Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Soluções fracas em $\mathbb{L}^2$ para uma família de equações de Schrödinger quasi-lineares

Ailton Campos do Nascimento

Teresina - 2013

Ailton Campos do Nascimento

Dissertação de Mestrado:

Soluções fracas em L^2 para uma familia de equações de Schrödinger quasi-lineares

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Roger Peres de Moura

Teresina - 2013

Nascimento, A. C.

Soluções fracas em L^2 para uma familia de equações de Schrödinger quasi-lineares.

Ailton Campos do Nascimento – Teresina: 2013.

Orientador: Prof. Dr. Roger Peres de Moura.

1. Análise

2. Equações Diferenciais Parciais

CDD 516.36

Ao meu Avô Geraldo Ferreira Campos (Paizim)
(In memoriam)
À minha querida mãe Dona Raimunda de Jesus Campos.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, razão do meu sonhar, motivo e motivação dos meus passos, consolo seguro na hora da dor, amigo sempre fiel nesta longa e árdua caminhada.

Agradeço à minha familia, ao meu pai Claudio Otaviano pelos conselhos, pelo carinho, pelo esforço em sempre estar por perto, mesmo diante de todas as dificuldades; ao meu querido irmão Airton Campos, meu parceiro amigo fiel desde sempre, meu irmão quase gêmeo a começar pelo nome, obrigado por tudo, te amo, meu exemplo de vida, desde nossos tempos de infância. E em especial, agradeço à minha querida mãe Dona Raimunda de Jesus, que com seu carinho e zelo, soube me amar e me motivar a perseguir meus sonhos, obrigado querida mãe pelo seu amor e por sua compreensão.

Agradeço aos meus avós paternos Dona Cirila Rosa (Mãe de Deus), Seu Dionisio (Pai Véi) e aos meus avós maternos Dona Teresa de Jesus (Mãezinha), Seu Geraldo Ferreira (Paizim) *in memorian*, que foram força e sustentáculo em minha formação humana, moral e religiosa; sem vocês nada disso teria sido possivel. Obrigado pelos conselhos, pelo carinho, pelo cuidado, obrigado por tudo, amo muito vocês.

Aos meus amigos e irmãos conquistados e presenteados por Deus, como dons inexauríveis de alegria e amor; em especial ao Paulo de Tarso (nem sei se ele ainda lembra de mim), Alexandre Ramires (irmão de longas datas), Etevan Ribeiro (amigo irmão, companheiro e vizinho), Edson Silva e Fernando (Fernandim) meus chegados das bombinhas de 10 rsrsrs. Aqui registro meus sinceros agradecimentos ao Padre Pedro Balzi, homem de Deus que me mostrou Deus e pela sua vida e obra, foi parte essencial em minha formação cultural, moral e religiosa. Aos irmãos do grupo de Oração Novo Tempo, em especial à Hedina Oliveira (minha sempre coordenadora), Simone Moraes (Dra Moraes), Amsterdam Oliveira (Grande Terdam), Gislane Lima (Minha irmãnzinha de partilha e de vida), Margarida Pimentel (Uma flor de Deus amiga para sempre), Gilderlane (Deh), Isis Nayne, Luciana Modesto, Décio Moura, Tia Graça, Tia Tetê, meu mano Samuel Estevam (Samu

U2), brother que tenho muito carinho e consideração, ao Saulo Herminio (grande mano Hermininho), irmão pra todas as horas doido que nem eu, mas uma pessoa muito cheia de Deus que me acompanha sempre, seja fisicamente, seja em suas orações e em seu carinho, bem ao estilo Herminio; e a todos que fizeram dos meus dias, momentos tão cheios de vida e de luz, amo vocês. Aos amigos Marcelo Cavalcante (Grande W), Kaê Brito, Jhones Jhones (The Michael Jackson), Adilio Cavalcante, e a todos meus manos da Capelinha, a aos meus amigos da Piçarra, Genuino (Grande mano Genu), Antonio de Pádua, Marlon (Marlonzito), Tayciane (Amiga Tay), Aline Barreto (Alinixinha), um abraço forte obrigado pelo carinho e amizade. Aos amigos Márcio Roberto (Ajhonhjô - Que legal meu - Coyote - Oz Piradinhos), amigo irmão que chegou de tão longe pra ficar em meu coração, ao grande Dr. Marcos Paulo, homem de fibra e de uma cultura incomparável, obrigado por tudo, aos meus grandes irmãos do Setor Norte, rsrsrs, conquistados nesses últimos 2 anos, ou melhor eu fui conquistado por eles, Fabiano Mesquista (Grande Irmão Biano), Shayene (Amiga Shay), Aline, Thayná Mendes (Minha pequena), Amanda Lima (Laranjinha), aos amigos e irmãos do OCPJ (Santa Joana D'arc), Estevam Alexandrino (Grande irmão), Inágyla Mags (linda e querida), Catharine Lorrany (Srta Quaresma), Mara Luana, Aniely Viana, Samara Lopes, Gabriela Regina (Linda Amiga), Deyse Joyce (The Fighter), Vitória Lopes (Sempre perto), Luciane Ferreira (cheia de idéias), Idalice Neta (querida querida) e a todos, trago cada um em meu coração.

Agradeço e dedico essa vitória também aos meus amigos do setor Sul, em especial, Ana Virginia Alves (Butsy), Katarine Alves (minha parceira de comida chinesa), Rayanna Cássia (amiguinha), Barhbara Garcez (inteligente), Isaac Garcez. À querida Rafaela Costa, minha irmanzinha do coração, companheira e amiga fiel e inseparável. À Angélica Veloso, muito especial pra mim, obrigado por ser presente e pelo presente da tua presença. Às minhas queridas amigas Andressa Rebeca, Érika Karnib, que encontrei num encontro e neste encontro nos encontramos para nos tornarmos especiais um ao outro. Neste contexto do encontro, registro meus agradecimentos e uma dedicatória especial à querida Bárbara Lima (minha senhorita), cujo encontro me marcou, cujo carinho me é muito caro, te dedico essa vitória na alegria do reencontro. Em geral, a todos meus amigos da RCC e de todos os encontros que participei, meu muito obrigado pela amizade e pelas orações.

Agradeço aos meninos da Rua, amigos com quem compartilhei momentos dos mais variados tipos, em especial ao Francisco, Júnior, Alexandre, Vivio Clécio (Safan), Wellington (Grande Helton), Livio Cleyton (*In memoriam*), este último com quem dediquei, mesmo ainda na minha adolescência, grande parte dos meus sonhos acadêmicos, e que foi pra mim exemplo de dedicação, inteligência e esforço. Fica com Deus irmão!

Agradeço aos meus irmãos de MUR, Gleice Orasmo (A Gleide), Leila Maria (minha coordenadora), Antônia Laíres, Gislayllson Dias, Isabel (Belinha), Cássia, Livio, Germana Paiva, Gustavo, Jackson Henrique (JackSoul), Flávia Soares, Flaviane Bruna, Vilmara Silva, Larissa Teixeira, Ricardo Régis, e todos do MUR Piauí, obrigado galera, vocês me fazem feliz, pelos encontros, partilhas, GOU'S na Sala 250 e nas demais, agradeço de coração.

Agradeço aos meus amigos e colegas dos verões do IMPA, Alan Quipe Quelme, Santos Diogo, Matheus Quipe Quelme, Rafael (mineiro), Edileno (leninho), Davi Lima, Wagner (perigoso Vagnata), Gleison (grande Gleison), Raphael (Vascaíno), e a todos que conheci nesses meses tão intensos de alegria e aprendizagem.

Agradeço aos meus professores do departamento de Matemática da UFPI, que me ajudaram diretamente na formação matemática, sendo verdadeiros mestres; a saber, aos professores Gilvan Lima (Pai Gilvan), Raimundo Lira, Jurandir de Oliveira, Marcos Vinício (Professor Marquim), Marcondes Clark, Newton Santos, Barnabé Pessoa (obrigado pelo incentivo e motivação), ao professor Paulo Alexandre, que com muita solicitude me ajudou diretamente a resolver todos os problemas burocráticos e não burocráticos do mestrado, ao professor João Xavier que muito me incentivou e me auxiliou nesta longa caminhada, meu muito obrigado.

Agradeço ao meu orientador Roger Peres, que desde a época do PENSE decidiu me orientar e me ajudar a alcançar meus objetivos acadêmicos. Ao professor Adán Corcho, que aceitou prontamente o convite em participar da minha banca, e que desde que me conheceu no verão do IMPA, sempre me motivou e me incentivou. Ao professor Eduardo Teixeira que também aceitou o convite em participar da banca, meu muito obrigado.

Agradeço também aos meus amigos e colegas de graduação: Ao grande mano Edvalter Sena (Valtim), Valdir Ferreira (Doutor Ferreira), Ricardo Barros (que era mudo, mas agora fala), Kelson Vieira (grande doutor Kelson), Fernanda, Edvaldo Elias, Kim Carlos, Edilson (professor do ensino médio e Colega de curso), Ramon Soares (cientista, poeta, ator, músico... e matemático), Italo Dowell (grande Dove destruidor), e aos meus amigos de Mestrado, os grandes irmãos Israel Evangelista, Alex Sandro (Terrestre), Valdinês Leite (grande Váldines), Bernardo Cardoso de Araújo (grande Bernard), Mykael de Araújo Cardoso (grande Myke), eles são parentes, tá! Diego Prudêncio (the Prudence), Renata Batista (amiga Tinha), Felipe Marreiros (grande Fêlip), Franciane Brito, Samara Costa (grande Costa), Vitaliano Amaral, Gilson Silva (grande irmão Gilson), Leonardo Araújo (parceiro Léo), Emerson dos Santos (grande mano baiano). Com vocês tive anos de muita alegria e descontração; obrigado a todos. Sucesso sempre!

Por fim, não poderia deixar de agradeçer à CAPES (e a todos que pagam impostos) pelo apoio financeiro. Sem a bolsa, minha jornada seria muito, muito mais árdua.

"A simplificação de qualquer coisa é sempre sensacional".

G.K. Chesterton

Resumo

Neste trabalho estabelecemos a existência global (no tempo) de soluções fracas em L^2 para uma familia de equações de Schrödinger quase lineares unidimensionais. O método, desenvolvido por D. Rial [23] com base nos trabalhos de T. Kato para o estudo da equação KdV, é dividido nas seguintes etapas: primeiro mostra-se que o problema regularizado por um termo dissipativo linear é localmente bem posto, mas com o tempo de existência dependendo de um parâmetro $\epsilon > 0$ que acompanha (multiplica) o termo dissipativo. Então, usando um efeito suavizante observado na solução do problema, estende-se a solução a $\mathbb{R}_+$ no tempo. No passo final faz-se ϵ (e com ele o termo dissipativo linear) tender para zero, obtendo-se uma solução fraca para a equação original.

Abstract

In this paper we establish the existence of weak solutions in L^2 for a family of quasi-linear one-dimensional Schrödinger equations. The method, developed by D. Rial [23], based on the work of T. Kato for the study of the KdV equation, is divided into the following steps: first it is shown that the problem regularized by a dissipative term is locally well-posed, but with time of existence depending on a $\epsilon > 0$ that accompanies (multiply) the dissipative term. Then, using a smoothing effect observed in the solution of the problem, it extends the solution to $\mathbb{R}_+$. In the final step it is ϵ tends to zero (and with it the linear dissipative term) obtaining a weak solution to the original equation.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O ponto principal deste trabalho, que tem como base o artigo de Diego F. Rial [23], é estabelecermos a existencia de soluções (fracas) em L^2 para o problema

$$\begin{cases} \partial_t u = i\partial_x^2 u + \partial_x(|u|^2 u) + \lambda\partial_x(\mathcal{H}(|u|^2)u), (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $u = u(x,t) \in \mathbb{C}$, $\lambda \leqslant 0$ e $\mathcal{H}$ é a transformada de Hilbert definida por

$$(\mathcal{H}f)(x) = \frac{1}{\pi} p.v \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y} dy. \tag{1.2}$$

A equação (1.1) é um modelo de propagação de ondas de Alfvén circularmente polarizadas em um plasma, quando a direção de propagação é quase paralela ao campo magnético exterior [24]. A função complexa u representa a componente do campo magnético transversal à velocidade de Alfvén. O termo não local $\lambda\partial_x(\mathcal{H}(|u|^2)u)$ representa o efeito dissipativo de partículas ressonantes sobre a modulação de onda. O coeficiente λ depende da distribuição de velocidades das particulas. Se a distribuição de velocidades é decrescente como função da componente paralela da velocidade de Alfvén, então $\lambda < 0$.

1.0.1 A equação de Schrödinger com derivadas (caso $\lambda = 0$)

O problema (1.1) com $\lambda = 0$ tem sido estudado por vários autores. Os primeiros a estudarem este problema foram M. Tsutsumi e I. Fukida (em 1980) [27], onde os autores provaram, via regularização parabólica, boa colocação global no sentido fraco em $H^1(\mathbb{R})$ com restrição sobre a norma do dado inicial. Os mesmos autores também provaram existência de soluções locais em $H^s(\Pi)$, $1 \leqslant s < 2$, onde Π é o toro unitário unidimensional.

No ano seguinte, estes mesmos autores em [28] mostraram boa colocação global em $H^2(\mathbb{R})$, com restrição sobre a norma H^1 do dado inicial. Além disso, no mesmo trabalho os mesmos mostraram a dependência contínua dos dados iniciais e apresentaram algumas leis de conservação para o problema.

N. Hayashi (em 1992) [12] apresentou um método para obter condições suficientes para a existência de soluções globais para o problema, com não linearidade de tipo ”focusing”, mediante a análise das soluções ”ground state”dessas equações.

Usando o método de restrição na norma de Fourier (método de Bourgain) e uma transformada gauge, H. Takaoka (em 1999) [25] provou a boa colocação local para (1.1) em $H^s(\mathbb{R}),\ s \geqslant 1/2$.

Posteriormente, fazendo o refinamento de um método introduzido por J. Bourgain, H. Takaoka (em 2001) [26] provou que (1.1) é globalmente bem posto em $H^s(\mathbb{R})$ para $\frac{32}{33} < s \leqslant 1$ com restrição sobre a norma L^2 do dado inicial.

Ainda em 2001, em [5] Coliander/Keel/Staffilani/Takaoka/Tao provaram a boa colocação global para o mesmo problema em $H^s(\mathbb{R}),\ s > 2/3$, usando o chamado ”I-método,”com restrição sobre a norma L^2 do dado inicial.

Um ano depois, por meio de um refinamento do ”I-método”, em [6] esses mesmos autores mostraram a boa colocação global em $H^s(\mathbb{R}),\ s > 1/2$ com restrição sobre a norma L^2 do dado inicial.

1.0.2 A equação de Schrödinger com derivadas (caso $\lambda \neq 0$)

Já no caso $\lambda \neq 0$ pouco se tem avançado nesse sentido. Além deste trabalho sobre soluções fracas em L^2, para o caso $\lambda < 0$, D. Rial provou boa colocação local para (1.1) com dados iniciais em $H^s(\mathbb{R}),\ s > 3/2$, usando teoria de Kato.

Por meio de uma transformada gauge e estimativas de efeito regularizante da equação de Schrödinger linear, Moura/Pastor [21] provaram que (1.1) é localmente bem posto em $H^s(\mathbb{R}),\ s > 1/2$ com dado inicial pequeno. Para o caso $\lambda > 0$, nada foi feito até o momento.

Sobre a má colocação, Biagioni/Linares em [3] provaram que (1.1) com $\lambda = 0$ é mal posto em $H^s(\mathbb{R}),\ s < \frac{1}{2}$, no sentido de que a aplicação dado-solução não é uniformemente contínua, para isso eles usam ondas solitárias. É importante observar que, quando $\lambda \neq 0$ Moura/Pastor provaram que a equação não possui ondas solitárias, por isso o método de

Biagioni/Linares não se aplica para provar a má colocação.

Alternativamente ao método de Biagioni/Linares, Moura/Pastor mostraram a má colocação no sentido de que a aplicação dado inicial-fluxo não é de classe C^∞ se os dados iniciais estão em $H^s(\mathbb{R})$, $s < \frac{1}{2}$. Portanto, não é possivel provar a boa colocação local para o problema com dados iniciais em $H^s(\mathbb{R})$, $s < \frac{1}{2}$, usando o teorema do ponto fixo de Banach.

Vale ressaltar que para o caso $\lambda > 0$, não faz sentido estudar o problema sobre o toro unitário unidimensional, pois a transformada de Hilbert é um operador definido somente em toda a reta real.

1.0.3 O problema estudado

Suponhamos que a função $u = u(x,t)$ suave satisfaça (1.1). Multiplicando a equação por $\overline{\psi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$, integrando em x e usando a fórmula de integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle \partial_t u, \psi \rangle = \mathrm{Re} \int \partial_t u \overline{\psi} dx &= \mathrm{Re} \left(i \int \partial_x^2 u \overline{\psi} dx + \int \partial_x (F_\lambda(u)) \overline{\psi} dx \right) \\
&= \mathrm{Re} \left(- \int u \overline{i \partial_x^2 \psi} dx - \int F_\lambda(u) \overline{\partial_x \psi} dx \right) \\
&= -\langle u, i\partial_x^2 \psi \rangle - \langle F_\lambda(u), \partial_x \psi \rangle, \qquad (1.3)
\end{aligned}$$

onde $F_\lambda(u) = |u|^2 u + \lambda \mathcal{H}(|u|^2) u$. Podemos escrever o lado esquerdo da forma

$$\langle \partial_t u, \psi \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle u, \psi \rangle - \langle u, \partial_t \psi \rangle. \qquad (1.4)$$

Substituindo (1.4) no lado esquerdo de (1.3) e integrando em t obtemos

$$\int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \langle u, \psi \rangle dt - \int_0^t \langle u, \partial_t \psi \rangle dt = -\int_0^t \langle u, i\partial_x^2 \psi \rangle dt - \int_0^t \langle F_\lambda(u), \partial_x \psi \rangle dt,$$

donde segue que

$$\begin{aligned}
\langle u(t), \psi(t) \rangle = \langle u_0, \psi(0) \rangle + \int_0^t \Big[&\langle u(\tau), \partial_t \psi(\tau) \rangle - \langle u(\tau), i\partial_x^2 \psi(\tau) \rangle \qquad (1.5) \\
&- \langle F_\lambda(u(\tau)), \partial_x \psi(\tau) \rangle \Big] d\tau.
\end{aligned}$$

Diremos então que a função $u \in C_w(\mathbb{R}_+, L^2) \cap L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, L^6)$ é uma solução fraca de (1.1), se para qualquer ψ no espaço das distribuições $\mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ a fórmula (1.5) é verificada. Veremos mais tarde que se $u \in L^6$, então $F_\lambda(u) \in L^2$ e portanto o lado direito de (1.5) está bem definido.

Enunciamos abaixo nosso principal resultado.

Teorema 1. *Seja* $u_0 \in L^2$. *Então existe* $u \in C_w(\mathbb{R}_+, L^2) \cap L^q(\mathbb{R}_+, L^p)$ *com* $2 \leqslant p < \infty$ *e* $\frac{2}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$ *solução fraca de* (1.1), *que verifica*

$$\lim_{t \to 0} ||u(t)||_{L^2} = ||u_0||_{L^2}, \tag{1.6}$$

$$||u||_{L^q(\mathbb{R}_+, L^p)} \leqslant C(\lambda, p)||u_0||_{L^2}, \tag{1.7}$$

$$||\omega u||_{L^2_T H^{1/4}_x} \leqslant C(\lambda, \omega, ||u_0||_{L^2}, T), \tag{1.8}$$

onde $\omega \in H^\infty(\mathbb{R})$.

Para provar o teorema 1 consideramos o problema (1.1) perturbado por um termo linear dissipativo, a saber:

$$\begin{cases} \partial_t u = i\partial_x^2 u + \partial_x(F_\lambda(u)) - \epsilon \partial_x^{12} u, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x) \; x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1.9}$$

O método, desenvolvido por D. Rial [23] com base no trabalho de T. Kato [15] para o estudo da equação de korteweg-de Vries, consiste no seguinte: mostra-se em primeiro lugar que o problema regularizado é localmente bem posto, mas com o tempo de existencia dependendo do parâmetro ϵ. Então, usando um efeito suavizante observado na solução de (1.1), estende-se a solução a $\mathbb{R}_+$. No passo final faz-se ir para zero o termo dissipativo linear, obtendo-se uma solução fraca de (1.1).

O trabalho está distribuido da seguinte forma:

No capítulo 1, introduzimos o problema (1.1) e o método usado para obtermos a solução fraca do problema em questão, tendo como base o artigo [23] de D. Rial.

No capítulo 2, apresentamos um conjunto de resultados clássicos de análise, a teoria básica de distribuições, a transformada de Fourier e suas propriedades básicas, a transformada de Hilbert e suas principais propriedades, e os espaços de Sobolev de tipo L^2. No final deste capítulo apresentamos alguns resultados básicos de espaços reflexivos e convergência fraca de operadores e estudamos as propriedades do semigrupo $\cup_\epsilon$, obtido a partir da solução do problema linear regularizado pelo termo dissipativo $-\epsilon\partial_x^{12}u$. Também estudamos as propriedades da não linearidade $F_\lambda = |u|^2u + \lambda\mathcal{H}(|u|^2)u$ e os lemas de regularidade e compacidade que são essênciais para o desenvolvimento e a demonstração do Teorema 1, que é o resultado central do trabalho.

O capítulo 3 concentra os resultados principais do trabalho: Na primeira seção provamos que o problema regularizado (1.9) é globalmente bem posto e damos estimativas espaço-tempo da solução (indepedente de ϵ); na segunda seção estudamos as propriedades suavizantes da equação (1.1) que serão usadas para provar o Teorema 1; por fim, demonstraremos o teorema principal fazendo o uso das ferramentas apresentadas durante todo o texto, usando como principal ferramenta os teoremas de compacidade de Aubin-Lions (ver [20]).

Notação:

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $R(f)$ representa a parte real, e, $Im(f)$ a imaginária de f.

$L^p(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mensurável tal que $||f||_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p dx\right)^{1/p}\}$.

