Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Estudo qualitativo sobre a existência, unicidade e regularidade para uma equação de onda com potencial

José Lucas Ferreira Machado

Teresina - 2016

José Lucas Ferreira Machado

Dissertação de Mestrado:

Estudo qualitativo sobre a existência, unicidade e regularidade para uma equação de onda com potencial

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Marcondes Rodrigues Clark
Coorientador:
Prof. Dr. Isaías Pereira de Jesus

Teresina - 2016

FICHA CATALOGRÁFICA
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial do CCN

M149e Machado, José Lucas Ferreira.
Estudo qualitativo sobre a existência, unicidade e regularidade para uma equação de onda com potencial / José Lucas Ferreira Machado. – Teresina, 2016.
109 f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática, 2016.
Orientador: Prof. Dr. Marcondes Rodrigues Clark.
Coorientador: Prof. Dr. Isaías Pereira de Jesus.

1. Análise. 2.Equações Diferenciais Parciais. I. Título

CDD 515.353

Aos meus queridos pais Humberto Machado e Marli Ferreira, meu irmão Luan, minha avó Raimunda.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus, pelo dom da vida, por ter me permitido aprender o pouco que sei, pelas bençãos derramadas e por sempre me acompanhar durante todos os momentos em que passei e vou passar.

Agradeço aos meus pais Marli Lima Ferreira e Humberto de Morais Machado Filho, que desde criança incentivaram, estimularam e deram todo suporte que puderam em meus estudos, sendo os maiores incentivadores e torcedores. Ao meu irmão Luan Machado pelos momentos de convivência e amizade, a todos os meus familiares que me dirigiram oração e força mesmo com a distância.

À minha namorada, Graziela de Araújo Lima, por me proporcionar intensos momentos de alegria, apesar da distância, pela compreensão, confiança, carinho e amor.

À banca examinadora, em especial ao professor Marcondes Clark, meu orientador, pela paciência e dedicação dada à minha formação, pelos conhecimentos transmitidos, conselhos e pela amizade. Sua preocupação e empenho no desenvolvimento desse trabalho foram fundamentais para a conclusão do mesmo. Assim como meu coorientador, professor Isaías Pereira de Jesus, pela paciência durantes os seminários, pelas muitas correções e sugestões.

Agradeço à todos os Professores do Programa de Pós-graduação em Matemática da UFPI pela amizade e pelo empenho na arte de ensinar. Em especial aos Professores Barnabé Pessoa Lima, José Francisco Alves de Oliveira, Jurandir de Oliveira Lopes e Paulo Alexandre Araújo Sousa.

Agradeço à todos os professores da UFPI-CMRV, pelo conhecimento transmitido, dentre eles, Alexandro Marinho Oliveira, Carlos Augusto David Ribeiro, Cleyton Natanael Lopes de Carvalho Cunha, Gildario Dias Lima, Marcelo de Oliveira Rego, Pedro Jorge Sousa dos Santos, Renan de Oliveira e Silva, Roberto Ramos das Neves, Sissy da Silva Souza, Cloris Violeta Alves Lopes e Leonarda Erineuda Alves.

Agradeço ao professor e amigo Alexandro Marinho Oliveira, orientador de iniciação científica, pelo empenho e dedicação, no qual me motivou à ingressar no mestrado e me deu o alicerce necessário para o prosseguimento na vida acadêmica. Agradeço também de forma especial ao Professor Cleyton Natanael Lopes de Carvalho Cunha, pelo grande conhecimento repassado durantes as várias e importantes disciplinas no qual foi meu mestre, entre elas Análise Real.

Agradeço ao Professor Roberto Ramos das Neves, que foi o primeiro professor da UFPI que tive contato, ainda no PIC-jr, e também à Israel de Sousa Evangelista e Pedro Jorge Sousa dos Santos pelo ensinamento neste período e amizade. Estes foram os grandes incentivadores, tiveram um papel fundamental na minha escolha pela matemática como área de estudo e por ingressar em tal curso.

Agradeço aos meus amigos da graduação e do mestrado que em diversos momentos apoiaram e ajudaram na batalha cotidiana de estudos, provas, trabalhos e seminários. Em especial Andressa Gomes, Antônio Aguiar, Antônio de Pádua, Antônio Luiz, Atécio Alves, Bruno Mendes, Elianderson Santos, Fernando Gomes, Fernando Lima, Hércules Bezerra, Jeferson Silva, Jhonata Bezerra, José Edilson, Josimauro Borges, Juliana Gomes, Kelvin Jhonson, Lívio Leandro, Lucas Cassiano, Lucas Quaresma, Rafael Emanoel, Raul Kazan, Ray Victor, Sandoel Vieira, Tiago Menezes, Victor Carvalho, Yldenilson Almeida, Daiane Cruz, Leandro Bittencourt e Maurício Aragão.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

E à todos aqueles que contribuíram de forma direta ou indiretamente, meus agracimentos.

"Não é o conhecimento, mas o ato de aprender, não a posse mas o ato de chegar lá, que concede a maior satisfação."

Carl Friedrich Gauss.

Notações

As simbologias abaixo são utilizadas no decorrer do texto:

- Ω aberto limitado do $\mathbb{R}^N$ com $N \geqslant 1$ e fronteira Γ suficientemente regular;
- $T \in \mathbb{R}$ positivo e $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$;
- $Q = \Omega \times (0, T)$;
- η o vetor unitário normal exterior à Γ;
- $|\cdot|$ a norma em $L^2(\Omega)$ ou a norma do $\mathbb{R}^N$;
- $\|\cdot\|$ a norma em $H_0^1(\Omega)$;
- C_0 é a constante da desigualdade de Poincaré ou uma que derive dela diretamente;
- C, C_i constantes arbitrárias;
- "$'$", $\dfrac{\partial}{\partial t}$, $\dfrac{d}{dt}$, a derivada de uma função em relação a variável t;
- Δ o operador Laplaciano $\Delta = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i^2}$;
- $\hookrightarrow$ imersão contínua;
- $\overset{c}{\hookrightarrow}$ imersão compacta;
- $\rightharpoonup$ convergência fraca;
- $\overset{*}{\hookrightarrow}$ convergência fraca-estrela.

Resumo

Neste trabalho, faremos um estudo qualitativo sobre a existência, unicidade e regularidade para a equação de onda com potencial:

$$\left|\begin{array}{l} u''(x,t) - \Delta u(x,t) + p(x,t)u(x,t) = f(x,t) \quad \text{em} \quad Q; \\ u = g \quad \text{sobre} \quad \Gamma \times (0,T); \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u'(x,0) = u_1(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \end{array}\right.$$

onde Ω é um subconjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^N$ com fronteira Γ suficientemente regular, $T > 0$ arbitrário e fixo, $p \in L^\infty(Q)$ é o potencial. Seguimos as ideias de L. A. Medeiros et al. [27], onde a existência é obtida via método das aproximações de Faedo-Galerkin-Lions e a unicidade via método da energia. Por meio das ideias de O. Y. Imanuvilov [15], expostas por L. Baudouin et al. e por J. P. Puel em [4], [35], respectivamente, obteremos a Estimativa de Carleman e como consequência desta teremos a Desigualdade de Observalibidade. Com isto, utilizando o Método HUM (Hilbert Uniqueness Method), idealizado por J. L. Lions em [19], resultará a controlabilidade exata para o problema

$$\left|\begin{array}{l} u''(x,t) - \Delta u(x,t) + p(x,t)u(x,t) = 0 \quad \text{em} \quad Q; \\ u = v \quad \text{sobre} \quad \Gamma_0 \times (0,T); \\ u = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma \setminus \Gamma_0 \times (0,T); \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u'(x,0) = u_1(x) \quad \text{em} \quad \Omega. \end{array}\right.$$

Finalmente, ainda como consequência da Estimativa de Carleman, baseado em L. Baudouin [3], resultará a Estabilidade Lipschitz para o problema inverso.

Palavras-chave: Equação de Onda, Estimativa de Carleman, Método HUM, Controlabilidade Exata, Estabilidade Lipschitz.

Abstract

In this work, we will make a qualitative study of existence, uniqueness and regularity for the wave equation with potential:

$$\left|\begin{array}{l} u''(x,t) - \Delta u(x,t) + p(x,t)u(x,t) = f(x,t) \ \ in \ \ Q; \\ u = g \ \ on \ \ \Gamma \times (0,T); \\ u(x,0) = u_0(x), \ \ u'(x,0) = u_1(x) \ \ in \ \ \Omega, \end{array}\right.$$

where Ω is a limited open set of $\mathbb{R}^N$ with boundary Γ sufficiently regular, $T > 0$ fixed arbitrary, $p \in L^\infty(Q)$ is the potential. We follow the ideas of L. A. Medeiros et al. [27], where the existence we obtain by the method Faedo-Galerkin-Lions approaches and uniqueness get through energy method. Following O. Y. Imanuvilov [15] ideias, exposed by L. Baudouin et al. and J. P. Puel in [4], [35], respectively, we obtain the Carleman estimate and as a result of this we have the observability inequality. Thereby, using the method HUM (Hilbert Uniqueness Method), designed by J. L. Lions em [19], will result the exact controllability to the problem

$$\left|\begin{array}{l} u''(x,t) - \Delta u(x,t) + p(x,t)u(x,t) = 0 \ \ in \ \ Q; \\ u = v \ \ on \ \ \Gamma_0 \times (0,T); \\ u = 0 \ \ on \ \ \Gamma \setminus \Gamma_0 \times (0,T); \\ u(x,0) = u_0(x), \ \ u'(x,0) = u_1(x) \ \ in \ \ \Omega. \end{array}\right.$$

Finally, also as a consequence of estimation of Carleman, based on L. Baudouin [3], will result Lipschitz stability to the inverse problem.

Keywords: Wave Equation, Carleman Estimate, HUM Method, Exact Controllability, Lipschitz Stability.

Sumário

Introdução

Uma conhecida frase de Pitágoras diz que "tudo é número", talvez exista um exagero nesta expressão, porém a representação do mundo natural por meio de modelos matemáticos tem possibilitado uma melhor compreensão da realidade e, também, fomentado o desenvolvimento científico e tecnológico.

Esses modelos estudados pela matemática encontram-se com frequência na física, existindo uma contribuição mútua entre essas duas ciências. Este é um dos motivos pelos quais os estudos sobre as equações de onda tem se intensificado nos últimos anos. As sonoras, as sísmicas, o raio-x, as que se propagam sobre uma superfície líquida, a vibração dos corpos, mostram como a todo o momento diversos tipos de ondas nos cercam.

É da natureza humana querer controlar os fenômenos, então surge a pergunta: Como agir para que uma onda passe a se comportar como desejarmos? Controlar um sistema pode ser entendido de várias formas e não é exclusividade de trabalhos com ondas. Em poucas palavras, diremos "controlar", quando atuarmos sobre um sistema para que seu estado final seja o que estabelecemos previamente como o desejável. Em Micu e Zuazua [29] o conceito de controlabilidade é dado de maneira simples.

Ilustrando com um exemplo: Em uma cidade onde tenha incidência de terremotos, tem-se o interesse de construir um edifício de forma que após um tempo T do término do tremor as vibações em sua estrutura tenham cessado. Neste caso, diríamos que o sistema estaria controlado se encontrasse-mos um meio de fortalecer a construção para quando $\mathsf{t} = \mathsf{T}$ as vibrações forem nulas. Vale ressaltar que, independente de agirmos as vibrações vão parar, mas importante é que isto ocorra no tempo desejado previamente. Resta saber se isto é possível.

Nos anos 80, J.L. Lions [19] apresentou o Método de Unicidade Hilbertiana (HUM) que reduz o problema da controlabilidade a encontrar uma desigualdade de observabilidade para o sistema adjunto homogêneo. Neste trabalho, tal desigualdade será obtida como consequência da Estimativa de Carleman.

A Estimativa de Carleman para funções regulares com suporte compacto (que é chamada de *local*) aparece em T. Carleman [7] e têm sido desenvolvida em L. Hörmander [14]. Aqui estamos interessados em provar Estimativas de Carleman *globais* (sobre domínio limitado) correspondente ao operador de onda.

O objetivo desta dissertação é revisitar propriedades de observabilidade à luz da Estimativa de Carleman para a equação de onda com potencial em um domínio limitado. Apresentaremos as aplicações das estimativas de Carleman apropriadas em duas direções: na teoria de controle exato e na dependência entre as ondas e potenciais.

Problemas de controlabilidade exata para equações de onda têm sido extensivamente estudada nos últimos vinte e cinco anos (ver [19], por exemplo) e estes problemas correspondem a muitas aplicações na física e nas engenharias em geral, como por exemplo, parar as vibrações em uma membrana por uma ação na fronteira, e outros. Consideraremos aqui o caso de equações de onda com potenciais limitados e apresentar uma abordagem direta para este problema. Embora seja uma ferramenta técnica e de longos cálculos, nos fornece informações sobre o comportamento de um sistema definido em um subconjunto do $\mathbb{R}^{N+1}$ a partir de dados em uma parte da fronteira.

Outro problema que será considerado é recuperar um potencial desconhecido em uma equação de onda a partir de medições de fronteira. Este é um problema inverso, que mais uma vez corresponde a importantes aplicações. Um problema interessante seria obter um coeficiente de difusão ou coeficientes de elasticidade. A situação aqui considerada constitui um passo nessa direção.

Trataremos, simultaneamente, dois tipos de problemas inversos, que são: Problema Inverso Não Linear e Problema Inverso Linear. Estas questões, para a equação de onda, já receberam respostas positivas, uma vez que o resultado de unicidade para o problema inverso linear tenha sido demonstrado por M. V. Klibanov em [17] e os resultados de estabilidade de Lipschitz (para ambos os problemas inversos não-linear e linear) de M. Yamamoto, derivado a partir dele, pode ser encontrado em [39]. A prova em [39] é baseada em uma estimativa de Carleman local para o operador de onda e um argumento de compacidade-unicidade.

Objetivamos dar uma prova direta de uma estimativa de estabilidade Lipschitz por meio de uma estimativa de Carleman global, resultado também interessante por si só.

Outra vantagem desta prova do resultado, é que são enfraquecidas as condições sobre a equação de onda em estudo. Além disso, a partir da estimativa de Carleman, é suficiente obter uma medição do fluxo da solução sobre uma parte adequada Γ_0 da fronteira (em vez de toda a fronteira $\partial\Omega$).

Nosso trabalho foi baseado principalmente em L. Baudouin et al. [3] e [4], L. A. Medeiros et al. [27], J. P. Puel [35] e M. V. Flamarion [12]. Sendo distrubuido em cinco capítulos.

No capítulo 1, estabeleceremos os resultados básicos de Análise Funcional, Distribuições escalares e vetoriais, Espaços de Sobolev e os espaços de Banach $L^p(0,T;X)$, necessários para o entendimento e desenvolvimento dos capítulos subsequentes.

No capítulo 2, faremos uma análise qualitativa sobre a existência, unicidade e regularidades para a soluções de alguns problemas mistos associados a equação de ondas com potencial, definiremos os conceitos de solução forte, solução fraca e solução ultra-fraca, este último será defnido pelo chamado Método de Transposição idealizado por J.L. Lions et al. em [22]. Usamos o Método de Faedo-Galerkin para provar a existência de solução forte. Este capítulo foi fundamentado principalmente em M. M. Cavalcanti et al. [8], L. A. Medeiros et al. [25] e [27]. Dedicamos uma seção para a regularidade escondica, onde obteremos regularidade e estimativa para a derivada normal exterior. Esta não provém diretamente da equação, por isso, o nome escondida. Este seção foi baseada em M. V. Flamarion [12], L. A. Medeiros et al. [27] e K. P. Murillo [32].

No capítulo 3, obteremos a Estimativa de Carleman, cuja demonstração é extremanente técnica, a qual será demonstrada seguindo as ideias de O. Y. Imanuvilov em [15] e expostas por L. Baudouin et al. em [4] e [3], por J. P. Puel em [35] e M. V. Flamarion em [12].

No capítulo 4, estabeleceremos a Desigualdade de Observabilidade como uma aplicação da Desigualdade de Carleman, seguindo as idéias de Puel em [35]. Por fim aplicamos o Método HUM, seguindo as ideias de L. A. Medeiros et al. em [27], para obtermos o controle exato.

Finalmente, no capítulo 5, será dedicado ao problema inverso linear e não linear, que também seguirá como uma aplicação da Estimativa de Carleman. Na verdade, conseguiremos um pouco mais, obteremos uma estabilidade Lipschitz Inversa para o problema da onda com potencial. Este resultado é baseado em L. Baudouin [3] e J. P. Puel [35].

Capítulo 1

Noções Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados e definições importantes e de relevância para o entendimento do presente trabalho. Portanto, não serão feitas demonstrações apenas citamos referências onde tais demonstrações são encontradas.

1.1 Resultados Clássicos

Teorema 1.1.1. *(Desigualdade de Young) Sejam* $p > 1$, $q > 1$ *tais que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Então,*

$$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q, \quad \forall\ a, b \geqslant 0.$$

Demonstração. Ver [5] ou [6]. □

Teorema 1.1.2. *(Desigualdade de Hölder Generalizada). Sejam* f_1, f_2,...,f_k *funções tais que* $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$ $\forall i$, *com* $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$ *e* $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} \leqslant 1$. *Considere*

$$f(x) = \prod_{i=1}^{k} f_i(x).$$

Então $f \in L^p(\Omega)$, *com* $\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i}$ *e tal que*

$$\|f\|_p \leqslant \prod_{i=1}^{k} \|f_i\|_{p_i}.$$

Demonstração. Ver [6]. □

Teorema 1.1.3. *(Representação de Riesz) Sejam* $1 \leqslant p < \infty$ *e* $\phi \in [L^p(\Omega)]'$. *Então existe única função* $u \in L^q(\Omega)$ *tal que*

$$\langle \phi, f \rangle_{[L^p(\Omega)]' \times L^p(\Omega)} = \int_\Omega u f dx$$

para toda $f \in L^p(\Omega)$, *onde* q *é o conjudado de* p. *Além disso,*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} = \|\phi\|_{[L^p(\Omega)]'}.$$

Demonstração. Ver [5] ou [6]. □

Teorema 1.1.4. *(Banach-Alaoglu-Bourbaki). Sejam* E *um espaço de Banach e* E' *o seu dual topológico. Então o conjunto*

$$B_{E'} = \left\{ f \in E'; \|f\| \leqslant 1 \right\}$$

é compacto na topologia fraca estrela.

