



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

**Controle Ótimo Bi-Objetivo para Equações da Onda:
Uma análise teórica e numérica**

Suerlan Oliveira da Silva

Teresina - 2023

Suerlan Oliveira da Silva

Dissertação de Mestrado:

Controle Ótimo Bi-Objetivo para Equações da onda:

Uma análise teórica e numérica.

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Pitágoras Pinheiro de Carvalho.

Coorientadora:

Profa. Dra. Franciane de Brito Vieira.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

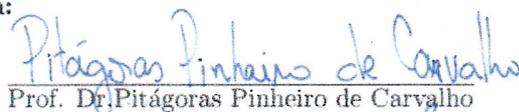
ATA DA DEFESA PÚBLICA DE DISSERTAÇÃO

No dia 24 do mês de fevereiro de dois mil e vinte três, às 16 horas, no Auditório do Departamento de Matemática, desta Universidade, reuniram-se os membros da Banca Examinadora composta pelos professores: Dr. **Pitágoras Pinheiro de Carvalho** (Presidente e Orientador - UESPI), Dra. **Franciane de Brito Vieira** (UFPI), Dr. **Gilcenio Rodrigues de Sousa Neto** (UFPI), Dr. **Juan Bautista Límaco Ferrel** (UFF)(Acesso Remoto), a fim de julgar a dissertação do mestrando **Suerlan Oliveira da Silva**, intitulada: “*Controle Ótimo Bi-Objetivo para Equações da Onda: Uma análise teórica e numérica*”, apresentada para obtenção do grau de Mestre em Matemática. Aberta a sessão pelo presidente, coube ao candidato na forma regimental, expor o tema de sua dissertação dentro do tempo regulamentar. Após haver analisado o referido trabalho e arguido o candidato, os membros da Banca Examinadora deliberaram pela **APROVAÇÃO** do mesmo. Nada mais havendo a tratar, foi lavrada a presente ata, que vai assinada pelos membros da Banca Examinadora.

TERESINA, 24 DE FEVEREIRO DE 2023.

Recomendações da Banca:

Banca Examinadora:


Prof. Dr. Pitágoras Pinheiro de Carvalho


Prof. Dra. Franciane de Brito Vieira


Prof. Dr. Gilcenio Rodrigues de Sousa Neto


Prof. Dr. Juan Bautista Límaco Ferrel

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Sistema de Bibliotecas UFPI - SIBi/UFPI
Biblioteca Setorial do CCN

S586c Silva, Suerlan Oliveira da.
Controle ótimo Bi-objetivo para equações da onda: uma análise teórica e numérica / Suerlan Oliveira da Silva. – 2023.
90 f.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Piauí, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Teresina, 2023.
“Orientador: Prof. Dr. Pitágoras Pinheiro de Carvalho.
Coorientadora: Profa. Dr^a. Franciane de Brito Vieira.”

1. Cálculo de variações 2. Teoria do Controle. I. Carvalho, Pitágoras Pinheiro de. II. Vieira, Franciane de Brito. III. Título.

CDD 515.64

Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes - CRB3/1461

A minha família, em especial ao meu pai José
Suêdes Rodrigues da Silva e a minha mãe
Oneide Maria da Silva.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo dom da vida e por guiar sempre meus passos em todos os instantes. A Sta. Teresinha, minha pequena flor que sempre intercedeu por mim, minha grande amiga do céu.

Agradeço a toda minha família que em todos os momentos não mediram esforços para que eu continuasse meus estudos, de forma bem especial: Ao meu pai José Suêdes e minha mãe Oneide Maria por todo carinho, cuidado e amor. Por todos os esforços para me tornar o que sou hoje, não poderia escolher melhores pais. Aos meus irmãos, Sueneide e José por tudo que fizeram e fazem por mim, por serem desde sempre minhas melhores companhias e são sem dúvidas os melhores irmãos que alguém poderia ter. Sempre foi por vocês!

Agradeço a minha namorada Mariana Moreira por todo amor nesses últimos tempos, por todo o incentivo nas horas difíceis, por me dar forças para continuar estudando, por ser meu ponto de paz e sossego. Pela família que ganhei de ti, Jorge, Isabel, Matheus, Liana e Dalton.

Agradeço ao meu grupo de oração Sarça Ardente e todos os amigos que fiz na RCC graças a essa experiência. Em especial a Alcindo Saraiva, Honório, Gabriel, Ana Cristina, Luana, Tia Cristiane (e família), Angélica, Ráurison Ribeiro, Natália Jessika, Kelson Andrade, Charlene, Yzis, Elielson, Raimundo Hélio, Ícaro Lima, Mateus Carvalho, Tia Wanda (e família), Elikéssia e Daniel Bento.

Agradeço aos meus grandes amigos, Ricardo Martins, Leonardo Fraga e Dennis Carvalho, vulgo Quarteto Fantástico! A toda família Martins (Milton, Teresa, Karol, Juliana e Ricardo), que me abrigou por 6 meses e cuidaram de mim como filho.

Agradeço a todo corpo docente do Departamento de Matemática da UFPI, de modo

especial aos professores Newton, Kelton, Mário Gomes (e por todas as resma de papel) e ao corpo docente da Pós-Graduação, Paulo Alexandre, Jurandir, Barnabé, Ítalo Dowell, Halysen Baltazar, João Carlos, Gilcenio, Antônio Wilson, Ray, Rondinelli, Sandoel e em especial, aos professores Gleison e Roger que cuidaram da minha formação em Análise. Obrigado por todo ensinamento.

Agradeço ao professor Leandro Pessoa por ter sido um dos maiores motivadores (não só meu, mas de um grupo inteiro) a fazer o mestrado, sempre disponibilizando seu tempo para ajudar. Obrigado pela sua amizade, e por todas as histórias e experiências compartilhadas.

Agradeço a todos os amigos que fiz nesses últimos anos no DM-UFPI e fora dele. Em especial, Jefferson, Sillas Augusto, Gabriel, Jonatas, JV Matos, Fáuster, Douglas Rafael, JV Carvalho, Danilo Soares, Ana Júlia, Emanuely, Hyon, José Victor, Luzivânia, José Rufino, Estevão, Wilkreffy, Diemi, Francimar, Ruan Diego, João Vinícius, Erisvaldo, Pedro Paulo, Pedro Rodrigues e por todos os outros que diretamente ou indiretamente deixaram meus dias bem mais agradáveis (principalmente pelas piadas ruins).

Ao grande amigo que fiz em 2021, Marcelo Bongarti, que tem sempre me ajudado em diversas coisas, sempre muito amigável e engraçado. Muito obrigado por me abrir os olhos para o mundo.

Agradeço ao professor Juan Límaco por aceitar compor minha banca, e por todos os momentos que me ajudou durante o curso de teoria do controle, agregando uma visão geral e esclarecedora, ajudando a guiar a escrita desta dissertação. Agradeço ainda por seus esforços e cordialidade durante os dias que estive na UFF/Niterói. Muito obrigado.

Agradeço ao meu orientador Pitágoras Pinheiro de Carvalho, que nesses últimos meses tem sido um grande incentivador e muito solícito, muito obrigado por todo conhecimento repassado sempre de forma alegre e divertida. E minha querida coorientadora Franciane de Brito, que desde o início da minha graduação tem cuidado da minha formação, me incentivando, me dando suporte em inúmeras coisas, e principalmente, por acreditar em mim. Novamente ao professor Gilcenio por sua grande contribuição na finalização do presente trabalho e por sua disponibilidade em esclarecer dúvidas, sempre muito prestativo. Muito Obrigado!

Agradeço por fim a CAPES, pelo apoio financeiro.

“Contudo, seja qual for o grau a que chegamos, o que importa é prosseguir decididamente”.

Filipenses 3,16

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar um detalhado estudo teórico e numérico sobre controle ótimo bi-objetivo para as equações da onda linear e semi-linear, via estratégias de equilíbrio de Nash e de Pareto, em domínios tridimensionais.

Por estar relacionado com um processo de otimização, utilizaremos a minimização de funcionais custo, formulados em combinação com algumas estratégias relacionadas ao Equilíbrio de Nash e Equilíbrio de Pareto. Usaremos o software *FreeFem++* para transcrever os problemas teóricos em linguagem de programação C++, descrevendo os dados de discretização espacial através do Método dos Elementos Finitos (MEF), e a discretização da sua evolução temporal com o Método das diferenças finitas.

Palavras-chave: Equações da Onda , Controle Ótimo, Equilíbrio de Nash, Equilíbrio de Pareto, *FreeFem++*.

Abstract

The objective of this work is to making a theoretical and numerical study on bi-objective optimal control for the linear and semi-linear wave equations, via Nash and Pareto equilibrium strategies, in three-dimensional domains.

Due to being related to an optimization process, we will use cost functional minimization, formulated in combination with some strategies related to Nash Equilibrium and Pareto Equilibrium. We will use the *FreeFem++* software to transcribe the theoretical problems to the C++ programming language, describing the spatial discretization data through the Finite Element Method (FEM), and the discretization of its temporal evolution, with the Finite Difference Method.

Keywords: Wave Equations, Optimal Control, Nash Equilibrium, Pareto Equilibrium, *FreeFem++*.

Sumário

Introdução	1
1 Noções Preliminares	4
1.1 Tópicos de Análise Funcional	4
1.1.1 Convergência Fraca e Fraca Estrela	4
1.1.2 Espaços Separáveis e Reflexivos	5
1.1.3 Espaços de Hilbert	6
1.2 Espaços L^p	7
1.3 Teoria de Distribuições	8
1.4 Espaços de Sobolev	11
1.5 Os Espaços $L^p(0, T; X)$	14
1.6 Alguns Resultados Importantes	15
2 Os equilíbrios de Nash e Pareto para equações da Onda	18
2.1 Formulação do Problema	18
2.2 Equação da Onda (caso linear)	21
2.2.1 Os sistemas otimizado de Nash e Pareto - Caso Linear	28
2.2.2 Existência e Unicidade do Equilíbrio de Nash e Pareto - Caso Linear	32
2.3 Equação da Onda (caso semi-linear)	40
2.3.1 Quase-Equilíbrio de Nash	40
2.3.2 Quase-Equilíbrio de Pareto.	45
3 Resultados numéricos	52
3.1 Algoritmos iterativos	52
3.1.1 Redução da Dimensão	55
3.1.2 Revisitando os algoritmos	58

4	Resultados Numéricos e Simulações	65
4.1	Domínios e dados experimentais	65
4.1.1	Experimentos do caso Nash Linear	68
4.1.2	Experimentos do caso Pareto Linear	69
4.1.3	Experimentos do caso Nash Não-Linear	70
4.1.4	Experimentos do caso Pareto Não-Linear	71
4.1.5	E o problema sem controles?	72
5	Apêndice	74
	Referências Bibliográficas	75

Introdução

Esse trabalho é dedicado ao estudo do controle ótimo para a equação da onda linear e semi-linear utilizando as estratégias incorporadas na teoria de jogos cooperativos e não cooperativos. A motivação para o estudo da teoria do controle vem da possibilidade de controlar fenômenos físicos encontrados na natureza, e por isso é um campo rico em aplicações em diversas áreas do conhecimento como engenharia, biologia, medicina, economia, dentre outras. Nas referências [11] e [15], diversas aplicações são abordadas.

É conhecido na vasta literatura alguns tipos de controle, como controle exato, controle aproximado, controle nulo e controle aproximado por trajetórias. Uma vez que podemos resolver um problema de controlabilidade, podemos incrementar a teoria com um problema de otimização, buscando o controle ótimo no sentido de minimizar os custos ou maximizar os benefícios, se for o caso.

O estudo sobre controlabilidade de equações diferenciais lineares e não lineares tem motivado muitos trabalhos nas últimas décadas. O ponto de partida nesse sentido foi dado em 1994 pelo matemático francês Jacques Lions [19] para resolver um problema de controle ótimo que introduziu o conceito de controle hierárquico utilizando as noções de otimização dadas em economia pelo economista H. Von Stackelberg, [25]. Nesse processo encontra-se pelo menos dois controles atuando sobre o sistema, onde um é chamado de líder e outro de seguidor.

Em 2005, Diaz e Lions [12] resolveram um problema de controlabilidade aproximada para um sistema parabólico. Nesse trabalho foi introduzido a noção de equilíbrio de Nash, [17], na qual consiste em obter n seguidores que minimizem simultaneamente n funcionais custo, associado ao controle líder. Esse método foi denominado por Stackelberg-Nash.

Em 2015, Araruna-Cara-Santos [2] consideraram um sistema distribuído com a equação do calor não linear, onde resolveram um problema de controlabilidade exata por trajetórias usando controle hierárquico via estratégia de Stalkerberg-Nash.

Em 2018, Araruna-Cara-Silva [4] resolveram o problema de controlabilidade exata para a equação da onda linear e não linear com sistema distribuído utilizando controle hierárquico via estratégia de Stalkerberg-Nash. Ainda em 2018, Carvalho-Cara [9] concentraram-se em apresentar soluções numéricas em ambientes 2D para o controle ótimo bi-objetivo da equação do calor linear e semi-lineares, utilizando estratégias de equilíbrio de Nash e equilíbrio de Pareto.

Em 2019, Carvalho-Cara-Límaco [8] estenderam os resultados da equação do calor e fizeram a implementação numérica para um sistema distribuído da equação da onda linear e semi-lineares, por meios de controle ótimo bi-objetivo utilizando as estratégias de equilíbrio via Nash e Pareto, apresentando simulações numéricas em 2D.

Em 2021, motivado pelo vasto número de aplicações à teoria de jogos e controle ótimo, Carvalho [7] exibiu alguns resultados de simulações para a equação do calor em ambientes 3D, realizando vários comparativos entre os métodos de convergência.

A equação da onda é considerada um dos sistemas hiperbólicos com mais relevância, pois as técnicas usadas para os problemas de controlabilidade geralmente podem ser adaptadas para outros modelos hiperbólicos. Além disso, há diversas aplicações, tais como:

- (i) **Ondas em uma corda:** Modelo de corda discreta com massas pontuais podem ser conectadas por meio de cordas elásticas, podendo conduzir a um modelo que podemos usar para derivar a equação para ondas em uma corda. A corda é modelada como um conjunto de massas pontuais discretas (em pontos de malha) com cordas elásticas entre si.
- (ii) **Amortecimento:** : A resistência do ar e os efeitos não elásticos na corda, podem contribuir para reduzir as amplitudes das ondas de modo que o movimento se anule

após algum tempo. Controlar esse fenômeno exige um certo cuidado, uma vez que as forças externas devem garantir a boa colocação do problema a ser controlado.

- (iii) **Ondas elásticas em uma haste:** Considere uma haste elástica sujeita a um impacto na extremidade. Esta condição dará origem a um pulso de deformação elástica que percorre a haste. Um modelo matemático para ondas longitudinais ao longo de uma haste elástica começa com a equação geral para deformações e tensões em um meio elástico.

No presente trabalho, buscamos estender e melhorar o estudo de algoritmos para equações da onda lineares e semi-lineares apresentados no artigo de Carvalho e Fernández-Cara [8] e [7], motivados pelas implementações numéricas realizadas em regiões tridimensionais. O trabalho está dividido da seguinte forma:

No capítulo 1, apresentamos os resultados preliminares, essenciais ao desenvolvimento do nosso trabalho.

No capítulo 2, formularemos o problema e mostraremos alguns resultados para a equação da onda linear e semi-linear utilizando os equilíbrios de Nash e Pareto. Provaremos a existência dos equilíbrios e daremos uma caracterização como solução de um sistema de equações.

No capítulo 3, apresentaremos a discretização do domínio tridimensional e alguns algoritmos que irão ser utilizados nas simulações numéricas.

Por fim, no capítulo 4, apresentaremos os resultados obtidos através das simulações numéricas usaremos o software *FreeFem++*.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Nesse capítulo iremos apresentar alguns resultados e definições que serão de grande valia para o leitor compreender o conteúdo abordado no decorrer dos próximos capítulos.

1.1 Tópicos de Análise Funcional

1.1.1 Convergência Fraca e Fraca Estrela

Definição 1. (Convergência Fraca) Sejam E um espaço de Banach e $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de E . Então $u_n \rightharpoonup u$ se, e somente se, $\langle \phi, u_n \rangle \rightarrow \langle \phi, u \rangle$, para todo $\phi \in E^*$.

Definição 2. (Convergência Fraca Estrela) Sejam E um espaço de Banach, $\phi \in E^*$ e $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de E^* . Dizemos que $\phi_n \xrightarrow{*} \phi$ se, e somente se, $\langle \phi_n, u \rangle \rightarrow \langle \phi, u \rangle$, para todo $u \in E$.

Proposição 1. Sejam E um espaço de Banach e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em E . Então:

- (i) Se $x_n \rightarrow x$ na topologia $\sigma(E, E^*)$, então $\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$, $\forall f \in E^*$;
- (ii) Se $x_n \rightarrow x$, então $x_n \rightarrow x$ na topologia $\sigma(E, E^*)$;
- (iii) Se $x_n \rightarrow x$ na topologia $\sigma(E, E^*)$ e se $f_n \rightarrow f$ em E^* (isto é, $\|f_n - f\|_{E^*} \rightarrow 0$), então $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

Demonstração: Ver Botelho [5].

■

1.1.2 Espaços Separáveis e Reflexivos

Definição 3. Dizemos que um espaço métrico E é separável se existe um subconjunto $D \subset E$ enumerável e denso.

Definição 4. Sejam E um espaço de Banach e J a injeção canônica de E em E^{**} . Dizemos que E é reflexivo quando $J(E) = E^{**}$.

Quando o espaço E é reflexivo identificamos implicitamente E e E^{**} (com ajuda do isomorfismo J).

Teorema 1. (Banach-Alaoglu-Bourbaki). Seja E um espaço de Banach. Então o conjunto

$$B_{E^*} = \{f \in E^* \mid \|f\| \leq 1\} \text{ é compacto na topologia fraca estrela.}$$

Demonstração: Ver Botelho [5].

■

Veja que

Teorema 2. Seja E um espaço de Banach separável. Então o conjunto

$$B_{E^*} = \{f \in E^* \mid \|f\| \leq 1\} \text{ é metrizável na topologia fraca estrela.}$$

Reciprocamente, se B_{E^*} é metrizável na topologia fraca estrela, então E é separável.

Demonstração: Ver Botelho [5].

■

Corolário 1. Sejam E um espaço de Banach separável e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada em E^* . Então existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge na topologia fraca estrela.

Demonstração: Ver Botelho [5].

■

Teorema 3. Seja E um espaço de Banach reflexivo e suponhamos que a sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seja limitada em E . Então existe uma subsequência $(f_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $f \in E$ tal que

$$f_{n_j} \rightharpoonup f.$$

Demonstração: Ver Botelho [5].

■

Teorema 4. *Sejam E um espaço de Banach reflexivo, $A \subset E$ um subconjunto convexo, fechado, não vazio e $\phi : A \rightarrow (-\infty, +\infty]$ uma função tal que:*

- (i) ϕ é convexa;
- (ii) ϕ é semi-contínua inferiormente;
- (iii) ϕ é coerciva;
- (iv) $\phi \not\equiv +\infty$.

Então ϕ atinge seu mínimo em A , ou seja, existe um $x_0 \in A$ tal que $\phi(x_0) = \min_{x \in A} \phi(x)$. Além disso, se ϕ for estritamente convexa, então o mínimo é único.

Demonstração: Ver Brezis [6].

■

1.1.3 Espaços de Hilbert

Definição 5. *Seja E espaços de Banach sobre \mathbb{R} . Uma forma bilinear $T : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ é dita:*

- (i) *coerciva se existe uma constante $\gamma > 0$ tal que*

$$T(x, x) \geq \gamma \|x\|^2. \quad \forall x \in E;$$

- (ii) *simétrica se $T(x, y) = T(y, x) \quad \forall x, y \in E$;*

- (iii) *não-degenerada se o único vetor $x \in E$ tal que $T(x, y) = 0$ para todo $y \in F$ for o vetor $x = 0$. Analogamente, o único vetor $y \in F$ tal que $T(x, y) = 0$ para todo $x \in E$ for o vetor $y = 0$.*

Teorema 5. (Lax-Milgram) *Sejam H um espaço de Hilbert sobre o corpo dos números reais e $T : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear contínua e coerciva. Para todo funcional linear contínuo $\phi \in H^*$ existe um único vetor $x_0 \in H$ tal que $\phi(x) = T(x, x_0)$ para todo $x \in H$.*

Demonstração: Ver Botelho [5].

■

Teorema 6. (Hellinger-Toeplitz) *Seja H um espaço de Hilbert e $T : H \rightarrow H$ um operador linear satisfazendo*

$$\langle T(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, T(\mathbf{v}) \rangle \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H. \quad (1.1)$$

Então T é contínuo e auto-adjunto.

Demonstração: Ver Brezis [6].

■

1.2 Espaços L^p

Nessa seção, iremos abordar os principais resultados que permeiam a teoria básica do espaço de funções Lebesgue integráveis. Além disso, será de total importância para o estudo de Teoria de Distribuição e Espaços de Sobolev.

Definição 6. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ um subconjunto aberto e $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p < \infty$. Definimos*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é mensurável e } \int_{\Omega} |f|^p d\mu < \infty \right\}. \quad (1.2)$$

Em $L^p(\Omega)$ podemos definir a seguinte norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.3)$$

Além disso, é fácil verificar que $L^p(\Omega)$ é um espaço Banach com a norma dada acima.

Observação 1. *Apesar dos espaços $L^p(\Omega)$ serem espaços vetoriais normados e completo, eles não são espaços de Hilbert, salvo a exceção de $p = 2$.*

Definição 7. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ um subconjunto aberto, definimos*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é mensurável e } \exists C > 0 \text{ tal que } |f| \leq C, \text{ q.s em } \Omega\}. \quad (1.4)$$

Definimos a norma em $L^\infty(\Omega)$ por

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess. } |f(x)| \quad (1.5)$$

$$= \inf \{C \geq 0 \mid |f(x)| \leq C \text{ q.s em } \Omega\}. \quad (1.6)$$

O espaço $L^\infty(\Omega)$ munido da norma acima é um espaço de Banach.

Teorema 7. (Desigualdade de Young) *Sejam $p, q \in \mathbb{R}$ com $1 < p, q < \infty$ e conjugados entre si, ou seja, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então, para quaisquer $a, b > 0$ é verdadeira a seguinte desigualdade:*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \quad (1.7)$$

Demonstração: Ver Brezis [6].

■

Teorema 8. (Desigualdade de Hölder) *Considere $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$ e q o expoente conjugado de p , isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então, $fg \in L^1(\Omega)$ e vale que*

$$\int_{\Omega} |fg| d\mu \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}. \quad (1.8)$$

Demonstração: Ver Brezis [6].

■

Definição 8. *Seja $\Omega \in \mathbb{R}^d$ um subconjunto aberto e $1 \leq p < \infty$. Dizemos que uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é localmente p integrável em Ω e denotamos por $f \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ se, para todo compacto $K \subset \Omega$ temos,*

$$\left(\int_K |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad \forall x \in K. \quad (1.9)$$

1.3 Teoria de Distribuições

Para qualquer natural $n > 0$, chamamos de multi-índice o vetor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ e sua ordem por $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Considere \mathbb{K} como sendo o corpo dos escalares \mathbb{R} ou \mathbb{C} e denote por $\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}$.

Definição 9. Sejam $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ um multi-índice e $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Por D^α definimos o operador derivação de ordem α como

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}. \quad (1.10)$$

Definição 10. Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ um subconjunto aberto limitado e $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ um função contínua. Define-se o suporte de ϕ como o fecho em Ω do conjunto dos pontos $x \in \Omega$ tais que $\phi(x) \neq 0$ e denotamos por

$$\text{supp}(\phi) = \overline{\{x \in \Omega \mid \phi(x) \neq 0\}}^\Omega. \quad (1.11)$$

Definição 11. Representaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω .

Neste espaço estabelece-se a seguinte noção de convergência introduzida por Schwartz

Definição 12 (Noções de convergência em $C_0^\infty(\Omega)$). Dizemos que uma sequência $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para uma função ϕ em $C_0^\infty(\Omega)$, quando satisfaz as seguintes condições:

- (i) Todas as as $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possuem suportes contidos em um compacto fixo $K \subset \Omega$;
- (ii) A sequência $(D^\alpha \phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para $D^\alpha \phi$ em K para todo multi-índice α .

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ munido da noção de convergência acima definida, será denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$ e chamado Espaço das funções teste de Ω .

Teorema 9. O espaço $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$.

Demonstração: Ver Medeiros [21].

■

Definição 13. Seja Ω um subconjunto de \mathbb{R}^d uma Distribuição sobre Ω é toda forma linear $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ contínua com respeito a topologia $\mathcal{D}(\Omega)$. Isso significa que T deve satisfazer:

- (i) dadas $\phi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, tem-se $T(\lambda_1 \phi + \lambda_2 \psi) = \lambda_1 T(\phi) + \lambda_2 T(\psi)$;
- (ii) se $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \phi$ em $\mathcal{D}(\Omega)$, então $\langle T, \phi_n \rangle_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \langle T, \phi \rangle$ em \mathbb{R} ;

onde $\langle T, \phi \rangle$ denota o valor da distribuição T aplicada em ϕ .

O conjunto das distribuições escalares sobre Ω é um espaço vetorial real, denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$, denominado espaço das distribuições escalares sobre Ω . Com o intuito de tratarmos sobre os espaços de Sobolev, introduz-se o conceito de derivada distribucional para os elementos de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Teorema 10. Para $1 \leq p < \infty$ temos a seguinte cadeia de imersões contínuas e densas.

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p_{\text{loc}}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega). \quad (1.12)$$

Demonstração: Ver Medeiros [21].

■

Definição 14. Sejam $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ uma distribuição e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ um multi-índice. Definimos a forma linear e contínua $D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\langle D^\alpha T, \phi \rangle = \langle T, D^\alpha \phi \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad (1.13)$$

como a derivada fraca de T no sentido das distribuições em $\mathcal{D}(\Omega)$.

As distribuições que aparecem com mais frequência são aquelas definidas a partir de funções localmente integráveis.

Exemplo 1. Seja $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e defina a forma linear $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\langle T_u, \phi \rangle = \int_{\Omega} u(x)\phi(x) d\mu, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Então, T_u é uma distribuição. Com efeito, é fácil ver que T é linear. Dada $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções teste convergindo em $\mathcal{D}(\Omega)$ para uma função ϕ . Então,

$$\begin{aligned} |\langle T, \phi_n \rangle - \langle T, \phi \rangle| &= |\langle T, \phi_n - \phi \rangle| \\ &= \left| \int_{\Omega} u(x)(\phi_n - \phi)(x) d\mu \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |u(x)(\phi_n - \phi)(x)| d\mu \\ &\leq \sup_{x \in \Omega} |\phi_n - \phi| \int_{\Omega} |u(x)| d\mu \\ &= \sup_{x \in \Omega} |\phi_n - \phi| \|u\|_{L^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Como $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e $\phi_n \rightarrow \phi$ uniforme, segue que $|\langle T, \phi_n \rangle - \langle T, \phi \rangle| \rightarrow 0$.

A distribuição T_u assim definida é dita "gerada pela função localmente integrável u ". Nessa linha de pensamento, enunciaremos um lema clássico e importante na teoria de distribuições.

Lema 1. (Du Bois Raymond) *Sejam $\Omega \in \mathbb{R}^d$ um aberto e $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Se*

$$\int_{\Omega} u(x)v(x)d\mu = 0, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega), \quad (1.14)$$

então $u = 0$ q.s em Ω .

Demonstração: Ver Mediros-Miranda [22].

■

Usando o Lema de Du Bois Raymond, tem-se que T_u é univocamente determinada por u , no seguinte sentido: $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ quase sempre em Ω . Neste sentido identificamos u com a distribuição T_u e o espaço $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ das funções localmente integráveis pode ser visto como parte do espaço das distribuições $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Um fato interessante é que a derivada de uma função $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ nem sempre é uma função $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Na tentativa de sanar essas deficiências é introduzido uma classe de espaços de Banach denominada de Espaços de Sobolev.

1.4 Espaços de Sobolev

Motivado pela definição de integração por partes, o matemático russo Sergei Sobolev propôs a ideia de derivada fraca para uma função em $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, porém essa definição não satisfazia uma certa classes de funções. Coube ao matemático Schwarz de cobrir essa deficiência por meio das derivadas fracas no sentido das distribuições. Toda função $f \in L^p(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$, define uma distribuição, mas pergunta natural que surge é: as derivadas ainda pertencem a algum espaço $L^p(\Omega)$? Para responder a essa pergunta introduziremos os Espaços de Sobolev.

Definição 15. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ um subconjunto aberto, p um numero real tal que $1 \leq p \leq \infty$ e m um número natural. Denotamos por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial das funções*

$\mathbf{u} \in L^p(\Omega)$. tais que as derivadas no sentido das distribuições $D^\alpha \mathbf{u} \in L^p(\Omega)$, para todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $|\alpha| \leq m$. Simbolicamente representamos por

$$W^{m,p}(\Omega) = \{\mathbf{u} \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha \mathbf{u} \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\}.$$

e definimos a função $\|\cdot\| : W^{m,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

(i) se $1 \leq p < \infty$, então

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha \mathbf{u}(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.15)$$

(ii) se $p = \infty$, então

$$\|\mathbf{u}\|_{W^{m,\infty}} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |D^\alpha \mathbf{u}(x)|. \quad (1.16)$$

Teorema 11. O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ munido da norma definida é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$ e reflexivo para $1 \leq p < \infty$.

Demonstração: Ver Medeiros [21].

■

Definição 16. Os espaços de Banach $W^{m,p}(\Omega)$, são chamados de espaço de Sobolev de ordem m sobre Ω . Além disso, definimos $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $D(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$.

De modo particular, os espaços de Sobolev carregam as propriedades vinda dos espaços L^p e como visto anteriormente, temos que o espaço L^p é Hilbert se, e somente se, $p = 2$. Motivados a buscar as riquezas dos espaços de Hilbert, temos:

Definição 17. Seja $W^{m,2}(\Omega)$ um espaço de Sobolev, denotando por $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$, o espaço $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, com produto interno dado por

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha \mathbf{u}, D^\alpha \mathbf{v} \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Além disso, denotamos por $H_0^m(\Omega)$ o caso particular $W_0^{m,2}(\Omega)$.

Definição 18. Suponha $1 \leq p < \infty$ e $1 < q \leq \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Definimos por $W^{m,q}(\Omega)$ e $H^{-m}(\Omega)$ os duais topológicos de $W_0^{-m,p}(\Omega)$ e $H_0^m(\Omega)$, respectivamente.