$L^p_{loc}(\mathbb{R}, X) = \{f : \mathbb{R} \times K \to \mathbb{C}$ mensurável ; $||f||_{L^p_t(\mathbb{R},X)} = \left(\int_K ||f(.,t)||^p_X dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \}$ para todo compacto $K \in \mathbb{R}$.

$S(\mathbb{R})$ representa o espaço de Schwartz em $\mathbb{R}$.

$S'(\mathbb{R})$ é o espaço das distribuições temperadas em $\mathbb{R}$.

$L^p_t(I, L^q_x)$ é o espaço das funções mensuráveis $f : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{C}$, tais que

$$||f||_{L^p_t(I,L^q_x)} = \left(\int_I ||f(.,t)||^p_{L^q_x} dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

$C^k(\Omega, X)$ é espaço das aplicações de Ω em X, com k derivadas continuas.

$C^k_w(\Omega, X)$ é o espaço das aplicações de Ω em X, com k derivadas fracamente continuas.

$C^k_b(\Omega, X)$ representa o espaço das aplicações de Ω em X, com k derivadas continuas e limitadas.

$B(X, Y)$ é o espaço dos operadores lineares limitados de X em Y.

$J^s(\,\cdot\,) = \left((1 + |\xi|^2)^{s/2}\widehat{\cdot}\right)^{\vee}$ representará o potencial de Bessel de ordem $-s$.

$D^s(\,\cdot\,) = (|\xi|^s\widehat{\cdot})^{\vee}$ denota o potencial de Riesz de ordem $-s$.

$(f, g) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g}(x)dx$ é o produto interno de L^2.

$< f, g >= Re \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g}(x)dx$ é o produto interno real de L^2.

$[A, B] = AB - BA$ é o comutador dos operadores A e B.

$H^s(\mathbb{R})$ é o espaço de Sobolev de ordem s em $\mathbb{R}$. E, $H^\infty(\mathbb{R}) = \displaystyle\bigcap_{s\in\mathbb{R}} H^s$.

$x_n \xrightarrow{X} x$ significa que x_n converge para x no espaço X.

$x_n \overset{X}{\rightharpoonup} x$ significa que x_n converge fracamente para x em X.

Capítulo 2

Resultados Preliminares

Neste capítulo abordaremos as definições básicas e os resultados de regularidade que serão utilizados para a obtenção do resultado principal.

2.1 Fatos Básicos

Proposição 1 (Regra de Leibniz). *Se* $f, g \in C^{|\alpha|}(\Omega, \mathbb{C})$*, então*

$$\partial^{\alpha}(fg) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \big(\partial^{\beta} f\big)\big(\partial^{\alpha-\beta} g\big), \tag{2.1}$$

onde $\alpha \leqslant \beta$ *significa que* $\alpha_j \leqslant \beta_j, \; \forall \;\; j = 1, 2, 3, ..., n$ *e* $\alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, ..., \alpha_n - \beta_n)$.

Demonstração. Segue naturalmente por um argumento de indução. □

Lema 1. *Sejam* f, g *e* h *funções suaves, então*

$$\langle fg, h\rangle = \langle g, \overline{f}h\rangle; \tag{2.2}$$

$$\langle ifg, g\rangle = 0, \quad \text{se } f \text{ toma valores reais}; \tag{2.3}$$

$$\langle f, g\rangle = \langle f, \mathcal{R}(g)\rangle \quad \text{se } f \text{ toma valores reais}; \tag{2.4}$$

$$\langle f\ \partial_x g, g\rangle = -\frac{1}{2}\langle \partial_x f\ g, g\rangle \quad \text{se } f \text{ toma valores reais}; \tag{2.5}$$

$$\langle f\ \partial_x g, \overline{g}\rangle = -\frac{1}{2}\langle \partial_x f\ g, \overline{g}\rangle. \tag{2.6}$$

Demonstração. As afirmações (2.2),(2.3) e (2.4) são consequências da definição de produto interno real. Supondo que g e $\partial_x g$ convergem a zero suficientemente rápido quando $|x| \to \infty$, a formula de integração por partes nos permite afirmar que

$$\int_{\mathbb{R}} f\partial_x g\bar{v}dx = -\int_{\mathbb{R}} (\partial_x f)g\bar{g}dx - \int_{\mathbb{R}} fg\partial_x \bar{g}dx. \tag{2.7}$$

Se f toma valores reais, de (2.7) segue que

$$2\int_{\mathbb{R}} f\mathcal{R}e(\partial_x g\bar{g})dx = -\int_{\mathbb{R}} (\partial_x fg)\bar{g}dx \tag{2.8}$$

e portanto vale (2.5). De maneira análoga prova-se (2.6). □

Teorema 2 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam* $\{p_j\}_{j=1}^N \subset [1, \infty]$ *e* $r \geqslant 1$ *tais que* $\frac{1}{r} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{p_j}$, *então*

$$|| \prod_{j=1}^{N} u_j ||_{L^r} \leqslant \sum_{j=1}^{N} ||u_j||_{L^{p_j}}, \quad u_j \in L^{p_j}(\mathbb{R}). \tag{2.9}$$

Demonstração. Veja o Corolário 2.6 de [1]. □

Teorema 3 (Des. de Minkowski)**.** *Se* $1 \leqslant p < \infty$ *e* $f, g \in L^p$, *então*

$$||f + g||_{L^p} \leqslant ||f||_p + ||g||_{L^p}. \tag{2.10}$$

Demonstração. Ver o Teorema 2.8 de [1]. □

Proposição 2. *Se* $0 < p < q < r \leqslant \infty$, *então* $L^p \cap L^r \subset L^q$ *e*

$$||f||_{L^q} \leqslant ||f||_{L^p}^{\theta} ||f||_{L^r}^{1-\theta}, \tag{2.11}$$

para $f \in L^p \cap L^r$, *onde* $\theta \in (0, 1)$ *satistaz a relação:* $1/q = \theta/p + (1 - \theta)/r$, *i.e.,* $\theta = \dfrac{1/q - 1/r}{1/p - 1/r}$.

Demonstração. Ver a referência [1], Teorema 2.11. □

Teorema 4 (Riesz-Thorin)**.** *Sejam* (X, Σ_X, μ) *e* (Y, Σ_Y, ν) *espaços de medida e* p_0, p_1, $q_0, q_1 \in [1, \infty]$ *(com* ν *σ-finita se* $q_0 = q_1 = \infty$*). E, para* $0 < t < 1$, *sejam* p_t *e* q_t *tais que*

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}, \quad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}.$$

Se $T : L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu) \to L^{q_0}(\nu) + L^{q_1}(\nu)$ *é um operador linear tal que,*

$$\|Tf\|_{L^{q_0}} \leqslant M_0\|f\|_{L^{p_0}}, \quad \textit{para} \quad f \in L^{p_0}(\mu) \quad e \quad \|Tf\|_{L^{q_1}} \leqslant M_1\|f\|_{L^{p_1}}, \quad \textit{para} \quad f \in L^{p_1}(\mu),$$

então

$$\|Tf\|_{L^{q_t}} \leqslant M_0^{1-t}M_1^{t}\|f\|_{L^{p_t}}, \quad \forall f \in L^{p_t}(\mu) \ e \ \ 0 < t < 1;$$

ou seja, designando por M_t *a norma de* $T : L^{p_t} \to L^{q_t}$ *temos:* $M_t \leqslant M_0^{1-t}M_1^{t}$.

Demonstração. Ver o Teorema 6.27 de [9]. □

Proposição 3 (Desigualdade de Young). *Seja* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *e* $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. *Então,* $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *com*

$$\|f * g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^1}. \tag{2.12}$$

Demonstração. Ver o Teorema 8.7 de [9]. □

Teorema 5 (Hardy-Littlewood-Sobolev). *Seja* $0 < \alpha < 1$, $1 \leqslant p < q < \infty$, *com* $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + (1 - \alpha)$. *Defina o potencial de Riesz de* f *por*

$$I_\alpha f(x) = C_\alpha \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{|x-t|^\alpha} dt, \ \forall \ x \in \mathbb{R}.$$

Se $p > 1$, *então* I_α *é forte* (p, q), *isto é,*

$$\|I_\alpha(f)\|_{L^q} \leqslant \|f\|_{L^p}, \ \forall \ f \in L^p(\mathbb{R}). \tag{2.13}$$

Demonstração. Ver o teorema 2.18 de [19]. □

2.2 Teoria Básica de Distribuições

O nosso principal interesse nesta seção é expor parte da teoria de distribuições essencial para o estudo dos espaços de Sobolev e de equações diferenciais parciais. O conteúdo aqui exposto foi quase que totalmente extraido da referência [11].

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e seja

$$C_0^j(\Omega) = \{\varphi / \ \varphi : \Omega \to \mathbb{R}(\text{ou } \mathbb{C}) \text{ com supp}(\varphi) \text{ compacto e } \varphi \in C^j(\Omega)\},$$

com $j \in \mathbb{N}$.

Definição 1. *Denotaremos por $\mathcal{D}(\Omega)$ o espaço $C_0^\infty(\Omega)$ munido da topologia induzida pela família de seminormas*

$$\rho_{k,\alpha} = \sup_{x \in K}\{\ |(\partial^\alpha \varphi)(x)|,\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \textit{onde } K \subset \Omega \quad \textit{é compacto e } \alpha \textit{ é um multi-índice}\}.$$

Esta topologia induz a seguinte noção de convergência em $\mathcal{D}(\Omega)$:

Definição 2. *Sejam $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $C_0^\infty(\Omega)$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Dizemos que $\varphi_j \to \varphi$ no sentido do espaço $\mathcal{D}(\Omega)$ quando: 1. Existe $K \subset \Omega$ compacto tal que supp$(\varphi_j) \subseteq K, \forall j \in \mathbb{N}$. 2. $\partial^\alpha \varphi_j \to \partial^\alpha \varphi$, (uniformemente) para todo multi-índice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$.*

Com isso definimos distribuições:

Definição 3. *Chamamos de distribuição em Ω a qualquer funcional linear contínuo $F : \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \mathbb{C}($ou $\mathbb{R})$. O dual de $\mathcal{D}(\Omega)$, denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$ é chamado de espaço de (Schwartz) distribuições.*

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \{F : \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \mathbb{C}\ F \textit{ é linear e contínuo}\}.$$

Para cada $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{Z}^+)^{2n}$ denotamos a semi-norma $\|\cdot\|_{(\alpha,\beta)}$ definida por

$$\|f\|_{(\alpha,\beta)} = \left\|x^\alpha \partial_x^\beta f\right\|_\infty .$$

Definição 4. *Denotamos por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ o espaço das funções C^∞ que se anulam no infinito, isto é,*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n);\ \|\varphi\|_{(\alpha,\beta)} < \infty\ \forall \alpha,\ \beta \in (\mathbb{Z}^+)^{2n}\}.$$

Portanto temos que $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. A topologia em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é dada pela família de semi-normas $\|\cdot\|_{(\alpha,\beta)}$, $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{Z}^+)^{2n}$.

Definição 5. *Seja $(\varphi_j) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então $\varphi_j \to 0$ quando $j \to \infty$, e para cada $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{Z}^+)^{2n}$ temos que*

$$\|\varphi\|_{(\alpha,\beta)} \to 0 \textit{ quando } j \to \infty.$$

Teorema 6. *O espaço de Schwartz satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *Dada $\varphi \in \mathcal{S}$, $P(x)\varphi \in \mathcal{S}$ e $P(\partial)\varphi \in \mathcal{S}$, para qualquer polinômio $P(x)$, ou seja, $\mathcal{S}$ é estável em relação à multiplicação por polinômios e à diferenciação. Em particular, dados quaisquer polinômios $P(x)$, $Q(x)$ e qualquer $\varphi \in \mathcal{S}$, temos que $P(x)Q(\partial)\varphi \in \mathcal{S}$.*

2. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}$ *e é denso em* $\mathcal{S}$.

3. $\mathcal{S} \hookrightarrow L^p$ *e é denso em* L^p, $\forall 1 \leqslant p < \infty$.

4. *Dadas* $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$, $\varphi * \psi \in \mathcal{S}$, *ou seja, o produto de convolução e uma operação em* $\mathcal{S}$.

Demonstração. Ver [11]. □

Definição 6. *Dizemos que* $\Psi : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathbb{C}$ *define uma distribução temperada se*

1. Ψ *é linear.*

2. Ψ *é contínua, isto é, se* $\varphi_j \to 0$ *quando* $j \to \infty$ *implicar que a sequência* $\Psi(\varphi_j) \to 0$ *quando* $j \to \infty$.

Denotaremos tal espaço como $S'(\mathbb{C})$ *ou* $S'(\mathbb{R})$.

Definição 7. *Dadas* $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *e* $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, *definimos a convolução de* F *e* ψ *por:*

$$F * \psi(x) = \langle F, \tau_{-x}\psi(-.)\rangle = \langle F, \psi(x - .)\rangle.$$

Seja f uma função de crescimento polinomial. Defina $F_f : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ por:

$$F_f(\varphi) = \int f\varphi dx. \tag{2.14}$$

Proposição 4. *: Se* $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, *então* $F * \psi$ *é uma função* C^∞ *de crescimento polinomial, e portanto, define uma distribuição temperada pela fórmula* (2.14)*:*

$$\langle F * \psi, \varphi\rangle = \int (F * \psi)(x)\varphi(x)dx,\ \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{2.15}$$

Dem. Como $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é um subespaço de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, segue que $F * \varphi$ é uma regularização de F, e já provamos numa proposição que $F * \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Agora, como $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$($F$ é contínua), $\exists\ \ C \geqslant 0$ e $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\langle F * \psi\rangle| \leqslant C \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi|, \quad \forall \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

e daí, como $1 + |y| \leqslant 1 + |x - y| + |x| \leqslant (1 + |x - y|)(1 + |x|)$, segue que

$$
\begin{aligned}
|F * \psi(x)| = |F, \psi(x - .)| &\leqslant C \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant N} \sup_{y\in\mathbb{R}^n} |y^\alpha \partial^\beta \varphi(x-y)| \\
&\leqslant C \sum_{|\beta|\leqslant N} (1+|y|)^N |\partial^\beta \varphi(x-y)| \\
&\leqslant C(1+|y|)^N \sum_{|\beta|\leqslant N} (1+|x-y|)^N |\partial^\beta \varphi(x-y)| \\
&\leqslant C(1+|x|)^N \sum_{|\beta|\leqslant N} \|\psi\|_{\alpha,\beta}.
\end{aligned}
$$

Portanto, $F*\psi$ é de crescimento polinomial e também C^∞. Além disso, pela proposição (4), define uma distribuição temperada pela fórmula (2.15).

Definição 8. *A função valor principal de* $\frac{1}{x}$, *denotada por* $v.p\ \frac{1}{x}$ *é definida pela expressão*

$$
v.p\ \frac{1}{x}(\varphi) = \lim_{\epsilon\downarrow 0} \int_{\epsilon<|x|<\frac{1}{\epsilon}} \frac{\varphi(x)}{x} dx, \quad \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).
$$

Observe que

$$
v.p\ \frac{1}{x}(\varphi) = \lim_{\epsilon\to 0} \Big(\int_{\epsilon<|x|<1} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{1<|x|} \frac{\varphi(x)}{x} dx \Big)
$$

e

$$
\begin{aligned}
\int_{\epsilon<|x|<1} \frac{\varphi(0)}{x} dx = \int_{-1}^{-\epsilon} \frac{\varphi(0)}{x} dx + \int_{\epsilon}^{1} \frac{\varphi(0)}{x} dx &= \varphi(0)(\ln|x| \Big|_{-1}^{-\epsilon} + \ln|x| \Big|_{\epsilon}^{1}) \\
&= \varphi(0)(\ln|\epsilon| - \ln 1 - \ln|\epsilon| + \ln 1) = 0,
\end{aligned}
$$

daí,

$$
v.p\ \frac{1}{x}(\varphi) = \lim_{\epsilon\downarrow 0} \int_{\epsilon<|x|<1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|x|>\frac{1}{\epsilon}} \frac{x\varphi(x)}{x^2} dx).
$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow |v.p\ \frac{1}{x}(\varphi)| &\leqslant \lim_{\epsilon\downarrow 0} \int_{\epsilon<|x|<1} \frac{|\varphi(x) - \varphi(0)|}{|x-0|} dx + 2\int_1^{+\infty} \frac{|x\varphi(x)|}{x^2} dx \\
&\leqslant \lim_{\epsilon\downarrow 0} \int_{\epsilon<|x|<1} \sup|\varphi'(x)| dx + 2\|x\varphi\|_{L^\infty} \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx \\
&\leqslant 2\|\varphi'\|_{L^\infty} + 2\|x\varphi\|_{L^\infty} < \infty, \quad \forall\ \varphi \in S(\mathbb{R}).
\end{aligned}
$$

Assim, $v.p\ \frac{1}{x}(\varphi)$ está bem definida e $v.p\ \frac{1}{x} \in \mathcal{S}'(\Omega)$.

Definição 9. *Dizemos que uma sequência* $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *de funções de* $\mathcal{S}$ *converge para uma função* $\varphi \in \mathcal{S}$, *quando* $\lim_{j\to\infty} \|\varphi_j - \varphi\|_{(\alpha,\beta)} = 0$, *para quaisquer multi-índices* $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.

2.3 A transformada de Fourier e suas propriedades básicas

Definição 10. *Dada uma função* $f \in L^1(\mathbb{R})$*, a transformada de Fourier de* f*, denotada por* $\mathcal{F}(f)$ *ou* $\widehat{f}$*, é definida pela fórmula*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{2.16}$$

A mesma definição vale para a transformada de Fourier para $f \in S(\mathbb{R})$. A maior vantagem de $\mathcal{S}$ em relação a L^1 é a facilidade de trabalhar nele devido a regularidade de suas funções, o que nos permite demonstrar por exemplo as propriedades a seguir:

Teorema 7. *Se* $\varphi \in \mathcal{S}$*, então*

1. $(\partial^\alpha \varphi)^\wedge(\xi) = (i\xi)^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)$;

2. $((-i\,\cdot\,)^\alpha \varphi(\,\cdot\,))^\wedge(\xi) = \partial^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)$*;*

3. $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$*, ou seja,* $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$*.*

Demonstração. Ver [11] ou [13]. □

Agora iremos primeiramente estender a transformada de Fourier como função para $L^2(\mathbb{R}^n)$ e então usar o teorema de interpolação de Riesz-Thorin para provar que $\mathcal{F}$ também pode ser definida para funções de L^p, $1 < p < 2$. Vamos provar que quando $1 \leqslant p \leqslant 2$, $\hat{f}$ é uma função.

Usaremos o fato de $\mathcal{S}$ ser um subconjunto denso de L^1 e L^2 para provar que se $f \in L^2$, então $\hat{f}$ é uma função.

Teorema 8 (Teorema de Plancherel)**.** *: Se* $f \in L^2$*, então* $\hat{f} \in L^2$ *e*

$$\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}.$$

Em outras palavras, $\mathcal{F}$ *é um operador unitário (uma isometria) em* L^2*.*

Demonstração. Ver [7] ou [11]. □

Como a transformada de Fourier é um operador de tipo forte $(1, \infty)$ e $(2, 2)$ respectivamente, o teorema de Riesz-Thorim nos permite estabelecer o seguinte resultado:

Teorema 9 (Desigualdade de Hausdorff-Young)**.** *: Se* $f \in L^p$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, *então* $\hat{f} \in L^q$, *com* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q'} = 1$, *e*

$$\|\hat{f}\|_{L^q} \leqslant \|f\|_{L^p}.$$

Demonstração. Como $\mathcal{F}$ é forte $(1, \infty)$ e $(2, 2)$, segue do teorema de Riesz-Thorim que $\mathcal{F}$ é forte (p, q), com $\frac{1}{p} = \frac{(1-t)}{1} + \frac{t}{2} = 1 - \frac{t}{2}$ e $\frac{1}{q} = \frac{1-t}{\infty} + \frac{t}{2} = \frac{t}{2} = 1 - \frac{1}{p}$.

Portanto, $\|\hat{f}\|_{L^q} \leqslant \|f\|_{L^p}$. □

Estamos prontos agora para definir a transformada de Fourier de uma distribuição temperada. Sabemos que se $f \in L^1$, então $\hat{f} \in L^\infty$ e é contínua, portanto, $\hat{f} \in S'(\mathbb{R}^n)$, isto é, define uma distribuição temperada, pois $\hat{\varphi} \in S(\mathbb{R}^n)$, $\forall\ \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ e

$$\int \widehat{f}(\xi)\varphi(\xi)d\xi = \int f(x)\hat{\varphi}(x)dx, \quad \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{2.17}$$

Isso nos permite fazer a seguinte definição:

Definição 11. *: Dada* $F \in S'(\mathbb{R}^n)$, *definimos sua transformada de Fourier por*

$$\langle \widehat{F}, \varphi \rangle = \widehat{F}(\varphi) = \langle F, \widehat{\varphi} \rangle = F(\hat{\varphi}),\ \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{2.18}$$

Observe que, se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então ambas as definições de $\widehat{f}$ coincidem. Portanto, a definição (11) é consistente com a teoria de transformada de Fourier para funções de $\mathcal{S}$.

Assim como em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, vale o seguinte resultado para a transformada de Fourier em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$:

Teorema 10. *:* $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *é um isomorfismo e tanto* $\mathcal{F}$ *como* $\mathcal{F}^{-1}$ *são contínuas.*

Demonstração. Ver em [11]. □

Teorema 11. *:* $\mathcal{F} : S'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S'(\mathbb{R}^n)$ *satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $(\partial^\alpha F)^\wedge(\xi) = (i\xi)^\alpha \widehat{F}(\xi)$.
2. $((-ix)^\alpha F)^\wedge(\xi) = \partial_\xi^\alpha \widehat{F}(\xi)$.
3. $(\tau_h F)^\wedge(\xi) = e^{ih\xi}\widehat{F}(\xi)$.
4. $(e^{ixh}F)^\wedge(\xi) = \tau_h \widehat{F}(\xi)$, *onde* $\tau_h f \Leftrightarrow (x) = f(x - h)$.

Demonstração. Ver em [11]. □

Exemplo 1. *Calculemos* $\widehat{v.p\,\frac{1}{x}}$.

