UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ

CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MESTRADO EM MATEMÁTICA

Controle Hierárquico para uma Equação da Onda via Estratégia de Stackelberg - Nash

Bruno Mendes Pacheco

Teresina - 2016

Bruno Mendes Pacheco

Dissertação de Mestrado:

Controle Hierárquico para uma Equação da Onda via Estratégia de Stackelberg - Nash

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Isaías Pereira de Jesus.

Teresina - 2016

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Controle Hierárquico para Equação da Onda via Estratégia de Stackelberg - Nash

Bruno Mendes Pacheco

Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 31 de Agosto de 2016.

Banca Examinadora:

Isaías Pereira de Jesus
Prof. Dr. Isaías Pereira de Jesus (UFPI) - Presidente

Prof. Dr. Marcondes Rodrigues Clark (UFPI)

Prof. Dr. Alexandro Marinho Oliveira (UFPI)

Prof. Dr. Marcos Vinicio Travaglia (UFPI)

FICHA CATALOGRÁFICA
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial do CCN

P116c Pacheco, Bruno Mendes.
Controle hierárquico para uma equação da onda via estratégia de Stalckelberg - Nash / Bruno Mendes Pacheco – Teresina, 2016.
92f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática, 2016.
Orientador: Prof. Dr. Isaias Pereira de Jesus.

1. Análise Matemática. 2. Equações Diferenciais Parciais. I. Título

CDD 515.353

Ao meu pai Manoel e a minha mãe Angélica.

Agradecimentos

A Deus, por ser tudo em minha vida.

À minha família, em especial a meu tio Rivelino.

Ao corpo docente do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Piauí.

À banca examinadora, em especial ao professor Isaías Pereira de Jesus que mostrou-se sempre solícito nos momentos difíceis.

Aos meus amigos que conheci ao longo desses estudos, entre eles, Daniel, Elienai e Rafael.

À Capes pelo apoio financeiro.

A todos aqueles que contribuíram de forma direta ou indiretamente, meus agradecimentos.

O Senhor é o meu pastor e nada me faltará.
(Salmos 23.1).

Resumo

O objetivo desse trabalho é estudarmos o controle hierárquico para uma equação da onda via estratégia de Stackelberg - Nash. Além disso, apresentaremos a existência, unicidade e regularidade de soluções para o problema proposto.

Palavras-chave: Controle hierárquico, Estratégia de Stackelberg - Nash, Controlabilidade Aproximada, Sistema Otimizado.

Abstract

The purpose of this work is study the hierarchic control for a wave equation via Stackelberg - Nash. Moreover, we present the existence, uniqueness and regularity of solutions to the proposed problem.

Keywords: Hierarchic Control, Stackelberg - Nash Strategies, Approximate controllability, Optimality System.

Conteúdo

Notações e Simbologias

As simbologias abaixo são utilizadas no decorrer do texto.

- $(.,.)$ denota o produto interno em L^2;
- $|.|$ denota a norma em L^2;
- $((.,.))$ denota o produto interno em H_0^1;
- $||.||$ denota a norma em H_0^1;
- $\langle .,. \rangle$ quando não especificado, denota diferentes pares de dualidades;
- $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ denota o gradiente da função u;
- $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ denota o operador Laplaciano da função u;
- q.s. - quase sempre;
- $\hookrightarrow$ denota a imersão contínua;
- $\overset{c}{\hookrightarrow}$ denota a imersão compacta;
- C quando não especificada, é uma constante positiva e arbitrária;
- $' = \dfrac{\partial}{\partial t}$;
- $\mathcal{L}(X, Y)$ denota o e espaço dos operadores lineares e contínuos de X em Y;
- $D(f)$ denota o domínio de f.

Introdução

Este trabalho aborda inicialmente um estudo sistemático da Equação da Onda Linear, envolvendo os conceitos de solução forte, solução fraca, regularidade escondida da solução fraca e o conceito de solução ultra-fraca onde nos baseamos no livro[23], e também um estudo de controle hierárquico para a equação da onda via estratégia de Stackelberg - Nash.

Problemas de otimização aparecem com bastante frequência em uma série de problemas de ciências da engenharia e economia. Muitos modelos matemáticos são formulados em termos de problemas de otimização envolvendo um único objetivo, minimizar custos ou maximizar o lucro, etc. Em situações mais realistas e relevantes, diversos objetivos (em geral conflitantes) devem ser considerados.

Em um problema clássico de controle mono-objetivo para um sistema modelado por uma equação diferencial, existe um controle v, atuando na equação e tentando atingir um objetivo pré-determinado, geralmente consistindo em minimizar um funcional $J(.)$.

Quando não existe uma restrição no espaço de controle e o funcional J satisfaz algumas hipóteses adequadas, existe uma única solução u para o problema de controle, a qual é determinada pela condição de optimalidade $\nabla J(u) = 0$.

Em um problema de controle multi-objetivo existe mais do que um objetivo; possivelmente mais que um controle atuando sobre a equação. Agora, em contraste com o caso de um único objetivo, existem várias estratégias de forma a escolher os controles, dependendo da natureza do problema.

Estas estratégias podem ser cooperativas (quando os controles cooperam entre eles, a fim de alcançar os objetivos), não-cooperativas, hierárquicas, etc. Equilíbrio de Nash define uma estratégia de otimização não-cooperativa múltiplo-objetiva, inicialmente proposto por Nash [28]. Desde que teve origem na teoria dos jogos e economia, a noção de jogador é frequentemente utilizado. Para um problema de otimização com G objetivos (ou funcionais J_i a ser minimizados), uma estratégia de Nash consiste em ter G jogadores (ou controles v_i), cada um deles otimizando seu próprio critério. No entanto, cada jogador tem que otimizar seu critério, uma vez que todos os outros critérios são fixados pelo resto dos jogadores. Quando nenhum jogador pode melhorar ainda mais o seu critério, isso quer dizer que o sistema atingiu um estado de equilíbrio de Nash. Existem outras estratégias para otimização multiobjetiva, como a estratégia de Pareto (cooperativo) [30] e a estratégia de Stackelberg (hierárquico) [32], etc.

Alguns trabalhos anteriores sobre as estratégias para o controle de equações diferenciais parcias são os seguintes. Nos artigos de Lions [18], [21], o autor dá alguns resultados sobre a estratégia de Pareto e estratégias de Stackelberg, respectivamente. No artigo de Díaz-Lions [5], os autores provam um resultado de controlabilidade aproximada para um sistema seguindo a estratégia de Stackelberg-Nash. Este resultado baseia-se na existência e unicidade de um equilibrio de Nash, que é provado pelos autores para alguns casos particulares satisfazendo algumas restrições.

Neste trabalho, estudamos a estratégia de Stackelberg para a equação da onda, considerando um equilíbrio de Nash multi-objetivo (não necessariamente cooperativa) para os "jogadores seguidores"(como é chamado no campo da economia) e um problema ideal para o jogador líder com objetivo de obter controlabilidade aproximada. Nossa motivação é baseada no trabalho Lions [14].

Quando em 1990, durante as Jornadas Hispano-Francesas sobre Controle de Sistemas Distribuídos, Jacques Louis Lions[1] introduziu, pela primeira vez, o conceito de controlabilidade aproximada para equação linear do calor [17], criou-se assim uma imensa gama de problemas relacionados com o conceito de controlabilidade aproximada.

Formalizemos agora alguns desses conceitos. Consideremos a equação linear do calor

$$\left| \begin{array}{l} u_t - \Delta u = h 1_w \quad \text{em} \quad Q = \Omega \times (0,T) \\ u = 0 \quad \text{em} \quad \Sigma = \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \end{array} \right. \tag{0.1}$$

onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2 e $T > 0$. Em (0.1) u_t denota $\dfrac{du}{dt}$, $\quad u = u(x,t)$ é o estado a ser controlado, $h = h(x,t)$ é o controle

[1] J.L.Lions 1928-2001

e 1_w é a função característica de w, onde w é um subconjunto aberto não vazio de Ω. Notemos que o controle atua no interior de Ω.

Assumindo que $u_0 \in L^2(\Omega)$ e $h \in L^2(Q)$, o sistema (0.1) admite uma única solução $u \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$. Consideremos o conjunto de estados admissíveis:

$$R_{NL}(T) = \big\{u_h(T) : u_h \text{ é solução de (0.1) com } h \in L^2(Q)\big\}.$$

Alguns problemas de controlabilidade podem ser formulados como se segue:

(i) O sistema (0.1) é dito aproximadamente controlável se $R_{NL}(T)$ é denso em $L^2(\Omega)$ para todo $u_0 \in L^2(\Omega)$.

(ii) O sistema (0.1) é dito exatamente controlável se $R_{NL}(T) = L^2(\Omega)$ para todo $u_0 \in L^2(\Omega)$.

(iii) O sistema (0.1) é dito nulo controlável ou controlável a zero se $0 \in R_{NL}(T)$ para todo $u_0 \in L^2(\Omega)$.

O sistema (0.1) é aproximadamente controlável para todo subconjunto aberto não vazio ω de Ω e $T > 0$. Para mostrar isto, aplica-se o Teorema de Hahn Banach ou então se segue uma abordagem variacional desenvolvida em Lions [17]. Em ambos os casos, a controlabilidade aproximada é reduzida a uma propriedade de continuação única para o sistema adjunto de (0.1):

$$\begin{cases} -\varphi_t - \Delta\varphi = 0 \quad \text{em} \quad Q \\ \varphi(x,t) = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \times (0,T) \\ \varphi(x,T) = \varphi^0 \quad \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{0.2}$$

Mais precisamente, controlabilidade aproximada vale para o sistema (0.1) se, e somente se, a seguinte propriedade de unicidade é verdadeira: Se φ é solução de (0.2) e $\varphi = 0$ em $\omega \times (0,T)$ então, necessariamente, $\varphi \equiv 0$ em $\Omega \times (0,T)$, isto é, $\varphi^0 = 0$.

A questão é que os teoremas de continuação única dependem da natureza do problema estudado. Para tal, muitos autores tem conseguido teoremas de continuação única para diversos problemas, entre as quais pode-se citar, teorema da continuação de Mizohata [27], quando os coeficientes do operador que aparecem no sistema são analíticos.

Quando os coeficientes do operador são funções limitadas e mensuráveis, a controlabilidade aproximada foi investigada, entre outros autores, por C. Fabre [8], onde se prova a propriedade de continuação única para equações relacionadas com o sistema de Navier-Stokes. A mesma generalização da continuação única de Mizohata pode ser encontradas em Saut-Scheurer [31].

Desde a publicação do artigo [17], a controlabilidade aproximada tem sido motivo de estudo de muitos autores, entre os quais podemos citar : Fabre-Lebeau [9], Fabre [8], Fabre-Puel-Zuazua [10], Fernandez-Zuazua [11], Zuazua [35].

No artigo de Díaz-Lions [5], estuda-se o controle hierárquico para um sistema distribuído (no qual o estado é definido pela solução de uma equação de difusão). Eles admitem que se pode agir sobre o sistema por uma hierarquia de controles. Existe um controle global v, o qual é chamado de líder e existem N controles locais $w_1, \ldots, w_N$ que são os seguidores. Os seguidores, assumindo que o líder fez a escolha de sua estratégia (política), procuram um equilíbrio de Nash de suas funções custos e então o líder v faz sua escolha final para todo o sistema, procurando atingir um estado ideal u^T num tempo T por meio de um controle aproximado. Essa é a conhecida estratégia de Stackelberg-Nash.

Em resumo, o trabalho está dividido da seguinte forma:

No capítulo 1 apresentamos os resultados preliminares, essenciais ao desenvolvimento do nosso trabalho.

No capítulo 2 resultados de existência, unicidade e regularidade de soluções são estudados.

Finalmente, no capítulo 3 apresentamos resultados sobre controle hierárquico para equação da onda.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos alguns resultados necessários para que o leitor possa ter uma melhor compreensão dos conteúdos abordados no capítulo seguinte.

1.1 Tópicos de Análise Funcional

1.1.1 Convergência Fraca e Fraca Estrela

Definição 1.1 ***(Convergência Fraca)*** *Sejam E um espaço de Banach e $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma sequência de E. Então $u_\nu \rightharpoonup u$ se, e somente se, $\langle \varphi, u_\nu\rangle \to \langle \varphi, u\rangle$, para todo $\varphi \in E'$.*

Definição 1.2 ***(Convergência Fraca Estrela)*** *Sejam E um espaço de Banach, $\varphi \in E'$ e $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma sequência de E'. Dizemos que $\varphi_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$ fraca estrela se, e somente se, $\langle \varphi_\nu, u\rangle \to \langle \varphi, u\rangle$, para todo $u \in E$.*

Definição 1.3 *Definimos por $\sigma(E, E')$ a topologia fraca de E induzida por E'.*

Proposição 1.1 *Sejam E um espaço de Banach e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em E. Então:*

(i) *Se $x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(E, E')$ então $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall f \in E'$;*

(ii) *Se $x_n \to x$ forte então $x_n \rightharpoonup x$ fracamente na topologia $\sigma(E, E')$;*

(iii) *Se $x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(E, E')$ e se $f_n \to f$ fortemente em E' (isto é, $\|f_n - f\|_{E'} \to 0$) então $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.*

Demonstração: Brezis ([4], p. 58). □

1.1.2 Espaços Separáveis e Reflexivos

Definição 1.4 *Dizemos que um espaço métrico E é separável se existe um subconjunto $D \subset E$ enumerável e denso.*

Definição 1.5 *Sejam E um espaço de Banach e J a injeção canônica de E em E''. Dizemos que E é reflexivo quando $J(E) = E''$.*

Quando o espaço E é reflexivo identificamos implicitamente E e E'' (com ajuda do isomorfismo J).

Teorema 1.1 *(**Banach-Alaoglu-Bourbaki**). Sejam E um espaço de Banach e E' o seu dual topológico. Então o conjunto*

$$B_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\} \quad \textit{é compacto na topologia fraca estrela.}$$

Demonstração: Brezis ([4], p. 66). □

Teorema 1.2 *Sejam E um espaço de Banach separável e E' o seu dual topológico. Então o conjunto*

$$B_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\} \quad \textit{é metrizável na topologia fraca estrela.}$$

Reciprocamente, se $B_{E'}$ é metrizável na topologia fraca estrela, então E é separável.

Demonstração: Brezis ([4], p.74). □

Corolário 1.1 *Sejam E um espaço Banach separável e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em E'. Então existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que converge na topologia fraca estrela.*

Demonstração: Brezis ([4], p. 76). □

Teorema 1.3 *Seja E um espaço de Banach reflexivo e suponhamos que a sequência $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ é limitada. Então existe uma subsequência $(f_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $f \in E$ tal que*

$$f_{k_j} \rightharpoonup f.$$

Demonstração: Evans ([7], p. 639). □

1.1.3 Convexidade e Otimização

Teorema 1.4 *Seja $F : D \subseteq H \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional definido em um subconjunto D de um espaço de Hilbert H. Suponha que F tem as seguintes propriedades:*

(i) *D é um subconjunto convexo fechado não vazio do espaço de Hilbert H;*

(ii) *F é sequencialmente semi-contínuo inferiormente;*

(iii) *Se D é ilimitado, então F é fracamente coercivo.*

Então o problema de minimzação

$$F(u) = \min_{v \in D} F(v) \tag{1.1}$$

tem uma solução e esta será única se adicionarmos a hipótese de F for estritamente convexo.

Demonstração: Zeidler ([34], p. 54). $\square$

Teorema 1.5 *(**Fenchel - Rochafellar**) Suponha que $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ onde X e Y são espaços de Hilbert e que $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ e $\psi : Y \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ são funcionais não-triviais convexos e semicontínuos inferiormente. Suponha que exista $x \in \mathrm{Dom}(\varphi) \cap \mathrm{Dom}(\psi)$ tal que φ é contínua em x e ψ é contínua em Ax. Então*

$$\inf_{x \in X}[\varphi(x) + \psi(Ax)] = -\inf_{q \in Y^*}[\varphi^*(A^*q) + \psi^*(-q)] = -\min_{q \in Y^*}[\varphi^*(A^*q) + \psi^*(-q)],$$

onde φ^* é a adjunta de φ e é dada por

$$\varphi^*(p) = \sup_{x \in X}[\langle p, x \rangle - \varphi(x)]$$

Demonstração: Brezis ([4], p. 15). $\square$

Proposição 1.2 *(**Caracterização de Solução**) Suponhamos que $N = N_1 + N_2$ e que N_1 e N_2 são funcionais convexos e semi-contínuos inferiormente de um subconjunto convexo C em $\mathbb{R}$, com N_1 sendo gâteaux-diferenciável com derivada N_1'. Então, se $\mu \in C$, as condições são equivalentes:*

(i) *μ é solução do problema*

$$\inf_{\mu \in C} N(\mu)$$

(ii) $\left\langle N_1'(\mu), \xi - \mu \right\rangle + N_2(\xi) - N_2(\mu) \geq 0 \qquad \forall\, \xi \in C;$

(iii) $\left\langle N_1'(\xi), \mu - \xi \right\rangle + N_2(\mu) - N_2(\xi) \geq 0 \qquad \forall\, \xi \in C.$

Demonstração: Ekeland ([6], p. 38). □

Teorema 1.6 *(**Critério de Densidade**) Seja D um subconjunto de um espaço de Hilbert H. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) *D gera um subespaço que é denso em H;*

(ii) *Todo funcional linear contínuo f em H que se anula em D é identicamente nulo em H.*

Demonstração: Aubin ([1], p. 30). □

1.2 Teoria das Distribuições Escalares

Definição 1.6 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Denomina-se* suporte *de φ ao fecho em Ω do conjunto dos pontos x tais que $\varphi(x) \neq 0$. Simbolicamente,*

$$\operatorname{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}^{\,\Omega}.$$

Definição 1.7 *Denota-se por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções contínuas e infinitamente deriváveis em Ω com suporte compacto em Ω.*

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ é de grande importância para o nosso estudo, visto que estamos interessados em estudar funcionais lineares contínuos definidos em $C_0^\infty(\Omega)$.

Definição 1.8 *Dizemos que uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$ quando forem satisfeitas as seguintes condições:*

i) *Existe um conjunto compacto* $K \subset \Omega$ *tal que*

$$supp\,(\varphi) \subset K \quad e \quad supp\,(\varphi_\nu) \subset K, \quad \forall\, \nu \in \mathbb{N}$$

ii) $D^\alpha \varphi_\nu \longrightarrow D^\alpha \varphi$ *uniformemente em* K *para todo multi-índice* α.

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ munido da noção de convergência definida acima será representada por $\mathcal{D}(\Omega)$ e é denominado de *espaço das funções testes*.

Denomina-se *distribuição escalar* sobre Ω a toda forma linear $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua com respeito a topologia de $\mathcal{D}(\Omega)$. Isto significa que T satisfaz as seguintes condições:

i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi)$, $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

ii) T é contínua, isto é, se uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge em $\mathcal{D}(\Omega)$ para $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, então,

$$T(\varphi_\nu) \longrightarrow T(\varphi) \text{ em } \mathbb{R}.$$

O valor da distribuição T na função teste φ será representado por $\langle T, \varphi\rangle$. Equipa-se o espaço vetorial das distribuições escalares da seguinte noção de convergência:

Considera-se o espaço de todas as distribuições sobre Ω. Neste espaço, dizemos que a sequência $(T_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge para T, quando a sucessão $\langle T_\nu, \varphi\rangle_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge para $\langle T, \varphi\rangle$ em $\mathbb{R}$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

O conjunto das distribuições escalares sobre Ω é um espaço vetorial real, o qual denota-se por $\mathcal{D}'(\Omega)$, é chamado *espaço das distribuições escalares* sobre Ω. Com o intuito de estudarmos os espaços de Sobolev, introduz-se o conceito de derivada distribuicional para objetos de $\mathcal{D}'(\Omega)$. A motivação no conceito de derivada fraca e posteriormente o conceito de derivada distribuicional dada por Sobolev, se deve a fórmula de integração por partes de Cálculo, sendo este conceito generalizado para distribuições quaisquer em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Dada uma distribuição T em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e dado um multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ defini-se a *derivada distribucional* de ordem α de T como sendo a forma linear e contínua $D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi\rangle, \quad \text{para todo} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Segue-se da definição acima que cada distribuição T sobre Ω possui derivadas de todas as ordens. Notemos que a aplicação

$$D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega). \tag{1.2}$$

é linear e continua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Isto significa que se

$$\lim_{v\to\infty} T_v = T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ então } \lim_{v\to\infty} D^\alpha T_v = D^\alpha T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{1.3}$$

1.3 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Nesta seção, serão dadas algumas definições e propriedades elementares dos espaços $L^p(\Omega)$.

Definição 1.9 *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $p \in \mathbb{R}$ com $1 \le p < \infty$. Definimos*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ mensurável e } |f|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

O espaço $L^p(\Omega)$ com $1 \le p < \infty$ é um espaço de Banach equipado com a norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx\right]^{1/p}.$$

Definição 1.10 *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto. Definimos*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ mensurável e } \exists\, C \text{constante tal que } |f(x)| \le C \text{ q.s em } \Omega\}.$$

O espaço $L^\infty(\Omega)$ é um espaço de Banach equipado com a norma

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C : \ |f(x)| \le C \text{ q.s em } \Omega\}.$$

Teorema 1.7 *(**Desigualdade de Young**) Sejam $p > 1$ e $q > 1$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então,*

$$ab \le \frac{1}{p}\, a^p + \frac{1}{q}\, b^q, \quad \forall a \ge 0 \ \text{ e } \ \forall b \ge 0.$$

Demonstração: Brezis ([4], p. 92). □

Teorema 1.8 *(**Desigualdade de Hölder**) Sejam as funções $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ com $1 \le p \le \infty$ e q o expoente conjugado de p; isto é $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |fg| dx \le \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração: Brezis ([4], p. 92). $\square$

Definição 1.11 *Dizemos que uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é localmente integrável em Ω, quando f é integrável à Lebesgue em todo compacto $K \subset \Omega$. O espaço das funções localmente integravéis é denotado por $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Em símbolos temos que*

$$f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) \Leftrightarrow \int_K |f|dx < \infty, \quad \textit{para todo compacto} \quad K \subset \Omega.$$

As distribuções que aparecem com mais frequência são aquelas definidas a partir de funções localmente integráveis.

Exemplo 1.1 *Seja $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e definamos $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ por*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx$$

Nestas condições T_u é uma distribução escalar sobre Ω.

De fato, não é dificil mostrarmos a linearidade de T_u, pois segue da linearidade da integral. Resta provarmos que T_u é contínua.

Seja uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções testes sobre Ω convergindo em $\mathcal{D}(\Omega)$ para uma função teste φ. Então, temos

$$\begin{aligned} |\langle T_u, \varphi_\nu \rangle - \langle T_u, \varphi \rangle| &= |\langle T_u, \varphi_\nu - \varphi \rangle| \\ &= \left| \int_\Omega u(x)(\varphi_\nu - \varphi)(x)dx \right| \\ &\leq \int_\Omega |u(x)(\varphi_\nu - \varphi)(x)|dx \\ &\leq \sup |\varphi_\nu - \varphi| \int_\Omega |u(x)|dx \to 0, \end{aligned}$$

pois $\varphi_\nu \to \varphi$ uniformemente.

A distribução T_u assim definida é dita "gerada pela função localamente integrável u"e, usando o Lema de Du Bois Raymond, tem-se que T_u é univocamente determinada por u, no seguinte sentido: $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ quase sempre em Ω. Neste sentido identificamos u com a distribuição T_u e o espaço $L^1_{loc}(\Omega)$ das funções localmente integráveis pode ser visto como parte do espaço das distribuições $\mathcal{D}'(\Omega)$

Lema 1.3.1 ***(Du Bois Raymond)*** *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então $T_u = 0$ se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω.*

Demonstração: Medeiros, L. A e Milla Miranda, M. ([24], p. 12). □

Observação 1.1 *Outro resultado interessante é que a derivada de uma função* $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$*, não é em geral uma função de* $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$*.*

Tal fato, motivará a definição de uma classe significativa de espaços de Banach de funções conhecidas sob a denominação de *Espaços de Sobolev.*

1.4 Espaços de Sobolev

Como vimos na seção anterior, toda função $u \in L^p(\Omega)$ possui derivadas distribucionais de todas as ordens. Entretanto, as derivadas de u nem sempre são também funções de $L^p(\Omega)$.

1.4.1 Os Espaços $W^{m,p}(\Omega)$

Chamaremos multi-índice a toda n-upla $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ de números naturais. Dado um multi-índice α, definimos a ordem $|\alpha|$ de α por $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$, e representamos por D^α o operador derivação

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Definição 1.12 *Sejam* Ω *um aberto do* $\mathbb{R}^n$*,* $1 \leq p \leq \infty$ *e* $m \in \mathbb{N}$*. O espaço de Sobolev que denotamos por* $W^{m,p}(\Omega)$*, é o espaço vetorial das (classes de) funções em* $L^p(\Omega)$ *cujas derivadas distribucionais de ordem* α *pertencem a* $L^p(\Omega)$*, para todo multi-índice* α *com* $|\alpha| \leq m$*. Simbolicamente escrevemos:*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para todo } \alpha \text{ tal que } |\alpha| \leq m\}.$$

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$ é um espaço de Banach equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx \Big)^{1/p}.$$

Também $W^{m,\infty}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{\Omega} \mathrm{ess}|D^\alpha u(x)|.$$

No caso $p = 2$, o espaço $W^{m,p}(\Omega)$ será representado por $H^m(\Omega)$ que é um espaço de Hilbert, cujo produto interno e a correspondente norma induzida em $H^m(\Omega)$ são dadas, respectivamente, por

$$\langle u, v\rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{e} \quad \|u\|_{H^m(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 dx\Big)^{1/2}.$$

Agora apresentaremos algumas desigualdades de Sobolev que nos ajudarão a alcançar os objetivos propostos.

Corolário 1.2 *Sejam Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 com fronteira limitada Γ e $1 \leq p \leq \infty$. Então:*

$$\textit{Se} \quad n > pm, \quad \textit{então} \quad W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \ \textit{onde}\ q \in \Big[1, \tfrac{np}{n-mp}\Big].$$

$$\textit{Se} \quad n = pm, \quad \textit{então} \quad W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \ \textit{para todo} \ \ q \in [1, +\infty).$$

$$\textit{Se} \quad n = 1 \quad \textit{e} \quad m \geq 1, \quad \textit{então} \quad W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega).$$

E todas estas injeções são contínuas. Além disso, se $p > n$ tem-se para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$|u(x) - u(y)| \leq C\|u\|_{W^{1,p}}|x - y|^\alpha \ \textit{q.s.}\ x, y \in \Omega,$$

onde $\alpha = 1 - (N/p)$ e C depende apenas do Ω, p e n. Em particular $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$.

Demonstração: Brezis ([4], p. 285). □

Teorema 1.9 (Rellich–Kondrachov) *Seja Ω um subconjunto limitado do $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 com fronteira Γ regular. Então:*

$$\textit{Se} \quad n > pm, \quad \textit{então} \quad W^{m,p}(\Omega) \stackrel{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega), \ \textit{para todo}\ q \in \Big[1, \tfrac{2n}{n-2m}\Big).$$

$$\textit{Se} \quad n = pm, \quad \textit{então} \quad W^{m,p}(\Omega) \stackrel{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega), \ \textit{para todo} \ \ q \in [1, +\infty).$$

Se $pm > n$, então $W^{m,p}(\Omega) \stackrel{c}{\hookrightarrow} C(\overline{\Omega})$, onde k é um inteiro não negativo tal que $k < m - (n/p) \leq k + 1$.

Em particular, $W^{1,p}(\Omega) \stackrel{c}{\hookrightarrow} L^p(\Omega)$ com injeção compacta para todo p (e para todo n).