Teorema 12. *Seja Ω um aberto e limitado de \mathbb{R}^d , então*

- (i) $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $H^{-m}(\Omega)$;
- (ii) $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Demonstração: Ver Medeiros [21].

■

Teorema 13. *Sejam Ω um subconjunto aberto e limitado de \mathbb{R}^d de classe C^1 e $1 \leq p \leq \infty$. Então:*

- (i) se $p < d$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ com $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{d}$;
- (ii) se $d = pm$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ com $q \in [1, +\infty)$;
- (iii) se $d > pm$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, onde $q \in \left[1, \frac{dp}{d-mp}\right)$;
- (iv) se $d = 1$ e $m \geq 1$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$;

sendo todas estas injeções contínuas. Além disso, se $p > d$ tem-se para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$|u(x) - u(y)| \leq C \|u\|_{W^{1,p}} |x - y|^\alpha \text{ q.s. } x, y \in \Omega,$$

onde $\alpha = 1 - (d/p)$ e C dependa apenas do Ω, p e d . Em particular $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$.

Demonstração: Ver Brezis [6].

■

Teorema 14. (Rellich-Kondrachov) *Seja Ω um subconjunto aberto e limitado do \mathbb{R}^d de classe C^1 com fronteira Γ regular. Então:*

- (i) se $d > pm$, então $W^{m,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^q(\Omega)$, para todo $q \in \left[1, \frac{2d}{d-2m}\right)$;
- (ii) se $d = pm$, então $W^{m,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^q(\Omega)$, para todo $q \in [1, +\infty)$;
- (iii) se $pm > d$, então $W^{m,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} C^k(\overline{\Omega})$, onde k é um inteiro não negativo tal que $k < m - (d/p) \leq k + 1$.

Em particular, $W^{1,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^p(\Omega)$ com injeção compacta para todo p (e para todo d).

Demonstração: Ver Brezis [6].

■

1.5 Os Espaços $L^p(0, T; X)$

Nesta seção, estenderemos as noções de mensurabilidade e integrabilidade para funções

$$f : [0, T] \longrightarrow X,$$

onde $T > 0$ e X é um espaço de Banach real com a norma $\|\cdot\|$.

Definição 19. Denota-se por $L^p(0, T; X)$, com $1 \leq p \leq \infty$ o espaço vetorial das (classes de) funções $u : (0, T) \longrightarrow X$ fortemente mensuráveis com valores em X e tais que:

(i) se $1 \leq p < \infty$ a função $t \mapsto \|u(t)\|_X^p$ é integrável à Lesbegue em $(0, T)$;

(ii) se $p = \infty$ a função $t \mapsto \|u(t)\|_X \in L^\infty(0, T)$.

O espaço $L^p(0, T; X)$ é um espaço completo com a norma dada por:

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}, \text{ se } 1 \leq p < \infty. \quad (1.17)$$

Se $p = \infty$ a norma acima é substituída por:

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; X)} = \sup_{0 < t < T} \text{ess} \|u(t)\|_X = \inf\{C > 0 \mid \|u(t)\|_X \leq C \text{ q.s em } \Omega\} \quad (1.18)$$

Apenas no caso em que $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0, T; X)$ é um espaço de Hilbert, cujo produto interno é dado por

$$\langle v, u \rangle_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T \langle v(t), u(t) \rangle_X dt$$

Quando X é reflexivo e separável e $1 < p < \infty$, então $L^p(0, T; X)$ é um espaço reflexivo e separável, cujo dual topológico se identifica ao espaço de Banach $L^q(0, T; X^*)$, onde p e q são índices conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Mais precisamente, temos

$$[L^p(0, T; X)]^* \approx L^q(0, T, X^*).$$

A dualidade entre esses espaços é dada na forma integral por

$$\langle v, u \rangle_{L^q(0, T; X^*) \times L^p(0, T; X)} = \int_0^T \langle v(t), u(t) \rangle_{X^* \times X} dt$$

No caso $p = 1$, o dual topológico do espaço $L^1(0, T; X)$ se identifica ao espaço $L^\infty(0, T; X^*)$, ou seja,

$$[L^1(0, T; X)]^* \approx L^\infty(0, T, X^*).$$

Definição 20. Denota-se por $C([0, T]; X)$, com $T > 0$ o espaço de Banach das funções contínuas $u : [0, T] \rightarrow X$ munido da norma da convergência uniforme

$$\|u\|_{C([0, T]; X)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X < \infty.$$

Teorema 15. Sejam X e Y espaços de Hilbert tal que $X \hookrightarrow Y$ e $f \in L^p(0, T; X)$, $f' \in L^p(0, T; Y)$, $1 \leq p \leq \infty$, então $f \in C^0([0, T]; Y)$.

Demonstração: Ver Medeiros ([21]).

■

Lema 2. Sejam X um espaço de Banach, $f \in L^p(0, T; X)$ e $f' \in L^p(0, T; X)$ com $1 \leq p \leq \infty$, então

$$f \in C([0, T]; X).$$

Demonstração: Ver Lions ([20]).

■

1.6 Alguns Resultados Importantes

Teorema 16. (*Desigualdade de Poincaré*) Sejam Ω um subconjunto aberto e limitado do \mathbb{R}^d e $1 \leq p \leq \infty$. Então existe uma constante $C > 0$ que depende de Ω e p tal que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}. \quad (1.19)$$

Para toda $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração: Ver Brezis [6].

■

Teorema 17. (*Gauss-Green*) Sejam Ω um subconjunto aberto e limitado do \mathbb{R}^d com $\partial\Omega \in C^1(\Omega)$. Se $u \in C^1(\bar{\Omega})$, então

$$\int_{\Omega} u_{x_i} dx = \int_{\Gamma} u v^i d\Gamma, \quad (1.20)$$

onde v^i denota o campo vetorial normal unitário apontando para fora da região Ω com $i = 1, \dots, d$.

Demonstração: Ver Evans [13].

■

Teorema 18. (Fórmulas de Green) *Seja Ω um subconjunto aberto e limitado do \mathbb{R}^d com fronteira Γ de classe C^2 .*

(i) *Se $\gamma \in H^2(\Omega)$, então*

$$\int_{\Omega} \nabla \gamma \nabla u \, dx = - \int_{\Omega} u \Delta \gamma \, dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} u \, ds. \quad (1.21)$$

(ii) *Se $u, \gamma \in H^2(\Omega)$, então*

$$\int_{\Omega} (u \Delta \gamma - \gamma \Delta u) \, dx = \int_{\Gamma} \left(u \frac{\partial \gamma}{\partial \nu} - \gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \, ds. \quad (1.22)$$

Demonstração: Ver Brezis [6].

■

Lema 3. (Desigualdade de Gronwall) *Sejam $\phi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas não negativas e seja $\alpha \geq 0$. Se,*

$$\phi(t) \leq \alpha + \int_a^t \phi(s) \psi(s) \, ds, \quad \forall t \in [a, b],$$

então

$$\phi(t) \leq \alpha \exp \left(\int_a^t \psi(s) \, ds \right), \quad \forall t \in [a, b].$$

Demonstração: Ver Evans [13].

■

Teorema 19. (Critério de Kuhn-Tucker) *Sejam Ω um subconjunto aberto e convexo do espaço de Hilbert H e $\mathcal{J}_i : \Omega \subset H \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com $1 \leq i \leq n$. Considere*

$$\mathbf{U} = \{v \in \Omega \mid \phi_i \leq 0, 1 \leq i \leq n\},$$

um subconjunto de Ω . Seja $u \in \mathbf{U}$ um ponto onde está associado o conjunto de índices

$$I(u) = \{1 \leq i \leq n \mid \mathcal{J}_i(u) = 0\}$$

Suponha que as funções \mathcal{J}_i com $i \in I(u)$ são diferenciáveis em u e as funções \mathcal{J}_i com $i \notin I(u)$ são contínuas. Dada uma função $J : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em u , se J tem em u um mínimo relativo com respeito a \mathbf{U} , então existem $\lambda_i \geq 0$ com $i \in I(u)$ tal que

$$J'(u) + \sum_{i \in I(u)} \lambda_i \mathcal{J}'_i(u) = 0 \quad (1.23)$$

Demonstração: Ver Ciarlet [10].

■

A igualdade (1.23) é conhecido com Condição de Kuhn-Tucker.

Teorema 20. *Sejam Ω um subconjunto aberto e convexo do espaço de Hilbert H e uma função $J : \Omega \subset H \rightarrow \mathbb{R}$. Considere*

$$U = \{v \in \Omega \mid \phi_i \leq 0; 1 \leq i \leq n\},$$

um subconjunto de Ω , as restrições de cada $\mathcal{J}_i : \Omega \subset H \rightarrow \mathbb{R}$ são funções convexas com $1 \leq i \leq n$. Seja $u \in U$ um ponto tal que as funções J e \mathcal{J}_i são diferenciáveis.

(i) *Se J tem em u um mínimo relativo com respeito ao conjunto U , então existem $\lambda_i \geq 0$ tais que as condições de Kuhn-Tucker são satisfeitas, ou seja,*

$$\left\{ \begin{array}{l} J'(u) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathcal{J}'_i(u) = 0, \quad \lambda_i \geq 0, \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathcal{J}'_i(u) = 0. \end{array} \right. \quad (1.24)$$

(ii) *Se $J : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa e se existem $\lambda_i \geq 0$ com $1 \leq i \leq n$ tais que a condição de Kuhn-Tucker é satisfeita, então a função J tem em u um mínimo relativo com respeito ao conjunto U .*

Demonstração: Ver Ciarlet [10].

■

Capítulo 2

Os equilíbrios de Nash e Pareto para equações da Onda

2.1 Formulação do Problema

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ um aberto conexo com fronteira regular e $T > 0$ uma constante. Assuma que $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \partial\Omega$ tal que $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ e $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$. Definimos o cilindro $Q := \Omega \times (0, T)$ com fronteiras laterais $\Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0, T)$ e $\Sigma_2 = \Gamma_2 \times (0, T)$, conforme a figura abaixo:

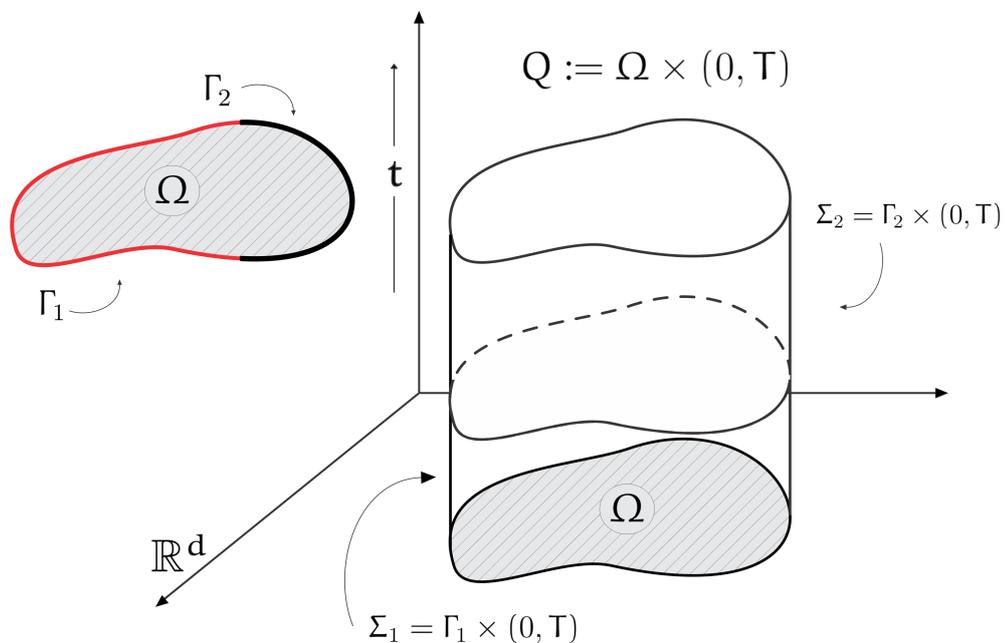


Figura 2.1: Ilustração do domínio

Serão considerados dois sistemas de equações da onda, como abaixo descritos e divididos em casos.

Caso Linear:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{y}_{tt} - \Delta \mathbf{y} = \mathbf{f} + \mathbf{v}_1 \mathbb{1}_{\mathcal{O}_1} + \mathbf{v}_2 \mathbb{1}_{\mathcal{O}_2} & \text{em } \mathcal{Q}, \\ \mathbf{y} = 0 & \text{sobre } \Sigma_1, \\ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \Sigma_2, \\ \mathbf{y}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{y}_0(\mathbf{x}) , \mathbf{y}_t(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{y}_1(\mathbf{x}) & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Caso Semi-linear:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{y}_{tt} - \Delta \mathbf{u} + F(\mathbf{y}) = \mathbf{f} + \mathbf{v}_1 \mathbb{1}_{\mathcal{O}_1} + \mathbf{v}_2 \mathbb{1}_{\mathcal{O}_2} & \text{em } \mathcal{Q}, \\ \mathbf{y} = 0 & \text{sobre } \Sigma_1, \\ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \Sigma_2, \\ \mathbf{y}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{y}_0(\mathbf{x}) , \mathbf{y}_t(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{y}_1(\mathbf{x}) & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Nos casos supracitados, $\mathbf{y}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ representa o estado \mathbf{y} , na posição espacial \mathbf{x} no instante de tempo \mathbf{t} . Os conjuntos $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \subset \Omega$ são os domínios de atuação dos controles (suponha domínios pequenos) de modo que $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$. Usaremos $\mathcal{O}_{i,d}$ para denotar os domínios de observação dos, sendo $i = 1, 2$. Denota-se $\mathbb{1}_{\mathcal{O}_i}$ como a função característica, tendo \mathcal{O}_i como sua restrição de atuação. Para o caso semi-linear, estaremos supondo que $F(\mathbf{y})$ é Lipschitziana.

Considere os seguintes funcionais $\mathcal{J}_i : L^2(\mathcal{O}_1 \times (0, T)) \times L^2(\mathcal{O}_2 \times (0, T)) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\mathcal{J}_i(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d} \times (0, T)} |\mathbf{y} - \mathbf{y}_{i,d}|^2 dxdt + \frac{\mu_i}{2} \iint_{\mathcal{O}_i \times (0, T)} |\mathbf{v}_i|^2 dxdt \quad i = 1, 2, . \quad (2.3)$$

Para μ_i usaremos valores constantes e positivos e $\mathbf{y}_{i,d} = \mathbf{y}_{i,d}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \in L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0, T))$ é uma função dada.

Os problemas de controle bi-objetivo considerados neste trabalho, serão apresentados e formulados através dos conceitos de equilíbrio de Nash e equilíbrio de Pareto, i.e.

(1) **Equilíbrio de Nash.** Encontrar um par $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in V$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{J}_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \leq \mathcal{J}_1(\hat{\mathbf{v}}_1, \mathbf{v}_2) & \forall \hat{\mathbf{v}}_1 \in V_1, \\ \mathcal{J}_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \leq \mathcal{J}_2(\mathbf{v}_1, \hat{\mathbf{v}}_2) & \forall \hat{\mathbf{v}}_2 \in V_2. \end{array} \right. \quad (2.4)$$

(2) **Equilíbrio de Pareto.** Encontrar um par $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in V$, com $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \neq (\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2)$ de modo que não há

$$\begin{cases} \mathcal{J}_1(\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2) \leq \mathcal{J}_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \text{ e } \mathcal{J}_2(\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2) \leq \mathcal{J}_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), \\ \text{com desigualdade estrita para pelo menos um } \mathcal{J}_i, i = 1, 2. \end{cases} \quad (2.5)$$

Nosso objetivo inicial é garantir a existência dos equilíbrios de Nash e Pareto para os sistemas de equações (2.1) e (2.2) a fim de encontrar um sistema otimizado para os problemas apresentados. Isso será condicionado através da minimização dos funcionais custo, que estarão associados ao estado evolutivo do problema $(\mathbf{y}(\cdot, \mathbf{t}))$, ao objetivo a ser atingido $(\mathbf{y}_{i,d})$ e ao controle atuante (\mathbf{v}_i) em sua região específica (\mathcal{O}_i) .

Observação 2. *O domínio de observação interfere diretamente no processo minimizante dos funcionais custo. Quanto maior a região a ser controlada, maior o tempo necessário para obtenção da condição de optimalidade de controle, ou se o tempo for fixado, maior será o esforço desempenhado pelos controles para que a solução se aproxime do objetivo desejado. Computacionalmente, torna-se mais visível a influência do domínio de controle no processo de minimização dos funcionais, principalmente no tempo de convergência dos algoritmos.*

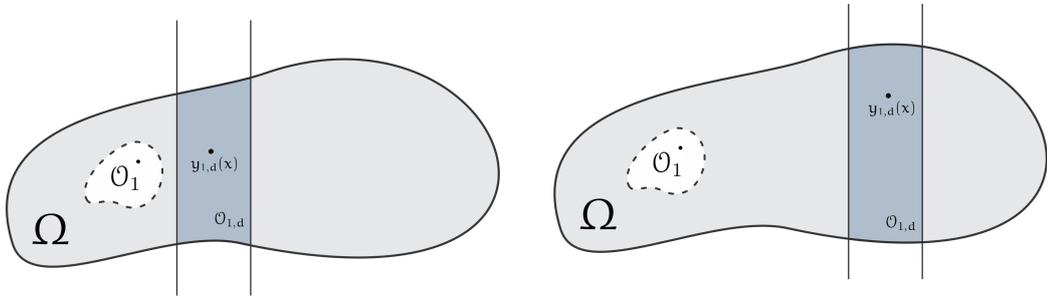


Figura 2.2: Comparativo entre a escolha dos domínios de observação.

Observação 3. *Nós iremos considerar neste trabalho que as regiões de observação satisfazem a condição:*

$$\mathcal{O}_{1,d} = \mathcal{O}_{2,d}.$$

Resultados em sistemas parabólicos considerando domínios de observação em situações distintas, podem ser encontrados em [1], [2] e [3].

2.2 Equação da Onda (caso linear)

Nessa subsecção iremos expor algumas propriedades importantes associadas aos funcionais custo (2.3). Com isso, objetivamos garantir a existência de pontos críticos para os funcionais \mathcal{J}_i . Além disso, iremos exibir as derivadas dos funcionais no sentido de Gateux, apresentando os sistemas otimizados e suas formulações equivalentes com equilíbrio de Nash e equilíbrio de Pareto.

Proposição 2. *Os funcionais $\mathbf{v}_1 \mapsto \mathcal{J}_1(\mathbf{v}_1, \xi_2)$ e $\mathbf{v}_2 \mapsto \mathcal{J}_2(\xi_1, \mathbf{v}_2)$ são semi-contínuos inferiormente e coercivos. Para arbitrários $\xi_1 \in L^2(\mathcal{O}_1 \times (0, T))$ e $\xi_2 \in L^2(\mathcal{O}_2 \times (0, T))$.*

Demonstração:

(i) Coercividade:

Inicialmente, podemos reescrever os funcionais como segue abaixo:

$$\mathcal{J}_1(\mathbf{v}_1, \xi_2) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_{1,d}\|_{L^2(\mathcal{O}_{1,d} \times (0, T))}^2 + \frac{\mu_1}{2} \|\mathbf{v}_1\|_{L^2(\mathcal{O}_1 \times (0, T))}^2. \quad (2.6)$$

Fixado $\xi_2 \in L^2(\mathcal{O}_2 \times (0, T))$, temos que $\mathbf{v}_1 \mapsto \mathcal{J}_1(\mathbf{v}_1, \xi_2)$ é coercivo, pois

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1(\mathbf{v}_1, \xi_2) &= \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_{1,d}\|_{L^2(\mathcal{O}_{1,d} \times (0, T))}^2 + \frac{\mu_1}{2} \|\mathbf{v}_1\|_{L^2(\mathcal{O}_1 \times (0, T))}^2 \\ &\geq \frac{\mu_1}{2} \|\mathbf{v}_1\|_{L^2(\mathcal{O}_1 \times (0, T))}^2 \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{J}_1(\mathbf{v}_1, \xi_2) \rightarrow \infty$ quando $\|\mathbf{v}_1\|_{L^2} \rightarrow \infty$. Analogamente para $\mathbf{v}_2 \mapsto \mathcal{J}_2(\xi_1, \mathbf{v}_2)$.

(ii) Semi-continuidade inferior:

Considere a mesma formulação de (2.6). Fixemos $\xi_2 \in L^2(\mathcal{O}_2 \times (0, T))$. Dado \mathbf{v}_1^n tal que $\mathbf{v}_1^n \rightharpoonup \mathbf{v}$ em $L^2(\mathcal{O}_1 \times (0, T))$ e \mathbf{y}, \mathbf{y}^n as soluções de (2.1) associadas a (\mathbf{v}_1, ξ_2) e (\mathbf{v}_1^n, ξ_2) respectivamente, temos que $\mathbf{y}^n \rightarrow \mathbf{y}$. Logo,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \|\mathbf{y}^n - \mathbf{y}_{1,d}\|_{L^2(\mathcal{O}_{1,d} \times (0, T))} \geq \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_{1,d}\|_{L^2(\mathcal{O}_{1,d} \times (0, T))}. \quad (2.7)$$

e

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \|\mathbf{v}_1^n\|_{L^2(\mathcal{O}_1 \times (0, T))} \geq \frac{\mu_1}{2} \|\mathbf{v}_1\|_{L^2(\mathcal{O}_1 \times (0, T))}. \quad (2.8)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}_1(\mathbf{v}_1^n, \xi_2) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{y}^n - \mathbf{y}_{1,d}\|_{L^2(\mathcal{O}_{1,d} \times (0, T))} + \frac{\mu_1}{2} \|\mathbf{v}_1^n\|_{L^2(\mathcal{O}_1 \times (0, T))} \right\} \\ &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{y}^n - \mathbf{y}_{1,d}\|_{L^2(\mathcal{O}_{1,d} \times (0, T))} \right\} + \left\{ \frac{\mu_1}{2} \|\mathbf{v}_1^n\|_{L^2(\mathcal{O}_1 \times (0, T))} \right\} \\ &\geq \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_{1,d}\|_{L^2(\mathcal{O}_{1,d} \times (0, T))} + \frac{\mu_1}{2} \|\mathbf{v}_1\|_{L^2(\mathcal{O}_1 \times (0, T))} \\ &= \mathcal{J}_1(\mathbf{v}_1, \xi_2), \end{aligned}$$

isto é,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}_i(\mathbf{v}_1^n, \xi_2) \geq \mathcal{J}_i(\mathbf{v}_1, \xi_2).$$

Portanto, o funcional $\mathbf{v}_1 \mapsto \mathcal{J}_1(\mathbf{v}_1, \xi_2)$ é semi-contínuo inferiormente. Analogamente para $\mathbf{v}_2 \mapsto \mathcal{J}_2(\xi_1, \mathbf{v}_2)$.

■

Proposição 3. *Os funcionais*

$$\mathcal{J}_i(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T)} |\mathbf{y} - \mathbf{y}_{i,d}|^2 dxdt + \frac{\mu_i}{2} \iint_{\mathcal{O}_i \times (0,T)} |\mathbf{v}_i|^2 dxdt,$$

são estritamente convexos e de classe C^1 para cada $i = 1, 2$.

Demonstração: Considere a seguinte decomposição do funcional dada por $\mathcal{J}_i = \hat{\mathcal{J}}_i(\mathbf{y}) + \bar{\mathcal{J}}_i(\mathbf{v}_i)$ onde

$$\hat{\mathcal{J}}_i(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T)} |\mathbf{y} - \mathbf{y}_{i,d}|^2 dxdt, \quad (2.9)$$

e

$$\bar{\mathcal{J}}_i(\mathbf{v}_i) = \frac{\mu_i}{2} \iint_{\mathcal{O}_i \times (0,T)} |\mathbf{v}_i|^2 dxdt. \quad (2.10)$$

(i) **Convexidade:** Dados $\hat{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{y}} \in L^2(\Omega)$ tais que $\hat{\mathbf{y}} \neq \bar{\mathbf{y}}$, para $\lambda \in (0, 1)$, pela desigualdade de Young, temos que:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{J}}_i(\lambda \hat{\mathbf{y}} + (1-\lambda)\bar{\mathbf{y}}) &= \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T)} |\lambda \hat{\mathbf{y}} + (1-\lambda)\bar{\mathbf{y}} - (\lambda \hat{\mathbf{y}}_{i,d} + (1-\lambda)\bar{\mathbf{y}}_{i,d})|^2 dxdt \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T)} |\lambda(\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{y}}_{i,d}) + (1-\lambda)(\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{y}}_{i,d})|^2 dxdt \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T)} \lambda^2 |\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{y}}_{i,d}|^2 + 2\lambda(1-\lambda) |\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{y}}_{i,d}| |\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{y}}_{i,d}| + (1-\lambda)^2 |\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{y}}_{i,d}|^2 dxdt \\ &< \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T)} \lambda^2 |\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{y}}_{i,d}|^2 + \lambda(1-\lambda) [|\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{y}}_{i,d}|^2 + |\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{y}}_{i,d}|^2] dxdt \\ &+ \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T)} (1-\lambda)^2 |\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{y}}_{i,d}|^2 dxdt \\ &= \lambda \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T)} |\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{y}}_{i,d}|^2 dxdt + (1-\lambda) \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T)} |\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{y}}_{i,d}|^2 dxdt \\ &= \lambda \hat{\mathcal{J}}_i(\hat{\mathbf{y}}) + (1-\lambda) \hat{\mathcal{J}}_i(\bar{\mathbf{y}}) \end{aligned}$$

Analogamente, dados $\hat{v}_i, \bar{v}_i \in L^2(\mathcal{O}_i \times (0, T))$, para o funcional $\bar{\mathcal{J}}_i(v_i)$ temos que

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{J}}_i(\lambda \hat{v}_i + (1 - \lambda) \bar{v}_i) &= \frac{\mu_i}{2} \iint_{\mathcal{O}_i \times (0, T)} |\lambda \hat{v}_i + (1 - \lambda) \bar{v}_i|^2 dx dt \\
&= \frac{\mu_i}{2} \iint_{\mathcal{O}_i \times (0, T)} \lambda^2 |\hat{v}_i|^2 + 2\lambda(1 - \lambda) \hat{v}_i \bar{v}_i + (1 - \lambda)^2 |\bar{v}_i|^2 dx dt \\
&< \frac{\mu_i}{2} \iint_{\mathcal{O}_i \times (0, T)} \lambda^2 |\hat{v}_i|^2 + \lambda(1 - \lambda) [|\hat{v}_i|^2 + |\bar{v}_i|^2] + (1 - \lambda)^2 |\bar{v}_i|^2 dx dt \\
&= \lambda \frac{\mu_i}{2} \iint_{\mathcal{O}_i \times (0, T)} |\hat{v}_i|^2 dx dt + (1 - \lambda) \frac{\mu_i}{2} \iint_{\mathcal{O}_i \times (0, T)} |\bar{v}_i|^2 dx dt \\
&= \lambda \bar{\mathcal{J}}_i(\hat{v}_i) + (1 - \lambda) \bar{\mathcal{J}}_i(\bar{v}_i).
\end{aligned}$$

Sejam \hat{y} a solução de (2.1) associada a (\hat{v}_1, \hat{v}_2) , \bar{y} a solução de (2.1) associada a (\bar{v}_1, \bar{v}_2) e y_λ a solução de (2.1) associada a $\lambda(\hat{v}_1, \hat{v}_2) + (1 - \lambda)(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$. Como (2.1) é um sistema linear, temos que $y_\lambda = \lambda \hat{y} + (1 - \lambda) \bar{y}$. Logo, por (2.9) e (2.10) temos que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_i(\lambda(\hat{v}_1, \hat{v}_2) + (1 - \lambda)(\bar{v}_1, \bar{v}_2)) &= \hat{\mathcal{J}}_i(\lambda \hat{v}_i + (1 - \lambda) \bar{v}_i) + \bar{\mathcal{J}}_i(\lambda \hat{v}_i + (1 - \lambda) \bar{v}_i) \\
&\leq \lambda \mathcal{J}_i(\hat{v}_1, \hat{v}_2) + (1 - \lambda) \mathcal{J}_i(\bar{v}_1, \bar{v}_2).
\end{aligned}$$

Portanto os funcionais \mathcal{J}_i com $i = 1, 2$ são estritamente convexos.

