$ , teremos que o problema de verificação que  $\overline{\mathcal{B}}_\gamma^2(\mathbf{R})$  é  $\mathcal{D}$ -parabólica se reduz a verificar que  $\overline{\Pi}^+$  é  $\mathcal{D}$ -parabólico. Assim, notemos que o crescimento de volume da variedade plana com bordo  $\overline{\Pi}^+$  é no máximo quadrático, ou seja,

$$\text{vol} \mathbf{B}_R^{\overline{\Pi}^+}(\mathbf{o}) \leq \mathcal{O}(R^2) \text{ quando } R \rightarrow +\infty.$$

Logo, pelo Proposição 13, obtemos que  $\overline{\Pi}^+$  é  $\mathcal{N}$ -parabólica e, conseqüentemente,  $\mathcal{D}$ -parabólico. Como a  $\mathcal{D}$ -parabolicidade independe de aplicações conformes, podemos concluir que  $\overline{\mathcal{B}}_\gamma^2(\mathbf{R})$  é  $\mathcal{D}$ -parabólica.

A mesma conclusão vale em dimensões gerais para variedade Catan-Hadamard que satisfazem (3.40), contudo precisamos de um argumento completamente diferente.

**Proposição 19.** *Seja  $M$  uma variedade Cartan-Hadamard satisfazendo (3.40). Então a horobola fechada  $\overline{\mathcal{B}}_\gamma(\mathbf{R})$  de  $M$  com respeito ao raio geodésico  $\gamma$  é  $\mathcal{D}$ -parabólico.*

*Demonstração.* A verificação desse resultado segue pelo Lema 6. Com efeito, assumamos  $R > 1$  e seja  $\phi : \overline{B}_R \setminus B_1(\gamma(0)) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida por

$$\phi(x) = (R - b_\gamma(x)) + c \cdot r_0(x),$$

onde  $c > 0$  é uma constante a ser especificada. Notemos que

$$r_0(x) = \text{dist}_M(x, \gamma(0)) > 0,$$

e ainda,

$$b_\gamma(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (r_t(x) - t) < R,$$

logo  $0 < R - b_\gamma(x)$  então,  $\phi(x) = (R - b_\gamma(x)) + cr_0(x) > 0$  para todo  $x \in \overline{B}_R$ .

Assim,  $\phi$  é positiva. Além disso, pelo Teorema de comparação da Hessiana e do Laplaciano obtemos que,

$$\Delta b_\gamma = \text{traço Hess } b_\gamma \geq (m - 1)A,$$

assim  $-\Delta b_\gamma \leq -(m - 1)A$ . Por outro lado, temos a seguinte EDO,

$$\begin{cases} \sigma_t'' - B^2 \sigma_t = 0 \\ \sigma_t(0) = 0, \quad \sigma_t'(0) = 1, \end{cases}$$

então, utilizando o polinômio característico para resolver a EDO acima, obtemos

$$m^2 - B^2 = 0 \Rightarrow m = \pm B,$$

consequentemente, a solução geral é dada por  $\sigma_t(x) = c_1 e^{Bx} + c_2 e^{-Bx}$ . Agora, com as condições iniciais obtemos que

$$\sigma_t(x) = -\frac{1}{2}(e^{Bx} - e^{-Bx}).$$

Daí,

$$\sigma_t'(x) = -\frac{1}{2}(e^{Bx} + e^{-Bx}).$$

Portanto,

$$\frac{\sigma_0'(r_0(x))}{\sigma_0(r_0(x))} = \frac{-1/2(e^{Br_0} + e^{-Br_0})}{-1/2B(e^{Br_0} - e^{-Br_0})} = B \cdot \frac{(e^{Br_0} + e^{-Br_0})}{(e^{Br_0} - e^{-Br_0})},$$

isto é,

$$\frac{\sigma'_0(r_0(x))}{\sigma_0(r_0(x))} = B \cdot \coth(Br_0(x)).$$

Logo,

$$\Delta r_0(x) \leq (m-1) \frac{\sigma'_0(r_0(x))}{\sigma_0(r_0(x))} = (m-1)B \cdot \coth(Br_0(x)).$$

Segue daí que

$$\Delta \phi = -\Delta b_\gamma + c \cdot \Delta r_0(x) \leq -(m-1)A + c(m-1)B \coth(Br_0),$$

e escolhendo  $c$  suficientemente pequeno obtemos

$$\Delta \phi \leq 0 \text{ sobre } \mathcal{B}_\gamma(\mathbb{R}) \setminus B_1(\gamma(0)).$$

Assim  $\phi$  é uma função superharmônica com

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = +\infty.$$

Podemos concluir, pelo Lema 6, que  $\overline{\mathcal{B}_\gamma(\mathbb{R})}$  é  $\mathcal{D}$ -parabólica.

□

Comforme no início desta subseção, a horobola fechada  $\overline{\mathcal{B}_\gamma(\mathbb{R})}$  não é  $\mathcal{D}$ - $L^1$ -Liouville. Levando em consideração o Teorema 23, é suficiente mostrar que o tempo médio de saída de Dirichlet  ${}^{\mathcal{D}}E_{\overline{\mathcal{B}_\gamma(\mathbb{R})}}$  de  $\overline{\mathcal{B}_\gamma(\mathbb{R})}$  é uma função finita. Com efeito, seja

$$E_R = \frac{R - b_\gamma}{(m-1)A}. \tag{3.41}$$

Daí,

$$\Delta E_R = -\frac{\Delta b_\gamma}{(m-1)A},$$

e pela a condição de curvatura implica que

$$\Delta E_R = -\frac{\Delta b_\gamma}{(m-1)A} \leq -\frac{(m-1)A}{(m-1)A} = -1,$$

logo,

$$\Delta E_R \leq -1 \text{ sobre } \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

como

$$E_R = \frac{R - b_\gamma}{(m-1)A} \geq 0, \text{ sobre } \overline{\mathcal{B}_\gamma(R)},$$

obtemos do Lema 12 que  ${}^{\mathcal{D}}E^{\overline{\mathcal{B}_\gamma(R)}}$  é limitada superiormente por  $E_R$ , que é finito. Assim, do Teorema 23 podemos concluir que  $\overline{\mathcal{B}_\gamma(R)}$  não é  $\mathcal{D}$ - $L^1$ -Liouville.