Demonstração: Brezis ([4], p. 285). $\square$

Teorema 1.10 *(**Gauss-Green**) Se $u \in C^1(\overline{\Omega})$, então* $\displaystyle\int_\Omega u_{x_i} dx = \int_\Gamma u\nu^i d\Gamma \;\; (i = 1, 2, ..., n).$

Demonstração: Brezis ([4]). $\square$

Teorema 1.11 ***(Fórmulas de Green)***

(i) *Se $\gamma \in H^2(\Omega)$, então*

$$\int_\Omega \nabla\gamma \; \nabla u \; dx = -\int_\Omega u \; \Delta\gamma \; dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\gamma}{\partial\nu} \; u \; ds, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

(ii) *Se $u, \gamma \in H^2(\Omega)$, então*

$$\int_\Omega (u \; \Delta \; \gamma - \gamma \; \Delta u \;) \, dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \; \frac{\partial\gamma}{\partial\nu} - \gamma \; \frac{\partial u}{\partial\nu} \right) ds.$$

Demonstração: Brezis ([4], p. 296). $\square$

Teorema 1.12 ***(Representação de Riesz)*** *Sejam $1 < p < \infty$ e $\varphi \in (L^p)'$. Então existe um único $u \in L^q$ onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ tal que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int uf, \quad \forall f \in L^p.$$

Além disso, vale

$$||u||_{L^q} = ||\varphi||_{(L^p)'}.$$

Demonstração: Brezis ([4], p. 97). $\square$

Teorema 1.13 *(**Teorema do Traço**) A aplicação linear*

$$u \mapsto (\gamma_0 u, \gamma_1 u, ..., \gamma_{m-1} u) = \left(u|_\Gamma, \frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_\Gamma, ..., \frac{\partial^{m-1}}{\partial\nu^{m-1}}\Big|_\Gamma \right)$$

de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ em $\displaystyle\prod_{j=0}^{m-1} W^{m-j-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$, prolonga-se, por continuidade, a uma aplicação linear, contínua e sobrejetiva de $W^{m,p}(\Omega)$ em $\displaystyle\prod_{j=0}^{m-1} W^{m-j-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$.

Demonstração: Evans ([7], p. 258). $\square$

Teorema 1.14 *(***Regularidade***) Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto limitado com fronteira Γ de classe C^2. Sejam $f \in L^2(\Omega)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi + \int_\Omega u\phi = \int_\Omega f\phi, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Então $u \in H^2(\Omega)$ e $||u||_{H^2(\Omega)} \leq C|f|_{L^2(\Omega)}$, onde C é uma constante que só depende de Ω.

Demonstração: Brezis([4], p. 298). □

1.4.2 Os Espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ e $W^{-m,q}(\Omega)$

Observemos que, embora o espaço vetorial das funções testes $u, v \in \mathcal{D}(\Omega)$ seja denso em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$, em geral, ele não é denso em $W^{m,p}(\Omega)$. Isto acontece porque a norma de $W^{m,p}(\Omega)$ é “bem maior"que a norma de $L^p(\Omega)$ e é por isso que $W^{m,p}(\Omega)$ possui menos sequências convergentes. Isto motivou a definição dos espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ como segue:

Definição 1.13 *Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Definimos*

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

No caso $p = 2$, o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ será representado por $H_0^m(\Omega)$.

Teorema 1.15 ***(Desigualdade de Poincaré)*** *Suponhamos que Ω seja um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$. Então existe uma constante C (dependendo de Ω e p) tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \text{ para todo } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração: Ver Brezis ([4], p. 290). □

Observação 1.2 *Em particular, a expressão $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ é uma norma no espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$, equivalente a norma $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. Em $H_0^1(\Omega)$ tem-se o produto interno*

$$((u, v)) = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx,$$

que induz a norma $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$, equivalente a norma $\|u\|_{H^1(\Omega)}$.

Demonstração: Brezis ([4], p. 290). □

Os espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ e, em particular, os espaços $H_0^m(\Omega)$, desempenham um papel fundamental na Teoria dos Espaços de Sobolev e por conseguinte na Teoria das EDP's. Se $1 \leq p < \infty$ e o número q é o expoente conjugado de p, isto é $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então representamos por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$ e por $H^{-m}(\Omega)$ o dual topológido de $H_0^m(\Omega)$. Em outras palavras, se f pertence a $H^{-m}(\Omega)$ então f é um funcional linear limitado sobre $H_0^m(\Omega)$.

Definição 1.14 *Se $f \in H^{-1}(\Omega)$ a norma é definida como sendo*

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup\{\langle f, u\rangle; \textit{para todo } u \in H_0^1(\Omega) \textit{ com } \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1\}.$$

Observação 1.3 *Em particular, as conclusões do Corolário (1.2) é válido para o espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ com um subconjunto arbitrário aberto Ω de $\mathbb{R}^n$. Analogamente, a conclusão do Teorema (1.9) é válido para $W_0^{1,p}(\Omega)$ com um subconjunto arbitrário Ω aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração: Brezis ([4], p. 290). □

1.5 Os Espaços $L^p(0,T;X)$

Nesta seção, estenderemos as noções de mensurabilidade e integrabilidade para funções

$$f : [0,T] \longrightarrow X,$$

onde $T > 0$ e X é um espaço de Banach real com a norma $\|.\|$.

Definição 1.15 *Denota-se por $L^p(0,T;X)$, com $1 \leq p \leq \infty$ o espaço vetorial das (classes de) funções $u : (0,T) \longrightarrow X$ fortemente mensuráveis com valores em X e tais que se $1 \leq p < \infty$ a função $t \mapsto \|u(t)\|_X^p$ é integrável à* Lesbegue *em $(0,T)$ e se $p = \infty$ a função $t \mapsto \|u(t)\|_X \in L^\infty(0,T)$.*

O espaço $L^p(0,T;X)$ é um espaço completo com a norma dada por

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt\right)^{1/p}, \text{ se } 1 \leq p < \infty.$$

Se $p=\infty$ a norma acima é substituída por

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{0<t<T}\text{ess}\,\|u(t)\|_X = inf\{C>0 : ||u(t)||_X \leq C \quad q.s \quad \text{em} \quad \Omega\}.$$

Apenas no caso em que $p=2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0,T;X)$ é um espaço de Hilbert, cujo produto interno é dado por

$$\langle v,u\rangle_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T \langle v(t), u(t)\rangle_X \, dt.$$

Quando X é reflexivo e separável e $1<p<\infty$, então $L^p(0,T;X)$ é um espaço reflexivo e separável, cujo dual topológico se identifica ao espaço de *Banach* $L^{p'}(0,T;X')$, onde p e p' são índices conjugados, isto é, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. Mais precisamente, temos

$$\left[L^p(0,T;X)\right]' \approx L^{p'}(0,T,X').$$

A dualidade entre esses espaços é dada na forma integral por

$$\langle v,u\rangle_{L^{p'}(0,T;X')\times L^p(0,T;X)} = \int_0^T \langle v(t), u(t)\rangle_{X'\times X} \, dt.$$

No caso $p=1$, o dual topológico do espaço $L^1(0,T;X)$ se identifica ao espaço $L^\infty(0,T;X')$, ou seja,

$$\left[L^1(0,T;X)\right]' \approx L^\infty(0,T,X').$$

Definição 1.16 *Seja $v\in L^1(0,T)$. Dizemos que $s\in(0,T)$ é um ponto de Lebesgue de v, se para todo $h>0$ tal que $]s-h,s+h[\subset(0,T)$ então*

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{s-h}^{s+h} v(\xi)d\xi = v(s)$$

Definição 1.17 *Denota-se por $C([0,T];X)$, com $T>0$ o espaço de* Banach *das funções contínuas $u:[0,T]\longrightarrow X$ munido da norma da convergência uniforme*

$$\|u\|_{C([0,T];X)} = \max_{0\leq t\leq T}\|u(t)\|_X < \infty.$$

Teorema 1.16 *Sejam X e Y espaços de Hilbert tal que $X\hookrightarrow Y$ e $f\in L^p(0,T;X)$, $f'\in L^p(0,T;Y)$, $1\leq p\leq\infty$, então $f\in C^0([0,T];Y)$.*

Demonstração: Brezis ([3]).

Lema 1.5.1 *Sejam X um espaço de Banach, $f \in L^p(0,T;X)$ e $f' \in L^p(0,T;X)$ com $1 \leq p \leq \infty$, então*

$$f \in C([0,T];X).$$

(Possivelmente redefinidas sobre um conjunto de medida nula.)

Demonstração: Lions ([20], p. 7). □

Teorema 1.17 *Seja X um espaço de Hilbert e $u \in L^2(0,T;X)$. Então existe um único funcional $f \in H^{-1}(0,T;X)$ que verifica*

$$\langle f, \theta\psi \rangle = (\langle u', \theta \rangle, \psi)_X \quad \forall \quad \theta \in \mathcal{D}(0,T) \quad e \quad \psi \in X.$$

Baseado nisto, identificamos f com u'. Por esta razão, diremos que se $u \in L^2(0,T;X)$ então $u' \in H^{-1}(0,T;X)$.

Demonstração: Pathak ([29]).

1.6 Distribuições Vetoriais

Seja um número real $T > 0$ e X um espaço de Banach real com a norma $\|.\|$

Definição 1.18 *Uma distribuição vetorial sobre $(0,T)$ com valores em X, é uma função $f : \mathcal{D}(0,T) \to X$ linear e contínua. O conjunto dessas transformações lineares é chamado Espaço das Distribuições Vetoriais sobre $(0,T)$ com valores em X e é denotado por*

$$\mathcal{D}'(0,T;X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T);X).$$

Definição 1.19 *Seja $f \in \mathcal{D}'(0,T;X)$. A* derivada *de ordem n é definida como sendo a distribuição vetorial sobre $(0,T)$ com valores em X dada por*

$$\left\langle \frac{d^n f}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle f, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Observação 1.4 *Se a função f pertence ao espaço $L^p(0,T;X)$ com $1 \leq p \leq \infty$, então define uma distribuição que denotamos pela mesma função f e é dada por*

$$f(\varphi) = \int_0^T f(t)\varphi(t)dt, \ \textit{para todo } \varphi \in \mathcal{D}(0,T),$$

com valor integrável em X.

Demonstração: Lions ([20], p. 7). □

1.7 Resultados Importantes

Nesta seção, apresentamos alguns resultados importantes que serão utilizados nesta dissertação.

1.7.1 Funções Próprias e Decomposição Espectral

Teorema 1.18 *Assumimos Ω um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$. Existe uma sequência de números reais $(\lambda_m)_{m\in\mathbb{N}}$ donde*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots,$$

e

$$\lambda_m \to \infty \;\; quando \;\; m \to \infty.$$

E uma base Hilbertiana $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $L^2(\Omega)$ tais que $w_j \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{cases} -\Delta w_j = \lambda_j w_j & em \quad \Omega \\ \quad w_j = 0 & sobre \quad \Gamma, \end{cases}$$

para $j = 1, 2 \dots$
Diz-se que os números (λ_m) são os autovalores de $-\Delta$ (com a condição de Dirichlet) e que as $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ são as funções próprias associadas.

Demonstração: Evans ([7], p. 335) ou Medeiros ([25], p. 134). □

1.7.2 O Teorema de Carathéodory

Sejam D um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$ cujos elementos são denotados por (x, t) onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$ e $f : D \to \mathbb{R}^n$. Dizemos que f satisfaz as *condições de Carathéodory* sobre D quando:

- $f(x, t)$ é mensurável em t para cada x fixo;
- $f(x, t)$ é contínua em x para cada t fixo;

- Para cada compacto K em D existe uma função real integrável $m_K(t)$ tal que $|f(x,t)| \leq m_K(t)$ para todo $(x,t) \in K$.

Definição 1.20 *Uma solução no sentido* estendido *do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0; \end{cases}$$

é uma função $\phi(t)$ absolutamente contínua tal que para algum β real vale

i) $(\phi(t),t) \in D$ *para todo* $t \in [t_0-\beta, t_0+\beta]$*;*

ii) $\phi'(t) = f(t,\phi(t))$ *para todo* $t \in [t_0-\beta, t_0+\beta]$*, exceto em um conjunto de medida de Lebesgue zero.*

Consideremos o retângulo

$$R = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1};\ |t-t_0| \leq a,\ |x-x_0| \leq b\right\},$$

com $a, b > 0$. Então, valem os seguintes resultados:

Teorema 1.19 (Carathéodory) *Seja $f : R \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre R. Então sobre algum intervalo $|t-t_0| \leq \beta$ $(\beta > 0)$ existe uma solução no sentido estendido do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x' = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0; \end{cases}$$

Demonstração: Medeiros, L. A e Rivera, P. H. ([26], p. 156). □

Corolário 1.3 *Sejam D um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$ e f satisfazendo as condições de Carathéodory sobre D. Então o problema*

$$\begin{cases} x' = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0; \end{cases}$$

tem solução para qualquer $(t_0,x_0) \in D$.

Demonstração: Medeiros, L. A e Rivera, P. H. ([26], p. 159). □

Teorema 1.20 *Sejam D um subconjunto aberto limitado e conexo em $\mathbb{R}^{n+1}$, f uma função que satisfaz as duas primeiras condições de Carathéodory sobre D e suponhamos que exista uma função integrável $m(t)$ tal que $|f(t,x)| \leq m(t)$ para todo $(t,x) \in D$. Seja φ uma solução de*

$$x' = f(t,x) \text{ para quase todo } t \text{ em } I,$$

sobre o intervalo aberto (a,b). Então

i) *existe $\varphi(a+0)$ e $\varphi(b-0)$, onde $\varphi(a+0)$ e $\varphi(b-0)$ são os prolongamentos laterais de φ a esquerda de a e a direita b respectivamente;*

ii) *se $(b, \varphi(b-0)) \in D$ então φ pode ser prolongada até $(a, b+\delta]$ para algum δ. Resultado análogo para a;*

iii) *$\varphi(t)$ pode ser prolongada até um intervalo (γ, ω) tal que $(\gamma, \varphi(\gamma+0)), (\omega, \varphi(\omega-0))$ pertencem a ∂D (∂D fronteira de D);*

iv) *se f pode estender-se a $\overline{D}$ sem que ele perca suas propriedades então $\varphi(t)$ pode ser prolongada até um intervalo $[\gamma, \omega]$ tal que $(\gamma, \varphi(\gamma+0)), (\omega, \varphi(\omega-0)) \in \partial D$.*

Demonstração: Medeiros, L. A e Rivera, P. H. ([26], p. 159). □

Corolário 1.4 ***(Prolongamento de Solução)*** *Sejam $D = B \times [0,T]$, com $0 < T < \infty$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq b\}$, $b > 0$ e a função f nas condições do Teorema 1.20. Seja $\phi(t)$ uma solução de*

$$\begin{cases} x' = f(x,t) \\ x(0) = x_0 \quad e \quad |x_0| \leq b. \end{cases}$$

Suponhamos que em qualquer intervalo I onde $\phi(t)$ está definida tem-se $|\phi(t)| \leq M$, para todo $t \in I$, M independente de t e $M < b$. Então ϕ tem um prolongamento até $[0,T]$.

Demonstração: Medeiros, L. A e Rivera, P. H. ([26], p. 164). □

1.7.3 Desigualdade de Gronwall

Lema 1.7.1 ***(Gronwall)*** *Sejam* $m \in L^1(0,T;R)$, $m \geq 0$ *q.s em* $(0,T)$, $a \geq 0$ *constante real e* $g \in L^\infty(0,T)$, $g \geq 0$ *em* $(0,T)$ *tal que*

$$\frac{1}{2}g(t)^2 \leq 2a^2 + 2\int_0^t m(s)g(s)ds \quad \forall t \in (0,T).$$

Então,

$$g(t) \leq 2\left(a + \int_0^t m(s)ds\right) \quad em\ (0,T).$$

Demonstração: Medeiros, L.A ([22], p. 76). □

1.7.4 O Teorema da Unicidade de Holmgren

Teorema 1.21 ***(Teorema da Unicidade de Holmgren)*** *Sejam* $\Omega_1 \subset \Omega_2$ *conjuntos abertos e convexos do* $\mathbb{R}^n$ *e* $P(D)$ *um operador diferencial com coeficientes constantes tal que todo plano característico* Π *com respeito a* $P(D)$ *que satisfaz* $\Pi \cap \Omega_2 \neq \emptyset$ *também satisfaz* $\Pi \cap \Omega_1 \neq \emptyset$. *Então, para a solução* $u \in D'(\Omega_2)$ *da equação* $P(D)u = 0$ *tal que* $u = 0$ *em* Ω_1 *também satisfaz* $u = 0$ *em* Ω_2.

Demonstração: Hörmander ([12], p. 129). □

Proposição 1.3 *Seja* $T > 2d(\Omega, \Gamma_0)$, *onde* $d(\Omega,\Gamma_0) = \sup_{x\in\Omega} d(x,\Gamma_0)$. *Então qualquer solução fraca* ψ *do problema*

$$\left|\begin{array}{l} \psi'' - \Delta\,\psi = 0 \quad em \quad Q \\ \psi = 0 \quad sobre \quad \Sigma \end{array}\right.$$

tal que $\dfrac{\partial \psi}{\partial \nu} = 0$ *sobre* $\Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0,T) \subset \Sigma$ *com* $\Gamma_0 \neq \emptyset$ *implica que* $\psi \equiv 0$.

Demonstração: Lions ([16], p. 92). □

Capítulo 2

Existência, Unicidade e Regularidade de Soluções

Neste capítulo estudaremos a existência, unicidade e regularidade de soluções para um problema misto associado a equação da onda.

Seja Ω um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ suficientemente regular. Denotaremos por ν o vetor normal unitário exterior a Γ, e para um número real $T > 0$, seja $Q = \Omega \times (0, T) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ o cilindro com fronteita lateral $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$.

Problema: Dados ϕ^0, ϕ^1 e f, encontrar uma função numérica $\phi : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaça

$$\begin{cases} \phi'' - \Delta\phi = f \quad \text{em} \quad Q \\ \\ \phi = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma \\ \\ \phi(.,0) = \phi^0, \phi'(.,0) = \phi^1 \quad \text{em} \quad \Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

2.1 Solução Forte

Nesta seção provaremos a existência e unicidade da solução para o problema (2.1), quando ϕ^0, ϕ^1 e f são dados bastantes regulares.

Definição 2.1 *Dizemos que uma função* $\phi : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ *é solução forte do problema* (2.1) *quando:*

$$\phi \in L^{\infty}(0,T;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \tag{2.2}$$

$$\phi' \in L^{\infty}(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{2.3}$$

$$\phi'' \in L^{1}(0,T;L^2(\Omega)) \tag{2.4}$$

$$\phi'' - \Delta\phi = f, \quad \text{q.s em Q} \tag{2.5}$$

$$\phi(\cdot,0) = \phi^0, \phi'(\cdot,0) = \phi^1 \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{2.6}$$

O resultado que nos garante a existência e a unicidade da solução forte para o problema (2.1) é enunciado como segue:

Teorema 2.1 (Solução Forte) *Sejam* $\phi^0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \phi^1 \in H_0^1(\Omega)$ *e* $f \in L^1(0,T;H_0^1(\Omega))$. *Então existe uma única solução forte para o problema* (2.1).

Demonstração: Para mostrarmos a existência usaremos o método de Faedo-Galerkin que consiste em três etapas:

1. Construção de soluções aproximadas em um espaço de dimensão finita;
2. Obtenção de estimativas a priori para as soluções aproximadas;
3. Passagem ao limite das soluções aproximadas.

Para provarmos a unicidade, usaremos o método da energia.

- **Existência**

Soluções Aproximadas

Consideremos $\{w_j\}_j$ uma base ortonormal em $L^2(\Omega)$, formada pelos autovetores do operador $-\Delta$, ou seja, cada w_j é solução do problema espectral:

$$((w_j, v)) = \lambda_j(w_j, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

A existência dessa base é garantida pelo Teorema Espectral. Seja $V_m = [w_1, w_2, ..., w_m]$ o subespaço m-dimensional do $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, gerado pelos m-primeiros vetores da base $\{w_j\}_j$. O problema aproximado consiste em determinar funções $\phi_m(t) : [0, t_m) \rightarrow V_m$ tais que

$$\phi_m(x,t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j(x),$$

onde os $g_{jm}(t)$ são soluções do sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} (\phi''_m(t), v) + ((\phi_m(t), v)) = (f(t), v), \quad \forall v \in V_m, \\ \phi_m(0) = \phi^0_m(x) \longrightarrow \phi^0 \;\text{ forte em }\; H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega), \\ \phi'_m(0) = \phi^1_m(x) \longrightarrow \phi^1 \;\text{ forte em }\; H^1_0(\Omega). \end{cases} \tag{2.7}$$

As convergências anteriores têm sentido, pois o conjunto formado pelas combinações lineares de elementos de $\{w_m; m \in \mathbb{N}\}$ é denso em $H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Mostremos que para cada $m \in \mathbb{N}$ fixado o sistema (2.7) tem solução no intervalo $[0, t_m]$ com $t_m < T$. De fato, fazendo $v = w_i$ em $(2.7)_1$ temos que

$$(\phi''_m(t), w_i) + ((\phi_m(t), w_i)) = (f(t), w_i),$$

isto é,

$$(\sum_{j=1}^{m} g''_{jm}(t) w_j, w_i) + ((\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j, w_i)) = (f(t), w_i).$$

Pela linearidade do produto interno, resulta que

$$\sum_{j=1}^{m} g''_{jm}(t)(w_j, w_i) + \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)((w_j, w_i)) = (f(t), w_i).$$

Como para cada $i = 1, ..., m$ temos que w_i é solução do problema espectral, $(w_j, w_i) = 0$ se $i \neq j$ e $(w_j, w_i) = 1$ se $i = j$, segue que

$$g''_{im}(t) + \lambda_i g_{im}(t) = (f(t), w_i), \quad i = 1, ..., m$$

que é um sistema de m equações diferenciáveis ordinárias de segunda ordem com coeficientes constantes λ_i.

Agora, como

$$\phi_m(0) = \phi^0_m = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(0) w_j \;\text{ e }\; \phi'_m(0) = \phi^1_m = \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(0) w_j,$$

tomando o produto interno em $L^2(\Omega)$ destas expressões com w_i, obtemos

$$(\phi_m(0), w_i) = (\phi^0_m, w_i) = g_{jm}(0),$$

$$(\phi'_m(0), w_i) = (\phi^1_m, w_i) = g'_{jm}(0).$$

Daí, temos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} g''_{im}(t) + \lambda_i g_{im}(t) = (f(t), w_i) \\ g_{jm}(0) = (\phi^0_m, w_i) \\ g'_{jm}(0) = (\phi^1_m, w_i). \end{cases}$$

Observemos que $g''_{im}(t) + \lambda_i g_{im}(t) = (f(t), w_i), i = 1, ..., m$ pode se visto na forma matricial da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} g''_{1m}(t) \\ g''_{2m}(t) \\ \vdots \\ g''_{mm}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ g_{2m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f(t), w_1) \\ (f(t), w_2) \\ \vdots \\ (f(t), w_m) \end{bmatrix}.$$

Considerando

$$Y(t) = \begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ g_{2m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{bmatrix}, \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{bmatrix} \text{ e } M = \begin{bmatrix} (f(t), w_1) \\ (f(t), w_2) \\ \vdots \\ (f(t), w_m) \end{bmatrix},$$

obtemos $Y''(t) + \lambda Y(t) = M$. Assim, o problema de valor inicial é equivalente a:

$$\begin{cases} Y''(t) = -\lambda Y(t) + M \\ Y(0) = Y_0 \\ Y'(0) = Y_1 \end{cases}$$

Agora, considerando

$$Z(t) = \begin{bmatrix} Y(t) \\ Y'(t) \end{bmatrix}_{2m \times 1},$$

temos

$$Z'(t) = \begin{bmatrix} Y'(t) \\ Y''(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y'(t) \\ -\lambda Y(t) + M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y'(t) \\ -\lambda Y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{0} \\ M \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ -\lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y(t) \\ Y'(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{0} \\ M \end{bmatrix},$$

onde I_m é a identidade $m \times m$, 0 é a matriz nula $m \times m$ e $\bar{0}$ é a matriz nula $m \times 1$.

Seja

$$F_1(Z,t) = \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ -\lambda & 0 \end{bmatrix} Z \;\; \text{e} \;\; F_2(Z,t) = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ M \end{bmatrix},$$

então encontrar solução para o problema de valor inicial anterior é equivalente a resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} Z' = F_1(Z,t) + F_2(Z,t), \\ Z(0) = \begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \end{bmatrix} = Z_0. \end{cases}$$

Mostremos que esse sistema está nas condições de Carathéodory. Com efeito, seja $G = U \times [0,T]$, onde $U = \{x \in \mathbb{R}^{2m}; \|\, x \,\| \leq b, b > 0\}$. Então,

- Fixando Z, temos que $F_1(Z,t)$ não depende de t e $F_2(Z,t)$ é mensurável, pois $f \in L^1(0,T;H_0^1(\Omega))$. Logo $F_1(Z,t) + F_2(Z,t)$ é mensurável em t para Z fixo.

- Fixando t, $F_1(Z,t)$ é uma transformção linear e $F_2(Z,t)$ não depende de Z, logo é constante , e assim $F_1(Z,t) + F_2(Z,t)$ é contínua.

- Como Z varia em U e sendo U limitado, então existe uma constante C tal que $\|\, F_1 \,\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq C$. As entradas de $F_2(Z,t)$ são funções integráveis em $[0,T]$, pois as m primeiras entradas são nulas e as m últimas entradas são em valor absoluto, iguais a $|(f(t),w_j)|$. Além disso,

$$\begin{aligned} |(f(t),w_j)| &= \left| \int_\Omega f(t) w_j dx \right| \leq \int_\Omega |f(t)||w_j| dx \\ &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |f(t)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |w_j\,|^2\, dx < \infty. \end{aligned}$$

Assim, $||F_2(Z,t)||_{\mathbb{R}^{2m}} \leq \max\limits_{1\leq j\leq m} |(f(t),w_j)| = m_B(t)$, para todo compacto B contido em G. Logo $||F_1 + F_2||_{\mathbb{R}^{2m}} \leq ||F_1||_{\mathbb{R}^{2m}} + ||F_2||_{\mathbb{R}^{2m}} \leq C + m_B(t) = M_B(t)$.

Portanto pelo corolário (1.3), o sistema possui solução em $[0,t_m]$, com $t_m < T$, e pelo corolário (1.4) essa solução pode ser estendida a todo intervalo $[0,T]$ como consequência das estimativas a priori que faremos a seguir.