Dado $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\widehat{v.p\,\frac{1}{x}}(\varphi) = v.p\,\frac{1}{x}(\widehat{\varphi}) = \lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_{\epsilon<|x|<\frac{1}{\epsilon}} \frac{\widehat{\varphi}(x)}{x}dx \tag{2.19}$$

$$= \lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_{\epsilon<|x|<\frac{1}{\epsilon}} \frac{1}{x}(\int \varphi(y)e^{-ixy}dy)dx$$

$$= \lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}} \varphi(y)(\int_{\epsilon<|x|<\frac{1}{\epsilon}} \frac{e^{-ixy}}{x}dx)dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)(\lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_{\epsilon<|x|<\frac{1}{\epsilon}} \frac{e^{-ixy}}{x}dx)dy.$$

Agora,

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_{\epsilon<|x|<\frac{1}{\epsilon}} \frac{e^{-ixy}}{x}dx = \lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_{\epsilon<|x|<\frac{1}{\epsilon}} \frac{\cos(2\pi xy)}{x}dx - 2i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(2\pi xy)}{x}dx \tag{2.20}$$

$$= -2i\ \mathsf{sgn}(y)\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}dx = -i\pi\ \mathsf{sgn}(y).$$

Com as ferramentas já estabelecidas, podemos provar o seguinte resultado:

Teorema 12. *: Se* $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, *então*

$$\widehat{F * \psi} = \widehat{F}\widehat{\psi}, \tag{2.21}$$

onde $\widehat{F}\widehat{\psi} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *é definido como*

$$\langle \widehat{F}\widehat{\psi}, \varphi\rangle = \langle \widehat{F}, \widehat{\psi}\varphi\rangle,\ \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

isto é, $\widehat{F}\widehat{\psi}(\varphi) = \widehat{F}(\widehat{\psi}\varphi)$.

Demonstração. Pelas proposições anteriores e usando o fato de que $\widetilde{\psi} = \widehat{\widehat{\psi}}$, segue que

$$\langle \widehat{F * \psi}, \varphi\rangle = \langle F * \psi, \widehat{\varphi}\rangle = \langle F, \widehat{\varphi} * \widetilde{\psi}\langle = \langle F, \widehat{\varphi} * \widehat{\widehat{\psi}}\rangle = \langle \widehat{F}, \varphi\widehat{\psi}\rangle,$$

e isto prova o teorema. □

2.4 A transformada de Hilbert e suas propriedades básicas

Com a definição 1.2 acima, temos as seguintes propriedades para a transformada de Hilbert:

Proposição 5. *: Dada* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\widehat{\mathcal{H}f}(\xi) = -i\ \mathrm{sgn}(\xi)\hat{f}(\xi)$.

Demonstração. Como $v.p.\ \frac{1}{x} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, e $\widehat{v.p.\ \frac{1}{x}}(\xi) = i\pi\ \mathrm{sgn}(\xi)$, segue do Teorema 12 que

$$\widehat{\mathcal{H}f}(\xi) = \frac{1}{\pi}\widehat{v.p.\ \frac{1}{x} * f}(\xi) = \frac{1}{\pi}\widehat{v.p.\ \frac{1}{x}}(\xi)\widehat{f}(\xi) = -i\ \mathrm{sgn}(\xi)\widehat{f}(\xi).$$ □

Observe que $\mathcal{H}f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$(ou seja, $\mathcal{H}f$ está definida em toda a reta). Lembremo-nos que $\mathcal{H}f$ é uma função C^∞ de crescimento polinomial, se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

A proposição 5 e a densidade de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ em L^2 nos permite definir a transformada de Hilbert de funções de L^2 como uma isometria:

Teorema 13. *: Dadas* f, $g \in L^2(\mathbb{R})$, *valem:*

1. $\|\mathcal{H}f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$.
2. $\mathcal{H}(\mathcal{H}f) = -f$.
3. $\displaystyle\int \mathcal{H}fg dx = -\int f\mathcal{H}g dx$.

Demonstração. 1. Dada $f \in L^2$, segue da proposição (5) e do teorema de Plancherel que

$$||\mathcal{H}f||_{L^2} = ||\widehat{\mathcal{H}f}||_{L^2} = ||\widehat{f}||_{L^2} = ||f||_{L^2}.$$

2. Como $\mathcal{H} : L^2 \longrightarrow L^2$ é unitário, segue da fórmula da inversa de Fourier que

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\mathcal{H}f) &= (\widehat{\mathcal{H}\mathcal{H}(f)})^{\vee} = (-i\ \mathrm{sgn}(\xi)\widehat{\mathcal{H}f}(\xi))^{\vee} \\ &= ((-i)^2(\mathrm{sgn}(\xi))^2\widehat{f}(\xi))^{\vee} \\ &= -(\widehat{f})^{\vee} = -f.\end{aligned}$$

3. Segue de Parseval que, dadas $f, g \in L^2$,

$$\begin{aligned}\int \mathcal{H}fg dx &= \int \widehat{\mathcal{H}f}\overline{\widehat{g}} d\xi = -\int i\mathrm{sgn}(\xi)\widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)} d\xi \\ &= -\int \widehat{f}(\xi)\overline{(-i\mathrm{sgn}(\xi)\widehat{g}(\xi))} d\xi = -\int \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{\mathcal{H}g}(\xi)} d\xi \\ &= -\int f\mathcal{H}g dx.\end{aligned}$$

□

Além das propriedades acima, a transformada de Hilbert satisfaz as duas seguintes importantes propriedades:

Teorema 14. *1. Dada* $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, $\mathcal{H}f$ *existe quase sempre.*

2. *(Kolmogorov)* $\mathcal{H}$ *é de tipo fraco* $(1,1)$*, isto é, dado* $\lambda > 0$

$$|\{x \in \mathbb{R} : |\mathcal{H}f(x)| > \lambda\}| \leqslant \frac{C}{\lambda}\|f\|_1.$$

3. *(M. Riesz)* $\mathcal{H}$ *é de tipo forte* (p,p)*, se* $1 < p < \infty$*, isto é,*

$$||\mathcal{H}f||_{L^p} \leqslant C(p)||f||_{L^p}. \tag{2.22}$$

Demonstração. Por utilizar ferramentas não abordadas nessa dissertação, omitiremos a prova do ítem 2, o leitor interessado pode consultar o Teorema 3.2 de [7].

1. Segue da densidade de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ em $L^p(\mathbb{R}),\ 1 < p < \infty$.

3. Primeiro façamos para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. O Teorema 13 nos diz que $\mathcal{H}$ é tipo forte $(2,2)$. Como por 2. $\mathcal{H}$ é tipo fraco $(1,1)$, segue do teorema de interpolação de Marcinkiewicz que $\mathcal{H}$ é de tipo forte (p,p), $\forall\ 1 < p < 2$. (observe que usamos o fato de que $\mathcal{H}$ é fraco $(2,2)$).

Agora, considere $p > 2$. Seja $(\varphi_n)_n \in \mathbb{N}$ uma sequência de funções tais que $\varphi_n \to f$ em L^p. Então, por dualidade, Teorema 13 item 3, e o caso anterior $(p \leqslant 2)$,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{H}f\|_p &= \lim_{n\to\infty} \|\mathcal{H}\varphi_n\|_p \\
&= \lim_{n\to\infty} \sup\{|\int \mathcal{H}\varphi_n \psi dx| : \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),\ \|\psi\|_q \leqslant 1\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sup\{|\int \varphi_n \mathcal{H}\psi dx| : \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),\ \|\psi\|_q \leqslant 1\} \\
&\leqslant \sup\{\|\mathcal{H}\psi\|_q : \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),\ \|\psi\|_q \leqslant 1\} \lim_{n\to\infty} \|\varphi_n\|_p \\
&\leqslant C_q \lim_{n\to\infty} \|\varphi_n\|_p = C_q\|f\|_p.
\end{aligned}$$

□

Observações: 1. $\mathcal{H}$ não é forte (p,p), $\mathsf{se}\ p = 1\ \mathsf{ou}\ p = \infty$. Considere por exemplo $f = \chi_{[0,1]}$, e então $\mathcal{H}f \notin L^p$, para $p = 1\ \mathsf{ou}\ p = \infty$, pois :

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{\pi}\log|\frac{x}{x-1}|,$$

que não é nem limitada nem integrável.

2. Não é difícil ver que, dada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\mathcal{H}\varphi \in L^1 \iff \widehat{\varphi}(0) = \int \varphi dx = 0$.

Definição 12. *Definimos os operadores projeção* P_+, P_- *como*

$$P_+ = \frac{1}{2}(1 + i\mathcal{H}),$$

$$P_- = \frac{1}{2}(1 - i\mathcal{H}).$$

A Definição 12 para o operador projeção é equivalente à seguinte:

$$P_+ f = (\chi_{[0,+\infty)}(\xi)\widehat{f}(\xi))^\vee \quad \text{e} \quad P_- f = (\chi_{[(-\infty,0]}(\xi)\widehat{f}(\xi))^\vee.$$

As principais propriedades do operador Projeção são descritas na proposição abaixo:

Proposição 6. *Para o operador projeção* P_+, P_- *valem*

$$P_+ + P_- = 1, \tag{2.23}$$

$$P_+ - P_- = i\mathcal{H}, \tag{2.24}$$

$$iP_+ = -\mathcal{H}P_+, \tag{2.25}$$

$$iP_- = \mathcal{H}P_-. \tag{2.26}$$

Demonstração. Segue imediatamente da Definição 12. □

2.5 Os espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$

Nesta seção iremos dar uma breve introdução aos espaços de Sobolev clássicos $H^s(\mathbb{R})$. Espaços de Sobolev medem a diferenciabilidade de funções em L^2 e são ferramentas fundamentais no estudo de equações diferenciais parciais.

Definição 13. *Seja* $s \in \mathbb{R}$, *definimos o espaço de Sobolev de ordem* s, *denotado por* $H^s(\mathbb{R})$, *como*

$$H^s(\mathbb{R}) = \{f \in S'(\mathbb{R}) : J^s f(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{s/2}\widehat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})\}, \tag{2.27}$$

com a norma $\|\,.\,\|_{H^s}$ *definida como*

$$\|f\|_{H^s} = \|J^s f\|_{L^2}. \tag{2.28}$$

Proposição 7. *Da definição de espaços de Sobolev deduzimos as seguintes propriedades:*

1. *Se* $0 \leqslant s < s'$, *então* $H^{s'}(\mathbb{R}) \subset H^s(\mathbb{R})$.

2. $H^s(\mathbb{R})$ *é um espaço de Hilbert com respeito ao produto interno* $<,>_{H^s}$ *definido como segue:*

   Se $f, g \in H^s(\mathbb{R})$, *então* $(f, g)_{H^s} = \int_{\mathbb{R}} J^s f(\xi)\overline{J^s g(\xi)} d\xi$.

   Vemos que, via transformada de Fourier, $H^s(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R}, (1 + |\xi|^2)^s d\xi)$.

3. *Para todo* $s \in \mathbb{R}$, *o espaço de Schwartz,* $S(\mathbb{R})$, *é denso em* $H^s(\mathbb{R})$.

4. *Se* $s_1 \leqslant s \leqslant s_2$, *com* $s = \theta s_1 + (1 - \theta)s_2$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, *então*

$$||f||_{H^s} \leqslant ||f||^{\theta}_{H^{s_1}} ||f||^{1-\theta}_{H^{s_2}}.$$

Demonstração. Ver a proposição 3.6 de [19]. □

Para compreendermos a relação entre os espaços $H^s(\mathbb{R})$ e a diferenciabilidade das funções em $L^2(\mathbb{R})$, definimos:

Definição 14. *Uma função* f *é diferenciável em* $L^2(\mathbb{R})$ *com respeito a k-ésima variavel se existir* $g \in L^2(\mathbb{R})$ *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} \Big| \frac{f(x + he_k) - f(x)}{h} - g(x) \Big|^2 dx \to 0 \quad \textit{quando} \quad h \to 0,$$

onde e_k *tem a k-ésima coordenada igual a 1 e as demais iguais a zero.*

Com esta definição podemos dar uma descrição de $H^k(\mathbb{R})$ sem usarmos a transformada de Fourier, sempre que $k \in \mathbb{Z}^+$.

Teorema 15. *Se* k *é um inteiro positivo, então* $H^k(\mathbb{R})$ *coincide com o espaço das funções* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *cujas derivadas (no sentido das distribuições)* $\partial_x^{\alpha} f$ *pertencem a* $L^2(\mathbb{R})$ *para cada* $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ *com* $|\alpha| \leqslant k$.

Neste caso as normas $||f||_{H^k}$ *e* $\sum_{|\alpha| \leqslant k} ||\partial_x^{\alpha} f||_{L^2}$ *são equivalentes.*

Demonstração. Ver o teorema 3.10 de [19]. □

Lema 2. *Seja* $f \in H^s(\mathbb{R})$, $s \geqslant 0$ *com norma*

$$||f||_{H^s} = \Big(\int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Então temos que

$$||f||_{H^s} \simeq ||f||_{L^2} + ||D_x^s f||_{L^2}. \tag{2.29}$$

Demonstração. Primeiramente temos que

$$1+|\xi|^{2s} = (1)^s + (|\xi|^2)^s \leqslant (1+|\xi|^2)^s + (1+|\xi|^2)^s = 2(1+|\xi|^2)^s. \tag{2.30}$$

Agora, temos

$$\begin{aligned}
\|f\|_{H^s} &= \Big(\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \Big(\int_{|\xi|\leqslant 1} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\int_{|\xi|>1} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \Big(\int_{|\xi|\leqslant 1} 2^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\int_{|\xi|>1} 2^s |\xi|^{2s} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant 2^{s/2}\Big(\|f\|_{L^2} + \|D_x^s f\|_{L^2}\Big).
\end{aligned} \tag{2.31}$$

De (2.30), segue que

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^2} + \|D_x^s f\|_{L^2} &\leqslant 2\Big(\|f\|_{L^2}^2 + \|D_x^s f\|_{L^2}^2\Big)^{1/2} \\
&= 2\Big(\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^{2s}) |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\Big)^{1/2} \\
&\leqslant 2\Big(\int_{\mathbb{R}} 2(1+|\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\Big)^{1/2} = 2^{3/2}\|f\|_{H^s}.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

De (2.31) e (2.32), segue (2.29). □

Apresentaremos agora os teoremas de imersão de Sobolev e a importante propriedade de álgebra de Banach para H^s com s suficientemente grande.

Teorema 16. *Se* $s > 1/2 + k$, *então* $H^s(\mathbb{R})$ *é continuamente imerso em* $C_\infty^k(\mathbb{R})$ *o espaço das funções com k derivadas continas e que se anulam no infinito. Em outras palavras, se* $f \in H^s(\mathbb{R})$, *então a menos de uma possivel modificação de* f *a um conjunto de medida nula,* $f \in C_\infty^k(\mathbb{R})$ *e*

$$\|f\|_{C^k} \leqslant C_s \|f\|_{H^s}. \tag{2.33}$$

Demonstração. Ver o teorema 3.11 de [19]. □

Teorema 17. *Se* $0 < s < 1/2$, *então* $H^s(\mathbb{R})$ *é continuamente imerso em* $L^p(\mathbb{R})$ *com* $s = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$. *Além disso, para* $f \in H^s(\mathbb{R})$,

$$\|f\|_{L^p} \leqslant C_{n,s} \|D^s f\|_{L^2} \leqslant C\|f\|_{H^s} \tag{2.34}$$

onde $D^s f = (|\xi|^s \widehat{f})^\vee$.

Demonstração. Ver o teorema 3.13 de [19]. □

Teorema 18. *Se* $s > 1/2$, *então* $H^s(\mathbb{R})$ *é uma álgebra com respeito ao produto de funções. Ou seja, se* $f, g \in H^s(\mathbb{R})$, *então* $fg \in H^s(\mathbb{R})$ *com*

$$||fg||_{H^s} \leqslant C_s ||f||_{H^s} ||g||_{H^s}. \tag{2.35}$$

Demonstração. Ver o teorema 3.14 de [19]. □

Finalizamos essa seção apresentando a seguinte importante propriedade da transformada de Hilbert em $H^s(\mathbb{R})$:

Proposição 8. $\mathcal{H}$ *é limitado em* $H^s(\mathbb{R})$ *ou seja,*

$$||\mathcal{H}f||_{H^s} = ||f||_{H^s}. \tag{2.36}$$

Demonstração. De fato,

$$||\mathcal{H}f||_{H^s} = ||(1+|\xi|^2)^{s/2} i \operatorname{sgn}(\xi) \widehat{f}||_{L^2} = ||(1+|\xi|^2)^{s/2} \widehat{f}||_{L^2} = ||f||_{H^s}.$$ □

Lema 3. *Dado* $1 \leqslant p < \infty$ *existe* $C = C(p) > 0$ *tal que se* $u \in L^1(\mathbb{R})$ *e* $D^{1/2}u \in L^2(\mathbb{R})$, *então* $u \in L^p(\mathbb{R})$ *e vale*

$$||u||_{L^p} \leqslant C ||u||_{L^1}^{1/p} ||D^{1/2}u||_{L^2}^{1/p'}. \tag{2.37}$$

Demonstração. Dividiremos a demonstração em dois casos

1. Caso $p \geqslant 2$.

   Pela desigualdade de Hausdorff-Young, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ e $v = \widehat{u}$ segue que

   $$||u||_{L^p} = ||\widehat{v}||_{L^p} \leqslant C ||v||_{L^{p'}} = C ||\widehat{u}||_{L^{p'}}.$$

   Logo, temos

   $$||u||_{L^p} \leqslant C ||\widehat{u}||_{L^{p'}}, \tag{2.38}$$

   com $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

   Podemos escrever

   $$||\widehat{u}||_{L^{p'}}^{p'} = \int_{|\xi| \leqslant R} |\widehat{u}(\xi)|^{p'} d\xi + \int_{|\xi| > R} |\widehat{u}(\xi)|^{p'} |\xi|^{p'/2} |\xi|^{-p'/2} d\xi. \tag{2.39}$$

   Como $||\widehat{u}||_{L^\infty} \leqslant C ||u||_{L^1}$, obtemos

   $$\int_{|\xi| \leqslant R} |\widehat{u}(\xi)|^{p'} d\xi \leqslant C ||u||_{L^1}^{p'} R. \tag{2.40}$$

A desigualdade de Hölder com $p_1 = \frac{2}{p'}$ e $p_2 = \frac{2}{2-p'}$ implica

$$\begin{aligned}
\int_{|\xi|>R} |\widehat{u}(\xi)|^{p'}|\xi|^{p'/2}|\xi|^{-p'/2}d\xi &\leqslant \Big(\int_{|\xi|>R}|\widehat{u}(\xi)|^2|\xi|d\xi\Big)^{p'/2}\Big(\int_{|\xi|>R}|\xi|^{-\frac{p'}{2-p'}}d\xi\Big)^{\frac{2-p'}{2}}\\
&\leqslant C\Big(\int_{|\xi|>R}(|\xi|^{\frac{1}{2}}|\widehat{u}(\xi)|)^2d\xi\Big)^{p'/2}R^{(\frac{2-2p'}{2-p'})(\frac{2-p'}{2})}\\
&\leqslant C\|D^{1/2}u\|_{L^2}^{p'}R^{1-p'}\\
&= CR^{-\frac{1}{p-1}}\|D^{1/2}u\|_{L^2}^{p'}. \qquad (2.41)
\end{aligned}$$

Finalmente, tomando $R = \dfrac{\|D^{1/2}u\|_{L^2}}{\|u\|_{L^1}}$ temos

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^p} \leqslant C(\|\widehat{u}\|_{L^{p'}}^{p'})^{\frac{1}{p'}} &\leqslant C\big(R\|u\|_{L^1}^{p'} + R^{-\frac{1}{p-1}}\|D^{1/2}u\|_{L^2}^{p'}\big)^{\frac{1}{p'}}\\
&= C\Big(\frac{\|D^{1/2}u\|_{L^2}}{\|u\|_{L^1}}\|u\|_{L^1}^{p'} + \Big(\frac{\|D^{1/2}u\|_{L^2}}{\|u\|_{L^1}}\Big)^{-\frac{1}{p-1}}\|D^{1/2}u\|_{L^2}^{p'}\Big)^{\frac{1}{p'}}\\
&= C\Big(\|D^{1/2}u\|_{L^2}\|u\|_{L^1}^{p'-1} + \|D^{1/2}u\|_{L^2}\|u\|_{L^1}^{p'-1}\Big)^{\frac{1}{p'}}\\
&= C\|D^{1/2}u\|_{L^2}^{\frac{1}{p'}}\|u\|_{L^1}^{\frac{p'-1}{p'}}\\
&= C\|u\|_{L^1}^{\frac{1}{p}}\|D^{1/2}u\|_{L^2}^{\frac{1}{p'}}
\end{aligned}$$

2. Caso $1 \leqslant p < 2$.

Sabemos que vale (2.37) para $p = 2$, isto é,

$$\|u\|_{L^2} \leqslant C\|u\|_{L^1}^{\frac{1}{2}}\|D^{1/2}u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.42)$$

Além disso, segue de (2.11) que

$$\|u\|_{L^p} \leqslant C\|u\|_{L^1}^{1-\frac{2}{p'}}\|D^{1/2}u\|_{L^2}^{\frac{2}{p'}}, \qquad (2.43)$$

com $1 = p \leqslant q < r = 2$, $\theta = \dfrac{2}{p'}$ e p fazendo o papel de q. Assim, de (2.37) e (2.43) obtemos

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^p} &\leqslant C\|u\|_{L^1}^{1-\frac{2}{p'}}\|D^{1/2}u\|_{L^2}^{\frac{2}{p'}}\\
&\leqslant C\|u\|_{L^1}^{1-\frac{2}{p'}}\big(C\|u\|_{L^1}^{\frac{1}{2}}\|D^{1/2}u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\big)^{\frac{2}{p'}}\\
&= C\|u\|_{L^1}^{1-\frac{1}{p'}}\|D^{1/2}u\|_{L^2}^{\frac{1}{p'}}\\
&= C\|u\|_{L^1}^{\frac{1}{p}}\|D^{1/2}u\|_{L^2}^{\frac{1}{p'}}.
\end{aligned}$$

$\square$

Lema 4. *Seja* $0 < \alpha < 1$, $\omega \in H^\infty$ *e* Ω *uma primitiva de* $|\omega|^2$. *Então* $(D^\alpha \Omega)^\wedge(\xi) \in L^1$.