Demonstração. Ver [6] ou [33]. □

Proposição 1.1.1. *Sejam* E *um espaço de Banach e* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *uma sequência em* E. *Então*

1. $x_n \rightharpoonup x$, *se somente se,* $\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$, *para todo* $f \in E'$;
2. *Se* $x_n \to x$ *forte, então* $x_n \rightharpoonup x$;
3. *Se* $x_n \rightharpoonup x$, *então* $(\|x_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ *é limitada e* $\|x\| \leqslant \liminf \|x_n\|$;
4. *Se* $x_n \rightharpoonup x$ *em* E *e* $f_n \to f$ *forte* E', *então* $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.

Demonstração. Ver [6] ou [18]. □

Teorema 1.1.5. *Sejam* E *um espaço de Banach reflexivo e* (x_n) *uma sequência limitada em* E. *Então* (x_n) *admite uma subsequência fracamente convergente em* E.

Demonstração. Ver [5] ou [6]. □

Teorema 1.1.6. *Sejam* E *um espaço de Banach separável e* (f_n) *uma sequência limitada em* E'. *Então existe uma subsequência* (f_{n_k}) *que converge na topologia* $\sigma(E', E)$.

Demonstração. Ver [5] ou [6]. □

Teorema 1.1.7. *Um espaço de Hilbert* H *de dimensão infinita é separável se, e somente se, existe em* H *uma base hilbertiana enumerável.*

Demonstração. Ver [5]. □

Definição 1.1.1. *(Condições de Carathéodory). Sejam* D *um subconjunto do* $\mathbb{R}^{N+1}$*, cujos elementos são denotados por* (x,t)*, onde* $t \in \mathbb{R}$ *e* $x \in \mathbb{R}^N$ *e* $f : D \to \mathbb{R}^N$ *uma aplicação. Dizemos que* f *satisfaz as condições de Carathéodory se:*

1. $f(x,t)$ *é mensurável em* t*, para cada* x *fixo;*

2. $f(x,t)$ *é contínua em* x*, para todo* t *fixo;*

3. *Para cada compacto* $K \subset D$*, existe uma função real integrável* $m_K(t)$ *tal que*

$$|f(x,t)| \leqslant m_K(t), \;\; \forall (x,t) \in K.$$

Teorema 1.1.8. *(Carathéodory). Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ *uma aplicação nas condições de Carathéodory sobre o retângulo* $R = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}; |t - t_0| \leqslant a, |x - x_0| \leqslant b\}$*, com* $a, b \in \mathbb{R}_+$*. Então existe uma solução* $\varphi(t)$ *do problema*

$$\left| \begin{array}{rcl} x' & = & f(x,t) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array} \right. \tag{1.1}$$

sobre algum intervalo do tipo $(t_0 - \beta, t_0 + \beta)$*, para algum* $\beta > 0$*.*

Demonstração. Ver [28]. □

Corolário 1.1.1. *Sejam* D *aberto de* $\mathbb{R}^{N+1}$ *e* f *satisfazendo as condições de Carathéodory sobre* D*. Então o problema 1.1 tem solução para qualquer* $(t_0, x_0) \in D$*.*

Demonstração. Ver [28]. □

Corolário 1.1.2. *(Prolongamento de soluções). Sejam* $D = [0,T] \times B$*, com* $0 < T < \infty$*,* $B = \{x \in \mathbb{R}^N; |x| \leqslant b, b > 0\}$*, e* f *satisfazendo as condições de Carathéodory. Seja* $\varphi(t)$ *uma solução de*

$$\left| \begin{array}{rcl} x' & = & f(x,t) \\ x(0) & = & x_0, \quad |x_0| \leqslant b. \end{array} \right.$$

Se em qualquer intervalo I *onde* $\varphi(t)$ *está definida tivermos* $|\varphi(t)| \leqslant M$*,* $\forall t \in I$*, onde* M *é uma constante independente de* I *e* $M < b$*, então* φ *tem um prolongamento até* $[0,T]$*.*

Demonstração. Ver [28]. □

Lema 1.1.1. *(Lions). Sejam* Ω *um aberto limitado do* $\mathbb{R}^N$, g_j *e* g *funções de* $L^q(\Omega)$, $1 < q < \infty$, *tais que*

$$\|g_j\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C, \ \forall j = 1, 2, \cdots$$

e

$$g_j \to g, \quad \text{q.s.} \quad em \quad \Omega.$$

Então $g_j \rightharpoonup g$, *em* $L^q(\Omega)$.

Demonstração. Ver [9]. □

Teorema 1.1.9. *(Desigualdade de Gronwall). Seja* C *uma constante não negativa,* $\beta \geqslant 0$, q.t.p. *em* $(0, T)$, *uma função integrável em* $(0, T)$, $\varphi : [0, T] \to \mathbb{R}$ *uma função integrável e não negativa, tal que*

$$\varphi(t) \leqslant C + \int_0^t \beta(x)\varphi(x)dx, \ \forall t \in [0, T].$$

Então,

$$\varphi(t) \leqslant Ce^{\int_0^t \beta(x)dx}, \ \forall t \in [0, T].$$

Demonstração. Ver [9]. □

Teorema 1.1.10. *(Lax-Milgram) Seja* $a(u, v)$ *uma forma bilinear, contínua e coerciva num espaço de Hilbert* H. *Então, para qualquer* $\varphi \in H'$, *existe um único* $u \in H$ *tal que*

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle, \quad \forall v \in H.$$

Demonstração. Ver [6]. □

1.2 Distribuição escalares

Definição 1.2.1. *Dado um aberto* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, *definimos o suporte de* u, *onde* u *é uma função mensurável com domínio* Ω, *como sendo*

$$\mathrm{supp}\, u = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}.$$

A toda k-upla de inteiros não negativos $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ chamamos de um multi-índice, com norma $|\alpha| = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$.

Com isto, definimos o operador de derivação de ordem α por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1}\partial^{\alpha_2}...\partial^{\alpha_k}}.$$

Definição 1.2.2. *O conjunto das funções infinitamente diferenciáveis e de suporte compacto contido em Ω é denotado por $C_0^\infty(\Omega)$. Tais funções são chamadas de funções testes.*

O conjunto $C_0^\infty(\Omega)$ constitui um espaço vetorial e introduziremos uma noção de convergência, introduzida por *Schwartz*. Dizemos que uma sucessão $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$ quando forem satisfeitas as seguintes condições:

- todas as φ_n possuem suportes contidos em um compacto fixo $K \subset \Omega$;
- a sucessão $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente em K, juntamente com todas suas derivadas de todas as ordens.

Observação 1.1. *O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$, munido da noção de convergência acima definido, é denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$.*

Definição 1.2.3. *(Distribuição sobre Ω). Denomina-se distribuição sobre Ω a toda aplicação linear contínua $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$.*

Observação 1.2. *O valor de T aplicado numa função $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ será denotado por $\langle T, \varphi\rangle$.*

Exemplo 1.1. *Seja $u \in L^p_{loc}(\Omega)$. O funcional $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por*

$$\langle T_u, \varphi\rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx$$

define uma distribuição sobre Ω.(Ver [25])

Definição 1.2.4. *Consideremos o espaço vetorial de todas as distribuições sobre Ω. Neste espaço, dizemos que a sucessão $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para T se a sucessão $(\langle T_n, \varphi\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\langle T, \varphi\rangle$ em $\mathbb{R}$, para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Denotamos este espaço com essa noção de convergência por $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Lema 1.2.1. *(Du Bois Raymond). Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tal que* $T_u = 0$*, isto é,*

$$\int_\Omega u(x)\phi(x)dx = 0 \quad \textit{para toda} \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{1.2}$$

Então $u = 0$ *quase sempre em* Ω*.*

Demonstração. Ver [25] ou [26]. □

Definição 1.2.5. *Consideremos uma distribuição* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$*. Denominamos por derivada de* T *a distribuição* $D^\alpha T$*, definida em* $\mathcal{D}(\Omega)$ *por:*

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi\rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Analisando bem a definição acima e lembrando da definição de uma função teste, ganhamos que qualquer distribuição em $\mathcal{D}'(\Omega)$ possui derivada de todas as ordens. A aplicação $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$, $T \mapsto D^\alpha T$ é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

1.3 Espaços de Sobolev

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto, p um número real tal que $1 \leqslant p < \infty$ e m um número natural. Denota-se por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial das (classes de) funções $u \in L^p(\Omega)$, tais que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo muti-índice $\alpha \in \mathbb{N}^N$, tal que $|\alpha| \leqslant m$. Simbolicamente

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall\ |\alpha| \leqslant m\}.$$

A função $\|\cdot\| : W^{m,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha|\leqslant m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall\ u \in W^{m,p}(\Omega),$$

constitui uma norma sobre $W^{m,p}(\Omega)$. O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ munido da norma acima é um espaço de Banach (ver [6]). Os espaços de Banach $W^{m,p}(\Omega)$, são chamados de Espaços de Sobolev de ordem m sobre Ω. Quando $p = 2$ esses espaços são Hilbert's e recebem uma notação especial:

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega).$$

O produto interno de $H^m(\Omega)$ é dado por:

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leqslant m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)},$$

onde $(\cdot,\cdot)_{L^2(\Omega)}$ denota o produto interno de $L^2(\Omega)$.

Seja $m \in \mathbb{N}$. Por $W^{m,\infty}(\Omega)$ denotamos o espaço vetorial

$$W^{m,\infty}(\Omega) = \{u \in L^\infty(\Omega); D^\alpha u \in L^\infty(\Omega), \forall\ |\alpha| \leqslant m\},$$

com a norma

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, \forall\ u \in W^{m,\infty}(\Omega),$$

esse é um espaço de Banach e também é denominado espaço de Sobolev. Embora $C_0^\infty(\Omega)$ seja denso em $L^p(\Omega) = W^{0,p}(\Omega)$, em geral $C_0^\infty(\Omega)$ não é denso em $W^{m,p}(\Omega)$. Nesse sentido, denotaremos por $W_0^{m,p}(\Omega)$ o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ na norma $W^{m,p}(\Omega)$. Este é um espaço de Banach também chamado de espaço de Sobolev. No caso $p = 2$ temos os espaços $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$. O dual topológico de $W^{m,p}(\Omega)$ será denotado por $W^{-m,q}(\Omega)$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, que é constituído dos funcionais

$$T : W_0^{m,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

lineares contínuos.

Teorema 1.3.1. *(Desigualdade de Poincaré-Friedrichs): Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e limitado. Então existe uma constante $C_0 = C_0(\Omega) > 0$ tal que*

$$|u|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_0 |\nabla u|_{(L^2(\Omega))^N}.$$

Demonstração. Ver [25]. □

Corolário 1.3.1. *Em $H_0^1(\Omega)$ as normas do $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ e $|\nabla u|_{(L^2(\Omega))^N}$ são equivalentes.*

Demonstração. Ver [25]. □

Teorema 1.3.2. *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$, com fronteira Γ de classe C^2. Então a aplicação*

$$v \mapsto \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}$$

define em $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ uma norma equivalente à norma $H^2(\Omega)$. Em particular, $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$.

Demonstração. Ver [25]. □

Teorema 1.3.3. *(Teorema da Regularidade Elíptica). Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto limitado com fronteira* Γ. *Suponhamos que* $f \in L^2(\Omega)$. *Então existe uma única* $u \in H_0^1(\Omega)$ *solução fraca do problema*

$$\left| \begin{array}{lcll} -\Delta u & = & f & \textit{em} \quad \Omega \\ u & = & 0 & \textit{sobre} \quad \Gamma \end{array} \right.$$

isto é,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dx \ \ \textit{para toda } v \in H_0^1(\Omega).$$

Além disso, se Γ *é de classe* C^2 *então* $u \in H^2(\Omega)$ *e existe uma constante* C *que depende apenas de* Ω *tal que*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver [11]. □

Teorema 1.3.4. *(Teorema Espectral). Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto limitado. Existem uma sequência de números reais* $(\lambda_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *tais que*

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots,$$

$$\lambda_m \to \infty \ \textit{quando} \ m \to \infty,$$

e uma base hilbertiana $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *de* $L^2(\Omega)$, *tais que,* $v_m \in H_0^1(\Omega)$ *e*

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta v_j = \lambda_j v_j \ \ \text{em} \ \ \Omega; \\ v_j = 0 \ \ \text{sobre} \ \ \Gamma, \end{array} \right.$$

para $j = 1, 2, \cdots$. *Dizemos que os números* λ_m *são os autovalores de* $-\Delta$ *(com a condição de Dirichlet) e que as* v_m *são as funções próprias associadas. Se além disso,* Ω *possuir fronteira* Γ *de classe* C^2 *então temos que* $v_m \in H^2(\Omega)$.

Demonstração. Ver [11] ou [25]. □

1.4 Os espaços de Banach $L^p(0, T; X)$ e Distribuições Vetoriais

Os espaços $L^p(0, T; X)$ são de grande utilidade para o nosso estudo e são usados com grande frequência em Equações Diferenciais Parciais, principalmente quando o espaço de Banach X é um espaço de Sobolev.

Teorema 1.4.1. *(Bochner). Uma função* $u : (a, b) \to X$ *é* $\mathcal{B}$*-integrável se, e somente se, é fortemente mensurável e a função numérica* $t \mapsto \|u(t)\|$ *é integrável.*

Demonstração. Ver [23]. □

Aqui dizemos que uma função vetorial $u : (a, b) \to X$ é *fortemente mensurável* quando existir uma sequência de funções simples f_n tal que $f_n(t) \to f(t)$ em X, quase sempre em $(0, T)$.

Corolário 1.4.1. *Se* $u : (a, b) \to X'$ *é* $\mathcal{B}$*-integrável, então para cada* $v \in X$ *temos*

$$\left\langle \int_a^b u(t)dt, v \right\rangle = \int_a^b \langle u(t), v\rangle dt.$$

Definição 1.4.1. *Sejam* X *um espaço de Banach real, cujo dual topológico é denotado por* X'*, e* $(0, T) \subset \mathbb{R}$ *um intervalo. O espaço* $L^p(0, T; X)$*,* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *é o espaço vetorial das (classes de) funções vetoriais* $f : (0, T) \to X$*, definidas quase sempre em* $(0, T)$ *com valores em* X*, fortemente mensuráveis e tais que a função numérica* $t \mapsto \|f(t)\|_X$ *está em* $L^p(0, T)$*.*

Como a função numérica $t \mapsto \|f(t)\|_X$ está em $L^p(0, T)$, nos permite definir a seguinte norma:

$$\|f\|_{p,X} = \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad se \;\; 1 \leqslant p < \infty$$

e

$$\|f\|_{\infty,X} = \sup_{0<t<T} \text{ess } \|u(t)\|_X.$$

Os espaços $L^p(0, T; X)$ e $L^\infty(0, T; X)$ são espaços de Banach munido com as normas acima (Ver [23]). Um caso particularmente importante é quando $p = 2$ e X for um espaço de Hilbert. Nesse caso, o espaço $L^2(0, T; X)$ é um espaço de Hilbert munido com o produto interno

$$(u, v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt, \quad \forall\, u, v \in L^2(0, T; X).$$

Lema 1.4.1. *Sejam* X *e* Y *dois espaços de Banach e suponhamos* $X \hookrightarrow Y$*. Se* $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$*, então*

$$L^p(0, T; X) \hookrightarrow L^q(0, T; Y).$$

Demonstração. Ver [23] □

Teorema 1.4.2. *Sejam* X *um espaço de Banach e* X' *o seu dual. Existe uma identificação entre os espaços* $L^p(0,T;X)'$ *e* $L^q(0,T;X')$*, onde* $p,q \in \mathbb{R}$*, com* $1 \leqslant p < \infty$ *tais que* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$*, isto é,*

$$L^p(0,T;X)' \simeq L^q(0,T;X').$$

A dualidade entre os espaços $L^p(0,T;X)' \simeq L^q(0,T;X')$ *e* $L^p(0,T;X)$ *é dado por*

$$\langle u,v\rangle_{L^q(0,T;X'),L^p(0,T;X)} = \int_0^T \langle u(t),v(t)\rangle_{X',X}dt.$$

Demonstração. Ver [23] e [36]. □

Com esta identificação, os espaços $L^p(0,T;X)$ herdam as propriedades básicas do espaço de Banach X. Se X é reflexivo então $L^p(0,T;X)$ será reflexivo para $1 < p < \infty$, e se X for separável, entao $L^p(0,T;X)$ também será separável, para $1 \leqslant p < \infty$ (Ver [23]).

O resultado abaixo mostra que tal dualidade em forma de integral está bem definida.

Lema 1.4.2. *Se* p *e* q *são índices conjugados,* $u \in L^p(0,T;X)$ *e* $v \in L^q(0,T;X')$*, então a função real* $t \mapsto \langle u(t),v(t)\rangle_{X',X}$ *está em* $L^1(0,T)$.

Demonstração. Ver [23]. □

Definição 1.4.2. *Definimos o espaço das distribuições vetoriais sobre* $(0,T)$ *com valores em* X*, e denotamos por* $\mathcal{L}(D(0,T),X)$ *ou* $\mathcal{D}'(0,T;X)$*, como sendo o espaço das aplicações lineares e contínuas de* $\mathcal{D}(0,T)$ *em* X.

Seja $u \in L^p(0,T;X)$ e $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$. Associamos a cada u a aplicação τ_u de $\mathcal{D}(0,T)$ em X, definida por

$$\langle \tau_u, \varphi\rangle = \int_0^T u(t)\varphi(t)dt.$$

A aplicação τ_u, acima definida, é linear e contínua em $\mathcal{D}(0,T)$. Portanto, τ_u é uma distribuição em $(0,T)$.