- (ii) **Regularidade de Classe C^1** Aqui, iremos mostrar que os funcionais são de Classe C^1 . Para tal, sejam $V_1 = L^2(\mathcal{O}_1 \times (0, T))$ e $V_2 = L^2(\mathcal{O}_2 \times (0, T))$, considere $V = V_1 \times V_2$ e os operadores $L_i : V_i \rightarrow L^2(Q)$ tal que $L(\hat{v}^i) = z^i$ onde

$$\left\{ \begin{array}{ll} z_{tt}^i - \Delta z^i = \hat{v}_i \mathbb{1}_{\mathcal{O}_i} & \text{em } Q, \\ z^i = 0 & \text{sobre } \Sigma_1, \\ \frac{\partial z^i}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \Sigma_2, \\ z^i(x, 0) = 0, z_t^i(x, 0) = 0 & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.11)$$

Pela unicidade de solução do sistema (2.11) o operador está bem definido e da linearidade do problema implica que o operador é linear, é fácil ver que é contínuo. Daí, temos que $L_i \in \mathcal{L}(V_i, L^2(Q))$ para todo $i = 1, 2$. Agora, uma vez que $f \in L^2(Q)$ sabemos que existe uma única solução $u \in L^2(Q)$ para

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{u}_{tt} - \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f} & \text{em } Q, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sobre } \Sigma_1, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \Sigma_2, \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}^0, \mathbf{u}_t(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}^1 & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.12)$$

Pela unicidade de solução do problema (2.1) podemos rescrever $\mathbf{y} = L_1 \mathbf{v}_1 + L_2 \mathbf{v}_2 + \mathbf{u}$ e por conseguinte temos uma reformulação dos funcionais (2.3) dada por:

$$\mathcal{J}_i(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T)} |L_1 \mathbf{v}_1 + L_2 \mathbf{v}_2 + \mathbf{u} - \mathbf{y}_{i,d}|^2 dxdt + \frac{\mu_i}{2} \iint_{\mathcal{O}_i \times (0,T)} |\mathbf{v}_i|^2 dxdt \quad (2.13)$$

Definindo a função $\phi_i(\lambda)$ dadas por $\phi_1(\lambda) = \mathcal{J}_1(\mathbf{v}_1 + \lambda \hat{\mathbf{v}}_1, \mathbf{v}_2)$ e $\phi_2(\lambda) = \mathcal{J}_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + \lambda \hat{\mathbf{v}}_2)$ temos que

$$\begin{aligned} \phi_1(\lambda) &= \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O}_{1,d} \times (0,T)} |L_1 \mathbf{v}_1 + L_1 \lambda \hat{\mathbf{v}}_1 + L_2 \mathbf{v}_2 + \mathbf{u} - \mathbf{y}_{i,d}|^2 dxdt + \\ &\quad \frac{\mu_1}{2} \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0,T)} |\mathbf{v}_1 + \lambda \hat{\mathbf{v}}_1|^2 dxdt. \end{aligned}$$

Logo, denotando por $\mathbf{a} = L_1 \lambda \hat{\mathbf{v}}_1$ e $\mathbf{b} = L_1 \mathbf{v}_1 + L_2 \mathbf{v}_2 + \mathbf{u} - \mathbf{y}_{i,d}$ e calculando as derivadas de Gateaux de $\phi_i(\lambda)$ para cada $i = 1, 2$. tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\phi_1(\lambda) - \phi_1(0)}{\lambda} &= \frac{1}{2\lambda} \iint_{\mathcal{O}_{1,d} \times (0,T)} |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 - |\mathbf{b}|^2 dxdt + \frac{\mu_1}{2\lambda} \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0,T)} |\mathbf{v}_1 + \lambda \hat{\mathbf{v}}_1|^2 - |\mathbf{v}_1|^2 dxdt \\ &= \frac{1}{2\lambda} \iint_{\mathcal{O}_{1,d} \times (0,T)} |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a}\mathbf{b} dxdt + \frac{\mu_1}{2\lambda} \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0,T)} 2\lambda \mathbf{v}_1 \hat{\mathbf{v}}_1 + |\lambda \hat{\mathbf{v}}_1|^2 dxdt \\ &= \frac{1}{2\lambda} \iint_{\mathcal{O}_{1,d} \times (0,T)} \lambda^2 |L_1 \hat{\mathbf{v}}_1|^2 + 2\lambda L_1 \hat{\mathbf{v}}_1 \mathbf{b} \\ &\quad + \frac{\mu_1}{2\lambda} \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0,T)} 2\lambda \mathbf{v}_1 \hat{\mathbf{v}}_1 + \lambda^2 |\hat{\mathbf{v}}_1|^2 dxdt \end{aligned}$$

Fazendo $\lambda \rightarrow 0$ obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\phi_1(\lambda) - \phi_1(0)}{\lambda} &= \iint_{\mathcal{O}_{1,d} \times (0,T)} L_1 \hat{\mathbf{v}}_1 (L_1 \mathbf{v}_1 + L_2 \mathbf{v}_2 + \mathbf{u} - \mathbf{y}_{i,d}) dxdt + \\ &\quad \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0,T)} \mu_1 \mathbf{v}_1 \hat{\mathbf{v}}_1 dxdt \\ &= \iint_{\mathcal{O}_{1,d} \times (0,T)} L_1 \hat{\mathbf{v}}_1 (\mathbf{y} - \mathbf{y}_{1,d}) dxdt + \mu_1 \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0,T)} \mathbf{v}_1 \hat{\mathbf{v}}_1 dxdt \end{aligned}$$

Portanto, tem-se

$$\frac{\partial \mathcal{J}_1}{\partial \mathbf{v}_1}(\hat{\mathbf{v}}_1, 0) = \iint_{\mathcal{O}_{1,d} \times (0,T)} \mathbf{L}_1 \hat{\mathbf{v}}_1 (\mathbf{y} - \mathbf{y}_{1,d}) \, d\mathbf{x} \, dt + \mu_1 \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0,T)} \mathbf{v}_1 \hat{\mathbf{v}}_1 \, d\mathbf{x} \, dt \quad (2.14)$$

De maneira análoga, obtemos

$$\frac{\partial \mathcal{J}_1}{\partial \mathbf{v}_2}(0, \hat{\mathbf{v}}_2) = \iint_{\mathcal{O}_{2,d} \times (0,T)} \mathbf{L}_2 \hat{\mathbf{v}}_2 (\mathbf{y} - \mathbf{y}_{2,d}) \, d\mathbf{x} \, dt + \mu_2 \iint_{\mathcal{O}_2 \times (0,T)} \mathbf{v}_2 \hat{\mathbf{v}}_2 \, d\mathbf{x} \, dt \quad (2.15)$$

A linearidade das derivadas dos \mathcal{J}_i é imediata, iremos mostrar que é contínua.

Considere a aplicação $\hat{\mathbf{v}}_1 \mapsto \frac{\partial \mathcal{J}_1}{\partial \mathbf{v}_1}(\hat{\mathbf{v}}_1, 0)$. Seja $(\hat{\mathbf{v}}_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência tal que

$$\hat{\mathbf{v}}_1^n \rightarrow \hat{\mathbf{v}}_1 \text{ em } V_1.$$

Assim,

$$\left| \frac{\partial \mathcal{J}_1}{\partial \mathbf{v}_1}(\hat{\mathbf{v}}_1^n, 0) - \frac{\partial \mathcal{J}_1}{\partial \mathbf{v}_1}(\hat{\mathbf{v}}_1, 0) \right| \leq \iint_{\Omega \times (0,T)} |\mathbf{L}_1(\hat{\mathbf{v}}_1^n - \hat{\mathbf{v}}_1)(\mathbf{y} - \mathbf{y}_{1,d}) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} + (\hat{\mathbf{v}}_1^n - \hat{\mathbf{v}}_1) \mathbf{v}_1 \mathbb{1}_{\mathcal{O}_1}| \, d\mathbf{x} \, dt$$

Veja que, Pela desigualdade de Hölder (Teorema 8 para $p=q=2$) tem-se:

$$\begin{aligned} &\leq \iint_{\Omega \times (0,T)} |\mathbf{L}_1(\hat{\mathbf{v}}_1^n - \hat{\mathbf{v}}_1)(\mathbf{y} - \mathbf{y}_{1,d}) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{1,d}}| \, d\mathbf{x} \, dt + \iint_{\Omega \times (0,T)} |(\hat{\mathbf{v}}_1^n - \hat{\mathbf{v}}_1) \mathbf{v}_1 \mathbb{1}_{\mathcal{O}_1}| \, d\mathbf{x} \, dt \\ &\leq \left(\iint_{\mathcal{O}_{1,d} \times (0,T)} |\mathbf{L}_1(\hat{\mathbf{v}}_1^n - \hat{\mathbf{v}}_1)|^2 \, d\mathbf{x} \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\iint_{\mathcal{O}_{1,d} \times (0,T)} |\mathbf{y} - \mathbf{y}_{1,d}|^2 \, d\mathbf{x} \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|\mathbf{L}_1\|_{\mathcal{L}(V_1; L^2(Q))} \cdot \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_{1,d}\|_{L^2(Q)} \cdot \|\hat{\mathbf{v}}_1^n - \hat{\mathbf{v}}_1\|_{V_1} \end{aligned}$$

De modo análogo, temos que:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0,T)} |\mathbf{v}_1(\hat{\mathbf{v}}_1^n - \hat{\mathbf{v}}_1)| \, d\mathbf{x} \, dt &\leq \left(\iint_{\mathcal{O}_{1,d} \times (0,T)} |\mathbf{v}_1|^2 \, d\mathbf{x} \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\iint_{\mathcal{O}_{1,d} \times (0,T)} |\hat{\mathbf{v}}_1^n - \hat{\mathbf{v}}_1|^2 \, d\mathbf{x} \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|\hat{\mathbf{v}}_1^n \mathbf{v}_1\|_{V_1} \|\hat{\mathbf{v}}_1\|_{V_1}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\partial \mathcal{J}_1}{\partial \mathbf{v}_1}(\hat{\mathbf{v}}_1^n, 0) \rightarrow \frac{\partial \mathcal{J}_1}{\partial \mathbf{v}_1}(\hat{\mathbf{v}}_1, 0), \quad \text{quando } \hat{\mathbf{v}}_1^n \rightarrow \hat{\mathbf{v}}_1.$$

Analogamente,

$$\frac{\partial \mathcal{J}_1}{\partial \mathbf{v}_2}(0, \hat{\mathbf{v}}_2^n) \rightarrow \frac{\partial \mathcal{J}_1}{\partial \mathbf{v}_2}(0, \hat{\mathbf{v}}_2), \quad \text{quando } \hat{\mathbf{v}}_2^n \rightarrow \hat{\mathbf{v}}_2.$$

Portanto, \mathcal{J}' é contínuo. ■

Proposição 4. (Equilíbrio de Nash) As afirmações abaixo são equivalentes:

(i) O par $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ é um equilíbrio de Nash para \mathcal{J}_i ;

(ii) As derivadas de Gateux do funcional no ponto $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ se anulam, i.e

$$\frac{\partial \mathcal{J}_1}{\partial \mathbf{v}_1}(\hat{\mathbf{v}}_1, 0) = 0 = \frac{\partial \mathcal{J}_2}{\partial \mathbf{v}_2}(0, \hat{\mathbf{v}}_2); \quad (2.16)$$

(iii)

$$\iint_{\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T)} L_i \hat{\mathbf{v}}_i(\mathbf{y} - \mathbf{y}_{1,d}) d\mathbf{x}dt + \mu_1 \iint_{\mathcal{O}_i \times (0,T)} \mathbf{v}_i \hat{\mathbf{v}}_i d\mathbf{x}dt = 0. \quad (2.17)$$

Demonstração:

(i) \Rightarrow (ii) Suponha que o par $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ seja um equilíbrio de Nash para os funcionais \mathcal{J}_i . Então,

$$\mathcal{J}_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \leq \mathcal{J}_1(\hat{\mathbf{v}}_1, \mathbf{v}_2) \quad \text{e} \quad \mathcal{J}_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \leq \mathcal{J}_2(\mathbf{v}_1, \hat{\mathbf{v}}_2) \quad (2.18)$$

Defina agora o funcional $\eta_1 : V_1 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\eta_1(\hat{\mathbf{v}}_1) = \mathcal{J}_1(\hat{\mathbf{v}}_1, \mathbf{v}_2)$. Veja que \mathbf{v}_1 é ponto de mínimo para η_1 . Logo, $\eta_1'(\mathbf{v}_1) = 0$ e tem-se

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\eta_1(\mathbf{v}_1 + \lambda \hat{\mathbf{v}}_1) - \eta_1(\mathbf{v}_1)}{\lambda} = \iint_{\mathcal{O}_{1,d} \times (0,T)} L_1 \hat{\mathbf{v}}_1(\mathbf{y} - \mathbf{y}_{1,d}) d\mathbf{x}dt + \mu_1 \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0,T)} \mathbf{v}_1 \hat{\mathbf{v}}_1 d\mathbf{x}dt = 0.$$

Logo,

$$\frac{\partial \mathcal{J}_1}{\partial \mathbf{v}_1}(\hat{\mathbf{v}}_1, 0) = 0, \quad \forall \hat{\mathbf{v}}_1 \in V_1.$$

Analogamente, $\frac{\partial \mathcal{J}_2}{\partial \mathbf{v}_2}(0, \hat{\mathbf{v}}_2) \quad \forall \hat{\mathbf{v}}_2 \in V_2$.

Portanto,

$$\frac{\partial \mathcal{J}_1}{\partial \mathbf{v}_1}(\hat{\mathbf{v}}_1, \mathbf{v}_2) = 0 = \frac{\partial \mathcal{J}_2}{\partial \mathbf{v}_2}(\mathbf{v}_1, \hat{\mathbf{v}}_2).$$

(ii) \Rightarrow (i) Uma vez que os funcionais são estritamente convexos e limitado inferiormente, existem únicos $\mathbf{v}_i \in V_i$ tais que

$$\mathcal{J}_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \leq \mathcal{J}_1(\hat{\mathbf{v}}_1, \mathbf{v}_2) \quad \text{e} \quad \mathcal{J}_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \leq \mathcal{J}_2(\mathbf{v}_1, \hat{\mathbf{v}}_2).$$

Onde o controle \mathbf{v}_i é fixado para $i \neq j$, com $j = 1, 2$. Pela unicidade do par $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in V$, segue o resultado.

(ii) \Rightarrow (iii) Segue de (2.14) e (2.15). ■

Proposição 5. (*Equilíbrio de Pareto*) As afirmações abaixo são verdadeiras:

(i) Se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ é um equilíbrio de Pareto para \mathcal{J}_1 e \mathcal{J}_2 , então existe um $\lambda \in [0, 1]$ tal que:

$$\lambda \mathcal{J}'_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + (1 - \lambda) \mathcal{J}'_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 0. \quad (2.19)$$

Em particular, temos

$$\begin{cases} \langle \lambda \frac{\partial \mathcal{J}_1}{\partial \mathbf{v}_1} + (1 - \lambda) \frac{\partial \mathcal{J}_2}{\partial \mathbf{v}_1}, (\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2) \rangle = 0, & \forall (\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2) \\ \langle \lambda \frac{\partial \mathcal{J}_1}{\partial \mathbf{v}_2} + (1 - \lambda) \frac{\partial \mathcal{J}_2}{\partial \mathbf{v}_2}, (\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2) \rangle = 0, & \forall (\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2). \end{cases}$$

(ii) Dado $\lambda \in (0, 1)$, a identidade (2.19) é verdadeira se, e somente se,

$$\mathcal{J}_\lambda := \lambda \mathcal{J}_1 + (1 - \lambda) \mathcal{J}_2. \quad (2.20)$$

possui um mínimo em $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.

(iii) Se (2.20) é válida, para algum $\lambda \in (0, 1)$, então $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ é um equilíbrio de Pareto.

Demonstração:

(i) Suponha que $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ é um equilíbrio de Pareto, assim o ponto $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathbf{V}$ é solução para o problema extremal restrito

$$\begin{cases} \text{minimizar } \mathcal{J}_1(\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*), \\ \text{sujeito } \mathcal{J}_2(\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*) < \mathcal{J}_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2). \end{cases}$$

Pelo critério de Kuhn-Tucker, mais precisamente, pelos teoremas (19) e (20) existem $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2 \geq 0$ tal que

$$\bar{\lambda}_1 \mathcal{J}'_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + \bar{\lambda}_2 \mathcal{J}'_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 0.$$

Considerando uma mudança $\lambda_i = \frac{\bar{\lambda}_i}{\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2}$ para cada $i = 1, 2$, temos que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

Assim,

$$\lambda \mathcal{J}'_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + (1 - \lambda) \mathcal{J}'_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 0.$$

(ii) É uma consequência imediata da demonstração acima, pois $\lambda \mathcal{J}_1 + (1 - \lambda) \mathcal{J}_2$ é convexa.

(iii) Seja $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ um ponto de mínimo para $\lambda \mathcal{J}_1 + (1 - \lambda) \mathcal{J}_2$ e $\hat{\mathbf{v}} = (\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2)$. Então,

$$\lambda \mathcal{J}_1(\mathbf{v}) + (1 - \lambda) \mathcal{J}_2(\mathbf{v}) \leq \lambda \mathcal{J}_1(\hat{\mathbf{v}}) + (1 - \lambda) \mathcal{J}_2(\hat{\mathbf{v}}) \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathbf{V}. \quad (2.21)$$

Suponha que (v_1, v_2) não seja um equilíbrio de pareto. Assim, existe $\bar{v} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2) \in V$ tal que, digamos, $\mathcal{J}_1(\bar{v}_1, \bar{v}_2) < \mathcal{J}_1(v_1, v_2)$ e $\mathcal{J}_2(\bar{v}_1, \bar{v}_2) \leq \mathcal{J}_2(v_1, v_2)$. Como λ e $1 - \lambda$ são positivos, temos que

$$\lambda \mathcal{J}_1(\bar{v}) + (1 - \lambda) \mathcal{J}_2(\bar{v}) < \lambda \mathcal{J}_1(v) + (1 - \lambda) \mathcal{J}_2(v),$$

o que contradiz (2.21). ■

2.2.1 Os sistemas otimizado de Nash e Pareto - Caso Linear

Nessa seção iremos apresentar os sistemas otimizados de Nash e Pareto para os casos lineares. Com o sistema otimizado, conseguimos escrever os controles v_i em função do estado adjunto e das constantes μ_i .

Sistema otimizado de Nash - Caso Linear

Considere para cada $i = 1, 2$ o sistema dado em (2.11), ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{ll} z_{tt}^i - \Delta z^i = \hat{v}_i \mathbb{1}_{\mathcal{O}_i} & \text{em } Q, \\ z^i = 0 & \text{sobre } \Sigma_1, \\ \frac{\partial z^i}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \Sigma_2, \\ z^i(x, 0) = 0, z_t^i(x, 0) = 0 & \text{em } \Omega. \end{array} \right.$$

Multiplicando por uma função $\phi^i \in L^2(Q)$ e integrando em Q tem-se

$$\iint_{\Omega \times (0, T)} z_{tt}^i \phi^i dx dt - \iint_{\Omega \times (0, T)} \Delta z \phi^i dx dt = \iint_{\mathcal{O}_i \times (0, T)} v_i \phi^i dx dt$$

Integrando por partes a primeira expressão do lado esquerdo,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega \times (0, T)} z_{tt}^i \phi^i dx dt &= \int_{\Omega} z_t(T) \phi^i(T) dx - \iint_{\Omega \times (0, T)} z_t^i \phi_t^i dx dt \\ &= \int_{\Omega} z_t(T) \phi^i(T) - z(T) \phi_t^i(T) dx + \iint_{\Omega \times (0, T)} z^i \phi_{tt}^i dx dt \end{aligned}$$

Por outro lado, pelas identidades de Green obtemos:

$$- \int_{\Omega} \Delta z^i \phi^i dx dt = \int_{\Omega} \nabla z^i \nabla \phi^i dx - \int_{\partial \Omega} \frac{\partial z^i}{\partial \eta} \phi^i d\Gamma$$

Novamente, pela primeira identidade temos

$$\int_{\Omega} \nabla z^i \nabla \phi^i dx = - \int_{\Omega} z^i \Delta \phi^i dx + \int_{\partial\Omega} z^i \frac{\partial \phi^i}{\partial \eta} d\Gamma$$

Logo,

$$- \int_{\Omega} \Delta z \phi^i dx dt = - \int_{\Omega} z^i \Delta \phi^i dx + \int_{\partial\Omega} z^i \frac{\partial \phi^i}{\partial \eta} d\Gamma - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial z^i}{\partial \eta} \phi^i d\Gamma$$

Pelas condições de fronteira e integrando em relação ao tempo

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{O}_i \times (0, T)} \hat{v}_i \phi^i &= \int_{\Omega} z_t(T) \phi^i(T) - z(T) \phi_t^i(T) dx + \iint_{\Omega \times (0, T)} z^i (\phi_{tt}^i - \Delta \phi^i) dx dt \\ &\quad - \int_{\Sigma_1} \frac{\partial z^i}{\partial \eta} \phi^i d\Gamma + \int_{\Sigma_2} z^i \frac{\partial \phi^i}{\partial \eta} d\Gamma \end{aligned}$$

Fazendo $z^i = L_i \hat{v}_i$ e impondo que $\phi^i(x, T) = \phi_t^i(x, T) = 0$, $\phi^i = 0$ em Σ_1 e $\frac{\partial \phi^i}{\partial \eta} = 0$ em Σ_2 . Obtemos que,

$$\iint_{\Omega \times (0, T)} (\phi_{tt}^i - \Delta \phi^i) L_i \hat{v}_i dx dt = \iint_{\mathcal{O}_i \times (0, T)} \hat{v}_i \phi^i dx dt \quad (2.22)$$

Por outro lado, (v_1, v_2) é um equilíbrio de Nash, se e somente se,

$$\iint_{\mathcal{O}_{i,d} \times (0, T)} L_i \hat{v}_i (y - y_{i,d}) dx dt + \mu_i \iint_{\mathcal{O}_i \times (0, T)} v_i \hat{v}_i dx dt = 0. \quad (2.23)$$

De forma natural, associado a cada controle v_i e cada função objetivo $y_{i,d}$, se define o estado adjunto:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \phi_{tt}^i - \Delta \phi^i = (y - y_{i,d}) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{i,d}} & \text{em } Q, \\ \phi^i = 0 & \text{sobre } \Sigma_1, \\ \frac{\partial \phi^i}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \Sigma_2, \\ \phi^i(x, T) = 0, \phi_t^i(x, T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.24)$$

Combinado com as informações (2.22) e (2.23), tem-se:

$$\iint_{\mathcal{O}_i \times (0, T)} \hat{v}_i \phi^i dx dt = \iint_{\Omega \times (0, T)} (\phi_{tt}^i - \Delta \phi^i) L_i \hat{v}_i dx dt = -\mu_i \iint_{\mathcal{O}_i \times (0, T)} v_i \hat{v}_i dx dt.$$

Logo,

$$\iint_{\mathcal{O}_i \times (0, T)} \hat{v}_i \phi^i dx dt + \mu_i \iint_{\mathcal{O}_i \times (0, T)} v_i \hat{v}_i dx dt = \iint_{\mathcal{O}_i \times (0, T)} \hat{v}_i (\phi^i + \mu_i v_i) dx dt = 0.$$

Pelo Lema de Du Bois Raymond (Lema 1), obtemos uma relação explícita entre o estado adjunto e o controle, dada por:

$$\mathbf{v}_i = -\frac{1}{\mu_i}\phi^i, \quad i = 1, 2. \quad (2.25)$$

Assim, podemos reformular o sistema (2.1) como segue:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{y}_{tt} - \Delta \mathbf{y} = \mathbf{f} - \frac{1}{\mu_1}\phi^1 \mathbf{1}_{\mathcal{O}_1} - \frac{1}{\mu_2}\phi^2 \mathbf{1}_{\mathcal{O}_2} & \text{em } Q, \\ \phi_{tt}^i - \Delta \phi^i = (\mathbf{y} - \mathbf{y}_{i,d}) \mathbf{1}_{\mathcal{O}_{i,d}} & \text{em } Q, \\ \mathbf{y} = 0, \phi^i = 0 & \text{sobre } \Sigma_1, \\ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \eta} = 0, \frac{\partial \phi^i}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \Sigma_2, \\ \phi^i(\mathbf{x}, T) = 0, \phi_t^i(\mathbf{x}, T) = 0, \mathbf{y}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{y}_0(\mathbf{x}), \mathbf{y}_t(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{y}_1(\mathbf{x}) & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.26)$$

Sistema otimizado de Pareto - Caso Linear

De forma similar ao equilíbrio de Nash, considere uma combinação convexa de operadores $\lambda L_1 \mathbf{v}_1 + (1 - \lambda) L_2 \mathbf{v}_1 = \mathbf{z}^1$ com $\lambda \in (0, 1)$ e \mathbf{z}^1 é solução de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{z}_{tt}^1 - \Delta \mathbf{z}^1 = \hat{\mathbf{v}}_1 \mathbf{1}_{\mathcal{O}_1} & \text{em } Q, \\ \mathbf{z}^1 = 0 & \text{sobre } \Sigma_1, \\ \frac{\partial \mathbf{z}^1}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \Sigma_2, \\ \mathbf{z}^1(\mathbf{x}, 0) = 0, \mathbf{z}_t^1(\mathbf{x}, 0) = 0 & \text{em } \Omega \end{array} \right. \quad (2.27)$$

Multiplicando a equação (2.27) por ϕ^i e integrando por partes, tem-se:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} \hat{\mathbf{v}}_1 \phi^i &= \int_{\Omega} \mathbf{z}^1(T) \phi^i(T) - \mathbf{z}(T) \phi_t^i(T) d\mathbf{x} + \iint_{\Omega \times (0, T)} \mathbf{z}^1 (\phi_{tt}^i - \Delta \phi^i) d\mathbf{x} dt \\ &\quad - \int_{\Sigma_1} \frac{\partial \mathbf{z}^1}{\partial \eta} \phi^i d\Gamma + \int_{\Sigma_2} \mathbf{z}^1 \frac{\partial \phi^i}{\partial \eta} d\Gamma. \end{aligned}$$

Fazendo $\phi^i(\mathbf{x}, T) = \phi_t^i(\mathbf{x}, T) = 0$, $\phi^i = 0$ em Σ_1 e $\frac{\partial \phi^i}{\partial \eta} = 0$ em Σ_2 , obteremos:

$$\iint_{\Omega \times (0, T)} (\phi_{tt}^i - \Delta \phi^i) \mathbf{z}^1 d\mathbf{x} dt = \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} \hat{\mathbf{v}}_1 \phi^i d\mathbf{x} dt. \quad (2.28)$$

Logo, é natural que o estado adjunto para cada $i = 1, 2$, se apresente da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \phi_{tt}^i - \Delta \phi^i = (\mathbf{y} - \mathbf{y}_{i,d}) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{i,d}} & \text{em } \mathcal{Q}, \\ \phi^i = 0 & \text{sobre } \Sigma_1, \\ \frac{\partial \phi^i}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \Sigma_2, \\ \phi^i(\mathbf{x}, T) = 0, \phi_t^i(\mathbf{x}, T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.29)$$

Pelo item (ii) da proposição (5), temos que

$$\left\langle \lambda \frac{\partial \mathcal{J}_1}{\partial \mathbf{v}_1} + (1 - \lambda) \frac{\partial \mathcal{J}_2}{\partial \mathbf{v}_1}, (\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2) \right\rangle = 0,$$

ou seja,

$$\iint_{\Omega \times (0, T)} \lambda z^1 (\mathbf{y} - \mathbf{y}_{1,d}) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} + (1 - \lambda) z^1 (\mathbf{y} - \mathbf{y}_{2,d}) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{2,d}} dx dt + \lambda \mu_1 \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} \mathbf{v}_1 \hat{\mathbf{v}}_1 dx dt = 0. \quad (2.30)$$

Multiplicando (2.29) por λz^1 (para $i = 1$) e por $(1 - \lambda) z^1$ (para $i = 2$) obtem-se:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega \times (0, T)} \lambda z^1 (\mathbf{y} - \mathbf{y}_{1,d}) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} dx dt &= \iint_{\Omega \times (0, T)} \lambda z^1 (\phi_{tt}^1 - \Delta \phi^1) dx dt \\ &= \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} \lambda \hat{\mathbf{v}}_1 \phi^1 dx dt. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega \times (0, T)} (1 - \lambda) z^1 (\mathbf{y} - \mathbf{y}_{2,d}) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{2,d}} dx dt &= \iint_{\Omega \times (0, T)} (1 - \lambda) z^1 (\phi_{tt}^2 - \Delta \phi^2) dx dt \\ &= \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} (1 - \lambda) \hat{\mathbf{v}}_1 \phi^2. \end{aligned}$$

Logo, podemos reescrever (2.30) de modo que

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} \lambda \hat{\mathbf{v}}_1 \phi^1 dx dt + \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} \lambda \mu_1 (\mathbf{v}_1 \hat{\mathbf{v}}_1) dx dt + \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} (1 - \lambda) \hat{\mathbf{v}}_1 \phi^2 dx dt \\ &= \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} \lambda \hat{\mathbf{v}}_1 \phi^1 + \lambda \mu_1 (\mathbf{v}_1 \hat{\mathbf{v}}_1) + (1 - \lambda) \hat{\mathbf{v}}_1 \phi^2 dx dt \\ &= \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} (\lambda (\phi^1 + \mu_1 \mathbf{v}_1) + (1 - \lambda) \phi^2) \hat{\mathbf{v}}_1 dx dt. \end{aligned}$$

Como consequência do Lema de Du Bois Raymond, obteremos uma identificação entre controle e a combinação linear convexa dos estados adjuntos, dada por

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{1}{\mu_1} \left(\phi^1 + \frac{(1 - \lambda)}{\lambda} \phi^2 \right). \quad (2.31)$$

Analogamente, teremos:

$$v_2 = -\frac{1}{\mu_2} \left(\frac{\lambda}{(1-\lambda)} \phi^1 + \phi^2 \right). \quad (2.32)$$

Podemos assim reformular o sistema (2.1), agora utilizando o equilíbrio de Pareto, como segue:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{y}_{tt} - \Delta \mathbf{y} = \mathbf{f} - \frac{1}{\mu_1} \left(\phi^1 + \frac{(1-\lambda)}{\lambda} \phi^2 \right) \mathbf{1}_{\mathcal{O}_1} - \frac{1}{\mu_2} \left(\frac{\lambda}{(1-\lambda)} \phi^1 + \phi^2 \right) \mathbf{1}_{\mathcal{O}_2} & \text{em } Q \\ \phi_{tt}^i - \Delta \phi^i = (\mathbf{y} - \mathbf{y}_{i,d}) \mathbf{1}_{\mathcal{O}_{i,d}} & \text{em } Q \\ \mathbf{y} = 0, \phi^i = 0 & \text{sobre } \Sigma_1 \\ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \eta} = 0, \frac{\partial \phi^i}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \Sigma_2 \\ \phi^i(\mathbf{x}, T) = 0, \phi_t^i(\mathbf{x}, T) = 0, \mathbf{y}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{y}_0(\mathbf{x}), \mathbf{y}_t(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{y}_1(\mathbf{x}) & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.33)$$

Os sistemas (2.26) e (2.33) são conhecidos na literatura como *Sistema Otimizado de Nash* e *Sistema Otimizado de Pareto*, respectivamente.

2.2.2 Existência e Unicidade do Equilíbrio de Nash e Pareto - Caso Linear

Nessa seção iremos provar a existência e unicidade para os equilíbrios de Nash e Pareto utilizando a formulação de Euler-Lagrange e utilizando o teorema de Lax-Milgram.