Estimativa I. Fazendo $v = 2\phi'_m(t) \in V_m$ em $(2.7)_1$, obtemos

$$(\phi''_m(t), 2\phi'_m(t)) + ((\phi_m(t), 2\phi'_m(t))) = (f(t), 2\phi'_m(t)).$$

Observemos que,

$$(\phi''_m(t), 2\phi'_m(t)) = 2(\phi''_m(t), \phi'_m(t)) = \frac{d}{dt}(\phi'_m(t), \phi'_m(t)) = \frac{d}{dt}|\phi'_m(t)|^2$$

e

$$((\phi_m(t), 2\phi'_m(t))) = 2((\phi'_m(t), \phi_m(t))) = \frac{d}{dt}((\phi_m(t), \phi_m(t))) = \frac{d}{dt}||\phi_m(t)||^2.$$

Assim, resulta que

$$\frac{d}{dt}|\phi'_m(t)|^2 + \frac{d}{dt}||\phi_m(t)||^2 = (f(t), 2\phi'_m(t)). \tag{2.8}$$

Integrando (2.8) de 0 a t, obtemos

$$|\phi'_m(t)|^2 + ||\phi_m(t)||^2 = |\phi^1_m|^2 + ||\phi^0_m||^2 + 2\int_0^t (f(s), \phi'_m(s))ds. \tag{2.9}$$

Utilizando as Desigualdades de Cauchy-Schwartz, Hölder e Young, segue que

$$\begin{aligned}
2\int_0^t (f(s), \phi'_m(s))ds &\leq 2\int_0^t |(f(s), \phi'_m(s))|ds \\
&\leq 2\int_0^t |f(s)||\phi'_m(s)|ds \\
&\leq 2\Big(\int_0^t |f(s)|ds\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^t |f(s)||\phi'_m(s)|^2 ds\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \int_0^t |f(s)|ds + \int_0^t |f(s)||\phi'_m(s)|^2 ds.
\end{aligned}$$

Substituindo a última desigualdade em (2.9), obtemos

$$|\phi'_m(t)|^2 + ||\phi_m(t)||^2 \leq |\phi^1_m|^2 + ||\phi^0_m||^2 + \int_0^t |f(s)|ds + \int_0^t |f(s)||\phi'_m(s)|^2 ds. \tag{2.10}$$

Assim, pela hipótese sobre f e pelas convergências $(2.7)_1$ e $(2.7)_3$, então de (2.10) vale

$$|\phi'_m(t)|^2 + ||\phi_m(t)||^2 \leq C + \int_0^t |f(s)|(|\phi'_m(s)|^2 + ||\phi_m(s)||^2)ds, \tag{2.11}$$

onde C independe de m e t. Aplicando o Lema (1.7.1) em (2.11), obtemos

$$|\phi'_m(t)|^2 + ||\phi_m(t)||^2 \leq C, \tag{2.12}$$

onde C independe de m e t. Logo, pelo corolário (1.4) podemos estender a solução para todo o intervalo $[0, T]$.

Estimativa II. Fazendo $v = -2\Delta\phi'_m(t) \in V_m$ em $(2.7)_1$, temos

$$(\phi''_m(t), -2\Delta\phi'_m(t)) + ((\phi_m(t), -2\Delta\phi'_m(t))) = (f(t), -2\phi'_m(t)),$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}||\phi'_m(t)||^2 + \frac{d}{dt}|\Delta\phi_m(t)|^2 = 2((f(t), \phi'_m(t))). \tag{2.13}$$

Integrando de 0 a t, onde $t \leq T$, segue que

$$||\phi'_m(t)||^2 + |\Delta\phi_m(t)|^2 = ||\phi^1_m||^2 + |\Delta\phi^0_m|^2 + 2\int_0^t ((f(s), \phi'_m(s)))ds. \tag{2.14}$$

Utilizando as Desigualdades de Cauchy-Schwartz, Hölder e Young, resulta que

$$\begin{aligned} 2\int_0^t ((f(s), \phi'_m(s)))ds &\leq 2\int_0^t |((f(s), \phi'_m(s)))|ds \\ &\leq 2\int_0^t ||f(s)||\ ||\phi'_m(s)||ds \\ &\leq 2\Big(\int_0^T ||f(s)||ds\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^t ||f(s)||\ ||\phi'_m(s)||^2 ds\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \int_0^T ||f(s)||ds + \int_0^t ||f(s)||\ ||\phi'_m(s)||^2 ds. \end{aligned}$$

Substituindo a última desigualdade em (2.14), e considerando a hipótese sobre f, $(2.7)_2$, $(2.7)_3$ segue que

$$\begin{aligned} ||\phi'_m(t)||^2 + |\Delta\phi_m(t)|^2 \leq ||\phi^1_m||^2 + |\Delta\phi^0_m|^2 + \int_0^T ||f(s)||ds \\ + \int_0^t ||f(s)||\ ||\phi'_m(s)||^2 ds \leq C + \int_0^t ||f(s)||\ ||\phi'_m(s)||^2 ds \end{aligned} \tag{2.15}$$

Aplicando o lema (1.7.1), temos

$$||\phi'_m(t)||^2 + |\Delta\phi_m(t)|^2 \leq C, \tag{2.16}$$

onde $C > 0$ independe de m e t.

Passagem ao limite. Por (2.12) e (2.16), temos que

$$(\phi_m) \ \text{ é limitado em } \ L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega)), \tag{2.17}$$

$$(\phi'_m) \ \text{ é limitado em } \ L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega)), \tag{2.18}$$

$$(\Delta\phi_m) \ \text{ é limitado em } \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.19}$$

Observe que temos as seguintes identificações,

$$[L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))]' \approx L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega)),$$

$$[L^1(0,T;L^2(\Omega))]' \approx L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Agora, por (2.17) − (2.19) e também por $L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))$ e $L^1(0,T;L^2(\Omega))$ serem separáveis, temos, pelo corolário (1.1), a existência de uma subsequência de (ϕ_m), ainda denotada da mesma maneira, tal que

$$\phi_m \overset{*}{\rightharpoonup} \phi \ \text{ em } \ L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{2.20}$$

$$\phi'_m \overset{*}{\rightharpoonup} \alpha \ \text{ em } \ L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{2.21}$$

$$\Delta\phi_m \overset{*}{\rightharpoonup} \beta \ \text{ em } \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.22}$$

Mostraremos agora que $\alpha = \phi'$ e $\beta = \Delta\phi$. De fato, temos por (2.20) que $\phi_m \longrightarrow \phi$ em $\mathcal{D}'(Q)$ e como o operador derivação é contínuo em $\mathcal{D}'(Q)$, então

$$\phi'_m \longrightarrow \phi' \ \text{ em } \ \mathcal{D}'(Q), \tag{2.23}$$

$$\Delta\phi_m \longrightarrow \Delta\phi \ \text{ em } \ \mathcal{D}'(Q). \tag{2.24}$$

Por (2.21)-(2.24) e pela unicidade do limite, segue que

$$\phi'_m \overset{*}{\rightharpoonup} \phi' \ \text{ em } \ L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{2.25}$$

$$\Delta\phi_m \overset{*}{\rightharpoonup} \Delta\phi \ \text{ em } \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.26}$$

Consideremos em (2.7), $v \in \mathcal{D}(Q)$ e, em seguida, multiplicando $(2.7)_1$ por $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando de 0 a T, obtemos

$$\int_0^T (\phi''_m(t), v)\theta(t)dt + \int_0^T ((\phi_m(t), v))\theta(t)dt = \int_0^T (f(t), v)\theta(t)dt.$$

Observemos que $((\phi_m(t), v)) = \lambda_m(\phi_m(t), v) = (-\Delta\phi_m(t), v)$. Portanto,

$$\int_0^T (\phi''_m(t), v)\theta(t)dt - \int_0^T (\Delta\phi_m(t), v)\theta(t)dt = \int_0^T (f(t), v)\theta(t)dt. \tag{2.27}$$

Notemos que

$$\int_0^T (\phi''_m(t), v)\theta(t)dt = \int_0^T \frac{d}{dt}(\phi'_m(t), v)\theta(t)dt = -\int_0^T (\phi'_m(t), v)\theta'(t)dt,$$

e por (2.25), temos que

$$-\int_0^T (\phi'_m(t), v)\theta'(t)dt \longrightarrow -\int_0^T (\phi'(t), v)\theta'(t)dt. \tag{2.28}$$

Também por (2.26), vale que

$$-\int_0^T (\Delta\phi_m(t), v)\theta(t)dt \longrightarrow -\int_0^T (\Delta\phi(t), v)\theta(t)dt. \tag{2.29}$$

Fazendo $m \to \infty$ em (2.27) e usando (2.28) e (2.29), obtemos

$$-\int_0^T (\phi'(t), v)\theta'(t)dt - \int_0^T (\Delta\phi(t), v)\theta(t)dt = \int_0^T (f(t), v)\theta(t)dt,$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned} - & \int_0^T \int_\Omega \phi'(x,t)v(x)\theta'(t)dxdt - \int_0^T \int_\Omega \Delta\phi(x,t)v(x)\theta(t)dxdt \\ = & \int_0^T \int_\Omega f(x,t)v(x)\theta(t)dxdt. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Seja $\beta(x,t) = v(x)\theta(t) \in \mathcal{D}(Q)$. Portanto,

$$-\int_0^T \int_\Omega \phi'(x,t)\beta'(x,t)dxdt - \int_0^T \int_\Omega \Delta\phi(x,t)\beta(x,t)dxdt = \int_0^T \int_\Omega f(x,t)\beta(x,t)dxdt.$$

Observemos que

$$-\int_0^T \int_\Omega \phi'(x,t)\beta'(x,t)dxdt = -\langle \phi', \beta' \rangle_{\mathcal{D}'(Q),\mathcal{D}(Q)} = \left\langle \frac{d}{dt}\phi', \beta \right\rangle_{\mathcal{D}'(Q),\mathcal{D}(Q)} = \langle \phi'', \beta \rangle_{\mathcal{D}'(Q),\mathcal{D}(Q)}.$$

Assim, temos

$$\langle \phi'', \beta \rangle_{\mathcal{D}'(Q),\mathcal{D}(Q)} = \int_Q (f(x,t) + \Delta\phi(x,t))\beta(x,t)dxdt.$$

Dessa forma, a distribuição ϕ'' é definida por $f + \Delta\phi \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ e

$$\int_Q [\phi''(x,t) - \Delta\phi(x,t) - f(x,t)]\beta(x,t)dxdt = 0, \forall \beta \in \mathcal{D}(Q). \tag{2.31}$$

Logo, pelo lema (1.3.1), segue que

$$\phi'' - \Delta\phi = f \text{ q.s em } Q.$$

□

Condições Iniciais.

- $\phi(0) = \phi^0$

Pelo teorema(1.14) temos $\phi \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$ e $\phi' \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$, então pelo Teorema (1.16), segue que $\phi \in C^0([0,T];H_0^1(\Omega))$ e assim faz sentido $\phi(\cdot,0)$. De (2.25), resulta que

$$\int_0^T (\phi_m'(t),v)\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T (\phi'(t),v)\theta(t)dt, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

onde $\theta \in C^1([0,T])$, com $\theta(0)=1$ e $\theta(T)=0$. Logo,

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(\phi_m(t),v)\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T \frac{d}{dt}(\phi(t),v)\theta(t)dt. \tag{2.32}$$

Integrando por partes, temos

$$-(\phi_m^0,v) - \int_0^T (\phi_m(t),v)\theta'(t)dt \longrightarrow -(\phi(0),v) - \int_0^T (\phi(t),v)\theta'(t)dt. \tag{2.33}$$

Como, por (2.20), temos

$$\int_0^T (\phi_m(t),v)\theta'(t)dt \longrightarrow \int_0^T (\phi(t),v)\theta'(t)dt,$$

concluimos de (2.33), que

$$(\phi_m^0,v) \longrightarrow (\phi(0),v), \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Por outro lado, de $(2.7)_2$, segue que

$$(\phi_m^0,v) \longrightarrow (\phi^0,v), \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Dessa forma podemos concluir que $\phi^0 = \phi(0)$.

- $\phi'(0) = \phi^1$

Como $\phi' \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ e $\phi'' \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, então pelo Teorema (1.16), temos que $\phi' \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$, e assim faz sentido calcular $\phi'(\cdot,0)$. Multiplicando $(2.7)_1$ por $\theta_\delta \in H^1(0,T)$, definida por

$$\theta_\delta(t) = \begin{cases} \dfrac{-t}{\delta}+1, & \text{se } \ 0 \le t \le \delta \\ 0, & \text{se } \ \delta \le t \le T \end{cases}$$

e integrando de 0 a T, obtemos

$$\int_0^T (\phi_m''(t),v)\theta_\delta(t)dt + \int_0^T (-\Delta\phi_m(t),v)\theta_\delta(t)dt = \int_0^T (f(t),v)\theta_\delta(t)dt.$$

Integrando por partes o primeiro termo, segue que

$$(-\phi_m^1, v) + \frac{1}{\delta}\int_0^\delta (\phi_m'(t), v)dt + \int_0^\delta (-\Delta\phi_m(t), v)\theta_\delta(t)dt = \int_0^T (f(t), v)\theta_\delta(t)dt.$$

Fazendo $m \to \infty$ na última igualdade e observando as convergências $(2.7)_3, (2.25)$ e (2.26), temos

$$(-\phi^1, v) + \frac{1}{\delta}\int_0^\delta (\phi'(t), v)dt + \int_0^\delta (-\Delta\phi(t), v)\theta_\delta(t)dt = \int_0^T (f(t), v)\theta_\delta(t)dt. \qquad (2.34)$$

Agora, fazendo $\delta \to 0$, concluimos que

$$(-\phi^1, v) + (\phi'(0), v) = (-\phi^1 + \phi'(0), v) = 0, \quad \forall v \in L^2(\Omega),$$

ou seja, $\phi^1 = \phi'(0)$.

- **Unicidade**

Suponhamos que ϕ e $\overline{\phi}$ são duas soluções nas condições do Teorema (2.1). Então $\rho = \phi - \overline{\phi}$ satisfaz

$$\begin{gathered}
\rho \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \\
\rho' \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)) \\
\rho'' \in L^1(0,T; L^2(\Omega)) \\
\rho'' - \Delta\rho = 0, \quad \text{q.s em Q} \\
\rho(\cdot, 0) = 0, \rho'(\cdot, 0) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega.
\end{gathered}$$

Logo faz sentido a seguinte equação

$$\int_Q \rho''\rho' dxdt - \int_Q \Delta\rho\rho' dxdt = 0$$

Assim, usando a primeira fórmula de Green e integração por partes obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|\rho'(t)|^2 + ||\rho||^2) = 0,$$

e portanto, $\rho = 0$, ou seja, $\phi = \overline{\phi}$. □

Teorema 2.2 (Desidualdade da Energia) *Se ϕ é solução forte do problema* (2.1), *então*

$$||\phi'(t)|| + |\Delta\phi(t)|^2 \leq ||\phi^1||^2 + |\Delta\phi^0|^2 + 2\int_0^t ((f(s), \phi'(s)))ds \quad em \quad [0, T] \qquad (2.35)$$

Demonstração: Considerando em (2.7) $v = -2\Delta\phi'_m(t) \in V_m$, obtemos

$$(\phi''_m(t), -2\Delta\phi'_m(t)) + ((\phi_m(t), -2\Delta\phi'_m(t))) = (f(t), -2\phi'_m(t)),$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}||\phi'_m(t)||^2 + \frac{d}{dt}|\Delta\phi_m(t)|^2 = 2((f(t), \phi'_m(t)))$$

Integrando a última igualdade de 0 a $t \leq T$ obtemos

$$||\phi'_m(t)||^2 + |\Delta\phi_m(t)|^2 = ||\phi^1_m||^2 + |\Delta\phi^0_m|^2 + 2\int_0^t ((f(s), \phi'_m(s)))ds \tag{2.36}$$

Multiplicando ambos os lados de (2.36) por $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando de 0 a T, temos

$$\begin{aligned} \int_0^T ||\phi'_m(t)||^2\theta(t)dt + \int_0^T |\Delta\phi_m(t)|^2\theta(t)dt = \int_0^T ||\phi^1_m||^2\theta(t)dt \\ + \int_0^T |\Delta\phi^0_m|^2\theta(t)dt + 2\int_0^T \Big(\int_0^t ((f(s), \phi'_m(s)))ds\Big)\theta(t)dt \end{aligned} \tag{2.37}$$

Pelas convergências em (2.25) e (2.26) temos, pelo teorema (1.3), que

$$\int_0^T ||\phi'(t)||^2\theta(t)dt \leq \underline{\lim} \int_0^T ||\phi'_m(t)||^2\theta(t)dt \tag{2.38}$$

e

$$\int_0^T |\Delta\phi(t)|^2\theta(t)dt \leq \underline{\lim} \int_0^T |\Delta\phi_m(t)|^2\theta(t)dt. \tag{2.39}$$

Tomando $\underline{\lim}$ em ambos os lados de (2.37) e tendo em conta $(2.7)_2, (2.7)_3$, (2.25), (2.26), (2.38), (2.39) e que $\underline{\lim}\mu + \underline{\lim}v \leq \underline{\lim}(\mu + v)$, segue que

$$\begin{aligned} \int_0^T ||\phi'(t)||^2\theta(t)dt + \int_0^T |\Delta\phi(t)|^2\theta(t)dt \leq \int_0^T ||\phi^1||^2\theta(t)dt \\ + \int_0^T |\Delta\phi^0|^2\theta(t)dt + 2\int_0^T \Big(\int_0^t ((f(s), \phi'(s)))ds\Big)\theta(t)dt. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Substituindo θ, em (2.40), por uma função $\theta_h \in \mathcal{D}(0,T)$, definida por

$$\theta_h(t) = \begin{cases} \theta(t), & \text{em } (s-h, s+h) \subset (0,T) \\ 0, & \text{em } (0,T) - (s-h, s+h) \end{cases}$$

e dividindo ambos os lados por $2h > 0$ e fazendo $h \to 0$, obtemos

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{s-h}^{s+h} ||\phi'(t)||^2\theta(t)dt + \lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{s-h}^{s+h} |\Delta\phi(t)|^2\theta(t)dt \\ &\leq \lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{s-h}^{s+h} ||\phi^1||^2\theta(t)dt + \lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{s-h}^{s+h} |\Delta\phi^0|^2\theta(t)dt \\ &+2\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{s-h}^{s+h} \Big(\int_0^t ((f(s), \phi'(s)))ds\Big)\theta(t)dt \end{aligned}$$

e, portanto usando a definição(1.16) temos a desigualdade de energia (2.35). □

Corolário 2.1 *Se ϕ é solução forte do problema* (2.1), *então*

$$||\phi'(t)|| + |\Delta\phi(t)| \leq C\Big(||\phi^1|| + |\Delta\phi^0| + \int_0^T ||f(s)||ds\Big) \quad em \quad [0,T] \tag{2.41}$$

Demonstração: Seja ϕ a solução forte do problema (2.1). Então do Teorema (2.2), segue que

$$\Big(||\phi'(t)|| + |\Delta\phi(t)|\Big)^2 \leq 2\Big(||\phi^1|| + |\Delta\phi^0|\Big)^2 + 4\int_0^t ||f(s)||(||\phi'(s)|| + |\Delta\phi(s)|)ds.$$

Tomando $g(t) = ||\phi'(t)|| + |\Delta\phi(t)|, a = ||\phi^1|| + |\Delta\phi^0|$ e $m(s) = 2||f(s)||$, obtemos que

$$\frac{1}{2}g(t)^2 \leq g(t)^2 \leq 2a^2 + 2\int_0^t m(s)g(s)ds \quad \text{em} \quad [0,T].$$

Pelo Lema (1.7.1), resulta que

$$g(t) \leq 2\Big(a + \int_0^t m(s)ds\Big) \quad \text{em} \quad [0,T]$$

o que implica na desigualdade (2.41). □

Teorema 2.3 (Regularidade da Solução Forte) *A solução forte ϕ de* (2.1) *pertence a classe*

$$\phi \in C^0([0,T]; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap C^1([0,T]; H_0^1(\Omega)) \tag{2.42}$$

Demonstração: A solução forte é o limite fraco de uma sequência de aproximações da forma

$$\phi_m(x,t) = \sum_{j=1}^m g_j(t)w_j(x), \tag{2.43}$$

onde os $g_j(t), 1 \leq j \leq m$ são soluções do sistema de equações diferenciais ordinárias

$$g_j''(t) + \lambda_j g_j(t) = (f, w_j), \quad 1 \leq j \leq m \tag{2.44}$$

com as condições iniciais

$$g_j(0) = (\phi^0, w_j) \;\text{ e }\; g_j'(0) = (\phi^1, w_j). \tag{2.45}$$

Agora aplicaremos o Método de Variações de Constantes de Lagrange (ver [13]).

A solução geral da equação homogênea associada a (2.44) é da forma:

$$g_{jh}(t) = (\phi^0, w_j)cos(\sqrt{\lambda_j}t) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}(\phi^1, w_j)sen(\sqrt{\lambda_j}t).$$

Calculando o Wronskiano W, obtemos

$$W = \begin{vmatrix} g_{j1}(t) & g_{j2}(t) \\ g'_{j1}(t) & g'_{j2}(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos(\sqrt{\lambda_j}t) & sen(\sqrt{\lambda_j}t) \\ -\sqrt{\lambda_j}sen(\sqrt{\lambda_j}t) & \sqrt{\lambda_j}cos(\sqrt{\lambda_j}t) \end{vmatrix} = \sqrt{\lambda_j}$$

Assim, temos uma solução particular de (2.44) da forma

$$\begin{aligned} g_{jp}(t) &= \int_0^t \frac{sen(\sqrt{\lambda_j}t)cos(\sqrt{\lambda_j}s) - cos(\sqrt{\lambda_j}t)sen(\sqrt{\lambda_j}t)}{\sqrt{\lambda_j}}(f(s), w_j)ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\int_0^t (f(s), w_j)sen(\sqrt{\lambda_j}(t-s))ds. \end{aligned}$$

Portanto a solução de (2.44) com dados iniciais (2.45) é dada por

$$\begin{aligned} g_j(t) &= g_{jh}(t) + g_{jp}(t) = (\phi^0, w_j)cos(\sqrt{\lambda_j}t) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}(\phi^1, w_j)sen(\sqrt{\lambda_j}t) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\int_0^t (f(s), w_j)sen(\sqrt{\lambda_j}(t-s))ds, \end{aligned}$$

para $1 \leq j \leq m$. Logo substituindo em (2.43), a solução aproximada é dada por

$$\begin{aligned} \phi_m(x,t) &= \sum_{j=1}^m \Big[(\phi^0, w_j)cos(\sqrt{\lambda_j}t) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}(\phi^1, w_j)sen(\sqrt{\lambda_j}t) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\int_0^t (f(s), w_j)sen(\sqrt{\lambda_j}(t-s))ds\Big]w_j(x) \end{aligned}$$

Encontrada explicitamente, a expressão da solução aproximada, passemos a provar a regularidade (2.42).

- $\phi \in C^0([0,T]; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$

Mostraremos que $(\phi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $C^0([0,T]; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$. De fato, considerando $m, n \in \mathbb{N}$ com $m > n$, temos

$$||\phi_m(t) - \phi_n(t)||^2_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} = \Big|\Big|\sum_{i=n+1}^m g_i(t)w_i(x)\Big|\Big|^2_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} = \Big|\sum_{i=n+1}^m g_i(t)\Delta w_i(x)\Big|^2.$$

Sendo $-\Delta w_i = \lambda_i w_i$ e $\{w_i\}_i$ uma base ortonormal em $L^2(\Omega)$, pelo Teorema de Pitágoras, obtemos

$$||\phi_m(t) - \phi_n(t)||^2_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} = \Big|\sum_{i=n+1}^m g_i(t)\lambda_i w_i(x)\Big|^2 = \sum_{i=n+1}^m |g_i(t)\lambda_i|^2$$

Analisando o último termo da igualdade anterior, deduzimos

$$\begin{aligned}
|g_i(t)\lambda_i|^2 &= \Big|(\phi^0, w_i)\lambda_i cos(\sqrt{\lambda_i}t) + \frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}}(\phi^1, w_i)sen(\sqrt{\lambda_i}t) \\
&+ \frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}}\int_0^t (f(s), w_i)sen(\sqrt{\lambda_i}(t-s))ds\Big|^2 \\
&\leq \Big(|(\phi^0, w_i)\lambda_i cos(\sqrt{\lambda_i}t)| + \Big|\frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}}(\phi^1, w_i)sen(\sqrt{\lambda_i}t)\Big| \\
&+ \Big|\frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}}\int_0^t (f(s), w_i)sen(\sqrt{\lambda_i}(t-s))ds\Big|\Big)^2 \\
&\leq \Big(|(\phi^0, w_i)\lambda_i| + \Big|\frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}}(\phi^1, w_i)\Big| + \Big|\frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}}\int_0^t (f(s), w_i)ds\Big|\Big)^2.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ duas vezes, obtemos

$$|g_i(t)\lambda_i|^2 \leq 4|(\phi^0, w_i)\lambda_i|^2 + 4\Big|\frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}}(\phi^1, w_i)\Big|^2 + 2\Big(\int_0^T \Big|(f(s), w_i)\frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}}\Big|ds\Big)^2. \tag{2.46}$$

Como $\{w_i\}_i$ é uma base ortonormal em $L^2(\Omega)$, então $\left\{\frac{w_i}{\lambda_i}\right\}_i$ e $\left\{\frac{w_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right\}_i$ são bases ortonormais em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$ respectivamente. Mais ainda, pode-se provar que $\left\{\frac{w_i}{\lambda_i}\right\}_i$ é completo em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Suponhamos f regular. Logo pela identidade de Parseval, obtemos

$$||\phi^0||^2_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^{\infty}\Big|\Big(\Big(\phi^0, \frac{w_i}{\lambda_i}\Big)\Big)_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)}\Big|^2 \text{ e } ||\phi^1||^2_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^{\infty}\Big|\Big(\Big(\phi^1, \frac{w_i}{\sqrt{\lambda_i}}\Big)\Big)_{H_0^1(\Omega)}\Big|^2.$$

Como

$$\Big(\Big(\phi^0, \frac{w_i}{\lambda_i}\Big)\Big)_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} = \Big(\Delta\phi^0, \frac{\Delta w_i}{\lambda_i}\Big) = -\Big(\Delta\phi^0, \frac{\lambda_i w_i}{\lambda_i}\Big) = -(\Delta\phi^0, w_i)$$

e

$$\Big(\Big(\phi^1, \frac{w_i}{\sqrt{\lambda_i}}\Big)\Big)_{H_0^1(\Omega)} = \Big(\nabla\phi^1, \frac{\nabla w_i}{\sqrt{\lambda_i}}\Big) = -\Big(\phi^1, \frac{\Delta w_i}{\sqrt{\lambda_i}}\Big) = \Big(\phi^1, \frac{\lambda_i w_i}{\sqrt{\lambda_i}}\Big) = (\phi^1, w_i)\frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}}$$

deduzimos que

$$\sum_{i=n+1}^{m}|(\Delta\phi^0, w_i)|^2 \to 0 \text{ e } \sum_{i=n+1}^{m}\Big|(\phi^1, w_i)\frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}}\Big| \to 0, \text{ quando } m, n \to \infty. \tag{2.47}$$

Notemos agora que sendo $f(s) \in H_0^1(\Omega)$, temos

$$f(s) = \sum_{i=1}^{\infty}\Big(\Big(f(s), \frac{w_i}{\sqrt{\lambda_i}}\Big)\Big)\frac{w_i}{\sqrt{\lambda_i}},$$

donde

$$||f(s)||^2_{H^1_0(\Omega)} = \Big|\Big| \sum_{i=1}^{\infty} \Big(\Big(f(s), \frac{w_i}{\sqrt{\lambda_i}}\Big)\Big) \frac{w_i}{\sqrt{\lambda_i}} \Big|\Big|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \Big|(f(s), w_i)\frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}}\Big|^2.$$

Como consideramos f regular, ou seja, $f \in C^0([0,T]; H^1_0(\Omega))$, aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\Big(\int_0^T \Big|(f(s), w_i)\frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}}\Big| ds\Big)^2 \leq T \int_0^T \Big|(f(s), w_i)\frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}}\Big|^2 ds.$$

Portanto o último termo do lado direito de (2.46) pode ser visto como

$$\sum_{i=n+1}^{m} \Big(\int_0^T \Big|(f(s), w_i)\frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}}\Big| ds\Big)^2 \leq T \int_0^T \sum_{i=n+1}^{m} \Big|(f(s), w_i)\frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}}\Big|^2 ds \to 0, \tag{2.48}$$

quando $m, n \to \infty$.