Dada qualquer distribuição vetorial S, define-se sua derivada de ordem n por

$$\left\langle \frac{d^nS}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle S, \frac{d^n\varphi}{dt^n} \right\rangle,$$

para toda $\varphi \in D(0,T)$. $\dfrac{d^nS}{dt^n}$ também é uma distribuição vetorial. Conclui-se que toda $u \in L^p(0,T;X)$ possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições vetoriais sobre $(0,T)$.

Lema 1.4.3. *Se* $u \in L^1(0,T;X)$ *e*

$$\int_0^T u(t)\varphi(t)dt = 0$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$*, então* $u(t) = 0$ *q.s. em* $(0,T)$*.*

Demonstração. Ver [24] □

Lema 1.4.4. *Se* $u \in L^1(0,T;X)$ *e*

$$\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt = 0$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$*, então* u *é constante.*

Demonstração. Ver [24] □

Lema 1.4.5. *Seja* X *um espaço de Banach cujo dual é representado por* X'*. Se* u *e* g *pertencem a* $L^1(0,T;X)$*, então as seguintes condições são equivalentes:*

1. u *é igual quase sempre a uma primitiva de g, isto é*

$$u(t) = \xi + \int_0^t g(s)ds, \xi \in X, \quad \textit{independente de} \quad t;$$

2. *Para cada* $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$*, tem-se*

$$\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt = -\int_0^T g(t)\varphi(t)dt;$$

3. *Para cada* $x' \in X'$*,*

$$\frac{d}{dt}\langle u(t), x'\rangle = \langle g(t), x'\rangle$$

no sentido das distribuições sobre $(0,T)$*.*

Demonstração. Ver [24]. □

Corolário 1.4.2. *Sejam* X*,* Y *espaços de Banach, tais que* $X \hookrightarrow Y$ *e* $1 \leqslant p \leqslant \infty$*. Se*

$$u \in L^p(0,T;X) \quad \text{e} \quad \frac{du}{dt} \in L^p(0,T;Y)$$

então $u \in C^0([0,T];Y)$*.*

Demonstração. Ver [24] ou [21] □

Definição 1.4.3. *Sejam* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, I *um intervalo real e* X *um espaço de Banach.*

$$W^{m,p}(I;X) = \left\{u \in L^p(I;X); u^{(k)} \in L^p(I;X), \quad k = 1,2,...,m\right\}.$$

Munido com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(I;X)} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{m} \|u^{(j)}\|_{L^p(I;X)}, & se \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty \\ \displaystyle\sup_{t\in I} \text{ess} \left(\sum_{j=0}^{m} \|u^{(j)}(t)\|_X \right), & se \quad p = \infty \end{cases}$$

é um espaço de Banach. Quando $p = 2$ *o espaço* $W^{m,p}(I;X)$ *será denotado por* $H^m(I;X)$*. Além disso, se* X *é um espaço de Hilbert então* $H^m(I;X)$ *é também um espaço de Hilbert munido do produto interno*

$$(u,v)_{H^m(I;X)} = \sum_{j=1}^{m} (u^{(j)}, v^{(j)})_{L^2(I;X)} \quad para \quad u,v \in H^m(I;X).$$

Demonstração. Ver [1]. □

Definição 1.4.4. *Denotamos o espaço de Banach* $W_0^{m,p}(I;X)$ *como sendo o fecho de* $\mathcal{D}(I;X)$ *na norma* $\|\cdot\|_{W^{m,p}(I;X)}$*. Quando* $p = 2$ *o espaço* $W_0^{m,p}(I;X)$ *será denotado por* $H_0^m(I;X)$*. Por* $H^{-m}(I;X)$ *denotamos o dual topológico de* $H_0^m(I;X)$*. Temos ainda que*

$$W_0^{m,p}(I;X) = \{u \in W^{m,p}(I;X); \quad u(0) = 0 = u(T)\}.$$

Demonstração. Ver [1]. □

Teorema 1.4.3. *Seja* X *um espaço de Hilbert e* $u \in L^2(I;X)$*. Então existe um único funcional* $f \in H^{-1}(I;X)$ *que verifica*

$$\langle f, \theta\xi \rangle = (\langle u', \theta \rangle, \xi)_X \quad para\ toda \quad \theta \in \mathcal{D}(I) \quad e \quad \xi \in X.$$

Baseado nisto, identificamos f *com* u'*. Em razão disto, diremos que se* $u \in L^2(I;X)$ *então* $u' \in H^{-1}(I;X)$*.*

Demonstração. Ver [34]. □

Teorema 1.4.4. *Suponhamos que* $I = (0,T)$, $T > 0$ *e* X *um espaço de Banach. Então,*

$$W^{1,p}(I,X) \hookrightarrow C([0,T];X) \quad e \quad \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_X \leqslant C\|u(t)\|_{W^{1,p}(I,X)},$$

onde $C = C(T,p)$*.*

Demonstração. Ver [9]. □

Por $C_S([0,T];Y)$, representemos o espaço das funções fracamente contínuas de $[0,T]$ em Y. Isso significa que a aplicação $t \mapsto \langle u(t), y' \rangle$, é contínua em $[0,T]$ para todo $y' \in Y'$. Essas funções são também chamadas de funções escalares contínuas.

Teorema 1.4.5. *Sejam X, Y espaçõs de Banach, X reflexivo. Suponhamos que $X \subset Y$ densamente e $X \hookrightarrow Y$. Então*

$$L^\infty(0,T;X) \cap C_S([0,T];Y) = C_S([0,T];X).$$

Demonstração. Ver [24] □

Lema 1.4.6. *(Ehrling). Consideremos X, B e Y espaços de Banach. Suponhamos X reflexivo e imerso compactamente em B, e B imerso continuamente em Y. Nestas condições para cada $\alpha > 0$, existe uma constante c_α, tal que,*

$$\|u\|_B \leqslant \alpha \|u\|_X + c_\alpha \|u\|_Y, \;\; \forall u \in X$$

Demonstração. Ver [9]. □

Teorema 1.4.6. *(Aubin-Lions) Consideremos X, B e Y espaços de Banach, como no Lema 1.4.6 (Ehrling). Suponha $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência uniformemente limitada em $L^2(0,T;X)$, tal que $(\frac{du_n}{dt})_{n\in\mathbb{N}} = (u_n')_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^p(0,T;Y)$, para algum $p > 1$. Então, existe uma subsequência, de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que converge fortemente em $L^2(0,T;B)$.*

Demonstração. Ver [9]. □

Teorema 1.4.7. *(Teorema do Traço). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto, limitado e com fronteira Γ de classe C^{m+1}. Então existe uma aplicação linear $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_{m-1})$ de $H^m(\Omega)$ em $(L^2(\Gamma))^m$ tal que*

1. *Se $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, então $\gamma_0(u) = u\Big|_\Gamma$, $\gamma_1(u) = \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\Big|_\Gamma$,..., $\gamma_{m-1}(u) = \dfrac{\partial^{m-1} u}{\partial^{m-1}\eta}\Big|_\Gamma$, onde η é o vetor unitário normal exterior à Γ.*
2. *A imagem de γ é o espaço $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.*
3. *O núcleo de γ é $H_0^m(\Omega)$.*

Demonstração. Ver [26]. □

Teorema 1.4.8. *(Teorema de Gauss). Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *limitado com com fronteira* Γ *de classe* C^1 *e* $\eta = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_N)$ *o vetor normal exterior à* Γ*.*

- *Se* $u \in H^1(\Omega)$*, então*
$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \int_\Gamma u \eta_i d\Gamma.$$

- *Se* $u, v \in H^1(\Omega)$*, então*
$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_\Gamma (\gamma_0 u)(\gamma_0 v) \eta_i d\Gamma.$$

- *Se* $u = (u_1, ..., u_N) \in (H^1(\Omega))^N$*, então*
$$\int_\Omega div(u) dx = \int_\Gamma u \cdot \eta d\Gamma.$$

Demonstração. Ver [16]. □

Teorema 1.4.9. *(Fórmulas de Green). Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *limitado com com fronteira* Γ *de classe* C^2 *e* η *o vetor normal exterior à* Γ*. Se* $u, v \in H^2(\Omega)$*, então*

1. $\displaystyle\int_\Omega \Delta u dx = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} d\Gamma$;
2. $\displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = -\int_\Omega u \Delta v dx + \int_\Gamma u \frac{\partial v}{\partial \eta} d\Gamma$;
3. $\displaystyle\int_\Omega u \Delta v dx - \int_\Omega v \Delta u dx = \int_\Gamma u \frac{\partial v}{\partial \eta} d\Gamma - \int_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial \eta} d\Gamma.$

Demonstração. Ver [16] ou [26]. □

Teorema 1.4.10. *Sejam* $m \geqslant 1$ *um inteiro e* $p \in [1, +\infty)$*. Temos:*

1. *Se* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} > 0$*, então* $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$*, onde* $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N}$*;*
2. *Se* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} = 0$*, então* $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$*,* $\forall q \in [p, +\infty)$*;*
3. *Se* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} < 0$*, então* $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$*.*

Neste último caso, como $m - \frac{N}{p} > 0$ *consideremos*[1]

$$k = \left[m - \frac{N}{p}\right] \text{ e } \theta = m - \frac{N}{p} - k \ (0 < \theta < 1).$$

[1] [ ] denota a parte inteira.

Assim $\forall u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, *vale*

$$\|D^\alpha u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)}, \ \ \forall \alpha \text{ com } |\alpha| \leqslant k$$

e

$$|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leqslant C\|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)}|x-y|^\theta \text{ q.t.p } x, y \in \mathbb{R}^N, \forall \alpha \text{ tal que } |\alpha| = k.$$

Em particular, $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C^k(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Ver [6]. □

Corolário 1.4.3. *As conclusões do teorema (1.4.10) continuam verdadeiras se* $\mathbb{R}^N$ *for substituido por* Ω *um aberto limitado de classe* C^m*, ou por* $\Omega = \mathbb{R}^N_+$.

Demonstração. Ver [6]. □

Teorema 1.4.11. *(Rellich-Kondrachov). Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto limitado de classe* C^m, $m \geqslant 1$ *e* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Então as seguintes imersões são compactas:*

1. $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $1 \leqslant q < \dfrac{Np}{N-mp}$ *se* $mp < N$
2. $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $1 \leqslant q < \infty$ *se* $mp = N$
3. $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^k(\overline{\Omega})$, $k = \left[m - \dfrac{N}{p}\right]$ *se* $mp > N$.

Em particular, $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^p(\Omega)$ $\forall p \in [1, +\infty)$.

Demonstração. Ver [26]. □

Corolário 1.4.4. *Se* Ω *é qualquer aberto limitado do* $\mathbb{R}^N$*, os teoremas (1.4.10) e (1.4.11) são válidos para* $W^{m,p}_0(\Omega)$.

Demonstração. Ver [9]. □

Corolário 1.4.5. *Seja* Ω *aberto limitado do* $\mathbb{R}^N$, Ω *de classe* C^m, *e* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Se* $k \leqslant m$ *então:*

1. $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{k,q}(\Omega)$, *desde que* $1 \leqslant q < \dfrac{Np}{N-(m-k)p}$ *e* $(m-k)p < N$
2. $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{k,q}(\Omega)$, $1 \leqslant q < \infty$ *se* $(m-k)p = N$
3. $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^{k+\theta}(\overline{\Omega})$, $\theta = \left[m - k - \dfrac{N}{p}\right]$ *se* $(m-k)p > N$.

Demonstração. Ver [9] ou [26]. □

Capítulo 2

Soluções da Equação da Onda

Neste capítulo, faremos uma análise qualitativa da existência, unicidade e regularidade das soluções dos problemas:

$$\left| \begin{array}{l} u''(x,t) - \Delta u(x,t) + p(x,t)u(x,t) = f(x,t) \quad em \quad Q; \\ u = 0 \quad sobre \quad \Gamma \times (0,T); \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u'(x,0) = u_1(x) \quad em \quad \Omega, \end{array} \right. \tag{2.1}$$

e

$$\left| \begin{array}{l} z''(x,t) - \Delta z(x,t) + p(x,t)z(x,t) = f(x,t) \quad em \quad Q; \\ z = g \quad sobre \quad \Gamma \times (0,T); \\ z(x,0) = z_0(x), \quad z'(x,0) = z_1(x) \quad em \quad \Omega. \end{array} \right. \tag{2.2}$$

No que segue Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$, cuja fronteira Γ suficientemente regular, $0 < T < \infty$ fixado, porém arbitrário.

2.1 Solução Forte

Nesta seção, o objetivo é provar a existência e unicidade de solução para o problema (2.1), quando u_0, u_1 e f são funções dados bastante regulares.

Teorema 2.1. *Dado* $f \in C^1(\overline{\Omega} \times [0,T])$*, considerando* p*,* $p' \in L^\infty(Q)$ *e as condições iniciais* $(u_0, u_1) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$*, então existe uma única função* $u : Q \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(0,T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)); \\ u' &\in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)); \\ u'' &\in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)), \end{aligned} \tag{2.3}$$

e u *satisfaz* (2.1) *no seguinte sentido:*

$$\left| \begin{array}{l} u'' - \Delta u + pu = f \quad \textit{q.s. em} \quad Q; \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1 \quad \textit{em} \quad \Omega. \end{array} \right. \tag{2.4}$$

A função u é chamada de solução forte (2.1).

Demonstração. A demonstração será feita por etapas. Para existência, utilizaremos o Método de Faedo-Garlekin e para unidade o Método da Energia. Consideraremos uma sequência $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $H_0^1(\Omega)$ fornecida pelo Teorema Espectral 1.3.4, a qual forma uma base hilbertiana de $L^2(\Omega)$ e como Γ é de classe C^2, temos ainda que $v_m \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Etapa I - Existência.

- **Problema Aproximado**

Seja $V_m = [v_1, v_2, \cdots, v_m]$ o subespaço de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ gerado pelos m primeiros autovetores da base $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$. O problema aproximado consiste em determinar funções $u_m : [0, t_m) \to V_m$ tais que

$$u_m(x,t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) v_j(x), \tag{2.5}$$

satisfazendo o seguinte sistema

$$\left| \begin{array}{l} \left(u_m''(t), v\right) + a\left(u_m(t), v\right) + \left(p(t)u_m(t), v\right) = \left(f(t), v\right) \quad \text{para todo} \quad v \in V_m; \\ u_m(0) = u_{0m} \to u_0 \quad \text{forte em} \quad H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega); \\ u_m'(0) = u_{1m} \to u_1 \quad \text{forte em} \quad H_0^1(\Omega), \end{array} \right. \tag{2.6}$$

onde u_{0m} e u_{1m} pertencem a V_m. As convergências anteriores fazem sentido, pois o conjunto formado pelas combinações lineares de elementos de $\{v_m; m \in \mathbb{N}\}$ é denso em $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Substituindo (2.5) em (2.6) e fazendo $v = v_k$, para $1 \leqslant k \leqslant m$, resulta que

$$g_{km}'' + \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) a\left(v_j, v_k\right) + \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\left(p(t) v_j, v_k\right) = \left(f(t), v_k\right) \quad \text{para} \quad 1 \leqslant k \leqslant m. \tag{2.7}$$

Fazendo $t = 0$ em (2.5), tomando o produto interno com v_j e observando $(2.6)_2$, temos que

$$(u_{0m}, v_j) = g_{jm}(0) \quad \text{para} \quad 1 \leqslant j \leqslant m. \tag{2.8}$$

Derivando (2.5) e procedendo de modo análogo, resulta

$$(u_{1m}, v_j) = g_{jm}'(0) \quad \text{para} \quad 1 \leqslant j \leqslant m. \tag{2.9}$$

Com isto transformamos o problema (2.6) em um sistema de equações diferenciais ordinárias das funções g_{jm}. Observemos que para determinar u_m é suficiente determinarmos as g_{jm} e para isto utilizaremos o Teorema de Carathéodory. De fato, definindo:

$$A_m = [a(v_k, v_j)]_{m\times m}\,; \quad B_m(t) = [(p(t)v_k, v_j)]_{m\times m}\,; \quad G_m(t) = [g_{jm}(t)]_{m\times 1}\,;$$
$$H_m(t) = [(f(t), v_j)]_{m\times 1}\,; \quad X_{0m} = [(u_{0m}, v_j)]_{m\times 1}\,; \quad X_{1m} = [(u_{1m}, v_j)]_{m\times 1}\,,$$

de (2.7), (2.8) e (2.9), resulta que

$$\left|\begin{array}{l} G''_m(t) + A_m G_m(t) + B_m(t) G_m(t) = H_m(t); \\ G_m(0) = X_{0m}, \quad G'_m(0) = X_{1m}. \end{array}\right. \tag{2.10}$$

Agora, transformaremos (2.10) em um sistema de primeira ordem. De fato, sejam $Z_m(t) = \big(G_m(t), G'_m(t)\big)$ e $F_m : [0,T] \times \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m}$, $F_m(t,X,Y) = (Y, H_m(t) - A_m X - B_m(t)X)$. De (2.10) segue que

$$\left|\begin{array}{l} Z'_m(t) = F_m(t, Z_m(t)); \\ Z_m(0) = Z_{0m} := (X_{0m}, X_{1m})\,. \end{array}\right. \tag{2.11}$$

Adiante, veremos que F_m está nas *condições de Carathéodory* conforme definição 1.1.1. Seja $D = B \times [0,T]$ e $b > 0$, onde $B = \{Z = (X,Y) \in \mathbb{R}^{2m}; \|Z\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leqslant b\}$. Então,

1. $F_m(Z,t)$ é mensurável em t, para cada $Z = (X,Y)$ fixo.

   De fato, A_m não depende de t e $B_m(t)$, $H_m(t)$ pertencem a $L^1(0,T)$.

2. $F_m(Z,t)$ é contínua em Z, para todo t fixo.

   Basta observar que as projeções são contínuas.

3. Para cada compacto $K \subset D$, existe uma função real integrável $m_K(t)$ tal que $|F_m(Z,t)| \leqslant m_K(t)$, para todo $(Z,t) \in K$.