Teorema 21. (*Existência e Unicidade Equilíbrio de Nash - Caso Linear.*) *Suponha que $\|\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{2,d}} \mathbf{L}_1\|_{(2)} < 4\mu_1$ e $\|\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} \mathbf{L}_2\|_{(1)} < 4\mu_2$. Onde $\|\cdot\|_{(i)}$ denota a norma no espaço $\mathcal{L}(V_{3-i}; L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0, T)))$. Então, para cada $\mathbf{f} \in L^2(\Omega \times (0, T))$ existe um equilíbrio de Nash (v_1, v_2) .*

Demonstração: Pela proposição 2, mais precisamente pelo item (2.16) e (2.22), sabemos que (v_1, v_2) é um equilíbrio de Nash se,

$$\iint_{\mathcal{O}_i \times (0, T)} \hat{v}_i (\phi^i + \mu_i v_i) \, dx dt = 0, \forall \hat{v}_i \in V_i.$$

Uma vez que $z^i = L_i \hat{v}^i$ para $i = 1, 2$ e sabendo também que $z_{tt}^i - \Delta z^i = \hat{v}^i \mathbf{1}_{\mathcal{O}_i}$ e $\phi_{tt}^i - \Delta \phi^i = \mathbf{y} - \mathbf{y}_{i,d}$ pelas deduções feitas anteriormente, podemos reformular a equação

acima por

$$\begin{aligned}
0 &= \iint_{\mathcal{O}_i \times (0, T)} \hat{v}_i \phi^i + \mu_i \hat{v}_i v_i \, dx dt = \iint_{\mathcal{O}_i \times (0, T)} \hat{v}_i \phi^i \, dx dt + \mu_i \iint_{\mathcal{O}_i \times (0, T)} \hat{v}_i v_i \, dx dt \\
&= \iint_{\mathcal{O}_i \times (0, T)} \phi^i (z_{tt}^i - \Delta z^i) \, dx dt + \iint_{\mathcal{O}_i \times (0, T)} \mu_i \hat{v}_i v_i \, dx dt \\
&= \iint_{\mathcal{O}_i \times (0, T)} (\phi_{tt}^i - \Delta \phi^i) z^i \, dx dt + \iint_{\mathcal{O}_i \times (0, T)} \mu_i \hat{v}_i v_i \, dx dt \\
&= \iint_{\mathcal{O}_{i,d} \times (0, T)} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_{i,d}) z^i \, dx dt + \iint_{\mathcal{O}_i \times (0, T)} \mu_i \hat{v}_i v_i \, dx dt \\
&= \iint_{\mathcal{O}_{i,d} \times (0, T)} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_{i,d}) L_i \hat{v}^i \, dx dt + \iint_{\mathcal{O}_i \times (0, T)} \mu_i \hat{v}_i v_i \, dx dt.
\end{aligned}$$

Como $\mathbf{y} = L_1 \mathbf{v}_1 + L_2 \mathbf{v}_2 + \mathbf{u}$, obtemos que $\mathbf{y} - \mathbf{y}_{i,d} = L_1 \mathbf{v}_1 + L_2 \mathbf{v}_2 - (\mathbf{y}_{i,d} - \mathbf{u})$. Assim, sendo $L_i^* : L^2(\Omega \times (0, T)) \rightarrow L^2(\mathcal{O}_i \times (0, T))$ o operador adjunto de L_i , temos

$$\begin{aligned}
0 &= \iint_{\mathcal{O}_i \times (0, T)} (L_1 \mathbf{v}_1 + L_2 \mathbf{v}_2 - (\mathbf{y}_{i,d} - \mathbf{u})) L_i \hat{v}^i \, dx dt + \iint_{\mathcal{O}_i \times (0, T)} \mu_i \hat{v}_i v_i \, dx dt \\
&= \iint_{\Omega \times (0, T)} L_i^* [(L_1 \mathbf{v}_1 + L_2 \mathbf{v}_2 - (\mathbf{y}_{i,d} - \mathbf{u})) \mathbf{1}_{\mathcal{O}_{i,d}}] \hat{v}^i \, dx dt + \iint_{\mathcal{O}_i \times (0, T)} \mu_i \hat{v}_i v_i \, dx dt \\
&= \iint_{\Omega \times (0, T)} [L_i^* [(L_1 \mathbf{v}_1 + L_2 \mathbf{v}_2 - (\mathbf{y}_{i,d} - \mathbf{u})) \mathbf{1}_{\mathcal{O}_{i,d}}] + \mu_i v_i] \hat{v}_i \, dx dt, \quad \forall \hat{v}_i \in V_i.
\end{aligned}$$

Portanto, pela linearidade dos operadores auto-adjunto, tem-se

$$\begin{aligned}
(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \text{ é de Nash} &\Leftrightarrow \langle L_i^* (L_1 \mathbf{v}_1 + L_2 \mathbf{v}_2 - (\mathbf{y}_{i,d} - \mathbf{u})) \mathbf{1}_{\mathcal{O}_{i,d}} + \mu_i v_i, \hat{v}_i \rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow L_i^* (L_1 \mathbf{v}_1 + L_2 \mathbf{v}_2 - (\mathbf{y}_{i,d} - \mathbf{u})) \mathbf{1}_{\mathcal{O}_{i,d}} + \mu_i v_i = 0 \\
&\Leftrightarrow L_i^* (L_1 \mathbf{v}_1 + L_2 \mathbf{v}_2) \mathbf{1}_{\mathcal{O}_i} + \mu_i v_i = L_i^* (\mathbf{y}_{i,d} - \mathbf{u}) \mathbf{1}_{\mathcal{O}_{i,d}}.
\end{aligned}$$

Logo, para garantir a existência e unicidade do equilíbrio de Nash, basta provar que a equação abaixo possui uma única solução

$$\mathbb{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \Psi,$$

com $\Psi = (L_1^* [(\mathbf{y}_{1,d} - \mathbf{u}) \mathbf{1}_{\mathcal{O}_{1,d}}], L_2^* [(\mathbf{y}_{2,d} - \mathbf{u}) \mathbf{1}_{\mathcal{O}_{2,d}}])$. Para tanto, defina em $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2$ o produto interno dado por

$$\langle (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \rangle_{\mathbf{V}} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_1 \rangle_{\mathbf{V}_1} + \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_2 \rangle_{\mathbf{V}_2}. \quad (2.34)$$

Considere agora a forma bilinear:

$$\mathcal{A}((\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)) = \langle \mathbb{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \rangle_{\mathbf{V}},$$

a qual devemos provar que satisfaz as condições do Teorema de Lax-Milgram. Claramente o funcional é contínuo e além disso, \mathcal{A} é coercivo. Com efeito,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}((\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)) &= \langle \mathbb{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \rangle_{\mathbf{V}} = \sum_{i=1}^2 \langle \mathbb{L}_i^*((\mathbb{L}_1 \mathbf{v}_1 + \mathbb{L}_2 \mathbf{v}_2) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{i,d}}) + \mu_i \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle_{\mathbf{V}_i} \\ &= \sum_{i=1}^2 \langle \mathbb{L}_i^*((\mathbb{L}_1 \mathbf{v}_1 + \mathbb{L}_2 \mathbf{v}_2) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{i,d}}), \mathbf{v}_i \rangle + \sum_{i=1}^2 \mu_i \|\mathbf{v}_i\|_{\mathbf{V}_i}^2 \\ &= \sum_{i=1}^2 \iint_{\mathcal{O}_i \times (0, T)} \mathbb{L}_i^*((\mathbb{L}_1 \mathbf{v}_1 + \mathbb{L}_2 \mathbf{v}_2) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{i,d}}) \mathbf{v}_i \, dx dt + \sum_{i=1}^2 \mu_i \iint_{\mathcal{O}_i \times (0, T)} |\mathbf{v}_i|^2 \, dx dt. \end{aligned}$$

Aplicando o operador \mathbb{L}_i na integral acima temos, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}((\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)) &= \sum_{i=1}^2 \iint_{\Omega \times (0, T)} ((\mathbb{L}_1 \mathbf{v}_1 + \mathbb{L}_2 \mathbf{v}_2) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{i,d}}) \mathbb{L}_i \mathbf{v}_i \, dx dt + \sum_{i=1}^2 \mu_i \iint_{\mathcal{O}_{i,d} \times (0, T)} |\mathbf{v}_i|^2 \, dx dt \\ &= \sum_{i=1}^2 \iint_{\mathcal{O}_{i,d} \times (0, T)} ((\mathbb{L}_1 \mathbf{v}_1 + \mathbb{L}_2 \mathbf{v}_2)) \mathbb{L}_i \mathbf{v}_i \, dx dt + \sum_{i=1}^2 \mu_i \iint_{\mathcal{O}_i \times (0, T)} |\mathbf{v}_i|^2 \, dx dt \\ &= \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{j=1}^2 \iint_{\mathcal{O}_{i,d} \times (0, T)} \mathbb{L}_i(\mathbf{v}_i) \mathbb{L}_j(\mathbf{v}_j) \, dx dt \right) + \sum_{i=1}^2 \iint_{\mathcal{O}_i \times (0, T)} |\mathbf{v}_i|^2 \, dx dt \\ &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \langle \mathbb{L}_i(\mathbf{v}_i), \mathbb{L}_j(\mathbf{v}_j) \rangle_{L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0, T))} + \sum_{i=1}^2 \iint_{\mathcal{O}_i \times (0, T)} |\mathbf{v}_i|^2 \, dx dt \\ &= \sum_{i=1}^2 \left(\mu_i \|\mathbf{v}_i\|^2 + \|\mathbb{L}_i(\mathbf{v}_i)\|_{L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0, T))}^2 \right) + \sum_{i=1}^2 \langle \mathbb{L}_{3-i} \mathbf{v}_{3-i}, \mathbb{L}_i \mathbf{v}_i \rangle_{L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0, T))} \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$-\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{V}} \|\mathbf{y}\|_{\mathbf{V}} \leq -\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{V}}.$$

e pela desigualdade de Young:

$$-\frac{1}{2}(\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\mathbf{y}\|_{\mathbf{V}}^2) \leq -\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{V}} \|\mathbf{y}\|_{\mathbf{V}}.$$

Assim, para qualquer espaço de Hilbert \mathbf{V} tem-se

$$-\frac{1}{2}(\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\mathbf{y}\|_{\mathbf{V}}^2) \leq -\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{V}},$$

para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$.

Por esse fato, tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \langle \mathbb{L}_{3-i} \mathbf{v}_{3-i}, -\mathbb{L}_i \mathbf{v}_i \rangle_{L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0, T))} &= -2 \sum_{i=1}^2 \left\langle \frac{1}{2} \mathbb{L}_{3-i} \mathbf{v}_{3-i}, -\mathbb{L}_i \mathbf{v}_i \right\rangle_{L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0, T))} \\ &\geq - \sum_{i=1}^2 \left(\|\mathbb{L}_i \mathbf{v}_i\|_{L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0, T))}^2 + \|\frac{1}{2} \mathbb{L}_{3-i} \mathbf{v}_{3-i}\|_{L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0, T))}^2 \right) \\ &= - \sum_{i=1}^2 \left(\|\mathbb{L}_i \mathbf{v}_i\|_{L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0, T))}^2 + \frac{1}{4} \|\mathbb{L}_{3-i} \mathbf{v}_{3-i}\|_{L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0, T))}^2 \right) \end{aligned}$$

Ou seja,

$$-\sum_{i=1}^2 \left(\|L_i \mathbf{v}_i\|_{L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T))}^2 + \frac{1}{4} \|L_{3-i} \mathbf{v}_{3-i}\|_{L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T))}^2 \right) \leq \sum_{i=1}^2 \langle L_{3-i} \mathbf{v}_{3-i}, L_i \mathbf{v}_i \rangle_{L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T))}. \quad (2.35)$$

Agora, somando $\sum_{i=1}^2 (\mu_i \|\mathbf{v}_i\|^2 + \|L_i(\mathbf{v}_i)\|^2)$ em ambos os lados, teremos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}((\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)) &= \sum_{i=1}^2 (\mu_i \|\mathbf{v}_i\|^2 + \|L_i(\mathbf{v}_i)\|^2) + \sum_{i=1}^2 \langle L_{3-i} \mathbf{v}_{3-i}, L_i \mathbf{v}_i \rangle_{L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T))} \\ &\geq \sum_{i=1}^2 \mu_i \|\mathbf{v}_i\|^2 - \frac{1}{4} \|L_{3-i} \mathbf{v}_{3-i}\|_{L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T))}^2 \end{aligned}$$

Uma vez que os operadores $L_i : V_i \rightarrow L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0, T))$ são contínuos para cada $i = 1, 2$ temos,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \frac{1}{4} \|L_{3-i} \mathbf{v}_{3-i}\|_{L^2(\Omega \times (0,T))}^2 &= \sum_{i=1}^2 \frac{1}{4} \|\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{i,d}} L_{3-i} \mathbf{v}_{3-i}\|_{L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T))}^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^2 \frac{1}{4} \|\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{i,d}} L_{3-i}\|_{(i)}^2 \|\mathbf{v}_{3-i}\|_{V_{3-i}}^2 \\ &= \sum_{i=1}^2 \|\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{3-i,d}} L_i\|_{(3-i)}^2 \|\mathbf{v}_i\|_{V_i}^2 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}((\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)) &= \sum_{i=1}^2 (\mu_i \|\mathbf{v}_i\|_{V_i}^2 + \|L_i(\mathbf{v}_i)\|^2) + \sum_{i=1}^2 \langle L_{3-i} \mathbf{v}_{3-i}, L_i \mathbf{v}_i \rangle_{L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T))} \\ &\geq \sum_{i=1}^2 \mu_i \|\mathbf{v}_i\|_{V_i}^2 - \frac{1}{4} \|L_{3-i} \mathbf{v}_{3-i}\|_{L^2(\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T))}^2 \\ &\geq \sum_{i=1}^2 \|\mathbf{v}_i\|_{V_i}^2 \left(\mu_i - \|\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{3-i,d}} L_i\|_{(3-i)}^2 \right). \end{aligned}$$

Tomemos $\eta = \min \left\{ \mu_i - \|\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{3-i,d}} L_i\|_{(3-i)}^2 \right\}$ para cada $i = 1, 2$. Como por hipótese $\eta > 0$, logo

$$\begin{aligned} \mathcal{A}((\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)) &\geq \eta \sum_{i=1}^2 \|\mathbf{v}_i\|_{V_i}^2 \\ &= \eta \|(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)\|_{V}^2. \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Lax-Milgran, para cada $\Psi = (L_1^* [(y_{1,d} - u) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{1,d}}], L_2^* [(y_{2,d} - u) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{2,d}}]) \in V$, existe um único $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in V$ tal que

$$\mathcal{A}((\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)) = \langle \Psi, (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \rangle_V, \quad \forall (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in V$$

Portanto, $\mathbb{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \Psi$ em V . ■

Teorema 22. (*Existência e Unicidade Equilíbrio de Pareto*) Suponha que

$$\begin{aligned} \left(\|\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} L_1\|_{(1,1)}^2 + \frac{(1-\lambda)}{\lambda} \|\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{2,d}} L_1\|_{(1,2)}^2 \right) &< \frac{\mu_1}{2} \\ \left(\|\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} L_2\|_{(2,1)}^2 + \frac{(1-\lambda)}{\lambda} \|\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{2,d}} L_2\|_{(2,2)}^2 \right) &< \frac{\mu_2}{2} \end{aligned}$$

nde $\|\cdot\|_{(i,j)}$ denota a norma no espaço $\mathcal{L}(V_i; L^2(\mathcal{O}_{j,d} \times (0, T)))$ para cada $i = 1, 2$. Então, para cada $f \in L^2(\Omega \times (0, T))$ existe um equilíbrio de Pareto $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.

Demonstração: Fixado $\lambda \in (0, 1)$, temos que

$$\iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} (\lambda \mu_1 \mathbf{v}_1 + \lambda \phi^1 + (1-\lambda) \phi^2) \hat{v}_1 \, dx dt = 0.$$

e também,

$$\iint_{\mathcal{O}_2 \times (0, T)} ((1-\lambda) \mu_2 \mathbf{v}_2 + \lambda \phi^1 + (1-\lambda) \phi^2) \hat{v}_2 \, dx dt = 0.$$

Note que, as equações acima podem ser reescritas como:

$$A_1 = \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} (\lambda \mu_1 \mathbf{v}_1) \hat{v}_1 \, dx dt + \zeta_1 \quad e \quad A_2 = \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} ((1-\lambda) \mu_2 \mathbf{v}_2) \hat{v}_2 \, dx dt + \zeta_2,$$

onde $\zeta_i = \iint_{\mathcal{O}_i \times (0, T)} (\lambda \phi^1 + (1-\lambda) \phi^2) \hat{v}_i \, dx dt$ com $i = 1, 2$.

Analisaremos agora ζ_i para cada $i = 1, 2$. Como

$$\hat{v}_i \mathbb{1}_{\mathcal{O}_i} = z_{tt}^i - \Delta z^i,$$

$$\phi_{tt}^i - \Delta \phi^i = (\mathbf{y} - \mathbf{y}_{i,d}) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{i,d}}$$

e

$$z^i = L_i \mathbf{v}_i,$$

é natural reescrever ζ_1 e ζ_2 como:

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} (\lambda \phi^1 + (1 - \lambda) \phi^2) \hat{v}_1 \, dx dt \\
&= \iint_{\Omega \times (0, T)} \lambda \phi^1 \hat{v}_1 \mathbf{1}_{\mathcal{O}_1} \, dx dt + \iint_{\Omega \times (0, T)} (1 - \lambda) \phi^2 \hat{v}_1 \mathbf{1}_{\mathcal{O}_1} \, dx dt \\
&= \iint_{\Omega \times (0, T)} \lambda \phi^1 (z_{tt}^1 - \Delta z^1) \, dx dt + \iint_{\Omega \times (0, T)} (1 - \lambda) \phi^2 (z_{tt}^1 - \Delta z^1) \, dx dt \\
&= \iint_{\Omega \times (0, T)} \lambda (\phi_{tt}^1 - \Delta \phi^1) z^1 \, dx dt + \iint_{\Omega \times (0, T)} (1 - \lambda) (\phi_{tt}^2 - \Delta \phi^2) z^1 \, dx dt \\
&= \iint_{\Omega \times (0, T)} (\lambda (\phi_{tt}^1 - \Delta \phi^1) + (1 - \lambda) (\phi_{tt}^2 - \Delta \phi^2)) z^1 \, dx dt \\
&= \iint_{\Omega \times (0, T)} (\lambda (\mathbf{y} - \mathbf{y}_{1,d}) \mathbf{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} + (1 - \lambda) (\mathbf{y} - \mathbf{y}_{2,d}) \mathbf{1}_{\mathcal{O}_{2,d}}) z^1 \, dx dt \\
&= \iint_{\Omega \times (0, T)} (\lambda (\mathbf{y} - \mathbf{y}_{1,d}) \mathbf{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} + (1 - \lambda) (\mathbf{y} - \mathbf{y}_{2,d}) \mathbf{1}_{\mathcal{O}_{2,d}}) L_1 \hat{v}_1 \, dx dt.
\end{aligned}$$

Utilizando o princípio da boa colocação para a (2.1), podemos escrever $\mathbf{y} = L_1 \mathbf{v}_1 + L_2 \mathbf{v}_2 + \mathbf{u}$ e por consequência tem-se $\mathbf{y} - \mathbf{y}_{i,d} = L_1 \mathbf{v}_1 + L_2 \mathbf{v}_2 - (\mathbf{y}_{i,d} - \mathbf{u})$.

Daí,

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= \iint_{\Omega \times (0, T)} [\lambda (\mathbf{y} - \mathbf{y}_{1,d}) \mathbf{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} + (1 - \lambda) (\mathbf{y} - \mathbf{y}_{2,d}) \mathbf{1}_{\mathcal{O}_{2,d}}] L_1 \hat{v}_1 \, dx dt \\
&= \iint_{\Omega \times (0, T)} [\lambda (L_1 \mathbf{v}_1 + L_2 \mathbf{v}_2 - (\mathbf{y}_{1,d} - \mathbf{u})) \mathbf{1}_{\mathcal{O}_{1,d}}] L_1 \hat{v}_1 \, dx dt \\
&\quad + \iint_{\Omega \times (0, T)} [(1 - \lambda) (L_1 \mathbf{v}_1 + L_2 \mathbf{v}_2 - (\mathbf{y}_{2,d} - \mathbf{u})) \mathbf{1}_{\mathcal{O}_{2,d}}] L_1 \hat{v}_1 \, dx dt.
\end{aligned}$$

Definimos $L_i^* : L^2(\Omega \times (0, T)) \rightarrow L^2(\mathcal{O}_i \times (0, T))$ o operador adjunto de L_i , da igualdade acima, tem-se

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= \iint_{\Omega \times (0, T)} L_1^* [\lambda (L_1 \mathbf{v}_1 + L_2 \mathbf{v}_2 - (\mathbf{y}_{1,d} - \mathbf{u})) \mathbf{1}_{\mathcal{O}_{1,d}}] \hat{v}_1 \, dx dt \\
&\quad + \iint_{\Omega \times (0, T)} L_1^* [(1 - \lambda) (L_1 \mathbf{v}_1 + L_2 \mathbf{v}_2 - (\mathbf{y}_{2,d} - \mathbf{u})) \mathbf{1}_{\mathcal{O}_{2,d}}] L_1 \hat{v}_1 \, dx dt.
\end{aligned}$$

Por outro lado, pela linearidade do operador L_1^* , podemos reescrever

$$\begin{aligned}
&= L_1^* [\lambda (L_1 \mathbf{v}_1 + L_2 \mathbf{v}_2 - (\mathbf{y}_{1,d} - \mathbf{u})) \mathbf{1}_{\mathcal{O}_{1,d}}] + L_1^* [(1 - \lambda) (L_1 \mathbf{v}_1 + L_2 \mathbf{v}_2 - (\mathbf{y}_{2,d} - \mathbf{u})) \mathbf{1}_{\mathcal{O}_{2,d}}] \\
&= \lambda L_1^* [(L_1 \mathbf{v}_1 + L_2 \mathbf{v}_2) \mathbf{1}_{\mathcal{O}_{1,d}}] - \lambda L_1^* [(\mathbf{y}_{1,d} - \mathbf{u}) \mathbf{1}_{\mathcal{O}_{1,d}}] \\
&\quad + (1 - \lambda) L_1^* [(L_1 \mathbf{v}_1 + L_2 \mathbf{v}_2) \mathbf{1}_{\mathcal{O}_{2,d}}] - (1 - \lambda) L_1^* [(\mathbf{y}_{2,d} - \mathbf{u}) \mathbf{1}_{\mathcal{O}_{2,d}}] \\
&= L_1^* [(L_1 \mathbf{v}_1 + L_2 \mathbf{v}_2) (\lambda \mathbf{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} + (1 - \lambda) \mathbf{1}_{\mathcal{O}_{2,d}})] \\
&\quad - L_1^* [\lambda (\mathbf{y}_{1,d} - \mathbf{u}) \mathbf{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} + (1 - \lambda) (\mathbf{y}_{2,d} - \mathbf{u}) \mathbf{1}_{\mathcal{O}_{2,d}}]
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} \{L_1^* [(L_1 v_1 + L_2 v_2)(\lambda \mathbf{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} + (1-\lambda)\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{2,d}})]\} \hat{v}_1 dx dt \\ &- \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} \{L_1^* [\lambda(\mathbf{y}_{1,d} - \mathbf{u})\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} + (1-\lambda)(\mathbf{y}_{2,d} - \mathbf{u})\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{2,d}}]\} \hat{v}_1 dx dt\end{aligned}$$

Assim, $A_1 = 0$ equivale a

$$\begin{aligned}0 &= \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} \{\lambda \mu_1 v_1 + L_1^* [(L_1 v_1 + L_2 v_2)(\lambda \mathbf{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} + (1-\lambda)\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{2,d}})]\} \hat{v}_1 dx dt \\ &- \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} \{L_1^* [\lambda(\mathbf{y}_{1,d} - \mathbf{u})\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} + (1-\lambda)(\mathbf{y}_{2,d} - \mathbf{u})\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{2,d}}]\} \hat{v}_1 dx dt \quad \forall \hat{v}_1 \in V_1.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\lambda \mu_1 v_1 + L_1^* [(L_1 v_1 + L_2 v_2)(\lambda \mathbf{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} + (1-\lambda)\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{2,d}})] &= \lambda L_1^* [(\mathbf{y}_{1,d} - \mathbf{u})\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{2,d}}] \\ &+ (1-\lambda) L_1^* [(\mathbf{y}_{2,d} - \mathbf{u})\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{2,d}}]\end{aligned}$$

Com uma construção análoga para $i = 2$, obtem-se:

$$\begin{aligned}(1-\lambda)\mu_2 v_2 + L_2^* [(L_1 v_1 + L_2 v_2)(\lambda \mathbf{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} + (1-\lambda)\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{2,d}})] &= \lambda L_2^* [(\mathbf{y}_{1,d} - \mathbf{u})\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{2,d}}] \\ &+ (1-\lambda) L_2^* [(\mathbf{y}_{2,d} - \mathbf{u})\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{2,d}}]\end{aligned}$$

Portanto, (v_1, v_2) é um equilíbrio de Pareto se

$$\mathbb{L}(v_1, v_2) = \Psi, \tag{2.36}$$

onde

$$\mathbb{L}(v_1, v_2) = (\lambda \mu_1 v_1 + \xi_1, (1-\lambda)\mu_2 v_2 + \xi_2)$$

e

$$\Psi = (L_1^*(\beta), L_2^*(\beta))$$

com

$$\xi_i = L_i^* [(L_1 v_1 + L_2 v_2)(\lambda \mathbf{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} + (1-\lambda)\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{2,d}})] \quad \text{e} \quad \beta = \lambda(\mathbf{y}_{1,d} - \mathbf{u})\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} + (1-\lambda)(\mathbf{y}_{2,d} - \mathbf{u})\mathbf{1}_{\mathcal{O}_{2,d}}$$

Para provar (2.36), considere a seguinte forma bilinear dada por

$$\mathcal{A}((v_1, v_2), (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)) = \langle \mathbb{L}(v_1, v_2), (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \rangle_V \tag{2.37}$$

onde o produto interno é definido em (2.34). Primeiramente a forma definida acima é continua pela continuidade dos operadores, mostraremos então que é coerciva. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}((\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)) &= \langle \mathbb{L}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \rangle_V \\
&= \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} \{ \mathbb{L}_1^* [(\mathbb{L}_1 \mathbf{v}_1 + \mathbb{L}_2 \mathbf{v}_2) (\lambda \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} + (1 - \lambda) \mathbb{1}_{2,d})] + \lambda \mu_1 \mathbf{v}_1 \} \mathbf{v}_1 \, dx dt \\
&+ \iint_{\mathcal{O}_2 \times (0, T)} \{ \mathbb{L}_2^* [(\mathbb{L}_1 \mathbf{v}_1 + \mathbb{L}_2 \mathbf{v}_2) (\lambda \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} + (1 - \lambda) \mathbb{1}_{2,d})] + (1 - \lambda) \mu_2 \mathbf{v}_2 \} \mathbf{v}_2 \, dx dt \\
&= \sum_{i=1}^2 \iint_{\Omega \times (0, T)} (\mathbb{L}_1 \mathbf{v}_1 + \mathbb{L}_2 \mathbf{v}_2) (\lambda \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} + (1 - \lambda) \mathbb{1}_{2,d}) \mathbb{L}_i \mathbf{v}_i \, dx dt \\
&+ \lambda \mu_1 \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} |\mathbf{v}_1|^2 \, dx dt + (1 - \lambda) \mu_2 \iint_{\mathcal{O}_2 \times (0, T)} |\mathbf{v}_2|^2 \, dx dt \\
&= \iint_{\Omega \times (0, T)} (\mathbb{L}_1 \mathbf{v}_1 + \mathbb{L}_2 \mathbf{v}_2)^2 (\lambda \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} + (1 - \lambda) \mathbb{1}_{2,d}) \, dx dt \\
&+ \lambda \mu_1 \|\mathbf{v}_1\|_{L^2(\mathcal{O}_1 \times (0, T))}^2 + (1 - \lambda) \mu_2 \|\mathbf{v}_2\|_{L^2(\mathcal{O}_2 \times (0, T))}^2 \\
&= \lambda \|\mathbb{L}_1 \mathbf{v}_1 + \mathbb{L}_2 \mathbf{v}_2\|_{L^2(\mathcal{O}_{1,d} \times (0, T))}^2 + (1 - \lambda) \|\mathbb{L}_1 \mathbf{v}_1 + \mathbb{L}_2 \mathbf{v}_2\|_{L^2(\mathcal{O}_{2,d} \times (0, T))}^2 \\
&+ \lambda \mu_1 \|\mathbf{v}_1\|_{L^2(V_1)}^2 + (1 - \lambda) \mu_2 \|\mathbf{v}_2\|_{L^2(V_2)}^2 \\
&\geq \left(-2\lambda \|\mathbb{L}_1 \mathbf{v}_1\|_{L^2(\mathcal{O}_{1,d} \times (0, T))}^2 - 2(1 - \lambda) \|\mathbb{L}_1 \mathbf{v}_1\|_{L^2(\mathcal{O}_{2,d} \times (0, T))}^2 + \lambda \mu_1 \|\mathbf{v}_1\|_{L^2(V_1)}^2 \right) \\
&+ \left(-2\lambda \|\mathbb{L}_2 \mathbf{v}_2\|_{L^2(\mathcal{O}_{1,d} \times (0, T))}^2 - (1 - \lambda) \left(2 \|\mathbb{L}_2 \mathbf{v}_2\|_{L^2(\mathcal{O}_{2,d} \times (0, T))}^2 - \mu_2 \|\mathbf{v}_2\|_{L^2(V_2)}^2 \right) \right) \\
&\geq \left(-2\lambda \|\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} \mathbb{L}_1\|_{(1,1)}^2 - 2(1 - \lambda) \|\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{2,d}} \mathbb{L}_1\|_{(1,2)}^2 + \lambda \mu_1 \right) \|\mathbf{v}_1\|_{V_1}^2 \\
&+ \left(-2\lambda \|\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} \mathbb{L}_2\|_{(2,1)}^2 - 2(1 - \lambda) \|\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{2,d}} \mathbb{L}_2\|_{(2,2)}^2 + (1 - \lambda) \mu_2 \right) \|\mathbf{v}_2\|_{V_1}^2
\end{aligned}$$

Tomando $\eta_1 = -2\lambda \|\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} \mathbb{L}_1\|_{(1,1)}^2 - 2(1 - \lambda) \|\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{2,d}} \mathbb{L}_1\|_{(1,2)}^2 + \lambda \mu_1$, $\eta_2 = -2\lambda \|\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} \mathbb{L}_2\|_{(2,1)}^2 - 2(1 - \lambda) \|\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{2,d}} \mathbb{L}_2\|_{(2,2)}^2 + (1 - \lambda) \mu_2$ e $\eta = \max\{\eta_1, \eta_2\}$, temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}((\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)) &\geq \left(-2\lambda \|\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} \mathbb{L}_1\|_{(1,1)}^2 - 2(1 - \lambda) \|\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{2,d}} \mathbb{L}_1\|_{(1,2)}^2 + \lambda \mu_1 \right) \|\mathbf{v}_1\|_{V_1}^2 \\
&+ \left(-2\lambda \|\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} \mathbb{L}_2\|_{(2,1)}^2 - 2(1 - \lambda) \|\mathbb{1}_{\mathcal{O}_{2,d}} \mathbb{L}_2\|_{(2,2)}^2 + (1 - \lambda) \mu_2 \right) \|\mathbf{v}_2\|_{V_1}^2 \\
&= \eta (\|\mathbf{v}_1\|_{V_1} + \|\mathbf{v}_2\|_{V_2})
\end{aligned}$$

■

2.3 Equação da Onda (caso semi-linear)

Nessa seção iremos fazer um estudo sobre os equilíbrios de Nash e Pareto para a equação da onda, agora direcionando os resultados ao caso semi-linear.