Desde que  $\overline{\mathcal{B}_\gamma(R)}$  é  $\mathcal{D}$ -parabólica, quando  $M$  é um espaço hiperbólico  $\mathbb{H}(-A^2)$ , a função definida em (3.41) é precisamente o tempo médio de saída de Dirichlet da horobola.

Seja  $\mathcal{C}\mathcal{B}_\gamma(R) = \{x \in M, b_\gamma \geq R\}$  o complementar de um semi espaço em  $M$ . Apesar de todo o semi espaço (horobola) ser  $\mathcal{D}$ -parabólico, este não é o caso para seu complementar. Um cálculo simples usando o Teorema da Comparação da Hessiana, ([20]), mostra que a função

$$u(x) = e^{-A(m-1)R} - e^{-A(m-1)b_\gamma},$$

é uma solução limitada não negativa de

$$\begin{cases} u \geq 0 & \text{no } \text{int}\mathcal{C}\mathcal{B}_\gamma(R) \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\mathcal{C}\mathcal{B}_\gamma(R). \end{cases} \quad (3.42)$$

De fato, notemos que  $R \leq b_\gamma$ ,

$$-(m-1)AR \geq -(m-1)Ab_\gamma,$$

e

$$e^{-(m-1)AR} \geq e^{-(m-1)Ab_\gamma}.$$

Logo  $u(x) = e^{-A(m-1)R} - e^{-A(m-1)b_\gamma} \geq 0$ , para todo  $x \in \mathcal{C}\mathcal{B}_\gamma(x)$ . Também,

$$\begin{aligned} |u(x)| &= |e^{-A(m-1)R} - e^{-A(m-1)b_\gamma}| \\ &\leq |e^{-A(m-1)R}| + |e^{-A(m-1)b_\gamma}|, \end{aligned}$$

como  $-b_\gamma \leq -R$  teremos que  $e^{-A(m-1)b_\gamma} \leq e^{-A(m-1)R}$  e, assim,

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq |e^{-A(m-1)R}| + |e^{-A(m-1)R}| \\ &= 2|e^{-A(m-1)R}| = D. \end{aligned}$$

Portanto,  $u$  é uma função não negativa e limitada. Agora, pelo Corolário 2.4 de [20] teremos que

$$\text{Hess}(e^{-A(m-1)b_\gamma}) \leq B[-A(m-1)]e^{-A(m-1)b_\gamma} = -AB(m-1)e^{-A(m-1)b_\gamma} \leq 0.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \Delta u &= \Delta(e^{-A(m-1)R} - e^{-A(m-1)b_\gamma}) \\ &= \Delta e^{-A(m-1)R} - \Delta e^{-A(m-1)b_\gamma} \\ &= -\Delta e^{-A(m-1)b_\gamma}, \end{aligned}$$

pois  $e^{-A(m-1)R}$  é constante. Assim,

$$\begin{aligned} \Delta u &= -\Delta e^{-A(m-1)b_\gamma} \\ &= -\text{traço Hess}(e^{-A(m-1)b_\gamma}) \\ &\geq 0, \text{ no } \text{int}\mathcal{CB}_\gamma(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

e

$$u(x) = e^{A(m-1)R} - e^{A(m-1)b_\gamma(x)} = e^{A(m-1)R} - e^{A(m-1)R} = 0, \text{ sobre } \partial\mathcal{CB}_\gamma(\mathbb{R}).$$

Portanto,  $u$  é uma solução de (3.42), onde a mesma não se anula em  $\mathcal{CB}_\gamma(\mathbb{R})$ .

Pela Proposição 16, a variedade com bordo  $\mathcal{CB}_\gamma(\mathbb{R})$  é  $\mathcal{D}$ -hiperbólica. Em particular, uma solução, caso houver, do problema

$$\begin{cases} \Delta E + 1 = 0 & \text{no } \text{int}\mathcal{CB}_\gamma(\mathbb{R}) \\ E = 0 & \text{sobre } \partial\mathcal{CB}_\gamma(\mathbb{R}), \end{cases}$$

pode não ser o tempo médio de saída de  $\mathcal{B}_\gamma(\mathbb{R})$ , pois não há exclusividade global, mesmo quando  $E$  é limitado.

**Teorema 27.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Cartan-Hadamard satisfazendo*

$$\text{Ric} \geq -(m-1)B^2 \text{ e } \text{Sec} \leq -A^2,$$

*para alguma constante  $B \geq A > 0$  no complementar  $\mathcal{CB}_\gamma(\mathbb{R})$  do espaço  $\mathcal{B}_\gamma(\mathbb{R})$  com respeito a algum raio geodésico  $\gamma$ . Se  $h$  é uma métrica Riemanniana qualquer em  $M$  satisfazendo  $h = g$  sobre  $\mathcal{CB}_\gamma(\mathbb{R})$ , então  $(M, h)$  é  $L^1$ -Liouville.*

*Demonstração.* Fixemos  $R_k > R$  uma sequência divergente estritamente crescente de constantes positivas e

$$A_k = \{x \in M, R \leq b_\gamma(x) \leq R_k\}$$

para ser o horoanel contido em  $\mathcal{C}\mathcal{B}_\gamma(R)$ . Como  $A_k$  é um subconjunto suave de  $\mathcal{B}_\gamma(R_k)$ , onde o mesmo é  $\mathcal{D}$ -parabólico, logo pelo Corolário 4  $A_k$  também é  $\mathcal{D}$ -parabólico. Aplicando os argumentos de comparação (veja [20]) teremos que

$$E_k(x) = -\frac{R_k - R}{(m-1)A} \cdot \frac{e^{-A(m-1)b_\gamma(x)} - e^{-A(m-1)R_k}}{e^{-A(m-1)R} - e^{-A(m-1)R_k}} + \frac{R_k - b_\gamma(x)}{(m-1)B}$$

satisfaz

$$\Delta E_k(x) = -\frac{R_k - R}{(m-1)a} \cdot \frac{\Delta e^{-A(m-1)b_\gamma(x)}}{e^{-A(m-1)R} - e^{-A(m-1)R_k}} - \frac{\Delta b_\gamma(x)}{(m-1)B}.$$