Assim por (2.47) e (2.48), deduzimos de (2.46) que

$$\sum_{i=n+1}^{m} |g_i(t)\lambda_i|^2 \to 0, \quad \text{quando} \quad m, n \to \infty.$$

e portanto, a sequência $(\phi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é tal que

$$||\phi_m - \phi_n||^2_{C^0([0,T]; H^1_0(\Omega)\cap H^2(\Omega))} = \max_{0\leq t\leq T} ||\phi_m(t) - \phi_n(t)||^2_{H^1_0(\Omega)\cap H^2(\Omega)} \to 0,$$

quando $m, n \to \infty$, ou seja, $(\phi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $C^0([0,T]; H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega))$, e assim $(\phi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é convergente e seu limite é a solução forte $\phi \in C^0([0,T]; H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega))$.

- $\phi' \in C^0([0,T]; H^1_0(\Omega))$.

A derivada de (2.43) com respeito a t é

$$\phi'_m(x,t) = \sum_{i=1}^{m} g'_i(t) w_i(x),$$

onde

$$g'_i(t) = -(\phi^0, w_i)\sqrt{\lambda_i} sen(\sqrt{\lambda_i} t) + (\phi^1, w_i) cos(\sqrt{\lambda_i} t) + \int_0^t (f(s), w_i) cos(\sqrt{\lambda_i}(t-s)) ds.$$

Suponhamos $m > n$ com $m, n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$||\phi'_m(t) - \phi'_n(t)||^2 = \Big|\Big| \sum_{i=n+1}^{m} g'_i(t) w_i(x) \Big|\Big|^2 = \Big| \sum_{i=n+1}^{m} g'_i(t) \nabla w_i(x) \Big|^2.$$

Aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos

$$||\phi'_m(t) - \phi'_n(t)||^2 = \sum_{i=n+1}^{m} |g'_i(t)\sqrt{\lambda_i}|^2.$$

Usando os mesmos argumentos da primeira parte, para o termo de lado direito da igualdade anterior, obtemos

$$|g'_i(t)\sqrt{\lambda_i}|^2 \leq 4 \mid (\phi^0, w_i)\lambda_i \mid^2 + 4|(\phi^1, w_i)\sqrt{\lambda_i}|^2 + 2\Big(\int_0^T \Big|(f(s), w_i)\sqrt{\lambda_i}\Big| ds\Big)^2.$$

Observemos que

$$(\phi^0, w_i) = (\Delta\phi^0, w_i); (\phi^1, w_i)\sqrt{\lambda_i} = (\phi^1, w_i)\frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}}; (f(s), w_i)\sqrt{\lambda_i} = (f(s), w_i)\frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}}.$$

Logo pelos mesmos argumentos usados para obter (2.47) e (2.48), deduzimos que

$$\sum_{i=n+1}^{m} |g'_i(t)\sqrt{\lambda_i}|^2_{\mathbb{R}} \to 0, \quad \text{quando} \quad m, n \to \infty,$$

e $(\phi'_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é tal que

$$||\phi'_m - \phi'_n||^2_{C^0([0,T];H_0^1(\Omega))} = \max_{0\leq t\leq T} ||\phi'_m(t) - \phi'_n(t)||^2 \to 0, \quad \text{quando} \quad m, n \to 0,$$

ou seja, $(\phi'_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $C^0([0,T]; H_0^1(\Omega))$ e segue que $\phi' \in C^0([0,T]; H_0^1(\Omega))$. □

2.2 Solução Fraca

Nesta seção o objetivo é considerar o problema (2.1) com dados iniciais ϕ^0, ϕ^1 e f menos regulares. A solução obtida com essa pouca regularidade sobre os dados, será denominada solução fraca .

Teorema 2.4 (Solução Fraca) *Sejam $\phi \in H_0^1(\Omega), \phi^1 \in L^2(\Omega)$ e $f \in L^1(0,T; L^2(\Omega))$. Então existe uma única função $\phi : Q \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\phi \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)), \tag{2.49}$$

$$\phi' \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)), \tag{2.50}$$

$$\phi'' \in L^1(0,T; H^{-1}(\Omega)), \tag{2.51}$$

$$\frac{d}{dt}(\phi', v) + ((\phi, v)) = (f, v), \forall \ \ v \in H_0^1(\Omega) \ \ \text{em} \ \ \mathcal{D}'(0,T), \tag{2.52}$$

$$\phi'' - \Delta\phi = f \ \ \text{em} \ \ L^1(0,T; H^{-1}(\Omega)), \tag{2.53}$$

$$\phi(0) = \phi^0, \phi'(0) = \phi^1. \tag{2.54}$$

Demonstração: A existência da solução fraca será provada por aproximação de uma sequência de soluções fortes encontradas na seção anterior.

- **Existência**

Dados $\{\phi^0, \phi^1, f\} \in \{H_0^1(\Omega), L^2(\Omega), L^1(0,T; L^2(\Omega))\}$, como $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e $C^0([0,T]; C^1(\overline{\Omega})) \hookrightarrow L^1(0,T; L^2(\Omega))$ temos que existem sequências $(\phi_m^0), (\phi_m^1)$ e (f_m) em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), H_0^1(\Omega)$ e $C^0([0,T]; C^1(\overline{\Omega}))$ respectivamente tais que

$$\left| \begin{array}{l} \phi_m^0(x) \to \phi^0 \ \ \text{forte em} \ \ H_0^1(\Omega), \\ \phi_m^1(x) \to \phi^1 \ \ \text{forte em} \ \ L^2(\Omega), \\ f_m \to f \ \ \text{forte em} \ \ L^1(0,T; L^2(\Omega)). \end{array} \right. \tag{2.55}$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, o Teorema (2.1) nos garante a existência de uma única função $\phi_m : Q \to \mathbb{R}$ tal que

$$\phi_m \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)), \tag{2.56}$$

$$\phi_m' \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)), \tag{2.57}$$

$$\phi_m'' \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)), \tag{2.58}$$

$$\phi_m'' - \Delta\phi_m = f_m \quad \text{q.s em} \ \ Q, \tag{2.59}$$

$$\phi_m(0) = \phi_m^0, \phi_m'(0) = \phi_m^1 \ \ \text{em} \ \ \Omega. \tag{2.60}$$

Como

$$(\phi_m''(t), v) + ((\phi_m(t), v)) = (f_m(t), v)), \forall \ \ t \in (0,T) \ \ \text{e} \ \ \forall v \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)), \tag{2.61}$$

tomando $v = 2\phi_m'(t)$, obtemos

$$2(\phi_m''(t), \phi_m'(t)) + 2((\phi_m(t), \phi_m'(t))) = 2(f_m(t), \phi_m'(t)),$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}(|\phi_m'(t)|^2 + ||\phi_m(t)||^2) = 2(f_m(t), \phi_m'(t)).$$

Integrando de 0 a t, obtemos

$$|\phi'_m(t)|^2 + ||\phi_m(t)||^2 = |\phi^1_m|^2 + ||\phi^0_m||^2 + 2\int_0^t (f_m(t), \phi'_m(t))dt. \tag{2.62}$$

Utilizando as desigualdades de Cauchy-Scharwz, Hölder e Young, resulta que

$$|\phi'_m(t)|^2 + ||\phi_m(t)||^2 \leq |\phi^1_m|^2 + ||\phi^0_m||^2 + \int_0^T |f_m(t)|dt + \int_0^t |f_m(s)||\phi'_m(s)|^2 ds.$$

Portanto, pelas convergências dadas em (2.55), segue que

$$|\phi'_m(t)|^2 + ||\phi_m(t)||^2 \leq C + \int_0^t |f_m(s)||\phi'_m(s)|^2 ds,$$

e pelo Lema (1.7.1), obtemos

$$|\phi'_m(t)|^2 + ||\phi_m(t)||^2 \leq C, \tag{2.63}$$

onde $C > 0$ independe de m e t. Assim,

$$(\phi_m) \;\text{ é limitada em }\; L^\infty(0,T; H^1_0(\Omega)), \tag{2.64}$$

$$(\phi'_m) \;\text{ é limitada em }\; L^\infty(0,T; L^2(\Omega)). \tag{2.65}$$

Pelo corolário (1.1), existe uma subsequência de (ϕ_m) ainda denotada da mesma forma, tal que

$$\phi_m \overset{*}{\rightharpoonup} \phi \;\text{ em }\; L^\infty(0,T; H^1_0(\Omega)), \tag{2.66}$$

$$\phi'_m \overset{*}{\rightharpoonup} \phi' \;\text{ em }\; L^\infty(0,T; L^2(\Omega)). \tag{2.67}$$

Multiplicando (2.61) por $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando de 0 a T, temos

$$\int_0^T (\phi''_m(t), v)\theta(t)dt + \int_0^T ((\phi_m(t), v))\theta(t)dt = \int_0^T (f_m(t), v)\theta(t)dt.$$

Observemos que,

$$\int_0^T (\phi''_m(t), v)\theta(t)dt = \int_0^T \frac{d}{dt}(\phi'_m(t), v)\theta(t)dt = -\int_0^T (\phi'_m(t), v)\theta'(t)dt.$$

Assim, usando (2.66) e (2.67), $\forall\, \theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e $v \in H^1_0(\Omega)$, obtemos que

$$-\int_0^T (\phi'(t), v)\theta'(t)dt + \int_0^T ((\phi(t), v))\theta(t)dt = \int_0^T (f(t), v)\theta(t)dt. \tag{2.68}$$

Logo,

$$\langle(\phi'(t),v),\theta'(t)\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}+\langle((\phi(t),v)),\theta(t)\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}=\langle(f(t),v),\theta(t)\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)},$$

ou seja,

$$\Big\langle\frac{d}{dt}(\phi'(t),v)+((\phi(t),v))-(f(t),v),\theta(t)\Big\rangle=0,\forall\,\theta\in\mathcal{D}(0,T)\ \text{ e }\ \forall v\in H_0^1(\Omega).$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}(\phi'(t),v)+((\phi(t),v))=(f(t),v),\quad \text{em}\ \ \mathcal{D}'(0,T)\quad\forall\ \ v\in H_0^1(\Omega).$$

Considerando, em particular, $v\in\mathcal{D}(\Omega)$, temos

$$\langle\phi'',v\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}-\langle\Delta\phi,v\rangle_{\mathcal{D}'(Q),\mathcal{D}(Q)}=\langle f,v\rangle\ \ \text{em}\ \ \mathcal{D}'(0,T), \tag{2.69}$$

ou seja,

$$\langle\phi''-\Delta\phi-f,v\rangle_{\mathcal{D}'(Q),\mathcal{D}(Q)}=0\ \ \text{em}\ \ \mathcal{D}'(0,T),\ \ \forall\ \ v\in\mathcal{D}(\Omega).$$

Logo,

$$\phi''-\Delta\phi=f\ \ \text{em}\ \ \mathcal{D}'(Q). \tag{2.70}$$

Como $\Delta\in\mathcal{L}(H_0^1(\Omega);H^{-1}(\Omega))$ e $\phi\in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$, então $\Delta\phi\in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Assim,

$$\phi''=f+\Delta\phi\in L^1(0,T;L^2(\Omega))+L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))\subset L^1(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

Portanto,

$$\phi''-\Delta\phi=f\ \ \text{em}\ \ L^1(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{2.71}$$

Condições Iniciais

Por (2.49)-(2.51) e o Teorema (1.16), temos que $\phi\in C^0([0,T];L^2(\Omega))$ e $\phi'\in C^0([0,T];H^{-1}(\Omega))$, e assim faz sentido o cálculo de ϕ e ϕ' em $t=0$. A demonstração de (2.54) segue usando o mesmo argumento da Seção (2.1).

- **Unicidade**

Para provarmos a unicidade da solução fraca ϕ do problema (2.1), utilizaremos o método devido a Visik-Ladyzhenskaya [33].

Suponhamos que existem duas soluções fracas ϕ e $\overline{\phi}$ do problema (2.1). Seja $w = \phi - \overline{\phi}$. Logo w é solução fraca do problema:

$$\left|\begin{array}{ll} w'' - \Delta w = 0 & \text{em } Q, \\ w = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ w(0) = 0,\ w'(0) = 0 & \text{em } \Omega. \end{array}\right.$$

Assim, $w \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), w' \in L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))$ e $w'' \in L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Logo não é possível considerar $\langle w''(t), w'(t)\rangle$, dualidade entre $H^{-1}(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$. Dessa forma precisamos definir uma nova função ψ, de modo a fazer sentido a dualidade acima.

Seja $0 < s < T$. Definamos

$$\psi(t) = \begin{cases} -\displaystyle\int_t^s w(r)dr, & 0 < t < s \\ 0, & s \le t \le T. \end{cases}$$

Portanto, $\psi \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ e faz sentido, a dualidade $\langle w''(t) - \Delta w(t), \psi(t)\rangle$. Assim,

$$\int_0^T \langle w''(t), \psi(t)\rangle dt + \int_0^T \langle -\Delta w(t), \psi(t)\rangle dt = 0 \tag{2.72}$$

Seja $w_1(l) = \displaystyle\int_0^l w(r)dr$. Então $\psi(t) = w_1(t) - w_1(s)$ e $\psi'(t) = w_1'(t) = w(t)$. Logo,

$$\int_0^s \langle w''(t), \psi(t)\rangle dt = (w'(t), \psi(t))\Big|_0^s - \int_0^s (w'(t), \psi'(t))dt = (w'(s), \psi(s)) - (w'(0), \psi(0))$$
$$- \int_0^s (w'(t), \psi'(t))dt = -\int_0^s \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 dt = -\frac{1}{2}|w(s)|^2$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle -\Delta w(t), \psi(t)\rangle dt &= \int_0^s ((w(t), \psi(t)))dt = \int_0^s \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\psi(t)||^2 dt \\ &= \frac{1}{2}||\psi(s)||^2 - \frac{1}{2}||\psi(0)||^2 = -\frac{1}{2}||\psi(0)||^2. \end{aligned}$$

Logo aplicando as duas últimas igualdades em (2.72), obtemos:

$$|w(s)|^2 + ||\psi(0)||^2 = 0, \forall s \in [0,T].$$

Então $w \equiv 0$ e, portanto, $\phi = \overline{\phi}$. □

Definamos a energia $E(t)$ do sistema (2.1) como sendo

$$E(t) = \frac{1}{2}(|\phi'(t)|^2 + ||\phi(t)||^2). \tag{2.73}$$

Para essa energia, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.5 (Desigualdade de Energia) *Se ϕ é solução fraca do problema* (2.1), *então*

$$E(t) \leq E_0 + \int_0^t (f(s), \phi'(s))ds \quad q.s \quad em \quad [0,T], \tag{2.74}$$

onde $E_0 = E(0)$.

Demonstração: Utilizando as convergências (2.66) e (2.67) em (2.62) e o mesmo argumento aplicado na prova do Teorema (2.2) podemos concluir que a desigualdade (2.74) é válida. □

Corolário 2.2 *Se ϕ é solução fraca de* (2.1), *então*

$$|\phi'(t)| + ||\phi(t)|| \leq C\Big(|\phi^1| + ||\phi^0|| + \int_0^T |f(s)|ds\Big) \quad em \quad [0,T].$$

Demonstração: Usa-se o mesmo argumento do Corolário (2.1). □

Teorema 2.6 (Regularidade da Solução Fraca) *A solução fraca ϕ do problema* (2.1) *tem a seguinte regularidade:*

$$\phi \in C^0([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T]; L^2(\Omega)). \tag{2.75}$$

Demonstração: Seja $(\phi_v)_{v\in\mathbb{N}}$ uma sequência de soluções fortes que aproxima a solução fraca ϕ. Logo se $m, n \in \mathbb{N}$ com $m > n$, temos por (2.59) que

$$(\phi_m''(t) - \phi_n''(t), v)) + ((\phi_m(t) - \phi_n(t), v)) = (f_m(t) - f_n(t), v), \forall \quad v \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)).$$

Tomando $v = \phi_m'(t) - \phi_n'(t)$, segue que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(|\phi_m'(t) - \phi_n'(t)|^2 + ||\phi_m(t) - \phi_n(t)||^2) \quad &\leq \quad |(f_m(t) - f_n(t), \phi_m'(t) - \phi_n'(t))| \\ &\leq |f_m(t) - f_n(t)|(|\phi_m'(t) - \phi_n'(t)| + ||\phi_m(t) - \phi_n(t)||).\end{aligned}$$

Integrando a última desigualdade de 0 a t, obtemos

$$\begin{aligned}|\phi_m'(t) - \phi_n'(t)|^2 + ||\phi_m(t) - \phi_n(t)||^2 &\leq |\phi_m^1 - \phi_n^1|^2 + ||\phi_m^0 - \phi_n^0||^2 \\ &+ \int_0^t |f_m(t) - f_n(t)|(|\phi_m'(t) - \phi_n'(t)| + ||\phi_m(t) - \phi_n(t)||)dt\end{aligned}$$

Daí tem-se que

$$\frac{1}{2}(|\phi_m'(t) - \phi_n'(t)| + ||\phi_m(t) - \phi_n(t)||)^2 \leq 2(|\phi_m^1 - \phi_n^1| + ||\phi_m^0 - \phi_n^0||)^2$$

$$+2\int_0^T |f_m(t) - f_n(t)|(|\phi_m'(t) - \phi_n'(t)| + ||\phi_m(t) - \phi_n(t)||)dt$$

Pelo lema (1.7.1), temos

$$|\phi_m'(t)-\phi_n'(t)|+||\phi_m(t)-\phi_n(t)|| \leq 2\Big(|\phi_m^1-\phi_n^1|+||\phi_m^0-\phi_n^0||+\int_0^t |f_m(s)-f_n(s)|ds\Big). \quad (2.76)$$

Usando as convergências (2.55) em (2.76) podemos concluir que, quando $m, n \to \infty$, temos que

$$||\phi_m - \phi_n||_{C^0([0,T];H_0^1(\Omega))} = \max_{0\leq t\leq T} ||\phi_m(t) - \phi_n(t)|| \to 0$$

e

$$|\phi_m' - \phi_n'|_{C^0([0,T];L^2(\Omega))} = \max_{0\leq t\leq T} |\phi_m'(t) - \phi_n'(t)| \to 0.$$

Logo, $(\phi_v)_{v\in\mathbb{N}}$ e $(\phi_v')_{v\in\mathbb{N}}$ são sequências de Cauchy em $C^0([0,T];H_0^1(\Omega))$ e $C^0([0,T];L^2(\Omega))$, respectivamente. Assim,

$$\phi_v \to \alpha \ \ forte \ \text{ em } \ C^0([0,T];H_0^1(\Omega))$$

e

$$\phi_v' \to \beta \ \ forte \ \text{ em } \ C^0([0,T];L^2(\Omega)).$$

Como convergência forte implica em convergência fraco - estrela, temos pelas convergências (2.66) e (2.67) e pela unicidade do limite que $\alpha = \phi$ e $\beta = \phi'$. Portanto, temos a regularidade (2.75) para ϕ. □

2.3 Regularidade Escondida das Soluções Fracas

Nesta seção estudaremos a regularidade da derivada normal da solução fraca ϕ na fronteira Σ do cilindro Q. Consideremos ϕ solução fraca do problema (2.1) como visto na seção 2.2. Como $L^\infty(0,T;L^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega))$ temos pelo teorema (1.17)que se $\phi' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ então $\phi'' \in H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))$. Assim,

$$-\Delta\phi = f - \phi'' \in L^1(0,T;L^2(\Omega)) + H^{-1}(0,T;L^2(\Omega)).$$

Quando Γ é regular, isto implica que

$$\phi \in L^1(0,T;H^2(\Omega)) + H^{-1}(0,T;H^2(\Omega))$$

e a derivada normal de ϕ tem a seguinte regularidade:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \in L^1(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)) + H^{-1}(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)). \tag{2.77}$$

O objetivo desta seção é mostrarmos que $\frac{\partial \phi}{\partial \nu}$ pertence a seguinte classe:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma). \tag{2.78}$$

Notemos que a regularidade (2.78) não provém das propriedades da solução fraca ϕ dada pelo Teorema (2.4). Por esta razão ela é chamada de *Regularidade Escondida*. Esta denominação foi introduzida por Lions [15], quando o autor estudou um problema misto associado à equação da onda semilinear. Antes de enunciarmos o principal resultado desta seção, provaremos alguns resultados essenciais para a obtenção de (2.78).

Lema 2.3.1 *Seja $\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n)$ o campo de vetores normais exteriores a Γ. Então existe um campo vetorial $h = (h_1, h_2, ..., h_n) \in [C^1(\overline{\Omega})]^n$ tal que $h_i = \nu_i$ sobre Γ, para $i = 1, 2, ..., n$.*

Demonstração: Pelo teorema (1.9), temos que $H^m(\Omega) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$, para $m > 1+\frac{n}{2}$. Sendo o operador traço $\gamma_0 : H^m(\Omega) \to H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ sobrejetivo, portanto para cada $\nu_k \in H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, existe $h_k \in H^m(\Omega)$ tal que $\gamma_0(h_k) = \nu_k$. □

Lema 2.3.2 *Se $\phi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, então*

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \nu_i \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \quad \textit{sobre} \quad \Gamma \tag{2.79}$$

e

$$|\nabla \phi|^2 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right)^2. \tag{2.80}$$

Demonstração: Para provarmos (2.79), mostraremos que

$$\int_\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \theta d\Gamma = \int_\Gamma \nu_i \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \theta d\Gamma, \forall \ \ \theta \in \mathcal{D}(\Gamma). \tag{2.81}$$

Consideremos $\beta \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que $\gamma_0(\beta) = \theta$, ou seja, $\beta = \theta$ sobre Γ. A função β existe devido a imersão $H^m(\Omega) \hookrightarrow C^2(\overline{\Omega})$, para $m > 2 + \frac{n}{2}$ e o teorema (1.13).

Seja $(h_k)_{1 \leq k \leq n}$ o campo vetorial do lema (2.3.1). Portanto, $h_j = \nu_j$ e pelo teorema (1.10), temos

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} (\phi h_j \beta) dx = \int_\Gamma \nu_i \frac{\partial (\phi h_j \beta)}{\partial x_j} d\Gamma \tag{2.82}$$

Obteremos agora as expressões para as integrais em (2.82).

Aplicando o teorema (1.10) na primeira integral de (2.82) e tendo em conta que $h_j = \nu_j$ e $\beta = \theta$, temos

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}(\phi h_j \beta)dx = \int_\Gamma \nu_j \frac{\partial}{\partial x_i}(\phi h_j \beta)d\Gamma = \int_\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\theta \nu_j^2 d\Gamma. \tag{2.83}$$

Somando j de 1 a n na integral do lado direito de (2.83), resulta que

$$\sum_{j=1}^{n}\int_\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\theta \nu_j^2 d\Gamma = \int_\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\theta d\Gamma.$$

Assim, obtemos a seguinte igualdade relacionada ao primeiro membro de (2.82):

$$\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}(\phi h_j \beta)dx = \int_\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\theta d\Gamma. \tag{2.84}$$

Por outro lado, como $\phi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, então

$$\int_\Gamma \nu_i \frac{\partial(\phi h_j \beta)}{\partial x_j} d\Gamma = \int_\Gamma \nu_i \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(h_j\beta) d\Gamma = \int_\Gamma \nu_i \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\nu_j \theta d\Gamma. \tag{2.85}$$

Observemos que, somando j de 1 a n no último termo de (2.85), obtemos

$$\sum_{j=1}^{n}\int_\Gamma \nu_i \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\nu_j \theta d\Gamma = \int_\Gamma \nu_i \frac{\partial \phi}{\partial \nu}\theta d\Gamma. \tag{2.86}$$

Logo,

$$\sum_{j=1}^{n}\int_\Gamma \nu_i \frac{\partial(\phi h_j \beta)}{\partial x_j} d\Gamma = \int_\Gamma \nu_i \frac{\partial \phi}{\partial \nu}\theta d\Gamma. \tag{2.87}$$

Assim de (2.82), temos

$$\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}(\phi h_j \beta)dx = \sum_{j=1}^{n}\int_\Gamma \nu_i \frac{\partial(\phi h_j \beta)}{\partial x_j} d\Gamma,$$

e por (2.84) e (2.87), obtemos

$$\int_\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\theta d\Gamma = \int_\Gamma \nu_i \frac{\partial \phi}{\partial \nu}\theta d\Gamma.$$

Para provarmos (2.80), notemos que

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \nu_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\nu_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right)^2 = |\nabla \phi|^2,$$

ou seja, $|\nabla \phi|^2 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right)^2$. $\square$

Lema 2.3.3 *Seja $(q_k)_{1\leq k\leq n}$ um campo vetorial tal que $q_k \in C^1(\overline{\Omega})$ para $1 \leq k \leq n$. Se $(\phi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de soluções fortes do problema (2.1), então para cada $m \in \mathbb{N}$, temos*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Sigma q_k\nu_k\Big(\frac{\partial\phi_m}{\partial\nu}\Big)^2 d\Gamma dt &= \Big(\phi_m'(t), q_k\frac{\partial\phi_m(t)}{\partial x_k}\Big)\Big|_0^T + \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k}[|\phi_m'|^2 - |\nabla\phi_m|^2]dxdt \\ &+ \int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_j}\frac{\partial\phi_m}{\partial x_k}\frac{\partial\phi_m}{\partial x_j}dxdt - \int_Q f_m q_k\frac{\partial\phi_m}{\partial x_k}dxdt.\end{aligned} \tag{2.88}$$

Demonstração: Para cada $m \in \mathbb{N}$, seja ϕ_m solução forte do problema (2.1). Então, $q_k\dfrac{\partial\phi_m}{\partial x_k} \in L^2(Q)$, e assim faz sentido a seguinte equação:

$$\int_Q \phi_m'' q_k\frac{\partial\phi_m}{\partial x_k}dxdt - \int_Q \Delta\phi_m q_k\frac{\partial\phi_m}{\partial x_k}dxdt = \int_Q f_m q_k\frac{\partial\phi_m}{\partial x_k}dxdt. \tag{2.89}$$

Analisaremos as integrais que aparecem do lado esquerdo da equação (2.89).