Demonstração. Existe a tal que

$$\widehat{\Omega}(\xi) = -i\xi^{-1}(|\omega|^2)^\wedge(\xi) + a\delta_0(\xi). \tag{2.44}$$

Então

$$||\xi|^\alpha \widehat{\Omega}(\xi)| = |\xi|^{-1+\alpha}(|\omega|^2)^\wedge(\xi). \tag{2.45}$$

Como $|\omega|^2 \in L^1$, temos que $(|\omega|^2)^\wedge \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ e portanto $(D^\alpha\Omega)^\wedge$ é integravel numa vizinha da origem. Como $|\omega|^2 \in H^1$, segue que $(|\omega|^2)^\wedge \in L^1$. $\square$

2.6 Definição e propriedades de convergência fraca

Nesta seção estudaremos as ferramentas básicas de Análise Funcional necessárias para a demonstração do restultado principal do trabalho. Definiremos convergência fraca e apresentaremos as propriedades básicas de convergência fraca em espaços reflexivos.

Definição 15 (Convergência Fraca em espaços normados)**.** *Uma sequência* (x_n) *em um espaço normado* X *é dita ser fracamente convergente se existir um* $x \in X$ *tal que, para todo* $f \in X'$,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

Isto se escreve

$$x_n \rightharpoonup x.$$

O elemento x *é chamado o limite fraco de* (x_n), *e dizemos que* (x_n) *converge fracamente para* x.

Para aplicarmos a convergência fraca em nosso objetivo de estudo, precisamos conhecer certas propriedades básicas, que estabeleceremos nos seguintes lemas:

Lema 5. *Seja* (x_n) *uma sequência fracamente convergente em um espaço normado* X. *Então*

1. *O limite fraco* x *de* $f(x_n)$ *é único.*

2. *Toda subsequência de* (x_n) *converge fracamente para* x.

3. *A sequência* $(\|x_n\|)$ *é limitada.*

Demonstração. Ver o lema 4.8-3 de [17]. □

Exemplo 2 (Espaço de Hilbert). *Em um espaço de Hilbert,* $x_n \rightharpoonup x$ *se, e somente se* $\langle x_n, z\rangle \longrightarrow \langle x, z\rangle$ *para todo* z *no espaço.*

Demonstração. Segue imediatamente da representação $f(x) = \langle x, z\rangle$, onde f é um funcional linear limitado em H, e do fato que $x_n \rightharpoonup x$. □

Finalizamos esta seção apresentando a definição de convergência fraca de operadores $T_n \in B(X, Y)$ introduzida por John von Neumann (1929):

Definição 16 (Convergência fraca de operadores). *Sejam* X *e* Y *espaços normados. Uma sequência* (T_n) *de operadores* $T_n \in B(X, Y)$ *é dita ser fracamente convergente, se* $(T_n x)$ *convergir fracamente em* Y *para todo* $x \in X$. *Ou seja,*

$$|f(T_n x) - f(Tx)| \longrightarrow 0 \quad \text{para todo } x \in X \text{ e para toda } f \in Y'.$$

T *é chamado o operador fraco limite de* (T_n).

2.7 O estudo da não linearidade F_λ

Daremos agora propriedades de continuidade para F_λ que é definido por $F_\lambda(u) = |u|^2 u + \lambda\mathcal{H}(|u|^2)u$.

Lema 6. *Dados* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *e* $s > \frac{1}{2}$ *existe* $C > 0$ *tal que*

$$\|F_\lambda(u)\|_{L^p} \leqslant C\|u\|^3_{L^{3p}}, \tag{2.46}$$

$$\|F_\lambda(u) - F_\lambda(v)\|_{L^p} \leqslant C(\|u\|^3_{L^{3p}} + \|v\|^3_{L^{3p}})\|u - v\|_{L^{3p}}, \tag{2.47}$$

$$\|F_\lambda(u)\|_{H^s} \leqslant C\|u\|^3_{H^s}. \tag{2.48}$$

Demonstração. Da definição de $F_\lambda(u)$, da desigualdade de Hölder e da propriedade (2.22) da transformada de Hilbert, temos

$$\begin{aligned}\|F_\lambda(u)\|_{L^p} &\leqslant \||u|^2 u\|_{L^p} + \|\lambda\mathcal{H}(|u|^2)u\|_{L^p}\\ &\leqslant \|u\|^3_{L^{3p}} + C\|u\|_{L^{3p}}\|\mathcal{H}(|u|^2)\|_{L^{3p/2}}\\ &\leqslant \|u\|^3_{L^{3p}} + C\|u\|_{L^{3p}}\|u\|^2_{L^{3p}} \leqslant C\|u\|^3_{L^{3p}}.\end{aligned}$$

De maneira análoga temos

$$\begin{aligned}
||F_\lambda(u) - F_\lambda(v)||_{L^p} &\leqslant ||(|u|^2u - |v|^2v)||_{L^p} + ||\lambda(\mathcal{H}(|u|^2)u) - \mathcal{H}(|v|^2)v))||_{L^p} \\
&\leqslant |||u|^2(u-v)||_{L^p} + ||(|u|^2 - |v|^2)v||_{L^p} \\
&+ ||\lambda(\mathcal{H}(|u|^2)(u-v)||_{L^p} + ||\lambda\mathcal{H}(|u|^2 - |v|^2)v||_{L^p} \\
&\leqslant ||u||^2_{L^{3p}}||u-v||_{L^{3p}} + ||u-v||_{L^{3p}}\left(||u||_{L^{3p}}||v||_{L^{3p}} + ||v||^2_{L^{3p}}\right) \\
&+ ||u-v||_{L^{3p}}||u||^2_{L^{3p}} + ||u-v||_{L^{3p}}\left(||u||_{L^{3p}}||v||_{L^{3p}} + ||v||^2_{L^{3p}}\right) \\
&= ||u-v||_{L^{3p}}\left[2||u||^2_{L^{3p}} + 2||v||^2_{L^{3p}} + 2||u||_{L^{3p}}||v||_{L^{3p}}\right] \\
&\leqslant ||u-v||_{L^{3p}}\left[2||u||^2_{L^{3p}} + 2||v||^2_{L^{3p}} + ||u||^2_{L^{3p}} + ||v||^2_{L^{3p}}\right] \\
&\leqslant C||u-v||_{L^{3p}}\left(||u||^2_{L^{3p}} + ||v||^2_{L^{3p}}\right).
\end{aligned}$$

Finalmente, temos do fato de H^s ser uma álgebra de Banach, Teorema 18, e de (2.36) que

$$||F_\lambda(u)||_{H^s} \leqslant ||(|u|^2)||_{H^s}||u||_{H^s} + \lambda||\mathcal{H}(|u|^2)||_{H^s}||u||_{H^s} \leqslant ||u||^3_{H^s} + \lambda||u||^3_{H^s} = C||u||^3_{H^s}. \qquad \square$$

2.8 Estimativas de comutadores

Para provarmos regularidade das soluções usaremos os seguintes resultados:

Teorema 19 (Desigualdade de Young Generalizada)**.** *Seja* (X, μ) *um espaço de medida* σ *-finita e sejam* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *e* $C > 0$. *Suponha* K *uma função mensurável de* $X \times X$ *tal que*

$$\sup_{x \in X}\int_X |K(x,y)|d\mu(y) \leqslant C, \quad \sup_{y \in X}\int_X |K(x,y)|d\mu(x) \leqslant C.$$

Se $f \in L^p(X)$, *a função* Tf *definida por*

$$Tf(x)\int_X K(x,y)f(y)d\mu(y)$$

esta bem definida para quase todo ponto e pertence a $L^p(X)$ *quase sempre. Além disso, vale*

$$||Tf||_{L^p} \leqslant C||f||_{L^p}. \tag{2.49}$$

Demonstração. Ver o teorema 0.10 de [10]. $\square$

Lema 7. *Para todo* $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ *e todo* $s \in \mathbb{R}$, *vale*

$$\left(\frac{1+|\xi|^2}{1+|\eta|^2}\right)^s \leqslant 2^{|s|}(1+|\xi-\eta|^2)^{|s|}. \tag{2.50}$$

Demonstração. Ver o lema 6.10 de [10]. □

Lema 8. *Se* $s \in \mathbb{R}$ *e* $\sigma > \frac{n}{2}$ *existe uma constante* $C = C(s,\sigma)$ *tal que para todo* $\phi \in S$ *e* $f \in H^{s-1}$,

$$\|[J^s, \phi]f\|_{H^0} \leqslant C\|\phi\|_{H^{|s-1|+1+\sigma}}\|f\|_{H^{s-1}}. \tag{2.51}$$

Demonstração. Fazendo $f = J^{1-s}g$, devemos mostrar que

$$\|[J^s, \phi]J^{1-s}g\|_{H^0} \leqslant C\|\phi\|_{H^{|s-1|+1+\sigma}}\|g\|_{H^0}$$

para todo $g \in H^0 = L^2$. Uma vez que a transformada de Fourier converte multiplicação em produto de convolução, isto é, $\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}$, temos:

$$\begin{aligned}
([J^s, \phi]J^{1-s}g)^\wedge(\xi) &= (J^s(\phi J^{1-s}g))^\wedge(\xi) - (\phi J^s(J^{1-s}g))^\wedge(\xi)\\
&= ((1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{\phi J^{1-s}g})(\xi) - (\widehat{\phi} * \widehat{J^s(J^{1-s}g)})(\xi)\\
&= \int \left[(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} - (1+|\eta|^2)^{\frac{s}{2}}\right]\widehat{\phi}(\xi-\eta)(1+|\eta|^2)^{\frac{1-s}{2}}\widehat{g}(\eta)d\eta\\
&= \int K(\xi,\eta)\widehat{g}(\eta)d\eta,
\end{aligned}$$

onde

$$K(\xi,\eta) = \left[(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} - (1+|\eta|^2)^{\frac{s}{2}}\right]\widehat{\phi}(\xi-\eta)(1+|\eta|^2)^{\frac{1-s}{2}}.$$

Afirmamos que

$$\left[(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} - (1+|\eta|^2)^{\frac{s}{2}}\right] \leqslant |s||\xi-\eta|\left[(1+|\xi|^2)^{\frac{s-1}{2}} + (1+|\eta|^2)^{\frac{s-1}{2}}\right]. \tag{2.52}$$

De fato, como

$$\left|\frac{d}{dt}(1+t^2)^{s/2}\right| = |st|(1+t^2)^{s/2-1} = \frac{|st|}{\sqrt{1+t^2}}(1+t^2)^{\frac{s-1}{2}} \lesssim |s|(1+t^2)^{\frac{s-1}{2}},$$

temos pelo teorema do valor médio com $a \leqslant t \leqslant b$ que

$$\begin{aligned}
\left|(1+a^2)^{\frac{s}{2}} - (1+b^2)^{\frac{s}{2}}\right| &= |a-b|\left|\frac{d}{dt}(1+t^2)^{s/2}\right|\\
&\leqslant |a-b||s|(1+t^2)^{\frac{s-1}{2}}\\
&\leqslant |a-b|\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|s|(1+t^2)^{\frac{s-1}{2}}\\
&\lesssim |s||a-b|\left[(1+a^2)^{\frac{s-1}{2}} + (1+b^2)^{\frac{s-1}{2}}\right],
\end{aligned}$$

para todo $a, b \geqslant 0$. Tomando $a = |\xi|$ e $b = |\eta|$ e usando o fato que $||\xi| - |\eta|| \leqslant |\xi - \eta|$, obtemos (2.52).

Agora, por (2.50) e (2.52) temos

$$\begin{aligned}
|K(\xi,\eta)| &= \left|\left[(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} - (1+|\eta|^2)^{\frac{s}{2}}\right]\widehat{\phi}(\xi-\eta)(1+|\eta|^2)^{\frac{1-s}{2}}\right| \\
&\leqslant |s||\xi-\eta|\left|\left[(1+|\xi|^2)^{\frac{s-1}{2}} + (1+|\eta|^2)^{\frac{s-1}{2}}\right]\widehat{\phi}(\xi-\eta)(1+|\eta|^2)^{\frac{1-s}{2}}\right| \\
&= |s||\xi-\eta||\widehat{\phi}(\xi-\eta)|\left[(1+|\xi|^2)^{\frac{s-1}{2}}(1+|\eta|^2)^{\frac{1-s}{2}} + 1\right] \\
&= |s||\xi-\eta||\widehat{\phi}(\xi-\eta)|\left[\left(\frac{1+|\xi|^2}{1+|\eta|^2}\right)^{\frac{s-1}{2}} + 1\right] \\
&\leqslant |s|2^{\frac{|s-1|}{2}}|\xi-\eta||\widehat{\phi}(\xi-\eta)|\left[\left(1+|\xi-\eta|^2\right)^{\frac{|s-1|}{2}} + 1\right] \\
&\leqslant |s|2^{\frac{|s-1|}{2}}|\widehat{\phi}(\xi-\eta)|\left[\left(1+|\xi-\eta|^2\right)^{\frac{|s-1|+1}{2}} + (1+|\xi-\eta|^2)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&\leqslant |s|2^{\frac{|s-1|}{2}} + 1|\widehat{\phi}(\xi-\eta)|\left(1+|\xi-\eta|^2\right)^{\frac{|s-1|+1}{2}} \\
&= C_2|\widehat{\phi}(\xi-\eta)|\left(1+|\xi-\eta|^2\right)^{\frac{|s-1|+1}{2}}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int |K(\xi,\eta)|d\xi &\leqslant C_2 \int |\widehat{\phi}(\xi-\eta)|\left(1+|\xi-\eta|^2\right)^{\frac{|s-1|+1}{2}} d\xi \\
&= C_2 \int |\widehat{\phi}(\xi-\eta)|\left(1+|\xi-\eta|^2\right)^{\frac{|s-1|+1+\sigma}{2}} \left(1+|\xi-\eta|^2\right)^{\frac{-\sigma}{2}} d\xi \\
&\leqslant C_2 \left(\int |\widehat{\phi}(\xi-\eta)|\left(1+|\xi-\eta|^2\right)^{|s-1|+1+\sigma}\right)^{1/2} \left(\int \left(1+|\xi-\eta|^2\right)^{-\sigma} d\xi\right)^{1/2} \\
&\leqslant C_3 ||\phi||_{H^{|s-1|+1+\sigma}},
\end{aligned}$$

onde usamos o fato que $|\xi - \eta| = (|\xi-\eta|^2)^{1/2} \leqslant (1 + |\xi-\eta|^2)^{1/2}$ e que

$$\int \frac{1}{(1+|\xi-\eta|^2)^{\sigma}} d\xi \sim \int \frac{1}{|\xi-\eta|^{2\sigma}} d\xi < \infty$$

pois $2\sigma > 1$. Portanto, $\int |K(\xi,\eta)|d\xi$ e $\int |K(\xi,\eta)|d\eta$ são limitadas por $C_3||\phi||_{H^{|s-1|+1+\sigma}}$.

Finalmente, de (2.49) com $p = 2$, obtemos o resultado. □

Corolário 1. *Dados* $s \in \mathbb{R}$, $\omega \in H^{\infty}$, *existe* $C = C(s, \omega) > 0$ *tal que*

$$||[J^s, \omega]f||_{L^2} \leqslant C||f||_{H^{s-1}}. \tag{2.53}$$

Demonstração. Segue imediatamente do resultado anterior e do fato que $S(\mathbb{R})$ ser denso em $H^{\infty}(\mathbb{R})$. □

Lema 9. *Dados* $0 < \alpha < 1$ *e* $p, p_1, p_2 \in (1, \infty)$ *com* $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$, *existe* $C > 0$ *tal que*

$$\|[D^\alpha, \omega]u\|_{L^p} \leqslant C\|D^\alpha\omega\|_{L^{p_1}}\|u\|_{L^{p_2}} \tag{2.54}$$

$$\|[D^\alpha, \omega]u\|_{L^2} \leqslant C\|(D^\alpha\omega)^\wedge\|_{L^1}\|u\|_{L^2}. \tag{2.55}$$

Demonstração. Uma versão vetorial de (2.54) foi provada em [16]. Para mostrar (2.55) procedemos como no lema A.5 de [15], observando que vale a desigualdade $||\xi|^\alpha - |\eta|^\alpha| \leqslant |\xi - \eta|^\alpha$. □

2.9 Alguns Teoremas de Compacidade

Nesta seção apresentaremos resultados essenciais para a demonstração do Teorema 1. Começamos com o Teorema de Aubin que garante, sob certas condições, imersões compactas entre espaços de Banach reflexivos. E depois apresentaremos o teorema de Arzela-Ascoli.

Definição 17. *Um subconjunto* Y *de um espaço métrico* M *chama-se relativamente compacto quando seu fecho* $\overline{Y}$ *é compacto.*

Definição 18. *Sejam* X, Y *espaços vetoriais normados, e* $T : X \to Y$ *um operador de* X *em* Y*. O operador* T *é compacto, se ele leva conjuntos limitados de* X *em conjuntos relativamente compactos de* Y.

Definição 19. *Dizemos que um espaço normado* X *é imerso no espaço normado* Y, *e escrevemos* $X \hookrightarrow Y$ *para designar a imersão, quando:*

1. X *é um subespaço vetorial de* Y;

2. *O operador identidade* $I : X \to Y$ *definido por* $I(x) = x$ *para todo* $x \in X$ *é continuo.*

Como o operador identidade I é linear, a condição 2 implica a existência de uma constante $M > 0$, tal que

$$\|I(x)\|_Y \leqslant M\|x\|_X, \text{ para todo } x \in X.$$

Definição 20. *Sejam* X, Y *espaços vetoriais normados com* X *imerso em* Y*. Dizemos que a imersão é compacta, e a denotamos por* $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$, *se o operador identidade* $I : X \longrightarrow Y$, *for um operador compacto ou seja, dada uma sequência limitada* $x_k \in X$ *a imagem* $I(x_k) \in Y$ *admite uma subsequência convergente em* Y.

Definição 21. *Sejam os espaços de Banach* B_0, B_1. *Definimos*

$$W = \{\, v \mid v \in L^{p_0}((0,T), B_0),\ v' = \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}((0,T), B_1)\}$$

onde T *é finito e* $1 < p_i < \infty,\ i = 0,1$ *munido da norma*

$$||v||_{L^{p_0}((0,T),B_0)} + ||v'||_{L^{p_1}((0,T),B_1)}.$$

Claramente W *é um espaço de Banach com* $W \subset L^{p_0}((0,T), B_0)$.

Com tais definições temos:

Teorema 20. *(Aubin-Lions) Sejam os espaços de Banach* B_0, B, B_1 *com*

$$B_0 \subset B \subset B_1,\ B_i \textit{ reflexivos},\ i = 0,1 \tag{2.56}$$

$$B_0 \hookrightarrow B \textit{ imersão compacta.} \tag{2.57}$$

Então, a imersão de W *em* $L^{p_0}((0,T), B_0)$ *é compacta.*

Demonstração. Ver Teorema 5.1 de [20]. □

Definição 22. *Por* $C_w([0,T], X)$, *denotaremos o espaço das funções* $g : [0,T] \longrightarrow X$ *tais que a aplicação* $t \longmapsto \langle f, g(t)\rangle$ *é contínua em* $[0,T]$, $\forall f \in X'$, *onde* X' *é o espaço dual de* X. *Uma tal função* g *é denominada fracamente contínua e no caso em que* $X = H$, *onde* H *é um espaço de Hilbert, a continuidade fraca de* g *é equivalente a continuidade da aplicação* $t \longmapsto \langle g(t), f\rangle,\ \forall\ f \in H$.

Antes de enuciarmos o teorema de Arzelá-Ascoli, apresentamos a seguinte definição:

Definição 23. *Sejam* M, N *espaços métricos e* E *um conjunto de aplicações* $f : M \to N$. *O conjunto* E *é equicontínuo no ponto* $a \in M$ *quando, para todo* $\epsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que* $d(x,a) < \delta$ *em* M *implique* $d(f(x), f(a)) < \epsilon$, *seja qual for* $f \in E$. *Dizemos que* E *é equicontínuo se for equicontíuo em todos os pontos de* M.

Teorema 21. *(Arzelá-Ascoli) Seja* E *um conjunto de aplicações contínuas* $f : K \to N$, *onde* K *é compacto. A fim de que* $E \subset C(K,N)$ *seja relativamente compacto, é necessário e suficiente que:*

1. E *seja equicontínuo;*

2. *Para cada* $x \in K$, *o conjunto* $E(x)$ *seja relativamente compacto em* N.

Demonstração. Ver a proposição 16 de [18]. □

Lema 10. *Seja* $1 \leqslant p < \infty$. *Um subconjunto limitado* $K \subset L^p(\Omega)$ *é relativamente compacto em* $L^p(\Omega)$ *se, e somente se para todo* $\beta > 0$ *existir um* $\gamma > 0$ *e um subconjunto* $G \subset \Omega$ *tal que, para todo* $f \in K$ *e para cada* $h \in \mathbb{R}^n$ *com* $|h| < \gamma$ *vale*

$$\int_{\Omega} |\tilde{u}(x+h) - \tilde{u}(x)|^p dx < \epsilon^p, \tag{2.58}$$

$$\int_{\Omega\text{-}\overline{G}} |\tilde{u}(x)|^p dx < \epsilon^p, \tag{2.59}$$

onde $\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n - \Omega, \end{cases}$ *e* $\overline{G} = \overline{B}_r$ *com* $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n / \ |x| < r\}$.

Demonstração. Ver o teorema 2.21 de [2]. □

Lema 11. *Seja* M *um subconjunto limitado de* H^s, $s > 0$ *tal que para* $\epsilon > 0$ *existe* $R = R(\epsilon) > 0$ *verificando para qualquer* $\varphi \in M$,

$$\int_{|x| \geqslant R} \left|\varphi(x)\right|^2 dx \leqslant \epsilon. \tag{2.60}$$

Então M *é relativamente compacto em* L^2.