2.3.1 Quase-Equilíbrio de Nash

Vimos anteriormente no caso linear, que os funcionais \mathcal{J}_i são convexos donde, como já havíamos observado, um par (v_1, v_2) é um equilíbrio de Nash se e somente se satisfaz (2.16). Entretanto, no caso semi-linear, com F sendo uma função localmente contínua e Lipschitz, não temos a convexidade de \mathcal{J}_i . Isso motiva a seguinte definição mais fraca:

Definição 21. (*Quase-Equilíbrio de Nash*) Dada uma função $f \in L^2(\Omega \times (0, T))$. O par (v_1, v_2) é um quase-equilíbrio de Nash para o funcional \mathcal{J}_i se satisfaz

$$\langle \mathcal{J}'_i(v_1, v_2), \hat{v}_i \rangle = 0, \forall \hat{v}_i \in V_i, i = 1, 2. \quad (2.38)$$

Além disso, podemos provar que sob certas condições, as definições de equilíbrio de Nash e quase-equilíbrio de Nash são equivalentes.

O Sistema Otimizado de Nash

Iremos agora obter o sistema de otimalidade para o equilíbrio de Nash para o par (v_1, v_2) . Consideremos o sistema em (2.2), ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{y}_{tt} - \Delta \mathbf{y} + F(\mathbf{y}) = f + v_1 \mathbb{1}_{\mathcal{O}_1} + v_2 \mathbb{1}_{\mathcal{O}_2} & \text{em } Q, \\ \mathbf{y} = 0 & \text{sobre } \Sigma_1, \\ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \Sigma_2, \\ \mathbf{y}(x, 0) = \mathbf{y}_0(x) \text{ , } \mathbf{y}_t(x, 0) = \mathbf{y}_1(x) & \text{em } \Omega. \end{array} \right.$$

Onde $F(\mathbf{y})$ é uma função Lipschitziana. Lembremos da notação $V_1 = L^2(\mathcal{O}_1 \times (0, T))$, $V_2 = L^2(\mathcal{O}_2 \times (0, T))$ e $V = V_1 \times V_2$. De maneira análoga ao caso linear, iremos considerar uma perturbação do sistema dada pelos operadores $L_i : V_i \rightarrow L^2(Q)$ tal que $L(\hat{v}^i) = z^i$ onde

$$\left\{ \begin{array}{ll} z_{tt}^i - \Delta z^i + F'(y)z^i = \hat{v}_i \mathbb{1}_{\mathcal{O}_i} & \text{em } Q \\ z^i = 0 & \text{sobre } \Sigma_1 \\ \frac{\partial z^i}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \Sigma_2 \\ z^i(x, 0) = 0, z_t^i(x, 0) = 0 & \text{em } \Omega \end{array} \right. \quad (2.39)$$

Multiplicando a equação (2.39) por ϕ^i e integrando por partes, tem-se

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{O}_i \times (0, T)} \hat{v}_i \phi^i &= \int_{\Omega} z_t(T) \phi^i(T) - z(T) \phi_t^i(T) dx + \iint_{\Omega \times (0, T)} z^i (\phi_{tt}^i - \Delta \phi^i + F'(y)) dx dt \\ &- \int_{\Sigma_1} \frac{\partial z^i}{\partial \eta} \phi^i d\Gamma + \int_{\Sigma_2} z^i \frac{\partial \phi^i}{\partial \eta} d\Gamma \end{aligned}$$

Impondo que $\phi^i(x, T) = \phi_t^i(x, T) = 0$, $\phi^i = 0$ em Σ_1 e $\frac{\partial \phi^i}{\partial \eta} = 0$ em Σ_2 , podemos definir o estado adjunto por

$$\left\{ \begin{array}{ll} \phi_{tt}^i - \Delta \phi^i + F'(y) \phi^i = (y - y_{i,d}) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{i,d}} & \text{em } Q, \\ \phi^i = 0 & \text{sobre } \Sigma_1, \\ \frac{\partial \phi^i}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \Sigma_2, \\ \phi^i(x, T) = 0, \phi_t^i(x, T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.40)$$

Logo, multiplicando a equação acima por $L_i \hat{v}_i$, integrando em Q e aplicando (2.40) e (2.22) tem-se

$$\iint_{\mathcal{O}_i \times (0, T)} \hat{v}_i \phi^i dx dt = \iint_{\Omega \times (0, T)} (\phi_{tt}^i - \Delta \phi^i + F'(y) \phi^i L_i) \hat{v}_i dx dt = -\mu_i \iint_{\mathcal{O}_i \times (0, T)} v_i \hat{v}_i dx dt$$

Assim,

$$\iint_{\mathcal{O}_i \times (0, T)} \hat{v}_i \phi^i dx dt + \mu_i \iint_{\mathcal{O}_i \times (0, T)} v_i \hat{v}_i dx dt = \iint_{\mathcal{O}_i \times (0, T)} \hat{v}_i (\phi^i + \mu_i v_i) dx dt = 0$$

Pelo Lema de Du Bois Raymond (Lema 1), concluímos que

$$v_i = -\frac{1}{\mu_i} \phi^i, \quad i = 1, 2. \quad (2.41)$$

Logo, deduzimos que

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_{tt} - \Delta y + F(y) = f - \frac{1}{\mu_1} \phi^1 \mathbb{1}_{\mathcal{O}_1} - \frac{1}{\mu_2} \phi^2 \mathbb{1}_{\mathcal{O}_2} & \text{em } Q, \\ \phi_{tt}^i - \Delta \phi^i + F'(y) \phi^i = (y - y_{i,d}) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{i,d}} & \text{em } Q, \\ y = 0, \phi^i = 0 & \text{sobre } \Sigma_1, \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} = 0, \frac{\partial \phi^i}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \Sigma_2, \\ \phi^i(x, T) = \phi_t^i(x, T) = 0, y(x, 0) = y_0(x), y_t(x, 0) = y_1(x) & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.42)$$

Argumentando como no caso linear, note que $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ é um quase-equilíbrio de Nash se, e somente se, satisfaz (2.41). Logo, defina a aplicação $\Lambda : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{L}^2(\mathbf{Q})$ onde

$$\Lambda(\mathbf{v}) = (\Lambda(\mathbf{v}_1), \Lambda(\mathbf{v}_2)) = \left(-\frac{1}{\mu_1} \phi^1, -\frac{1}{\mu_2} \phi^2 \right) \quad (2.43)$$

Considere $\mu_0 := \min(\mu_1, \mu_2)$. Assim, como F é Lipschitziana, existe $C_F > 0$ tal que $\|F'\| \leq C_F$.

$$\begin{aligned} \|\Lambda(\mathbf{v}) - \Lambda(\hat{\mathbf{v}})\|_{\mathbf{V}}^2 &\leq \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\mu_i^2} \iint_{\mathcal{O}_i \times (0, T)} |(\phi^1, \phi^2) - (\hat{\phi}^1, \hat{\phi}^2)|^2 dx dt \\ &\leq \mu_0^{-2} C(\Omega, T) \|(\phi^1, \phi^2) - (\hat{\phi}^1, \hat{\phi}^2)\|_{\mathbf{L}^2(\mathbf{Q}) \times \mathbf{L}^2(\mathbf{Q})}^2 \\ &\leq \mu_0^{-2} C(\Omega, T, C_F) \|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|_{\mathbf{L}^2(\mathbf{Q})}^2 \\ &\leq \mu_0^{-2} C(\Omega, T, C_F, \|f\|_{\mathbf{L}^2(\mathbf{Q})}) \|\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}\|_{\mathbf{V}}^2, \quad \forall \mathbf{v}, \hat{\mathbf{v}} \in \mathbf{V}. \end{aligned}$$

Tomando μ_0 suficientemente grande, Λ se torna uma contração e, conseqüentemente, possui um ponto fixo $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$. Pela definição de Λ , temos que $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ satisfaz (2.41) e, portanto, é um quase-equilíbrio de Nash.

Equivalência entre Equilíbrio e Quase-Equilíbrio de Nash

Agora iremos mostrar com o auxílio do lema (6) encontrado no apêndice que o quase-equilíbrio e o equilíbrio são equivalente sobre certas condições, mais precisamente vale o seguinte resultado.

Proposição 6. *Suponha que $F \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$ e $\mathbf{y}_{1,d} \in C^0([0, T]; H_0^1(\mathcal{O}_{i,d})) \cap C^1([0, T], L^2(\mathcal{O}_{i,d}))$. Suponha que $(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e $d \leq 8$. Então, existe uma constante $C > 0$ tal que, se $f \in L^2(\Omega \times (0, T))$ e μ_i satisfaz*

$$\mu_i \geq C (1 + \|f\|_{L(\Omega) \times (0, T)}), \quad (2.44)$$

então, as condições (2.4) e (2.38) são equivalente.

Demonstração: Suponha que $F \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$. Dada $f \in L^2(\Omega \times (0, T))$ e $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathbf{V}$ um quase-equilíbrio de Nash. Para todo $\hat{\mathbf{v}}_1 \in \mathbf{V}_1$ e $s \in \mathbb{R}$, considere \mathbf{y}^s uma solução para o sistema

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{y}_{tt}^s - \Delta \mathbf{y}^s + F(\mathbf{y}^s) = f + (\mathbf{v}_1 + s\hat{\mathbf{v}}_1)\mathbf{1}_{\mathcal{O}_1} + \mathbf{v}_2\mathbf{1}_{\mathcal{O}_2} & \text{em } \mathbf{Q}, \\ \mathbf{y}^s = 0 & \text{sobre } \Sigma_1, \\ \frac{\partial \mathbf{y}^s}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \Sigma_2, \\ \mathbf{y}^s(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{y}_0^s(\mathbf{x}), \mathbf{y}_t^s(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{y}_1^s(\mathbf{x}) & \text{em } \Omega. \end{array} \right.$$

Vamos considerar $\mathbf{y}^s|_{s=0} = \mathbf{y}$. Agora, para todo $\bar{\mathbf{v}}_1 \in \mathbf{V}_1$, defina $P_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$P_1(s) = \langle D_1(\mathcal{J}_1(\mathbf{v}_1 + s\hat{\mathbf{v}}_1, \mathbf{v}_2)), \bar{\mathbf{v}}_1 \rangle$$

$$\begin{aligned} P_1(s) - P_1(0) &= \langle D_1\mathcal{J}_1(\mathbf{v}_1 + s\hat{\mathbf{v}}_1, \mathbf{v}_2), \bar{\mathbf{v}}_1 \rangle - \langle D_1\mathcal{J}_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), \bar{\mathbf{v}}_1 \rangle \\ &= \iint_{\mathcal{O}_{1,d} \times (0,T)} (\mathbf{y}^s - \mathbf{y}_{1,d}) \mathbf{q}^s \, d\mathbf{x} \, dt - \iint_{\mathcal{O}_{1,d} \times (0,T)} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_{1,d}) \mathbf{q} \, d\mathbf{x} \, dt \\ &\quad + s\mu_1 \iint_{\mathcal{O}_i \times (0,T)} \hat{\mathbf{v}}_1 \bar{\mathbf{v}}_1 \, d\mathbf{x} \, dt. \end{aligned}$$

Onde \mathbf{q}^s é solução do sistema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{q}_{tt}^s - \Delta \mathbf{q}^s + F'(\mathbf{y}^s) \mathbf{q}^s = \bar{\mathbf{v}}_1 \mathbb{1}_{\mathcal{O}_1} & \text{em } Q, \\ \mathbf{q}^s = 0 & \text{sobre } \Sigma_1, \\ \frac{\partial \mathbf{q}^s}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \Sigma_2, \\ \mathbf{q}^s(\mathbf{x}, 0) = 0, \mathbf{q}_t^s(\mathbf{x}, 0) = 0 & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.45)$$

onde denotamos $\mathbf{q}^s|_{s=0} = \mathbf{q}$. Assim, multiplicando (2.45) por uma função ϕ^s e integrando por partes, temos que:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0,T)} \bar{\mathbf{v}}_1 \phi^s \, d\mathbf{x} \, dt &= \iint_{\Omega \times (0,T)} \mathbf{q}^s (\phi_{tt}^s - \Delta \phi^s + F'(\mathbf{y}^s)) \, d\mathbf{x} \, dt \\ &\quad + \int_{\Omega} \mathbf{q}_t^s(T) \phi^s(T) - \mathbf{q}^s(T) \phi_t^s(T) \, d\mathbf{x} - \int_{\Sigma_1} \frac{\partial \mathbf{q}^s}{\partial \eta} \phi^s \, d\Gamma + \int_{\Sigma_2} \mathbf{q}^s \frac{\partial \phi^s}{\partial \eta} \, d\Gamma. \end{aligned}$$

Logo, definimos o adjunto por

$$\left\{ \begin{array}{ll} \phi_{tt}^s - \Delta \phi^s + F'(\mathbf{y}^s) \phi^s = (\mathbf{y}^s - \mathbf{y}_{1,d}) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} & \text{em } Q, \\ \phi^s = 0 & \text{sobre } \Sigma_1, \\ \frac{\partial \phi^s}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \Sigma_2, \\ \phi^s(\mathbf{x}, T) = 0, \phi_t^s(\mathbf{x}, T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.46)$$

onde $\phi^s|_{s=0} = \phi$. Daí, podemos notar que,

$$\iint_{\Omega \times (0,T)} (\phi_{tt}^s - \Delta \phi^s + F'(\mathbf{y}^s) \phi^s) \mathbf{q}^s \, d\mathbf{x} \, dt = \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0,T)} \bar{\mathbf{v}}_1 \phi^s \, d\mathbf{x} \, dt. \quad (2.47)$$

Substituindo (2.46) em (2.47) temos que,

$$\iint_{\mathcal{O}_{1,d} \times (0,T)} (\mathbf{y}^s - \mathbf{y}_{1,d}) \mathbf{q}^s \, d\mathbf{x} \, dt = \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0,T)} \bar{\mathbf{v}}_1 \phi^s \, d\mathbf{x} \, dt. \quad (2.48)$$

Portanto,

$$P_1(s) - P_1(0) = \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} \bar{v}_1 \phi^s dx dt + \iint_{\mathcal{O}_{1,d} \times (0, T)} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_{1,d}) \mathbf{q} dx dt + s \mu_1 \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} \hat{v}_1 \bar{v}_1 dx dt. \quad (2.49)$$

Assim, fazendo $s = 0$ em (2.48) temos

$$\iint_{\mathcal{O}_{1,d} \times (0, T)} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_{1,d}) \mathbf{q} dx dt = \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} \bar{v}_1 \phi dx dt.$$

Logo, substituindo em (2.49) obtemos:

$$P_1(s) - P_1(0) = \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} \bar{v}_1 (\phi^s - \phi) dx dt + s \mu_1 \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} \hat{v}_1 \bar{v}_1 dx dt, \quad \forall \hat{v}_1, \bar{v}_1 \in V_1. \quad (2.50)$$

Considerando (2.47) e fazendo a diferença com sua restrição $\phi^s|_{s=0} = \phi$, ou seja, $\phi^s - \phi$, tem-se:

$$(\phi^s - \phi)_{tt} - \Delta(\phi^s - \phi) = -F'(\mathbf{y}^s) \phi^s + F'(\mathbf{y}) \phi + (\mathbf{y}^s - \mathbf{y})_{\mathcal{O}_{1,d}}$$

Veja que,

$$-F'(\mathbf{y}^s) \phi^s + F'(\mathbf{y}) \phi^s = -(F'(\mathbf{y}^s) - F'(\mathbf{y})) \phi^s - F'(\mathbf{y}) (\phi^s - \phi)$$

e portanto,

$$(\phi^s - \phi)_{tt} - \Delta(\phi^s - \phi) = -(F'(\mathbf{y}^s) - F'(\mathbf{y})) \phi^s - F'(\mathbf{y}) (\phi^s - \phi) + (\mathbf{y}^s - \mathbf{y})_{\mathcal{O}_{1,d}} \quad (2.51)$$

De maneira análoga, para $(\mathbf{y}^s - \mathbf{y})$ temos

$$(\mathbf{y}^s - \mathbf{y})_{tt} - \Delta(\mathbf{y}^s - \mathbf{y}) = -(F(\mathbf{y}^s) - F(\mathbf{y})) + s v_1 \mathbf{1}_{\mathcal{O}_1}. \quad (2.52)$$

Defina $\mathbf{h} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (\mathbf{y}^s - \mathbf{y})$ e $\xi = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (\phi^s - \phi)$. Assim, dividindo as expressões (2.51) e (2.52) por s e fazendo $s \rightarrow 0$, obtemos o seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \xi_{tt} - \Delta \xi = -F''(\mathbf{y}) \mathbf{h} \phi - F'(\mathbf{y}) \xi + \mathbf{h} \mathbf{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} & \text{em } Q, \\ \mathbf{h}_{tt} - \Delta \mathbf{h} = -F'(\mathbf{y}) \mathbf{h} + \hat{v}_1 \mathbf{1}_{\mathcal{O}_1} & \text{em } Q, \\ \mathbf{h} = 0, \xi = 0 & \text{sobre } \Sigma_1, \\ \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \eta} = 0, \frac{\partial \xi}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \Sigma_2, \\ \xi(\mathbf{x}, T) = \xi_t(\mathbf{x}, T) = 0, \mathbf{h}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{h}_0(\mathbf{x}), \mathbf{h}_t(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{h}_1(\mathbf{x}) & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.53)$$

Dividindo por s e fazendo $s \rightarrow 0$ em (2.50), tem-se:

$$\langle D_1^2 \mathcal{J}_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), (\hat{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_1) \rangle = \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} \bar{\mathbf{v}}_1 \xi dx dt + \mu_1 \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} \hat{\mathbf{v}}_1 \bar{\mathbf{v}}_1 dx dt, \quad \forall (\hat{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_1) \in V_1. \quad (2.54)$$

Em particular, para $\bar{\mathbf{v}}_1 = \hat{\mathbf{v}}_1$ temos,

$$\langle D_1^2 \mathcal{J}_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), (\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_1) \rangle = \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} \hat{\mathbf{v}}_1 \xi dx dt + \mu_1 \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} |\hat{\mathbf{v}}_1|^2 dx dt. \quad (2.55)$$

Pelo lema (6), existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \langle D_1^2 \mathcal{J}_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), (\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_1) \rangle &\geq -C_1 (1 + \|f\|_{L(\Omega) \times (0, T)}) \|\hat{\mathbf{v}}_1\|_{V_1} + \mu_1 \|\hat{\mathbf{v}}_1\|^2 \\ &= (\mu_1 - C_1 (1 + \|f\|_{L(\Omega) \times (0, T)})) \|\hat{\mathbf{v}}_1\|_{V_1}. \quad \forall \hat{\mathbf{v}}_1 \in V_1 \end{aligned}$$

De maneira análoga, obtemos

$$\langle D_2^2 \mathcal{J}_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), (\hat{\mathbf{v}}_2, \hat{\mathbf{v}}_2) \rangle \geq (\mu_2 - C_2 (1 + \|f\|_{L(\Omega) \times (0, T)})) \|\hat{\mathbf{v}}_2\|_{V_2}. \quad \forall \hat{\mathbf{v}}_2 \in V_2$$

Finalmente, observando que C_1 e C_2 são independentes de μ_i , descobrimos que, se vale o lema(6) com $C = \max(C_1, C_2)$, então o par $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ é um equilíbrio de Nash. Em outras palavras, (2.16) implica (2.38). A implicação contrária é obtida de forma semelhante

■

2.3.2 Quase-Equilíbrio de Pareto.

Definição 22. (*Quase-Equilíbrio Pareto*) Dada uma função $f \in L^2(\Omega \times (0, T))$. O par $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ é um equilíbrio de Pareto para os funcionais \mathcal{J}_i se satisfaz

$$\langle \lambda \mathcal{J}_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + (1 - \lambda) \mathcal{J}_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), (\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2) \rangle = 0, \quad \forall (\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2) \in V. \quad (2.56)$$

Veja que é equivalente a mostrarmos que

$$\begin{cases} \langle \lambda \frac{\partial \mathcal{J}_1}{\partial \mathbf{v}_1} + (1 - \lambda) \frac{\partial \mathcal{J}_2}{\partial \mathbf{v}_1}, (\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2) \rangle = 0, \forall (\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2) \in V. \\ \langle \lambda \frac{\partial \mathcal{J}_1}{\partial \mathbf{v}_2} + (1 - \lambda) \frac{\partial \mathcal{J}_2}{\partial \mathbf{v}_2}, (\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2) \rangle = 0, \forall (\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2) \in V. \end{cases}$$

Denotaremos $\mathcal{J}_{\lambda i} = \lambda \frac{\partial \mathcal{J}_1}{\partial \mathbf{v}_i} + (1 - \lambda) \frac{\partial \mathcal{J}_2}{\partial \mathbf{v}_i}$.

Como no caso semi-linear não conseguimos mostrar que os funcionais são convexos, mostraremos primeiro que vale (2.56) e que a segunda derivada é positiva, e assim iremos garantir um ponto de mínimo.

O Sistema Otimizado de Pareto

Iremos agora obter o sistema de otimalidade para o quase-equilíbrio de Pareto para o par (v_1, v_2) . Considere z^1 solução de

$$\begin{cases} z_{tt}^1 - \Delta z^1 + F'(y)z^1 = \hat{v}_1 \mathbb{1}_{\mathcal{O}_1} & \text{em } Q, \\ z^1 = 0 & \text{sobre } \Sigma_1, \\ \frac{\partial z^1}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \Sigma_2, \\ z^1(x, 0) = 0, z_t^1(x, 0) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (2.57)$$

Multiplicando a equação (2.57) por ϕ^i e integrando por partes, tem-se

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} \hat{v}_1 \phi^i &= \int_{\Omega} z^1(T) \phi^i(T) - z(T) \phi_t^i(T) dx + \iint_{\Omega \times (0, T)} z^1 (\phi_{tt}^i - \Delta \phi^i + F'(y) \phi^i) dx dt \\ &- \int_{\Sigma_1} \frac{\partial z^1}{\partial \eta} \phi^i d\Gamma + \int_{\Sigma_2} z^1 \frac{\partial \phi^i}{\partial \eta} d\Gamma. \end{aligned}$$

Fazendo $\phi^i(x, T) = \phi_t^i(x, T) = 0$, $\phi^i = 0$ sobre Σ_1 e $\frac{\partial \phi^i}{\partial \eta} = 0$ sobre Σ_2 , obtemos que

$$\iint_{\Omega \times (0, T)} (\phi_{tt}^i - \Delta \phi^i + F'(y) \phi^i) z^1 dx dt = \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} \hat{v}_1 \phi^i dx dt, \quad (2.58)$$

logo é natural considerar o estado adjunto para cada $i = 1, 2$

$$\begin{cases} \phi_{tt}^i - \Delta \phi^i + F'(y) \phi^i = (y - y_{i,d}) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{i,d}} & \text{em } Q, \\ \phi^i = 0 & \text{sobre } \Sigma_1, \\ \frac{\partial \phi^i}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \Sigma_2, \\ \phi^i(x, T) = 0, \phi_t^i(x, T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (2.59)$$

Observe que,

$$\begin{aligned} \langle \lambda \frac{\partial J_1}{\partial v_1} + (1 - \lambda) \frac{\partial J_2}{\partial v_1}, (\hat{v}_1, \hat{v}_2) \rangle = 0 &\Leftrightarrow \iint_{\Omega \times (0, T)} \lambda z^1 (y - y_{1,d}) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} dx dt \lambda \mu_1 \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} v_1 \hat{v}_1 dx dt \\ &+ \iint_{\Omega \times (0, T)} (1 - \lambda) z^1 (y - y_{2,d}) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{2,d}} dx dt = 0 \end{aligned}$$

Multiplicando (2.59) por z^1 temos, (2.57)

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{O}_{i,d} \times (0, T)} z^1 (y - y_{i,d}) dx dt &= \iint_{\Omega \times (0, T)} z^1 (\phi_{tt}^i - \Delta \phi^i + F'(y) \phi^i) dx dt \\ &= \iint_{\mathcal{O}_i \times (0, T)} \hat{v}_i \phi^i dx dt \end{aligned}$$

Assim, para todo $\hat{v}_1 \in V$ equivale

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} \lambda \hat{v}_1 \phi^1 dx dt + \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} \lambda \mu_1 (v_1 \hat{v}_1) dx dt + \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} (1 - \lambda) \hat{v}_1 \phi^2 dx dt \\ &= \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} (\lambda(\phi^1 + \mu_1 v_1) + (1 - \lambda)\phi^2) \hat{v}_1 dx dt \end{aligned}$$

Pelo Lema de Du Bois Raymond (Lema 1) para todo $\hat{v}_1 \in V$, obtemos

$$v_1 = -\frac{1}{\mu_1} \left(\phi^1 + \frac{(1 - \lambda)}{\lambda} \phi^2 \right). \quad (2.60)$$

Com uma construção e argumentos análogos, mostramos que

$$v_2 = -\frac{1}{\mu_2} \left(\frac{\lambda}{(1 - \lambda)} \phi^1 + \phi^2 \right). \quad (2.61)$$

pelo visto acima, podemos reformular o sistema (2.2) utilizando o equilíbrio de Pareto.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{y}_{tt} - \Delta \mathbf{y} + F(\mathbf{y}) = \mathbf{f} + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 & \text{em } Q, \\ \phi_{tt}^i - \Delta \phi^i + F'(\mathbf{y}) \phi^i = (\mathbf{y} - \mathbf{y}_{i,d}) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{i,d}} & \text{em } Q, \\ \mathbf{y} = 0, \phi^i = 0 & \text{sobre } \Sigma_1, \\ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \eta} = 0, \frac{\partial \phi^i}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \Sigma_2, \\ \phi^i(\mathbf{x}, T) = \phi_t^i(\mathbf{x}, T) = 0, \mathbf{y}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{y}_0(\mathbf{x}), \mathbf{y}_t(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{y}_1(\mathbf{x}) & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.62)$$

Donde,

$$v_1 = -\frac{1}{\mu_1} \left(\phi^1 + \frac{(1 - \lambda)}{\lambda} \phi^2 \right) \quad (2.63)$$

e

$$v_2 = -\frac{1}{\mu_2} \left(\frac{\lambda}{(1 - \lambda)} \phi^1 + \phi^2 \right). \quad (2.64)$$

Defina a aplicação $\Lambda : V \rightarrow L^2(Q)$ tal que

$$\Lambda(\mathbf{v}) = (\Lambda(v_1), \Lambda(v_2)) = \left(-\frac{1}{\mu_1} \left(\phi^1 + \frac{(1 - \lambda)}{\lambda} \phi^2 \right), -\frac{1}{\mu_2} \left(\frac{\lambda}{(1 - \lambda)} \phi^1 + \phi^2 \right) \right) \quad (2.65)$$

Argumentando de forma semelhante, podemos deduzir que existe uma constante $C(\Omega, T, C_F, \lambda)$ tal que, para valores de $\mu_0 := \min(\mu_1, \mu_2)$ suficientemente grande, Λ se torna uma contração e, conseqüentemente, possui um ponto fixo $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$. Pela definição de Λ , temos que (v_1, v_2) satisfaz (2.65) e, portanto, é um quase-equilíbrio de Pareto.

Equivalência entre Equilíbrio e Quase-Equilíbrio de Pareto.

Proposição 7. *Suponha que $F \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$ e $\mathbf{y}_{1,d} \in C^0([0, T]; H_0^1(\mathcal{O}_{i,d})) \cap C^1([0, T], L^2(\mathcal{O}_{i,d}))$. Suponha que $(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e $d \leq 8$. Então, dado $\lambda > 0$ existe uma constante $C(\lambda) > 0$ tal que, se $f \in L^2(\Omega \times (0, T))$ e μ_i satisfaz*

$$\mu_i \geq C(\lambda) (1 + \|f\|_{L^2(\Omega) \times (0, T)}). \quad (2.66)$$

Então, as condições 2.5 e 2.56 são equivalente.