- Análise de $\displaystyle\int_Q \phi_m'' q_k\frac{\partial\phi_m}{\partial x_k}dxdt.$

Observemos que

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega \phi_m'' q_k\frac{\partial\phi_m}{\partial x_k}dxdt &= \Big(\int_\Omega q_k\frac{\partial\phi_m}{\partial x_k}\phi_m' dx\Big)\Big|_0^T - \int_0^T\int_\Omega \phi_m' q_k\frac{\partial\phi_m'}{\partial x_k}dxdt \\ &= \Big(\phi_m', q_k\frac{\partial\phi_m}{\partial x_k}\Big)\Big|_0^T - \frac{1}{2}\int_Q q_k\frac{\partial}{\partial x_k}(\phi_m')^2 dxdt\end{aligned} \tag{2.90}$$

e

$$-\frac{1}{2}\int_Q q_k\frac{\partial}{\partial x_k}(\phi_m')^2 dxdt = \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial}{\partial x_k}q_k(\phi_m')^2 dxdt - \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial}{\partial x_k}[q_k(\phi_m')^2]dxdt,$$

que por sua vez, segue do teorema (1.10), que

$$\frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial}{\partial x_k}[q_k(\phi_m')^2]dxdt = \frac{1}{2}\int_\Sigma q_k(\phi_m')^2\nu_k d\Gamma dt = 0,$$

visto que $\phi_m'(t) \in H_0^1(\Omega)$. Portanto,

$$-\frac{1}{2}\int_Q q_k\frac{\partial}{\partial x_k}(\phi_m')^2 dxdt = \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial}{\partial x_k}q_k(\phi_m')^2 dxdt. \tag{2.91}$$

Substituindo (2.91) em (2.90), segue que

$$\int_0^T\int_\Omega \phi_m'' q_k\frac{\partial\phi_m}{\partial x_k}dxdt = \Big(\phi_m', q_k\frac{\partial\phi_m}{\partial x_k}\Big)\Big|_0^T + \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial}{\partial x_k}q_k(\phi_m')^2 dxdt \tag{2.92}$$

- Análise de $\displaystyle\int_Q \Delta\phi_m q_k \frac{\partial \phi_m}{\partial x_k} dxdt$

Aplicando o teorema (1.10), temos

$$-\int_Q \Delta\phi_m q_k \frac{\partial \phi_m}{\partial x_k} dxdt = -\int_\Sigma \frac{\partial \phi_m}{\partial \nu} q_k \frac{\partial \phi_m}{\partial x_k} d\Gamma dt + \int_Q \nabla\phi_m \cdot \nabla\Big(q_k \frac{\partial \phi_m}{\partial x_k}\Big) dxdt \tag{2.93}$$

A segunda integral do lado direito de (2.93) pode ser vista como sendo

$$\begin{aligned} &\int_Q \nabla\phi_m \cdot \nabla\Big(q_k \frac{\partial \phi_m}{\partial x_k}\Big) dxdt = \int_Q \frac{\partial \phi_m}{\partial x_i} q_k \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial \phi_m}{\partial x_k}\Big) dxdt \\ &+ \int_Q \frac{\partial \phi_m}{\partial x_i}\frac{\partial q_k}{\partial x_i}\frac{\partial \phi_m}{\partial x_k} dxdt = \frac{1}{2}\int_Q q_k \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\frac{\partial \phi_m}{\partial x_i}\Big)^2 dxdt + \int_Q \frac{\partial \phi_m}{\partial x_i}\frac{\partial q_k}{\partial x_i}\frac{\partial \phi_m}{\partial x_k} dxdt. \end{aligned} \tag{2.94}$$

Por (2.80) e pelo teorema (1.10), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_Q q_k \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\frac{\partial \phi_m}{\partial x_i}\Big)^2 dxdt &= \frac{1}{2}\int_Q q_k \frac{\partial}{\partial x_k}|\nabla\phi_m|^2 dxdt \\ &= \frac{1}{2}\int_\Sigma q_k |\nabla\phi_m|^2 \nu_k d\Gamma dt - \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k}|\nabla\phi_m|^2 dxdt. \end{aligned}$$

Dessa forma (2.94), torna-se

$$\begin{aligned} \int_Q \nabla\phi_m \cdot \nabla\Big(q_k \frac{\partial \phi_m}{\partial x_k}\Big) dxdt &= \frac{1}{2}\int_\Sigma q_k |\nabla\phi_m|^2 \nu_k d\Gamma dt - \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k}|\nabla\phi_m|^2 dxdt \\ &+ \int_Q \frac{\partial \phi_m}{\partial x_i}\frac{\partial q_k}{\partial x_i}\frac{\partial \phi_m}{\partial x_k} dx.dt \end{aligned} \tag{2.95}$$

Substituindo (2.95) em (2.93), segue que

$$\begin{aligned} &-\int_Q \Delta\phi_m q_k \frac{\partial \phi_m}{\partial x_k} dxdt = -\int_\Sigma \frac{\partial \phi_m}{\partial \nu} q_k \frac{\partial \phi_m}{\partial x_k} d\Gamma dt + \frac{1}{2}\int_\Sigma q_k |\nabla\phi_m|^2 \nu_k d\Gamma dt \\ &-\frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k}|\nabla\phi_m|^2 dxdt + \int_Q \frac{\partial \phi_m}{\partial x_i}\frac{\partial q_k}{\partial x_i}\frac{\partial \phi_m}{\partial x_k} dxdt. \end{aligned} \tag{2.96}$$

Pelo lema (2.3.2), a primeira integral do lado direito de (2.96) vale

$$-\int_\Sigma \frac{\partial \phi_m}{\partial \nu} q_k \frac{\partial \phi_m}{\partial x_k} d\Gamma dt = -\int_\Sigma q_k \Big(\frac{\partial \phi_m}{\partial \nu}\Big)^2 \nu_k d\Gamma dt,$$

e a segunda integral do mesmo lado vale

$$\frac{1}{2}\int_\Sigma q_k |\nabla\phi_m|^2 \nu_k d\Gamma dt = \frac{1}{2}\int_\Sigma q_k \Big(\frac{\partial \phi_m}{\partial \nu}\Big)^2 \nu_k d\Gamma dt.$$

Portanto, (2.96) torna-se

$$\begin{aligned} -\int_Q \Delta\phi_m q_k \frac{\partial \phi_m}{\partial x_k} dxdt &= -\frac{1}{2}\int_\Sigma q_k \Big(\frac{\partial \phi_m}{\partial \nu}\Big)^2 \nu_k d\Gamma dt - \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial q_k}{\partial x_k}|\nabla\phi_m|^2 dxdt \\ &+ \int_Q \frac{\partial \phi_m}{\partial x_i}\frac{\partial q_k}{\partial x_i}\frac{\partial \phi_m}{\partial x_k} dxdt. \end{aligned} \tag{2.97}$$

Substituindo (2.92) e (2.97) em (2.89), vale (2.88). □

Agora passemos ao principal resultado desta seção.

Teorema 2.7 (Regularidade Escondida) *Se ϕ é solução fraca do problema* (2.1), *então*

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma). \tag{2.98}$$

Além disso, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\int_\Sigma \Big(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\Big)^2 d\Gamma dt \leq C\Big(E_0 + \int_0^T |f(s)|ds\Big), \tag{2.99}$$

onde E_0 é definido como no Teorema (2.5).

Demonstração: Seja $q = h$ o campo vetorial do lema (2.3.1) ($q_k = \nu_k$ sobre Γ), que substituindo no lema (2.3.3), segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_\Sigma \Big(\frac{\partial \phi_m}{\partial \nu}\Big)^2 d\Gamma dt = \Big(\phi'_m(t), h_k \frac{\partial \phi_m(t)}{\partial x_k}\Big)\Big|_0^T + \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_k}[|\phi'_m|^2 - |\nabla \phi_m|^2]dxdt \\ + \int_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_j}\frac{\partial \phi_m}{\partial x_k}\frac{\partial \phi_m}{\partial x_j}dxdt - \int_Q f_m h_k \frac{\partial \phi_m}{\partial x_k}dxdt. \end{aligned} \tag{2.100}$$

Agora obteremos as estimativas para todos os termos que aparecem do lado direito da igualdade (2.100).

Utilizando as Desigualdades de Cauchy-Schwarz e Young, e observando que $h_k \in C^1(\overline{\Omega})$ e $\Big|\dfrac{\partial \phi_m(t)}{\partial x_k}\Big| \leq |\nabla \phi_m(t)|$ obtemos

$$\Big|\Big(\phi'_m(t), h_k \frac{\partial \phi_m(t)}{\partial x_k}\Big)\Big|_0^T\Big| \leq 2 \sup_{0\leq t\leq T}\Big|\Big(\phi'_m(t), h_k \frac{\partial \phi_m(t)}{\partial x_k}\Big)\Big| \leq C \sup_{0\leq t\leq T} E_m(t), \tag{2.101}$$

onde $E_m(t)$ é a energia associada a ϕ_m, ou seja,

$$E_m(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|\phi'_m(t)|^2 + |\nabla \phi_m(t)|^2)dx.$$

Temos ainda que

$$\frac{1}{2}\Big|\int_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_k}\Big[|\phi'_m|^2 - |\nabla \phi_m|^2\Big]dxdt\Big| \leq \frac{C}{2}\int_\Omega \Big(|\phi'_m|^2 + |\nabla \phi_m|^2|\Big)dx \leq CE_m(t), \tag{2.102}$$

$$\Big|\int_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_j}\frac{\partial \phi_m}{\partial x_k}\frac{\partial \phi_m}{\partial x_j}dxdt\Big| \leq \frac{C}{2}\int_\Omega \Big(|\phi'_m|^2 + |\nabla \phi_m|^2|\Big)dx \leq CE_m(t), \tag{2.103}$$

e como $f_m \in C^0([0,T]; C^1(\overline{\Omega}))$, obtemos

$$\Big|\int_Q f_m h_k \frac{\partial \phi_m}{\partial x_k}dxdt\Big| \leq C\sum_{k=1}^n \int_\Omega \Big(\frac{\partial \phi_m}{\partial x_k}\Big)^2 dx \leq CE_m(t) \tag{2.104}$$

Das desigualdades (2.100)-(2.104), deduzimos que

$$\frac{1}{2}\int_{\Sigma}\Big(\frac{\partial\phi_m}{\partial\nu}\Big)^2 d\Gamma dt \leq CE_m(t), \tag{2.105}$$

e pelo teorema (2.5), temos

$$\frac{1}{2}\int_{\Sigma}\Big(\frac{\partial\phi_m}{\partial\nu}\Big)^2 d\Gamma dt \leq C\Big(E_{0m} + \int_0^T |f_m(s)|ds\Big), \tag{2.106}$$

onde

$$E_{0m} = E_m(0) = \frac{1}{2}\int_{\Omega}\Big(|\phi_m^1|^2 + |\nabla\phi_m^0|^2\Big))dx.$$

Portanto $\Big(\dfrac{\partial\phi_m}{\partial\nu}\Big)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^2(\Sigma)$, assim pelo Teorema(1.3) e a proposição (1.1) existe uma subsequência representada da mesma forma, tal que

$$\frac{\partial\phi_m}{\partial\nu} \overset{*}{\rightharpoonup} \chi \quad \text{em} \quad L^2(\Sigma) \tag{2.107}$$

e

$$|\chi|_{L^2(\Sigma)} \leq \underline{\lim}\Big|\frac{\partial\phi_m}{\partial\nu}\Big|_{L^2(\Sigma)}. \tag{2.108}$$

Dessa forma, por (2.55), (2.105) e (2.108), para concluirmos a demonstração do teorema, resta-nos provar que $\chi = \frac{\partial\phi}{\partial\nu}$. Com efeito, inicialmente observe que

$$-\Delta\phi_m = f_m - \phi_m'' \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{2.109}$$

Sendo $f_m \in C^0([0,T];C^1(\overline{\Omega}))$ e $\phi_m' \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, então pelo teorema (1.14), existem $z_m, w_m \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$, tais que

$$\left|\begin{array}{l} -\Delta w_m = f_m \ \text{ e } \ ||w_m||_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leq C|f_m|_{L^2(Q)}, \\ -\Delta z_m = \phi_m' \ \text{ e } \ ||z_m||_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leq C|\phi_m'|_{L^2(Q)}. \end{array}\right. \tag{2.110}$$

Substituindo (2.110) em (2.109), temos

$$-\Delta\phi_m = -\Delta w_m - (-\Delta z_m)' \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{2.111}$$

Multiplicando ambos os lados de (2.111) por $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e em seguida, integrando de 0 a T, segue que

$$-\int_0^T \Delta\phi_m\theta dt = -\int_0^T \Delta w_m\theta dt - \int_0^T (-\Delta z_m)'\theta dt \quad \text{em} \quad H^{-1}(\Omega),$$

isto é,

$$-\int_0^T \Delta\phi_m\theta dt = -\int_0^T \Delta w_m\theta dt - \int_0^T \Delta z_m\theta'\, dt \ \text{ em } \ H^{-1}(\Omega). \tag{2.112}$$

Como $\Delta \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$, então

$$-\Delta\Big(\int_0^T \phi_m\theta dt\Big) = -\Delta\Big(\int_0^T w_m\theta dt + \int_0^T z_m\theta' dt\Big),$$

e pela unicidade do problema de Dirichlet (teorema 1.14), obtemos

$$\int_0^T \phi_m\theta dt = \int_0^T w_m\theta dt + \int_0^T z_m\theta' dt \ \text{ em } \ H^{-1}(\Omega), \forall \ \ \theta \in \mathcal{D}(0,T),$$

isto é,

$$\int_0^T \phi_m\theta dt = \int_0^T w_m\theta dt - \int_0^T z_m'\theta dt \ \text{ em } \ H^{-1}(\Omega), \forall \ \ \theta \in \mathcal{D}(0,T),$$

ou seja,

$$\phi_m = w_m - z_m' \ \text{ em } \ \mathcal{D}'(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{2.113}$$

Como $z_m \in L^2(0,T;H^2(\Omega))$, então $z_m' \in H^{-1}(0,T;H^2(\Omega))$ e $\gamma_1(z_m') \in H^{-1}(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$. Portanto, sendo $[\gamma_1(z_m)]' = [\gamma_1(z_m')]$ temos,

$$\gamma_1(\phi_m) = \gamma_1(w_m) - [\gamma_1(z_m)]' \ \text{ em } \ H^{-1}(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)). \tag{2.114}$$

Como $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(Q)$, segue por $(2.110)_1$ que $||w_m||_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}$ é limitada. Logo existe uma subsequência $(w_m)_{m\in\mathbb{N}}$, ainda denotada por $(w_m)_{m\in\mathbb{N}}$, tal que

$$w_m \rightharpoonup \phi \ \text{ em } \ L^2(0,T;H^2(\Omega)).$$

Sendo $w \in L^1(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$, solução do problema $-\Delta w = f$, como $f_m \to f$ forte em $L^1(0,T;L^2(\Omega))$ segue que $f_m \rightharpoonup f$ em $L^1(0,T;L^2(\Omega))$. Pela linearidade do operador Laplaciano temos que $-\Delta w_m \rightharpoonup -\Delta\phi$, e como $-\Delta w_m = f_m$ obtemos que $-\Delta\phi = f$, e pela unicidade do problema $-\Delta w = f$ segue que $\phi = w$. Da continuidade do operador traço γ_1, temos

$$\gamma_1(w_m) \rightharpoonup \gamma_1(w) \ \text{ em } \ L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)). \tag{2.115}$$

Por $(2.110)_2$ como $\phi_m' \rightharpoonup \phi'$ em $L^2(Q)$ por um argumento similar, existe uma subsequência de $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$, ainda denotada com o índice m, tal que

$$\gamma_1(z_m) \rightharpoonup \gamma_1(z) \ \text{ em } \ L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)),$$

e assim,

$$[\gamma_1(z_m)]' \rightharpoonup [\gamma_1(z)]' \quad \text{em} \quad H^{-1}(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)), \tag{2.116}$$

onde $z \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$ é a única solução de $-\Delta z = \phi'$. Como $\Delta\phi = f - \phi''$ em $\mathcal{D}'(0,T;H^{-1}(\Omega))$ então $\phi = -w - z'$ e

$$\gamma_1(\phi) = -\gamma_1(w) - \gamma_1(z') \quad \text{em} \quad H^{-1}(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)). \tag{2.117}$$

Dessa forma , de acordo com (2.114)-(2.117), obtemos

$$\gamma_1(\phi_m) = -\gamma_1(w_m) - [\gamma_1(z_m)]' \rightharpoonup -\gamma_1(w) - [\gamma_1(z)]' = \gamma_1(\phi) \tag{2.118}$$

em $H^{-1}(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$.

Por (2.107), (2.118) e a unicidade do limite, concluimos que $\chi = \dfrac{\partial\phi}{\partial\nu}$, conforme queríamos. $\square$

2.4 Solução Ultra Fraca

Nesta seção estudaremos a existência, unicidade e regularidade da solução para o problema de valor na fronteira não homogêneo

$$\begin{cases} z'' - \Delta z = 0 & \text{em} \;\; Q, \\ z = v & \text{sobre} \;\; \Sigma, \\ z(0) = z^0, z'(0) = z^1 & \text{em} \;\; \Omega, \end{cases} \tag{2.119}$$

quando os dados inciais z^0 e z^1 são menos regulares que os considerados na seção (2.2). Por esta razão a solução será denominada de *solução ultra fraca*. Primeiramente definiremos o conceito de solução para (2.119) por meio do Método de Transposição (ver [19]). Devido ao método utilizado, a solução é também conhecida como *solução por transposição.*

Multiplicando ambos os lados de $(2.119)_1$ por uma função $\theta = \theta(x,t)$, $x \in \Omega$, $t \in (0,T)$ e integrando formalmente em Q, obtemos

$$\int_0^T \int_\Omega z''\theta dxdt - \int_0^T \int_\Omega \Delta z\theta dxdt = 0 \tag{2.120}$$

Fazendo integração por partes em t, temos

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \theta(x,T)z'(x,T)dx - \int_\Omega \theta(x,0)z'(x,0)dx - \int_\Omega \theta'(x,T)z(x,T)dx \\ &+ \int_\Omega z(x,0)\theta'(x,0)dx + \int_0^T\int_\Omega z\theta'' dxdt - \int_0^T\int_\Omega \Delta z\theta dxdt = 0.\end{aligned} \tag{2.121}$$

Pelo teorema (1.11), resulta que

$$-\int_0^T\int_\Omega \Delta z\theta dxdt = -\int_0^T\int_\Omega z\Delta\theta dxdt + \int_0^T\int_\Gamma z\frac{\partial\theta}{\partial\nu}d\Gamma dt - \int_0^T\int_\Gamma \theta\frac{\partial z}{\partial\nu}d\Gamma dt. \tag{2.122}$$

Substituindo (2.122) em (2.121), segue que

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_\Omega z(\theta'' - \Delta\theta)dxdt + \int_\Omega z'(x,T)\theta(x,T)dx - \int_\Omega z'(x,0)\theta(x,0)dx \\ &- \int_\Omega z(x,T)\theta'(x,T)dx + \int_\Omega z(x,0)\theta'(x,0)dx - \int_0^T\int_\Gamma \theta\frac{\partial z}{\partial\nu}d\Gamma dt \\ &+ \int_0^T\int_\Gamma z\frac{\partial\theta}{\partial\nu}d\Gamma dt = 0.\end{aligned} \tag{2.123}$$

Como não temos informação sobe $z(x,T), z'(x,T)$ e $\dfrac{\partial z}{\partial\nu}$, então escolhamos $\theta = \theta(x,T)$ tal que $\theta(x,T) = \theta'(x,T) = 0$ em Ω e $\theta(x,t) = 0$ sobre Σ. Assim, obtemos

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_\Omega z(\theta'' - \Delta\theta)dxdt - \int_\Omega z'(x,0)\theta(x,0)dx + \int_\Omega z(x,0)\theta'(x,0)dx \\ &+ \int_0^T\int_\Gamma z\frac{\partial\theta}{\partial\nu}d\Gamma dt = 0\end{aligned} \tag{2.124}$$

Como $z(x,0) = z^0$ e $z'(x,0) = z^1$, então de (2.124) resulta que

$$\langle z, \theta'' - \Delta\theta\rangle = -\langle z^0, \theta'(0)\rangle + \langle z^1, \theta(0)\rangle - \left\langle \frac{\partial\theta}{\partial\nu}, z\right\rangle, \tag{2.125}$$

onde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ representa diferentes pares de dualidade.

A definição de solução ultra fraca será dada como sendo um funcional definido pela expressão (2.125). Para isso, é natural escolhermos $\theta = \theta(x,t)$ como solução do seguinte problema:

$$\begin{cases} \theta'' - \Delta\theta = f & \text{em } Q, \\ \theta = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \theta(T) = 0,\ \theta'(T) = 0 & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{2.126}$$

Tomando $f \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ e considerando a mudança de variável t por $T-t$, o sistema (2.126) é um caso particular do problema estudado na seção (2.2) (solução fraca). Portanto pelo corolário (2.2) e dos teoremas (2.6) e (2.7), podemos concluir que

$$||\theta'(t)||_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + ||\theta(t)||_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C||f||_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}, \tag{2.127}$$

$$\theta \in C^0([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T]; L^2(\Omega)), \tag{2.128}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma) \tag{2.129}$$

e

$$\Big|\Big|\frac{\partial \theta}{\partial \nu}\Big|\Big|_{L^2(\Sigma)} \leq C||f||_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}. \tag{2.130}$$

Como consequência de (2.128), temos que $\theta'(0) \in L^2(\Omega)$, $\theta(0) \in H_0^1(\Omega)$. Assim, para que o lado direito de (2.125) faça sentido, é suficiente escolhermos

$$z^0 \in L^2(\Omega), z^1 \in H^{-1}(\Omega) \ \text{ e } \ v \in L^2(\Sigma). \tag{2.131}$$

Portanto, observando a expressão (2.125), podemos definir o funcional

$$S : L^1(0,T; L^2(\Omega)) \to \mathbb{R}$$

dado por

$$\langle S, f\rangle = -(z^0, \theta'(0)) + \langle z^1, \theta(0)\rangle - \int_\Sigma \frac{\partial \theta}{\partial \nu} v d\Gamma dt, \tag{2.132}$$

para toda solução θ do problema (2.126).

Das estimativas (2.127) e (2.130), resulta de (2.132) que

$$\begin{aligned} |\langle S, f\rangle| &\leq |z^0||\theta'(0)| + ||z^1||_{H^{-1}(\Omega)}||\theta(0)|| + \Big|\Big|\frac{\partial \theta}{\partial \nu}\Big|\Big|_{L^2(\Sigma)}||v||_{L^2(\Sigma)} \\ &\leq C\Big(|z^0| + ||z^1||_{H^{-1}(\Omega)} + ||v||_{L^2(\Sigma)}\Big)||f||_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}. \end{aligned} \tag{2.133}$$

Portanto, o funcional S é uma forma linear e contínua, isto é, $S \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$. Além disso

$$||S||_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C(|z^0| + ||z^1||_{H^{-1}(\Omega)} + ||v||_{L^2(\Sigma)}) \tag{2.134}$$

Definição 2.2 *Para $(z^0, z^1, v) \in L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)\times L^2(\Sigma)$, dizemos que $z \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$ é solução ultra fraca (ou solução por transposição) de* (2.119) *se satisfaz a identidade*

$$\int_Q zf dxdt = -(z^0, \theta'(0)) + \langle z^1, \theta(0)\rangle - \int_\Sigma \frac{\partial \theta}{\partial \nu} v d\Gamma dt, \tag{2.135}$$

para todo $f \in L^1(0,T; L^2(\Omega))$, com θ solução do problema (2.126).

Teorema 2.8 (Existência e Unicidade) *Existe somente uma solução ultra fraca z do problema misto não-homogêneo* (2.119). *Além disso, existe uma constante $C = C(T) > 0$ tal que*

$$||z||_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C(|z^0| + ||z^1||_{H^{-1}(\Omega)} + ||v||_{L^2(\Sigma)}). \tag{2.136}$$

Demonstração: A existência da solução fraca é uma consequência de (2.132), (2.133) e o Teorema (1.12) para funções de $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. A unicidade é uma consequência do Lema (1.3.1). A desigualdade (2.136), segue (2.134). $\square$

Agora mostraremos alguns resultados essenciais para obtermos a regularidade da solução ultra fraca.

Lema 2.4.1 *Consideremos o sistema* (2.119) *com dados regulares, ou seja, quando*

$$z^0 \in H_0^1(\Omega),\ z^1 \in L^2(\Omega) \quad e \quad v \in H_0^2(0,T;H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)). \tag{2.137}$$

Então existe uma única solução fraca z de (2.119) *na classe*

$$z \in C^0(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega)) \tag{2.138}$$

Além disso, z é uma solução ultra fraca de (2.119).

Demonstração: Seja $w \in H_0^2(0,T;H^2(\Omega))$ tal que $w = v$ sobre Σ. A existência de w é garantida pelo Teorema(1.13). Observemos que w'' e Δw são objetos de $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ pois $w \in H_0^2(0,T;H^2(\Omega))$.

Consideremos o problema misto

$$\left| \begin{array}{ll} u'' - \Delta u = -w'' + \Delta w & \text{em } \ Q \\ u = 0 & \text{sobre } \ \Sigma \\ u(0) = z^0,\ u'(0) = z^1 & \text{em } \ \Omega. \end{array} \right. \tag{2.139}$$

Desde que $-w'' + \Delta w \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $z^0 \in H_0^1(\Omega)$ e $z^1 \in L^2(\Omega)$, segue do teorema (2.4) que (2.139) tem uma única solução fraca u. Além disso, pelo teorema (2.6), a solução u pertence à classe

$$u \in C^0([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega)).$$

Por definição da solução fraca, u satisfaz

$$\frac{d}{dt}(u'(t),\psi) + ((u(t),\psi)) = (-w'' + \Delta w,\psi) \ \text{ em } \ \mathcal{D}'(0,T),\ \forall \psi \in H_0^1(\Omega).$$

Portanto, $z = u + w$ satisfaz

$$\frac{d}{dt}(z',\psi) + ((z,\psi)) = 0 \ \text{ em } \ \mathcal{D}'(0,T),\ \forall \psi \in H_0^1(\Omega).$$

Além disso $z = v$ sobre Σ, $z(0) = z^0$ e $z'(0) = z^1$ em Ω. Assim $z \in C^0([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T]; L^2(\Omega))$ é a única solução fraca do problema (2.119).

Mostraremos agora que z é também solução ultra fraca de (2.119). De fato, seja $f \in L^1(0,T; L^2(\Omega))$ e consideremos a sequência $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ com $f_m \in L^1(0,T; H_0^1(\Omega))$ tal que

$$f_m \to f \quad \text{em} \quad L^1(0,T; L^2(\Omega)). \tag{2.140}$$

Consideremos os seguintes problemas

$$\begin{cases} \theta_m'' - \Delta\theta_m = f_m & \text{em} \ \ Q, \\ \theta_m = 0 & \text{sobre} \ \ \Sigma, \\ \theta_m(T) = 0, \ \theta_m'(T) = 0 & \text{em} \ \ \Omega \end{cases} \tag{2.141}$$

e

$$\begin{cases} \theta'' - \Delta\theta = f & \text{em} \ \ Q, \\ \theta = 0 & \text{sobre} \ \ \Sigma, \\ \theta(T) = 0, \ \theta'(T) = 0 & \text{em} \ \ \Omega. \end{cases} \tag{2.142}$$

Pela regularidade de f_m e f, segue que existe solução forte θ_m de (2.141) e solução fraca θ de (2.142). Além disso,

$$\theta_m \in C^0([0,T]; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap C^1([0,T]; H_0^1(\Omega)). \tag{2.143}$$

Assim $\theta_m - \theta$ é solução fraca de (2.142). Então mudando t por $T - t$, temos pelo teorema (2.5) e o teorema (2.7) que

$$\begin{aligned} &|\theta_m'(T-t) - \theta'(T-t)|^2 + ||\theta_m(T-t) - \theta(T-t)||^2 + \left|\left|\frac{\partial\theta_m}{\partial\nu} - \frac{\partial\theta}{\partial\nu}\right|\right|^2_{L^2(\Sigma)} \\ &\leq C||f_m - f||_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}, \end{aligned} \tag{2.144}$$

para todo $0 \leq t \leq T$. Tomando $t = T$ e fazendo $m \to \infty$, obtemos da última desigualdade que

$$\left|\begin{array}{lll} \theta_m(0) \to \theta(0) & \text{em} & H_0^1(\Omega) \\ \theta_m'(0) \to \theta'(0) & \text{em} & L^2(\Omega) \\ \dfrac{\partial\theta_m}{\partial\nu} \to \dfrac{\partial\theta}{\partial\nu} & \text{em} & L^2(\Sigma). \end{array}\right. \tag{2.145}$$

Sendo z uma solução fraca, faz sentido $\langle z''(t) - \Delta z(t), \theta_m(t)\rangle$ dualidade entre $H^{-1}(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$. Então pelos mesmos argumentos usados para obter (2.125) temos

$$\int_Q z f_m dxdt = -(z^0, \theta_m'(0)) + \langle z', \theta_m(0)\rangle - \int_\Sigma \frac{\partial\theta_m}{\partial\nu} \nu d\Gamma dt. \tag{2.146}$$

Tomando o limite em (2.146), quando $m \to \infty$, e observando as convergências (2.140) e (2.145), segue que z é solução ultra fraca do problema (2.119), como queríamos demonstrar. $\square$

Observação 2.1 *Notemos que, para toda* $f \in W_0^{1,1}(0,T;L^2(\Omega))$, *vale*

$$\langle z', f\rangle = -\int_0^T (z, f')dt. \tag{2.147}$$

Assim, da Desigualdade de Cauchy - Schwarz, obtemos de (2.147) *que*

$$||z'||_{W^{-1,\infty}(0,T;L^2(\Omega))} \leq ||z||_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}, \tag{2.148}$$

para toda solução fraca z *de* (2.119).