Por um lado, temos que  $\text{Hess}b_\gamma \leq B$ . Daí

$$\Delta b_\gamma \leq (m-1)B,$$

e ainda,

$$\text{Hesse}^{-A(m-1)b_\gamma} \leq -AB(m-1)e^{-Ab_\gamma} \leq 0,$$

segue que

$$\Delta e^{-A(m-1)b_\gamma(x)} \leq 0.$$

Agora, notemos que  $R \leq R_k$  logo  $-A(m-1)R \geq -A(m-1)R_k$ , e daí,

$$e^{-A(m-1)R} \geq e^{-A(m-1)R_k} \Rightarrow e^{-A(m-1)R} - e^{-A(m-1)R_k} \geq 0.$$

assim,

$$\frac{1}{e^{-A(m-1)R} - e^{-A(m-1)R_k}} \geq 0.$$

Segue daí que

$$\underbrace{\frac{R_k - R}{(m-1)A}}_{\leq 0} \cdot \underbrace{\frac{\Delta e^{-A(m-1)b_\gamma(x)}}{e^{-A(m-1)R} - e^{-A(m-1)R_k}}}_{\leq 0} \geq 0,$$

então,

$$\begin{aligned} \Delta E_k(x) &\geq -\frac{\Delta b_\gamma(x)}{(m-1)B} \\ &\geq -\frac{(m-1)B}{(m-1)B} = -1 \text{ em } A_k. \end{aligned}$$

Afirmamos que  $E_k(x) \leq {}^{\mathcal{D}}E^{A_k}$  onde  ${}^{\mathcal{D}}E^{A_k}$  é o tempo médio de saída de Dirichlet de  $A_k$ .

De fato, defina o conjunto

$$\Omega = \{x \in A_k, {}^{\mathcal{D}}E^{A_k}(x) - E_k(x) < 0\}$$

e consideremos a função  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$u(x) = E_k - {}^{\mathcal{D}}E^{A_k}.$$

Notemos que

$$\Delta u = \Delta E_k - \Delta {}^{\mathcal{D}}E^{A_k},$$

e como  $\Delta {}^{\mathcal{D}}E^{A_k} = -1$  em  $A_k$ , temos

$$\Delta u = \Delta E_k - (-1) = \Delta E_k + 1.$$

Sendo  $\Delta E_k \geq 1$ , segue que,

$$\Delta u = \Delta E_k + 1 > 0.$$

Então,  $u$  é uma função limitada e subharmônica em  $\Omega$ . Como  $A_k$  é  $\mathcal{D}$ -parabólico temos da caracterização de Ahlfors de  $\mathcal{D}$ -parabolicidade (Proposição 16) que

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u.$$

Mas,

$$u(x) = E_k(x) - {}^{\mathcal{D}}E^{A_k}(x) = 0 \text{ sobre } \partial\Omega,$$

então,

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u = 0.$$

Portanto,  $u(x) \leq \sup_{\Omega} u = 0$  e, conseqüentemente,

$$E_k(x) - {}^{\mathcal{D}}E^{A_k}(x) \leq 0 \Rightarrow E_k(x) \leq {}^{\mathcal{D}}E^{A_k}(x).$$

Com isto obtemos o resultado desejado da afirmação feita. Por um lado, temos que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} E_k(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{R_k - R}{(m-1)A} \cdot \frac{e^{-A(m-1)b_\gamma(x)} - e^{-A(m-1)R_k}}{e^{-A(m-1)R} - e^{-A(m-1)R_k}} + \frac{R_k - b_\gamma(x)}{(m-1)B} \right]$$

e, conseqüentemente,

$$+\infty = \lim_{k \rightarrow +\infty} E_k(x) \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} {}^{\mathcal{D}}E^{A_k}(x).$$

Portanto,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} {}^{\mathcal{D}}E^{A_k}(x) = +\infty$ . Segue do Corolário 8 que  $M$  é  $L^1$ -Liouville. □

**Observação 22.** *Notemos que, quando  $A = B$  no Teorema acima a função*

$$E_k(x) = -\frac{R_k - R}{(m-1)A} \cdot \frac{e^{-A(m-1)b_\gamma(x)} - e^{-A(m-1)R_k}}{e^{-A(m-1)R} - e^{-A(m-1)R_k}} + \frac{R_k - b_\gamma(x)}{(m-1)B},$$

*é precisamente o tempo médio de saída de Dirichlet de  $A_k$ .*

Com efeito, temos pelo Teorema de Comparação da Hessiana e do Laplaciano que

$$\text{Hess } b_\gamma = A$$

$$\Delta b_\gamma = (m-1)A,$$

e ainda

$$\text{Hess } e^{-A(m-1)b_\gamma(x)} = -A^2(m-1)e^{-A(m-1)b_\gamma(x)}.$$

Assim,

$$\Delta e^{-A(m-1)b_\gamma(x)} = \text{traço}(-A^2(m-1)e^{-A(m-1)b_\gamma(x)}).$$

Então,

$$\begin{aligned} \Delta E_k(x) &= -\frac{R_k - R}{(m-1)a} \cdot \frac{\Delta e^{-A(m-1)b_\gamma(x)}}{e^{-A(m-1)R} - e^{-A(m-1)R_k}} - \frac{\Delta b_\gamma(x)}{(m-1)A} \\ &= -\frac{R_k - R}{(m-1)a} \cdot \frac{\Delta e^{-A(m-1)b_\gamma(x)}}{e^{-A(m-1)R} - e^{-A(m-1)R_k}} - \frac{(m-1)A}{(m-1)A} \\ &= -1 \text{ no int}A_k. \end{aligned}$$

Fazendo  $b_\gamma(x) = R$  temos

$$\begin{aligned} E_k(x) &= -\frac{R_k - R}{(m-1)A} \cdot \underbrace{\frac{e^{-A(m-1)R} - e^{-A(m-1)R_k}}{e^{-A(m-1)R} - e^{-A(m-1)R_k}}}_{=1} + \frac{R_k - R}{(m-1)A} \\ &= -\frac{R_k - R}{(m-1)A} + \frac{R_k - R}{(m-1)A} = 0. \end{aligned}$$

Agora, fazendo  $b_\gamma(x) = R_k$  tem-se

$$E_k(x) = -\frac{R_k - R}{(m-1)A} \cdot \underbrace{\frac{e^{-A(m-1)R_k} - e^{-A(m-1)R_k}}{e^{-A(m-1)R} - e^{-A(m-1)R_k}}}_{=0} + \underbrace{\frac{R_k - R_k}{(m-1)A}}_{=0},$$

assim,  $E_k(x) = 0$  sobre  $\partial A_k$ . Segue daí que

$$\begin{cases} \Delta E_k = -1 & \text{no } \text{int}A_k \\ E_k = 0 & \text{sobre } \partial A_k. \end{cases}$$

Portanto,  $E_k$  é o tempo médio de saída de Dirichlet de  $A_k$ .

