Universidade Federal do Piauí - UFPI
Centro de Ciências da Natureza - CCN
Programa de Pós-Graduação em Matemática

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	NOTA

Exame de Acesso ao Mestrado Acadêmico em Matemática
Teresina 03/02/2015

NOME:______________________________ INSCRIÇÃO: ____________

1. Marque V (Verdadeiro) ou F (Falso), justificando brevemente sua resposta:
   (a) ( ) Diz-se que $\alpha \in \mathbb{R}$ é algébrico se existe um polinômio $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com coeficientes inteiros, tal que $p(\alpha) = 0$. Um número real $\alpha \in \mathbb{R}$ é algébrico se, somente se, $\alpha \in \mathbb{Q}$;
   (b) ( ) Suponha que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz $|f(x)| \leq |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Então f é contínua em $x = 0$;
   (c) ( ) Suponha que as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazem: g é contínua em $x = 0$, $g(0) = 0$ e $|f(x)| \leq |g(x)|$. Então f é contínua em $x = 0$;
   (d) ( ) Se $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ é contínua e $\int_0^x f(x)dx = \int_x^1 f(x)dx$ para todo $x \in [0, 1]$, então $f(x) = 0$ para todo $x \in [0, 1]$.
2. Sejam $C_1, C_2, \ldots,$ conjuntos enumeráveis. Mostre que $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ também é enumerável.
3. Encontre um exemplo de uma sequência real $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que o conjunto dos seus pontos de acumulação contenha todos os números naturais.
4. Mostre que se $\sum a_n$, com $a_n \geq 0$, converge, então a série $\sum \frac{a_n^2}{1+a_n^2}$ converge. Se a primeira divergir, mostre exemplificando que a segunda pode divergir ou convergir.
5. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função derivável em todos os pontos $x \in [a, b]$. Se $f'(a) < \lambda < f'(b)$, mostre que existe um $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \lambda$. **Sugestão:** Considere a função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \lambda \cdot x - f(x)$.
6. Considere $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável. Suponha que exista um ponto $c \in (a, b)$ de modo que a desigualdade estrita $(f'(c))^2 - 2f(c)f''(\xi) < 0$ seja verificada, para todo $\xi \in (a, b)$. Prove, neste caso, que a equação $f(x) = 0$ não possui solução no intervalo (a, b).
7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 que satisfaz a equação diferencial $f'' + f' - f = 0$ para todo $x \in [0, L]$, onde L é um número real positivo. Se $f(0) = f(L) = 0$, mostre que $f(x) = 0$ para todo $x \in [0, L]$.
8. Se $x \in \mathbb{R}$, definimos $[x]$ como o maior inteiro $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq x$.
   (a) Determine o conjunto dos pontos de descontinuidade da função $f(x) = \left[\frac{1}{x}\right]$;
   (b) Dado $\varepsilon > 0$, mostre que $f : [\varepsilon, 1] \to \mathbb{R}$ é integrável e calcule
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{1} f(x)dx.$$

9. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$, e seja $M_n = \left(\int_a^b f^n(x)dx\right)^{\frac{1}{n}}$ onde $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$.

10. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:

    (a) Existe uma constante $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, para todo $x \in \mathbb{R}$;

    (b) Existe uma constante $C > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

    Seja $x_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma sequência de soluções da equação diferencial $x' = f(x)$ $(*)$. Se $(x_n(0))$ converge, mostre que existe uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) que converge uniformemente para uma solução de $(*)$. Note que x_n é de classe C^1. **Sugestão:** Observe que $x_n' = f(x_n)$, integre a igualdade de 0 a t e em seguida use o Teorema Fundamental do Cálculo.

Boa Sorte!