Demonstração. Seja $K = \sup ||\varphi||_{L^1}$, $\varphi \in M$. Usando a identidade de Parseval

$$||\varphi(.+x) - \varphi(.)||_{L^2}^2 = \int_{|\xi| \leqslant R} |1 - e^{ix\xi}|^2 |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi + \int_{|\xi| > R} |1 - e^{ix\xi}|^2 |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi. \tag{2.61}$$

Como $|1 - e^{ix\xi}| \leqslant |x\xi|$ temos

$$\int_{|\xi| \leqslant R} |1 - e^{ix\xi}|^2 |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \leqslant R^2 |x|^2 ||u||_{L^2}^2. \tag{2.62}$$

Se $|\xi| > R$, então $|1 - e^{ix\xi}|^2 \leqslant 4R^{-2r}|\xi|^{2r}$, portanto

$$\int_{|\xi| > R} |1 - e^{ix\xi}|^2 |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \leqslant 4R^{-2r} ||D^r u||_{L^2}^2. \tag{2.63}$$

Escolhendo $R = |x|^{\frac{-1}{1+r}}$ obtemos

$$||\varphi(.+x) - \varphi(.)||_{L^2}^2 \leqslant 4|x|^{r/(1+r)} K. \tag{2.64}$$

Usando (2.60), (2.64) e o Lema 10, obtemos que M é relativamente compacto em L^2. □

Capítulo 3

Resultados principais

3.1 O problema linear regularizado

Provamos aqui que o problema (1.9) é globalmente bem posto e damos estimativas espaço-tempo da solução (indepedente de ϵ) que nos permitirão construir uma solução fraca. Começaremos por obter soluções locais. O método foi desenvolvido por D. Rial [23] e é uma modificação do usado por T. Kato em [14].

Definimos $X_T = C([0,T], L^2) \cap L_T^4 L_x^6$ com a norma

$$\|u\|_{X_T} = \|u\|_{L_T^\infty L_x^2} + \|u\|_{L_T^4 L_x^6}.$$

Primeiramente, obteremos o semigrupo $\cup_\epsilon$ associado ao operador $i\partial_x^2 - \epsilon\partial_x^{12}$, e apresentaremos estimativas de efeitos regularizantes do fluxo associado a ele, que serão usadas posteriormente.

Seja $K \in S(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{K}(\xi) = e^{-\xi^{12}}$, definimos

$$K_\epsilon(x,t) = (\epsilon t)^{-1/12} K((\epsilon t)^{-1/12} x). \tag{3.1}$$

Temos que

$$\|\partial_x^k K_\epsilon(.,t)\|_{L^1} \leqslant (\epsilon t)^{-k/12} \|\partial_x^k K\|_{L^1}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{3.2}$$

pois tomando $y = (\epsilon t)^{-1/12}$ temos:

$$\begin{aligned}
\|\partial_x^k K_\epsilon(.,t)\|_{L^1} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\partial_x^k\big((\epsilon t)^{-1/12}K((\epsilon t)^{-1/12}x)\big)\right|dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\partial_x^k\big(K((\epsilon t)^{-1/12}x)\big)\right|(\epsilon t)^{-1/12}dx = (\epsilon t)^{-k/12}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{d^k}{dy^k}K(y)\right|dy.
\end{aligned}$$

Para encontrar $\cup_\epsilon$, o semigrupo associado ao operador $i\partial_x^2 - \epsilon\partial_x^{12}$, consideremos o PVI

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = i\partial_x^2 u(x,t) - \partial_x^{12}u(x,t), \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{3.3}$$

Aplicando a transformada de Fourier em (3.3) temos:

$$\begin{aligned}
\partial_t\widehat{u}(\xi,t) &= -i\xi^2\widehat{u}(\xi,t) - \epsilon(i\xi)^{12}\widehat{u}(\xi,t) \\
&= -(i\xi^2 + \epsilon\xi^{12})\widehat{u}(\xi,t).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Integrando de 0 a t em ambos os lados da equação (3.4), obtemos:

$$\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{u_0}(\xi)e^{-t(i\xi^2+\epsilon\xi^{12})}. \tag{3.5}$$

Aplicando a tranformada Inversa de Fourier em (3.5), segue de (3.1) que

$$u(x,t) = (e^{-\epsilon\xi^{12}t}e^{-i\xi^2 t}\widehat{u_0}(\xi))^\vee(x,t) = \cup(t)u_0 * K_\epsilon(t),$$

Logo,

$$u(x,t) = \cup_\epsilon(t)u_0, \tag{3.6}$$

onde $\cup(t)$ é o grupo unitário que descreve a solução da equação de Schrödinger linear, que satisfaz as seguintes propriedades globais regularizantes:

Lema 12. *Se* $t \neq 0$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ *e* $p' \in [1,2]$, *então temos que* $\cup(t) : L^{p'}(\mathbb{R}^n) \mapsto L^p(\mathbb{R}^n)$ *é continuo e*

$$\|\cup(t)f\|_{L^p} \leqslant c|t|^{-n/2(1/p-1/p')}\|f\|_{L^{p'}}. \tag{3.7}$$

Demonstração. Ver o lema 4.6 de [19]. □

Lema 13. *O Grupo* $\cup(t)$ *satisfaz:*

$$||\cup(t)f||_{L^q_TL^p_x} \leqslant c||f||_{L^2}, \tag{3.8}$$

$$\Big|\Big|\int_{-\infty}^{+\infty} \cup(t-t')f(.,t')dt'\Big|\Big|_{L^q_TL^p_x} \leqslant c\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} ||f(.,t)||^{q'}_{L^{p'}}dt\Big),^{1/q'} \tag{3.9}$$

$$||\cup(t)f||_{L^2} \leqslant c||f||_{L^{q'}_TL^{p'}_x}, \tag{3.10}$$

com $2 \leqslant p \leqslant \infty$ *e* $\frac{2}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$.

Demonstração. Ver o teorema 4.8 de [19]. □

Assim, temos as seguintes estimativas no espaço-tempo do semigrupo $\cup_\epsilon$:

Lema 14. **(Efeitos regularizantes do semigrupo** $\cup_\epsilon(t)$**)** *Dados* $2 \leqslant p \leqslant \infty$ *e* $\epsilon > 0$ *valem*

$$||\cup_\epsilon(t)f||_{L^p} \leqslant C(p)t^{-(1/2-1/p)}||f||_{L^{p'}}, \tag{3.11}$$

$$||\cup_\epsilon(t)f||_{L^q_tL^p_x} \leqslant C(p)||f||_{L^2}, \tag{3.12}$$

$$||\cup_\epsilon(t)\partial^k_x f||_{L^p} \leqslant C(p,k,\epsilon)t^{-(1/2+k/12-1/p)}||f||_{L^{p'}}, \tag{3.13}$$

$$\tag{3.14}$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ *e* $\frac{2}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$.

Demonstração. Segue da desigualdade de Young (2.12) proposição 3, do fato que $K \in S(\mathbb{R})$ e da estimativa (3.7) que:

$$\begin{aligned} ||\cup_\epsilon(t)f||_{L^p} &\leqslant ||K_\epsilon(t)||_{L^1}||\cup(t)f||_{L^p} \\ &\leqslant C(p)|t|^{-1/2(1/p-1/p')}||f||_{L^{p'}} \\ &= C(p)t^{-(1/2-1/p)}||f||_{L^{p'}}. \end{aligned}$$

Analogamente, temos da desigualdade de Young (2.12) proposição 3, do fato que $K \in S(\mathbb{R})$ e da estimativa (3.9) que:

$$\begin{aligned} ||\cup_\epsilon(t)f||_{L^q_TL^p_x} &= ||K_\epsilon(t) * \cup(t)f||_{L^q_TL^p_x} \\ &\leqslant ||K_\epsilon(t)||_{L^q_TL^1_x}||\cup(t)f||_{L^q_TL^p_x} \\ &\leqslant C||\cup(t)f||_{L^q_TL^p_x} \leqslant C(p)||f||_{L^2}. \end{aligned}$$

Finalmente, da relação (3.2), da integração por partes e da estimativa (3.7) segue que

$$\begin{aligned}
\| \cup_\epsilon (t)\partial_x^k f\|_{L^p} &= \|\partial_x^k (K_\epsilon(t)) * \cup(t) f\|_{L^p}\\
&\leqslant \|\partial_x^k K_\epsilon(t)\|_{L^1}\| \cup (t) f\|_{L^p}\\
&\leqslant (\epsilon t)^{-k/12}\|\partial_x^k K\|_{L^1}\| \cup (t) f\|_{L^p}\\
&\leqslant C(p,k,\epsilon)|t|^{-1/2(1/p'-1/p)}(\epsilon t)^{-k/12}\|\partial_x^k K\|_{L^1}\|f\|_{L^{p'}}\\
&\leqslant C(p,k,\epsilon)t^{-\frac{2}{q}-\frac{k}{12}}(\epsilon)^{-k/12}\|f\|_{L^{p'}}\\
&\leqslant C(p,k,\epsilon)t^{-(\frac{1}{2}+\frac{k}{12}-\frac{1}{p})}\|f\|_{L^{p'}}.
\end{aligned}$$

□

Lema 15. *Se* $u_0 \in L^2$, *então* $\cup_\epsilon(t)u_0 \in X_T$.

Demonstração. Pelo item (3.12) do lema 14 temos

$$\| \cup_\epsilon (t)u_0\|_{L^2_x} \leqslant C\|u_0\|_{L^2_x}. \tag{3.15}$$

Logo, tomando o sup em relação a t em ambos os lados de (3.15), obtemos

$$\| \cup_\epsilon (t)u_0\|_{L^\infty_T L^2_x} \leqslant C\|u_0\|_{L^2_x}. \tag{3.16}$$

Agora, como

$$\begin{aligned}
\chi_{[0,T]}(t) \cup_\epsilon (t)u_0(x) &= \left(\chi_{[0,T]}(t)e^{-it(\xi^2-\xi^{12})}\widehat{u_0}(\xi)\right)^\vee(x)\\
&= \left(e^{-it(\xi^2-\xi^{12})}\chi_{[0,T]}(t)\widehat{u_0}(\xi)\right)^\vee(x)\\
&= \cup_\epsilon(t)(\chi_{[0,T]}(t)u_0(x)),
\end{aligned}$$

temos que

$$\|\chi_{[0,T]}(t) \cup_\epsilon (t)u_0\|_{L^4_t L^6_x} = \| \cup_\epsilon (t)\chi_{[0,T]}(t)u_0\|_{L^4_t L^6_x}$$

Finalmente, da desigualdade de Hölder e pelo item (3.13) do lema 14 temos

$$\begin{aligned}
\| \cup_\epsilon (t)u_0\|_{L^4_T L^6_x} &= \left(\int_0^T 1\| \cup_\epsilon (t)u_0\|^4_{L^6_x}dt\right)^{1/4}\\
&\leqslant \left(\int_0^T 1dt\right)^{1/12}\left(\int_0^T \| \cup_\epsilon (t)u_0\|^6_{L^6_x}dt\right)^{1/6}\\
&= T^{1/12}\| \cup_\epsilon (t)u_0\|_{L^6_T L^6_x}\\
&= T^{1/12}\| \cup_\epsilon (t)\chi_{[0,T]}(t)u_0\|_{L^6_t L^6_x} \leqslant CT^{1/12}\|u_0\|_{L^2_x}.
\end{aligned}\tag{3.17}$$

Daí segue que,

$$\begin{aligned}\|U_\epsilon(t)u_0\|_{X_T} &= \|U_\epsilon(t)u_0\|_{L^\infty_T L^2_x} + \|U_\epsilon(t)u_0\|_{L^4_T L^6_x}\\ &\leqslant C\|u_0\|_{L^2_x} + CT^{1/12}\|u_0\|_{L^2_x} \leqslant C\|u_0\|_{L^2_x},\end{aligned}$$

que implica $\cup_\epsilon(t)u_0 \in X_T$. □

Dado $u \in X_T$, consideremos

$$\Psi_{u_0}(u)(t) = \cup_\epsilon(t)u_0 + \int_0^t \cup_\epsilon(t-\tau)\partial_x F_\lambda d\tau. \tag{3.18}$$

3.2 O problema regularizado

Seja $X_T(u_0)$ a bola fechada em X_T de centro $\cup_\epsilon u_0$ e raio $\|u_0\|_{L^2}$; é claro que $X_T(u_0)$ é um espaço métrico completo com a norma $\|.\|_{X_T}$ uma vez que, X_T é a interseção de dois espaços de Banach normados e completos. Um ponto fixo de Ψ será uma solução local do problema regularizado. Então a idéia para obter soluções locais é utilizar o teorema do ponto fixo de Banach. Para isto precisamos do seguinte lema:

Lema 16. *Com as definições acima, temos:*

1. $\Psi_{u_0}(u) \in X_T$ *para* $u_0 \in X_T$.

2. *Se* T *é suficientemente pequeno* $\Psi(X_T(u_0)) \subset X_T(u_0)$ *e* $\Psi\big|_{X_T(u_0)}$ *é uma contração.*

Demonstração. 1. Definimos $\Phi(u)$ como

$$\Phi(u)(t) = \int_0^t \cup_\epsilon(t-\tau)\partial_x F_\lambda(u(\tau))d\tau. \tag{3.19}$$

Como já sabemos que $\cup_\epsilon(t)u_0 \in X_T$, basta mostrarmos que $\Phi(u) \in X_T$. Por (3.13) com $p = 2$ temos

$$\|\Phi(u)(t)\|_{L^2} \leqslant \int_0^t \| \cup_\epsilon (t-\tau)\partial_x F_\lambda(u(\tau))\|_{L^2} d\tau \leqslant C\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{12}}\|F_\lambda(u(\tau))\|_{L^2} d\tau. \tag{3.20}$$

Usando (2.47) em (3.20) e a desigualdade de Hölder com $p_1 = 4$ e $p_2 = 4/3$, obtemos

$$\begin{aligned}\|\Phi(u)(t)\|_{L^2} &\leqslant C\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{12}}\|u(\tau)\|^3_{L^6} d\tau \qquad (3.21)\\ &\leqslant C\Big(\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{3}}d\tau\Big)^{1/4}\Big(\int_0^t \|u(\tau)\|^4_{L^6_x} d\tau\Big)^{3/4}\\ &\leqslant C\Big(\int_0^t \nu^{-\frac{1}{3}}d\nu\Big)^{1/4}\|u(\tau)\|^3_{L^4_T L^6_x}\\ &= C\Big(\frac{t^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}+1}\Big)\|u(\tau)\|^3_{L^4_T L^6_x} \leqslant CT^{\frac{1}{6}}\|u(\tau)\|^3_{L^4_T L^6_x} < \infty,\end{aligned}$$

pois $u \in X_T$. Tomando o sup em t do lado esquerdo de (3.21) obtemos:

$$||\Phi(u)(t)||_{L^\infty_T L^2_x} \leqslant CT^{\frac{1}{6}}||u(\tau))||^3_{L^4_T L^6_x} < \infty. \tag{3.22}$$

Logo, $\Phi(u)(t) \in L^\infty_T L^2_x$.

Agora, de (3.13) com $p = 6$ e de (2.47) com $p = \frac{6}{5}$, segue que

$$\begin{aligned} ||\Phi(u)(t)||_{L^6} &\leqslant \int_0^t || \cup_\epsilon (t-\tau)\partial_x F_\lambda(u(\tau))||_{L^6} d\tau \\ &= C\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{5}{12}}||F_\lambda(u(\tau))||_{L^{\frac{6}{5}}} d\tau \\ &\leqslant C\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{5}{12}}||u(\tau)||^3_{L^{\frac{18}{5}}} d\tau. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Pela proposição 2 com $p = 2, r = 6, q = \dfrac{18}{5}$, $2 \leqslant \dfrac{18}{5} \leqslant 6$ e $\theta = \dfrac{1/q - 1/r}{1/p - 1/r} = \dfrac{5/18 - 1/6}{1/2 - 1/6} = \dfrac{2/18}{2/8} = \dfrac{1}{3}$, obtemos

$$||u||_{L^{\frac{18}{5}}} \leqslant ||u||^{1/3}_{L^2}||u||^{2/3}_{L^6}. \tag{3.24}$$

Substituindo (3.24) em (3.23) e tomando o sup em t no lado direito de (3.23), obtemos

$$\begin{aligned} ||\Phi(u)(t)||_{L^6} &\leqslant C\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{5}{12}}||u(\tau)||_{L^2}||u(\tau)||^2_{L^6} d\tau \\ &\leqslant C||u(\tau)||_{L^\infty_T L^2_x}\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{5}{12}}||u(\tau)||^2_{L^6} d\tau. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Pelo Teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev com $q = 4$ e $p = \frac{3}{2}$ e pela desigualdade de Hölder com $p_1 = 4$ e $p_2 = \frac{4}{3}$, temos

$$\begin{aligned} ||\Phi(u)(t)||_{L^4_T L^6_x} &\leqslant C||u(\tau)||_{L^\infty_T L^2_x}\Big|\Big|\int_0^T \frac{||u(\tau)||^2_{L^6}}{|t-\tau|^{\frac{5}{12}}} d\tau\Big|\Big|_{L^4} \\ &\leqslant C||u(\tau)||_{L^\infty_T L^2_x}\Big(\int_0^T ||u(\tau)||^3_{L^6} d\tau\Big)^{\frac{2}{3}} \\ &\leqslant CT^{1/6}||u(\tau)||_{L^\infty_T L^2_x}||u||^2_{L^4_T L^6_x} < \infty, \end{aligned} \tag{3.26}$$

pois $u \in X_T$. Logo $\Phi(u)(t) \in L^4_T L^6_x$. Temos então que $\Phi(u) \in X_T$. Como $u \in X_T(u_0)$, segue de (3.17) que

$$||u||_{X_T} \leqslant ||u_0||_{L^2} + || \cup_\epsilon (.)u_0||_{L^\infty_T L^2_x} + || \cup_\epsilon (.)u_0||_{L^4_T L^6_x} \leqslant C(1 + T^{1/12})||u_0||_{L^2}. \tag{3.27}$$

De (3.21) e (3.26) vale

$$\begin{aligned}||\Phi(u)(t)||_{X_T} &= ||\Phi(u)(t)||_{L^\infty_T L^2_x} + ||\Phi(u)(t)||_{L^4_T L^6_x}\\ &\leqslant CT^{\frac{1}{6}}||u||^3_{L^4_T L^6_x} + CT^{1/6}||u||_{L^\infty_T L^2_x}||u||^2_{L^4_T L^6_x} \leqslant CT^{\frac{1}{6}}||u||^3_{X_T}. \qquad (3.28)\end{aligned}$$

Então de (3.27) e (3.28), existe $T = T(\lambda, \epsilon, ||u_0||_{L^2}) > 0$ tal que

$$||\Phi(u)||_{X_T} \leqslant CT^{\frac{1}{6}}||u||^3_{X_T} \leqslant C^4 T^{1/6}(1 + T^{1/12})^3||u_0||^2_{L^2}||u_0||_{L^2}.$$

Tomando então $T > 0$ tal que $C^4T^{1/6}(1 + T^{1/12})^3||u_0||^2_{L^2} \leqslant 1$, segue que

$$||\Phi(u)||_{X_T} \leqslant ||u_0||_{L^2}. \qquad (3.29)$$

Resta provarmos que $\Psi\Big|_{X_T(u_0)} : X_T(u_0) \longrightarrow X_T(u_0)$ é uma contração. Sejam $u, v \in X_T(u_0)$, de (3.13) e (2.48) segue que

$$\begin{aligned}||\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)||_{L^2} &\leqslant \int_0^t \Big|\Big| \cup_\epsilon (t-\tau)\big[\partial_x\big(F_\lambda(u(\tau)) - F_\lambda(v(\tau))\big)\big]\Big|\Big|_{L^2} d\tau\\ &\leqslant C\int_0^t (t-\tau)^{-(\frac{1}{2}+\frac{1}{12}-\frac{1}{2})}\Big|\Big|F_\lambda(u(\tau)) - F_\lambda(v(\tau))\Big|\Big|_{L^2} d\tau\\ &\leqslant C\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{12}}\big(||u(\tau)||^2_{L^6} + ||v(\tau)||^2_{L^6}\big)\Big|\Big|u(\tau)) - v(\tau)\Big|\Big|_{L^6} d\tau,\end{aligned} \qquad (3.30)$$

$$\begin{aligned}||\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)||_{L^6} &\leqslant \int_0^t \Big|\Big| \cup_\epsilon (t-\tau)\big[\partial_x\big(F_\lambda(u(\tau)) - F_\lambda(v(\tau))\big)\big]\Big|\Big|_{L^6} d\tau\\ &\leqslant C\int_0^t (t-\tau)^{-(\frac{1}{2}+\frac{1}{12}-\frac{1}{6})}\Big|\Big|F_\lambda(u(\tau)) - F_\lambda(v(\tau))\Big|\Big|_{L^{\frac{6}{5}}} d\tau\\ &\leqslant C\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{5}{12}}\big(||u(\tau)||^2_{L^{\frac{18}{5}}} + ||v(\tau)||^2_{L^{\frac{18}{5}}}\big)\Big|\Big|u(\tau)) - v(\tau)\Big|\Big|_{L^{\frac{18}{5}}} d\tau.\end{aligned} \qquad (3.31)$$

A desigualdade de Hölder com $p_1 = 4, p_2 = 2, p_3 = 4$ e (3.30) implicam

$$
\begin{aligned}
\|\Phi(u)(t)-\Phi(v)(t)\|_{L^2} &\leqslant C\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{12}}\big(\|u(\tau)\|_{L^6}^2+\|v(\tau)\|_{L^6}^2\big)\big\|u(\tau))-v(\tau)\big\|_{L^6}d\tau\\
&\leqslant C\Big(\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{3}}d\tau\Big)^{1/4}\Big(\int_0^t \big(\|u(\tau)\|_{L^6}^2+\|v(\tau)\|_{L^6}^2\big)^2 d\tau\Big)^{1/2}\\
&\times\Big(\int_0^t \big\|u(\tau))-v(\tau)\big\|_{L^6}d\tau\Big)^{1/4}\\
&\leqslant CT^{\frac{2}{3}\frac{1}{4}}\Big[\Big(\int_0^t \|u(\tau)\|_{L^6}^4 d\tau\Big)^{1/2}+\Big(\int_0^t \|v(\tau)\|_{L^6}^4\Big)^{1/2}d\tau\Big]\\
&\times\Big(\int_0^t \big\|u(\tau))-v(\tau)\big\|_{L^6}d\tau\Big)^{1/4}\\
&= CT^{\frac{1}{6}}\Big(\|u(\tau)\|_{L_T^4L_x^6}^2+\|v(\tau)\|_{L_T^4L_x^6}^2\Big)\big\|u(\tau))-v(\tau)\big\|_{L_T^4L_x^6}\\
&\leqslant CT^{\frac{1}{6}}\Big(\|u(\tau)\|_{X_T}^2+\|v(\tau)\|_{X_T}^2\Big)\big\|u(\tau))-v(\tau)\big\|_{X_T}.
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