### Variedades contendo grandes cones de produto torcido

Agora consideramos o tempo médio de saída de Dirichlet de cones em produtos torcidos. Seja  $M = [0, +\infty) \times_r \Sigma$  um produto torcido onde  $\Sigma$  é uma variedade Riemanniana suave fechada com dimensão  $(m-1)$ . Para qualquer domínio  $\Omega$  em  $\Sigma$  com bordo suave denotamos por  $C_\Omega$  o cone em  $M$  sobre  $\Omega$ , dado por

$$C_\Omega = \{(r, \theta), r \geq 0, \theta \in \Omega\}.$$

Sabe-se que  $\lambda_1(\Omega)$  é simples e que suas autofunções tem sinal constante.

A próxima proposição mostra que o fato de  $C_\Omega$  é  $\mathcal{D}$ - $L^1$ -Liouville depende de  $\lambda_1(\Omega)$ . Calculos semelhantes e resultados relacionados podem ser encontrados em [8], Teorema 3.1.

**Proposição 20.** *Seja  $C_\Omega$  o cone sobre  $\Omega \subset \Sigma$  no produto torcido  $M = [0, +\infty) \times_r \Sigma$ .*

*i) Se  $\lambda_1(\Omega) > 2m$  então  $C_\Omega$  tem o tempo médio de saída de Dirichlet finito (e, portanto, não é Dirichlet  $L^1$ -Liouville);*

*ii) Se  $\lambda_1(\Omega) \leq 2m$  então  $C_\Omega$  tem o tempo médio de saída de Dirichlet infinito.*

*Demonstração.* Suponhamos, primeiramente, que  $\lambda_1(\Omega) > 2m$ , seja  $\Omega' \supset \bar{\Omega}$  tal que  $\lambda' = \lambda_1(\Omega') > 2m$ . Agora, suponhamos que  $u$  é uma autofunção associada  $\lambda'$ . Como foi mencionada anteriormente temos que  $u$  tem sinal constante em  $\Omega$ . Assim, tomemos  $u$  estritamente positiva em  $\Omega'$  e, conseqüentemente,

$$\min_{\Omega} u = u_0 > 0.$$

Consideremos a função  $\varphi(r, \theta) = r^2 u(\theta)$ . Pela expressão do Laplaciano de  $M$ ,

$$\Delta = r^{-m+1} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^{m-1} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\Sigma}.$$

Uma vez que  $u > u_0$  sobre  $\Omega$ , e  $\lambda_1 > 2m$ , podemos deduzir que

$$\begin{aligned} \Delta \varphi(r, \theta) &= \Delta(r^2 u(\theta)) \\ &= r^{-m+1} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^{m-1} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u(\theta)) \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\Sigma}(u(\theta)). \end{aligned}$$

Como  $\Delta_{\Sigma}$  é o Laplaciano da variedade  $\Sigma$  teremos que  $r$  é uma constante, assim,

$$\begin{aligned} \Delta \varphi(r, \theta) &= r^{-m+1} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^{m-1} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u(\theta)) \right) + \frac{1}{r^2} r^2 \Delta_{\Sigma}(u(\theta)) \\ &= r^{-m+1} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^{m-1} \frac{\partial}{\partial r} (u(\theta)) \right) + \Delta_{\Sigma}(u(\theta)). \end{aligned}$$

Utilizando o fato que  $\Delta_{\Sigma} = -\lambda' u(\theta)$  tem-se

$$\begin{aligned} \Delta \varphi(r, \theta) &= r^{-m+1} 2m r^{m-1} u(\theta) - \lambda' u(\theta) \\ &= 2m u(\theta) - \lambda' u(\theta) \\ &= -(\lambda' - 2m) u(\theta). \end{aligned}$$

Sendo  $u(\theta) \leq u_0$  concluímos que

$$\Delta \varphi(r, \theta) \leq -(\lambda' - 2m) u_0.$$

Como  $\lambda' > 2m$  e  $u_0 > 0$  temos,

$$\frac{1}{u_0(\lambda' - 2m)} > 0.$$

Daí, tomemos  $c = \frac{1}{u_0(\lambda' - 2m)} > 0$  tal que

$$\Delta(c\varphi) \leq c[-u_0(\lambda' - 2m)] = -\frac{1}{u_0(\lambda' - 2m)} \cdot u_0(\lambda' - 2m) = -1.$$

Como  $r, u, c \geq 0$  teremos que

$$c\varphi \geq 0 \text{ sobre } \Omega'$$

Segue do Lema 12 que  ${}^{\mathcal{D}}E^{C\Omega}$  é limitado superiormente por  $c\varphi$  e finito.

Para demonstrar o item ii), assumimos que  $\lambda = \lambda_1(\Omega) < 2m$ . Para cada  $R > 0$  tomemos

$$\varphi_R(r, \theta) = h_R(r)u(\theta),$$

onde  $u$  é uma autofunção associada ao autovalor  $\lambda$  normalizado de tal modo que

$$\max_{\Omega} u = u(\theta_0) = 1$$

e

$$h_R(r) = \frac{1}{2m - \lambda} \left[ \left( \frac{r}{R} \right)^{\alpha} R^2 - r^2 \right],$$

com

$$\alpha = \frac{-(m-2) + \sqrt{(m-2)^2 + 4\lambda}}{2}.$$

Usando que  $\lambda < 2m, \alpha < 2$  e que

$$\begin{aligned} h_R(1) &= \frac{1}{2m - \lambda} \left[ \frac{1}{R^2} \cdot R^2 - 1 \right] \\ &= \frac{1}{2m - \lambda} [R^{-\alpha+2} - 1], \end{aligned}$$

concluimos que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} h_R(1) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2m - \lambda} [R^{-\alpha+2} - 1] = +\infty.$$

Afirmamos que  $h_R$  é solução simples para o problema

$$\begin{cases} h_R'' + \frac{m-1}{r} h_R' - \frac{\lambda}{r^2} h_R = -1 \\ h_R(0) = h_R(R) = 0, \quad h_R > 0 \quad \text{no } (0, R). \end{cases} \quad (3.43)$$

De fato, veja que

$$\begin{aligned} h_R'(r) &= \frac{1}{2m - \lambda} \left[ \alpha \cdot \frac{r^{\alpha-1}}{R^{\alpha}} R^2 - 2r \right] \\ &= \frac{1}{2m - \lambda} [\alpha r^{\alpha-1} R^{-\alpha+2} - 2r], \end{aligned}$$

e

$$h_R''(r) = \frac{1}{2m - \lambda} (\alpha(\alpha - 1)r^{\alpha-2}R^{-\alpha+2} - 2).$$