Demonstração: Suponha que $F \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$. Dada $f \in L^2(\Omega \times (0, T))$ e $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in V$ um quase-equilíbrio de Pareto. Para todo $\hat{\mathbf{v}}_1 \in V_1$ e $s \in \mathbb{R}$, considere \mathbf{y}^s a solução para o sistema

$$\begin{cases} \mathbf{y}_{tt}^s - \Delta \mathbf{y}^s + F(\mathbf{y}^s) = f + (\mathbf{v}_1 + s\hat{\mathbf{v}}_1)\mathbf{1}_{\mathcal{O}_1} + \mathbf{v}_2\mathbf{1}_{\mathcal{O}_2} & \text{em } Q, \\ \mathbf{y}^s = 0 & \text{sobre } \Sigma_1, \\ \frac{\partial \mathbf{y}^s}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \Sigma_2, \\ \mathbf{y}^s(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{y}_0^s(\mathbf{x}), \mathbf{y}_t^s(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{y}_1^s(\mathbf{x}) & \text{em } \Omega. \end{cases}$$

Vamos denotar $\mathbf{y}^s|_{s=0} = \mathbf{y}$. Agora, para todo $\bar{\mathbf{v}}_1 \in V_1$, defina $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$P_1(s) = \langle D_1(\lambda \mathcal{J}_1(\mathbf{v}_1 + s\hat{\mathbf{v}}_1, \mathbf{v}_2) + (1 - \lambda)\mathcal{J}_2(\mathbf{v}_1 + s\hat{\mathbf{v}}_1, \mathbf{v}_2)), \bar{\mathbf{v}}_1 \rangle. \quad (2.67)$$

Veja que,

$$\begin{aligned} P_1(s) - P_1(0) &= \langle D_1(\lambda \mathcal{J}_1(\mathbf{v}_1 + s\hat{\mathbf{v}}_1, \mathbf{v}_2) + (1 - \lambda)\mathcal{J}_2(\mathbf{v}_1 + s\hat{\mathbf{v}}_1, \mathbf{v}_2)), \bar{\mathbf{v}}_1 \rangle \\ &\quad - \langle D_1(\lambda \mathcal{J}_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + (1 - \lambda)\mathcal{J}_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)), \bar{\mathbf{v}}_1 \rangle \\ &= \lambda \iint_{\mathcal{O}_{1,d} \times (0, T)} (\mathbf{y}^s - \mathbf{y}_{1,d}) \mathbf{q}^s \, dx \, dt + s\lambda\mu_1 \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} \hat{\mathbf{v}}_1 \bar{\mathbf{v}}_1 \, dx \, dt \\ &\quad + (1 - \lambda) \iint_{\mathcal{O}_{2,d} \times (0, T)} (\mathbf{y}^s - \mathbf{y}_{2,d}) \mathbf{q}^s \, dx \, dt - \lambda \iint_{\mathcal{O}_{1,d} \times (0, T)} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_{1,d}) \mathbf{q} \, dx \, dt \\ &\quad - (1 - \lambda) \iint_{\mathcal{O}_{2,d} \times (0, T)} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_{2,d}) \mathbf{q} \, dx \, dt, \end{aligned} \quad (2.68)$$

onde

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{tt}^s - \Delta \mathbf{q}^s + F'(\mathbf{y}^s) \mathbf{q}^s = \bar{\mathbf{v}}_1 \mathbf{1}_{\mathcal{O}_1} & \text{em } Q, \\ \mathbf{q}^s = 0 & \text{sobre } \Sigma_1, \\ \frac{\partial \mathbf{q}^s}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \Sigma_2, \\ \mathbf{q}^s(\mathbf{x}, 0) = 0, \mathbf{q}_t^s(\mathbf{x}, 0) = 0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (2.69)$$

e denotamos por $\mathbf{q}^s|_{s=0} = \mathbf{q}$. Assim, multiplicando (2.69) por uma função ϕ_i^s com $i = 1, 2$ e integrando por partes, tem-se

$$\iint_{\Omega \times (0, T)} (\phi_{i,tt}^s - \Delta \phi_i^s + F'(y) \phi_i^s) \mathbf{q}^s \, dx dt = \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} \bar{v}_1 \phi_i^s \, dx dt, \quad (2.70)$$

para cada $i = 1, 2$, ao escolher ϕ_i^s tal que

$$\begin{cases} \phi_{i,tt}^s - \Delta \phi_i^s + F'(y) \phi_i^s = (\mathbf{y}^s - \mathbf{y}_{i,d}) \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{i,d}} & \text{em } Q, \\ \phi_i^s = 0 & \text{sobre } \Sigma_1 \\ \frac{\partial \phi_i^s}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \Sigma_2, \\ \phi_i^s(x, T) = 0, \phi_{i,t}^s(x, T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (2.71)$$

Denotamos $\phi_i^s|_{s=0} = \phi_i$. Agora, integrando novamente por partes a equação (2.70), temos que

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega \times (0, T)} (\phi_{i,tt}^s - \Delta \phi_i^s + F'(y) \phi_i^s) \mathbf{q}^s \, dx dt &= \iint_{\Omega \times (0, T)} (\mathbf{q}_{tt}^s - \Delta \mathbf{q}^s + F'(y) \mathbf{q}^s) \phi_i^s \, dx dt \\ &= \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} \bar{v}_1 \phi_i^s \, dx dt. \end{aligned}$$

Portanto, para cada $i = 1, 2$, obtemos:

$$\iint_{\mathcal{O}_{1,d} \times (0, T)} (\mathbf{y}^s - \mathbf{y}_{1,d}) \mathbf{q}^s \, dx dt = \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} \bar{v}_1 \phi_1^s \, dx dt. \quad (2.72)$$

e

$$\iint_{\mathcal{O}_{2,d} \times (0, T)} (\mathbf{y}^s - \mathbf{y}_{2,d}) \mathbf{q}^s \, dx dt = \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} \bar{v}_1 \phi_2^s \, dx dt. \quad (2.73)$$

Substituindo (2.72) e (2.73) em (2.68), tem-se:

$$\begin{aligned} P_1(s) - P_1(0) &= \lambda \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} \bar{v}_1 \phi_1^s \, dx dt + s \lambda \mu_1 \iint_{\mathcal{O}_i \times (0, T)} \hat{v}_1 \bar{v}_1 \, dx dt \\ &+ (1 - \lambda) \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} \bar{v}_1 \phi_2^s \, dx dt - \lambda \iint_{\mathcal{O}_{1,d} \times (0, T)} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_{1,d}) \mathbf{q} \, dx dt \\ &- (1 - \lambda) \iint_{\mathcal{O}_{2,d} \times (0, T)} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_{2,d}) \mathbf{q} \, dx dt \end{aligned}$$

Fazendo $s = 0$ em (2.72) e (2.73) temos

$$\begin{aligned} \lambda \iint_{\mathcal{O}_{1,d} \times (0, T)} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_{1,d}) \mathbf{q} \, dx dt + (1 - \lambda) \iint_{\mathcal{O}_{2,d} \times (0, T)} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_{2,d}) \mathbf{q} \, dx dt &= \lambda \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} \bar{v}_1 \phi_i \, dx dt \\ + (1 - \lambda) \iint_{\mathcal{O}_2 \times (0, T)} \bar{v}_2 \phi_2 \, dx dt \end{aligned}$$

Assim, tem-se

$$\begin{aligned}
P_1(s) - P_1(0) &= \lambda \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} \bar{v}_1 \phi_1^s dx dt + s \lambda \mu_1 \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} \hat{v}_1 \bar{v}_1 dx dt \\
&+ (1 - \lambda) \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} \bar{v}_1 \phi_2^s dx dt - \lambda \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} \bar{v}_1 \phi_1 dx dt \\
&- (1 - \lambda) \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} \bar{v}_1 \phi_2 dx dt \\
&= \lambda \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} \bar{v}_1 (\phi_1^s - \phi_1) dx dt + (1 - \lambda) \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} \bar{v}_1 (\phi_2^s - \phi_2) dx dt \\
&+ s \lambda \mu_1 \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} \hat{v}_1 \bar{v}_1 dx dt \quad \forall \hat{v}_1, \bar{v}_1 \in V_1 \tag{2.74}
\end{aligned}$$

Considerando (2.72) e (2.73) e fazendo a diferença com suas restrições $\phi_i^s|_{s=0} = \phi_i$, ou seja, $\phi_i^s - \phi_i$, tem-se:

$$(\phi_i^s - \phi_i)_{tt} - \Delta(\phi_i^s - \phi_i) = -(F'(y^s) - F'(y))\phi_i^s - F'(y)(\phi_i^s - \phi_i) + (y^s - y)_{\mathcal{O}_{1,d}} \tag{2.75}$$

De maneira análoga, ponto $(y^s - y)$ temos

$$(y^s - y)_{tt} - \Delta(y^s - y) = -(F(y^s) - F(y)) + s v_1 \mathbb{1}_{\mathcal{O}_1}. \tag{2.76}$$

Definindo

$$h = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (y^s - y) \quad \text{e} \quad \xi_i = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (\phi_i^s - \phi_i),$$

para cada $i = 1, 2$, dividindo (2.75)–(2.76) por s e tomando $s \rightarrow 0$, obtem-se o sistema:

$$\left\{ \begin{array}{ll}
\xi_{i,tt} - \Delta \xi_i = -F''(y) h \phi - F'(y) \xi_i + h \mathbb{1}_{\mathcal{O}_i} & \text{em } Q, \\
h_{tt} - \Delta h = -F'(y) h + \hat{v}_1 \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{1,d}} & \text{em } Q, \\
h = 0, \xi_i = 0 & \text{sobre } \Sigma_1, \\
\frac{\partial h}{\partial \eta} = 0, \frac{\partial \xi_i}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \Sigma_2, \\
\xi_i(x, T) = \xi_{i,t}(x, T) = 0, \quad h(x, 0) = 0, \quad h_t(x, 0) = 0 & \text{em } \Omega.
\end{array} \right. \tag{2.77}$$

Dividindo por s e fazendo $s \rightarrow 0$ em (2.74), tem-se:

$$\begin{aligned}
\langle D_1^2 \mathcal{J}_{\lambda_1}(v_1, v_2), (\hat{v}_1, \bar{v}_1) \rangle &= \lambda \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} \bar{v}_1 \xi_1 dx dt + (1 - \lambda) \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} \bar{v}_2 \xi_2 dx dt \\
&+ \lambda \mu_1 \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} \hat{v}_1 \bar{v}_1 dx dt, \quad \forall (\hat{v}_1, \bar{v}_1).
\end{aligned}$$

Em particular, para $\bar{v} = \hat{v}_1$ temos:

$$\langle D_1^2 \mathcal{J}_{\lambda_1}(v_1, v_2), (\hat{v}_1, \hat{v}_1) \rangle = \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} (\lambda \xi_1 + (1 - \lambda) \xi_2) \hat{v}_1 dx dt + \lambda \mu_1 \iint_{\mathcal{O}_1 \times (0, T)} |\hat{v}_1|^2 dx dt.$$

Pelo lema (6), existe uma constante $C_j(\lambda) > 0$ (para cada $j = 1, 2$), tal que:

$$\left| \iint_{\mathcal{O}_i \times (0, T)} \xi_j \hat{v}_1 dx dt \right| \leq C_j(\lambda) (1 + \|f\|_{L(\Omega) \times (0, T)}) \|\hat{v}_1\|_{V_1}.$$

Logo, tomando $C_{\varepsilon_1} = \max\{C_1(\lambda), C_2(\lambda)\}$ temos que:

$$\begin{aligned} \langle D_1^2 \mathcal{J}_{\lambda_1}(v_1, v_2), (\hat{v}_1, \hat{v}_1) \rangle &\geq -C_{\varepsilon_1} (1 + \|f\|_{L(\Omega) \times (0, T)}) \|\hat{v}_1\|_{V_1} + \mu_1 \|\hat{v}_1\|^2 \\ &= (\mu_1 - C_{\varepsilon_1} (1 + \|f\|_{L(\Omega) \times (0, T)})) \|\hat{v}_1\|_{V_1}. \end{aligned}$$

De maneira análoga, obteremos

$$\langle D_2^2 \mathcal{J}_{\lambda_2}(v_1, v_2), (\hat{v}_2, \hat{v}_2) \rangle \geq (\mu_2 - C_{\varepsilon_2} (1 + \|f\|_{L(\Omega) \times (0, T)})) \|\hat{v}_2\|_{V_2}.$$

Finalmente, observando que C_{ε_1} e C_{ε_2} são independentes de μ_i , descobrimos que, a validade do lema (6) com $C = \max(C_{\varepsilon_1}, C_{\varepsilon_2})$, implica que o par (v_1, v_2) satisfaz (2.56) e é um equilíbrio de Pareto.

Capítulo 3

Resultados numéricos

Nessa seção iremos formular os algoritmos para os problemas de equilíbrio lineares e semi-lineares. Para os problemas lineares, formularemos o método do ponto fixo, para os problemas semi-lineares, o método de Newton. Antes disso, apresentaremos um processo de discretização total dos problemas, via método dos elementos finitos (discretização espacial) e método das diferenças finitas (discretização temporal), para posteriormente apresentar simulações numéricas.

3.1 Algoritmos iterativos

Há uma diversidade de algoritmos que nos permitiria fazer simulações, no caso linear por exemplo, iremos utilizar *Ponto Fixo* e no não linear usaremos o *Método de Newton*. Outras versões de algoritmos podem ser estudadas, por exemplo nos trabalhos de [7], [8] e [9], onde foram utilizados outros métodos eficientes de convergência. Em particular, em [7], diversos métodos são apresentados e análises comparativas de eficiência são verificadas para problemas lineares e não lineares, porém, os resultados limitam-se a equação do calor e apenas ao Equilíbrio de Nash.

Devemos inicializar o problema obtendo um erro variável de aproximação ϵ , que indicará o valor obtido do critério de convergência. Estabelecemos uma tolerância ϵ_0 , previamente fixada, que indicará o erro ao qual o critério de convergência deverá atingir para a obtenção do critério de parada. Com isso, descreveremos os algoritmos de passo iterativo para todos os problemas através dos algoritmos abaixo apresentados.

PSEUDO-ALGORITMO PARA (2.26) - MÉTODO DO PONTO FIXO

PASSO 1 - Tome (v_1^0, v_2^0) dado em $V_1 \times V_2$.

PASSO 2 - Para $n \geq 0$ e $(v_1^n, v_2^n) \in V_1 \times V_2$, compute y^n para (2.11) com $v_i = v_i^n$, e então compute $\phi^{i,n}$ para o sistema (2.24) com $y = y^n$.

PASSO 3 - Finalmente, calcule v_i^{n+1} dado por (2.25), i.e $v_i^{n+1} = -\frac{1}{\mu_i} \phi^{i,n}$.

PSEUDO-ALGORITMO PARA (2.33) - MÉTODO DO PONTO FIXO

PASSO 1 - Considere (v_1^0, v_2^0) em $V_1 \times V_2$.

PASSO 2 - Para $n \geq 0$ e $(v_1^n, v_2^n) \in V_1 \times V_2$, compute y^n para (2.1) com $v_i = v_i^n$, e então compute $\phi^{i,n}$ para o sistema (2.29) com $y = y^n$.

PASSO 3 - Finalmente, calcule v_1^n e v_2^n dado por (2.31) e (2.32), i.e

$$v_1^n = -\frac{1}{\mu_1} \left(\phi^{1,n-1} + \frac{(1-\lambda)}{\lambda} \phi^{2,n-1} \right),$$
$$v_2^n = -\frac{1}{\mu_2} \left(\frac{\lambda}{(1-\lambda)} \phi^{1,n-1} + \phi^{2,n-1} \right).$$

PSEUDO-ALGORITMO PARA (2.42) - MÉTODO DE NEWTON

PASSO 1 - Tome (v_1^0, v_2^0) dado em $V_1 \times V_2$. Tome $y^{-1}(x, t) = y_0(x) + ty_1(x)$.

PASSO 2 - Então, dado $n \geq 0$, y^{n-1} e $v^n = (v_1^n, v_2^n) \in V$.

a) Linearizando $F(y^n)$ utilizando o Método de Newton, por

$$F(y^n) = F'(y^{n-1})(y^n - y^{n-1}) + F(y^{n-1})$$

b) Reescreva o problema utilizado (a) e para cada $l \geq 0$ compute $\mathbf{y}^{n,l+1}$ a partir de $\mathbf{y}^{n,l}$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{y}_{tt}^n - \Delta \mathbf{y}^n + \mathbf{F}'(\mathbf{y}^{n,l-1})\mathbf{y}^{n,l} = \mathbf{f}^n + \mathbf{A}(\mathbf{y}^{n-1}) + \mathbf{v}_1^n \mathbf{1}_{\mathcal{O}_1} + \mathbf{v}_2^n \mathbf{1}_{\mathcal{O}_2} & \text{em } Q \\ \mathbf{y}^n = 0 & \text{em } \Sigma_1 \\ \frac{\partial \mathbf{y}^n}{\partial \eta} = 0 & \text{em } \Sigma_2 \\ \mathbf{y}^n(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{y}_{h,0}^n(\mathbf{x}) \ , \ \mathbf{y}_t^n(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{y}_1^n(\mathbf{x}) & \text{em } \Omega \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Com $\mathbf{A}(\mathbf{y}^n) = \mathbf{F}'(\mathbf{y}^n)\mathbf{y}^n - \mathbf{F}(\mathbf{y}^n)$.

PASSO 3 Para $n \geq 0$ e $(\mathbf{v}_1^n, \mathbf{v}_2^n) \in \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2$, compute \mathbf{y}^n para (2.2) com $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^n$, e então compute $\phi^{i,n}$ para o sistema (3.1) com $\mathbf{y} = \mathbf{y}^n$.

PASSO 4 Finalmente, calcule \mathbf{v}_i^n dado por (2.41), i.e, $\mathbf{v}_i^n = -\frac{1}{\mu_i} \phi^{i,n-1}$.

PSEUDO-ALGORITMO PARA (2.62) - MÉTODO DE NEWTON

PASSO 1 - Tome $(\mathbf{v}_1^0, \mathbf{v}_2^0)$ dado em $\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2$. Tome $\mathbf{y}^{-1}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{y}_0(\mathbf{x}) + t\mathbf{y}_1(\mathbf{x})$.

PASSO 2 - Então, dado $n \geq 0$, \mathbf{y}^{n-1} e $\mathbf{v}^n = (\mathbf{v}_1^n, \mathbf{v}_2^n) \in \mathbf{V}$.

a) Linearizando $\mathbf{F}(\mathbf{y}^n)$ utilizando o Método de Newton, por

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}^n) = \mathbf{F}'(\mathbf{y}^{n-1})(\mathbf{y}^n - \mathbf{y}^{n-1}) + \mathbf{F}(\mathbf{y}^{n-1})$$

b) Reescreva o problema utilizado (a) e para cada $l \geq 0$ compute $\mathbf{y}^{n,l+1}$ a partir de $\mathbf{y}^{n,l}$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{y}_{tt}^n - \Delta \mathbf{y}^n + \mathbf{F}'(\mathbf{y}^{n,l-1})\mathbf{y}^{n,l} = \mathbf{f}^n + \mathbf{A}(\mathbf{y}^{n-1}) + \mathbf{v}_1^n \mathbf{1}_{\mathcal{O}_1} + \mathbf{v}_2^n \mathbf{1}_{\mathcal{O}_2} & \text{em } Q \\ \mathbf{y}^n = 0 & \text{em } \Sigma_1 \\ \frac{\partial \mathbf{y}^n}{\partial \eta} = 0 & \text{em } \Sigma_2 \\ \mathbf{y}^n(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{y}_{h,0}^n(\mathbf{x}) \ , \ \mathbf{y}_t^n(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{y}_1^n(\mathbf{x}) & \text{em } \Omega \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Com $\mathbf{A}(\mathbf{y}^n) = \mathbf{F}'(\mathbf{y}^n)\mathbf{y}^n - \mathbf{F}(\mathbf{y}^n)$.

PASSO 3 - Para $n \geq 0$ e $(\mathbf{v}_1^n, \mathbf{v}_2^n) \in \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2$, compute \mathbf{y}^n para (2.2) com $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^n$, e então compute $\phi^{i,n}$ para o sistema (3.2) com $\mathbf{y} = \mathbf{y}^n$.

PASSO 4 - Em seguida, calcule v_1^{n+1} e v_2^{n+1} dado por (2.60) e (2.61), i.e

$$v_1^{n+1} = -\frac{1}{\mu_1} \left(\phi^{1,n} + \frac{(1-\lambda)}{\lambda} \phi^{2,n} \right),$$

$$v_2^{n+1} = -\frac{1}{\mu_2} \left(\frac{\lambda}{(1-\lambda)} \phi^{1,n} + \phi^{2,n} \right).$$

3.1.1 Redução da Dimensão

Dado $T > 0$ considere os problemas dados em (2.1) e (2.2)

- (1) Aproximação do Tempo - Consideramos inicialmente uma discretização com passo de tempo Δt . Seja m um inteiro positivo, definimos $\Delta t = \frac{T}{m}$ e ponha $t^0 = 0$ e $t^m = m\Delta t$. Veja que,

$$0 = t^0 < t^1 < \dots < t^m = T$$

Logo, para cada passo dado podemos aproximar o espaço de tempo, i.e.

$$V_i^m = L^2(\mathcal{O}_1)^m \approx V_i = L^2(\mathcal{O}_1 \times (0, T))$$

Para cada $i = 1, 2$ e $t \in [0, T]$. Assim, podemos interpretar os elementos de V_i^m como controle em V_i que são por partes constantes no tempo, em suma podemos aproximar os controles $v_i^{n+1} \approx v_i$.

- (2) Aproximação do Espaço - A partir de agora, assumiremos que Ω é um domínio poligonal de \mathbb{R}^3 , também assumimos que $\mathcal{O}_{i,d}$ e \mathcal{O}_i são poligonais. Considere também \mathcal{T}_h a triangulação de Ω , onde h é o maior comprimento das arestas dos triângulos de \mathcal{T}_h . Considere

$$\mathbb{P}_h^1 = \{z \in H^1(\Omega) \mid \forall K \in \mathcal{T}_h, z \in \mathbb{P}_1(K)\}$$

onde $\mathbb{P}_1(K)$ é o espaço das funções polinomiais em K de grau ≤ 1 ; assim, $\dim(\mathbb{P}_1(K)) = 3$ e $\dim(W_h) = N_h$, onde N_h é o número de vértices de \mathcal{T}_h .

Agora, aproximamos o espaço, para $i \in \{1, 2\}$, aproximamos V_i por $V_{i,h}^{\Delta t}$, definido por $V_{i,h}^{\Delta t} = (V_{i,h})^N$, onde

$$V_{i,h} = \{z : z \in \mathcal{C}^0(\bar{\mathcal{O}}_i), z|_T \in \mathbb{P}_1, \forall T \in \mathcal{O}_i\}.$$

Assim, temos a aproximação para $V_h^m = V_{1,h}^m \times V_{2,h}^m$. Por fim, aproximamos o espaço

$$\{z \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) : z(t)|_{\Gamma_1} = 0\},$$

por $W_{h,0}^m$ definido por $W_{h,0}^m = (W_{h,0})^N$, onde

$$W_{h,0} = \{z \in W_h : z|_{\Gamma_1} = 0\}.$$

A equação de estado em (2.1) e os sistemas adjuntos em (2.24) podem ser aproximados no tempo e no espaço incorporando técnicas de elementos finitos para discretização espacial do problema e diferenças finitas para a discretização temporal. Com efeito, denotando para cada função g uma aproximação $g_h(x, m\Delta t) = g_h^m(x, t)$, construímos uma aproximação para y e f dadas como segue $y(x, t)_h \approx y_h^m(x, t)$, $f(x, t)_h \approx f_h^m(x, t)$. Além disso, sejam $y_h^{m+1}(x, t)$ e $y_h^m(x, t)$ tem-se via diferenças finitas no tempo que:

$$y_{h,t}^{m+1} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y_h^{m+1} - y_h^m}{\Delta t} \quad (3.3)$$

De modo análogo,

$$y_{h,tt}^{m+1} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(y_h^{m+1})_t - (y_h^m)_t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y_h^{m+1} - 2y_h^m + y_h^{m-1}}{(\Delta t)^2}. \quad (3.4)$$

Vale notar que pelos dados iniciais, em (2.1) e (2.2), temos que

$$y_{h,t}^m \approx \frac{y_h^m - y_h^{m-1}}{\Delta t} \Rightarrow y_h^m = y_h^{m-1} + (\Delta t)y_{h,t}^m.$$

Porém, $y_h^0 \approx y_0(x, 0) = y_0$ que é um valor dado, e o mesmo ocorre com $y_{h,t}^0 \approx y_1(x, 0) = y_1$. Logo, para $m = 1$ teremos

$$\begin{aligned} y_h^1 &= y_h^0 + (\Delta t)y_{h,t}^0 \\ &= y_0 + (\Delta t)y_1. \end{aligned}$$

Ou seja, sabendo os dados iniciais, podemos computar os valores das funções para cada passo de tempo em função do passo anterior. Considerando a aproximação acima de maneira adequada, podemos rescrever nosso sistema (2.1) e (2.2) como segue abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{y}_h^{m+1} - \Delta \mathbf{y}_h^{m+1} = \mathbf{f}^{m+1} + \mathbf{v}_1^{m+1} \mathbf{1}_{\mathcal{O}_1} + \mathbf{v}_2^{m+1} \mathbf{1}_{\mathcal{O}_2} & \text{em } Q, \\ \mathbf{y}_h^{m+1} = 0 & \text{sobre } \Sigma_1, \\ \frac{\partial \mathbf{y}_h^{m+1}}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \Sigma_2, \\ \mathbf{y}_h^{m+1}(x, 0) = \mathbf{y}_{h,0}^{m+1}(x) , \mathbf{y}_{h,t}^{m+1}(x, 0) = \mathbf{y}_{h,1}^{m+1}(x) & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \quad (3.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{y}_h^{m+1} - \Delta \mathbf{y}_h^{m+1} + F(\mathbf{y}_h^{m+1}) = \mathbf{f}^{m+1} + \mathbf{v}_1^{m+1} \mathbf{1}_{\mathcal{O}_1} + \mathbf{v}_2^{m+1} \mathbf{1}_{\mathcal{O}_2} & \text{em } Q, \\ \mathbf{y}_h^{m+1} = 0 & \text{sobre } \Sigma_1, \\ \frac{\partial \mathbf{y}_h^{m+1}}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \Sigma_2, \\ \mathbf{y}_h^{m+1}(x, 0) = \mathbf{y}_{h,0}^{m+1}(x) , \mathbf{y}_{h,t}^{m+1}(x, 0) = \mathbf{y}_{h,1}^{m+1}(x) & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Para cada $m = T - 1, \dots, 0$. Uma vez que o estado \mathbf{y}_h^m está bem explicito, somos capazes de deduzir de modo análogo os dois estados adjuntos $\phi_{i,h}^m$ para cada par de controle $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1^{m+1}, \mathbf{v}_2^{m+1}) \in \mathbf{V}_h^m$, dado por:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \phi_{h,tt}^{i,m} - \Delta \phi_h^{i,m} = (\mathbf{y}_h^m - \mathbf{y}_{i,d}) \mathbf{1}_{\mathcal{O}_{i,d}} & \text{em } Q, \\ \phi_h^{i,m} = 0 & \text{sobre } \Sigma_1, \\ \frac{\partial \phi_h^{i,m}}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \Sigma_2, \\ \phi_m^{i,m}(x, T) = 0 , \phi_{h,t}^{i,m}(x, T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \quad (3.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \phi_{h,tt}^{i,m} - \Delta \phi_h^{i,m} + F'(\mathbf{y}_h^m) = (\mathbf{y}_h^m - \mathbf{y}_{i,d}) \mathbf{1}_{\mathcal{O}_{i,d}} & \text{em } Q, \\ \phi_h^{i,m} = 0 & \text{sobre } \Sigma_1, \\ \frac{\partial \phi_h^{i,m}}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \Sigma_2, \\ \phi_m^{i,m}(x, T) = 0 , \phi_{h,t}^{i,m}(x, T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Para cada $m = T - 1, \dots, 1$.

Portanto, é bem natural poder aproximar (2.3) introduzindo uma abordagem em função dos elementos finitos, definindo $\mathcal{J}_{i,h}^m(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) : \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\mathcal{J}_{i,h}^m(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T)} |\mathbf{y}_h^{m+1} - \mathbf{y}_{i,d}|^2 dxdt + \frac{\mu_i}{2} \iint_{\mathcal{O}_i \times (0,T)} |\mathbf{v}_i|^2 dxdt$$

Além disso, para o problema não linear podemos fazer uma linearização utilizando o Método de Newton, dado por:

$$\begin{aligned} F'(\mathbf{y}_h^m) &= \frac{F(\mathbf{y}_h^{m+1}) - F(\mathbf{y}_h^m)}{\mathbf{y}_h^{m+1} - \mathbf{y}_h^m} \\ F'(\mathbf{y}_h^m)(\mathbf{y}_h^{m+1} - \mathbf{y}_h^m) &= F(\mathbf{y}_h^{m+1}) - F(\mathbf{y}_h^m) \\ F(\mathbf{y}_h^{m+1}) &= F'(\mathbf{y}_h^m)(\mathbf{y}_h^{m+1} - \mathbf{y}_h^m) + F(\mathbf{y}_h^m) \end{aligned}$$

Logo, o termo $F(\mathbf{y}^{n+1})$ será obtido por meio do processo iterativo de \mathbf{y}^{m+1} , e reciprocamente. Assim, podemos reescrever o sistema (3.6) fazendo uso do método de linearização de Newton e teremos:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{y}_{h,tt}^{m+1} - \Delta \mathbf{y}_h^{m+1} + F'(\mathbf{y}_h^m) \mathbf{y}_h^{m+1} = \mathbf{f}^{m+1} + \mathbf{A}(\mathbf{y}^m) + \mathbf{v}_1^{m+1} \mathbb{1}_{\mathcal{O}_1} + \mathbf{v}_2^{m+1} \mathbb{1}_{\mathcal{O}_2} & \text{em } Q, \\ \mathbf{y}_h^{m+1} = 0 & \text{sobre } \Sigma_1, \\ \frac{\partial \mathbf{y}_h^{m+1}}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \Sigma_2, \\ \mathbf{y}_h^{m+1}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{y}_{h,0}^{m+1}(\mathbf{x}), \mathbf{y}_{h,t}^{m+1}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{y}_{h,1}^{m+1}(\mathbf{x}) & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Onde $\mathbf{A}(\mathbf{y}^{n+1}) = \mathbf{y}^n F'(\mathbf{y}^n) - F(\mathbf{y}^n)$.

3.1.2 Revisitando os algoritmos

Agora iremos apresentar a formulação variacional para os problemas aproximados, bem como os passos para computação dos dados e uma versão resumida e compacta dos seus algoritmos. Usaremos a notação $\mathbf{V}_h^{\Delta t} = \mathbf{V}_{1,h}^{\Delta t} \times \mathbf{V}_{2,h}^{\Delta t}$. Inicialmente, apresentaremos uma formulação variacional para o problema aproximado e totalmente discretizado, que descreve o equilíbrio de Nash no caso linear.

FORMULAÇÃO OTIMIZADA 1 - NASH LINEAR

PASSO 1 - Escolha $\mathbf{v}^0 = (\mathbf{v}_1^0, \mathbf{v}_2^0) \in \mathbf{V}_h^{\Delta t}$ e considere $(\mathbf{y}_{0,h}, \mathbf{y}_{1,h}) \in \mathbf{W}_{h,0} \times \mathbf{W}_{h,0}$ uma aproximação para $(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1)$.

PASSO 2 - Dado $n \geq 0$ e $\mathbf{v}^n = (\mathbf{v}_1^n, \mathbf{v}_2^n) \in \mathbf{V}_h^{\Delta t}$, calcule a aproximação do estado

$\mathbf{y}_h^{n,0}, \mathbf{y}_h^{n,1}, \dots$ como segue abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y}_h^{n,0} = \mathbf{y}_{h,0}, \mathbf{y}_h^{n,1} = \mathbf{y}_h^{n,0} + (\Delta t)\mathbf{y}_{h,1}, \\ \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\mathbf{y}_h^{n,m+1} - 2\mathbf{y}_h^{n,m} + \mathbf{y}_h^{n,m-1}}{(\Delta t)^2} \right) \mathbf{z} + \nabla \mathbf{y}_h^{n,m+1} \nabla \mathbf{z} \right] \mathrm{d}\mathbf{x} = \\ \int_{\mathcal{O}_{i,d}} (f(\mathbf{x}, t^{m+1}) + \mathbf{v}_1^n(\mathbf{x}, t^{m+1}) + \mathbf{v}_2^n(\mathbf{x}, t^{m+1})) \mathbf{z} \mathrm{d}\mathbf{x} \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Para todo $\mathbf{z}, \mathbf{y}_h^{n,m+1} \in W_{h,0}$ e $m = 1, \dots, T-1$.