Combinando (3.24), (3.31) e o fato que $\|u(t)\|_{L^2}\leqslant\|u\|_{X_T}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\|\Phi(u)(t)-\Phi(v)(t)\|_{L^6} &\leqslant C\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{5}{12}}\Big(\|u(\tau)\|_{L^{\frac{18}{5}}}^2+\|v(\tau)\|_{L^{\frac{18}{5}}}^2\Big)\big\|u(\tau))-v(\tau)\big\|_{L^{\frac{18}{5}}}d\tau\\
&\leqslant C\int_0^t \Big[(t-\tau)^{-\frac{5}{12}}\Big(\|u(\tau)\|_{L^2}^{\frac{2}{3}}\|u(\tau)\|_{L^6}^{\frac{4}{3}}+\|v(\tau)\|_{L^2}^{\frac{2}{3}}\|v(\tau)\|_{L^6}^{\frac{4}{3}}\Big)\\
&\times\big\|u(\tau))-v(\tau)\big\|_{L^2}^{\frac{1}{3}}\big\|u(\tau))-v(\tau)\big\|_{L^6}^{\frac{2}{3}}\Big]d\tau\\
&\leqslant C\int_0^t \Big[(t-\tau)^{-\frac{5}{12}}\Big(\|u(\tau)\|_{L^2}+\|v(\tau)\|_{L^2}\Big)^{\frac{2}{3}}\Big(\|u(\tau)\|_{L^6}+\|v(\tau)\|_{L^6}\Big)^{\frac{4}{3}}\\
&\times\big\|u(\tau))-v(\tau)\big\|_{L^2}^{\frac{1}{3}}\big\|u(\tau))-v(\tau)\big\|_{L^6}^{\frac{2}{3}}\Big]d\tau\\
&\leqslant C\Big(\|u(\tau)\|_{X_T}+\|v(\tau)\|_{X_T}\Big)^{\frac{2}{3}}\big\|u(\tau))-v(\tau)\big\|_{X_T}^{\frac{1}{3}}\\
&\times\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{5}{12}}\Big(\|u(\tau)\|_{L^6}+\|v(\tau)\|_{L^6}\Big)^{\frac{4}{3}}\big\|u(\tau))-v(\tau)\big\|_{L^6}^{\frac{2}{3}}d\tau.
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

Aplicando em (3.33) o Teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev com $p=\frac{3}{2}, q=4$ obtemos

$$
\begin{aligned}
\|\Phi(u)(t)-\Phi(v)(t)\|_{L_T^4L_x^6} &\leqslant C\Big(\|u(\tau)\|_{X_T}+\|v(\tau)\|_{X_T}\Big)^{\frac{2}{3}}\big\|u(\tau))-v(\tau)\big\|_{X_T}^{\frac{1}{3}}\\
&\times\Big\|\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{5}{12}}\Big(\|u(\tau)\|_{L^6}+\|v(\tau)\|_{L^6}\Big)^{\frac{4}{3}}\big\|u(\tau))-v(\tau)\big\|_{L^6}^{\frac{2}{3}}d\tau\Big\|_{L_T^4}\\
&\leqslant C\Big(\|u(\tau)\|_{X_T}+\|v(\tau)\|_{X_T}\Big)^{\frac{2}{3}}\big\|u(\tau))-v(\tau)\big\|_{X_T}^{\frac{1}{3}}\\
&\times\Big(\int_0^t \Big(\|u(\tau)\|_{L^6}+\|v(\tau)\|_{L^6}\Big)^2\big\|u(\tau))-v(\tau)\big\|_{L^6}d\tau\Big)^{\frac{2}{3}}.
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

Aplicando em (3.34) a desigualdade de Hölder com $p_1 = 4, p_2 = 2$ e $p_3 = 4$ obtemos

$$
\begin{aligned}
\|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)\|_{L^4_T L^6_x} &\leqslant C\Big(\|u(\tau)\|_{X_T} + \|v(\tau)\|_{X_T}\Big)^{\frac{2}{3}} \big\|u(\tau)) - v(\tau)\big\|_{X_T}^{\frac{1}{3}} \\
&\times \Big(\int_0^t 1 d\tau\Big)^{\frac{1}{6}} \Big(\int_0^t \big(\|u(\tau)\|_{L^6} + \|v(\tau)\|_{L^6}\big)^4 d\tau\Big)^{\frac{1}{3}} \\
&\times \Big(\int_0^t \big\|u(\tau)) - v(\tau)\big\|_{L^6} d\tau\Big)^{\frac{1}{6}} \\
&\leqslant C\Big(\|u(\tau)\|_{X_T} + \|v(\tau)\|_{X_T}\Big)^{\frac{2}{3}} \big\|u(\tau)) - v(\tau)\big\|_{X_T}^{\frac{1}{3}} \\
&\times T^{\frac{1}{6}} \Big(\int_0^t \big(\|u(\tau)\|_{L^6}^4 + \|v(\tau)\|_{L^6}^4\big) d\tau\Big)^{\frac{1}{3}} \Big(\int_0^t \big\|u(\tau)) - v(\tau)\big\|_{L^6} d\tau\Big)^{\frac{1}{6}} \\
&\leqslant C\Big(\|u(\tau)\|_{X_T}^2 + \|v(\tau)\|_{X_T}^2\Big)^{\frac{2}{3}} \big\|u(\tau)) - v(\tau)\big\|_{X_T}^{\frac{1}{3}} \\
&\times T^{\frac{1}{6}} \Big(\|u(\tau)\|_{X_T}^2 + \|v(\tau)\|_{X_T}^2\Big)^{\frac{1}{3}} \big\|u(\tau)) - v(\tau)\big\|_{X_T}^{\frac{2}{3}} \\
&= CT^{\frac{1}{6}} \Big(\|u(\tau)\|_{X_T}^2 + \|v(\tau)\|_{X_T}^2\Big) \big\|u(\tau)) - v(\tau)\big\|_{X_T}.
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

Finalmente de (3.27), (3.30) e (3.35) temos

$$
\begin{aligned}
\|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)\|_{X_T} &= \|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)\|_{L^\infty_T L^2_x} + \|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)\|_{L^4_T L^6_x} \\
&\leqslant 2CT^{\frac{1}{6}} \Big(\|u(\tau)\|_{X_T}^2 + \|v(\tau)\|_{X_T}^2\Big) \big\|u(\tau)) - v(\tau)\big\|_{X_T} \\
&\leqslant CT^{\frac{1}{6}} \Big[\Big(C(1 + T^{1/12})\|u_0\|_{L^2}\Big)^2 + \Big(C(1 + T^{1/12})\|u_0\|_{L^2}\Big)^2\Big] \\
&\times \big\|u(\tau)) - v(\tau)\big\|_{X_T} \\
&\leqslant CT^{\frac{1}{6}} (1 + T^{1/12})^2 \|u_0\|_{L^2}^2 \big\|u(\tau)) - v(\tau)\big\|_{X_T}.
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

Então escolhendo $T > 0$ suficientemente pequeno de modo que $CT^{\frac{1}{6}}(1+T^{1/12})^2\|u_0\|_{L^2}^2 \leqslant 1$ temos que a restrição $\Phi\Big|_{X_T(u_0)}$ é uma contração. □

Mostraremos agora que o problema de valor inicial (1.9) é globalmente bem posto em L^2. O argumento chave para esta prova são os efeitos dissipativos do termo não local, que provém do ganho de meia derivada para $|u|^2$.

Proposição 9. *Para o problema* (1.1) *vale*

$$
\frac{d}{dt}\|u\|_{L^2}^2 = \frac{\lambda}{2}\|D^{1/2}(|u|^2)\|_{L^2}^2. \tag{3.37}
$$

Demonstração. Multiplicando a equação (1.1) por $\overline{u}$ e depois integrando em $\mathbb{R}$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} (\partial_t u)\overline{u}dx = \int_{\mathbb{R}} (i\partial_x^2 u)\overline{u}dx + \int_{\mathbb{R}} \partial_x(F_\lambda(u))\overline{u}dx. \tag{3.38}$$

Tomando a parte real em ambos os lados de (3.38), temos

$$\langle \partial_t u, u\rangle = \langle i\partial_x^2 u, u\rangle + \langle \partial_x(F_\lambda(u)), u\rangle. \tag{3.39}$$

Por outro lado, sabemos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u||_{L^2}^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle u, u\rangle = \frac{1}{2}\left[\langle \partial_t u, u\rangle + \langle u, \partial_t u\rangle\right] = \langle \partial_t u, u\rangle. \tag{3.40}$$

Logo, de (3.39) e (3.40) temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u||_{L^2}^2 = \langle i\partial_x^2 u, u\rangle + \langle \partial_x(F_\lambda(u)), u\rangle. \tag{3.41}$$

Pela definição, temos explicitamente de (3.41) que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u||_{L^2}^2 = \mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}} (i\partial_x^2 u)\overline{u}dx + \mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}} \left(\partial_x(|u|^2 u)\right)\overline{u}dx + \mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}} \lambda\left(\partial_x(\mathcal{H}(|u|^2)u)\right)\overline{u}dx. \tag{3.42}$$

Integrando por partes cada um dos termos do lado direito de (3.42) temos

$$\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}} (i\partial_x^2 u)\overline{u}dx = -\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}} i\partial_x u\partial_x\overline{u}dx = -\mathrm{Re}\ i\int_{\mathbb{R}} |\partial_x u|^2 dx = 0,$$

e, chamando $u = u_1 + iu_2$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}} \left(\partial_x(|u|^2 u)\right)\overline{u}dx &= -\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}} (|u|^2 u)\partial_x\overline{u}dx = -\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}} |u|^2\left(u\partial_x\overline{u}\right)dx \\ &= -\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}} |u|^2\frac{1}{2}\partial_x(|u|^2)dx - \mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}} i(u_2\partial_x u_1 + u_1\partial_x u_2)dx \\ &= -\mathrm{Re}\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}\partial_x(|u|^4)dx = \frac{1}{4}|u|^4\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0.\end{aligned}$$

Finalmente, pelo Teorema de Plancherel e pela propriedade da transformada de Hilbert

(Proposição 5), temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\int_{\mathbb{R}} \lambda\partial_x(\mathcal{H}(|u|^2)u)\overline{u}dx &= -\operatorname{Re}\int_{\mathbb{R}} \lambda\mathcal{H}(|u|^2)(u\partial_x\overline{u})dx \\
&= -\operatorname{Re}\int_{\mathbb{R}} \lambda\mathcal{H}(|u|^2)\frac{1}{2}\partial_x(|u|^2)dx - \operatorname{Re}\int_{\mathbb{R}} \lambda\mathcal{H}(|u|^2)i(u_2\partial_x u_1 - u_1\partial_x u_2)dx \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_{\mathbb{R}} \lambda\partial_x(\mathcal{H}(|u|^2))|u|^2dx \\
&= \frac{\lambda}{2}\operatorname{Re}\int_{\mathbb{R}} i\xi(-i)\ \operatorname{sgn}(\xi)\widehat{|u|^2}(\xi)\overline{\widehat{|u|^2}}(\xi)d\xi \\
&= \frac{\lambda}{2}\operatorname{Re}\int_{\mathbb{R}} \left|\ |\xi|^{\frac{1}{2}}\widehat{|u|^2}(\xi)\right|^2 d\xi \\
&= \lambda\|D^{\frac{1}{2}}(|u|^2)\|_{L^2}^2,
\end{aligned}$$

onde u_1 e u_2 são as partes real e imaginária de u, respectivamente. Logo, obtemos (3.37). □

Proposição 10. *Seja* $\epsilon > 0$, *então dada a função* $u_0 \in L^2$ *existe uma única* $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+, L^2) \cap L_t^6 L_x^6$ *solução de*

$$u(t) = \cup_\epsilon(t)u_0 + \int_0^t \cup_\epsilon(t-\tau)\partial_x F_\lambda(u(\tau))d\tau. \tag{3.43}$$

Além disso, $u \in C^\infty((0,\infty), H^\infty)$ *e para* $2 \leqslant p < \infty$ *existe* $C = C(p) > 0$ *tal que*

$$\|u\|_{L_t^q L_x^p} \leqslant C(p)\|u_0\|_{L^2}, \tag{3.44}$$

com $\frac{2}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$.

Demonstração. Pelo Lema 16 existe $T = T(\lambda, \epsilon, \|u_0\|_{L^2}) > 0$ tal que $\Phi\Big|_{X_T(u_0)}$ é uma contração. Portanto, existe $u \in X_T$ solução local de $u = \Phi(u)$.

Sejam $u, v \in X_T$ soluções de (3.43). Se $R = max\{\ \|u\|_{X_T}, \|v\|_{X_T}\}$. Então por (3.29) existe $T' = T'(R) < T$ tal que

$$\|u(t) - U_\epsilon(t)u_0\|_{X_T} = \|\Phi(u)\|_{X_T} = \|u\|_{X_T} \leqslant R \leqslant \|u_0\|_{L2},$$

e

$$\|v(t) - U_\epsilon(t)u_0\|_{X_T} = \|\Phi(v)\|_{X_T} \leqslant R \leqslant \|u_0\|_{L2}.$$

Assim, concluimos que $u, v \in X_T(u_0)$, por termos unicidade na bola $X_T(u_0)$, segue que $u \equiv v$, $\forall\ t \in [0, T']$. Como T' só depende de R podemos repetir o mesmo argumento para o intervalo $[T', 2T']$, continuamos o processo até cobrir o intervalo $[0, T]$, obtendo a unicidade em todo o intervalo. Definimos $T^* = T^*(\lambda, \epsilon, u_0)$ como

$$T^* = \sup\{\ T > 0;\ \text{existe } u \in X_T, u = \Phi(u)\ \}. \tag{3.45}$$

Claramente $T^* > T$. Mostraremos que $u \in C^\infty((0, T^*), H^\infty)$. Para isto, basta provarmos que dados $0 < t_0 < t_1 < T^*$, $u \in C^m([t_0, t_1], H^k)$ para $k, m \in \mathbb{N}$. Afirmamos que a aplicação $t \longmapsto \|\partial_x^k u\|_{L^2}$ é limitada. Argumentaremos via indução.

De fato, se $k = 1$, (3.13) com $p = 2$, $k = 2$ e (2.47) implicam

$$\begin{aligned}
\|\partial_x u(t)\|_{L^2} &\leqslant \|\cup_\epsilon(t)\partial_x u_0\|_{L^2} + \int_0^t \big\|\cup_\epsilon(t-\tau)\partial_x^2 F_\lambda(u(\tau))\big\|_{L^2} d\tau \\
&\leqslant C t_0^{-\frac{1}{12}} \|u_0\|_{L^2} + C\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{6}} \big\|F_\lambda(u(\tau))\big\|_{L^2} d\tau \\
&\leqslant C t_0^{-\frac{1}{12}} \|u_0\|_{L^2} + C\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{6}} \big\|u\big\|_{L^6}^3 d\tau.
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Pela desigualdade de Hölder com $p_1 = 4$ e $p_2 = \frac{4}{3}$ obtemos

$$\begin{aligned}
\|\partial_x u(t)\|_{L^2} &\leqslant C t_0^{-\frac{1}{12}} \|u_0\|_{L^2} + C\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{6}} \big\|u\big\|_{L^6}^3 d\tau \\
&\leqslant C t_0^{-\frac{1}{12}} \|u_0\|_{L^2} + C\Big(\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{2}{3}} d\tau\Big)^{\frac{1}{4}} \Big(\int_0^t \big\|u\big\|_{L^6}^4 d\tau\Big)^{\frac{3}{4}} \\
&\leqslant C t_0^{-\frac{1}{12}} \|u_0\|_{L^2} + C t_1^{\frac{1}{12}} \|u\|_{L^4_{[t_0,t_1]} L^6_x}^3.
\end{aligned}$$

Se $k > 1$ temos de maneira análoga que

$$\begin{aligned}
\|\partial_x^k u(t)\|_{L^2} &\leqslant \|\cup_\epsilon(t)\partial_x^k u_0\|_{L^2} + \int_0^t \big\|\cup_\epsilon(t-\tau)\partial_x^{k+1} F_\lambda(u(\tau))\big\|_{L^2} d\tau \\
&\leqslant C t_0^{-\frac{k}{12}} \|u_0\|_{L^2} + \int_0^t \big\|\cup_\epsilon(t-\tau)\partial_x^2\partial_x^{k-1} F_\lambda(u(\tau))\big\|_{L^2} d\tau \\
&\leqslant C t_0^{-\frac{k}{12}} \|u_0\|_{L^2} + C\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{6}} \big\|\partial_x^{k-1} F_\lambda(u(\tau))\big\|_{L^2} d\tau \\
&\leqslant C t_0^{-\frac{k}{12}} \|u_0\|_{L^2} + C\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{6}} \big\|F_\lambda(u(\tau))\big\|_{H^{k-1}} d\tau.
\end{aligned} \tag{3.47}$$

De (2.48) e pela desigualdade de Hölder com $p_1 = 4$ e $p_2 = \frac{4}{3}$ temos

$$\begin{aligned}
\|\partial_x^k u(t)\|_{L^2} &\leqslant C t_0^{-\frac{k}{12}} \|u_0\|_{L^2} + C\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{6}} \|u\|_{H^{k-1}}^3 d\tau \\
&\leqslant C t_0^{-\frac{k}{12}} \|u_0\|_{L^2} + C\|u\|_{L_T^\infty H^{k-1}}^3 \Big(\int_0^t 1.(t-\tau)^{-\frac{1}{6}} d\tau\Big) \\
&\leqslant C t_0^{-\frac{k}{12}} \|u_0\|_{L^2} + C\|u\|_{L_T^\infty H^{k-1}}^3 t_1^{\frac{3}{4}} \big(3 t_1^{\frac{1}{12}}\big) \\
&= C t_0^{-\frac{k}{12}} \|u_0\|_{L^2} + C t_1^{\frac{5}{6}} \|u\|_{L_T^\infty H^{k-1}}^3 < \infty.
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Portanto, vale a afirmação. Como $u \in C([t_0,t_1],L^2)$, segue que $u \in C_w([t_0,t_1],H^k)$. Dados $m,k \in \mathbb{N}$ e $N = k+12(m+1)$ sendo u solução de (3.43) e $u \in C_w([t_0,t_1],H^N)$ temos que $u \in C_w^{m+1}([t_0,t_1],H^k)$ e então $u \in C^m([t_0,t_1],H^k)$.

Aplicando o mesmo processo usado na demonstração da Proposição 9 à equação (1.9) obtemos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u||_{L^2}^2 = \langle i\partial_x^2 u, u\rangle - \epsilon\langle \partial_x^{12}u,u\rangle + \langle \partial_x(F_\lambda(u)),u\rangle. \tag{3.49}$$

Da demonstração da Proposição 9, temos que $\langle i\partial_x^2 u,u\rangle = \langle \partial_x(|u|^2u),u\rangle = 0$ e $\langle \partial_x(\mathcal{H}(|u|^2)u),u\rangle = \lambda||D^{\frac{1}{2}}(|u|^2)||_{L^2}^2$. Logo, basta apenas calcularmos o segundo termo do lado direito de (3.49).

Com efeito,

$$\epsilon\langle \partial_x^{12}u,u\rangle = \mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}} \epsilon\big(\partial_x^{12}u\big)\overline{u}dx = \mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}} \epsilon(\partial_x^6 u)\overline{\partial_x^6 u}dx = \epsilon||\partial_x^6 u||_{L^2}^2.$$

Logo, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u||_{L^2}^2 = -\epsilon||\partial_x^6 u||_{L^2}^2 + \lambda||D^{\frac{1}{2}}(|u|^2)||_{L^2}^2. \tag{3.50}$$

Integrando em t a equação (3.50) acima, temos

$$||u(t)||_{L^2}^2 - ||u(0)||_{L^2}^2 + \int_0^t \epsilon||\partial_x^6 u(\tau)||_{L^2}^2 d\tau + |\lambda|\int_0^t ||D^{\frac{1}{2}}(|u|^2)||_{L^2}^2 d\tau = 0,$$

e portanto,

$$||u(t)||_{L^2}^2 + |\lambda|\int_0^t ||D^{\frac{1}{2}}(|u|^2)||_{L^2}^2 d\tau + \int_0^t \epsilon||\partial_x^6 u(\tau)||_{L^2}^2 d\tau = ||u_0||_{L^2}^2. \tag{3.51}$$

Logo $||u(t)||_{L^2} \leqslant ||u(0)||_{L^2}$. Pelos argumentos usuais de extensão de soluções, temos que $T^* = \infty$. Seja $p \geqslant 2$; então aplicando (2.37) a $|u|^2$ temos

$$\begin{aligned} ||u||_{L^p}^q = ||\,|u|^2||_{L^{p/2}}^{q/2} &\leqslant C||u||_{L^2}^{\frac{4}{p}\frac{q}{2}}||D^{1/2}(|u|^2)||_{L^2}^{(\frac{p-2}{p})\frac{q}{2}} \\ &= C||u||_{L^2}^{\frac{2q}{p}}||D^{1/2}(|u|^2)||_{L^2}^{(\frac{4}{q})\frac{q}{2}} \\ &= C||u||_{L^2}^{2q/p}||D^{1/2}(|u|^2)||_{L^2}^2. \end{aligned} \tag{3.52}$$

De (3.52) temos

$$\begin{aligned} \int_0^T ||u(\tau)||_{L^p}^q d\tau &\leqslant C\int_0^T ||u(\tau)||_{L_x^2}^{2q/p}||D^{1/2}(|u(\tau)|^2)||_{L^2}^2 d\tau \\ &\leqslant C||u||_{L_t^\infty L_x^2}^{2q/p}\int_0^\infty ||D^{1/2}(|u(\tau)|^2)||_{L^2}^2 d\tau. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Combinando (3.51) e (3.53) temos

$$\|u\|_{L_t^q L_x^p} \leqslant C\|u(\tau)\|_{L_t^\infty L_x^2}^{2q/p} \int_0^\infty \|D^{1/2}(|u(\tau)|^2)\|_{L^2}^2 d\tau \leqslant C\|u_0\|_{L^2}^{2q/p}\|u_0\|_{L^2}^2 \leqslant C\|u_0\|_{L^2}^2.$$

□

3.3 Propriedades Suavizantes

Nesta seção, estudaremos os efeitos regularizantes de (1.1). Provaremos que a solução u de (1.9) satisfaz $u \in L^2_{loc}((0,\infty), H^{1/4}_{loc})$. Mostraremos a seguir uma propriedade suavizante da equação (1.1) que será usada para provar que uma sequencia de soluções aproximadas converge a uma solução fraca. Os argumentos usados na prova são argumentos de compacidade ou modificações dos argumentos usados em [22] para a equação de Beinjamin-Ono.