Assim, substituindo essas expressões em (3.43) teremos

$$\begin{aligned} h_R'' + \frac{m-1}{r}h_R' - \frac{\lambda}{r^2}h_R &= \frac{1}{2m - \lambda} (\alpha(\alpha - 1)r^{\alpha-2}R^{-\alpha+2} - 2) \\ &\quad + \frac{m-1}{r} \left[ \frac{1}{2m - \lambda} \left( \alpha \cdot \frac{r^{\alpha-1}}{R^\alpha} R^2 - 2r \right) \right] \\ &\quad - \frac{\lambda}{r^2} \left[ \frac{1}{2m - \lambda} \left( \left( \frac{r}{R} \right)^\alpha R^2 - r^2 \right) \right] \\ &= \frac{1}{(2m - \lambda)r^2} (\alpha(\alpha - 1)r^\alpha R^{-\alpha+2} - 2r^2) \\ &\quad + \frac{m-1}{r^2} \frac{1}{2m - \lambda} (\alpha r^\alpha R^{-\alpha+2} - 2r^2) \\ &\quad - \frac{\lambda}{(2m - \lambda)r^2} (r^\alpha R^{-\alpha+2} - r^2). \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} h_R'' + \frac{m-1}{r}h_R' - \frac{\lambda}{r^2}h_R &= \frac{1}{(2m - \lambda)r^2} (\alpha(\alpha - 1)r^\alpha R^{-\alpha+2} - 2r^2) \\ &\quad + \frac{1}{(2m - \lambda)r^2} ((m - 1)\alpha r^\alpha R^{-\alpha+2} - (m - 1)2r^2) \\ &\quad + \frac{1}{(2m - \lambda)r^2} (-\lambda r^\alpha R^{-\alpha+2} + \lambda r^2). \end{aligned} \tag{3.44}$$

Observe agora,

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha - 1) &= \left( \frac{-(m-2) + \sqrt{(m-2)^2 + 4\lambda}}{2} \right) \left( \frac{-(m-2) + \sqrt{(m-2)^2 + 4\lambda}}{2} - 1 \right) \\ &= \left( \frac{-(m-2) + \sqrt{(m-2)^2 + 4\lambda}}{2} \right) \left( \frac{-m + \sqrt{(m-2)^2 + 4\lambda}}{2} \right) \\ &= \frac{m(m-2) - m\sqrt{(m-2)^2 + 4\lambda} - (m-2)\sqrt{(m-2)^2 + 4\lambda} + (m-2)^2 + 4\lambda}{4} \\ &= \frac{(m+m-2)(m-2) + (-m-m+2)\sqrt{(m-2)^2 + 4\lambda} + 4\lambda}{4} \\ &= \frac{2(m-1)(m-2) - 2(m-2)\sqrt{(m-2)^2 + 4\lambda} + 4\lambda}{4} \\ &= \frac{(m-1)(m-2) - (m-2)\sqrt{(m-2)^2 + 2\lambda}}{2} + \lambda. \end{aligned}$$

Substituindo essa expressão obtemos

$$\begin{aligned}
 h_R'' + \frac{m-1}{r} h_R' - \frac{\lambda}{r^2} h_R &= \frac{1}{(2m-\lambda)r^2} \left[ \left( \frac{(m-1)(m-2) - (m-1)\sqrt{(m-2)^2 + 4\lambda}}{2} \right) r^\alpha R^{-\alpha+2} \right] \\
 &+ \frac{1}{(2m-\lambda)r^2} \lambda r^\alpha R^{-\alpha+2} - \frac{1}{(2m-\lambda)r^2} 2r^2 \\
 &+ \frac{1}{(2m-\lambda)r^2} \left( \frac{-(m-1)(m-2) + (m-1)\sqrt{(m-2)^2 + 4\lambda}}{2} r^\alpha R^{-\alpha+2} \right) \\
 &+ \frac{1}{(2m-\lambda)r^2} (-(m-1)2r^2 - \lambda r^\alpha R^{-\alpha+2} + \lambda r^2).
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$h_R'' + \frac{m-1}{r} h_R' - \frac{\lambda}{r^2} h_R = \frac{1}{(2m-\lambda)} [-(2m-\lambda)r^2] = -1.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
 h_R(0) &= \frac{1}{(2m-\lambda)} \left[ \left( \frac{0}{R} \right)^\alpha R^2 - 0 \right] = 0 \quad \text{e} \quad h_R(R) = \frac{1}{(2m-\lambda)} \left[ \left( \frac{R}{R} \right)^\alpha R^2 - R^2 \right] \\
 &= \frac{1}{(2m-\lambda)} (R^2 - R^2) = 0.
 \end{aligned}$$

e  $h_R(r) > 0$  em  $(0, R)$ . Assim, obtemos a afirmação. Agora, utilizando a expressão do Laplaciano do produto deformado  $M$ , obtemos que  $\varphi_R$  satisfaz

$$\begin{aligned}
 \Delta \varphi_R(r, \theta) &= \Delta(h_R u(\theta)) \\
 &= r^{-m+1} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^{m-1} \frac{\partial}{\partial r} (h_R u(\theta)) \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_\Sigma(h_R u(\theta)) \\
 &= r^{-m+1} \frac{\partial}{\partial r} (r^{m-1} u(\theta) h_R') + \frac{1}{r^2} \Delta_\Sigma(h_R u(\theta)) \\
 &= r^{-m+1} u(\theta) [(m-1)r^{m-2} h_R' + r^{m-1} h_R''(r)] + \frac{1}{r^2} \Delta_\Sigma(h_R u(\theta)).
 \end{aligned}$$

Como  $h_R(r)$  não depende de  $\theta$  e  $\Delta_\Sigma u(\theta) = -\lambda u(\theta)$  obtemos

$$\begin{aligned}
 \Delta \varphi_R(r, \theta) &= u(\theta) \left[ \frac{(m-1)}{r} h_R' + h_R''(r) \right] - \frac{1}{r^2} h_R \lambda u(\theta) \\
 &= \left[ \frac{(m-1)}{r} h_R' + h_R''(r) - \frac{\lambda}{r^2} h_R \right] u(\theta) \\
 &= -u(\theta) \geq -1,
 \end{aligned}$$

e  $\varphi_R = 0$  sobre  $\partial C_{\Omega,R}$ . Por comparação temos que o tempo de saída de Dirichlet  ${}^{\mathcal{D}}E^{C_{\Omega,R}}$  do cone truncado  $C_{\Omega,R}$  satisfaz

$$\varphi_R = 0 \leqslant {}^{\mathcal{D}}E^{C_{\Omega,R}} \text{ sobre } \partial C_{\Omega,R}.$$