   Sendo K compacto, $\|Z\| \leqslant C$, então

   $$\begin{aligned} \|F_m(Z,t)\|_{\mathbb{R}^{2m}} &\leqslant \|Y\|_{\mathbb{R}^m} + \|H_m(t)\|_{\mathbb{R}^m} + \|A_m\|_{M_m(\mathbb{R})}\|X\|_{\mathbb{R}^m} + \|B_m(t)\|_{M_m(\mathbb{R})}\|X\|_{\mathbb{R}^m} \\ &\leqslant C + \|H_m(t)\|_{\mathbb{R}^m} + C\left(\|A_m\|_{M_m(\mathbb{R})} + \|B_m(t)\|_{M_m(\mathbb{R})}\right) \\ &:= m_K(t). \end{aligned}$$

   Assim, $m_K(t)$ é integrável, um vez que $t \to (f(t), v_j)$ e $t \to (p(t)v_i, v_j)$ são funções de $L^1(0,T)$.

Como consequência do Teorema de Carathéodory 1.1.8, temos que u_m existe e satisfaz (2.6) para $t_m \leqslant T$. Além disso, u_m e u_m' são absolutamente contínuas.

Adiante obteremos estimativas para estender as soluções à $[0,T]$ e passar o limite em m no problema aproximado (2.6).

- **Estimativa I**

Tomando $v = u_m'(t)$ em $(2.6)_1$, resulta

$$\left(u_m''(t), u_m'(t)\right) + a\left(u_m(t), u_m'(t)\right) + \left(p(t)u_m(t), u_m'(t)\right) = \left(f(t), u_m'(t)\right). \tag{2.12}$$

Considerando,

$$E_m(t) = \frac{1}{2}|u_m'(t)|^2 + \frac{1}{2}\|u_m(t)\|^2$$

obtemos de (2.12) que

$$\frac{d}{dt}E_m(t) + \left(p(t)u_m(t), u_m'(t)\right) = \left(f(t), u_m'(t)\right).$$

Utilizando as Desigualdades de Cauchy-Schwarz, Young e Poincaré-Friedrichs, segue que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E_m(t) &\leqslant \|p\|_{L^\infty(Q)}|u_m(t)||u_m'(t)| + |f(t)||u_m'(t)| \\ &\leqslant C\|p\|_{L^\infty(Q)}E_m(t) + \sqrt{2}|f(t)|\sqrt{E_m(t)}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Observando que $\frac{d}{dt}\sqrt{E_m(t)} = \frac{1}{2\sqrt{E_m(t)}}\frac{d}{dt}E_m(t)$ e dividindo (2.13) por $2\sqrt{E_m(t)}$ obtemos que

$$\frac{d}{dt}\sqrt{E_m(t)} \leqslant \frac{C}{2}\|p\|_{L^\infty(Q)}\sqrt{E_m(t)} + \frac{1}{\sqrt{2}}|f(t)|.$$

Integrando em $[0,t]$ com $t \leqslant t_m$ e utilizando a Desigualdade de Gronwall, resulta que

$$\sqrt{E_m(t)} \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^T |f(s)|ds + \sqrt{E_m(0)}\right)e^{\frac{C}{2}\|p\|_{L^\infty(Q)}T}.$$

Daí, segue que

$$E_m(t) \leqslant \left(\left(\int_0^T |f(s)|ds\right)^2 + 2E_m(0)\right)e^{C\|p\|_{L^\infty(Q)}T}.$$

Das convergências em $(2.6)_2$ e $(2.6)_3$, temos que $E_m(0)$ é limitada e consequentemente $E_m(t)$ é limitado por uma constante $C_1 > 0$, que independe de t_m e de $m \in \mathbb{N}$. Isto é,

$$|u_m'(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2 \leqslant C_1, \quad t \in [0, t_m) \text{ e para todo } m \in \mathbb{N}. \tag{2.14}$$

Logo,

$$|G_m'(t)|^2_{\mathbb{R}^m} = \sum_{j=1}^m |g_{jm}'(t)|^2 = \left|\sum_{j=1}^m g_{jm}'(t)v_j\right|^2 = |u_m'(t)|^2 \leqslant C_1.$$

Analogamente, como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, temos

$$|G_m(t)|^2_{\mathbb{R}^m} = \sum_{j=1}^{m} |g_{jm}(t)|^2 = \left| \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) v_j \right|^2 = |u_m(t)|^2 \leqslant C_2 \|u_m(t)\|^2 \leqslant C_3.$$

Segue que

$$\|Z_m(t)\|^2_{\mathbb{R}^{2m}} = |G_m(t)|^2_{\mathbb{R}^m} + |G'_m(t)|^2_{\mathbb{R}^m} \leqslant K,$$

para todo $t \in [0, t_m)$ e $m \in \mathbb{N}$, onde K é uma constante positiva. Desta forma, pelo corolário 1.1.2 podemos prolongar Z_m à todo o intervalo $[0, T]$ e a desigualdade em (2.14) permanece válida para todo $t \in [0, T]$ e para todo $m \in \mathbb{N}$. Consequentemente podemos estender u_m à todo $[0, T]$, e além disso temos também

$$\begin{aligned} &(u_m) \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)); \\ &(u'_m) \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \end{aligned} \tag{2.15}$$

- **Estimativa II**

Derivando $(2.6)_1$ em relação à t, resulta

$$\left(u'''_m(t), v\right) + a\left(u'_m(t), v\right) + \left(p'(t) u_m(t), v\right) + \left(p(t) u'_m(t), v\right) = \left(f'(t), v\right).$$

Tomando $v = 2u''_m$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|u''_m(t)|^2 + \frac{d}{dt}\|u'_m(t)\|^2 &= -2\left(p'(t)u_m(t), u''_m(t)\right) - 2\left(p(t)u'_m(t), u''_m(t)\right) \\ &\quad +2\left(f'(t), u''_m(t)\right). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Usando as Desigualdades de Cauchy-Schwarz, Young e Poincaré, e a limitação de $(2.15)_1$, obtemos

$$\begin{aligned} & -2\left(p'(t)u_m(t), u''_m(t)\right) - 2\left(p(t)u'_m(t), u''_m(t)\right) + 2\left(f'(t), u''_m(t)\right) \\ \leqslant\ & 2\|p'\|_{L^\infty(Q)}|u_m(t)||u''_m(t)| + 2\|p'\|_{L^\infty(Q)}|u'_m(t)||u''_m(t)| + 2|f'(t)||u''_m(t)| \\ \leqslant\ & \|p'\|_{L^\infty(Q)}\left(|u_m(t)|^2 + |u''_m(t)|^2\right) + \|p'\|_{L^\infty(Q)}\left(|u'_m(t)|^2 + |u''_m(t)|^2\right) \\ & +|f'(t)|^2 + |u''_m(t)|^2 \\ \leqslant\ & C + C\left(\|u'_m(t)\|^2 + |u''_m(t)|^2\right). \end{aligned}$$

Substituindo em (2.16), resulta que

$$\frac{d}{dt}|u''_m(t)|^2 + \frac{d}{dt}\|u'_m(t)\|^2 \leqslant C + C\left(\|u'_m(t)\|^2 + |u''_m(t)|^2\right).$$

Integrando em $[0,t]$ com $t \leqslant T$, segue que

$$|u''_m(t)|^2 + \|u'_m(t)\|^2 \leqslant |u''_m(0)|^2 + \|u_{1m}\|^2 + CT + C\int_0^t \left(\|u'_m(s)\|^2 + |u''_m(s)|^2\right) ds. \quad (2.17)$$

Vejamos agora que $(u''_m(0))_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(\Omega)$, pois objetivamos aplicar a Desigualdade de Gronwall. De fato, como p, $p' \in L^\infty(Q)$ pelo corolário 1.4.2 faz sentido $p(0) \in L^\infty(\Omega)$. Fazendo $t = 0$ e $v = u''_m(0)$ em $(2.6)_1$, temos que

$$\left|u''_m(0)\right|^2 + a\left(u_{0m}, u''_m(0)\right) + \left(p(0)u_{0m}, u''_m(0)\right) = \left(f(0), u''_m(0)\right).$$

Como $u''_m(0) \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ resulta da Fórmula de Green que $a\left(u_{0m}, u''_m(0)\right) = -\left(\Delta u_{0m}, u''_m(0)\right)$ e da Desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos que

$$\begin{aligned} \left|u''_m(0)\right|^2 &= \left(\Delta u_{0m}, u''_m(0)\right) - \left(p(0)u_{0m}, u''_m(0)\right) + \left(f(0), u''_m(0)\right) \\ &\leqslant |\Delta u_{0m}||u''_m(0)| + \|p\|_{L^\infty(Q)}|u_{0m}||u''_m(0)| + |f(0)||u''_m(0)|. \end{aligned}$$

Deste modo,

$$|u''_m(0)| \leqslant |\Delta u_{0m}| + \|p\|_{L^\infty(Q)}|u_{0m}| + |f(0)|. \quad (2.18)$$

Da convergência $(2.6)_2$ e de (2.18) obtemos a limitação desejada, isto é, de $(u''_m(0))_{m\in\mathbb{N}}$ em $L^2(\Omega)$. Com isto, e de $(2.6)_3$ e (2.17) obtemos uma constante $K > 0$ satisfazendo

$$|u''_m(t)|^2 + \|u'_m(t)\|^2 \leqslant K + K\int_0^t \left(\|u'_m(s)\|^2 + |u''_m(s)|^2\right) ds.$$

Da Desigualdade de Gronwall, resulta que

$$|u''_m(t)|^2 + \|u'_m(t)\|^2 \leqslant Ke^{KT}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} &(u'_m) \ \text{ é limitada em } \ L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega)); \\ &(u''_m) \ \text{ é limitada em } \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \end{aligned} \quad (2.19)$$

- **Passagem ao limite no Problema Aproximado**

Do teorema 1.4.2 temos as seguintes identificações

$$[L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))]' \simeq L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega));$$

$$[L^1(0,T;L^2(\Omega))]' \simeq L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Como $L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))$ e $L^1(0,T;L^2(\Omega))$ são espaços separáveis e observando as limitações em (2.15) e (2.19) segue do teorema 1.1.6 que existe uma subsequência, que ainda denotaremos por $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$, tal que

$$\left|\begin{array}{lll} u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u & \text{em} & L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)); \\ u_m' \overset{*}{\rightharpoonup} \zeta & \text{em} & L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)); \\ u_m'' \overset{*}{\rightharpoonup} \xi & \text{em} & L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \end{array}\right. \tag{2.20}$$

Mostraremos agora que $\zeta = u'$ e $\xi = u''$. De fato, por $(2.20)_1$ temos que $u_m \to u$ em $\mathcal{D}'(Q)$ e como o operador derivada é contínuo, então

$$\left|\begin{array}{lll} u_m \to u & \text{em} & \mathcal{D}'(Q); \\ u_m' \to u' & \text{em} & \mathcal{D}'(Q); \\ u_m'' \to u'' & \text{em} & \mathcal{D}'(Q). \end{array}\right.$$

Por outro lado de $(2.20)_2$ e $(2.20)_3$, segue que

$$\left|\begin{array}{lll} u_m' \to \zeta & \text{em} & \mathcal{D}'(Q); \\ u_m'' \to \xi & \text{em} & \mathcal{D}'(Q). \end{array}\right.$$

Da unicidade do limite em $\mathcal{D}'(Q)$, resulta que

$$u_m' = \zeta \ \text{ e } \ u_m'' = \xi.$$

Portanto, de (2.20), temos que

$$\left|\begin{array}{lll} u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u & \text{em} & L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)); \\ u_m' \overset{*}{\rightharpoonup} u' & \text{em} & L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)); \\ u_m'' \overset{*}{\rightharpoonup} u'' & \text{em} & L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \end{array}\right. \tag{2.21}$$

Agora passaremos o limite no problema aproximado $(2.6)_1$. Fixemos m_0 arbitrário e tomemos $m > m_0$. Multiplicando $(2.6)_1$ por $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando de 0 a T, obtemos

$$\int_0^T (u_m''(t),v)\theta(t)dt + \int_0^T a(u_m(t),v)\theta(t)dt + \int_0^T (p(t)u_m(t),v)\theta(t)dt = \int_0^T (f(t),v)\theta(t)dt$$

para todo $v \in V_{m_0}$. Fazendo $m \to \infty$ e observando as convergências em (2.21), resulta que

$$\int_0^T (u''(t),v)\theta(t)dt + \int_0^T a(u(t),v)\theta(t)dt + \int_0^T (p(t)u(t),v)\theta(t)dt = \int_0^T (f(t),v)\theta(t)dt \tag{2.22}$$

para todo $v \in V_{m_0}$. Como $[v_1, v_2, \cdots]$ é denso em $H_0^1(\Omega)$ e passando o limite em m_0, obtemos que (2.22) é válido para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$.

Seja $F(t) = -u''(t) - p(t)u(t) + f(t)$. Notemos que devido a regularidade de u e u'', temos que $F(t) \in L^2(\Omega)$ q.s. em $(0,T)$, mais ainda, $F \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Além disso, para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, $t \mapsto a(u(t),v)$ e $t \mapsto (F(t),v)$ pertencem a $L^1(0,T)$. Deste modo definem distribuições sobre $(0,T)$ e observando (2.22) temos

$$\langle a(u,v),\theta\rangle = \langle (F,v),\theta\rangle, \quad \text{para todo } \theta \in \mathcal{D}(0,T).$$

Assim, pelo Lema de Du Bois Raymond, segue que

$$a(u(t),v) = (F(t),v) \ \text{ q.s. em } (0,T) \ \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Assim, como $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ q.s. em $(0,T)$, então $u(t)$ é quase sempre solução fraca em $(0,T)$ da equação:

$$\left|\begin{array}{lcll} -\Delta u(t) & = & F(t) & \text{em } \ \Omega \\ u(t) & = & 0 & \text{sobre } \ \Gamma. \end{array}\right.$$

Como Γ é de classe C^2 então pelo Teorema da Regularidade Elíptica, $u(t) \in H^2(\Omega)$ q.s. em $(0,T)$ e existe uma constante $C > 0$, depedendo somente de Ω, tal que

$$\|u(t)\|_{H^2(\Omega)} \leqslant C\|F(t)\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.23}$$

Como $F \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, segue de (2.23) que $u \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$ e observando $(2.21)_1$, ganhamos que

$$u \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)). \tag{2.24}$$

Da Fórmula de Green, segue que

$$a(u(t),v) = -(\Delta u(t),v) \ \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.25}$$

Substituindo (2.25) em (2.22), resulta que

$$\int_0^T (u''(t),v)\theta(t)dt + \int_0^T (-\Delta u(t),v)\theta(t)dt + \int_0^T (p(t)u(t),v)\theta(t)dt = \int_0^T (f(t),v)\theta(t)dt \tag{2.26}$$

para todo $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$. Sendo $\left\{\sum_{finita} \theta v; \theta \in \mathcal{D}(0,T) \ \text{ e } \ v \in \mathcal{D}(\Omega)\right\}$ denso em $\mathcal{D}(Q)$, segue de (2.26) que

$$\int_Q u''\omega dxdt - \int_Q \Delta u\omega dxdt + \int_Q pu\omega dxdt = \int_Q f\omega dxdt$$

para todo $\omega \in \mathcal{D}(Q)$. Portanto, do Lema de Du Bois Raymond temos que

$$u'' - \Delta u + pu = f \text{ q.s. em } Q.$$

Logo, u satisfaz $(2.4)_1$. As regularidades (2.3) seguem de $(2.21)_2$, $(2.21)_3$ e (2.24).

Etapa II - Verificação das Condições Iniciais.

De (2.3) e do corolário 1.4.2 resulta que

$$u \in C^0([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T]; L^2(\Omega)). \tag{2.27}$$

Logo, $u(0)$ e $u'(0)$ fazem sentido.

- $u(0) = u_0$

Seja θ uma função real tal que $\theta \in C^1([0,T])$, $\theta(0) = -1$ e $\theta(T) = 0$. De $(2.21)_2$, temos que

$$u'_m \overset{*}{\rightharpoonup} u' \text{ em } L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0,T; L^2(\Omega)).$$

Portanto, para todo $v \in L^2(\Omega)$, é verdade que $\theta v \in L^1(0,T; L^2(\Omega))$ e

$$\int_0^T (u'_m(t), v)\theta dt \to \int_0^T (u'(t), v)\theta dt.$$

Integrando por partes, segue que

$$(u_{m0}, v) - \int_0^T (u_m(t), v)\theta' dt \to (u(0), v) - \int_0^T (u(t), v)\theta' dt. \tag{2.28}$$

Analogamente, de $(2.21)_1$ obtemos que

$$\int_0^T (u_m(t), v)\theta' dt \to \int_0^T (u(t), v)\theta' dt. \tag{2.29}$$

De (2.28) e (2.29) resulta $(u_{m0}, v) \to (u(0), v)$ para toda $v \in L^2(\Omega)$, isto é, $u_{m0} \rightharpoonup u(0)$ em $L^2(\Omega)$. De $(2.6)_2$, segue que $u_{m0} \rightharpoonup u_0$ em $L^2(\Omega)$, e pela unicidade do limite fraco temos que

$$u(0) = u_0 \text{ em } L^2(\Omega).$$

- $u'(0) = u_1$

Considere a função θ como anteriormente. Fixado m_0 arbitrário, seja $m > m_0$. Multiplicando $(2.6)_1$ por θ e integreando em $[0,T]$, obtemos

$$\int_0^T (u''_m(t), v)\theta dt + \int_0^T a(u_m(t), v)\theta dt + \int_0^T (p(t)u_m(t), v)\theta dt = \int_0^T (f(t), v)\theta dt,$$

para toda $v \in V_{m_0}$. Utilizando integração por partes na primeira parcela, resulta

$$(u_{1m}, v) - \int_0^T (u_m'(t), v)\theta' dt + \int_0^T a(u_m(t), v)\theta dt + \int_0^T (p(t)u_m(t), v)\theta dt = \int_0^T (f(t), v)\theta dt,$$

para toda $v \in V_{m_0}$. Fazendo $m \to \infty$ e observando as convergências em $(2.6)_3$ e (2.21), obtemos

$$(u_1, v) - \int_0^T (u'(t), v)\theta' dt + \int_0^T a(u(t), v)\theta dt + \int_0^T (p(t)u(t), v)\theta dt = \int_0^T (f(t), v)\theta dt, \quad (2.30)$$

para toda $v \in V_{m_0}$. Porém, como m_0 é arbitrário, (2.30) é válido para todo $v \in [v_1, v_2, \cdots]$. Sendo este último conjunto denso em $H_0^1(\Omega)$, concluimos que (2.30) é válido para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

Por outro lado, $v\theta \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$ e em vista de $(2.4)_1$ e (2.3) segue que $u'' - \Delta u + pu = f$ pertence à $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$. Portanto,

$$\int_0^T (u''(t), v)\theta dt - \int_0^T (\Delta u(t), v)\theta dt + \int_0^T (p(t)u(t), v) dt = \int_0^T (f(t), v)\theta dt.$$

Integrando por partes na primeira parcela e usando a Fórmula de Green na segunda, resulta que

$$(u'(0), v) - \int_0^T (u'(t), v)\theta' dt + \int_0^T a(u(t), v)\theta dt + \int_0^T (p(t)u(t), v) dt = \int_0^T (f(t), v)\theta dt. \quad (2.31)$$

De (2.30) e (2.31), concluimos que

$$(u'(0), v) = (u_1, v), \text{ para toda } v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.32)$$

Por densidade temos que (2.32) é válido para toda $v \in L^2(\Omega)$, logo

$$(u'(0), v) = (u_1, v), \text{ para toda } v \in L^2(\Omega).$$

Portanto, $u'(0) = u_1$.