Lema 2.4.2 *Seja* z *solução ultra fraca do problema* (2.119). *Então* $z' \in W^{-1,\infty}(0,T;L^2(\Omega))$.

Demonstração: Sendo z solução ultra fraca temos que $z \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Em particular, $z \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ que implica $z' \in H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))$. Como $H_0^1(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow W_0^{1,1}(0,T;L^2(\Omega))$ consideremos f em $W_0^{1,1}(0,T;L^2(\Omega))$ e a sequência $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de funções $f_m \in H_0^1(0,T;L^2(\Omega))$ tal que

$$f_m \to f \quad \text{em} \quad W_0^{1,1}(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.149}$$

Temos por (2.147) e (2.148) para f_m em lugar de f e tomando limite quando $m \to \infty$, que $z' \in W^{-1,\infty}(0,T;L^2(\Omega))$. $\square$

Consideremos $f \in W_0^{1,1}(0,T;H_0^1(\Omega))$. De (2.147) e pela definição de solução ultra fraca (Definição 2.2) segue que

$$\langle z', f\rangle = -\int_Q zf'dxdt = (z^0, \theta'(0)) - \langle z^1, \theta(0)\rangle + \int_\Sigma \frac{\partial\theta}{\partial\nu}d\Gamma dt, \tag{2.150}$$

para toda solução θ do problema

$$\left|\begin{array}{ll} \theta'' - \Delta\theta = f' & \text{em } \; Q, \\ \theta = 0 & \text{sobre } \; \Sigma, \\ \theta(T) = 0, \; \theta'(T) = 0 & \text{em } \; \Omega. \end{array}\right. \tag{2.151}$$

Lema 2.4.3 *Seja* θ *a solução de* (2.151). *Então existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$|\theta'(0)| + ||\theta(0)|| + \left|\left|\frac{\partial\theta}{\partial\nu}\right|\right|_{L^2(\Sigma)} \leq C||f||_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))} \tag{2.152}$$

para toda $f \in W_0^{1,1}(0,T;H_0^1(\Omega))$.

Demonstração: Consideremos o problema

$$\left| \begin{array}{ll} w'' - \Delta w = f & \text{em } \; Q \\ w = 0 & \text{sobre } \; \Sigma \\ w(T) = 0, \; w'(T) = 0 & \text{em } \; \Omega \end{array} \right. \tag{2.153}$$

para $f \in W_0^{1,1}(0,T;H_0^1(\Omega))$. Do corolário (2.1) e do teorema (2.3), segue que

$$w \in C^0([0,T];H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap C^1([0,T];H_0^1(\Omega)) \tag{2.154}$$

e

$$||w'||_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} + ||w||_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))} \leq C||f||_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))}. \tag{2.155}$$

Seja $w' = \theta$. Então θ é solução do sistema (2.151), pois θ verifica a equação $(2.151)_1$, $\theta(t) = w'(T) = 0$ e $\theta'(T) = w''(T) = \Delta w(T) = 0$, visto que $f \in W_0^{1,1}(0,T;H_0^1(\Omega))$. Portanto $|\theta'(0)| + ||\theta(0)|| = |w''(0)| + ||w'(0)|| = |\Delta w(0)| + ||w'(0)||$. Segue de (2.155) que

$$|\theta'(0)| + ||\theta(0)|| \leq C||f||_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))} \tag{2.156}$$

Assim, para obtermos a desigualdade (2.152) é suficiente estimarmos $\left|\left|\dfrac{\partial\theta}{\partial\nu}\right|\right|_{L^2(\Sigma)}$ por $||f||_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))}$. Para isto, reescrevamos a identidade (2.88) para θ solução de (2.151) e $q_k = h_k$. Assim,

$$\begin{array}{l} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Sigma \Big(\frac{\partial\theta}{\partial\nu}\Big)^2 d\Gamma dt = -\Big(\theta'(0), h_k\frac{\partial\theta(0)}{\partial x_k}\Big) + \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_k}(|\theta'|^2 - |\nabla\theta|^2)dxdt \\ + \displaystyle\int_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_j}\frac{\partial\theta}{\partial x_k}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}dxdt - \int_Q f' h_k \frac{\partial\theta}{\partial x_k}dxdt \end{array} \tag{2.157}$$

Como $h_k\dfrac{\partial\theta}{\partial x_k} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, segue que $h_k\dfrac{\partial\theta'}{\partial x_k} \in W^{-1,\infty}(0,T;L^2(\Omega))$. Então

$$-\int_Q f' h_k \frac{\partial\theta}{\partial x_k}dxdt = \int_Q f h_k \frac{\partial\theta'}{\partial x_k}dxdt = \Big\langle h_k\frac{\partial\theta'}{\partial x_k}, f\Big\rangle \tag{2.158}$$

Sendo $f \in H_0^1(\Omega)$ e $\theta' = w'' = \Delta w + f$, obtemos

$$\begin{array}{l} \displaystyle\int_Q f h_k \frac{\partial\theta'}{\partial x_k}dxdt = -\int_Q \frac{\partial}{\partial x_k}(f h_k)\theta' dxdt = -\int_Q \frac{\partial f}{\partial x_k}h_k \Delta w dxdt \\ \displaystyle -\int_Q \frac{\partial f}{\partial x_k}h_k f dxdt - \int_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_k} f\Delta w dxdt - \int_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_k} f^2 dxdt \end{array} \tag{2.159}$$

Temos ainda que

$$-\int_Q \frac{\partial f}{\partial x_k}h_k f dxdt = -\frac{1}{2}\int_Q h_k\frac{\partial f^2}{\partial x_k}dxdt = \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_k}f^2 dxdt \tag{2.160}$$

Substituindo (2.160) em (2.159) e o resultado em (2.158), segue

$$-\int_Q f' h_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k} dxdt = -\int_Q \frac{\partial f}{\partial x_k} h_k \Delta w dxdt - \int_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_k} f \Delta w dxdt - \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_k} f^2 dxdt \quad (2.161)$$

Sabemos que

$$\frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_k}(|\theta'|^2 - |\nabla\theta|^2)dxdt = \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_k}(|\Delta w|^2 + 2f\Delta w + |f|^2 - |\nabla\theta|^2)dxdt. \quad (2.162)$$

Substituindo (2.161) e (2.162) em (2.157) temos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_\Sigma \Big(\frac{\partial\theta}{\partial\nu}\Big)^2 d\Gamma dt = -\Big(w'(0), h_k \frac{\partial w'(0)}{\partial x_k}\Big) + \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_k}|\Delta w|^2 dxdt \\ &-\frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_k}|\nabla w'|^2\, dxdt - \int_Q \frac{\partial f}{\partial x_k} h_k \Delta w dxdt + \int_Q \frac{\partial h_k}{\partial x_j}\frac{\partial w'}{\partial x_k}\frac{\partial w'}{\partial x_j} dxdt. \end{aligned} \quad (2.163)$$

Aplicando a estimativa (2.155) do lado direito de (2.163) e observando que $h_k \in C^1(\overline{\Omega}), 1 \leq k \leq n$, obtemos

$$\int_\Sigma \Big(\frac{\partial\theta}{\partial\nu}\Big)^2 d\Gamma dt \leq C||f||_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))}. \quad (2.164)$$

De (2.156) e (2.164) segue a prova do lema. □

Teorema 2.9 (Regularidade da Solução Ultra Fraca) *A solução ultra fraca z de* (2.119) *pertence à classe*

$$z \in C^0([0,T]; L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T]; H^{-1}(\Omega)). \quad (2.165)$$

Além disso, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$||z||_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + ||z'||_{L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C\Big(|z^0| + ||z^1||_{H^{-1}(\Omega)} + ||v||_{L^2(\Sigma)}\Big).$$

Demonstração: Dividiremos a prova em duas etapas.

- Primeira Etapa (Regularidade para z)

Dados $z^0 \in L^2(\Omega)$, $z^1 \in H^{-1}(\Omega)$ e $v \in L^2(\Sigma)$, como as imersões $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ e $H_0^1(0,T; H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)) \hookrightarrow L^2(\Sigma)$ são densas temos que existem sequências $(z_m^0)_{m\in\mathbb{N}}, (z_m^1)_{m\in\mathbb{N}}$ e $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ em $H_0^1(\Omega), L^2(\Omega)$ e $H_0^1(0,T;H^{\frac{3}{2}}(\Gamma))$ respectivamente, tais que

$$\left|\begin{array}{lll} z_m^0 \to z^0 & \text{em} & L^2(\Omega), \\ z_m^1 \to z^1 & \text{em} & H^{-1}(\Omega), \\ v_m \to v & \text{em} & L^2(\Sigma). \end{array}\right. \quad (2.166)$$

Seja $z_m \in H_0^1(0,T;H^2(\Omega))$ tal que $z_m = v_m$ sobre Σ. Para cada $m \in \mathbb{N}$, consideremos o problema misto não homogêneo

$$\left| \begin{array}{ll} z_m'' - \Delta z_m = 0 & \text{em } \ Q, \\ z_m = v_m & \text{sobre } \ \Sigma, \\ z_m(0) = z_m^0, \ z_m'(0) = z_m^1 & \text{em } \ \Omega. \end{array} \right. \tag{2.167}$$

Pelo lema (2.4.1), segue que a solução ultra fraca z_m de (2.167) pertence à classe

$$z_m \in C^0([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega)). \tag{2.168}$$

Sendo z solução ultra fraca de (2.119), com dados $\{z^0, z^1, v\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Sigma)$, então $z_m - z$ é também solução ultra fraca de (2.119) com dados $z_m^0 - z^0$, $z_m^1 - z^1$ e $v_m - v$.

Da estimativa (2.136), temos

$$||z_m - z||_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C\Big(|z_m^0 - z^0| + ||z_m^1 - z^1||_{H^{-1}(\Omega)} + ||v_m - v||_{L^2(\Sigma)}\Big).$$

Fazendo $m \to \infty$ na última desigualdade e usando (2.166), obtemos

$$z_m \to z \ \text{ em } \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Como $z_m \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$, então $z \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$.

- Segunda Etapa (Regularidade para z')

De (2.150) e o lema (2.4.3), obtemos

$$|\langle z', f\rangle| \leq C\Big(|z^0| + ||z^1||_{H^{-1}(\Omega)} + ||v||_{L^2(\Sigma)}\Big)||f||_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))}. \tag{2.169}$$

Como $W_0^{1,1}(0,T;H_0^1(\Omega))$ é denso em $L^1(0,T;H_0^1(\Omega))$ segue que a desigualdade (2.169) é verdadeira para todo $f \in L^1(0,T;H_0^1(\Omega))$. Portanto,

$$z' \in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega)) \tag{2.170}$$

e

$$||z'||_{L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C\Big(|z^0| + ||z^1||_{H^{-1}(\Omega)} + ||v||_{L^2(\Sigma)}\Big). \tag{2.171}$$

Notemos que (2.170) e (2.171) são válidos para toda solução ultra fraca de (2.119).

Consideremos (z_m) a sequência de soluções fracas nas condições da etapa anterior. Logo $z_m - z$ é solução ultra fraca de (2.119) e por (2.171) temos

$$||z'_m - z'||_{L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C\Big(|z^0_m - z^0| + ||z^1_m - z^1||_{H^{-1}(\Omega)} + ||v_m - v||_{L^2(\Sigma)}\Big).$$

Dessa forma, fazendo $m \to \infty$, concluimos que

$$z'_m \to z' \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{2.172}$$

Como z_m é também solução fraca, então $z'_m \in C^0([0,T];H^{-1}(\Omega))$, por (2.172), segue

$$z' \in C^0([0,T];H^{-1}(\Omega)),$$

e portanto, temos provado o resultado. $\square$

Capítulo 3

Controle Hierárquico para Equação da Onda

3.1 Formulação do Problema

Seja Γ_0 um subconjunto de Γ com medida positiva. Dado $T > 0$, consideremos o cilíndro definido por $Q = \Omega \times (0, T)$.

Sua fronteira lateral é definida por $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_0^*$ com

$$\Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0, T) \quad \text{e} \quad \Sigma_0^* = \Sigma \backslash \Sigma_0.$$

Consideremos o seguinte sistema

$$\left| \begin{array}{l} v'' - \Delta v = 0 \quad \text{em} \quad Q \\ \\ v(y,t) = \left\{ \begin{array}{ll} w & \text{sobre} \quad \Sigma_0 \\ \\ 0 & \text{sobre} \quad \Sigma_0^* \end{array} \right. \\ v(y,0) = v_0(y), \quad v'(y,0) = v_1(y) \quad \text{em} \quad \Omega, \end{array} \right. \tag{3.1}$$

onde $v(y,t)$ é a solução da equação de estado, $w = w(y,t)$ é a função controle e $(v_0(y), v_1(y)) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.

Definição 3.1 *Dizemos que* (3.1) *é aproximadamente controlável se, para todo* $\varepsilon > 0$ *e* $\{v^0, v^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, *existe* $w \in L^2(\Sigma_0)$, *tal que a solução* $v = v(y,t,w)$ *do sistema*

(3.1) *com dados iniciais* $\{v_0, v_1\} = \{0, 0\}$, *satisfaz*

$$||\{v(T), v'(T)\} - \{v^0, v^1\}||_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

Consideremos $\{v^0, v^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ e denotemos $B_X(C, r)$ a bola em um espaço X com centro C e raio r. Provar que o sistema (3.1) é aproximadamente controlável é equivalente a mostrar que para quaisquer $\alpha_0, \alpha_1 > 0$, existe $w \in L^2(\Sigma_0)$, tal que a solução v de (3.1) satisfaz

$$v(T) \in B_{L^2(\Omega)}(v^0, \alpha_0) \ \text{ e } \ v'(T) \in B_{H^{-1}(\Omega)}(v^1, \alpha_1).$$

Nosso estudo foi motivado no trabalho de J.-L. Lions [14], onde o autor investiga questão similar do controle hierárquico para a equação (3.1), utilizando a estratégia de Stackelberg no caso de domínios dependendo do tempo.

Como em [14], dividiremos Σ_0 em duas partes disjuntas

$$\Sigma_0 = \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \tag{3.2}$$

e consideremos

$$w = \{w_1, w_2\}, \ \ w_i = \text{função controle em } \ L^2(\Sigma_i), \ i = 1, 2. \tag{3.3}$$

Também podemos escrever

$$w = w_1 + w_2,$$

com

$$\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma_0. \tag{3.4}$$

Portanto, o sistema (3.1) pode ser reescrito como sendo

$$\left| \begin{array}{l} v'' - \Delta v = 0 \ \text{ em } \ Q \\ v(y,t) = \begin{cases} w_1 & \text{sobre } \ \Sigma_1 \\ w_2 & \text{sobre } \ \Sigma_2 \\ 0 & \text{sobre } \ \Sigma_0^* \end{cases} \\ v(y,0) = v_0(y), \ \ v'(y,0) = v_1(y) \ \text{ em } \ \Omega. \end{array} \right. \tag{3.5}$$

Na decomposição de (3.2) e (3.3), estabelecemos uma hierarquia. Pensamos w_1 como sendo o controle líder e w_2 como sendo o seguidor, sempre na terminologia de Stackelberg.

• **Funcionais custos no cilindro Q.** Associado a solução $v = v(y,t)$ de (3.5), consideremos o funcional (secundário)

$$J_2(w_1, w_2) = \frac{1}{2} \iint_Q (v(w_1, w_2) - v_2)^2 \, dydt + \frac{\sigma}{2} \int_{\Sigma_2} w_2^2 \, d\Sigma, \tag{3.6}$$

e o funcional (principal)

$$J(w_1) = \int_{\Sigma_1} w_1^2 \, d\Sigma, \tag{3.7}$$

onde σ é uma constante positiva e v_2 é uma função dada em $L^2(Q)$.

Observação 3.1 *Para cada $v_0 \in L^2(\Omega)$, $v_1 \in H^{-1}(\Omega)$ e $w_i \in L^2(\Sigma_i)$, $i = 1, 2$ existe exatamente uma solução v de* (3.5) *no sentido de uma transposição, com $v \in C\big([0,T]; L^2(\Omega)\big) \cap C^1\big([0,T]; H^{-1}(\Omega)\big)$ (ver teorema (2.8)). Em particular, o funcional custo J_2 e J estão bem definidos.*

O problema de controle que consideraremos é o seguinte: o seguidor w_2 assume que o líder w_1 tem feito uma escolha de sua estratégia (política). Em seguida, tenta encontrar um equilíbrio para seu custo J_2, isto é, ele procura um controle $w_2 = \mathfrak{F}(w_1)$ (dependendo de w_1) satisfazendo

$$J_2(w_1, w_2) \leq J_2(w_1, \widehat{w}_2), \quad \forall\, \widehat{w}_2 \in L^2(\Sigma_2). \tag{3.8}$$

O controle w_2, solução de (3.8), é chamado de **Equilíbrio de Nash** para seu custo J_2 e ele depende de w_1 (conforme [2]).

Observação 3.2 *Em outras palavras, se o líder w_1 faz uma escolha, então o seguidor w_2 também faz uma escolha, dependendo de w_1, que torna mínimo seu custo J_2, isto é,*

$$J_2(w_1, w_2) = \inf_{\widehat{w}_2 \in L^2(\Sigma_2)} J_2(w_1, \widehat{w}_2). \tag{3.9}$$

Isso é equivalente a (3.8). *Esse processo é chamado* **estratégia de Stackelberg - Nash** *(conforme Díaz e Lions [5]).*

Após isso, consideremos o estado $v\,(w_1, \mathfrak{F}(w_1))$ dado pela solução de

$$\left| \begin{array}{l} v'' - \Delta v = 0 \quad \text{em} \quad Q \\ v(y,t) = \begin{cases} w_1 & \text{sobre} \quad \Sigma_1 \\ \mathfrak{F}(w_1) & \text{sobre} \quad \Sigma_2 \\ 0 & \text{sobre} \quad \Sigma_0^* \end{cases} \\ v(y,0) = v_0(y), \quad v'(y,0) = v_1(y) \quad \text{em} \;\; \Omega. \end{array} \right. \tag{3.10}$$

Encontraremos um controle ótimo w_1 tal que

$$J(w_1, \mathfrak{F}(w_1)) = \inf_{\overline{w}_1 \in L^2(\Sigma_1)} J(\overline{w}_1, \mathfrak{F}(w_1)), \tag{3.11}$$

sujeito a restrição de controlabilidade aproximada do tipo

$$(v(y, T; w_1, \mathfrak{F}(w_1)), v'(y, T; w_1, \mathfrak{F}(w_1))) \in B_{L^2(\Omega)}(v^0, \alpha_0) \times B_{H^{-1}(\Omega)}(v^1, \alpha_1). \tag{3.12}$$

Para explicitar esse problema ótimo, iremos considerar os seguintes sub-problemas:

• **Problema 1** Fixado qualquer controle w_1, encontrar o controle seguidor $w_2 = \mathfrak{F}(w_1)$ (dependendo de w_1), associado a solução v de (3.5) satisfazendo a condição (3.9) (equilíbrio de Nash) relacionado a J_2 definido em (3.6).

• **Problema 2** Assumindo a existência e unicidade do equilíbrio de Nash w_2 , mostrar que quando w_1 varia em $L^2(\Sigma_1)$, as soluções $(v(y, t; w_1, w_2), v'(y, t; w_1, w_2))$ da equação (3.5), avaliadas em $t = T$, ou seja , $(v(y, T; w_1, w_2), v'(y, T; w_1, w_2))$, geram um subconjunto denso de $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.

Observação 3.3 *Para efeitos de controle aproximado, pela linearidade do sistema* (3.5), *podemos assumir, sem perda de generalidade, que* $v_0 = v_1 = 0$.

Lembremos que nosso problema inicial eram os controles w_1, w_2 atuarem tal que a função v, única solução de (3.5), atinja no tempo T um estado ideal $(v^0, v^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ com funcional custo definido por (3.6).

Assim, fixado $(v^0, v^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, os controles w_1, w_2 deverão atuar tal que a única solução v de (3.5), avaliada em $t = T$, atinja o estado ideal (v^0, v^1). Isso será feito no sentido da controlabilidade aproximada. De fato, é suficiente provar que se w_2, dependendo de w_1, é o único equilíbrio de Nash para o funcional custo (3.6), então temos controlabilidade aproximada. Isso significa que se existe o único equilíbrio de Nash e v é a única solução de (3.5), então o conjunto gerado por $(v(y, T; w_1, w_2), v'(y, T; w_1, w_2))$ é um subconjunto denso em $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, isto é , aproxima (v^0, v^1). Esse problema será estudado na seção 3.3, isto é, após acharmos o equilíbrio de Nash (Seção 3.2) para cada w_1, encontraremos um controle ótimo $\overline{w}_1$ tal que

$$J(\overline{w}_1) = \inf_{w_1} J(w_1) \tag{3.13}$$

sujeito a restrição de controlabilidade aproximada do tipo

$$(v(y, T; w_1, w_2), v'(y, T; w_1, w_2)) \in B_{L^2(\Omega)}(v^0, \alpha_0) \times B_{H^{-1}(\Omega)}(v^1, \alpha_1). \tag{3.14}$$

3.2 Equilíbrio de Nash

Nessa seção, fixado qualquer controle $w_1 \in L^2(\Sigma_1)$, determinaremos a existência e unicidade da solução para o problema

$$\inf_{w_2 \in L^2(\Sigma_2)} J_2(w_1, w_2), \tag{3.15}$$

e uma caracterização dessa solução em termos de um sistema adjunto, para em seguida, obtermos o sistema otimizado para o controle seguidor w_2.

O problema (3.15) admite uma única solução

$$w_2 = \mathfrak{F}(w_1). \tag{3.16}$$

Com efeito, para a solução do problema (3.15), minimizaremos o funcional J_2 fazendo uso do teorema 1.4.

Seja

$$\mathcal{U}_{ad} = \{(v, w_2) \in L^2(Q) \times L^2(\Sigma_2) : v \text{ solução de (3.5)}\} \subset \left(L^2(Q)\right)^2$$

e

$$J_2(v, w_2) : \mathcal{U}_{ad} \longrightarrow \mathbb{R}$$

definido por (3.6). Escrevemos $v = v(w_1, w_2)$.

Então,

(a) Pela Observação (3.1) temos que $\mathcal{U}_{ad}$ é não vazio e sendo $\mathcal{U}_{ad}$ um subespaço de um espaço de Hilbert, então $\mathcal{U}_{ad}$ é convexo. É claro também, que $\mathcal{U}_{ad}$ é um subespaço de dimensão finita de um espaço de Hilbert, e assim $\mathcal{U}_{ad}$ é fechado.

(b) J_2 é fracamente coercivo.

De fato, usando a desigualdade triangular, temos

$$||v - v_2||_{L^2(Q)} \geq \left| ||v||_{L^2(Q)} - ||v_2||_{L^2(Q)} \right|$$

e como v_2 é fixo, segue que

$$\lim_{\substack{||v||_{L^2(Q)} \to \infty \\ ||w_2||_{L^2(\Sigma_2)} \to \infty}} J_2(v, w_2) = \frac{1}{2} \left|\left|(v - v_2)\right|\right|^2_{L^2(Q)} + \frac{\sigma}{2} \, ||w_2||^2_{L^2(\Sigma_2)} \to \infty.$$

Logo, segue a coercividade fraca de J_2.

(c) J_2 é fracamente sequencialmente semi-contínuo inferiormente.

Com efeito, sejam duas sequências $(v^n, w_2^n) \in \mathcal{U}_{ad}$ tais que

$$\begin{aligned} v^n &\rightharpoonup v \quad \text{em} \quad L^2(Q) \\ w_2^n &\rightharpoonup w_2 \quad \text{em} \quad L^2(\Sigma_2) \end{aligned}$$

Portanto, conforme Brezis [4], temos

$$\lim_{n\to\infty} \inf \frac{1}{2}\big|\big|(v^n - v_2)\big|\big|_{L^2(Q)} \geq \frac{1}{2}\big|\big|(v - v_2)\big|\big|_{L^2(Q)}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \inf ||w_2^n||_{L^2(\Sigma_2)} \geq ||w_2||_{L^2(\Sigma_2)}$$

Agora,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \inf J_2(v^n, w_2^n) &= \lim_{n\to\infty} \inf \left\{ \frac{1}{2}\big|\big|(v^n - v_2)\big|\big|^2_{L^2(Q)} + \frac{\sigma}{2}\,||w_2^n||^2_{L^2(\Sigma_2)} \right\} \\ &\geq \lim_{n\to\infty} \inf \left\{ \frac{1}{2}\big|\big|(v^n - v_2)\big|\big|^2_{L^2(Q)} \right\} + \lim_{n\to\infty} \inf \left\{ \frac{\sigma}{2}\,||w_2^n||^2_{L^2(\Sigma_2)} \right\} \\ &\geq \frac{1}{2}\big|\big|(v - v_2)\big|\big|^2_{L^2(Q)} + \frac{\sigma}{2}||w_2||^2_{L^2(\Sigma_2)} \\ &= J_2(v, w_2), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} \inf J_2(v^n, w_2^n) \geq J_2(v, w_2),$$

o que caracteriza a semi-continuidade fraca inferior.

(d) J_2 é estritamente convexo.