Logo,

$$\varphi_R \leqslant {}^{\mathcal{D}}E^{C_{\Omega,R}} \text{ em } C_{\Omega,R}.$$

Portanto,

$${}^{\mathcal{D}}E^{C_{\Omega,R}}(1, \theta_0) \geqslant \varphi_R(1, \theta) = h_R(1)u(\theta) = h_R(1).$$

Aplicando o limite com  $R \rightarrow +\infty$  obtemos

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} {}^{\mathcal{D}}E^{C_{\Omega,R}}(1, \theta_0) \geqslant \lim_{R \rightarrow +\infty} h_R(1) = +\infty,$$

dessa forma,  $\lim_{R \rightarrow +\infty} {}^{\mathcal{D}}E^{C_{\Omega,R}}(1, \theta_0) = +\infty$ . Assim, o tempo médio de saída de Dirichlet de  $C_{\Omega}$  é infinito.

Finalmente, suponhamos que  $\lambda = \lambda_1(\Omega) = 2m$ . Neste caso, tomemos  $\varphi(r, \theta) = h_R u(\theta)$  onde

$$h_R = \frac{1}{m+2} \left[ \frac{R^{m+2}}{R^{m+2}-1} (r^2 - r^{-m}) \log R - r^2 \log r \right]; \quad 1 \leqslant r \leqslant R.$$

Assim, derivando  $h_R(r)$  obtemos

$$\begin{aligned} h'_R(r) &= \frac{1}{m+2} \left[ \frac{R^{m+2}}{R^{m+2}-1} (2r + mr^{-m-1}) \log R - \left( 2r \log r + r^2 \frac{1}{r} \right) \right] \\ &= \frac{1}{m+2} \left[ \frac{R^{m+2}}{R^{m+2}-1} (2r + mr^{-m-1}) \log R - 2r \log r - r \right], \end{aligned}$$

derivando novamente,

$$\begin{aligned} h''_R(r) &= \frac{1}{m+2} \left[ \frac{R^{m+2}}{R^{m+2}-1} (2 - m(m-1)r^{-m-2}) \log R - 2 \log r - 2r \frac{1}{r} - 1 \right] \\ &= \frac{1}{m+2} \left[ \frac{R^{m+2}}{R^{m+2}-1} (2 - m(m-1)r^{-m-2}) \log R - 2 \log r - 3 \right]. \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} h''_R + \frac{(m-1)}{r} h'_R - \frac{2m}{r^2} h_R &= \frac{1}{m+2} \left[ \frac{R^{m+2}}{R^{m+2}-1} (2 - m(m-1)r^{-m-2}) \log R - 2 \log r - 3 \right] \\ &\quad + \frac{(m-1)}{r} \left\{ \frac{1}{m+2} \left[ \frac{R^{m+2}}{R^{m+2}-1} (2r + mr^{-m-1}) \log R - 2r \log r - r \right] \right\} \\ &\quad - \frac{2m}{r^2} \frac{1}{m+2} \left[ \frac{R^{m+2}}{R^{m+2}-1} (r^2 - r^{-m}) \log R - r^2 \log r \right]. \end{aligned}$$

Distribuindo o  $\log R$  e  $\frac{1}{(m+2)}$  teremos

$$\begin{aligned} h_R'' + \frac{(m-1)}{r} h_R' - \frac{2m}{r^2} h_R &= \frac{1}{m+2} \frac{R^{m+2}}{R^{m+2}-1} (2 - m(m-1)r^{-m-2}) \log R + \frac{1}{m+2} (-2 \log r - 3) \\ &+ \frac{(m-1)}{r} \frac{1}{m+2} \frac{R^{m+2}}{R^{m+2}-1} (2r + mr^{-m-1}) \log R \\ &+ \frac{(m-1)}{r} \frac{1}{m+2} (-2r \log r - r) \\ &- \frac{2m}{r^2} \frac{1}{m+2} \frac{R^{m+2}}{R^{m+2}-1} (r^2 - r^{-m}) \log R \\ &+ \frac{2m}{r^2} \frac{1}{m+2} (r^2 \log r). \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} h_R'' + \frac{(m-1)}{r} h_R' - \frac{2m}{r^2} h_R &= \frac{1}{m+2} \frac{R^{m+2}}{R^{m+2}-1} (2 - m(m-1)r^{-m-2}) \log R + \frac{1}{m+2} (-2 \log r - 3) \\ &+ \frac{(m-1)}{m+2} \frac{R^{m+2}}{R^{m+2}-1} (2 + mr^{-m-2}) \log R \\ &+ \frac{(m-1)}{m+2} (-2 \log r - 1) - \frac{2m}{m+2} \frac{R^{m+2}}{R^{m+2}-1} (1 - r^{-m-2}) \log R \\ &+ \frac{2m}{m+2} (\log r) \\ &= \frac{1}{m+2} (-m-2) = -1 \text{ em } 1 \leq r \leq R. \end{aligned}$$

Fazendo  $r = 1$  temos

$$h_R(1) = \frac{1}{m+2} \left[ \frac{R^{m+2}}{R^{m+2}-1} (1^2 - 1^{-m}) \log R - \log 1 \right] = 0,$$

e fazendo  $r = R$ , teremos

$$\begin{aligned} h_R(R) &= \frac{1}{m+2} \left[ \frac{R^{m+2}}{R^{m+2}-1} (R^2 - R^{-m}) \log R - R^2 \log R \right] \\ &= \frac{1}{m+2} \left[ \frac{R^{m+4} - R^2}{R^{m+2}-1} \log R - R^2 \log R \right] \\ &= \frac{1}{m+2} \left[ \frac{(R^{m+4} - R^2) \log R - (R^{m+4} - R^2) \log R}{R^{m+2}-1} \right] = 0. \end{aligned}$$