Etapa III - Unicidade.

Suponhamos duas soluções fortes, u e $\tilde{u}$, do problema (2.1). Considerando $w = u - \tilde{u}$, então w é solução forte do seguinte problema

$$\left| \begin{array}{l} w'' - \Delta w + pw = 0 \;\; em \;\; Q; \\ w = 0 \;\; sobre \;\; \Gamma \times (0, T); \\ w(0) = 0, \;\; w'(0) = 0 \;\; em \;\; \Omega. \end{array} \right. \quad (2.33)$$

Multiplicando $(2.33)_1$ por $2w'$, integrando sobre Ω e utilizando a Fórmula de Green, temos

$$\int_\Omega 2w''(t)w'(t)dx + 2\int_\Omega a(w(t),w'(t))dx + 2\int_\Omega p(t)w(t)w'(t)dx = 0.$$

Portanto, utilizando as Desigualdades de Young e Poincaré, resulta

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|w'(t)|^2 + \frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 &\leqslant \|p\|_{L^\infty(Q)}|w(t)||w'(t)| \\
&\leqslant \|p\|_{L^\infty(Q)}\left(|w(t)|^2 + |w'(t)|^2\right) \\
&\leqslant C\|p\|_{L^\infty(Q)}\left(\|w(t)\|^2 + |w'(t)|^2\right).
\end{aligned}$$

Integrando de 0 a $t \leqslant T$ e observando $(2.33)_3$, obtemos

$$|w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2 \leqslant C\|p\|_{L^\infty(Q)}\int_0^t \left(\|w(s)\|^2 + |w'(s)|^2\right) ds.$$

Da Desigualdade de Gronwall segue que

$$|w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2 = 0.$$

Portanto, $|w(t)| = 0$ e assim $w = 0$ q.s. em Q. E assim concluimos a unicidade da solução forte.

□

2.2 Solução Fraca

Consideraremos agora o mesmo problema da seção 2.1, mas com hipóteses mais fracas. O procedimento a seguir nos levará de modo natural à definição de solução fraca.

Multipliquemos $(2.1)_1$ por v e tomemos o produto interno em $L^2(\Omega)$. Considerando $v \in H_0^1(\Omega)$ e utilizando a Fórmula de Green, obtemos

$$(u''(t),v) + a(u(t),v) + (p(t)u(t),v) = (f(t),v).$$

Multuplicando por $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando em $[0,T]$, segue que

$$\int_0^T (u''(t),v)\theta dt + \int_0^T a(u(t),v)\theta dt + \int_0^T (p(t)u(t),v)\theta dt = \int_0^T (f(t),v)\theta dt.$$

Integrando por partes a primeira parcela, resulta

$$-\int_0^T (u'(t),v)\theta' dt + \int_0^T a(u(t),v)\theta dt + \int_0^T (p(t)u(t),v)\theta dt = \int_0^T (f(t),v)\theta dt.$$

Passando para as distribuições, temos que:

$$\frac{d}{dt}(u'(t),v) + a(u(t),v) + (p(t)u(t),v) = (f(t),v),$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega)$, no sentido distribucional em $(0,T)$. Nestas condições u é chamada *solução fraca* de (2.1) quando também satisfizer as condições iniciais.

Teorema 2.2. *Dado* $f \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$*, considerando* p*,* $p' \in L^\infty(Q)$ *e as condições iniciais* $(u_0,u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$*, então existe uma única função* $u : Q \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega));$$
$$u' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega));$$
$$u'' \in L^1(0,T;H^{-1}(\Omega)),$$

e u *satisfaz* (2.1) *no seguinte sentido:*

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\left(u'(t),v\right) + a\left(u(t),v\right) + (p(t)u(t),v) = (f(t),v) \quad \textit{em} \;\; \mathcal{D}'(0,T); \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1 \;\; \text{em} \;\; \Omega, \end{array}\right. \tag{2.34}$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega)$.

Demonstração. Assim como na seção 2.1 o método da demonstração será o de Faedo-Garlekin. Consideremos a sequência $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$, base de $H_0^1(\Omega)$ e ortonormal em $L^2(\Omega)$ (para conseguir tal propriedade basta aplicarmos na base de $H_0^1(\Omega)$ o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt).

Etapa I - Existência.

- **Problema Aproximado**

O Problema Aproximado consiste em resolver $(2.34)_1$ no subespaço de dimensão finita V_m, para condições iniciais aproximadas, isto é, encontrar $u_m : [0,t_m) \to V_m$ satisfazendo:

$$\left|\begin{array}{l} \left(u_m''(t),v\right) + a\left(u_m(t),v\right) + (p(t)u_m(t),v) = (f(t),v) \quad \text{para todo} \;\; v \in V_m; \\ u_m(0) = u_{0m} \to u_0 \;\; \text{forte em} \;\; H_0^1(\Omega); \\ u_m'(0) = u_{1m} \to u_1 \;\; \text{forte em} \;\; L^2(\Omega), \end{array}\right. \tag{2.35}$$

onde u_{0m} e u_{1m} pertencem a V_m. A existência das soluções aproximadas, u_m para $t_m \leqslant T$, é feita de modo análogo ao que foi feito na seção 2.1.

- **Estimativa a priori**

Fazendo $v = u_m'(t)$ em $(2.35)_1$, de modo análogo ao que foi feito na seção 2.1, obtemos estivativa que garante, por meio do corolário de prolongamento de Carathéodory, estender as u_m's para o intervalo $[0,T]$. Além disso, ganhamos que

$$\begin{array}{ll} (u_m) \text{ é limitada em } & L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)); \\ (u_m') \text{ é limitada em } & L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \end{array} \tag{2.36}$$

- **Passagem ao limite**

Das limitações em (2.36) e prosseguindo como na seção 2.1, obtemos uma subsequência, que ainda denotaremos por $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$, tal que

$$\left| \begin{array}{lll} u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u & \text{em} & L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)); \\ u_m' \overset{*}{\rightharpoonup} u' & \text{em} & L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \end{array} \right. \tag{2.37}$$

Agora passaremos o limite no problema aproximado $(2.35)_1$. Fixemos m_0 arbitrário e tomemos $m > m_0$. Multiplicando $(2.35)_1$ por $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando de 0 a T, obtemos

$$\int_0^T (u_m''(t),v)\theta(t)dt + \int_0^T a(u_m(t),v)\theta(t)dt + \int_0^T (p(t)u_m(t),v)\theta(t)dt = \int_0^T (f(t),v)\theta(t)dt$$

para todo $v \in V_{m_0}$. Integrando por partes na primeira parcela, fazendo $m \to \infty$ e observando as convergências em (2.37), resulta que

$$-\int_0^T (u'(t),v)\theta'(t)dt + \int_0^T a(u(t),v)\theta(t)dt + \int_0^T (p(t)u(t),v)\theta(t)dt = \int_0^T (f(t),v)\theta(t)dt \tag{2.38}$$

para todo $v \in V_{m_0}$. Como $[v_1, v_2, \cdots]$ é denso em $H_0^1(\Omega)$ e passando o limite em m_0, obtemos que (2.22) é válido para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$.

Por outro lado a aplicação $t \mapsto (u'(t),v)$ é uma função de $L^1(0,T)$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Portanto, define uma distribuição em $(0,T)$. Assim, de (2.38) obtemos $(2.34)_1$.

- $u'' \in L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))$

Sendo $u' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))$, u' define uma distribuição vetorial $\widetilde{u}'$ dada por:

$$\langle \widetilde{u}', \varphi \rangle = \int_0^T u'(t)\varphi(t)dt \quad \in L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega),$$

onde $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$. Assim, $\widetilde{u}' \in \mathcal{D}'(0,T;H^{-1}(\Omega))$ e possui derivada no sentido das distribuições vetoriais, $(\widetilde{u}')'$ dado por:

$$\langle (\widetilde{u}')', \varphi\rangle = -\langle \widetilde{u}', \varphi'\rangle = -\int_0^T u'(t)\varphi'(t)dt \quad \in H^{-1}(\Omega).$$

Portanto, $(\widetilde{u}')' \in \mathcal{D}'(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Logo faz sentido calcular $\langle (\widetilde{u}')', \varphi\rangle$ aplicado em $v \in H_0^1(\Omega)$ e observando o corolário 1.4.1, temos:

$$\Big\langle \langle (\widetilde{u}')', \varphi\rangle, v\Big\rangle = -\left\langle \int_0^T u'(t)\varphi'(t)dt, v\right\rangle = -\int_0^T \langle u'(t)\varphi'(t), v\rangle dt = -\int_0^T (u'(t), v)\varphi'(t)dt,$$

resultando que,

$$\Big\langle \langle (\widetilde{u}')', \varphi\rangle, v\Big\rangle = \left\langle \frac{d}{dt}(u', v), \varphi\right\rangle. \tag{2.39}$$

Como $u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$, resulta que $-\Delta u \in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega)) \hookrightarrow L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Análogo ao que foi feito anteriormente, temos:

$$\Big\langle \langle (\widetilde{-\Delta u}), \varphi\rangle, v\Big\rangle = \left\langle -\int_0^T \Delta u(t)\varphi(t)dt, v\right\rangle = -\int_0^T \langle \Delta u(t)\varphi(t), v\rangle dt = \int_0^T a(u(t), v)\varphi(t)dt.$$

Logo,

$$\Big\langle \langle (\widetilde{-\Delta u}), \varphi\rangle, v\Big\rangle = \int_0^T a(u(t)v)\varphi(t)dt. \tag{2.40}$$

Como $p \in L^\infty(Q)$ e $u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ então $pu \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Analogamente, definimos a distribuição vetorial $\widetilde{pu}$ e vale:

$$\langle \langle \widetilde{pu}, \varphi\rangle, v\rangle = \left\langle \int_0^T p(t)u(t)\varphi(t)dt, v\right\rangle = \int_0^T (p(t)u(t), v)\varphi(t)dt. \tag{2.41}$$

Por fim, como $f \in L^1(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))$ e repetindo o procedimento, obtemos:

$$\Big\langle \langle \widetilde{f}, \varphi\rangle, v\Big\rangle = \left\langle \int_0^T f(t)\varphi(t)dt, v\right\rangle = \int_0^T (f(t), v)\varphi(t)dt. \tag{2.42}$$

Identificando u, Δu, pu e f com as distribuições que definem e como u satisfaz $(2.34)_1$, conclui-se de (2.39)-(2.42) que

$$u'' - \Delta u + pu = f \ \text{ em } \ \mathcal{D}'(0,T,H^{-1}(\Omega)).$$

Observando que

$$\Delta u - pu + f \quad \in \quad L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega)) + L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) + L^1(0,T;L^2(\Omega)),$$

logo, $\Delta u - pu + f \in L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Portanto, $u'' \in L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))$.

Etapa II - Verificação das Condições Iniciais.

O método ultilizado para verificar as condições iniciais é o mesmo que foi utilizado para a solução forte na seção 2.1. Por este motivo não repetiremos aqui.

Etapa III - Unicidade.

Sejam u e $\widetilde{u}$ duas soluções do problema 2.1 e definimos $w = u - \widetilde{u}$. Temos,

$$\left| \begin{array}{l} w'' - \Delta w + pw = 0 \ \ em \ \ Q; \\ w = 0 \ \ sobre \ \ \Gamma \times (0,T); \\ w(0) = 0, \ \ w'(0) = 0 \ \ em \ \ \Omega. \end{array} \right. \tag{2.43}$$

Observamos que não tem sentido compormos $w''(t)$ com $w'(t)$ na dualidade $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$ uma vez que $w'(t)$ pertence quase sempre a $L^2(\Omega)$. Assim, o método da energia usado para as soluções forte não pode ser usado. Para contornar este problema aplicaremos o Método devido a Visik-Ladyzhenskaya [38]. Como u, $\widetilde{u} \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$, então $\int_a^b w(t)dt \in H_0^1(\Omega)$ para todo $a, b \in [0,T]$. Tomemos, $s \in [0,T]$ e definamos a seguinte função auxiliar:

$$\psi(t) = \begin{cases} -\int_t^s w(\tau)d\tau, & 0 \leqslant t \leqslant s; \\ \quad 0 & s \leqslant t \leqslant T. \end{cases}$$

Observemos que para cada $t \in [0,T]$, $\psi(t) \in H_0^1(\Omega)$ e, além disso,

$$\|\psi(t)\| \ \leqslant \ \int_t^s \|w(\tau)\| d\tau \leqslant \sup\text{ess}\ \|w\|(s-t) \leqslant \sup\text{ess}\ \|w\| T < \infty$$

Logo, $\psi \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$.

Por outro lado, $w'' \in L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))$ e compondo a equação $w'' - \Delta w + pw = 0$ com a função ψ na dualidade $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \times L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))$, obtemos

$$\int_0^s \langle w'' - \Delta w + pw, \psi(t) \rangle dt = 0 \tag{2.44}$$

Observando que

$$\frac{d}{dt}\langle w'(t), \psi(t) \rangle = \langle w''(t), \psi(t) \rangle + \langle w'(t), \psi'(t) \rangle. \tag{2.45}$$

Observamos que $\psi'(t) = w(t)$ quase sempre em $[0,s]$, temos

$$\langle w'(t), \psi'(t) \rangle = \langle w'(t), w(t) \rangle = (w'(t), w(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2. \tag{2.46}$$

Portanto de (2.45) e (2.46) obtemos

$$\frac{d}{dt}(w'(t), \psi(t)) = \langle w''(t), \psi(t) \rangle + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2.$$

Integrando de 0 à s, resulta que

$$0 = \int_0^s \langle w''(t), \psi(t) \rangle dt + \frac{1}{2}|w(s)|^2,$$

e assim,

$$\int_0^s \langle w''(t), \psi(t) \rangle dt = -\frac{1}{2}|w(s)|^2. \tag{2.47}$$

Por outro lado, como $\psi'(t) = w(t)$ quase sempre em $[0, s]$, temos que

$$a(w(t), \psi(t)) = a(\psi'(t), \psi(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\psi(t)\|^2,$$

portanto, integrando, segue que

$$\int_0^s a(w(t), \psi(t)) = -\frac{1}{2}\|\psi(0)\|^2. \tag{2.48}$$

Substituindo (2.47) e (2.48) em (2.44), utilizando Desigualdades de Cauchy-Schwarz, Young e Poincaré-Friedrichs, obtemos

$$\begin{aligned} |w(s)|^2 + \|\psi(0)\|^2 &= 2\int_0^s (p(t)w(t), \psi(t))dt \\ &\leqslant \|p\|_{L^\infty(Q)} \int_0^s |w(t)|^2 + |\psi(t)|^2 dt \\ &\leqslant C\|p\|_{L^\infty(Q)} \int_0^s |w(t)|^2 + \|\psi(t)\|^2 dt. \end{aligned}$$

Como $\|\psi(s)\|^2 = 0 \leqslant \|\psi(0)\|^2$

$$|w(s)|^2 + \|\psi(s)\|^2 \leqslant C\|p\|_{L^\infty(Q)} \int_0^s |w(t)|^2 + \|\psi(t)\|^2 dt.$$

Da Desigualdade de Gronwall, segue que

$$|w(s)|^2 + \|\psi(s)\|^2 = 0,$$

o que implica que $w(s) = 0$ para todo $s \in [0, T]$, ou seja, $w = 0$, o que acarreta a unicidade. □

Por argumentos de densidade obteremos a regularidade da solução fraca de (2.1).