De fato, sejam $\lambda \in (0,1)$ e (v, w_2), $(\widetilde{v}, \widetilde{w}_2) \in \mathcal{U}_{ad}$ com $(v, w_2) \neq (\widetilde{v}, \widetilde{w}_2)$. Escrevendo v_2 como

$$v_2 = \lambda\, v_2 + (1-\lambda) v_2,$$

temos

$$
\begin{aligned}
&J_2[\lambda(v,w_2)+(1-\lambda)(\widetilde{v},\widetilde{w}_2)] = J_2[\lambda\, v+(1-\lambda)\widetilde{v},\lambda\, w_2+(1-\lambda)\widetilde{w}_2]\\
&=\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega[\lambda\, v+(1-\lambda)\widetilde{v}-v_2]^2 dy\, dt+\frac{\sigma}{2}\int_{\Sigma_2}[\lambda\, w_2+(1-\lambda)\widetilde{w}_2]^2 d\Sigma\\
&=\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega[\lambda\, v+(1-\lambda)\widetilde{v}-\lambda v_2-(1-\lambda)v_2]^2 dy\, dt\\
&+\frac{\sigma}{2}\int_{\Sigma_2}[\lambda\, w_2+(1-\lambda)\widetilde{w}_2]^2 d\Sigma\\
&=\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega[\lambda(v-v_2)+(1-\lambda)(\widetilde{v}-v_2)]^2 dy\, dt\\
&+\frac{\sigma}{2}\int_{\Sigma_2}[\lambda\, w_2+(1-\lambda)\widetilde{w}_2]^2 d\Sigma.
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

Analisando a última igualdade do lado direito de (3.17), obtemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega[\lambda(v-v_2)+(1-\lambda)(\widetilde{v}-v_2)]^2 dy\, dt\\
&+\frac{\sigma}{2}\int_{\Sigma_2}[\lambda\, w_2+(1-\lambda)\widetilde{w}_2]^2 d\Sigma\\
&=\frac{\lambda^2}{2}\int_0^T\int_\Omega(v-v_2)^2 dy\, dt\\
&+\lambda(1-\lambda)\underbrace{\int_0^T\int_\Omega(v-v_2)(\widetilde{v}-v_2)dy\, dt}_{(*)}\\
&+\frac{(1-\lambda)^2}{2}\int_0^T\int_\Omega(\widetilde{v}-v_2)^2 dy\, dt+\frac{\sigma\,\lambda^2}{2}\int_{\Sigma_2}w_2^2\, d\Sigma\\
&+\sigma\,\lambda(1-\lambda)\underbrace{\int_{\Sigma_2}w_2\widetilde{w}_2\, d\Sigma}_{(**)}+\frac{\sigma(1-\lambda)^2}{2}\int_{\Sigma_2}\widetilde{w}_2^2\, d\Sigma.
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

Vamos majorar $(*)$ e $(**)$ usando a desigualdade de Young. Aplicando a desigualdade de Young na expressão $(*)$ e depois multiplicando o resultado por $\lambda(1-\lambda)>0$, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\lambda(1-\lambda)\int_0^T\int_\Omega(v-v_2)(\widetilde{v}-v_2)dydt\\
&<\frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\int_0^T\int_\Omega(v-v_2)^2 dydt+\frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\int_0^T\int_\Omega(\widetilde{v}-v_2)^2 dydt
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

Novamente aplicando a desigualdade de Young na expressão $(**)$ e depois multiplicando o resultado por $\sigma\lambda(1-\lambda) > 0$, obtemos

$$\sigma\,\lambda(1-\lambda)\int_{\Sigma_2} w_2\widetilde{w}_2\,d\Sigma \;<\; \frac{\sigma\,\lambda(1-\lambda)}{2}\int_{\Sigma_2} w_2^2\,d\Sigma + \frac{\sigma\,\lambda(1-\lambda)}{2}\int_{\Sigma_2}\widetilde{w}_2^2\,d\Sigma. \quad (3.20)$$

Substituindo (3.19) e (3.20) no lado direito de (3.17), obtemos a desigualdade estrita

$$\begin{aligned}
&J_2[\lambda(v,w_2)+(1-\lambda)(\widetilde{v},\widetilde{w}_2)] < \frac{\lambda^2}{2}\int_0^T\int_\Omega (v-v_2)^2 dy\,dt \\
&+\frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\int_0^T\int_\Omega (v-v_2)^2 dy\,dt + \frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\int_0^T\int_\Omega (\widetilde{v}-v_2)^2 dy\,dt \\
&+\frac{(1-\lambda)^2}{2}\int_0^T\int_\Omega (\widetilde{v}-v_2)^2 dy\,dt + \frac{\sigma\lambda^2}{2}\int_{\Sigma_2} w_2^2\,d\Sigma + \frac{\sigma\lambda(1-\lambda)}{2}\int_{\Sigma_2} w_2^2\,d\Sigma \\
&+\frac{\sigma\lambda(1-\lambda)}{2}\int_{\Sigma_2}\widetilde{w}_2^2\,d\Sigma + \frac{\sigma(1-\lambda)^2}{2}\int_{\Sigma_2}\widetilde{w}_2^2\,d\Sigma = \frac{\lambda}{2}\int_0^T\int_\Omega (v-v_2)^2 dy\,dt \\
&+\frac{\sigma\lambda}{2}\int_{\Sigma_2} w_2^2\,d\Sigma + \frac{(1-\lambda)}{2}\int_0^T\int_\Omega (\widetilde{v}-v_2)^2 dy\,dt + \frac{\sigma(1-\lambda)}{2}\int_{\Sigma_2}\widetilde{w}_2^2\,d\Sigma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda\left[\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega (v-v_2)^2 dy\,dt + \frac{\sigma}{2}\int_{\Sigma_2} w_2^2\,d\Sigma\right] \\
&+(1-\lambda)\left[\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega (\widetilde{v}-v_2)^2 dy\,dt + \frac{\sigma}{2}\int_{\Sigma_2}\widetilde{w}_2^2\,d\Sigma\right] \\
&= \lambda\,J_2(v,w_2) + (1-\lambda)J_2(\widetilde{v},\widetilde{w}_2),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$J_2[\lambda(v,w_2)+(1-\lambda)(\widetilde{v},\widetilde{w}_2)] < \lambda J_2(v,w_2) + (1-\lambda)J_2(\widetilde{v},\widetilde{w}_2).$$

Portanto, existe uma única solução w_2 para o problema (3.15). Como para cada w_1 dado encontramos uma única solução w_2, podemos relacionar uma dependência entre w_1 e w_2 de forma que $w_2 = \mathfrak{F}(w_1)$.

Agora, dado w_1, calcularemos a derivada de Gateaux do funcional $J_2(v;w_2)$ e igualaremos a zero, encontrando assim a equação de Euler-Lagrange associada ao problema (3.15).

Com efeito, sejam $\theta_1 \in L^2\big(\Omega \times (0,T)\big)$ e $\theta_2 \in L^2\big(\Sigma_2\big)$. Para $\varepsilon > 0$, temos

$$J_2'(v,w_2) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\Big\{J_2(v+\varepsilon\theta_1, w_2+\varepsilon\theta_2) - J_2(v,w_2)\Big\} =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\Bigg\{\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega (v+\varepsilon\theta_1 - v_2)^2 dy\, dt + \frac{\sigma}{2}\int_{\Sigma_2}(w_2+\varepsilon\theta_2)^2 d\Sigma -$$

$$\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega (v-v_2)^2 dy\, dt - \frac{\sigma}{2}\int_{\Sigma_2} w_2^2\, d\Sigma\Bigg\}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\Bigg\{\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \Big[(v-v_2)^2 + 2\varepsilon\theta_1(v-v_2) + \varepsilon^2\theta_1^2\Big] dy\, dt + \frac{\sigma}{2}\int_{\Sigma_2}(w_2+\varepsilon\theta_2)^2 d\Sigma$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega (v-v_2)^2 dy\, dt - \frac{\sigma}{2}\int_{\Sigma_2} w_2^2\, d\Sigma\Bigg\} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\Bigg\{\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega (v-v_2)^2 dy\, dt$$

$$+ \varepsilon\int_0^T\int_\Omega (v-v_2)\theta_1 dy\, dt + \frac{1}{2}\varepsilon^2\int_0^T\int_\Omega \theta_1^2 dy\, dt + \frac{\sigma}{2}\int_{\Sigma_2} w_2^2 d\Sigma + \varepsilon\sigma\int_{\Sigma_2} w_2\theta_2 d\Sigma$$

$$+ \frac{\sigma}{2}\varepsilon^2\int_{\Sigma_2}\theta^2 d\Sigma - \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega (v-v_2)^2 dy\, dt - \frac{\sigma}{2}\int_{\Sigma_2} w_2^2\, d\Sigma\Bigg\}$$

$$= \int_0^T\int_\Omega (v-v_2)\theta_1 dy\, dt + \sigma\int_{\Sigma_2} w_2\theta_2 d\Sigma.$$

Assim, a equação de Euler-Lagrange para (3.6) é dada por

$$\int_0^T\int_\Omega (v-v_2)\widehat{v} dy\, dt + \sigma\int_{\Sigma_2} w_2\widehat{w}_2 d\Sigma = 0, \tag{3.21}$$

$\forall\, \widehat{w}_2 \in L^2(\Sigma_2)$, onde $\widehat{v}$ é solução do sistema

$$\left|\begin{array}{l} \widehat{v}'' - \Delta\widehat{v} = 0 \;\text{ em }\; \Omega\times(0,T) \\ \widehat{v} = \begin{cases} 0 \;\text{ sobre }\; \Sigma_1 \\ \widehat{w}_2 \;\text{ sobre }\; \Sigma_2 \\ 0 \;\text{ sobre }\; \Sigma\backslash(\Sigma_1\cup\Sigma_2) \end{cases} \\ \widehat{v}(y,0) = 0, \;\; \widehat{v}'(y,0) = 0 \;\text{ em }\; \Omega. \end{array}\right. \tag{3.22}$$

Para obtermos o sistema otimizado, precisamos do sistema adjunto relacionado a (3.22).

Para isso, multipliquemos $(3.22)_1$ por uma função $p = p(y,t)$, $y \in \Omega$, $t \in (0,T)$, e integramos o resultado obtido de 0 até T. Mais precisamente, temos

$$\int_0^T p\,\widehat{v}'' dt - \int_0^T p\,\Delta\widehat{v}\, dt = 0.$$

Usando integração por partes, obtemos

$$p(T)\,\widehat{v}'(T) - p(0)\,\widehat{v}'(0) - p'(T)\,\widehat{v}(T) + p'(0)\,\widehat{v}(0) + \int_0^T \widehat{v}\,p''\,dt - \int_0^T p\,\Delta\widehat{v}\,dt = 0.$$

Integrando a expressão acima em Ω, resulta que

$$\begin{aligned}&\int_\Omega p(T)\,\widehat{v}'(T)\,dy - \int_\Omega p(0)\,\widehat{v}'(0)\,dy - \int_\Omega p'(T)\,\widehat{v}(T)\,dy + \int_\Omega p'(0)\,\widehat{v}(0)\,dy\\ &+ \int_0^T\int_\Omega \widehat{v}\,p''\,dy\,dt - \int_0^T\int_\Omega p\,\Delta\widehat{v}\,dy\,dt = 0\end{aligned} \tag{3.23}$$

Pela primeira fórmula de Green, temos

$$-\int_\Omega p\,\Delta\widehat{v}\,dy = \int_\Omega \nabla\widehat{v}\nabla p\,dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\widehat{v}}{\partial\nu}\,p\,d\Gamma. \tag{3.24}$$

Usando novamente a primeira fórmula de Green, obtemos

$$\int_\Omega \nabla\widehat{v}\nabla p\,dy = -\int_\Omega \widehat{v}\Delta p\,dy + \int_{\partial\Omega} \widehat{v}\,\frac{\partial p}{\partial\nu}\,d\Gamma. \tag{3.25}$$

Substituindo (3.25) em (3.24), segue que

$$-\int_\Omega p\,\Delta\widehat{v}\,dy = -\int_\Omega \widehat{v}\Delta p\,dy + \int_{\partial\Omega} \widehat{v}\,\frac{\partial p}{\partial\nu}\,d\Gamma - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\widehat{v}}{\partial\nu}\,p\,d\Gamma.$$

Assim,

$$-\int_0^T\int_\Omega p\,\Delta\widehat{v}\,dy\,dt = -\int_0^T\int_\Omega \widehat{v}\Delta p\,dy\,dt + \int_\Sigma \widehat{v}\,\frac{\partial p}{\partial\nu}\,d\Sigma - \int_\Sigma \frac{\partial\widehat{v}}{\partial\nu}\,p\,d\Sigma. \tag{3.26}$$

Substituindo (3.26) em (3.23) e usando $(3.22)_3$ obtemos

$$\begin{aligned}&\int_\Omega p(T)\,\widehat{v}'(T)\,dy - \int_\Omega p'(T)\,\widehat{v}(T)\,dy + \int_0^T\int_\Omega \widehat{v}\,p''\,dy\,dt - \int_0^T\int_\Omega \widehat{v}\,\Delta p\,dy\,dt\\ &+ \int_\Sigma \widehat{v}\,\frac{\partial p}{\partial\nu}\,d\Sigma - \int_\Sigma \frac{\partial\widehat{v}}{\partial\nu}\,p\,d\Sigma = 0\end{aligned} \tag{3.27}$$

Como não temos informação sobre $\widehat{v}(y,T)$ e $\widehat{v}'(y,T)$, então assumiremos que $p(y,T) = p'(y,T) = 0$ em Ω e $p(y,t) = 0$ sobre Σ, o que juntamente com a separação da fronteira em (3.27), nos dá

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \underbrace{p(T)\,\widehat{v}'(T)}_{=0}\,dy - \int_\Omega \underbrace{p'(T)\,\widehat{v}(T)}_{=0}\,dy + \int_0^T\int_\Omega \widehat{v}\,p''\,dy\,dt - \int_0^T\int_\Omega \widehat{v}\Delta p\,dy\,dt\\ &+ \int_{\Sigma_1} \underbrace{\frac{\partial p}{\partial\nu}\,\widehat{v}}_{=0}\,d\Sigma + \int_{\Sigma_2} \frac{\partial p}{\partial\nu}\,\widehat{v}\,d\Sigma - \int_\Sigma \underbrace{p\,\frac{\partial\widehat{v}}{\partial y}}_{=0}\,d\Sigma = 0.\end{aligned}$$

Assumindo que

$$p'' - \Delta\, p = v - v_2,$$

obtemos da expressão acima que

$$\int_0^T \int_\Omega (v - v_2)\widehat{v}\, dy\, dt + \int_{\Sigma_2} \frac{\partial p}{\partial \nu}\, \widehat{w}_2\, d\Sigma = 0. \tag{3.28}$$

Considerando p como solução do sistema adjunto associado

$$\left|\begin{array}{l} p'' - \Delta\, p = v - v_2 \text{ em } \quad Q \\ p(T) = p'(T) = 0 \text{ em } \Omega \\ p = 0 \text{ sobre } \Sigma \end{array}\right.$$

e observando que $\widehat{v}$ é solução de (3.22), temos que

$$\int_0^T \int_\Omega (p'' - \Delta\, p)\widehat{v}\, dy\, dt + \int_{\Sigma_2} \frac{\partial p}{\partial \nu}\, \widehat{w}_2\, d\Sigma = 0. \tag{3.29}$$

De (3.21) e (3.29), obtemos

$$\int_{\Sigma_2} \left(\sigma\, w_2 - \frac{\partial p}{\partial \nu}\right) \widehat{w}_2\, d\Sigma = 0 \qquad \forall\, \widehat{w}_2 \in L^2(\Sigma_2),$$

donde

$$w_2 = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial \nu} \;\text{ sobre }\; \Sigma_2. \tag{3.30}$$

Em resumo, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 3.1 *Para cada $w_1 \in L^2(\Sigma_1)$ existe um único equilíbrio de Nash w_2 no sentido de* (3.9)*. Além disso, o seguidor w_2 é dado por*

$$w_2 = \mathfrak{F}(w_1) = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial \nu} \quad \textit{sobre} \;\; \Sigma_2, \tag{3.31}$$

onde $\{v, p\}$ é a única solução do sistema otimizado

$$\left|\begin{array}{l} v'' - \Delta\, v = 0 \quad \textit{em} \quad Q \\ p'' - \Delta\, p = v - v_2 \quad \textit{em} \quad Q \\ v = \begin{cases} w_1 \quad \textit{sobre} \;\; \Sigma_1 \\ \dfrac{1}{\sigma}\dfrac{\partial p}{\partial \nu} \quad \textit{sobre} \;\; \Sigma_2 \\ 0 \quad \textit{sobre} \;\; \Sigma_0^* \end{cases} \\ p = 0 \quad \textit{sobre} \;\; \Sigma \\ v(0) = v'(0) = 0 \quad \textit{em} \;\; \Omega \\ p(T) = p'(T) = 0 \quad \textit{em} \;\; \Omega. \end{array}\right. \tag{3.32}$$

Naturalmente $\{v, p\}$ *depende de* w_1*:*

$$\{v, p\} = \{v(w_1), p(w_1)\}. \tag{3.33}$$

3.3 Controlabilidade Aproximada

Como temos provado a existência, unicidade e a caracterização do controle seguidor w_2, o líder w_1 deseja agora que a solução v e v', avaliada no tempo $t = T$, esteja o mais próximo possível de (v^0, v^1). Isso será possível se o sistema (3.32) for aproximadamente controlável. Estamos procurando

$$\inf \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} w_1^2 \, d\Sigma \tag{3.34}$$

onde w_1 está sujeito

$$(v(T; w_1), v'(T; w_1)) \in B_{L^2(\Omega)}(v^0, \alpha_0) \times B_{H^{-1}(\Omega)}(v^1, \alpha_1), \tag{3.35}$$

assumindo que tal w_1 existe, α_0, α_1 números reais positivos arbitrariamente pequenos e $\{v^0, v^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.

Podemos reescrever (3.35) como sendo

$$\left| \begin{array}{l} v(T; w_1) \in v^0 + \alpha_0 \, B_{L^2(\Omega)} \\ v'\,(T; w_1) \in v^1 + \alpha_1 \, B_{H^{-1}(\Omega)} \end{array} \right. \tag{3.36}$$

Para estudarmos (3.34), suponhamos que

$$T > 2d(\Omega, \Gamma_0), \quad \text{onde} \quad d(\Omega, \Gamma_0) = \sup_{x \in \Omega} d(x, \Gamma_0). \tag{3.37}$$

Agora, mostraremos que no caso (3.4), o seguinte teorema é verdadeiro:

Teorema 3.2 *Assumamos que vale* (3.37)*. Sejam* $w_1 \in L^2(\Sigma_1)$ *e* w_2 *um equilíbrio de Nash no sentido de* (3.9)*. Então as funções* $(v(T), v'(T)) = (v(., T, w_1, w_2), v'(., T, w_1, w_2))$*, onde* v *é solução do sistema* (3.5)*, geram um subconjunto denso de* $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$*.*

Demonstração: Decompomos a solução $\{v, p\}$ de (3.32) por

$$\left| \begin{array}{l} v = v_0 + g \\ p = p_0 + q, \end{array} \right. \tag{3.38}$$

onde v_0 é solução de

$$\left|\begin{array}{l} v_0'' - \Delta\, v_0 = 0 \text{ em } \quad Q \\ v_0 = \begin{cases} 0 \text{ sobre } \Sigma_1 \\ \dfrac{1}{\sigma}\dfrac{\partial p_0}{\partial \nu} \text{ sobre } \Sigma_2 \\ 0 \text{ sobre } \Sigma_0^* \end{cases} \\ v_0(0) = v_0'(0) = 0 \text{ em } \Omega, \end{array}\right. \tag{3.39}$$

p_0 satisfaz

$$\left|\begin{array}{l} p_0'' - \Delta\, p_0 = v_0 - v_2 \text{ em } \quad Q \\ p_0 = 0 \text{ sobre } \Sigma \\ p_0(T) = p_0'(T) = 0 \text{ em } \Omega, \end{array}\right. \tag{3.40}$$

e $\{g, q\}$ em (3.38) satisfazem

$$\left|\begin{array}{l} g'' - \Delta\, g = 0 \text{ em } \quad Q \\ g = \begin{cases} w_1 \text{ sobre } \Sigma_1 \\ \dfrac{1}{\sigma}\dfrac{\partial q}{\partial \nu} \text{ sobre } \Sigma_2 \\ 0 \text{ sobre } \Sigma_0^* \end{cases} \\ g(0) = g'(0) = 0 \text{ em } \Omega, \end{array}\right. \tag{3.41}$$

e

$$\left|\begin{array}{l} q'' - \Delta\, q = g \text{ em } \quad Q \\ q = 0 \text{ sobre } \Sigma \\ q(T) = q'(T) = 0 \text{ em } \Omega. \end{array}\right. \tag{3.42}$$

Definamos o operador

$$\begin{array}{rcl} A \;:\; L^2(\Sigma_1) & \longrightarrow & H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \\ w_1 & \longmapsto & A\, w_1 = \big\{ g'(T; w_1), -g(T; w_1) \big\}. \end{array} \tag{3.43}$$

Observemos que $A \in \mathcal{L}\big(L^2(\Sigma_1), H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)\big)$.

Usando (3.38) e (3.43), temos que (3.36) pode ser escrito como sendo

$$Aw_1 \in \big\{ v^1 - v_0'(T, w_1) + \alpha_1\, B_{H^{-1}(\Omega)}, -v^0 + v_0(T, w_1) + \alpha_0\, B_{L^2(\Omega)} \big\} \tag{3.44}$$

Seja $f = \{f^0, f^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e introduzamos estados adjuntos φ e ψ definidos como solução única de

$$\left|\begin{array}{l} \varphi'' - \Delta\,\varphi = \psi \text{ em } \quad Q \\ \varphi = 0 \text{ sobre } \Sigma \\ \varphi(T) = f^0,\ \ \varphi'(T) = f^1 \text{ em } \Omega. \end{array}\right. \tag{3.45}$$

com ψ satisfazendo

$$\left|\begin{array}{l} \psi'' - \Delta\,\psi = 0 \text{ em } \quad Q \\ \psi = \begin{cases} 0 \text{ sobre } \Sigma_1 \\ \dfrac{1}{\sigma}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu} \text{ sobre } \Sigma_2 \\ 0 \text{ sobre } \Sigma_0^* \end{cases} \\ \psi(0) = \psi'(0) = 0 \text{ em } \Omega. \end{array}\right. \tag{3.46}$$

Multiplicando $(3.46)_1$ por q, solução de (3.42), e integrando o resultado de 0 até T, obtemos

$$\int_0^T \psi''\,q dt - \int_0^T \Delta\,\psi\,q dt = 0.$$

Usando integração por partes, resulta que

$$q(T)\,\psi'(T) - q(0)\,\psi'(0) - q'(T)\psi(T) + q'(0)\psi(0) + \int_0^T \psi\,q''\,dt - \int_0^T \Delta\,\psi\,q\,dt = 0.$$

Integrando a expressão acima em Ω, obtemos

$$\begin{aligned} &\int_\Omega q(T)\,\psi'(T)dy - \int_\Omega q(0)\,\psi'(0)dy - \int_\Omega q'(T)\psi(T)dy + \int_\Omega q'(0)\psi(0)dy \\ &+ \int_0^T\int_\Omega \psi\,q''\,dy\,dt - \int_0^T\int_\Omega \Delta\,\psi\,q\,dy\,dt = 0. \end{aligned}$$

De $(3.42)_3$ e $(3.46)_3$, a última expressão torna-se

$$\int_0^T\int_\Omega \psi\,q''\,dy\,dt - \int_0^T\int_\Omega \Delta\,\psi\,q\,dy\,dt = 0. \tag{3.47}$$

Um cálculo análogo como em (3.24)–(3.26), a última igualdade acima resulta em

$$\int_0^T\int_\Omega \psi\,q''\,dy\,dt - \int_0^T\int_\Omega \Delta\,q\,\psi\,dy\,dt + \int_\Sigma \frac{\partial q}{\partial\nu}\,\psi\,d\Sigma - \int_\Sigma q\,\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\,d\Sigma = 0,$$

o que juntamente com $(3.42)_2$, tem-se

$$\int_0^T\int_\Omega \psi\,q''\,dy\,dt - \int_0^T\int_\Omega \Delta\,q\,\psi\,dy\,dt + \int_\Sigma \frac{\partial q}{\partial\nu}\,\psi\,d\Sigma = 0.$$

Separando a integral sobre a fronteira na última igualdade acima, segue que

$$\int_0^T \int_\Omega \psi(q'' - \Delta\, q)\, dy\, dt + \int_{\Sigma_1} \frac{\partial q}{\partial \nu}\, \psi\, d\Sigma + \int_{\Sigma_2} \frac{\partial q}{\partial \nu}\, \psi\, d\Sigma = 0. \tag{3.48}$$

Substituindo $(3.42)_1$ e $(3.46)_2$ em (3.48), resulta que

$$\int_0^T \int_\Omega g\, \psi\, dy\, dt + \frac{1}{\sigma} \int_{\Sigma_2} \frac{\partial q}{\partial \nu} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\Sigma = 0,$$

ou seja,

$$\int_0^T \int_\Omega g\, \psi\, dy\, dt = -\frac{1}{\sigma} \int_{\Sigma_2} \frac{\partial q}{\partial \nu} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\Sigma \tag{3.49}$$

Por outro lado, multiplicando $(3.45)_1$ por g, solução de (3.41), integrando o resultado obtido em ambos os membros em $\Omega \times (0,T)$ e finalmente, usando integração por partes, resulta que

$$\begin{aligned} &\int_\Omega g(T)\, \varphi'(T)\, dy - \int_\Omega g(0)\, \varphi'(0)\, dy - \int_\Omega g'(T)\, \varphi(T)\, dy + \int_\Omega g'(0)\, \varphi(0)\, dy \\ &+ \int_0^T \int_\Omega g''\, \varphi\, dy\, dt - \int_0^T \int_\Omega \Delta\, \varphi\, g\, dy\, dt = \int_0^T \int_\Omega \psi\, g\, dy\, dt. \end{aligned}$$

De $(3.41)_3$ e $(3.45)_3$, a última igualdade acima torna-se

$$\begin{aligned} &\big(g(T), f^1\big) - \langle g'(T), f^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} + \int_0^T \int_\Omega g''\, \varphi\, dy\, dt \\ &- \int_0^T \int_\Omega \Delta\, \varphi\, g\, dy\, dt = \int_0^T \int_\Omega g\, \psi\, dy\, dt. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Um cálculo análogo como em (3.24)–(3.26), a última igualdade acima resulta em

$$\begin{aligned} &\big(g(T), f^1\big) - \langle g'(T), f^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} + \int_0^T \int_\Omega g''\, \varphi\, dy\, dt - \int_0^T \int_\Omega \varphi\, \Delta g\, dy\, dt \\ &+ \int_\Sigma \varphi \frac{\partial g}{\partial \nu}\, d\Sigma - \int_\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\, g\, d\Sigma = \int_0^T \int_\Omega g\, \psi\, dy\, dt, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} &\big(g(T), f^1\big) - \langle g'(T), f^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} + \int_0^T \int_\Omega \big(g'' - \Delta\, g\big)\, \varphi\, dy\, dt \\ &+ \int_\Sigma \varphi \frac{\partial g}{\partial \nu}\, d\Sigma - \int_\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\, g\, d\Sigma = \int_0^T \int_\Omega g\, \psi\, dy\, dt, \end{aligned}$$

que juntamente com $(3.41)_1$ e $(3.45)_2$, vem

$$\big(g(T), f^1\big) - \langle g'(T), f^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} - \int_\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\, g\, d\Sigma = \int_0^T \int_\Omega g\, \psi\, dy\, dt. \tag{3.51}$$

Agora, separando a integral com termos de fronteira em (3.51) e combinando com (3.49), obtemos

$$\big(g(T), f^1\big) - \langle g'(T), f^0\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} - \int_{\Sigma_1} \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\, g\, d\Sigma - \int_{\Sigma_2} \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\, g\, d\Sigma = -\frac{1}{\sigma}\int_{\Sigma_2} \frac{\partial q}{\partial\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} d\Sigma,$$

que novamente combinando agora com $(3.41)_2$, obtemos

$$\begin{aligned}&\big(g(T), f^1\big) - \langle g'(T), f^0\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} - \int_{\Sigma_1} \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\, w_1\, d\Sigma - \frac{1}{\sigma}\int_{\Sigma_2} \frac{\partial q}{\partial\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} d\Sigma \\ &= -\frac{1}{\sigma}\int_{\Sigma_2} \frac{\partial q}{\partial\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} d\Sigma,\end{aligned}$$

ou seja,

$$-\int_{\Sigma_1} \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\, w_1\, d\Sigma = \langle g'(T), f^0\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} - \big(g(T), f^1\big). \tag{3.52}$$

Definamos a dualidade entre $H^{-1}(\Omega)\times L^2(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ por

$$\Big\langle \big\{g'(T), -g(T)\big\}, \big\{f^0, f^1\big\}\Big\rangle = \langle g'(T), f^0\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} - \big(g(T), f^1\big).$$

Assim, podemos escrever (3.52) por

$$\Big\langle\Big\langle A\, w_1, f\Big\rangle\Big\rangle = -\int_{\Sigma_1} \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\, w_1\, d\Sigma,$$

onde $\Big\langle\Big\langle ., .\Big\rangle\Big\rangle$ denota a dualidade entre os espaços $H^{-1}(\Omega)\times L^2(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$.