Notemos que,

$$\begin{aligned} h_R(2) &= \frac{1}{m+2} \left[ \frac{R^{m+2}}{R^{m+2}-1} (2^2 - 2^{-m}) \log R - 2^2 \log 2 \right] \\ &= \frac{1}{m+2} \left[ \frac{R^{m+2}}{R^{m+2}-1} (4 - 2^{-m}) \log R - 4 \log 2 \right]. \end{aligned}$$

Aplicando o limite com  $R \rightarrow +\infty$  em  $h_R(2)$  obtemos que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} h_R(2) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{m+2} \left[ \frac{R^{m+2}}{R^{m+2}-1} (4 - 2^{-m}) \log R - 4 \log 2 \right] = +\infty.$$

Novamente utilizando a expressão do Laplaciano do produto deformado  $M$  teremos que

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= \Delta(h_R u) \\ &= r^{-m+1} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^{m-1} \frac{\partial}{\partial r} (h_R u) \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_\Sigma (h_R u). \end{aligned}$$

Calculando as derivadas parciais e substituindo  $\Delta_\Sigma u = -\lambda u$  teremos

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= r^{-m+1} u [(m-1)r^{m-2} h'_R + r^{m-1} h''_R] + \frac{1}{r^2} (-\lambda h_R u) \\ &= u \left[ \frac{(m-1)}{r} h'_R + h''_R \right] - \frac{\lambda}{r^2} h_R u \\ &= \left[ \frac{(m-1)}{r} h'_R + h''_R - \frac{\lambda}{r^2} h_R \right] u. \end{aligned}$$

Como  $\lambda = 2m$  e  $u(\theta) \geq -1$

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= \underbrace{\left[ \frac{(m-1)}{r} h'_R + h''_R - \frac{\lambda}{r^2} h_R \right]}_{=-1} u \\ &= -u \geq -1, \end{aligned}$$

e  $\varphi = 0$  sobre  $\partial C_{\Omega,1,R}$ . Por comparação, o tempo médio de saída de Dirichlet  ${}^{\mathcal{D}}E^{C_{\Omega,1,R}}$  do cone torcido  $C_{\Omega,1,R}$  satisfaz

$$\varphi = 0 \leq {}^{\mathcal{D}}E^{C_{\Omega,1,R}} \text{ sobre } \partial C_{\Omega,1,R},$$

então,

$$\varphi \leq {}^{\mathcal{D}}E^{C_{\Omega,1,R}}.$$

Portanto,

$${}^{\mathcal{D}}E^{C_{\Omega,1,R}}(2, \theta_0) \geq \varphi(2, \theta_0) = h_R(2)u(\theta_0) = h_R(2).$$

Aplicando o limite com  $R \rightarrow +\infty$  temos

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} {}^{\mathcal{D}}E^{C_{\Omega,1,R}}(2, \theta_0) \geq \lim_{R \rightarrow +\infty} h_R(2) = +\infty,$$

consequentemente,  $\lim_{R \rightarrow +\infty} {}^{\mathcal{D}}E^{C_{\Omega,1,R}}(2, \theta_0) = +\infty$ . Logo, o tempo médio de saída  ${}^{\mathcal{D}}E^{C_{\Omega,1,R}}$  da região

$$C_{\Omega,1,R} = \{(r, \theta); 1 < r < R, \theta \in \Omega\}$$

satisfaz  ${}^{\mathcal{D}}E^{C_{\Omega,1,R}}(2, \theta_0) \rightarrow +\infty$  quando  $R \rightarrow +\infty$ . Portanto,  $C_{\Omega}$  possui tempo médio de saída de Dirichlet infinito. □

Como consequência da proposição, temos o seguinte

**Teorema 28.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana suave  $m$ -dimensional. Suponha que exista uma região  $M_0$  em  $M$  isométrico a um cone de produto deformado  $C_{\Omega}$ . Se  $\lambda_{\Omega} \leq 2m$ , então  $M$  é  $L^1$ -Liouville.*

*Demonstração.* Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana suave  $m$ -dimensional e, suponhamos que exista uma região  $M_0$  em  $M$  tal que  $f: M_0 \rightarrow C_{\Omega}$  é uma isometria onde  $C_{\Omega}$  é um cone de um produto deformado. Como  $\lambda_1 \leq 2m$  temos, pela Proposição 20, que  $C_{\Omega}$  possui tempo médio de saída de Dirichlet infinito. Logo,  $M_0$  também possui tempo médio de saída de Dirichlet infinito. Em particular, teremos que  $M_0$  é  $\mathcal{D}$ - $L^1$ -Liouville pelo Teorema 23. Assim, pelo Corolário 8, podemos concluir que  $M$  é  $L^1$ -Liouville. □

# Referências Bibliográficas

- [1] A. Grigor'yan, Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 36 (1999) 135-249.
- [2] A. Grigor'yan, Existence of the Green function on a manifold. Russian Math. Surveys 38 (1983), 190-191.
- [3] A. Grigor'yan, L. Saloff-Coste, Dirichlet heat kernel in the exterior of a compact set, Comm. Pure Appl. Math. 55 (2002) 93-133.
- [4] A. Grigor'yan, N. Nadirashvili, The Liouville theorems and exterior boundary value problems. Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. 31 (1987), 25-33.
- [5] A. Grigor'yan, On the existence of positive fundamental solutions of the Laplace equation on Riemannian manifolds. Mat. Sb. (N.S.) 128 (1985), no. 3, 354-363.
- [6] A. Grigor'yan, Stochastically complete manifolds and summable harmonic functions, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 52 (1988) 1102-1108; translation in Math. USSR, Izv. 33 (1989) 425-432.
- [7] A. Ros, H. Rosenberg, Properly embedded surfaces with constant mean curvature. Amer. Jour. Math. 132 (2010), 1429-1443.
- [8] B. Devyver, Y. Pinchover, G. Psaradakis, Optimal Hardy inequalities in cones, arXiv:1502.05205, available at <https://arxiv.org/pdf/1502.05205>.
- [9] Barbosa, J.L.M., Colares, A.G. - *Stability of hypersurfaces with constant  $\mathbf{r}$ -mean curvature*. Annals Global Analysis and Geometry, (15) 277-297, 1997.
- [10] Caminha, A. M. Neto. - *Introdução à Geometria das Aplicações Harmônicas*. XVI Escola de Geometria Diferencial. São Carlos: RiMa, 2010.