Teorema 2.3. *(Regularidade da Solução Fraca) A solução fraca, u, de* (2.1) *possui a seguinte regularidade:*

$$u \in C^0([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega)).$$

Demonstração. Seja $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ a sequência de soluções fortes com os dados iniciais e $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ satisfazendo:

$$\left|\begin{array}{llll} u_{0m} \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega) & \text{com} & u_{0m} \to u_0 & \text{forte em } \ H_0^1(\Omega); \\ u_{1m} \in H_0^1(\Omega) & \text{com} & u_{1m} \to u_1 & \text{forte em } \ L^2(\Omega); \\ f_m \in C^1(\overline{\Omega}\times[0,T]) & \text{com} & f_m \to f & \text{forte em } \ L^1(0,T;L^2(\Omega)). \end{array}\right. \tag{2.49}$$

De (2.27) temos que

$$u_m \in C^0([0,T];H_0^1(\Omega))\cap C^1([0,T];L^2(\Omega)) \ \text{ para todo } \ m\in\mathbb{N}.$$

Consideremos $m>n$. Temos que para todo $v\in H_0^1(\Omega)$ é verdade que:

$$(u_m''(t)-u_n''(t),v)+a(u_m(t)-u_n(t),v)+(p(t)(u_m(t)-u_n(t)),v)=(f_m(t)-f_n(t),v). \tag{2.50}$$

Como $u_m'(t)-u_n'(t)\in H_0^1(\Omega)$ q.s. em $(0,T)$, fazendo $v=u_m'(t)-u_n'(t)$ em (2.50) e de modo análogo ao realizado na Estimativa I, da seção 2.1, resulta:

$$\begin{gathered} |u_m'(t)-u_n'(t)|^2+\|u_m(t)-u_n(t)\|^2 \\ \leqslant 2\left(\|f_m-f_n\|^2_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}+|u_{1m}-u_{1n}|^2+\|u_{0m}-u_{0n}\|^2\right). \end{gathered} \tag{2.51}$$

Das convergências em (2.49) e de (2.51) ganhamos que a sequência $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $C^0([0,T];H_0^1(\Omega))\cap C^1([0,T];L^2(\Omega))$. Sendo $C^0([0,T];H_0^1(\Omega)$ e $C^1([0,T];L^2(\Omega)))$ espaços de Banach, obtemos

$$\left|\begin{array}{lll} u_m \to \alpha & em & C^0([0,T];H_0^1(\Omega)); \\ u_m' \to \beta & em & C^0([0,T];L^2(\Omega)). \end{array}\right. \tag{2.52}$$

Como $C^0([0,T];H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ e $C^0([0,T];L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, em particular, temos que

$$\left|\begin{array}{lll} u_m \overset{*}{\rightharpoonup} \alpha & \text{em} & L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)); \\ u_m' \overset{*}{\rightharpoonup} \beta & \text{em} & L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \end{array}\right. \tag{2.53}$$

Por outro lado, também resulta as limitações de $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ em $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ e de $(u_m')_{m\in\mathbb{N}}$ em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Procedendo analogamente à seção 2.1, e passando a uma subsequência se necessário, obtemos

$$\left|\begin{array}{lll} u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u & \text{em} & L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)); \\ u_m' \overset{*}{\rightharpoonup} u' & \text{em} & L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \end{array}\right. \tag{2.54}$$

De (2.53), (2.54) e da unicidade do limite, temos que

$$u=\alpha \ \text{ e } \ u'=\beta.$$

□

Proposição 2.1. *A solução fraca,* u*, de* (2.1) *satisfaz as seguintes desigualdades:*

$$|u'(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \|u(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leqslant C_1 \left(\|u_0\|^2_{H^1_0(\Omega)} + |u_1|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \right) \tag{2.55}$$

e

$$\|u'\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega))} + \|u\|_{C^0([0,T];H^1_0(\Omega))} \leqslant C_2 \left(\|u_0\|_{H^1_0(\Omega)} + |u_1|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \right)$$

para $C_j = C_j(\Omega, T, \|p\|_{L^\infty(\Omega)})$ $j = 1, 2$.

Demonstração. Consideremos a sequência $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de soluções fortes estabelecidas na demonstração do teorema 2.3. Logo, para cada $m \in \mathbb{N}$ e para todo $v \in H^1_0(\Omega)$, vale que

$$(u''_m(t), v) + a(u_m(t), v) + (p(t)u_m(t), v) = (f_m(t), v).$$

Tomando $v = u'_m(t) \in H^1_0(\Omega)$ e procedendo de modo análogo como na Estimativa I, da seção 2.1, obtemos

$$|u'_m(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2 \leqslant 2e^{C_0 T\|p\|_{L^\infty(Q)}} \left(\|f_m\|^2_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} + |u_{1m}|^2 + \|u_{0m}\|^2 \right).$$

Fazendo $m \to \infty$, usando (2.52) e as convergências de (2.49) obtemos

$$\begin{aligned} \|u'\|^2_{C^0([0,T];L^2(\Omega))} + \|u\|^2_{C^0([0,T];H^1_0(\Omega))} &\leqslant C_2 \left(\|f\|^2_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} + |u_1|^2 + \|u_0\|^2 \right) \\ &\leqslant C_2 \left(\|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} + |u_1| + \|u_0\| \right)^2, \end{aligned}$$

onde $C_2 = 2e^{C_0 T\|p\|_{L^\infty(Q)}}$. □

2.3 Regularidade Escondida

Nesta seção, estudaremos a regularidade da derivada normal da solução fraca, u, de (2.1). Mostraremos que

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} \in L^2(0, T; L^2(\Gamma)).$$

Esta regularidade não provém das propriedades da solução u, e, por este motivo, J.L. Lions indroduziu em [20] a terminologia *regularidade escondida.* Antes do resultado principal, faremos alguns lemas.

Lema 2.1. *Seja* $\eta = (\eta_1, ..., \eta_N)$ *o vetor unitário exterior à* $\Gamma = \partial\Omega$*. Então existe um campo* $h = (h_1, h_2, ..., h_N)$ *com* $h_i \in C^1(\overline{\Omega})$ *para* $1 \leqslant i \leqslant N$*, tal que* $h_i = \eta_i$ *sobre* Γ.

Demonstração. Do Teorema de Rellich 1.4.11, para $m > 1 + \frac{N}{2}$ temos que $H^m(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^1(\overline{\Omega})$. Por outro lado, pelo Teorema do Traço 1.4.7, γ_0 é sobrejetiva de $H^m(\Omega)$ em $H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Portanto, para cada $\eta_i \in H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, existe $h_i \in H^m(\Omega) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$ tal que $\gamma_0(h_i) = h_i\Big|_\Gamma = \eta_i$. Com isto, basta tomarmos $h = (h_1, ..., h_N)$. □

Lema 2.2. *Seja* $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. *Então,*

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \eta_i \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad \textit{sobre} \quad \Gamma.$$

Em particular, $\nabla u = \eta \dfrac{\partial u}{\partial \eta}$ *e* $|\nabla u|^2 = \left|\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\right|^2$ *sobre* Γ.

Demonstração. Do Teorema de Rellich 1.4.11, para $m > 2 + \frac{N}{2}$, temos $H^m(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^2(\overline{\Omega})$. Por outro lado, pelo Teorema do Traço 1.4.7 γ_0 é uma sobrejeção de $H^m(\Omega)$ em $H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Portanto, para cada $\theta \in \mathcal{D}(\Gamma) \subset H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, existe $\xi \in H^m(\Omega) \hookrightarrow C^2(\Omega)$ tal que $\gamma_0(\xi) = \xi\Big|_\Gamma = \theta$. Consideremos $h = (h_1, ..., h_N)$ como no lema 2.1. Então,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(u h_j \xi) = \frac{\partial u}{\partial x_i} h_j \xi + u \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \xi + u h_j \frac{\partial \xi}{\partial x_i}.$$

Derivando em x_j, integrando em Ω e usando Teorema de Gauss 1.4.8, segue que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}(u h_j \xi) dx &= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} h_j \xi + u \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \xi + u h_j \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \right) dx \\
&= \int_\Gamma \eta_j \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} h_j \xi + u \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \xi + u h_j \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \right) d\Gamma.
\end{aligned}$$

Usando que $u\Big|_\Gamma = 0$, $h_j\Big|_\Gamma = \eta_j$, $\xi\Big|_\Gamma = \theta$ e somando em j, obtemos

$$\sum_{j=1}^N \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}(u h_j \xi) dx = \sum_{j=1}^N \int_\Gamma \eta_j^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \theta d\Gamma = \int_\Gamma \left(\sum_{j=1}^N \eta_j^2 \right) \frac{\partial u}{\partial x_i} \theta d\Gamma.$$

Logo,

$$\sum_{j=1}^N \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}(u h_j \xi) dx = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial x_i} \theta d\Gamma. \tag{2.56}$$

Por outro lado, derivando $u h_j \xi$ em j, temos:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(u h_j \xi) = \frac{\partial u}{\partial x_j} h_j \xi + u \frac{\partial h_j}{\partial x_j} \xi + u h_j \frac{\partial \xi}{\partial x_j}.$$

Derivando em x_i, integrando em Ω e usando Teorema de Gauss, obtemos

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}(u h_j \xi) dx = \int_\Gamma \eta_i \frac{\partial u}{\partial x_j} \eta_j \theta d\Gamma.$$

Somando em j,

$$\sum_{j=1}^{N}\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}(uh_j\xi)dx=\int_{\Gamma}\eta_i\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial u}{\partial x_j}\eta_j\theta d\Gamma=\int_{\Gamma}\eta_i\frac{\partial u}{\partial \eta}\theta d\Gamma. \tag{2.57}$$

Como $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\dfrac{\partial}{\partial x_j}(uh_j\xi)=\dfrac{\partial}{\partial x_j}\dfrac{\partial}{\partial x_i}(uh_j\xi)$ de (2.56) e (2.57), temos

$$\int_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial x_i}\theta d\Gamma=\int_{\Gamma}\eta_i\frac{\partial u}{\partial \eta}\theta d\Gamma, \quad \text{para toda } \ \theta\in\mathcal{D}(\Gamma).$$

Do teorema de Du Bois Raymond 1.2.1, concluimos

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=\eta_i\frac{\partial u}{\partial \eta} \quad \text{sobre } \ \Gamma.$$

Com isto, é claro que $\nabla u=\eta\dfrac{\partial u}{\partial \eta}$ e fazendo produto interno com ∇u, resulta que $|\nabla u|^2=\left|\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\right|^2$. □

Lema 2.3. *Seja* $q=(q_1,q_2,...,q_N)$ *um campo de vetores com* $q_k\in C^1(\overline{\Omega})$*,* $1\leqslant k\leqslant N$*. Se* (u_m) *é uma sequência de soluções fortes de* (2.1) *com os dados satisfazendo:*

$$\left|\begin{array}{l} u_{0m}\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega) \ \ \textit{com} \ \ u_{0m}\to u_0 \ \ \textit{forte em} \ \ H_0^1(\Omega);\\ u_{1m}\in H_0^1(\Omega) \ \ \textit{com} \ \ u_{1m}\to u_1 \ \ \textit{forte em} \ \ L^2(\Omega);\\ f_m\in C^1(\overline{\Omega}\times[0,T]) \ \ \textit{com} \ \ f_m\to f \ \ \textit{forte em} \ \ L^1(0,T;L^2(\Omega)).\end{array}\right. \tag{2.58}$$

Então temos a seguinte identidade:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Gamma}q_k\eta_k\left|\frac{\partial u_m}{\partial \eta}\right|^2 d\Gamma dt \ = \ & \left(u_m'(t),q_k\frac{\partial u_m}{\partial x_k}(t)\right)\Big|_0^T+\sum_{i=1}^{N}\int_0^T\int_{\Omega}\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\frac{\partial q_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_m}{\partial x_k}dxdt\\ & +\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Omega}\frac{\partial q_k}{\partial x_k}\left(|u_m'|^2-|\nabla u_m|^2\right)dxdt\\ & +\int_0^T\int_{\Omega}pu_mq_k\frac{\partial u_m}{\partial x_k}dxdt-\int_0^T\int_{\Omega}f_mq_k\frac{\partial u_m}{\partial x_k}dxdt.\end{aligned} \tag{2.59}$$

Demonstração. Sendo u_m solução forte, para cada $m\in\mathbb{N}$, temos que:

$$\left|\begin{array}{l} u_m''-\Delta u_m+pu_m=f_m \ \ \text{q.s. em} \ \ Q;\\ u_m(0)=u_{0m}, \ \ u_m'(0)=u_{1m} \ \ \text{em} \ \ \Omega.\end{array}\right. \tag{2.60}$$

Pelo teorema 2.1, sabemos que:

$$u_m\in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)), \ \ u_m'\in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \ \text{e} \ u_m''\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.61}$$

Portanto, $q_k \dfrac{\partial u_m}{\partial x_k} \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e pela Desigualdade de Hölder, podemos multiplicar $(2.60)_1$ por $q_k \dfrac{\partial u_m}{\partial x_k}$ e integrarmos em Q, obtendo

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_\Omega u_m'' q_k \frac{\partial u_m}{\partial x_k} dxdt - \int_0^T \int_\Omega \Delta u_m q_k \frac{\partial u_m}{\partial x_k} dxdt \\ = &-\int_0^T \int_\Omega p u_m q_k \frac{\partial u_m}{\partial x_k} dxdt + \int_0^T \int_\Omega f_m q_k \frac{\partial u_m}{\partial x_k} dxdt. \end{aligned} \tag{2.62}$$

Observe que as integrais à direita de (2.62) já constam em (2.59). Assim, desenvolveremos as integrais à esquerda de (2.62).

- Análise da $\displaystyle\int_0^T \int_\Omega u_m'' q_k \frac{\partial u_m}{\partial x_k} dxdt.$

Das regularidades em (2.61) e do corolário 1.4.2, resulta que:

$$u_m \in C^0([0,T];H_0^1(\Omega)) \text{ e } u_m' \in C^0([0,T];L^2(\Omega)),$$

fazendo sentido, $\dfrac{u_m}{\partial x_k}(0)$, $\dfrac{u_m}{\partial x_k}(T)$, $u_m'(0)$ e $u_m'(0)$. Temos que

$$\begin{aligned} \left(u_m'(t), q_k \frac{\partial u_m}{\partial x_k}(t)\right)_{L^2(\Omega)}\Bigg|_0^T &= \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\left(u_m' q_k \frac{\partial u_m}{\partial x_k}\right) dxdt \\ &= \int_0^T \int_\Omega u_m'' q_k \frac{\partial u_m}{\partial x_k} dxdt + \int_0^T \int_\Omega u_m' q_k \frac{\partial u_m'}{\partial x_k} dxdt. \end{aligned} \tag{2.63}$$

Por outro lado, como $u_m' \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$, pelo Teorema de Gauss temos

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega u_m' q_k \frac{\partial u_m'}{\partial x_k} dxdt &= -\int_0^T \int_\Omega u_m' \frac{\partial}{\partial x_k}(u_m' q_k) dxdt \\ &= -\int_0^T \int_\Omega u_m' q_k \frac{\partial u_m'}{\partial x_k} dxdt - \int_0^T \int_\Omega |u_m'|^2 \frac{\partial q_k}{\partial x_k} dxdt. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^T \int_\Omega u_m' q_k \frac{\partial u_m'}{\partial x_k} dxdt = -\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega |u_m'|^2 \frac{\partial q_k}{\partial x_k} dxdt. \tag{2.64}$$

Substituindo (2.64) em (2.63), obtemos

$$\int_0^T \int_\Omega u_m'' q_k \frac{\partial u_m}{\partial x_k} dxdt = \left(u_m'(t), q_k \frac{\partial u_m}{\partial x_k}(t)\right)_{L^2(\Omega)}\Bigg|_0^T + \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega |u_m'|^2 \frac{\partial q_k}{\partial x_k} dxdt. \tag{2.65}$$

- Análise da $\displaystyle\int_0^T \int_\Omega \Delta u_m q_k \frac{\partial u_m}{\partial x_k} dxdt.$

Pela Fórmula de Green, resulta que:

$$\int_0^T \int_\Omega \Delta u_m q_k \frac{\partial u_m}{\partial x_k} dxdt = \int_0^T \int_\Gamma q_k \frac{\partial u_m}{\partial x_k}\frac{\partial u_m}{\partial \eta} d\Gamma dt - \int_0^T \int_\Omega \nabla u_m \cdot \nabla(q_k \frac{\partial u_m}{\partial x_k}) dxdt. \tag{2.66}$$

Observamos que

$$\begin{aligned}\nabla u_m \cdot \nabla(q_k \frac{\partial u_m}{\partial x_k}) &= \nabla u_m \cdot \nabla q_k \frac{\partial u_m}{\partial x_k} + \nabla u_m \cdot \nabla \frac{\partial u_m}{\partial x_k} q_k \\ &= \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial q_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_k} + \frac{1}{2} q_k \frac{\partial}{\partial x_k} |\nabla u_m|^2. \end{aligned} \tag{2.67}$$

Portanto, substituindo (2.67) em (2.66) e utilizando o lema 2.2, obtemos que

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\Omega \Delta u_m q_k \frac{\partial u_m}{\partial x_k} dxdt &= \int_0^T \int_\Gamma q_k \eta_k \left| \frac{\partial u_m}{\partial \eta} \right|^2 d\Gamma dt - \sum_{i=1}^{N} \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial q_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_k} dxdt \\ & -\frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega q_k \frac{\partial}{\partial x_k} |\nabla u_m|^2 dxdt. \end{aligned} \tag{2.68}$$

Usando o Teorema de Gauss e o lema 2.2, temos

$$\int_0^T \int_\Omega q_k \frac{\partial}{\partial x_k} |\nabla u_m|^2 dxdt = -\int_0^T \int_\Omega |\nabla u_m|^2 \frac{\partial q_k}{\partial x_k} dxdt + \int_0^T \int_\Gamma \eta_k q_k \left| \frac{\partial u_m}{\partial \eta} \right|^2 d\Gamma dt. \tag{2.69}$$

Portanto, substituindo (2.69) em (2.68), segue que

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\Omega \Delta u_m q_k \frac{\partial u_m}{\partial x_k} dxdt &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Gamma q_k \eta_k \left| \frac{\partial u_m}{\partial \eta} \right|^2 d\Gamma dt \\ & - \sum_{i=1}^{N} \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial q_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_k} dxdt \\ & + \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega |\nabla u_m|^2 \frac{\partial q_k}{\partial x_k} dxdt. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Para concluirmos o lema 2.3 basta substituir (2.65) e (2.70) em (2.62). □

Lema 2.4. *Considere uma sequência de soluções fortes de* (2.1), $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$, *com os dados iniciais como no Lema 2.3. Seja* h *um campo de vetores como no Lema 2.1. Então existe uma constante* $C = C(h, \Omega, p, T)$ *tal que*

$$\int_0^T \int_\Gamma \left| \frac{\partial u_m}{\partial \eta} \right|^2 d\Gamma dt \leqslant C \left(E_m(0) + \|f_m\|^2_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \right), \tag{2.71}$$

onde $E_m(t) = \frac{1}{2} |u_m'(t)|^2 + \frac{1}{2} \|u_m(t)\|^2$.