Lema 17. *Sejam* $\lambda > 0$, $\omega \in H^\infty$ *e* Ω *uma primitiva de* $|\omega|^2$. *Dados* $\epsilon > 0$ *e* u *a solução correspondente do problema 1.9, vale a seguinte identidade:*

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\langle \Omega J^{-1/4}P_+u, J^{-1/4}P_+u\rangle - \langle \Omega J^{-1/4}P_-u, J^{-1/4}P_-u\rangle\big)\\
&\quad = \|\omega J^{1/4}P_+u(t)\|_{L_x^2}^2 + \|\omega J^{1/4}P_-u(t)\|_{L_x^2}^2 + R,
\end{aligned} \tag{3.54}$$

com $\int_0^T |R(t)|dt \leqslant C(T,\omega,\|u_0\|_{L^2})$, *independente de* $\epsilon > 0$.

Demonstração. Como Ω toma valores reais e $\langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle \Omega J^{-1/4}P_\pm u, J^{-1/4}P_\pm u\rangle &= \frac{1}{2}\Big[\langle \Omega J^{-1/4}P_\pm \partial_t u, J^{-1/4}P_\pm u\rangle\\
&\quad + \langle \Omega J^{-1/4}P_\pm u, J^{-1/4}P_\pm \partial_t u\rangle\Big]\\
&= \frac{1}{2}\Big[\langle \Omega J^{-1/4}P_\pm \partial_t u, J^{-1/4}P_\pm u\rangle + \langle J^{-1/4}P_\pm u, \Omega J^{-1/4}P_\pm \partial_t u\rangle\Big]\\
&= \frac{1}{2}\Big[\langle \Omega J^{-1/4}P_\pm \partial_t u, J^{-1/4}P_\pm u\rangle + \langle \Omega J^{-1/4}P_\pm \partial_t u, J^{-1/4}P_\pm u\rangle\Big]\\
&= \langle \Omega J^{-1/4}P_\pm \partial_t u, J^{-1/4}P_\pm u\rangle.
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Como u satisfaz (1.9), temos imediatamente que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle \Omega J^{-1/4}P_\pm u, J^{-1/4}P_\pm u\rangle &= \langle i\Omega\partial_x^2 J^{-1/4}P_\pm u, J^{-1/4}P_\pm u\rangle\\
&\quad - \epsilon\langle \Omega\partial_x^{12} J^{-1/4}P_\pm u, J^{-1/4}P_\pm u\rangle + \langle \Omega\partial_x J^{-1/4}P_\pm F_\lambda(u), J^{-1/4}P_\pm u\rangle.
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Integrando por partes o primeiro termo do lado direito de (3.56) obtemos

$$\begin{aligned}
\langle i\Omega\partial_x^2 J^{-1/4}P_\pm u, J^{-1/4}P_\pm u\rangle &= \mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}} i\Omega\partial_x^2 J^{-1/4}P_\pm u\ \overline{J^{-1/4}P_\pm u}dx\\
&= -\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}} i\partial_x J^{-1/4}P_\pm u\ \overline{\partial_x(\Omega J^{-1/4}P_\pm u)}dx\\
&= -\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}} i\partial_x J^{-1/4}P_\pm u\ \overline{|\omega|^2 J^{-1/4}P_\pm u}dx\\
&- \mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}} i\partial_x J^{-1/4}P_\pm u\ \Omega\overline{\partial_x(J^{-1/4}P_\pm u)}dx\\
&= -\langle i\Omega\partial_x J^{-1/4}P_\pm u, \partial_x J^{-1/4}P_\pm u\rangle\\
&- \langle i|\omega|^2\partial_x J^{-1/4}P_\pm u, J^{-1/4}P_\pm u\rangle. \qquad (3.57)
\end{aligned}$$

De (2.3) o primeiro termo do lado direito de (3.57) é nulo. Usando (2.25)-(2.26) temos

$$\begin{aligned}
&\langle i\Omega\partial_x^2 J^{-1/4}P_\pm u, J^{-1/4}P_\pm u\rangle = -\langle |\omega|^2\partial_x J^{-1/4} \mp \mathcal{H}P_\pm u, J^{-1/4}P_\pm u\rangle\\
&= \langle |\omega|^2(\pm\mathcal{H}\partial_x)J^{-1/4}P_\pm u, J^{-1/4}P_\pm u\rangle\\
&= \langle |\omega|^2 D J^{-1/4}P_\pm u, J^{-1/4}P_\pm u\rangle\\
&= \langle |\omega|^2(D-J)J^{-1/4}P_\pm u, J^{-1/4}P_\pm u\rangle + \langle |\omega|^2 J^{3/4}P_\pm u, J^{-1/4}P_\pm u\rangle.
\end{aligned}$$

Como

$$[J^{1/2}, |\omega|^2]J^{1/4}P_\pm u = J^{1/2}(|\omega|^2 J^{1/4}P_\pm u) - |\omega|^2 J^{1/2}(J^{1/4}P_\pm u),$$

temos

$$|\omega|^2 J^{1/2}(J^{1/4}P_\pm u) = J^{1/2}(|\omega|^2 J^{1/4}P_\pm u) - [J^{1/2}, |\omega|^2]J^{1/4}P_\pm u,$$

que implica

$$\begin{aligned}
\langle i\Omega\partial_x^2 J^{-1/4}P_\pm u, J^{-1/4}P_\pm u\rangle &= \langle |\omega|^2(D-J)J^{-1/4}P_\pm u, J^{-1/4}P_\pm u\rangle\\
&+ \langle |\omega|^2 J^{1/2}(J^{1/4}P_\pm u), J^{-1/4}P_\pm u\rangle\\
&= \langle |\omega|^2(D-J)J^{-1/4}P_\pm u, J^{-1/4}P_\pm u\rangle\\
&+ \langle J^{1/2}(|\omega|^2 J^{1/4}P_\pm u), J^{-1/4}P_\pm u\rangle\\
&- \langle [J^{1/2}, |\omega|^2]J^{1/4}P_\pm u, J^{-1/4}P_\pm u\rangle\\
&= \langle |\omega|^2(D-J)J^{-1/4}P_\pm u, J^{-1/4}P_\pm u\rangle\\
&+ \langle (|\omega|^2 J^{1/4}P_\pm u), J^{1/4}P_\pm u\rangle\\
&- \langle [J^{1/2}, |\omega|^2]J^{1/4}P_\pm u, J^{-1/4}P_\pm u\rangle. \qquad (3.58)
\end{aligned}$$

Usando (2.53) e o fato de que, $(D-J) \in B(L^2)$, segue de (3.58) que

$$\langle i\Omega\partial_x^2 J^{-1/4}P_\pm u, J^{-1/4}P_\pm u\rangle = \mathrm{Re}\int |\omega J^{1/4}P_\pm u|^2 dx + R_1^\pm = \|\omega J^{1/4}P_\pm u\|_{L^2}^2 + R_1^\pm, \quad (3.59)$$

onde

$$R_1^\pm = \langle |\omega|^2 (D-J)J^{-1/4}P_\pm u, J^{-1/4}P_\pm u\rangle - \langle [J^{1/2}, |\omega|^2]J^{1/4}P_\pm u, J^{-1/4}P_\pm u\rangle$$

é tal que

$$\begin{aligned}
|R_1^\pm| &\leqslant \big|\big||\omega|^2(D-J)J^{-1/4}P_\pm u\big|\big|_{L^2}\big|\big|J^{-1/4}P_\pm u\big|\big|_{L^2} + \big|\big|[J^{1/2}, |\omega|^2]J^{1/4}P_\pm u\big|\big|_{L^2}\big|\big|J^{-1/4}P_\pm u\big|\big|_{L^2}\\
&\leqslant C\big|\big|(D-J)P_\pm u\big|\big|_{H^{-1/4}}\big|\big|P_\pm u\big|\big|_{H^{-1/4}} + \big|\big|[J^{1/2}, |\omega|^2]P_\pm u\big|\big|_{H^{-1/4}}\big|\big|P_\pm u\big|\big|_{H^{-1/4}}\\
&\leqslant C\big|\big|(D-J)P_\pm u\big|\big|_{L^2}\big|\big|P_\pm u\big|\big|_{L^2} + \big|\big|[J^{1/2}, |\omega|^2]P_\pm u\big|\big|_{L^2}\big|\big|P_\pm u\big|\big|_{L^2}\\
&\leqslant C\big|\big|P_\pm u\big|\big|_{L^2}\big|\big|P_\pm u\big|\big|_{L^2} + C\big|\big|P_\pm u\big|\big|_{H^{-1/2}}\big|\big|P_\pm u\big|\big|_{L^2}\\
&\leqslant C\big|\big|P_\pm u\big|\big|_{L^2}\big|\big|P_\pm u\big|\big|_{L^2} + C\big|\big|P_\pm u\big|\big|_{L^2}\big|\big|P_\pm u\big|\big|_{L^2} \leqslant C\big|\big|u\big|\big|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Integração por partes e a proposição 1 (regra de Leibniz) implicam

$$\begin{aligned}
|\langle \Omega\partial_x^{12} J^{-1/4}P_\pm u, J^{-1/4}P_\pm u\rangle| &= \left|\mathrm{Re}\int \Omega\partial_x^{12}J^{-1/4}P_\pm u\overline{J^{-1/4}P_\pm u}dx\right|\\
&= \left|\mathrm{Re}\int \partial_x^6 J^{-1/4}P_\pm u\ \partial_x^6\big(\overline{\Omega J^{-1/4}P_\pm u}\big)dx\right|\\
&= \left|\sum_{j=0}^{6}\mathrm{Re}\int \partial_x^6 J^{-1/4}P_\pm u\ \big(\partial_x^{6-j}J^{-1/4}P_\pm u\ \partial_x^j\Omega\big)dx\right|\\
&\leqslant \sum_{j=0}^{6}\big|\big|\partial_x^6 J^{-1/4}P_\pm u\big|\big|_{L^2}\big|\big|\partial_x^j\Omega\ \partial_x^{6-j}J^{-1/4}P_\pm u\ \big|\big|_{L^2}\\
&\leqslant \sum_{j=0}^{6}\big|\big|\partial_x^6 J^{-1/4}P_\pm u\big|\big|_{L^2}\big|\big|\partial_x^j\Omega\big|\big|_{L^\infty}\big|\big|\partial_x^{6-j}J^{-1/4}P_\pm u\ \big|\big|_{L^2}\\
&\leqslant \sum_{j=0}^{6}\big|\big|\partial_x^6 u\big|\big|_{H^{-1/4}}\big|\big|\partial_x^j\Omega\big|\big|_{L^\infty}\big|\big|\partial_x^{6-j} u\ \big|\big|_{H^{-1/4}}\\
&\leqslant C\sum_{j=0}^{6}\big|\big|\partial_x^6 u\big|\big|_{L^2}\big|\big|\partial_x^{6-j} u\ \big|\big|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Do Lema 2, relação (2.29) temos

$$
\begin{aligned}
|\langle \Omega\partial_x^{12} J^{-1/4} P_\pm u, J^{-1/4} P_\pm u\rangle| &\leqslant C\big|\big|\partial_x^6 u\big|\big|_{L^2} \sum_{j=0}^{6} \big|\big|\partial_x^{6-j} u\ \big|\big|_{L^2} \\
&= C\big|\big|\partial_x^6 u\big|\big|_{L^2}\big|\big|u\big|\big|_{H^6} \\
&\simeq C\big|\big|\partial_x^6 u\big|\big|_{L^2}\Big(\big|\big|u\big|\big|_{L^2} + \big|\big|\partial_x^6 u\big|\big|_{L^2}\Big) \\
&\leqslant C\Big(\big|\big|u\big|\big|_{L^2}^2 + \big|\big|\partial_x^6 u\big|\big|_{L^2}^2\Big). \qquad (3.60)
\end{aligned}
$$

Da relação (2.25), o último termo do lado direito de (3.56) pode ser escrito na forma

$$
\begin{aligned}
\langle \Omega\partial_x J^{-1/4} P_\pm F_\lambda(u), J^{-1/4} P_\pm u\rangle &= \langle \Omega\partial_x J^{-1/4} P_\pm F_\lambda(u), \frac{1}{2}(1 \pm i\mathcal{H}) J^{-1/4} u\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle \Omega\partial_x J^{-1/4} P_\pm F_\lambda(u), J^{-1/4} u\rangle \\
&\pm \frac{1}{2}\langle \Omega\partial_x J^{-1/4} P_\pm F_\lambda(u), i\mathcal{H}\ J^{-1/4} u\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle \Omega\partial_x J^{-1/4} P_\pm F_\lambda(u), J^{-1/4} u\rangle \\
&\pm \frac{1}{2}\langle i\mathcal{H}\big(\Omega\partial_x J^{-1/4} P_\pm F_\lambda(u)\big), J^{-1/4} u\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle \Omega\partial_x J^{-1/4} P_\pm F_\lambda(u), J^{-1/4} u\rangle \\
&\pm \frac{1}{2}\langle i[\mathcal{H},\Omega]\partial_x J^{-1/4} P_\pm F_\lambda(u), J^{-1/4} u\rangle \\
&\pm \frac{1}{2}\langle \Omega\partial_x J^{-1/4} (i\mathcal{H}) P_\pm F_\lambda(u), J^{-1/4} u\rangle \\
&= \langle \Omega\partial_x J^{-1/4} P_\pm F_\lambda(u), J^{-1/4} u\rangle \\
&\pm \frac{1}{2}\langle i[\mathcal{H},\Omega]\partial_x J^{-1/4} P_\pm F_\lambda(u), J^{-1/4} u\rangle. \qquad (3.61)
\end{aligned}
$$

Usando que $[\mathcal{H},\Omega]\partial_x \in B(L^2)$ ([4]) e (2.47) temos

$$
\begin{aligned}
\Big|\langle i[\mathcal{H},\Omega]\partial_x J^{-1/4} P_\pm F_\lambda(u), J^{-1/4} u\rangle\Big| &\leqslant \big|\big|[\mathcal{H},\Omega]\partial_x J^{-1/4} P_\pm F_\lambda(u)\big|\big|_{L^2}\big|\big|J^{-1/4} u\big|\big|_{L^2} \\
&\leqslant C\big|\big|J^{-1/4} P_\pm F_\lambda(u)\big|\big|_{L^2}\big|\big|J^{-1/4} u\big|\big|_{L^2} \\
&\leqslant C||P_\pm F_\lambda(u)||_{L^2}||u||_{L^2} \\
&\leqslant C||F_\lambda(u)||_{L^2}||u||_{L^2} \\
&\leqslant C||u||_{L^6}^3||u||_{L^2}. \qquad (3.62)
\end{aligned}
$$

De (2.26), (3.61) e (3.62) obtemos:

$$
\begin{aligned}
&\langle \Omega\partial_x J^{-1/4} P_+ F_\lambda(u), J^{-1/4} P_+ u\rangle - \langle \Omega\partial_x J^{-1/4} P_- F_\lambda(u), J^{-1/4} P_- u\rangle \\
&= \langle i\mathcal{H}\Omega\partial_x J^{-1/4} F_\lambda(u), J^{-1/4} u\rangle + R_2, \qquad (3.63)
\end{aligned}
$$

onde $|R_2| \leqslant C\|u\|_{L^2}\|u\|_{L^6}^3$. Podemos escrever o primeiro termo do lado direito de (3.63) na forma

$$\begin{aligned}
\langle i\mathcal{H}\Omega\partial_x J^{-1/4}F_\lambda(u), J^{-1/4}u\rangle &= \langle i[\mathcal{H},\Omega]\partial_x J^{-1/4}F_\lambda(u), J^{-1/4}u\rangle \\
&+ \langle i\Omega(\mathcal{H}\partial_x)J^{-1/4}F_\lambda(u), J^{-1/4}u\rangle \\
&= \langle i[\mathcal{H},\Omega]\partial_x J^{-1/4}F_\lambda(u), J^{-1/4}u\rangle \\
&+ \langle i\Omega(DJ^{-1/4} - D^{3/4})F_\lambda(u), J^{-1/4}u\rangle \\
&+ \langle i\Omega D^{3/4}F_\lambda(u), J^{-1/4}u\rangle \\
&= \langle i[\mathcal{H},\Omega]\partial_x J^{-1/4}F_\lambda(u), J^{-1/4}u\rangle \\
&+ \langle i\Omega(DJ^{-1/4} - D^{3/4})F_\lambda(u), J^{-1/4}u\rangle \\
&+ \langle iD^{3/4}\Omega F_\lambda(u), J^{-1/4}u\rangle - \langle i[D^{3/4},\Omega]F_\lambda(u), J^{-1/4}u\rangle \\
&= \langle i[\mathcal{H},\Omega]\partial_x J^{-1/4}F_\lambda(u), J^{-1/4}u\rangle \\
&+ \langle i\Omega(DJ^{-1/4} - D^{3/4})F_\lambda(u), J^{-1/4}u\rangle \\
&+ \langle i(D^{3/4}J^{-1/4} - D^{1/2})\Omega F_\lambda(u), u\rangle \\
&+ \langle iD^{1/2}\Omega F_\lambda(u), u\rangle - \langle i[D^{3/4},\Omega]F_\lambda(u), J^{-1/4}u\rangle \\
&= \langle iD^{1/2}\Omega F_\lambda(u), u\rangle + R_3, \qquad (3.64)
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
R_3 = \langle i[\mathcal{H},\Omega]\partial_x J^{-1/4}F_\lambda(u), J^{-1/4}u\rangle &+ \langle i\Omega(DJ^{-1/4} - D^{3/4})F_\lambda(u), J^{-1/4}u\rangle \\
+ \langle i(D^{3/4}J^{-1/4} - D^{1/2})\Omega F_\lambda(u), u\rangle &- \langle i[D^{3/4},\Omega]F_\lambda(u), J^{-1/4}u\rangle.
\end{aligned}$$

De (2.54), do Lema 4 e de (2.47) chegamos que $|R_3| \leqslant C\|u\|_{L^2}\|u\|_{L^6}^3$.