Compute o adjunto de

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{i,h}^{n,M} = 0, \phi_{i,h}^{n,T-1} = 0, \\ \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\phi_{i,h}^{n,m+1} - 2\phi_{i,h}^{n,m} + \phi_{i,h}^{n,m-1}}{(\Delta t)^2} \right) \mathbf{z} + \nabla \phi_{i,h}^{n,m+1} \nabla \mathbf{z} \right] \mathrm{d}\mathbf{x} = \\ \int_{\mathcal{O}_{i,d}} (\mathbf{y}_h^{n,m-1} - \mathbf{y}_{i,d}(\mathbf{x}, t^{m-1})) \mathbf{z} \mathrm{d}\mathbf{x} \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Para todo $\mathbf{z}, \phi_{i,h}^{n,m} \in W_{h,0}$ e $m = T-1, T-2, \dots, 1$.

PASSO 3 - Finalmente, calcule

$$\mathbf{v}_i^{n+1} = -\frac{1}{\mu_i} \phi_{i,h}^{n,m}. \quad (3.12)$$

Uma forma resumida e compacta de apresentar um algoritmo que descreva os passos da Formulação Otimizada 1, apresentamos abaixo.

ALGORITMO 1 - Nash Linear

Entrada: $\mathbf{y}_{h,0} = \mathbf{y}_0$, $\mathbf{y}_{1,h} = \mathbf{y}_1$, $\phi_{i,h}^{n,M} = 0$ e $\phi_{i,h}^{n,T-1} = 0$;

Saída: $\mathbf{y} = \mathbf{y}_h^{n,m+1}$, $\phi_i = \phi_{i,h}^{n,m}$ e $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i,h}^{n+1}$.

1 **início**

2 Para cada $i = 1, 2$, considere $\mathbf{v}_{i,h}^0 \in \mathbf{V}_{i,h}^{\Delta t}$ dado;

3 **para** $n \geq 0$ e $\mathbf{v}_{i,h}^n \in \mathbf{V}_{i,h}^{\Delta t}$, computar $\mathbf{y}_h^{n,m+1}$ em (3.5) correspondente a \mathbf{v}^{m+1} , seguido da computação de $\phi_{i,h}^{n,m}$ em (3.7);

4 **faça**

5 $\mathbf{v}_i^{n+1} = -\frac{1}{\mu_i} \phi_{i,h}^{n,m}$, como em (3.12).

6 **fim**

7 Atualize $m = m + 1$;

8 **fim**

Agora, apresentaremos uma formulação similar a anterior, agora descrevendo o problema linear com equilíbrio de Pareto .

FORMULAÇÃO OTIMIZADA 2 - PARETO LINEAR

PASSO 1 - Escolha $\mathbf{v}^0 = (v_1^0, v_2^0)$ e ponha $(\mathbf{y}_{0,h}, \mathbf{y}_{1,h}) \in W_{h,0} \times W_{h,0}$ uma aproximação para $(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1)$.

PASSO 2 - Dado $n \geq 0$ e $\mathbf{v}^n = (v_1^n, v_2^n) \in V_h^{\Delta t}$, calcule a aproximação para o estado $\mathbf{y}_h^{n,0}, \mathbf{y}_h^{n,1}, \dots$ através do problema abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y}_h^{n,0} = \mathbf{y}_{h,0}, \mathbf{y}_h^{n,1} = \mathbf{y}_h^{n,0} + (\Delta t)\mathbf{y}_{h,1}, \\ \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\mathbf{y}_h^{n,m+1} - 2\mathbf{y}_h^{n,m} + \mathbf{y}_h^{n,m-1}}{(\Delta t)^2} \right) \mathbf{z} + \nabla \mathbf{y}_h^{n,m+1} \nabla \mathbf{z} \right] dx = \\ \int_{\mathcal{O}_{i,d}} (f(\mathbf{x}, t^{m+1}) + v_1^n(\mathbf{x}, t^{m+1}) + v_2^n(\mathbf{x}, t^{m+1})) \mathbf{z} dx \end{array} \right. \quad (3.13)$$

com $\mathbf{z}, \mathbf{y}_h^{n,m+1} \in W_{h,0}$ e $m = 1, \dots, T-1$.

Para cada $i = 1, 2$, compute o estado adjunto, através do sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{i,h}^{n,M} = 0, \phi_{i,h}^{n,T-1} = 0, \\ \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\phi_{i,h}^{n,m+1} - 2\phi_{i,h}^{n,m} + \phi_{i,h}^{n,m-1}}{(\Delta t)^2} \right) \mathbf{z} + \nabla \phi_{i,h}^{n,m+1} \nabla \mathbf{z} \right] dx = \\ \int_{\mathcal{O}_{i,d}} (\mathbf{y}_h^{n,m-1} - \mathbf{y}_{i,d}(\mathbf{x}, t^{m-1})) \mathbf{z} dx \end{array} \right. \quad (3.14)$$

com $\mathbf{z}, \phi_{i,h}^{n,m} \in W_{h,0}$ e $m = T-1, T-2, \dots, 1$.

PASSO 3 - Por fim, sendo $\lambda \in (0, 1)$, calcule \mathbf{v}_1^{n+1} e \mathbf{v}_2^{n+1} , como em (2.31) e (2.32), i.e

$$\mathbf{v}_1^{n+1} = -\frac{1}{\mu_1} \left(\phi_{1,h}^{n,m} + \frac{(1-\lambda)}{\lambda} \phi_{2,h}^{n,m} \right) \quad (3.15)$$

e

$$\mathbf{v}_2^n = -\frac{1}{\mu_2} \left(\frac{\lambda}{(1-\lambda)} \phi_{1,h}^{n,m} + \phi_{2,h}^{n,m} \right). \quad (3.16)$$

Novamente, apresentamos um algoritmo descrevendo os passos da Formulação Otimizada 2, como segue abaixo.

ALGORITMO 2 - Pareto Linear

Entrada: $y_{h,0} = y_0$, $y_{1,h} = y_1$, $\phi_{i,h}^{n,M} = 0$ e $\phi_{i,h}^{n,T-1} = 0$;

Saída: $y = y_h^{n,m+1}$, $\phi_i = \phi_{i,h}^{n,m}$ e $v_i = v_{i,h}^{n+1}$.

1 início

2 Para cada $i = 1, 2$, considere $v_{i,h}^0 \in V_{i,h}^{\Delta t}$ dado;

3 **para** $n \geq 0$ e $v_{i,h}^n \in V_{i,h}^{\Delta t}$, computar $y_h^{n,m+1}$ em (3.5) correspondente a v^{m+1} , seguido da computação de $\phi_{i,h}^{n,m}$ em (3.7);

4 **faça**

5 $v_{1,h}^{n+1}$ e $v_{2,h}^{n+1}$, como em (3.15) e (3.16) respectivamente.

6 **fim**

7 Atualize $m = m + 1$;

8 fim

Agora, apresentaremos os algoritmos que descrevem os problemas não-lineares. Iniciaremos com o problema de Nash, e sua versão discretizada.

FORMULAÇÃO OTIMIZADA 3 - NASH SEMI-LINEAR

PASSO 1 - Escolha $v^0 = (v_1^0, v_2^0)$ e considere $(y_{0,h}, y_{1,h}) \in W_{h,0} \times W_{h,0}$, uma aproximação para (y_0, y_1) .

PASSO 2 - Dado $n \geq 0$ e $v^n = (v_1^n, v_2^n) \in V_h^{\Delta t}$, calcule a aproximação do estado $y_h^{n,0}, y_h^{n,1}, \dots$ como segue abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_h^{n,0} = y_{h,0}, y_h^{n,1} = y_h^{n,0} + (\Delta t)y_{h,1}, \\ \int_{\Omega} \left[\left(\frac{y_h^{n,m+1} - 2y_h^{n,m} + y_h^{n,m-1}}{(\Delta t)^2} \right) z + \nabla y_h^{n,m+1} \nabla z + F'(y_m^{n,l-1}) y_m^{n,l} z \right] dx = \\ \int_{O_{i,d}} (f(x, t^{m+1}) + v_1^n(x, t^{m+1}) + v_2^n(x, t^{m+1}) + A(y_m^n)) z dx \end{array} \right.$$

Para todo $z, y_h^{n,m+1} \in W_{h,0}$ e $m = 1, \dots, T-1$.

Compute o estado adjunto através de

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{i,h}^{n,M} = 0, \phi_{i,h}^{n,T-1} = 0, \\ \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\phi_{i,h}^{n,m+1} - 2\phi_{i,h}^{n,m} + \phi_{i,h}^{n,m-1}}{(\Delta t)^2} \right) z + F'(y_m^{n,l-1}) \phi_{i,h}^{n,l} z + \nabla \phi_{i,h}^{n,m+1} \nabla z \right] dx = \\ \int_{\mathcal{O}_{i,d}} (y_h^{n,m-1} - y_{i,d}(x, t^{m-1})) z dx \end{array} \right.$$

Para todo $z, \phi_{i,h}^{n,m} \in W_{h,0}$ e $m = T-1, T-2, \dots, 1$.

PASSO 3 - Por fim, compute

$$v_i^{n+1} = -\frac{1}{\mu_i} \phi_{i,h}^{n,m}, \quad i = 1, 2. \quad (3.17)$$

ALGORITMO 3 - Nash semi-linear

Entrada: $y_{h,0} = y_0, y_{1,h} = y_1, \phi_{i,h}^{n,M} = 0$ e $\phi_{i,h}^{n,T-1} = 0$;

Saída: $y = y_h^{n,m+1}, \phi_i = \phi_{i,h}^{n,m}$ e $v_i = v_{i,h}^{n+1}$.

1 **início**

2 Para cada $i = 1, 2$, considere $v_{i,h}^0 \in V_{i,h}^{\Delta t}$ dado;

3 **para** $n \geq 0$ e $v_{i,h}^n \in V_{i,h}^{\Delta t}$, *computar* $y_h^{n,m+1}$ em (3.6) *correspondente a*
 v^{m+1} , *seguido da computação de* $\phi_{i,h}^{n,m}$ em (3.8) ;

4 **faça**

5 $v_i^{n+1} = -\frac{1}{\mu_i} \phi_{i,h}^{n,m}$, como em (3.12).

6 **fim**

7 Atualize $m = m + 1$;

8 **fim**

E finalmente, nossa última Formulação Otimizada, com a discretização total para o sistema não-linear e sua formulação compatível com equilíbrio de Pareto.

FORMULAÇÃO OTIMIZADA 4 - PARETO SEMI-LINEAR

PASSO 1 - Escolha $v^0 = (v_1^0, v_2^0)$ e considere $(y_{0,h}, y_{1,h}) \in W_{h,0} \times W_{h,0}$, uma aproximação para (y_0, y_1) .

PASSO 2 - Dado $n \geq 0$ e $\mathbf{v}^n = (v_1^n, v_2^n) \in V_h^{\Delta t}$, calcule a aproximação do estado $\mathbf{y}_h^{n,0}, \mathbf{y}_h^{n,1}, \dots$ através do sistema abaixo

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y}_h^{n,0} = \mathbf{y}_{h,0}, \mathbf{y}_h^{n,1} = \mathbf{y}_h^{n,0} + (\Delta t)\mathbf{y}_{h,1}, \\ \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\mathbf{y}_h^{n,m+1} - 2\mathbf{y}_h^{n,m} + \mathbf{y}_h^{n,m-1}}{(\Delta t)^2} \right) \mathbf{z} + \nabla \mathbf{y}_h^{n,m+1} \nabla \mathbf{z} + F'(\mathbf{y}_m^{n,l-1}) \mathbf{y}_m^{n,l} \mathbf{z} \right] dx = \\ \int_{\mathcal{O}_{i,d}} (f(\mathbf{x}, t^{m+1}) + v_1^n(\mathbf{x}, t^{m+1}) + v_2^n(\mathbf{x}, t^{m+1}) + \Lambda(\mathbf{y}_m^n)) \mathbf{z} dx \end{array} \right.$$

com $\mathbf{z}, \mathbf{y}_h^{n,m+1} \in W_{h,0}$ e $m = 1, \dots, T-1$.

Compute o estado adjunto através do sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{i,h}^{n,M} = 0, \phi_{i,h}^{n,T-1} = 0, \\ \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\phi_{i,h}^{n,m+1} - 2\phi_{i,h}^{n,m} + \phi_{i,h}^{n,m-1}}{(\Delta t)^2} \right) \mathbf{z} + F'(\mathbf{y}_m^{n,l-1}) \phi_{i,h}^{n,l} \mathbf{z} + \nabla \phi_{i,h}^{n,m+1} \nabla \mathbf{z} \right] dx = \\ \int_{\mathcal{O}_{i,d}} (\mathbf{y}_h^{n,m-1} - \mathbf{y}_{i,d}(\mathbf{x}, t^{m-1})) \mathbf{z} dx \end{array} \right.$$

com $\mathbf{z}, \phi_{i,h}^{n,m} \in W_{h,0}$ e $m = T-1, T-2, \dots, 1$.

PASSO 3 - Por fim, sendo $\lambda \in (0, 1)$, calcule v_1^{n+1} e v_2^{n+1} , por meio de

$$v_1^{n+1} = -\frac{1}{\mu_1} \left(\phi_{1,h}^{n,m} + \frac{(1-\lambda)}{\lambda} \phi_{2,h}^{n,m} \right) \quad (3.18)$$

e

$$v_2^n = -\frac{1}{\mu_2} \left(\frac{\lambda}{(1-\lambda)} \phi_{1,h}^{n,m} + \phi_{2,h}^{n,m} \right). \quad (3.19)$$

ALGORITMO 4 - Pareto Semi-linear

Entrada: $\mathbf{y}_{h,0} = \mathbf{y}_0, \mathbf{y}_{1,h} = \mathbf{y}_1, \phi_{i,h}^{n,M} = 0$ e $\phi_{i,h}^{n,T-1} = 0$;

Saída: $\mathbf{y} = \mathbf{y}_h^{n,m+1}, \phi_i = \phi_{i,h}^{n,m}$ e $v_i = v_{i,h}^{n+1}$.

1 início

2 Para cada $i = 1, 2$, considere $\mathbf{v}_{i,h}^0 \in V_{i,h}^{\Delta t}$ dado;

3 para $n \geq 0$ e $\mathbf{v}_{i,h}^n \in V_{i,h}^{\Delta t}$, computar $\mathbf{y}_h^{n,m+1}$ em (3.6) correspondente a \mathbf{v}^{m+1} , seguido da computação de $\phi_{i,h}^{n,m}$ em (3.8);

4 faça

5 v_1^{n+1} e v_2^{n+1} como em (3.18) e (3.19), respectivamente.

6 fim

7 Atualize $m = m + 1$;

8 fim

Capítulo 4

Resultados Numéricos e Simulações

Os resultados computacionais e análise de convergência obtidos na computação dos algoritmos apresentados, foram realizados com auxílio do software livre *FreeFem++*, ver [14]. Nas subseções que estruturam o presente capítulo, apresentam-se diversificados dados e resultados obtidos nas simulações numéricas dos problemas lineares e não-lineares.

4.1 Domínios e dados experimentais

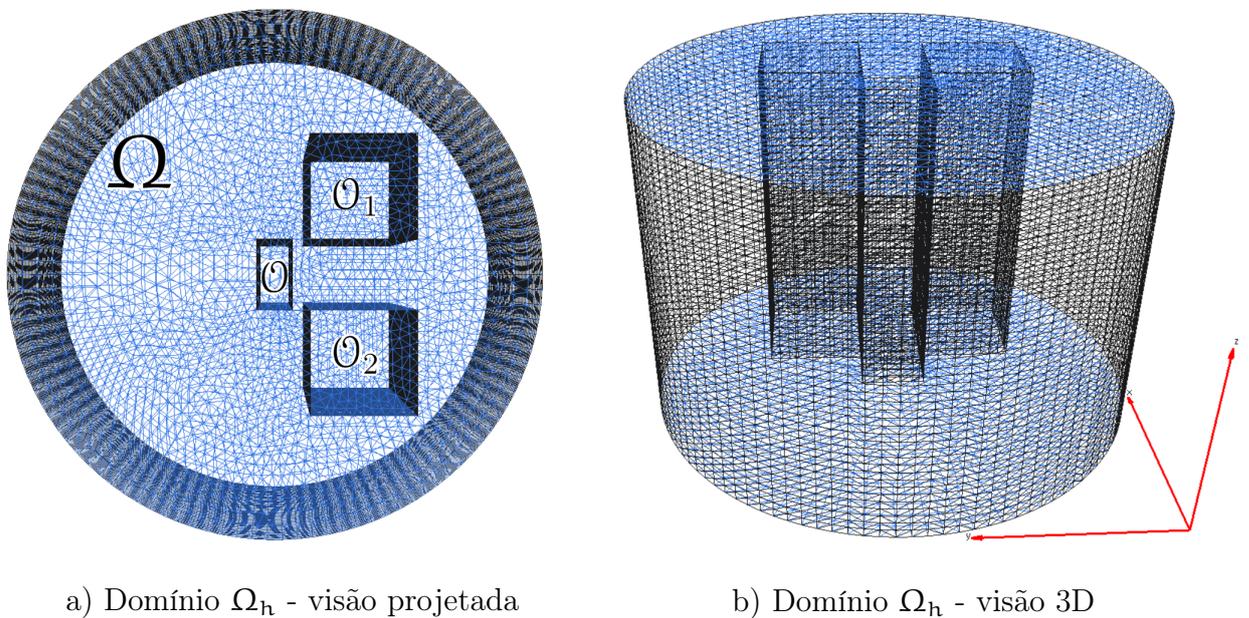


Figura 4.1: Domínio discretizado Ω_h , composto por 106800 tetraedros (gerando o volume), 19551 vértices (ou nós na decomposição dos elementos finitos) e 10840 triângulos (discretização das superfícies).

O domínio Ω será considerado cilíndrico como na figura 4.1 acima, construído por meio da extrusão de uma região 2D ao longo de um intervalo do eixo z . A região 2D será um círculo, que em sua forma paramétrica foi descrito por

$$\Omega_{2D} = (0.5 + 0.75 \cos(s), 0.5 + 0.75 \sin(s)), \quad \text{com } s \in [0, 2\pi].$$

Consideramos $z \in [0, 1]$ e construímos $\Omega := \Omega_{2D} \times z$.

Abaixo, algumas informações adicionais sobre os subdomínios

	eixo - x	eixo - y	eixo - z
\mathcal{O}_1	[0.6, 0.9]	[0.6, 0.9]	[0, 1]
\mathcal{O}_2	[0.6, 0.9]	[0.1, 0.4]	[0, 1]
\mathcal{O}	[0.45, 0.55]	[0.4, 0.6]	[0, 1]
\mathcal{O}_d	[0.3, 1]	[0, 1]	[0, 1]

Tabela 4.1: $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \cap \mathcal{O} = \emptyset$.

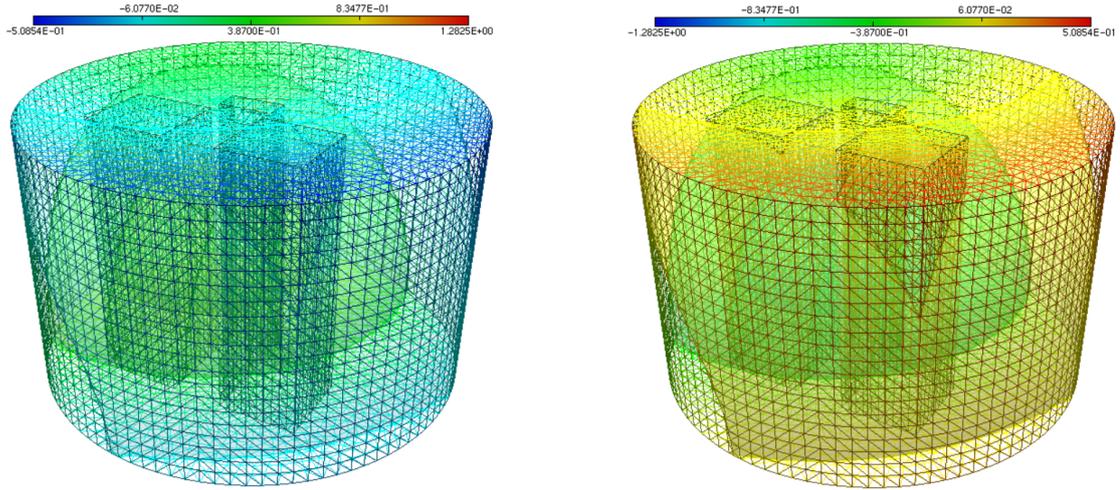
Em todos os casos, consideramos os valores reais \mathbf{Err}_1 e \mathbf{Err}_2 , obtidos através dos critérios de convergências para o algoritmos. Nos casos lineares, estabelecemos para os **ALGORITMO 1** e **ALGORITMO 2**, os seguintes critérios de parada:

$$\mathbf{Err}_1 \equiv \frac{\|(\mathbf{v}_1^{n+1}, \mathbf{v}_2^{n+1}) - (\mathbf{v}_1^n, \mathbf{v}_2^n)\|}{\|(\mathbf{v}_1^{n+1}, \mathbf{v}_2^{n+1})\|} \quad \text{e} \quad \mathbf{Err}_2 \equiv \frac{\|\mathbf{y}^{n+1} - \mathbf{y}^n\|}{\|\mathbf{y}^{n+1}\|}. \quad (4.1)$$

O critério de parada estabelecido ao processo iterativo dos algoritmos, deverá ocorrer quando $\mathbf{Err}_1 \leq \varepsilon$ e $\mathbf{Err}_2 \leq \varepsilon$. Para os casos não-lineares, o critério de parada para o **ALGORITMO 3** e **ALGORITMO 4**, a obtenção simultânea dos valores

$$\mathbf{Err}_1 \equiv \frac{\|(\mathbf{v}_1^{n+1}, \mathbf{v}_2^{n+1}) - (\mathbf{v}_1^n, \mathbf{v}_2^n)\|}{\|(\mathbf{v}_1^{n+1}, \mathbf{v}_2^{n+1})\|} \quad \text{e} \quad \mathbf{Err}_2 \equiv \frac{\|\mathbf{y}^{n,\ell+1} - \mathbf{y}^{n,\ell}\|}{\|\mathbf{y}^{n,\ell+1}\|}. \quad (4.2)$$

Novamente, os critérios de parada nos algoritmos são atingidos com a obtenção das estimativas $\mathbf{Err}_1 \leq \varepsilon$ e $\mathbf{Err}_2 \leq \varepsilon$. Em todos os casos fixamos $\varepsilon = 10^{-6}$. Para as funções objetivo utilizadas nas simulações, e os dados iniciais, consideramos:



$$y_{1,d}(x, y, z) = (1.3 - \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}); \quad y_{2,d}(x, y, z) = (\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} - 1.3);$$

Figura 4.2: Funções objetivo

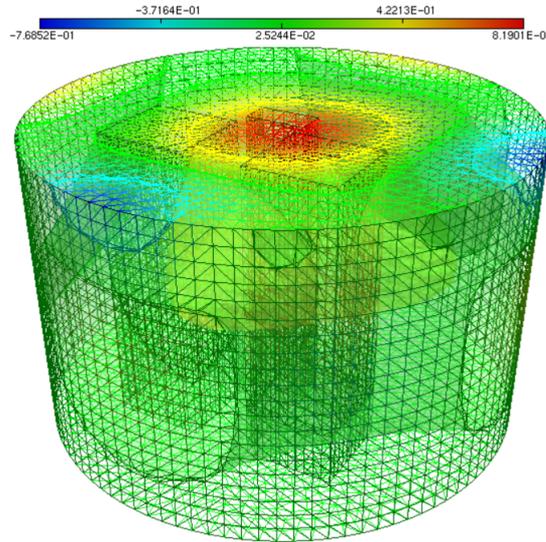


Figura 4.3: Dados iniciais $y_0 = y_1 = z \sin(\pi xy) \sin(\pi xz) \sin(\pi yz)$.

Observação. Os critérios de parada são utilizados para indicar a precisão e eficiência dos algoritmos propostos, o que não deve ser confundido com a obtenção da solução ou de sua convergência para a solução dos problemas a serem controlados. A forma que temos para medir o quão eficiente é o processo de optimalidade das soluções obtidas, com a intenção de melhorar sua proximidade dos objetivos pré-definidos, é avaliando a evolução dos funcionais custo J_1 e J_2 . Portanto, nos experimentos que seguem, avaliamos a eficiência dos algoritmos através de Err_1 e Err_2 , seguido da avaliação dos funcionais custo J_1 e J_2 .

4.1.1 Experimentos do caso Nash Linear

Nesta subseção, iremos apresentar alguns resultados obtidos das avaliações numéricas. Os resultados de algumas simulações são inseridos, para melhor visualizar o processo de controle e sua influência no processo evolutivo do caso Nash-Linear.

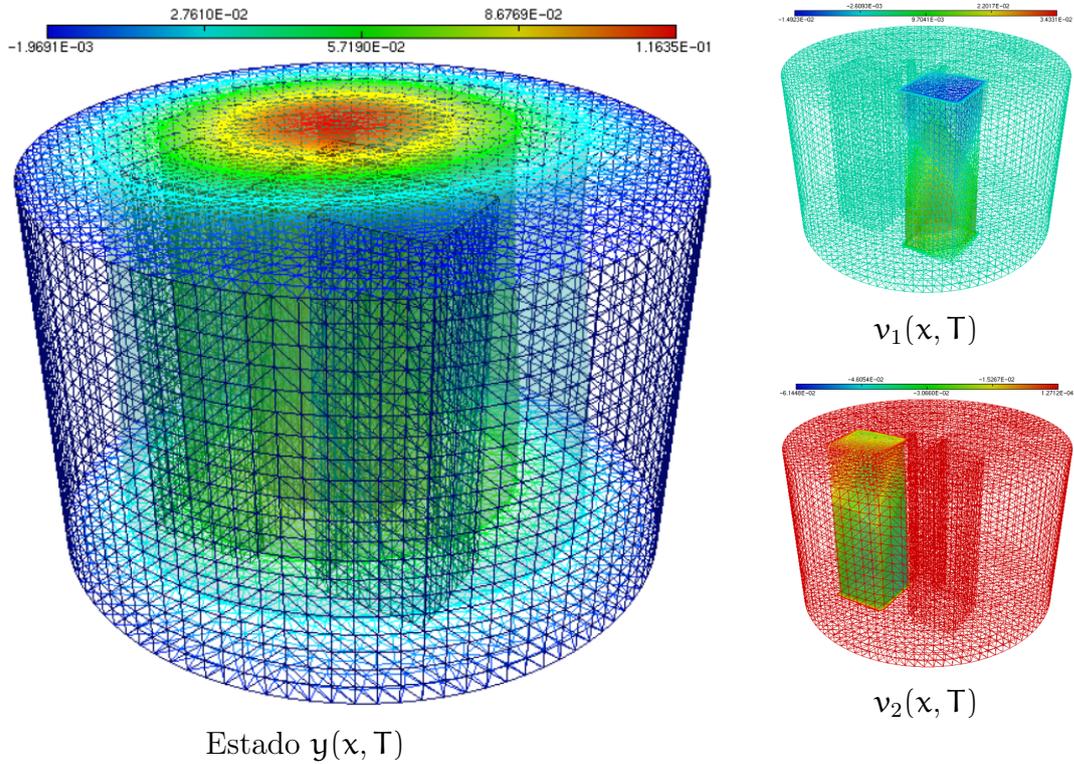


Figura 4.4: Estado $y(x, T)$ e controles em seus estados finais.

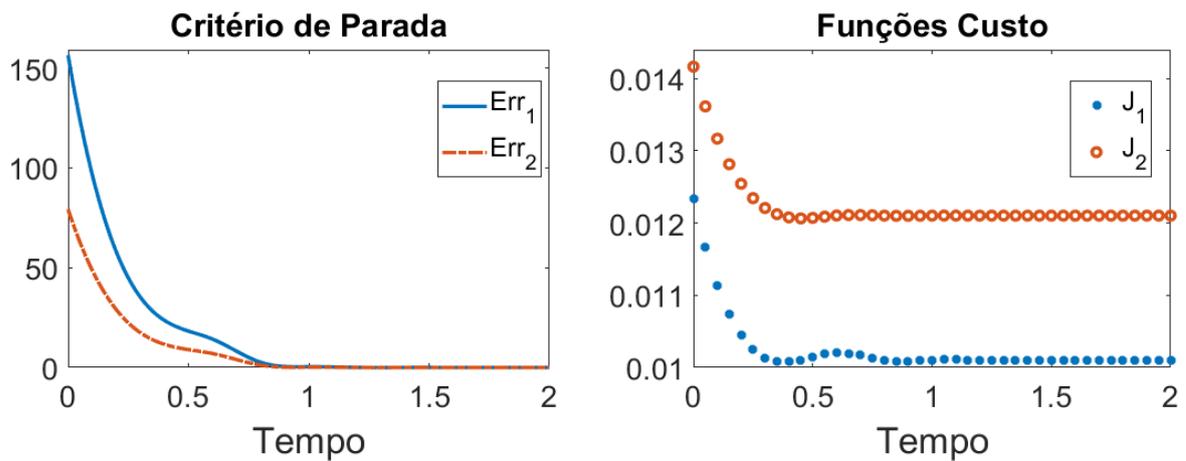


Figura 4.5: Avaliação das funções custo e dos critérios de parada no processo iterativo de evolução do problema.