Demonstração. De modo análogo ao que foi feito da Seção 2.1, Estimativa I, obtemos uma constante $C_1 = C_1(\Omega, \|p\|_{L^\infty(\Omega)}, T)$ tal que

$$\sup_{t \in [0,T]} E_m(t) \leqslant C_1 \left(E_m(0) + \|f_m\|^2_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \right). \tag{2.72}$$

Tomando no lema 2.3 o campo $q = h$ e somando em k, de 1 até N, em (2.59), resulta que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Gamma \left|\frac{\partial u_m}{\partial \eta}\right|^2 d\Gamma dt &= \sum_{k=1}^N \left(u_m'(t), h_k\frac{\partial u_m}{\partial x_k}(t)\right)\Big|_0^T \\
&+ \sum_{k=1}^N\sum_{i=1}^N \int_0^T\int_\Omega \frac{\partial u_m}{\partial x_i}\frac{\partial h_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_m}{\partial x_k}dxdt \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^N \int_0^T\int_\Omega \frac{\partial h_k}{\partial x_k}\left(|u_m'|^2 - |\nabla u_m|^2\right)dxdt \qquad (2.73)\\
&+ \sum_{k=1}^N \int_0^T\int_\Omega p u_m h_k\frac{\partial u_m}{\partial x_k}dxdt \\
&- \sum_{k=1}^N \int_0^T\int_\Omega f_m h_k\frac{\partial u_m}{\partial x_k}dxdt.
\end{aligned}
$$

Em vista de (2.72), para concluirmos a demonstração do lema, basta mostrarmos que cada parcela de (2.73) é limitado por $\sup\limits_{t\in[0,T]} E_m(t)$ ou $E_m(0) + \|f_m\|^2_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}$.

- Utilizando as Desigualdades de Cauchy-Schwarz e Young e observando que $\left|\dfrac{\partial u_m(t)}{\partial x_k}\right| \leqslant |\nabla u_m|$ e $\|h_k\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \|h\|_{L^\infty(\Omega)}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\left(u_m'(t), h_k\frac{\partial u_m}{\partial x_k}(t)\right)\Big|_0^T &\leqslant 2\sup_{t\in[0,T]}\left|\left(u_m'(t), h_k\frac{\partial u_m}{\partial x_k}(t)\right)\right| \\
&\leqslant 2\sup_{t\in[0,T]}\left(|u_m'(t)|\|h_k\|_{L^\infty(\Omega)}\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_k}(t)\right|\right) \\
&\leqslant \sup_{t\in[0,T]}\left(\|h_k\|_{L^\infty(\Omega)}(|u_m'(t)|^2 + |\nabla u_m(t)|^2)\right) \\
&\leqslant 2\|h_k\|_{L^\infty(\Omega)}\sup_{t\in[0,T]} E_m(t) \\
&\leqslant C_2\sup_{t\in[0,T]} E_m(t).
\end{aligned}
$$

- Observando que $\left\|\dfrac{\partial h_m(t)}{\partial x_k}\right\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \|\nabla h\|_{L^\infty(\Omega)}$, ganhamos que

$$
\begin{aligned}
\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial h_k}{\partial x_k}\left(|u_m'|^2 - |\nabla u_m|^2\right)dxdt &\leqslant 2\left\|\frac{\partial h_m}{\partial x_k}\right\|_{L^\infty(\Omega)}\int_0^T E_m(t)dt \\
&\leqslant 2\|\nabla h\|_{L^\infty(\Omega)}\int_0^T E_m(t)dt \\
&\leqslant C_3\sup_{t\in[0,T]} E_m(t).
\end{aligned}
$$

- Usando que $2E_m(t) \geqslant |\nabla u_m(t)|^2$ e a Desigualdade de Young, vale

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial h_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_k} dxdt &\leqslant \left\| \frac{\partial h_k}{\partial x_i} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \int_0^T |\nabla u_m(t)|^2 dt \\
&\leqslant \|\nabla h\|_{L^\infty(\Omega)} \int_0^T |\nabla u_m(t)|^2 dt \\
&\leqslant C_4 \sup_{t \in [0,T]} E_m(t).
\end{aligned}
$$

- Como $u_m(t) \in H_0^1(\Omega)$ q.s. em $(0, T)$, das Desigualdades de Young e Poincaré, ganhamos que

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \int_\Omega p u_m h_k \frac{\partial u_m}{\partial x_k} dxdt &\leqslant \|p h_k\|_{L^\infty(Q)} \int_0^T \int_\Omega |u_m| \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \right| dxdt \\
&\leqslant \|p\|_{L^\infty(Q)} \|h\|_{L^\infty(\Omega)} \int_0^T (|u_m(t)|^2 + |\nabla u_m(t)|^2) dt \\
&\leqslant (C_0 + 1) \|p\|_{L^\infty(Q)} \|h\|_{L^\infty(\Omega)} \int_0^T |\nabla u_m(t)|^2 dt \\
&\leqslant C_5 \sup_{t \in [0,T]} E_m(t).
\end{aligned}
$$

- Utilizando propriedades de supremo e a Desigualdade de Young, resulta

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \int_\Omega f_m h_k \frac{\partial u_m}{\partial x_k} dxdt &\leqslant \|h_k\|_{L^\infty(\Omega)} \int_0^T \int_\Omega |f_m| \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \right| dxdt \\
&\leqslant \|h\|_{L^\infty(\Omega)} \int_0^T |f_m(t)| \, |\nabla u_m(t)| \, dt \\
&\leqslant \|h\|_{L^\infty(\Omega)} \|f_m\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \sup_{t \in [0,T]} |\nabla u_m(t)| \\
&\leqslant \|h\|_{L^\infty(\Omega)} \left(\|f_m\|^2_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} + \sup_{t \in [0,T]} |\nabla u_m(t)|^2 \right) \\
&\leqslant 2\|h\|_{L^\infty(\Omega)} \left(\|f_m\|^2_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} + \sup_{t \in [0,T]} E_m(t) \right) \\
&\leqslant C_6 \left(\|f_m\|^2_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} + E_m(0) \right).
\end{aligned}
$$

□

Teorema 2.4. *(Regularidade Escondida). A solução fraca,* u*, de* (2.1) *satisfaz*

$$
\frac{\partial u}{\partial \eta} \in L^2(0, T; L^2(\Gamma)). \tag{2.74}
$$

Além disso,

$$
(f, u_0, u_1) \mapsto \frac{\partial u}{\partial \eta} \tag{2.75}
$$

é uma forma linear contínua de $L^1(0,T;L^2(\Omega)) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ *em* $L^2(0,T;L^2(\Gamma))$*, isto é, existe uma constante* $C = C(\Omega, \|p\|_{L^\infty(\Omega)}, T) > 0$ *tal que*

$$\int_0^T \int_\Gamma \left|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|^2 d\Gamma dt \leqslant C\left(E_0 + \|f\|^2_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\right), \tag{2.76}$$

onde $E_0 = \frac{1}{2}|u_1|^2 + \frac{1}{2}\|u_0\|^2$.

A desigualdade (2.76) é conhecida como Desigualdade Direta.

Demonstração. Considerando $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ como no lema 2.3, então do lema 2.4 segue que $\left(\frac{\partial u_m}{\partial \eta}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(0,T;L^2(\Gamma))$. Do teorema 1.1.5 existe uma subsequência, que ainda denotaremos por $\left(\frac{\partial u_m}{\partial \eta}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ e $\psi \in L^2(0,T;L^2(\Gamma))$, tal que

$$\frac{\partial u_m}{\partial \eta} \rightharpoonup \psi \quad \text{em} \quad L^2(0,T;L^2(\Gamma)). \tag{2.77}$$

Da proposição 1.1.1 temos que

$$\|\psi\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))} \leqslant \liminf \left\|\frac{\partial u_m}{\partial \eta}\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))}. \tag{2.78}$$

Mostraremos que $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \psi$, e assim obtemos (2.74). Sendo u_m solução forte, para cada $m \in \mathbb{N}$, temos

$$\Delta u_m = u_m'' + pu_m - f_m \quad q.s. \quad em \quad Q.$$

Consequentemente,

$$\Delta u_m = u_m'' + pu_m - f_m \quad em \quad \mathcal{D}'(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{2.79}$$

Da escolha de $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ e do teorema 2.1, temos que

$$f_m \in C^1([0,T] \times \Omega), \quad u_m' \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \quad e \quad pu_m \in L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Com estas regularidades segue do Teorema da Reguladidade Elíptica a existência das sequências $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$, $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ e $(w_m)_{m\in\mathbb{N}}$ em $L^2(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))$ e de uma constante $C = C(\Omega)$ tais que

$$\left|\begin{array}{lll} \Delta y_m = u_m' & e & \|y_m\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leqslant C\|u_m'\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}; \\ \Delta z_m = pu_m & e & \|z_m\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leqslant C\|pu_m\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}; \\ \Delta w_m = -f_m & e & \|w_m\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leqslant C\|f_m\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}. \end{array}\right. \tag{2.80}$$

Substituindo (2.80) em (2.79), resulta que

$$\Delta u_m = [\Delta y_m]' + \Delta z_m + \Delta w_m \ \ em \ \ \mathcal{D}'(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{2.81}$$

Multiplicando (2.81) por $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando de 0 a T, temos

$$\int_0^T \Delta u_m \theta(t)dt = \int_0^T [\Delta y_m]'\theta(t)dt + \int_0^T \Delta z_m \theta(t)dt + \int_0^T \Delta w_m \theta(t)dt.$$

Como $\Delta \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$, resulta que

$$\Delta\left(\int_0^T u_m(t)\theta(t)dt\right) = \Delta\left(-\int_0^T y_m(t)\theta'(t)dt + \int_0^T z_m(t)\theta(t)dt + \int_0^T w_m(t)\theta(t)dt\right).$$

Devido a unicidade do problema elíptico, segue que

$$\int_0^T u_m(t)\theta(t)dt = -\int_0^T y_m(t)\theta'(t)dt + \int_0^T z_m(t)\theta(t)dt + \int_0^T w_m(t)\theta(t)dt \ \ em \ \ H^{-1}(\Omega).$$

Logo,

$$u_m = y_m' + z_m + w_m \ \ em \ \ \mathcal{D}'(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{2.82}$$

Como $y_m \in L^2(0,T;H^2(\Omega))$, segue do teorema 1.4.3 que $y_m' \in H^{-1}(0,T;H^2(\Omega))$. Além disso, vale $[\gamma_1(y_m)]' = \gamma_1(y_m')$. Logo de (2.82) e da linearidade de γ_1 obtemos

$$\gamma_1(u_m) = [\gamma_1(y_m)]' + \gamma_1(z_m) + \gamma_1(w_m) \ \text{ em } \ H^{-1}(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)). \tag{2.83}$$

Devido as convergências de (u_{0m}), (u_{1m}) e (f_m) e da desigualdade (2.55), segue que (u_m) e (u_m') são limitadas em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ e $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, respectivamente. Pelo teorema 1.1.5, passando a uma subsequência se necessário, temos que

$$\left|\begin{array}{lll} u_m \rightharpoonup u & \text{em} & L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega)); \\ u_m' \rightharpoonup u' & \text{em} & L^2(0,T;L^2(\Omega)). \end{array}\right.$$

Logo, da proposição 2.37 estas sequências são limitadas em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Com isto e de (2.80), resulta a limitação de (y_m) e (z_m) em $L^2(0,T;H^2(\Omega))$. Analogamente, como (f_m) é limitada em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ ganhamos a limitação de (w_m) em $L^2(0,T;H^2(\Omega))$. Utilizando novamente o teorema 1.1.5, passando à subsequências se necessário, obtemos:

$$\left|\begin{array}{lll} y_m \rightharpoonup y & \text{em} & L^2(0,T;H^2(\Omega)), \ \ \text{logo} \ \ y_m' \rightharpoonup y' \ \ \text{em} \ \ H^{-1}(0,T;H^2(\Omega)); \\ z_m \rightharpoonup z & \text{em} & L^2(0,T;H^2(\Omega)) \\ w_m \rightharpoonup w & \text{em} & L^2(0,T;H^2(\Omega)). \end{array}\right. \tag{2.84}$$

Como $\Delta \in \mathcal{L}(H^2(\Omega), L^2(\Omega))$ e da unicidade do limite fraco em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, segue de (2.80) que

$$\left| \begin{array}{l} \Delta y = u'; \\ \Delta z = pu; \\ \Delta w = -f. \end{array} \right.$$

Devido a continuidade do operador γ_1 e de (2.84), obtemos

$$\left| \begin{array}{lll} [\gamma_1(y_m)]' \rightharpoonup [\gamma_1(y)]' & \text{em} & H^{-1}(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)); \\ \gamma_1(z_m) \rightharpoonup \gamma_1(z) & \text{em} & L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)); \\ \gamma_1(w_m) \rightharpoonup \gamma_1(w) & \text{em} & L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)). \end{array} \right. \tag{2.85}$$

Portanto, de (2.83) e (2.85), resulta que

$$\gamma_1(u_m) = [\gamma_1(y_m)]' + \gamma_1(z_m) + \gamma_1(w_m) \rightharpoonup [\gamma_1(y)]' + \gamma_1(z) + \gamma_1(w) = \gamma_1(u),$$

em $H^{-1}(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$, ou seja, para toda $v \in H_0^1(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$ vale que

$$\langle \gamma_1(u_m), v \rangle_{H^{-1}(0,T;H^{1/2}(\Gamma)) \times H_0^1(0,T;H^{1/2}(\Gamma))} \to \langle \gamma_1(u), v \rangle_{H^{-1}(0,T;H^{1/2}(\Gamma)) \times H_0^1(0,T;H^{1/2}(\Gamma))}.$$

Por outro lado, de (2.77) temos que para todo $v \in L^2(0,T;L^2(\Gamma))$, temos

$$\langle \gamma_1(u_m), v \rangle_{L^2(0,T;L^2(\Gamma)) \times L^2(0,T;L^2(\Gamma))} \to \langle \psi, v \rangle_{L^2(0,T;L^2(\Gamma)) \times L^2(0,T;L^2(\Gamma))}$$

Sabendo que $H_0^1(0,T;H^{1/2}(\Gamma)) \hookrightarrow L^2(0,T;H^{1/2}(\Gamma)) \hookrightarrow H^{-1}(0,T;H^{1/2}(\Gamma))$, obtemos que para todo $v \in H_0^1(0,T;H^{1/2}(\Gamma))$, é válido que

$$\langle \gamma_1(u_m), v \rangle_{H^{-1}(0,T;H^{1/2}(\Gamma)) \times H_0^1(0,T;H^{1/2}(\Gamma))} \to \langle \psi, v \rangle_{H^{-1}(0,T;H^{1/2}(\Gamma)) \times H_0^1(0,T;H^{1/2}(\Gamma))}.$$

Da unicidade do limite temos que $\psi = \gamma_1(u) = \dfrac{\partial u}{\partial \eta}$. A linearidade da aplicação (2.75) segue da linearidade de (2.1) e a continuidade segue a desigualdade (2.76). Por sua vez, a desigualdade (2.76) é consequência de (2.78), (2.71) e das convergências em (2.58). $\square$

2.4 Solução Ultra-fraca

Nesta seção, estamos interessados no estudo do problema (2.2) com os dados iniciais z_0 e z_1 não regulares como nas seções 2.1 e 2.2. Definiremos a solução de (2.2) por meio do Método de Transposição. Seguiremos um método heurístico, a fim de encontrar uma definição natural do que vamos chamar solução ultra-fraca, tal como definido pelos Lions-Magenes em [22].

Multiplicando $(2.2)_1$ por $\theta = \theta(x,t)$, (x,t) em Q, integrando em Q, obtemos:

$$\int_0^T\int_\Omega z''\theta dxdt - \int_0^T\int_\Omega \Delta z\theta dxdt + \int_0^T\int_\Omega pz\theta dxdt = \int_0^T\int_\Omega f\theta dxdt. \tag{2.86}$$

Utilizando integração por partes duas vezes na primeira parcela à esquerda de (2.86), resulta:

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega z''\theta dxdt &= \int_\Omega z'(x,T)\theta(x,T)dx - \int_\Omega z'(x,0)\theta(x,0)dx - \int_\Omega z(x,T)\theta'(x,T)dx \\ &\quad + \int_\Omega z(x,0)\theta'(x,0) + \int_0^T\int_\Omega z\theta'' dxdt. \end{aligned}\tag{2.87}$$

Usando a Fórmula de Green duas vezes na segunda parcela à esquerda de (2.86), temos:

$$-\int_0^T\int_\Omega \Delta z\theta dxdt = -\int_0^T\int_\Gamma \theta\frac{\partial z}{\partial\eta}d\Gamma dt + \int_0^T\int_\Gamma z\frac{\partial\theta}{\partial\eta}d\Gamma dt - \int_0^T\int_\Omega z\Delta\theta dx. \tag{2.88}$$

Substituindo (2.87) e (2.88) em (2.86) e utilizando a condição na fronteira $(2.2)_2$, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega f\theta dxdt &= \int_0^T\int_\Omega \Big(z'' - \Delta z + pz\Big)\theta dxdt \\ &= \int_0^T\int_\Omega \Big(\theta'' - \Delta\theta + p\theta\Big) zdxdt + \int_\Omega z'(x,T)\theta(x,T)dx \\ &\quad - \int_\Omega z'(x,0)\theta(x,0)dx - \int_\Omega z(x,T)\theta'(x,T)dx \\ &\quad + \int_\Omega z(x,0)\theta'(x,0)dx - \int_0^T\int_\Gamma \theta\frac{\partial z}{\partial\eta}d\Gamma dt \\ &\quad + \int_0^T\int_\Gamma g\frac{\partial\theta}{\partial\eta}d\Gamma dt. \end{aligned}\tag{2.89}$$

Como não temos informações sobre $z(x,T)$, $z'(x,T)$ e $\dfrac{\partial z}{\partial\eta}$ é pertinente escolhermos θ satisfazendo:

$$\theta(x,T) = 0, \quad \theta'(x,T) = 0 \;\; e \;\; \theta(x,t) = 0 \;\text{ sobre }\; \Sigma. \tag{2.90}$$

Com esta escolha, de (2.89) e (2.2) segue que:

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega \Big(\theta'' - \Delta\theta + p\theta\Big) zdxdt &= \int_\Omega z_1\theta(0)dx - \int_\Omega z_0\theta'(0)dx \\ &\quad - \int_0^T\int_\Gamma g\frac{\partial\theta}{\partial\eta}d\Gamma dt + \int_0^T\int_\Omega f\theta dxdt. \end{aligned}$$

Reescrevendo esta última expressão por meio de dualidades, resulta

$$\langle z, \theta'' - \Delta\theta + p\theta\rangle = \langle z_1, \theta(0)\rangle - \langle z_0, \theta'(0)\rangle - \left\langle g, \frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right\rangle + \int_0^T\int_\Omega f\theta dxdt, \tag{2.91}$$

onde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ representa dualidades diferentes.