Sejam $w = |u|^2 + \lambda\mathcal{H}(|u|^2)$, $F_\lambda(u) = w\, u$. Usando que $iD^{1/2}$ é um operador anti simétrico e Ωw toma valores reais obtemos:

$$\begin{aligned}
\langle iD^{1/2}\Omega F_\lambda(u), u\rangle &= \langle iD^{1/2}\Omega w u, u\rangle \\
&= -\langle \Omega w u, iD^{1/2}u\rangle \\
&= -\langle i\Omega w D^{1/2}u, u\rangle. \qquad (3.65)
\end{aligned}$$

Da definição de comutador vale que

$$\begin{aligned}
\langle iD^{1/2}\Omega F_\lambda(u), u\rangle &= \langle iD^{1/2}\Omega w u, u\rangle \\
&= \langle i[D^{1/2},\Omega w]u, u\rangle + \langle i\Omega w D^{1/2}u, u\langle. \qquad (3.66)
\end{aligned}$$

Daí temos então

$$\begin{aligned}\langle iD^{1/2}\Omega F_\lambda(u),u\rangle &= \langle i[D^{1/2},\Omega w]u,u\rangle + \langle i\Omega w D^{1/2}u,u\rangle\\ &= -\langle iD^{1/2}\Omega F_\lambda(u),u\rangle + \langle i[D^{1/2},\Omega w]u,u\rangle,\end{aligned}$$

que implica

$$\langle iD^{1/2}\Omega F_\lambda(u),u\rangle = \frac{1}{2}\langle i[D^{1/2},\Omega w]u,u\rangle. \tag{3.67}$$

Usando a desigualdade de Hölder com e o Lema 9 com $p=\frac{4}{3},\ p_1=2$ e $p_2=4$ obtemos

$$\begin{aligned}|\langle iD^{1/2}\Omega F_\lambda(u),u\rangle| &= |\frac{1}{2}\langle i[D^{1/2},\Omega w]u,u\rangle|\\ &\leqslant C\|[D^{1/2},\Omega w]u\|_{L^{\frac{4}{3}}}\|u\|_{L^4}\\ &\leqslant C\|D^{1/2}(\Omega w)\|_{L^2}\|u\|_{L^4}^2. \end{aligned}\tag{3.68}$$

De (2.54), do Lema 4, das propriedades de $\mathcal{H}$ e da definição de w, segue que

$$\begin{aligned}\|D^{1/2}(\Omega w)\|_{L^2} &\leqslant \|[D^{1/2},\Omega]w\|_{L^2} + \|\Omega D^{1/2}w\|_{L^2}\\ &\leqslant C\|(D^{1/2}\Omega)^\wedge\|_{L^1}\|w\|_{L^2} + \|\Omega D^{1/2}w\|_{L^2}\\ &\leqslant C\|w\|_{L^2} + \|\Omega D^{1/2}w\|_{L^2}\\ &= C\|\big(|u|^2+\lambda\mathcal{H}(|u|^2)\big)\|_{L^2} + \|\Omega D^{1/2}\big(|u|^2+\lambda\mathcal{H}(|u|^2)\big)\|_{L^2}\\ &\leqslant C\Big(\|u\|_{L^4}^2 + \lambda\|\mathcal{H}(|u|^2)\|_{L^2}\Big) + \|\Omega D^{1/2}(|u|^2)\|_{L^2} + \lambda\|\Omega D^{1/2}\mathcal{H}(|u|^2)\|_{L^2}\\ &\leqslant C\Big(\|u\|_{L^4}^2 + \lambda\|u\|_{L^4}^2\Big) + C\|D^{1/2}(|u|^2)\|_{L^2} + C\lambda\|D^{1/2}\mathcal{H}(|u|^2)\|_{L^2}\\ &\leqslant C\big(\|u\|_{L^4}^2 + \|D^{1/2}(|u|^2)\|_{L^2}\big). \end{aligned}\tag{3.69}$$

As relações (3.68) e (3.69) implicam que

$$\begin{aligned}\langle iD^{1/2}\Omega F_\lambda(u),u\rangle &\leqslant C\|D^{1/2}(\Omega w)\|_{L^2}\|u\|_{L^4}^2\\ &\leqslant C\|u\|_{L^4}^2\big(\|u\|_{L^4}^2 + \|D^{1/2}(|u|^2)\|_{L^2}\big)\\ &= C\big(\|u\|_{L^4}^4 + \|u\|_{L^4}^2\|D^{1/2}(|u|^2)\|_{L^2}\big)\\ &\leqslant C\big(\|u\|_{L^4}^4 + \|D^{1/2}(|u|^2)\|_{L^2}^2\big). \end{aligned}\tag{3.70}$$

Portanto, de (3.37), (3.44), (3.56), (3.59), (3.60), (3.63), (3.64), (3.70), junto com a estimativa (3.51), temos

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\langle \Omega J^{-1/4}P_+u, J^{-1/4}P_+u\rangle - \langle \Omega J^{-1/4}P_-u, J^{-1/4}P_-u\rangle\big)\\
&\quad= \Big[\big(\langle i\Omega\partial_x^2 J^{-1/4}P_+u, J^{-1/4}P_+u\rangle - \langle i\Omega\partial_x^2 J^{-1/4}P_-u, J^{-1/4}P_-u\rangle\big)\\
&\quad\big(-\epsilon\langle \Omega\partial_x^{12} J^{-1/4}P_+u, J^{-1/4}P_+u\rangle + \epsilon\langle \Omega\partial_x^{12} J^{-1/4}P_-u, J^{-1/4}P_-u\rangle\big)\\
&\quad+\big(\langle \Omega\partial_x J^{-1/4}P_+F_\lambda(u), J^{-1/4}P_+u\rangle - \langle \Omega\partial_x J^{-1/4}P_-F_\lambda(u), J^{-1/4}P_-u\rangle\big)\Big]\\
&\quad= \|\omega J^{1/4}P_+u\|_{L^2}^2 + \|\omega J^{1/4}P_-u\|_{L^2}^2 + \big(R_1^+ - R_1^-\big) + \tilde{R} + \langle i\mathcal{H}\Omega\partial_x J^{-1/4}F_\lambda(u), J^{-1/4}u\rangle + R_2\\
&\quad= \|\omega J^{1/4}P_+u\|_{L^2}^2 + \|\omega J^{1/4}P_-u\|_{L^2}^2 + \langle iD^{1/2}\Omega F_\lambda(u), u\rangle + \overline{R}\\
&\quad= \|\omega J^{1/4}P_+u\|_{L^2}^2 + \|\omega J^{1/4}P_-u\|_{L^2}^2 + R,
\end{aligned}
$$

onde

$$
|R(t)| \leqslant C\big[\|u\|_{L^2}^2 + \epsilon\big(\|\partial_x^6 u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2\big) + \|u\|_{L^6}^3\|u\|_{L^2} + \|u\|_{L^4}^4 + |\lambda|\|D^{1/2}(|u|^2)\|_{L^2}^2\big],
$$

com

$$
\begin{aligned}
\int_0^T |R(t)|dt &\leqslant C\Big[\int_0^T \|u(t)\|_{L^2}^2 dt + \epsilon\int_0^T \big(\|\partial_x^6 u(t)\|_{L^2}^2 + \|u(t)\|_{L^2}^2\big)dt\\
&\quad+\int_0^T \|u(t)\|_{L^6}^3\|u(t)\|_{L^2}dt + \int_0^T \|u(t)\|_{L^4}^4 dt + |\lambda|\int_0^T \|D^{1/2}(|u(t)|^2)\|_{L^2}^2 dt\Big]\\
&\leqslant C\big[T\|u_0\|_{L^2}^2 + \|u_0\|_{L^2}^2 + \epsilon T\|u_0\|_{L^2}^2 + \int_0^T \|u(t)\|_{L^6}^3\|u(t)\|_{L^2}dt + \int_0^T \|u(t)\|_{L^4}^4 dt\\
&\quad+ 2\int_0^T \frac{d}{dt}\|u(t)\|_{L^2}^2 dt\big]\\
&\leqslant C\Big[T\|u_0\|_{L^2}^2 + \|u_0\|_{L^2}^2 + \epsilon T\|u_0\|_{L^2}^2 + \Big(\int_0^T \|u(t)\|_{L^6}^6 dt\Big)^{1/2}\Big(\int_0^T \|u(t)\|_{L^2}^2 dt\Big)^{1/2}\\
&\quad+\Big(\int_0^T \|u(t)\|_{L^2}^2 dt\Big)^{1/2}\Big(\int_0^T \|u(t)\|_{L^6}^6 dt\Big)^{1/2} + \|u_0\|_{L^2}^2\Big]\\
&\leqslant C\big[T\|u_0\|_{L^2}^2 + \|u_0\|_{L^2}^2 + \epsilon T\|u_0\|_{L^2}^2 + \|u_0\|_{L^2}^2 + 2T^{1/2}\|u_0\|_{L^2}^2 + 2C^3(\lambda)\|u_0\|_{L^2}^3\big]\\
&\leqslant C(\lambda, \omega, \|u_0\|_{L^2}, T).
\end{aligned}
$$

Logo, vale (3.54) com $R = R(t)$ desejado. □

Proposição 11. *Sejam* $T > 0$, $\omega \in H^\infty$ *e* $u_0 \in L^2$. *Então, existe uma constante* $C = C(T, \omega, \|u_0\|_{L^2}) > 0$ *tal que a solução* u *de* (1.9) *verifica*

$$
\int_0^T \|\omega u\|_{H^{1/4}}^2 dt \leqslant C. \tag{3.71}
$$

Demonstração. Da definição de comutador, e do fato de $u = (P_+ + P_-)u$, temos

$$J^{1/4}(\omega u) = [J^{1/4}, \omega]u + \omega J^{1/4}P_+u + \omega J^{1/4}P_-u.$$

Logo, pelo corolário 1, pela imersão de Sobolev e por (3.51), temos

$$\begin{aligned}
||\omega u||_{H^{1/4}} &\leqslant ||\omega J^{1/4}P_+u||_{L^2_x} + ||\omega J^{1/4}P_-u||_{L^2_x} + ||[J^{1/4}, \omega]u||_{L^2_x} \\
&\leqslant ||\omega J^{1/4}P_+u||_{L^2_x} + ||\omega J^{1/4}P_-u||_{L^2_x} + C||u||_{H^{-3/4}} \\
&\leqslant ||\omega J^{1/4}P_+u||_{L^2_x} + ||\omega J^{1/4}P_-u||_{L^2_x} + C||u||_{L^2} \\
&\leqslant ||\omega J^{1/4}P_+u||_{L^2_x} + ||\omega J^{1/4}P_-u||_{L^2_x} + C||u_0||_{L^2},
\end{aligned}$$

que implica

$$||\omega u||_{H^{1/4}} \leqslant ||\omega J^{1/4}P_+u||_{L^2_x} + ||\omega J^{1/4}P_-u||_{L^2_x} + C||u_0||_{L^2}. \tag{3.72}$$

Elevando ao quadrado ambos os lados de (3.72), obtemos

$$\begin{aligned}
||\omega u||^2_{H^{1/4}} &\leqslant ||\omega J^{1/4}P_+u||^2_{L^2_x} + ||\omega J^{1/4}P_-u||^2_{L^2_x} + C||u_0||^2_{L^2} \\
&\quad + 2\big(||\omega J^{1/4}P_+u||_{L^2_x}||\omega J^{1/4}P_-u||_{L^2_x} + ||\omega J^{1/4}P_+u||_{L^2_x}C||u_0||_{L^2} + ||\omega J^{1/4}P_-u||_{L^2_x}C||u_0||_{L^2}\big) \\
&\leqslant 3||\omega J^{1/4}P_+u||^2_{L^2_x} + 3||\omega J^{1/4}P_-u||^2_{L^2_x} + 3C||u_0||^2_{L^2}.
\end{aligned}$$

Agora, integrando de 0 a T a desigualdade acima, obtemos

$$\int_0^T ||\omega u||^2_{H^{1/4}}dt \leqslant \int_0^T ||\omega J^{1/4}P_+u||^2_{L^2_x}dt + \int_0^T ||\omega J^{1/4}P_-u||^2_{L^2_x}dt + \int_0^T C||u_0||^2_{L^2}dt.$$

Mas como $\int_0^T C||u_0||^2_{L^2}dt < \infty$, basta então provarmos que

$$\int_0^T \Big(||\omega J^{1/4}P_+u(t)||^2_{L^2_x} + ||\omega J^{1/4}P_-u(t)||^2_{L^2_x}\Big)dt \leqslant C. \tag{3.73}$$

Seja Ω uma primitiva de $|u|^2$. Pelo Lema 17, vale:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\langle \Omega J^{-1/4}P_+u, J^{-1/4}P_+u\rangle - \langle \Omega J^{-1/4}P_-u, J^{-1/4}P_-u\rangle\big) \\
&\quad = ||\omega J^{1/4}P_+u(t)||^2_{L^2_x} + ||\omega J^{1/4}P_-u(t)||^2_{L^2_x} + R
\end{aligned}$$

com $\int_0^T |R(t)|dt \leqslant C(T, \omega, ||u_0||_{L^2})$, independente de $\epsilon > 0$. Afirmamos que

$$|\langle \Omega J^{-1/4}P_\pm u, J^{-1/4}P_\pm u\rangle| \leqslant C||u||^2_{L^2}. \tag{3.74}$$

De fato, temos da desigualdade de Cauchy-Schwarz e da imersão de Sobolev que

$$
\begin{aligned}
|\langle \Omega J^{-1/4} P_{\pm} u, J^{-1/4} P_{\pm} u \rangle| &\leqslant \|\Omega J^{-1/4} P_{\pm} u\|_{L^2} \|J^{-1/4} P_{\pm} u\|_{L^2} \\
&\leqslant \|\Omega\|_{L^\infty} \|J^{-1/4} P_{\pm} u\|_{L^2} \|J^{-1/4} P_{\pm} u\|_{L^2} \\
&\leqslant C\|J^{-1/4} P_{\pm} u\|_{L^2}^2 \leqslant C\|u\|_{L^2}^2.
\end{aligned}
$$

Integrando em t a equação (3.54), obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \Big(\|\omega J^{1/4} P_+ u(t)\|_{L_x^2}^2 + \|\omega J^{1/4} P_- u(t)\|_{L_x^2}^2 \Big) dt &= \frac{1}{2}\big(A(t) - B(t)\big)\Big|_0^T - \int_0^T R(t)dt \\
&\leqslant \frac{1}{2}\big(A(T) - A(0) + B(0) - B(T)\big) + \int_0^T |R(t)|dt \\
&\leqslant C\|u\|_{L^2}^2 + \int_0^T |R(t)|dt \\
&\leqslant C\|u_0\|_{L^2}^2 + C(T, \omega, \|u_0\|_{L^2}) \\
&\leqslant C(T, \omega, \|u_0\|_{L^2}). \qquad (3.75)
\end{aligned}
$$

com $A(t) = \langle \Omega J^{-1/4} P_+ u(t), J^{-1/4} P_+ u(t) \rangle$, $B(t) = \langle \Omega J^{-1/4} P_- u(t), J^{-1/4} P_- u(t) \rangle$.

Portanto, vale (3.71). □

3.4 Prova do Teorema Principal

Sejam $\epsilon_n \searrow 0$ e u_n a solução de (3.43) correspodente, mostraremos que existe uma subsequência que converge a uma solução fraca u da equação (1.1).

Demonstração do Teorema 1. Dado $m > 0$ consideramos o espaço $H_m^{1/4}$ das funções de $H^{1/4}$ com suporte compacto em $(-m, m)$. Pelo Lema 11 temos que a imersão de $H_m^{1/4}$ em L^2 é compacta.

Seja $\omega \in H^\infty$, supp $\omega \subset (-1, 1)$ e $\omega = 1$ em $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, para $m \in \mathbb{N}$ definimos $\omega_m(x) = \omega(\frac{x}{m})$. Pela Proposição 11, $\omega_m u_n \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, H_m^{1/4})$ e vale

$$
\int_0^T \big\|\omega_m u_n(t)\big\|_{H^{1/4}}^2 dt \leqslant C(T). \qquad (3.76)
$$

Como u_n satisfaz (1.9), temos que $\partial_t \omega_m u_n \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, H^{-12})$ e vale

$$
\int_0^T \big\|\partial_t \omega_m u_n(t)\big\|_{H^{-12}}^2 dt \leqslant C(T). \qquad (3.77)
$$

Pelo Teorema 20 (de Aubin-Lions), com $W = \{v \mid v \in L^2([0,T], H_m^{1/4}),\ \partial_t v \in L^2([0,T], L^2)\}$, temos que a imersão $W \to L^2([0,T], H_m^{1/4})$ é compacta. Ou seja, dada uma sequência limitada $u_n \in W$ existe uma subsequência convergente em $L^2([0,T], H_m^{1/4})$.

Seja $u \in L^2([-\frac{m}{2}, \frac{m}{2}] \times [0,T])$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \int_{-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} \left|u(x,t) - u_n(x,t)\right|^2 dx\ dt = 0. \tag{3.78}$$

Consideramos $T,\ m$ crescentes. Então pelo argumento diagonal, obtemos $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_K \left|u(x,t) - u_n(x,t)\right|^2 dx\ dt = 0, \tag{3.79}$$

para todo compacto $K \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

Pelo teorema de Arzela-Ascoli 21, temos que $u_n \to u$ em $C_w([0,T], H^{-12})$. Mas por (3.44) vale que $\|u_n(t)\|_{L^2} \leqslant \|u_0\|_{L^2}$ com $0 \leqslant t \leqslant T$, então $u \in C_w([0,T], L^2)$ e

$$\|u\|_{L_t^\infty L_x^2} \leqslant \|u_0\|_{L^2}. \tag{3.80}$$

Como $L^q(\mathbb{R}_+, L^p)$ é um espaço reflexivo, temos que $u \in L^q(\mathbb{R}_+, L^p)$ e $u_n \rightharpoonup u$.

Logo, temos que

$$\|u\|_{L_t^q L_x^p} \leqslant C\|u_0\|_{L^2}. \tag{3.81}$$

Provaremos agora que $F_\lambda(u_n)$ converge para $F_\lambda(u)$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$. Pela desigualdade (3.44) a sequência $|u_n|^2$ está uniformemente limitada em $L_T^{q/2} L_x^{p/2}$. Mas como $|u_n|^2 \to |u|^2$ em $L^1_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$, temos que $|u_n|^2$ converge fracamente para $|u|^2$ em $L_T^{q/2} L_x^{p/2}$.

Pelo Lema 6 desigualdade (2.47) e pela desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
\|F_\lambda(u) - F_\lambda(u_n)\|_{L_x^1} &\leqslant C\Big(\|u\|^2_{L_x^3} + \|u_n\|^2_{L_x^3}\Big)\|u - u_n\|_{L_x^3} \\
&\leqslant C\Big(\|u\|^{4/3}_{L_x^4}\|u\|^{2/3}_{L_x^2} + \|u_n\|^{4/3}_{L_x^4}\|u_n\|^{2/3}_{L_x^2}\Big)\|u - u_n\|^2_{L_x^4}\|u - u_n\|_{L_x^2}.
\end{aligned} \tag{3.82}$$

Integrando em t ambos os lados de (3.82) e usando a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|F_\lambda(u) - F_\lambda(u_n)\|_{L_x^1} dt &\leqslant C\|u\|^{2/3}_{L_T^\infty L_x^2}\|u - u_n\|_{L_T^\infty L_x^2} \int_0^T \|u\|^{4/3}_{L_x^4}\|u - u_n\|^2_{L_x^4} dt \\
&\quad + C\|u_n\|^{2/3}_{L_T^\infty L_x^2}\|u - u_n\|_{L_T^\infty L_x^2} \int_0^T \|u_n\|^{4/3}_{L_x^4}\|u - u_n\|^2_{L_x^4} dt \\
&\leqslant C(T)\Big[\|u\|^{2/3}_{L_T^\infty L_x^2}\|u\|^{4/3}_{L_T^8 L_x^2}\|u - u_n\|^2_{L_T^8 L_x^2} \\
&\quad + \|u_n\|^{2/3}_{L_T^\infty L_x^2}\|u_n\|^{4/3}_{L_T^8 L_x^2}\|u - u_n\|^2_{L_T^8 L_x^2}\Big]\|u - u_n\|_{L_T^\infty L_x^2},
\end{aligned} \tag{3.83}$$

para cada $T > 0$. Escolhendo $p = 4$ ($q = 8$), usando (3.77) e tomando o limite em (3.83) temos que $F_\lambda(u_n)$ converge para $F_\lambda(u)$ em $L^1_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$.

Para provarmos que u é solução fraca do problema (1.1) basta passarmos o limite quando $n \to \infty$ na equação

$$\langle u_n(t), \psi(t)\rangle = \langle u_0, \psi(0)\rangle + \int_0^t \Big[\langle u_n(\tau), \partial_t \psi(\tau)\rangle - \epsilon_n \langle u_n(\tau), i\partial_x^2 \psi(\tau)\rangle - \langle F_\lambda(u_n(\tau)), \partial_x \psi(\tau)\rangle\Big] d\tau \tag{3.84}$$

obtendo então (1.5) para qualquer $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Adams, R. and Fournier, J. *Sobolev Spaces*, Volume 140, Second Edition, Elsevier, Oxford, 2003.

[2] Adams, R. A. *Sobolev Spaces, Volume 140*, Academic Press, New York, 1975.

[3] Biagioni, H. and Linares, F. *Ill-posedness for the Derivative nonlinear Schrödinger equation and Generalized Benjamin-Ono Equation*, Transactions of the AMS, 353, 3649-3659 (2001).

[4] Calderon, A.P. *Commutators of Singular Integral Operators*. Proc. Natl. Acad. Sc. USA, 53:1092-1099, 1965.

[5] Colliander, J., Keel, M., Staffilani, G., Takaoka, H. and Tao, T. *Global well-posedness result for Schrödinger equations with derivative*. SIAM J. Math. Anal., 33: 649-669, 2001.

[6] Colliander, J., Keel, M., Staffilani, G., Takaoka, H. and Tao, T. *A refined global well-posedness result for Schrödinger equations with derivative*. SIAM J. Math. Anal., 34: 64-86, 2002.

[7] Duoandikoetxea, J. *Fourier Analysis*, Graduate Studies in Mathematics 29, AMS, Providence, 2000.

[8] Fla, T. Mjolhus, E. and Wyller, J. *The effect of resonant particles on Alfvén solitons*. Physica D, 39: 405-422, 1989.

[9] Folland, G. B.,*Real Analysis, Modern Techniques and their Applications*, Jonh Wiley & Sons, New York, 1984.

[10] Folland, G. B., *Introduction to Partial Differential Equations*. Princeton University Press, New York, 1976.

[11] Friedlander, F. G. and Joshi, M., *Introduction to the Theory of Distributions*, Second Edition, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.

[12] Hayashi, N., *On the derivative nonlinear Schrödinger equation*, Physica D: Nonlinear Phenomena, 55:14-36, 1992.

[13] Iorio, R.; Iorio, V. M., *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, 2001.

[14] Kato, T.,*On nonlinear Schrödinger equations.* Ann. Inst. H. Poincaré, 46:113-129, 1987.

[15] Kato, T., *On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equation.* Studies in Appl. Math., 8:93-128, 1983.

[16] Kenig, C. E., Ponce, G. e Vega, L., *Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via contraction principle.*, Comm. on Pure and App. Math., 46:527-620, 1993.

[17] Kreyszig, E.,*Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, New York, 1978.

[18] Lima, E. L., *Espaços Métricos*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2009.

[19] Linares, F. and Ponce, G., *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations*, Springer, New York, 2009.

[20] Lions, J.L., *Quelques Méthodes de Résolution des Problémes aux Limites non Linéaires.* Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[21] Moura, R.P., Pastor, A. *On the Cauchy problem for the nonlocal derivative nonlinear Schrödinger equation.* Commun. Math. Sci. 9, 1:63-80, 2011.

[22] Ponce, G., *On the global well-posedness of the Benjamin-Ono equation.* Diff. Int. Eq. 4, 527-542, 1991.

[23] Rial, D.F.,*Weak solutions for derivative nonlinear Schrödinger equation.* Nonlinear analysis, 49: 149-158, 2002.

[24] Rogester, A.*Parallel propagation of nonlinear low-frequency waves in high-*β *plasma.* Physics of Fluids, 14:2733-2740, 1971.

[25] Takaoka, H., *Well-posedness for the one dimensional nonlinear Schrödinger equation with the derivate nonlinearity*, Adv. Differential Equations, 4; 561-580, 1999.

[26] Takaoka, H., *Global Well-posedness for Schrödinger equation with derivate in a nonlinear term and data in low-order Sobolev spaces*, Electron. J. Differential Equations, 42; 1-23, 2001.

[27] Tsutsumi, M., Fukuda, I., *On Solutions of the Derivative Nonlinear Schrodinger Equation. Existence and Uniqueness Theorem*, Funkcialaj Ekvacioj, 23;259-277, 1980.

[28] Tsutsumi, M., Fukuda, I., *On Solutions of the Derivative Nonlinear Schrodinger Equation, II.*, Funkcialai Ekvacioj, 24: 85-94, 1981.