4.1.2 Experimentos do caso Pareto Linear

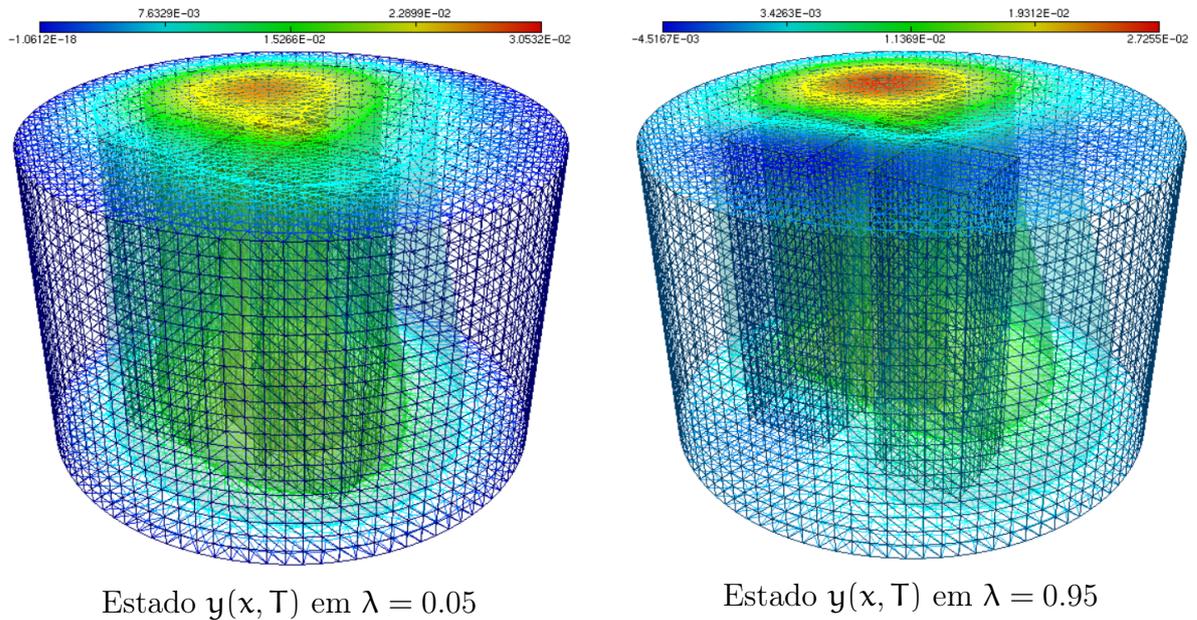


Figura 4.6: Estado e controles computados no tempo final T .

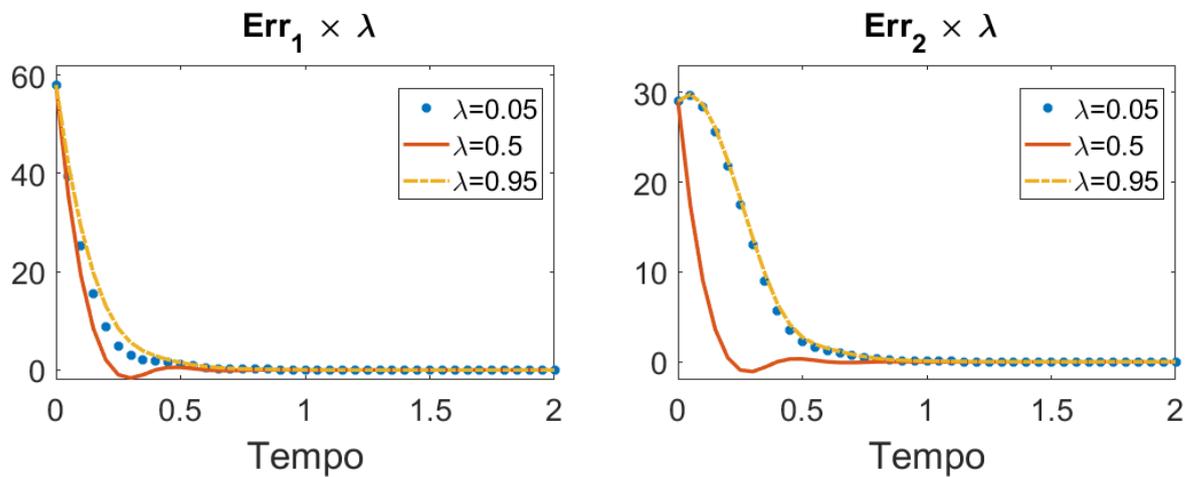


Figura 4.7: Avaliação dos critérios de parada Err_1 e Err_2 no processo iterativo de evolução do problema.

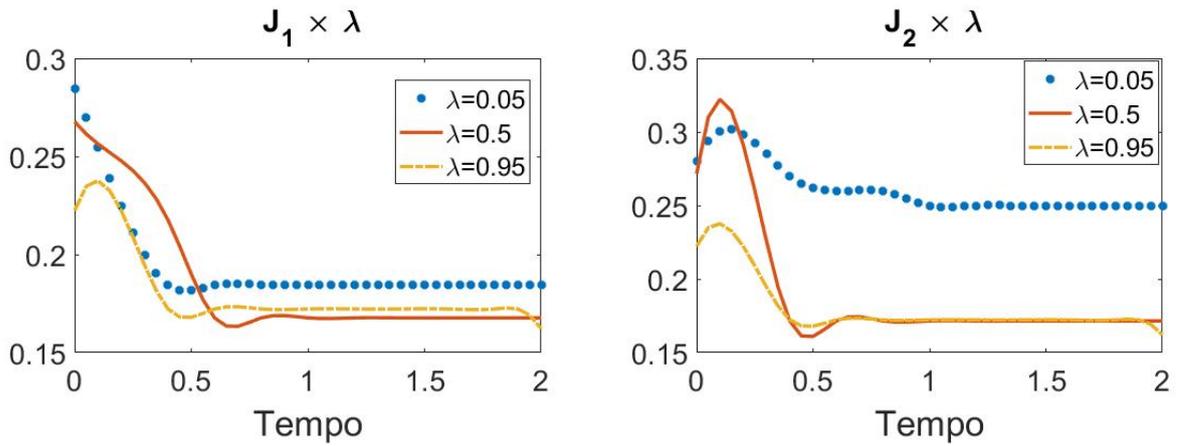


Figura 4.8: Avaliação dos funcionais custo J_1 e J_2 para o equilíbrio de Pareto em distintos valores de λ . Nos resultados experimentais, apresenta-se a situação de equilíbrio ótimo ocorrendo quando $\lambda = 0.5$.

Para os casos que seguem (casos não-lineares), inserimos a função $F(s)$ como o termo de não linearidade, que nos experimentos foi descrita através de

$$F(s) = s \sin(1/\exp(s)).$$

4.1.3 Experimentos do caso Nash Não-Linear

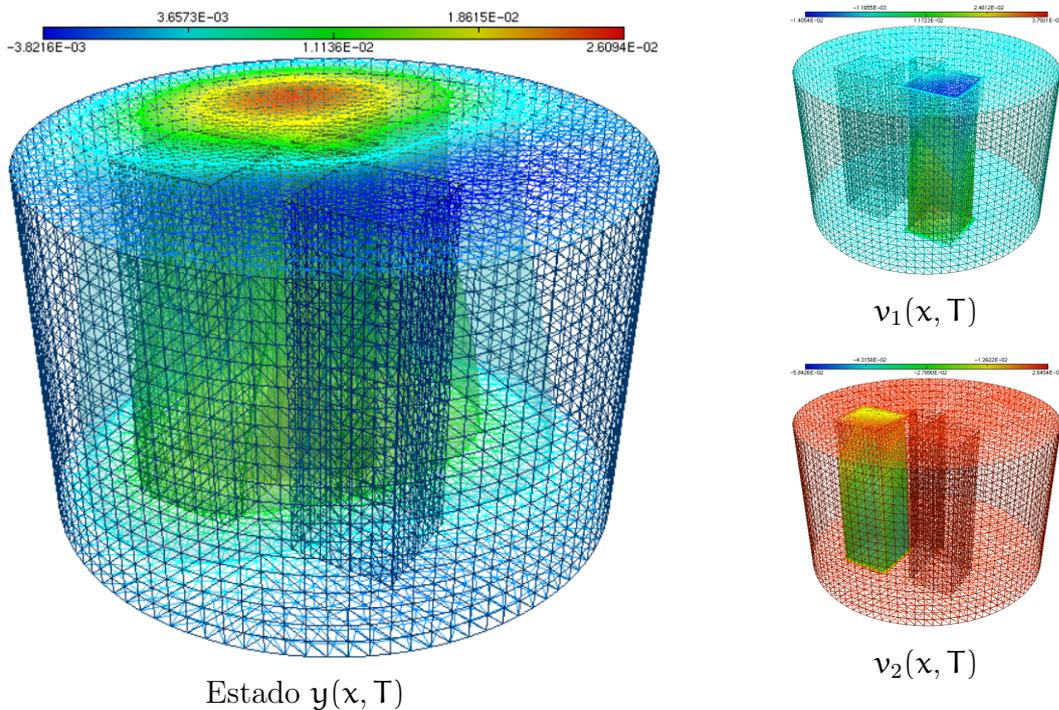


Figura 4.9: Estado e controles computados no tempo final T .

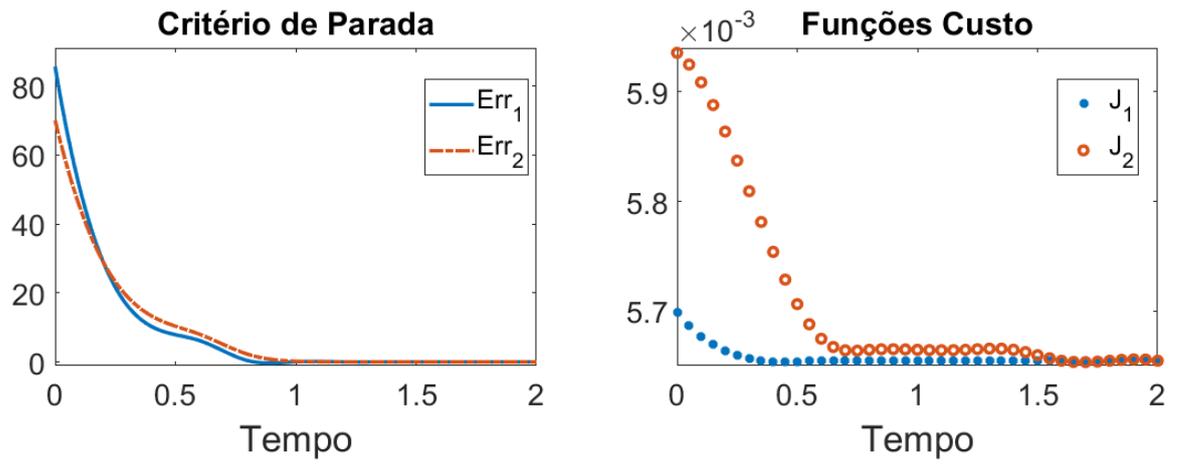


Figura 4.10: Avaliação das funções custo e dos critérios de parada no processo iterativo do caso Nash não-linear evolução do problema.

4.1.4 Experimentos do caso Pareto Não-Linear

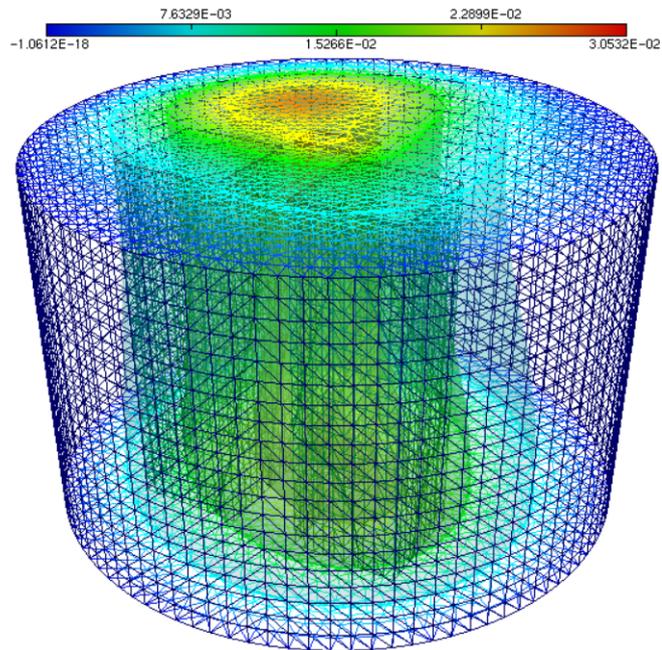


Figura 4.11: Estado $y(x, T)$ computado em $\lambda = 0.5$

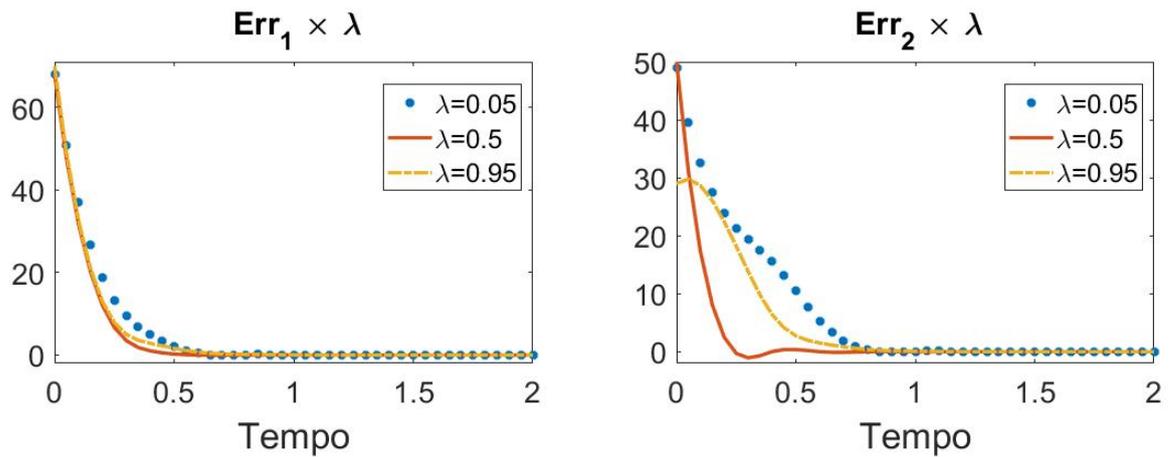


Figura 4.12: Avaliação dos critérios de parada E_1 e E_2 do algoritmo, com $\mu = 5$ fixado. Avaliamos nas simulações alguns valores distintos para λ . Em particular, nos casos em que $\lambda = \{0.05, 0.5, 0.95\}$, observa-se que o processo de convergência do algoritmo ocorre em menor tempo quando λ se aproxima de 0.5, que deve ser a condição de optimalidade do processo para obtenção do controle.

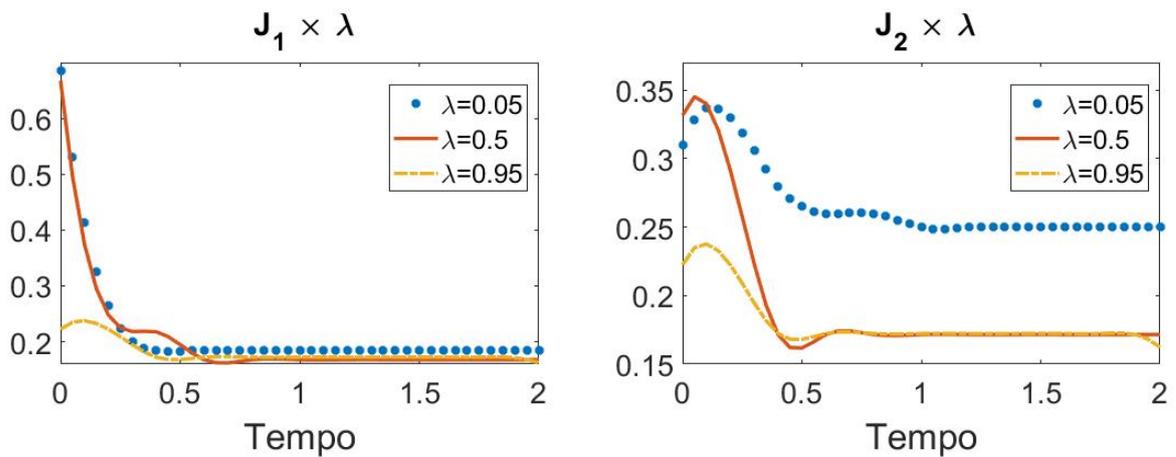


Figura 4.13: Avaliação dos funcionais custo J_1 e J_2 no processo evolutivo do algoritmo na variável temporal. Aqui, fixamos $\mu = 5$ e apresentamos simulações com valores distintos para λ . A condição de equilíbrio ótimo da solução e optimalidade dos funcionais custo ocorre quando λ se aproxima de 0.5 .

4.1.5 E o problema sem controles?

Alguns experimentos abaixo, mostram como se desempenham os funcionais custo, ao comparar o processo de controlar via equilíbrio de Nash, equilíbrio de Pareto, ou simplesmente

não controlar o processo evolutivo da solução. Não controlar o sistema pode ser entendido como avaliar o funcional \mathcal{J}_i na forma:

$$\mathcal{J}_i(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{O}_{i,d} \times (0,T)} |\mathbf{y} - \mathbf{y}_{i,d}|^2 dx dt, \quad i = 1, 2.$$

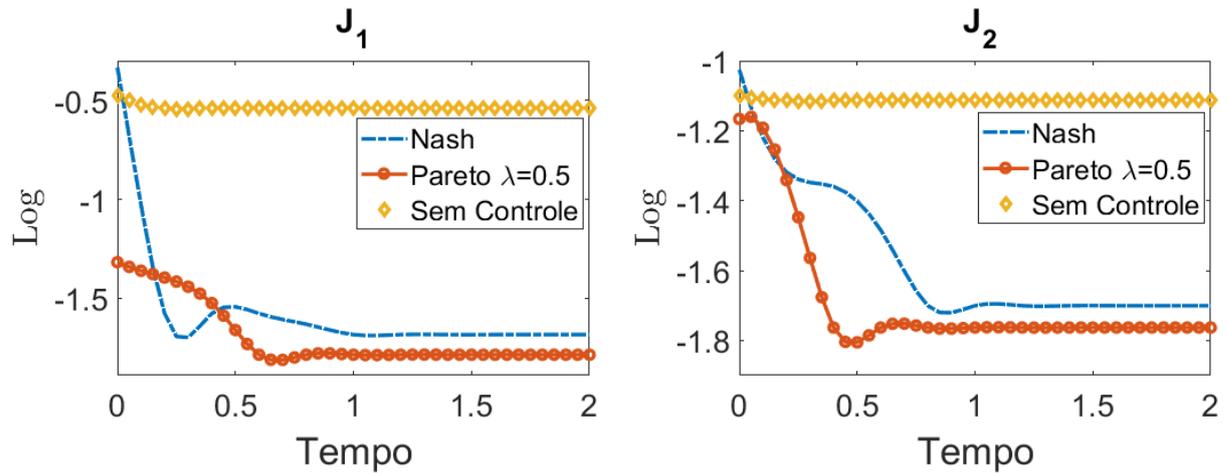


Figura 4.14: Avaliação dos funcionais custo J_1 e J_2 no processo evolutivo dos algoritmos lineares. Aqui, fixamos $\mu = 5$ e apresentamos simulações comparativas para os equilíbrios de Nash, Pareto e não controlar. Para o caso de Pareto, fixamos $\lambda = 0.5$.

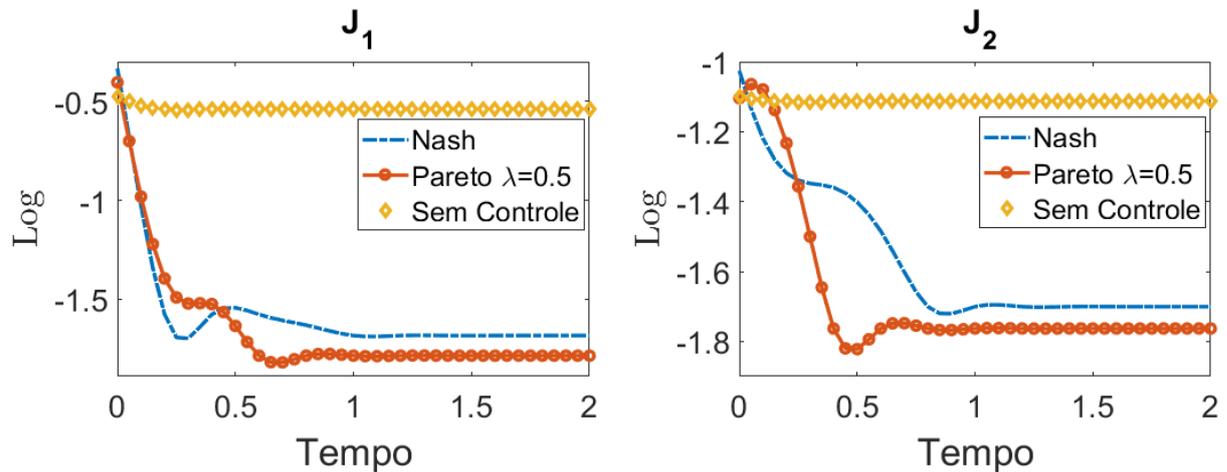


Figura 4.15: Avaliação dos funcionais custo J_1 e J_2 no processo evolutivo dos algoritmos não-lineares. Novamente fixamos $\mu = 5$ e apresentamos as simulações comparativas entre os equilíbrios de Nash, Pareto e não controlar. Para o caso de Pareto, fixamos $\lambda = 0.5$.

Capítulo 5

Apêndice

Lema 4. *Suponha que $F'(\mathbf{y}) \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ e que \mathbf{h} é solução para o sistema (2.53), então existe uma constante $C > 0$ tal que vale a seguinte desigualdade:*

$$\int_{\Omega} |\mathbf{h}_t|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{h}|^2 dx \leq C \iint_{\Omega \times (0,T)} |\mathbf{v}_i|^2 dx dt. \quad (5.1)$$

Para cada $i = 1, 2$. Em particular,

$$\|\mathbf{h}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\mathbf{v}_i\|_{L^2(\mathcal{O}_i \times (0,T))}.$$

Lema 5. *Suponha que $\mathbf{y}, \mathbf{y}_{i,d} \in W^{1,\infty}(\Omega)$ são associados ao sistema (2.24), então são válidos os seguintes resultados*

(i) *A solução forte de (2.24) é de classe*

$$\Phi \in C^0([0, T]; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap C^1([0, T]; H_0^1(\Omega)). \quad (5.2)$$

(ii) *A solução fraca de (2.24) é de classe*

$$\Phi_t \in C^0([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega)). \quad (5.3)$$

(iii) *Se (i) e (ii) são válidas, então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|\Phi_t\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|\Phi\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))} \leq C \|\mathbf{y}\|_{L^2(\Omega)}. \quad (5.4)$$

Lema 6. *Suponha que $F \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$ e $\mathbf{y}_{1,d} \in C^0([0, T]; H_0^1(\mathcal{O}_{i,d})) \cap C^1([0, T], L^2(\mathcal{O}_{i,d}))$. Suponha que $(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e $\mathbf{d} \leq 8$. Então, existe uma constante $C_i > 0$ tal que:*

$$\left| \iint_{\mathcal{O}_i \times (0,T)} \xi \hat{\mathbf{v}}_i dx dt \right| \leq C (1 + \|f\|_{L((\Omega) \times (0,T))}) \|\hat{\mathbf{v}}_i\|_{V_i}. \quad (5.5)$$

Onde ξ e \mathbf{h} satisfaz as condições de (2.53).

Demonstração: Suponha que ξ e h satisfaz o sistema abaixo, a demonstração para o caso $i = 2$ segue de maneira análoga.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \xi_{tt} - \Delta \xi = -F''(\mathbf{y})h\phi - F'(\mathbf{y})\xi + h\mathbf{1}_{\mathcal{O}_i} & \text{em } Q \\ h_{tt} - \Delta h = -F'(\mathbf{y})h + \hat{v}_1\mathbf{1}_{\mathcal{O}_1} & \text{em } Q \\ h = 0, \xi = 0 & \text{em } \Sigma_1 \\ \frac{\partial h}{\partial \eta} = 0, \frac{\partial \xi}{\partial \eta} = 0 & \text{em } \Sigma_2 \\ \xi(\mathbf{x}, T) = \xi_t(\mathbf{x}, T) = 0, h(\mathbf{x}, 0) = 0, h_t(\mathbf{x}, 0) = 0 & \text{em } \Omega \end{array} \right. \quad (5.6)$$

Veja que,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega \times (0, T)} \xi \hat{v}_1 dx dt &= \iint_{\Omega \times (0, T)} (h_{tt} - \Delta h + F'(\mathbf{y})h)\xi dx dt \\ &= \iint_{\Omega \times (0, T)} (\xi_{tt} - \Delta \xi + F'(\mathbf{y})\xi)h dx dt \\ &= \iint_{\Omega \times (0, T)} (F''(\mathbf{y})h\phi + h\mathbf{1}_{\mathcal{O}_1})h dx dt \\ &= \iint_{\Omega \times (0, T)} F''(\mathbf{y})|h|^2\phi dx dt + \iint_{\mathcal{O}_{1,d} \times (0, T)} |h|^2 dx dt \end{aligned}$$

Uma vez que $F'' \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$, existe uma constante $M > 0$ tal que $|F''(s)| \leq M, \forall s$. Além disso, dos lemas (4) e (5), temos que $h \in L^\infty(0, T; L^k)$ onde $k = \frac{dn}{d-2}$ e $\phi \in L^1(0, T; L^s(\Omega))$, se e somente se, $\frac{n}{2} \leq \frac{2n}{n-4}$, logo $n \leq 8$. Assim,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega \times (0, T)} \xi \hat{v}_1 dx dt &= \iint_{\Omega \times (0, T)} F''(\mathbf{y})|h|^2\phi dx dt + \iint_{\mathcal{O}_{1,d} \times (0, T)} |h|^2 dx dt \\ &\leq C \left(\|F''\|_\infty \|h\|_{L^\infty(0, T; L^k(\Omega))}^2 \|\phi\|_{L^1(0, T; L^s(\Omega))} + \|h\|_{L^2(\mathcal{O}_{1,d} \times (0, T))}^2 \right) \\ &\leq C (1 + \|\phi\|_{L^1(0, T; L^s(\Omega))}) \|\hat{v}_1\|_{V_i}^2 \\ &\leq C (1 + \|\mathbf{y}\|_{L^2(\Omega \times (0, T))}) \|\hat{v}_1\|_{V_i}^2 \\ &\leq C (1 + \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega \times (0, T))}) \|\hat{v}_1\|_{V_i}^2, \end{aligned}$$

seguinto assim o resultado. ■

Observação 4. Vale notar que para o caso de Pareto temos a mesma estimativa, a menos é claro, dos parâmetros que dependem de λ . Em particular existe uma $C(\lambda)$, para tal, basta fazer a mesma construção com ξ_i para cada $i = 1, 2$.

Referências Bibliográficas

- [1] A. M. RAMOS, *Nash equilibria strategies and equivalent single-objective optimization problems. The case of linear partial differential equations*, <https://arxiv.org/abs/1908.11858>
- [2] ARARUNA, E.FERNÁNDEZ CARA and M.C. SANTOS, *Stackelberg Nash Exact Controllability for linear and semilinear Parabolic Equations*, ESAIM Control Optimisation and Calculus of Variations 21(3), July (2015).
- [3] ARARUNA, E. FERNÁNDEZ-CARA, S. GUERREIRO and M.C. SANTOS, *New results on the Stackelberg–Nash exact control of linear parabolic equations*, Systems and Control Letters **104**, 78-85 (2017).
- [4] ARARUNA, E. FERNÁNDEZ-CARA, S. GUERREIRO and SILVA, L.C, *Hierarchical control for the wave equation*, J. Optimiz. Theory App **178**(4), 264-288 (2018).
- [5] BOTELHO, G., PEREGRINO, D., TEIXEIRA, E. Fundamentos de Análise Funcional, Rio de Janeiro: SBM, (2015).
- [6] BREZIS, H, *Functional Analysis. Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, NewYork (2011).
- [7] CARVALHO, P.P., *Some numerical results for control of 3D heat equations using Nash equilibrium*, Comp. Appl. Math, **40** 92 (2021).
- [8] CARVALHO, P.P, FERNÁNDEZ-CARA, E. and FERREL, J.B.L, *On the computation of Nash and Pareto equilibria for some bi-objective control problems for the wave equation*, Adv Comput Math, **46** 73 (2020).
- [9] CARVALHO , P.P., FERNÁNDEZ-CARA, E., *On the Computation of Nash and Pareto Equilibria for Some Bi-objective Control Problems*, SeMA J., **61** 49-78 (2013).

- [10] CIARLET, P.H.G, *Introduction to Numerical Linear Algebra and Optimisation*, Cambridge University Press, Cambridge (1989).
- [11] D. BAUSO, *Game theory with engineering applications*, Advances in Design and Control, 30. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2016.
- [12] DÍAZ, J.; LIONS, J.-L., On the approximate controllability of Stackelberg–Nash strategies, in: J.I. Díaz (Ed). *Ocean Circulation and Pollution Control Mathematical and Numerical Investigations*, Springer, 2005.
- [13] EVANS, L. C, *Partial Differential Equations*, v. 19. American Mathematical Society, Providence, RI, (2010).
- [14] FRÉDÉREC HECHT, New development in FreeFem++. *Journal of numerical mathematics*, vol.(20), p.1-14, De Gruyter, 2012.
- [15] GARBOR KASSAY, VICENTIU RĂDULESCU, *Equilibrium Problems and Applications (Mathematics in Science and Engineering) (English Edition)*, 1 Edition (2019).
- [16] GLOWINSKI, R., *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*, Springer, New York, NY, 1984.
- [17] J.F. NASH, *Noncooperative games*, *Ann. Math*, **54** (1951) 286-295.
- [18] LIONS, J.L., Contrôle de Pareto de systèmes distribués, Le cas d'évolution. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* 302(11), 413–417 (1986)
- [19] LIONS, J.L., *Hierarchic Control*, *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.* 104 (1994), no. 4, 295-304.
- [20] LIONS, J.- L., *Quelques Méthodes de Résolutions des Problèmes aux Limites non Linéaires*, Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [21] MEDEIROS, L.A. e MIRANDA, M. M, *Espaços de Sobolev: Iniciação aos problemas elípticos não homogêneos*, UFRJ-IM, Rio de Janeiro, (2000).
- [22] MEDEIROS, L.A. e MIRANDA, M. M, *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*, *Textos e Métodos Matemáticos*, vol. 25, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (1989).

- [23] PARETO, V. *Cours d'économie politique*, Rouge, Laussane, Switzerland (1896).
- [24] RAMOS A. M, GLOWINSKI, R and J. PERIAUX, *Nash equilibria for the multiobjective control of linear partial partial differential equations*, J. Optim.Theory Appl (2002) 457 - 498.
- [25] STACKELBERG, H. von., *Marktform un Gleichgewicht*, Springer, Berlin, Germany, 1934.