- [11] D. Bianchi, A.G. Setti, Laplacian cut-offs, porous and fast diffusion on manifolds and other applications, arXiv:1607.06008, available at <https://arxiv.org/pdf/1607.06008>.
- [12] Do Carmo, M. P. - *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides - IMPA, 2005.
- [13] D. Gilbarg and N. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Bnd ed.), Springer, 1983.
- [14] Dodziuk J., Maximum principle for parabolic inequalities and the heat flow on open manifolds, Indiana Univ. Math. J., 32 (1983) no.5, 703-716. MR85e:58140
- [15] D. Impera, S. Pigola, A.G. Setti, Potential theory on manifolds with boundary and applications to controlled mean curvature graphs, J. Reine Angew. Math. (2017), <http://dx.doi.org/10.1515/crelle-2014-0137>, in press.
- [16] Fakhri, S., Pacard, F. - *Existence result for minimal hypersurfaces with a prescribed finite number of planar ends*. Manuscripta Math., 103 (4) 465–512, 2000.
- [17] F. López, J. Pérez, Parabolicity and Gauss map of minimal surfaces. Indiana Univ. Math. J. 52 (2003), 1017-1026.
- [18] F. Perez, Parabolicity and minimal surfaces, MSRI notes.
- [19] G.P. Bessa, C. Bär, Stochastic completeness and volume growth, Proc. Amer. Math. Soc. 138 (2010)2629-2640.
- [20] G.P. Bessa, J.H. de Lira, S. Pigola, A.G. Setti, Curvature estimates for submanifolds immersed into horoballs and horocylinders, J. Math. Anal. Appl. 431 (2015) 1000-1007.
- [21] G. M. Lieberman, Second Order Parabolic Partial Differential Equations, World Scientific, 1996.
- [22] G. M. Lieberman, Mixed boundary value problems for elliptic and parabolic differential equations of second order. J. Math. Anal. Appl. 113 (1986), 422-440.
- [23] G.P. Bessa, S. Pigola, A.G. Setti, On the  $L^1$ -Liouville property of stochastically incomplete manifolds, Potential Anal. 39 (2013) 313-324.

- [24] G. M. Lieberman, The Perron process applied to oblique derivative problems, *Adv.Math* 55 (1985),161-172.
- [25] Hönig, C.S. - *Aplicações da Topologia à Análise*. Projeto Euclides - IMPA, 1976.
- [26] I. Holopainen, S. Pigola, G. Veronelli, Global comparison principles for the p-Laplace operator on Riemannian manifolds. *Potential Anal.* 34 (2011), no. 4, 371-384.
- [27] J. Heinonen, T. Kilpelainen, O. Martio, Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations. Second Edition. Dover Publications, Inc. Minerola, N.Y. 2006
- [28] J. Spruck, Interior gradient estimates and existence theorems for constant mean curvature graphs in  $M^n \times \mathbb{R}$ . *Pure Appl. Math. Q.* 3 (2007), no.3, 785-800.
- [29] J. Pérez, Parabolicity and minimal surfaces. Joint work with F. J. López. *Clay Math. Proc.*, 2, Global theory of minimal surfaces, 163-174, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [30] L. Alías, M. Dajczer, Constant mean curvature hypersurfaces in warped product spaces. *Proc. Edinb. Math. Soc.* (2) 50 (2007), no. 3, 511-526.
- [31] L.F. Pessoa, S. Pigola, A.G. Setti, Dirichlet parabolicity and L1-Liouville property under localized geometric conditions, *Journal of Functional Analysis*, Volume 273, Issue 2, 2017, Pages 652-693, ISSN 0022-1236.
- [32] L.L. Helms, *Potential Theory*, 2nd ed., Springer-Verlag, London, 2014.
- [33] L. Saloff-Coste, *Aspects of Sobolev-Type Inequalities*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 289, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [34] M. Rigoli, A.G. Setti, Liouville type theorems for  $\phi$ -subharmonic functions. *Rev. Mat. Iberoamer.* 17 (2001), 471-450.
- [35] M. Troyanov, Parabolicity of manifolds, *Siberian Adv. Math.* 9 (1999) 125-150.
- [36] N. G. Meyers, J. Serrin: *H. W Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 51 (1964) 1055-1056.
- [37] P. Collin, R. Kusner, W. H. Meeks, and H. Rosenberg, The topology, geometry and conformal structure of properly embedded minimal surfaces. *J. Differential Geom.* 67 (2004), no. 2, 377-393.

- [38] P. Gyrya, L. Saloff-Coste, Neumann and Dirichlet Heat Kernels in Inner Uniform Domains, Société mathématique de France, 2011.
- [39] P. Li, Geometric Analysis, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 134, Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
- [40] P. Li, J. Wang, Finiteness of disjoint minimal graphs. Math. Research Letters 8 (2001), 771-777.
- [41] P. Petersen, Riemannian Geometry. Springer Verlag, 1997.
- [42] R. A. Adams: Sobolev spaces (Pure and Applied Mathematics, Vol. 65. Academic Press, New York-London, 1975).
- [43] R. F. De Lima, A maximum principle at infinity for surfaces with constant mean curvature in Euclidean space. Ann. Global Anal. Geom. 20 (2001), no. 4, 325-343.
- [44] R. Neel, Brownian motion and the parabolicity of minimal graphs. arXiv:0810.0669v1.
- [45] R. Neel, Stochastic Methods for Minimal Surfaces. Contemp. Math., vol. 570, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2012), 111-136.
- [46] S. Pigola, A.G. Setti, M. Troyanov, The topology at infinity of a manifold supporting an  $L^{q,p}$  Sobolev inequality. Expositiones Math., in press.
- [47] S. Pigola, G. Veronelli, The smooth Riemannian extension problem, arXiv:1606.08320, available at <https://arxiv.org/pdf/1606.08320.pdf>.
- [48] S. Pigola, M. Rigoli, A.G. Setti, Vanishing and Finiteness Results in Geometric Analysis. A generalization of the Bochner Technique, Progress in Mathematics, vol. 266, Birkhäuser, 2008.
- [49] S.Y. Cheng, S.T. Yau, Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications. Comm. Pure Appl. Math. 28 (1975), 333-354.
- [50] T. Lyons, D. Sullivan, Function theory, random paths and covering spaces. J. Diff. Geom. 18 (1984), 229-323.

- 
- [51] V. Guillemin, D. Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1974.
- [52] V. G. Maz'ja: *Sobolev spaces* (Springer Series in Soviet Mathematics. Springer, Berlin-New York, 1985).
- [53] Q. Chen, Liouville theorem for harmonic maps with potential. *Manuscripta Math.* 95 (1998), 507-517.