Agora recorrendo ao resultado do Teorema 1.6, se

$$\Big\langle\Big\langle A\, w_1, f\Big\rangle\Big\rangle = \langle g'(T), f^0\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} - \big(g(T), f^1\big) = 0$$

para todo $w_1 \in L^2(\Sigma_1)$, então

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 \;\text{ sobre }\; \Sigma_1. \tag{3.53}$$

Portanto, no caso da hipótese (3.4), segue de $(3.46)_2$ e (3.53) que

$$\psi = 0 \;\text{ sobre }\; \Sigma. \tag{3.54}$$

Combinando (3.54) e (3.46), temos

$$\left|\begin{array}{l} \psi'' - \Delta\,\psi = 0 \;\text{ em }\; Q \\ \psi = 0 \;\text{ sobre }\; \Sigma \\ \psi(0) = \psi'(0) = 0 \;\text{ em }\; \Omega, \end{array}\right. \tag{3.55}$$

que pela unicidade de solução, vem que

$$\psi \equiv 0. \tag{3.56}$$

Substituindo (3.56) em $(3.45)_1$, obtemos

$$\left| \begin{array}{l} \varphi'' - \Delta \varphi = 0 \ \text{ em } \ Q \\ \varphi = 0 \ \text{ sobre } \ \Sigma \\ \varphi(T) = f^0, \ \varphi'(T) = f^1 \ \text{ em } \ \Omega. \end{array} \right. \tag{3.57}$$

Pelo Teorema da Unicidade de Holmgren (conforme Teorema 1.21) e para o uso explícito dele feito aqui (conforme proposição 1.3) , temos

$$\varphi = 0 \quad \text{em} \quad Q,$$

e portanto de $(3.57)_3$, implica que

$$f^0 = f^1 = 0,$$

e assim, pelo Teorema (1.6), a demonstração esta concluída. □

3.4 Sistema de Otimilidade para o Líder

Graças aos resultados obtidos na Seção 3.2, podemos encontrar para cada w_1, o equilíbrio de Nash w_2 associado a solução v de (3.5). Mostraremos a existência de um controle líder w_1 solução do seguinte problema:

$$\inf_{w_1 \in \mathcal{U}_{ad}} J(w_1), \tag{3.58}$$

onde $\mathcal{U}_{ad}$ é o conjunto de controles admissíveis

$$\mathcal{U}_{ad} = \{w_1 \in L^2(\Sigma_1); \ v \text{ solução de (3.5) satisfazendo (3.35)}\}. \tag{3.59}$$

Com isso, o seguinte resultado é verdadeiro:

Teorema 3.3 *Assumamos que* (3.4) *e* (3.37) *são satisfeitas. Então o controle líder ótimo* w_1 *é dado por*

$$w_1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \ \ \textit{sobre} \ \ \Sigma_1$$

em que φ *é dado pela solução única* $\{\varphi, \psi, v, p\}$ *do sistema otimizado*

$$\left|\begin{array}{l} \varphi'' - \Delta\,\varphi = \psi \quad em \quad Q \\ \psi'' - \Delta\,\psi = 0 \quad em \quad Q \\ v'' - \Delta\,v = 0 \quad em \quad Q \\ p'' - \Delta\,p = v - v_2 \quad em \quad Q \\ \varphi = 0 \quad sobre \quad \Sigma \\ \psi = \begin{cases} 0 \quad sobre \quad \Sigma_1 \\ \dfrac{1}{\sigma}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu} \quad sobre \quad \Sigma_2 \\ 0 \quad sobre \quad \Sigma_0^* \end{cases} \\ v = \begin{cases} -\dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu} \quad sobre \quad \Sigma_1 \\ \dfrac{1}{\sigma}\dfrac{\partial p}{\partial\nu} \quad sobre \quad \Sigma_2 \\ 0 \quad sobre \quad \Sigma_0^* \end{cases} \\ p = 0 \quad sobre \quad \Sigma \\ \varphi(.,T) = f^0,\, \varphi'(.,T) = f^1 \quad em \quad \Omega \\ v(0) = v'(0) = 0 \quad em \quad \Omega \\ p(T) = p'(T) = 0 \quad em \quad \Omega \end{array}\right. \tag{3.60}$$

e $\{f^0, f^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ *é definido como solução única da desigualdade variacional*

$$\begin{aligned} &\big\langle v'(T,f) - v^1, \widehat{f}^0 - f^0 \big\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} - \big(v(T,f) - v^0, \widehat{f}^1 - f^1\big) \\ &+\alpha_1\big(||\widehat{f}^0|| - ||f^0||\big) + \alpha_0\big(|\widehat{f}^1| - |f^1|\big) \geq 0,\, \forall\, \widehat{f} = \{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega), \end{aligned} \tag{3.61}$$

onde em (3.61) *escrevemos* $v(T,f)$ *para explicitar o fato que a solução* $\{\varphi, \psi, v, p\}$ *de* (3.60) *depende de* f*.*

Demonstração: Introduzamos dois funcionais próprios convexos

$$F_1 : L^2(\Sigma_1) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

e

$$F_2 : H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

como sendo

$$F_1(w_1) = \frac{1}{2}\int_{\Sigma_1} w_1^2\, d\Sigma, \quad \forall\, w_1 \in L^2(\Sigma_1) \tag{3.62}$$

e

$$F_2(Aw_1) = F_2\big(\{g'(T,w_1), -g(T,w_1)\}\big)$$
$$= \begin{cases} 0, \text{ se} \begin{cases} g'(T) \in v^1 - v_0'(T,w_1) + \alpha_1\, B_{H^{-1}(\Omega)}, \\ -g(T) \in -v^0 + v_0(T,w_1) - \alpha_0\, B_{L^2(\Omega)}, \end{cases} \\ \infty, \text{ caso contrário.} \end{cases} \tag{3.63}$$

Observemos também que por (3.43) e (3.52) podemos definir explicitamente o operador adjunto A^*.

De fato, $\forall\, w_1 \in L^2(\Sigma_1)$, temos

$$\begin{aligned} -\int_{\Sigma_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} w_1\, d\Sigma &= \big\langle g'(T), f^0 \big\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} - \big(g(T), f^1\big) \\ &= \big\langle \langle \underbrace{\{g'(T), -g(T)\}}_{=Aw_1}, \underbrace{\{f^0, f^1\}}_{=f} \rangle \big\rangle \\ &= \big\langle \langle Aw_1, f \rangle \big\rangle \\ &= \big(w_1, A^* f\big)_{L^2(\Sigma_1)} \\ &= \int_{\Sigma_1} A^* f w_1\, d\Sigma. \end{aligned}$$

Então, A^* é dado por

$$\begin{array}{rcccl} A^* & : & H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) & \longrightarrow & L^2(\Sigma_1) \\ & & (f^0, f^1) & \longmapsto & A^* f = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial \nu}, \end{array} \tag{3.64}$$

em que φ é dada em (3.45).

Com essas notações, juntamente com o fato da imagem do operador A ser densa em $H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$, encontrar (3.34) é equivalente

$$\Big| \text{ Encontrar } \inf_{w_1 \in L^2(\Sigma_1)} [F_1(w_1) + F_2(Aw_1)]. \tag{3.65}$$

Aplicando o teorema 1.5 ao problema (3.65) com $X = L^2(\Sigma_1)$, $Y = H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $\varphi = F_1 : L^2(\Sigma_1) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ e $\psi = F_2 : H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, obtemos

- Para $\Big\{ g'\big(T, w_1, \mathcal{F}(w_1)\big), -g\big(T, w_1, \mathcal{F}(w_1)\big) \Big\} \in H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$, existe $w_1 \in L^2(\Sigma_1)$

de modo que $Aw_1 = \big\{g'(T,w_1), -g(T,w_1)\big\}$ satisfaz

$$Aw_1 \in \left\{v^1 - v_0'(T,w_1) + \alpha_1\, B_{H^{-1}(\Omega)}, -v^0 + v_0(T,w_1) + \alpha_0\, B_{L^2(\Omega)}\right\} \Rightarrow$$
$$F_2(Aw_1) = 0.$$

Logo,

$$w_1 \in \ \mathrm{Dom}(F_1) \cap \ \mathrm{Dom}(F_2 \circ A). \tag{3.66}$$

- Temos também que F_1 é contínuo em w_1.

  De fato, seja $|w_1^n - w_1|_{L^2(\Sigma_1)} \to 0$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
|F_1(w_1^n) - F_1(w_1)| &= \frac{1}{2}\left|\int_{\Sigma_1} (w_1^n)^2 d\Sigma - \int_{\Sigma_1} w_1^2 d\Sigma\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\int_{\Sigma_1} w_1^n(w_1^n - w_1) d\Sigma + \int_{\Sigma_1} w_1(w_1^n - w_1) d\Sigma\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\Bigg| \left(\int_{\Sigma_1} (w_1^n)^2 d\Sigma\right)^{1/2} \left(\underbrace{\int_{\Sigma_1} (w_1^n - w_1)^2 d\Sigma}_{\to 0}\right)^{1/2} \\
&+ \left(\underbrace{\int_{\Sigma_1} (w_1^n - w_1)^2 d\Sigma}_{\to 0}\right)^{1/2} \left(\int_{\Sigma_1} w_1^2 d\Sigma\right)^{1/2} \Bigg|,
\end{aligned}$$

  o que implica em

$$|F_1(w_1^n) - F_1(w_1)| \to 0,$$

  o que caracteriza a continuidade de F_1 em w_1.

Então, temos

$$\begin{aligned}
&\inf_{w_1 \in L^2(\Sigma_1)} [F_1(w_1) + F_2(Aw_1)] = \\
&- \min_{(\widehat{f}^0, \widehat{f}^1) \in H_0^1 \times L^2(\Omega)} [F_1^*\big(A^*(\{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\})\big) + F_2^*\big(-\{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\}\big)].
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Observemos que

$$F_1^*(w_1) = F_1(w_1), \tag{3.68}$$

visto que,

$$\begin{aligned}
F_1^*(w_1) &= \sup_{w_1 \in L^2(\Sigma_1)} \left\{ (w_1, w_1)_{L^2(\Sigma_1)} - F_1(w_1) \right\} \\
&= \sup_{w_1 \in L^2(\Sigma_1)} \left\{ \int_{\Sigma_1} w_1^2 \, d\Sigma - \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} w_1^2 \, d\Sigma \right\} \\
&= \sup_{w_1 \in L^2(\Sigma_1)} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} w_1^2 \, d\Sigma \right\} \\
&= F_1(w_1), \quad \forall\, w_1 \in L^2(\Sigma_1).
\end{aligned}$$

Temos também que $\forall\, \widehat{f} = \{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
& F_2^*(\{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\}) \\
&= \sup_{Aw_1 \in H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)} \left\{ \big\langle \langle \{g'(T), -g(T)\}, \{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\} \rangle \big\rangle - F_2(Aw_1) \right\} \\
&= \sup_{Aw_1 \in H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)} \left\{ \big\langle g'(T), \widehat{f}^0 \big\rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} - \big(g(T), \widehat{f}^1 \big) - F_2(Aw_1) \right\} \\
&= \sup_{(\gamma_1, \gamma_0) \in B_{H^{-1}(0,1)} \times B_{L^2(0,1)}} \left\{ \big\langle v^1 - v_0'(T) + \alpha_1 \gamma_1, \widehat{f}_0 \big\rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} \right. \\
& \left. - \big(v^0 - v_0(T) - \alpha_0 \gamma_0, \widehat{f}^1 \big) \right\} \\
&= -\big(v^0 - v_0(T), \widehat{f}^1 \big) + \langle v^1 - v_0'(T), \widehat{f}^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} \\
& + \alpha_1 \sup_{\gamma_1 \in B_{H^{-1}(0,1)}} \langle \gamma_1, \widehat{f}^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} + \alpha_0 \sup_{\gamma_0 \in B_{L^2(0,1)}} \big(\gamma_0, \widehat{f}^1 \big) \\
&= \big(v_0(T) - v^0, \widehat{f}^1 \big) + \langle v^1 - v_0'(T), \widehat{f}^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} + \alpha_1 ||\widehat{f}^0|| + \alpha_0 |\widehat{f}^1|.
\end{aligned} \tag{3.69}$$

Por (3.64), temos

$$A^*(\widehat{f}) = -\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \nu}, \tag{3.70}$$

e usando (3.68), obtemos

$$F_1^*\big(A^*\{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\}\big) = F_1^*\left(-\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \nu}\right) = F_1\left(-\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \nu}\right) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} \left(\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \nu}\right)^2 d\Sigma,$$

com $\dfrac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma_1)$. Portanto, (3.67) é equivalente a

$$\begin{aligned}
& \inf_{w_1 \in L^2(\Sigma_1)} [F_1(w_1) + F_2(Aw_1)] = \\
&= -\min_{\widehat{f} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} \left(\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \nu}\right)^2 d\Sigma + \big(v^0 - v_0(T), \widehat{f}^1 \big) \right. \\
& \left. - \langle v^1 - v_0'(T), \widehat{f}^0 \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} + \alpha_1 ||\widehat{f}^0|| + \alpha_0 |\widehat{f}^1| \right\}
\end{aligned} \tag{3.71}$$

em que φ é dada em (3.45). Sendo assim, (3.71) é o problema dual de (3.34).

Fazendo

$$\begin{aligned} \eta^0 &= v^0 - v_0(T) \\ \eta^1 &= v^1 - v_0'(T), \end{aligned}$$

e considerando a dualidade entre $H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, temos

$$\big\langle\langle\{-\eta^1, \eta^0\}, \{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\}\rangle\big\rangle = (\eta^0, \widehat{f}^1) - \langle\eta^1, \widehat{f}^0\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}. \tag{3.72}$$

Então, associamos a solução do problema dual do lado direito de (3.71) à minimização do funcional

$$\Theta : H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

definido por

$$\Theta\big(\{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\}\big) = \frac{1}{2}\int_{\Sigma_1} \left(\frac{\partial\widehat{\varphi}}{\partial\nu}\right)^2 d\Sigma + \big\langle\langle\{-\eta^1, \eta^0\}, \{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\}\rangle\big\rangle + \alpha_1||\widehat{f}^0|| + \alpha_0|\widehat{f}^1|. \tag{3.73}$$

Assim, temos

$$\inf\big[F_1(w_1) + F_2(Aw_1)\big] = -\min_{\widehat{f}\in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} \Theta\big(\{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\}\big). \tag{3.74}$$

Agora, tomando $0 < \varepsilon = \min\{\alpha_0, \alpha_1\}$ e usando a norma do gráfico, reescrevemos o funcional (3.73) como sendo

$$\begin{aligned} \Theta\big(\{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\}\big) &= \frac{1}{2}\int_{\Sigma_1} \left(\frac{\partial\widehat{\varphi}}{\partial\nu}\right)^2 d\Sigma + \big\langle\langle\{-\eta^1, \eta^0\}, \{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\}\rangle\big\rangle \\ &+\varepsilon\big|\big|(\widehat{f}^0, \widehat{f}^1)\big|\big|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{3.75}$$

Pelo teorema 1.4, temos que o funcional definido em (3.75) atinge um mínimo $\widehat{f} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, solução do problema dual (3.73), e este é único, pois o funcional Θ_ε é estritamente convexo.

De fato, sejam $(\{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\},\ \{g^0, g^1\}) \in \big(H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)\big)^2$. Pelos mesmos argumentos utilizados na prova da convexidade estrita do funcional (3.6), temos

$$\begin{aligned} \Theta_\varepsilon\big[\lambda\{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\} + (1-\lambda)\{g^0, g^1\}\big] &= \lambda\Theta_\varepsilon\big(\{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\}\big) + (1-\lambda)\Theta_\varepsilon\big(\{g^0, g^1\}\big) \\ &\quad - \frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\int_{\Sigma_1}\left|\frac{\partial\widehat{\varphi}}{\partial\nu} - \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 d\Sigma. \end{aligned}$$

Portanto, para $\{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\} \neq \{g^0, g^1\}$ e $\lambda \in (0,1)$, obtemos

$$\Theta_\varepsilon\big[\lambda\{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\} + (1-\lambda)\{g^0, g^1\}\big] < \lambda\Theta_\varepsilon\big(\{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\}\big) + (1-\lambda)\Theta_\varepsilon\big(\{g^0, g^1\}\big).$$

Assim, provamos que o funcional Θ_ε tem um único mínimo $\widehat{f} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ que é solução do problema dual (3.73). Portanto, de (3.34) e (3.71), segue que

$$\begin{aligned}\inf_{w_1 \in L^2(\Sigma_1)} \int_{\Sigma_1} w_1^2 d\Sigma = -\min_{\widehat{f} \in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} &\left\{\frac{1}{2}\int_{\Sigma_1}\left(\frac{\partial\widehat{\varphi}}{\partial\nu}\right)^2 d\Sigma + \big(v^0 - v_0(T), \widehat{f}^1\big)\right. \\ &\left. -\langle v^1 - v_0'(T), \widehat{f}^0\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} + \alpha_1||\widehat{f}^0|| + \alpha_0|\widehat{f}^1|\right\},\end{aligned} \tag{3.76}$$

restrito a (3.36).

Seja então $\widehat{f} = \{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\}$ a única solução do seguinte problema dual:

$$-\min_{\widehat{f} \in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} \left\{\frac{1}{2}\int_{\Sigma_1}(A^*\widehat{f})^2 d\Sigma + \big\langle\langle\{-\eta^1, \eta^0\}, \{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\}\rangle\big\rangle + \alpha_1||\widehat{f}^0|| + \alpha_0|\widehat{f}^1|\right\}, \tag{3.77}$$

onde $A^*\widehat{f}$ é dada em (3.70).

Façamos $\mu = \widehat{f}$, $\xi = f$ e $N = \Theta$ com

$$\left|\begin{aligned} &N_1 = \frac{1}{2}\int_{\Sigma_1}(A^*\widehat{f})^2 d\Sigma \\ &N_2 = \big\langle\langle\{-\eta^1, \eta^0\}, \{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\}\rangle\big\rangle + \alpha_1||\widehat{f}^0|| + \alpha_0|\widehat{f}^1|.\end{aligned}\right.$$

Agora, temos

$$
\begin{aligned}
\big\langle N_1'(\xi), \mu - \xi \big\rangle &= \big\langle N_1'(f), \widehat{f} - f \big\rangle \\
&= \frac{d}{d\lambda} N_1 \left(f + \lambda(\widehat{f} - f) \right) \Bigg|_{\lambda=0} \\
&= \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} \left(A^*(f + \lambda(\widehat{f} - f) \right)^2 d\Sigma \right] \Bigg|_{\lambda=0} \\
&= \frac{1}{2} \left[\int_{\Sigma_1} 2 \left(A^*(f + \lambda(\widehat{f} - f) \right) A^*(\widehat{f} - f) d\Sigma \right] \Bigg|_{\lambda=0} \\
&= \left[\int_{\Sigma_1} (A^* f + \lambda A^* \widehat{f} - \lambda A^* f)(A^* \widehat{f} - A^* f) d\Sigma \right] \Bigg|_{\lambda=0} \\
&= \int_{\Sigma_1} A^* f (A^* \widehat{f} - A^* f) d\Sigma \\
&= \int_{\Sigma_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \left(\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \nu} - \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right) d\Sigma.
\end{aligned}
$$

Pela proposição 1.2, obtemos a desigualdade variacional

$$
\begin{aligned}
&\underbrace{\int_{\Sigma_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \left(\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \nu} - \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right)}_{**} d\Sigma + \big\langle \langle \{-\eta^1, \eta^0\}, \{\widehat{f}^0, \widehat{f}^1\} \rangle \big\rangle + \alpha_1 ||\widehat{f}^0|| \\
&+ \alpha_0 |\widehat{f}^1| - \big\langle \langle \{-\eta^1, \eta^0\}, \{f^0, f^1\} \rangle \big\rangle - \alpha_1 ||f^0|| - \alpha_0 |f^1| \geq 0.
\end{aligned}
\tag{3.78}
$$

Analisemos o termo $(**)$ em (3.78). Notemos que, por (3.52) com

$$
w_1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial \nu},
$$

obtemos

$$
\int_{\Sigma_1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right)^2 d\Sigma = \big\langle g'(T), f^0 \big\rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} - \big(g(T), f^1 \big). \tag{3.79}
$$

Também,

$$
\int_{\Sigma_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \nu} d\Sigma = \big\langle g'(T), \widehat{f}^0 \big\rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} - \big(g(T), \widehat{f}^1 \big). \tag{3.80}
$$

Portanto, de (3.79) e (3.80), segue que

$$
\int_{\Sigma_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \left(\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial \nu} - \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right) d\Sigma = -\big(g(T), \widehat{f}^1 - f^1 \big) + \big\langle g'(T), \widehat{f}^0 - f^0 \big\rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}. \tag{3.81}
$$

Substituindo (3.81) em (3.78), obtemos

$$-\big(g(T),\widehat{f}^1-f^1\big)+\big\langle g'(T),\widehat{f}^0-f^0\big\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}-\big\langle \eta^1,\widehat{f}^0\big\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}$$

$$+\big(\eta^0,\widehat{f}^1\big)+\big\langle \eta^1,f^0\big\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}-\big(\eta^0,f^1\big)+\alpha_1\big(||\widehat{f}^0||-||f^0||\big)+\alpha_0\big(|\widehat{f}^1|-|f^1|\big)\geq 0.$$

Assim,

$$-\big(g(T),\widehat{f}^1-f^1\big)+\big\langle g'(T),\widehat{f}^0-f^0\big\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}-\big\langle \eta^1,\widehat{f}^0-f^0\big\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}$$

$$+\big(\eta^0,\widehat{f}^1-f^1\big)+\alpha_1\big(||\widehat{f}^0||-||f^0||\big)+\alpha_0\big(|\widehat{f}^1|-|f^1|\big)\geq 0,$$

ou seja,

$$\big\langle g'(T)-\eta^1,\widehat{f}^0-f^0\big\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}-\big(g(T)-\eta^0,\widehat{f}^1-f^1\big)+\alpha_1\big(||\widehat{f}^0||-||f^0||\big)$$

$$+\alpha_0\big(|\widehat{f}^1|-|f^1|\big)\geq 0.$$

Portanto,

$$\big\langle g'(T)-v^1+v_0'(T),\widehat{f}^0-f^0\big\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}-\big(g(T)+v_0(T)-v^0,\widehat{f}^1-f^1\big)$$

$$+\alpha_1\big(||\widehat{f}^0||-||f^0||\big)+\alpha_0\big(|\widehat{f}^1|-|f^1|\big)\geq 0,$$

isto é,

$$\big\langle v_0'(T)+g'(T)-v^1,\widehat{f}^0-f^0\big\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}-\big(v_0(T)+g(T)-v^0,\widehat{f}^1-f^1\big)$$

$$+\alpha_1\big(||\widehat{f}^0||-||f^0||\big)+\alpha_0\big(|\widehat{f}^1|-|f^1|\big)\geq 0,\qquad \forall\,\widehat{f}\in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega).$$

Agora, tomando

$$v=v_0+g$$

como em $(3.38)_1$, a prova está concluída. □

Bibliografia

[1] AUBIN, J.P., *Applied Functional Analysis, Pure and Applied Mathematics*, John Wiley & Sons, Second Edition, 2000.

[2] AUBIN, J.P., *L'analyse non Linéaire et ses Motivations Economiques*, Masson, Paris, 1984.

[3] BREZIS, H., *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*, Dunod, Paris, 1990.

[4] BREZIS, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Universitext, Springer, 2011.

[5] DÍAZ, J.; LIONS, J.–L., On the approximate controllability of Stackelberg–Nash strategies, in: J.I. Díaz (Ed). *Ocean Circulation and Pollution Control Mathematical and Numerical Investigations*, Springer, 2005.

[6] EKELAND, I.; TEMAN, R., *Convex Analysis and Variational Problems*, Classics in Applied Mathematics 28, SIAM, 1999.

[7] EVANS, L. C., *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, Vol.19, AMS, 1997.

[8] FABRE, C., Uniqueness results for Stokes equations and their consequences in linear and nonlinear control problems, *ESAIM: COCV*, v.1, p.267–302, 1996.

[9] FABRE, C.; LEBEAU, G., Prolongemente unique des solutions de l'equation de Stokes.*Communications in Partial Differential Equations*, 21(3&4), p. 573–596, 1996.

[10] FABRE, C.; PUEL, J.–P; ZUAZUA, E., Approximate controllability of the semilinear heat equations,*Proc. Royal Soc. Edinburgh*, v. 125A, p.31–61, 1995.

[11] FERNÁNDEZ–CARA, E.; ZUAZUA, E., Approximate controllability of the semilinear heat equation involving gradient terms,*Departament of Mathematics.* Prepint 2 University of Cantabria, Spain, 1997.

[12] HÖRMANDER, L., Linear Partial Differential Operators, Springer - Verlag, 1976.

[13] KREIDER, K. O., Equações Diferenciais, Edgart Blucher, 1972.

[14] LIONS, J.–L., Hierarchic Control, *Proc. Indian Academic Science Mathematical Science*, v. 104, nº 1, p.295–304, 1994.

[15] LIONS, J.–L., *Hidden Regularity in some Nonlinear Hyperbolic Equations*, Mat. Apl. Comput., v. 6, p. 7–15, 1987.

[16] LIONS, J.–L., *Contrôlabilité Exacte, Pertubations et Stabilization des Systèmes Distribués,* Tome I, RMA 8, Masson, Paris, 1988.

[17] LIONS, J.–L., *Remarks sur la controlabilite approchee.* Jornadas Hispano-Francesas sobre Controle de Sitemas Distribuídos, Octubre 1990.

[18] LIONS, J.–L., Contrôle de Pareto de Systèmes Distribués: Le Cas d'Évolution, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, Serie I, v. 302, p. 413-417, 1986.

[19] LIONS, J.–L., et MAGENES, E., *Problèmes aux Limites Non Homogenes et Apllications*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, vol. 1, (1968).

[20] LIONS, J.– L., *Quelques Méthodes de Résolutions des Problèmes aux Limites non Linéaires*, Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[21] LIONS, J.–L., Some Remarks on Stackelberg's Optimization. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, vol. 4, nº 4, p. 477–487, 1994.

[22] MEDEIROS, L. A., Exact Controllability for Wave Equation - HUM, Atas do 37º SBA, p. 61-173, 1993.

[23] MEDEIROS, L.A.; Milla Miranda, M. & Lourêdo, A. T., Introduction to Exact Control Theory Method Hum. Eduepb - Campina Grande - Pb. 2013.

[24] MEDEIROS, L. A. & Milla Miranda, M., Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos), Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, 1999.

[25] MEDEIROS, L. A. & Milla Miranda, M., *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*, Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, 2011.

[26] MEDEIROS, L. A., RIVERA, P. H., *Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais,* Textos de Métodos Matemáticos, Instituto de Matemática-UFRJ, n. 9, 1975.

[27] MIZOHATA, S., Unicité du prolongement des solutions pour quelques opérateurs diférentiels paraboliques. : *Mem. Coll. Sc. Univ. Kyoto* Ser. A31, p. 219–239, 1958.

[28] NASH, J., Noncooperative games. *Annals of Mathematics*, v.54, p.286-295, 1951.

[29] PATHAK, R.S., A Course in Distribution Theory and Applications. New Delhi, Narosa, 2009.

[30] PARETO, V., *Cours d'économie politique, Rouge, Laussane*, Switzerland, 1896.

[31] SAUT, J.C.; SHEURER, B., Unique continuation for some Evavolution Equations.*J. Differential Equations*, v.66, p.118–139, 1987.

[32] STACKELBERG, H. Von., *Marktform un Gleichgewicht*, Springer, Berlin, Germany, 1934.

[33] VISIK, M.I, LADYZENSKAYA, O.A., *Boundary value for partial differential equations and certain classes of perator equations*, Uspchi Mat. Nauk(NS), 11(672), p. 41–97, 1956.

[34] ZEIDLER, E., *Applied Functional Analysis, Applied Mathematical Sciences* 109, Springer Verlag, 1995.

[35] ZUAZUA, E., Finite Dimensional Null Controllability for the Semilinear Heat Equation. *J. Math. Pures Appl.*, v. 76, p.237–264, 1997.