A definição de solução ultra-fraca será dada como um funcional definido pela expressão (2.91). Observando também (2.90) é natural escolhermos θ como solução do seguinte problema:

$$\left|\begin{array}{l} \theta'' - \Delta\theta + p\theta = h \ \ em \ \ Q; \\ \theta = 0 \ \ sobre \ \ \Gamma \times (0,T); \\ \theta(T) = 0, \ \ \theta'(T) = 0 \ \ em \ \ \Omega, \end{array}\right. \tag{2.92}$$

chamado problema retrógrado. Tomando $h \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ e fazendo reversão no tempo, isto é, considerando a aplicação $t \mapsto T - t$, o problema (2.92), torna-se

$$\left|\begin{array}{l} \widehat{\theta}'' - \Delta\widehat{\theta} + p\widehat{\theta} = \widehat{h} \ \ em \ \ Q; \\ \widehat{\theta} = 0 \ \ sobre \ \ \Gamma \times (0,T); \\ \widehat{\theta}(0) = 0, \ \ \widehat{\theta}'(0) = 0 \ \ em \ \ \Omega. \end{array}\right. \tag{2.93}$$

Este é um caso particular do estudado na seção 2.2. Segue dos teoremas 2.2, 2.3 e 2.4 que (2.93), e consequentemente (2.92), possui uma única solução fraca com regularidade

$$\theta \in C^0([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega)) \ \ \text{e} \ \ \frac{\partial\theta}{\partial\eta} \in L^2(0,T;L^2(\Gamma)).$$

Em particular,

$$\theta(0) \in H_0^1(\Omega) \ \ \text{e} \ \ \theta'(0) \in L^2(\Omega). \tag{2.94}$$

Notemos que, pela reversão é verdade que:

$$\begin{gathered} \|\theta'\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega))} = \|\widehat{\theta}'\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega))}; \|\theta\|_{C^0([0,T];H_0^1(\Omega))} = \|\widehat{\theta}\|_{C^0([0,T];H_0^1(\Omega))}; \\ \left\|\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))} = \left\|\frac{\partial\widehat{\theta}}{\partial\eta}\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))}. \end{gathered} \tag{2.95}$$

Em vista de (2.94), para que a dualidade à direita de (2.91) faça sentido, é suficiente tomarmos os dados iniciais satisfazendo:

$$z_0 \in L^2(\Omega), \ \ z_1 \in H^{-1}(\Omega), g \in L^2(0,T;L^2(\Gamma)) \ \ \text{e} \ \ f \in L^1(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.96}$$

Observe que bastaria que $f \in L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Tomando as condições iniciais como em (2.96), observando (2.91) e da unidade de θ, podemos definir o funcional $S : L^1(0,T;L^2(\Omega)) \mapsto \mathbb{R}$ dado por

$$\begin{aligned} \langle S, h\rangle &= \langle z_1, \theta(0)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} - \langle z_0, \theta'(0)\rangle_{L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)} \\ &\quad - \int_0^T\int_\Gamma g\frac{\partial\theta}{\partial\eta}d\Gamma dt + \int_0^T\int_\Omega f\theta dx dt \end{aligned} \tag{2.97}$$

que é linear e contínuo. De fato, usando a norma dos funcionais e a Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}|\langle S, h\rangle| &\leqslant \|z_0\|_{L^2(\Omega)}|\theta'(0)|_{L^2(\Omega)} + \|z_1\|_{H^{-1}(\Omega)}|\theta'(0)|_{H_0^1(\Omega)} \\ &+\|g\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))}\left\|\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))} + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\|\theta\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}.\end{aligned} \tag{2.98}$$

Usando o teorema 2.4 em $(2.93)_3$ e observando (2.95), existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left\|\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))} = \left\|\frac{\partial\widehat{\theta}}{\partial\eta}\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))} \leqslant C\|h\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}. \tag{2.99}$$

Aplicando a proposição 2.1 em (2.93), existe uma constante $C > 0$ satisfazendo

$$\begin{aligned}\|\theta'\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega))} + \|\theta\|_{C^0([0,T];H_0^1(\Omega))} &= \|\widehat{\theta}'\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega))} + \|\widehat{\theta}\|_{C^0([0,T];H_0^1(\Omega))} \\ &\leqslant C\|\widehat{h}\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \\ &= C\|h\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}.\end{aligned} \tag{2.100}$$

Substituindo (2.99) e (2.100) em (2.98), obtemos uma constante $C > 0$ tal que

$$|\langle S, h\rangle| \leqslant C\left(\|z_0\|_{L^2(\Omega)} + \|z_1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|g\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))} + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\right)\|h\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}. \tag{2.101}$$

Logo, o funcional linear S definido em (2.97) é contínuo, e mais de (2.101), resulta que

$$\|S\|_{[L^1(0,T;L^2(\Omega))]'} \leqslant C\left(\|z_0\|_{L^2(\Omega)} + \|z_1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|g\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))} + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\right). \tag{2.102}$$

Agora, podemos definir a solução ultra-fraca de (2.2).

Definição 2.1. *Para* $(z_0, z_1, g) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(0,T;L^2(\Gamma))$ *e* $f \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, *dizemos que* $z : Q \mapsto \mathbb{R}$ *é solução ultra-fraca (ou por transposição) de* (2.2) *se satisfaz*

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega zh\,dxdt &= \langle z_1, \theta(0)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} - \langle z_0, \theta'(0)\rangle_{L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)} \\ &-\int_0^T\int_\Gamma g\frac{\partial\theta}{\partial\eta}d\Gamma dt + \int_0^T\int_\Omega f\theta\,dxdt,\end{aligned}$$

para toda $h \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ *e* θ *solução de* (2.92).

Teorema 2.5. *Dados* $(z_0, z_1, g) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(0,T;L^2(\Gamma))$ *e* $f \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, *existe uma única solução ultra-fraca z de* (2.2) *na classe* $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. *Além disso, existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$\|z\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant C\left(\|z_0\|_{L^2(\Omega)} + \|z_1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|g\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))} + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\right). \tag{2.103}$$

Demonstração. Como $S \in [L^1(0,T;L^2(\Omega))]'$ pelo Teorema de Riesz existe único $z \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ tal que

$$\langle S, h\rangle = \int_\Omega zh dxdt, \quad \text{para toda } \ h \in L^1(0,T;L^2(\Omega)) \tag{2.104}$$

e

$$\|z\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} = \|S\|_{[L^1(0,T;L^2(\Omega))]'}. \tag{2.105}$$

De (2.97) e (2.104) asseguramos a existência da solução ultra-fraca z. Por outro lado, de (2.102) e (2.105) resulta (2.103).

Vejamos a unicidade. Para isso, suponhamos z e $\widetilde{z}$ soluções do problema (2.2). Portanto, para todo $h \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ temos:

$$\int_0^T\int_\Omega zh dxdt = \langle z_1, \theta(0)\rangle - \langle z_0, \theta'(0)\rangle - \int_0^T\int_\Gamma g\frac{\partial\theta}{\partial\eta}d\Gamma dt + \int_0^T\int_\Omega f\theta dxdt = \int_0^T\int_\Omega \widetilde{z}h dxdt.$$

Em particular,

$$\int_0^T\int_\Omega zh dxdt = \int_0^T\int_\Omega \widetilde{z}h dxdt \ \text{ para toda } \ h \in \mathcal{D}(Q).$$

Aplicando o Lema de Du Bois Raymond, segue que $z = \widetilde{z}$ q.s. em Q, assim temos a unicidade. □

Teorema 2.6. *A solução ultra-fraca* z *de* (2.2) *pertencente a classe:*

$$z \in C^0([0,T];L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T];H^{-1}(\Omega)).$$

Além disso, existe uma constante $C > 0$ *tal que*

$$\|z'\|_{L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leqslant C(|z_0|_{L^2(\Omega)} + \|z_1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|g\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))} + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}).$$

Antes de demonstrarmos o teorema 2.6, veremos alguns resultados que serão necessários.

Lema 2.5. *Considere o problema* (2.2) *com os dados iniciais nas classes*

$$(z_0, z_1, g) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H_0^2(0,T;H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)). \tag{2.106}$$

Então existe uma única solução fraca z *de* (2.2) *e* z *possui a seguinte regularidade:*

$$z \in C^0([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega)).$$

Além disso, esta é a solução ultra-fraca de (2.2).

Demonstração. Pela sobrejetividade do operador traço γ_0 existe $v \in H_0^2(0,T;H^2(\Omega))$ tal que $\gamma_0 v = g$ sobre $\Gamma \times (0,T)$. Como $v \in H_0^2(0,T;H^2(\Omega))$, então v'', Δv e $pv \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Assim podemos considerar problema

$$\left| \begin{array}{l} u'' - \Delta u + pu = -v'' + \Delta v - pv + f \ \ em \ \ Q; \\ u = 0 \ \ sobre \ \ \Gamma \times (0,T); \\ u(0) = z_0, \ \ u'(0) = z_1 \ \ em \ \ \Omega, \end{array} \right.$$

que possui uma única solução fraca, u, fornecida pelo teorema 2.2, e do teorema 2.3 resulta que

$$u \in C^0([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega)).$$

Portanto, como u é solução fraca, temos

$$\frac{d}{dt}(u'(t),\psi) + a(u(t),\psi) + (p(t)u(t),\psi) = (-v''(t) + \Delta v(t) - p(t)v(t) + f(t),\psi),$$

para toda $\psi \in H_0^1(\Omega)$, no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$. Logo,

$$\frac{d}{dt}(u'(t) + v'(t),\psi) + a(u(t) + v(t),\psi) + (p(t)(u(t) + v(t)),\psi) = (f(t),\psi),$$

para toda $\psi \in H_0^1(\Omega)$, no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$. Definindo $z = u+v$, obtemos que z é solução fraca de (2.2). Para verificar as condições iniciais, observamos que $v \in H_0^2(0,T;H^2(\Omega))$, e daí $v(0) = 0 = v'(0)$ em Ω, donde

$$\begin{aligned} z(0) &= u(0) + v(0) = u(0) + 0 = z_0 \ \text{ em } \ \Omega, \\ z'(0) &= u'(0) + v'(0) = u'(0) + 0 = z_1 \ \text{ em } \ \Omega, \\ z &= u + v = 0 + g \ \text{ sobre } \ \Gamma \times (0,T). \end{aligned}$$

Com as regularidades nas condições iniciais dadas em (2.106) e do teorema 2.3, temos

$$z \in C^0([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega)).$$

Mostraremos agora que z é também solução ultra-fraca de (2.2). Por densidade, tomemos uma sequência

$$(h_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset C^1(\overline{\Omega} \times [0,T]) \ \text{ tal que } \ h_m \to h \ \text{ em } \ L^1(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.107}$$

Consideremos os problemas retrógrados

$$\left| \begin{array}{l} \theta_m'' - \Delta\theta_m + p\theta_m = h_m \ \ em \ \ Q; \\ \theta_m = 0 \ \ sobre \ \ \Gamma \times (0,T); \\ \theta_m(T) = 0, \ \ \theta_m'(T) = 0 \ \ em \ \ \Omega. \end{array} \right. \tag{2.108}$$

e

$$\left|\begin{array}{l}\theta'' - \Delta\theta + p\theta = h \;\; em \;\; Q;\\ \theta = 0 \;\; sobre \;\; \Gamma \times (0,T);\\ \theta(T) = 0, \;\; \theta'(T) = 0 \;\; em \;\; \Omega.\end{array}\right. \tag{2.109}$$

Devidos os teoremas 2.1 e 2.2, os problemas (2.108) e (2.109) possuem soluções θ_m forte e θ fraca, respectivamente. Portanto, $\theta_m - \theta$ é solução fraca de

$$\left|\begin{array}{l}(\theta_m - \theta)'' - \Delta(\theta_m - \theta) + p(\theta_m - \theta) = h_m - h \;\; em \;\; Q;\\ \theta_m - \theta = 0 \;\; sobre \;\; \Gamma \times (0,T);\\ (\theta_m - \theta)(T) = 0, \;\; (\theta_m - \theta)'(T) = 0 \;\; em \;\; \Omega.\end{array}\right.$$

Fazendo a reversão no tempo, da proposição 2.1 e do teorema 2.4 existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|\theta'_m(T-t) - \theta'(T-t)| + \|\theta_m(T-t) - \theta(T-t)\| \leqslant C\|h_m - h\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}, \quad \forall \;\; t \in [0,T];$$
$$\left\|\frac{\partial\theta_m}{\partial\eta} - \frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))} \leqslant C\|h_m - h\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}.$$

Fazendo $t = T$ e usando (2.107), resulta:

$$\left|\begin{array}{l}\theta_m(0) \to \theta(0) \;\; \text{em} \;\; H_0^1(\Omega);\\ \theta'_m(0) \to \theta'(0) \;\; \text{em} \;\; L^2(\Omega);\\ \dfrac{\partial\theta_m}{\partial\eta} \to \dfrac{\partial\theta}{\partial\eta} \;\; em \;\; L^2(0,T;L^2(\Gamma)).\end{array}\right. \tag{2.110}$$

Do teorema 2.2 segue que $z'' - \Delta z + pz \in L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Portanto, faz sentido a dualidade $\langle z''(t) - \Delta z(t) + p(t)z(t), \theta(t)\rangle$ entre $H^{-1}(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$. Multiplicando $(2.2)_1$ por θ_m e repetindo o processo ultilizado para deduzir a definição de solução ultra-fraca, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega zh_m dxdt &= \langle z_1, \theta_m(0)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} - \langle z_0, \theta'_m(0)\rangle_{L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)}\\ &\quad - \int_\Omega\int_\Gamma g\frac{\partial\theta}{\partial\eta}d\Gamma dt + \int_0^T\int_\Omega f\theta_m dxdt.\end{aligned}$$

Fazendo $m \to \infty$ e utilizando (2.110) temos

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega zh dxdt &= \langle z_1, \theta(0)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} - \langle z_0, \theta'(0)\rangle_{L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)}\\ &\quad - \int_\Omega\int_\Gamma g\frac{\partial\theta}{\partial\eta}d\Gamma dt + \int_0^T\int_\Omega f\theta dxdt,\end{aligned}$$

para toda $h \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ e θ solução fraca de (2.109). Portanto, z é solução ultra-fraca de (2.2). A unicidade de z, segue da unicidade da solução ultra-fraca do problema.

□

Lema 2.6. *Seja* z *solução ultra-fraca do problema* (2.2). *Então* $z' \in W^{-1,\infty}(0,T;L^2(\Omega))$. *Além disso,*

$$\langle z', h\rangle = -\int_0^T\int_\Omega zh'dxdt, \quad \textit{para todo} \quad h \in W^{1,1}(0,T;L^2(\Omega)).$$

Demonstração. Do teorema 2.5 temos que $z \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Segue do teorema 1.4.3 que $z' \in H^{-1}(0,T,L^2(\Omega))$, isto é, z' é um funcional linear contínuo de $H_0^1(0,T;L^2(\Omega))$. Devido a imersão densa $H_0^1(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow W_0^{1,1}(0,T;L^2(\Omega))$, o funcional z' pode ser prolongado de maneira linear e contínua a $W_0^{1,1}(0,T;L^2(\Omega))$. Continuaremos denotando por z' esta extensão que pertence a $W^{-1,\infty}(0,T;L^2(\Omega))$. Dado $h \in W^{1,1}(0,T;L^2(\Omega))$, devido a densidade tomamos uma sequência de funções $(h_m)_{m\in\mathbb{N}}$ em $H_0^1(0,T;L^2(\Omega))$ tal que

$$h_m \to h \quad \text{em} \quad W_0^{1,1}(0,T;L^2(\Omega)).$$

Em particular,

$$h_m' \to h' \quad \text{em} \quad L^1(0,T;L^2(\Omega)).$$

Assim,

$$\langle z', h_m\rangle \to \langle z', h\rangle \quad \text{em} \quad \mathbb{R},$$

e

$$\langle z', h_m\rangle = -\langle z, h_m'\rangle = -\int_0^T\int_\Omega zh_m'dxdt \to -\int_0^T\int_\Omega zh'dxdt \quad \text{em} \quad \mathbb{R}.$$

Da unicidade do limite em $\mathbb{R}$, segue que

$$\langle z', h\rangle = -\int_0^T\int_\Omega zh'dxdt, \quad \text{para todo} \quad h \in W^{1,1}(0,T;L^2(\Omega)).$$

□

Lema 2.7. *Seja* θ *solução fraca do problema*

$$\left|\begin{array}{l} \theta'' - \Delta\theta + p\theta = h' \quad em \quad Q; \\ \theta = 0 \quad sobre \quad \Gamma \times (0,T); \\ \theta(T) = 0, \quad \theta'(T) = 0 \quad em \quad \Omega. \end{array}\right. \tag{2.111}$$

Então, existe uma constante positiva $C > 0$ *tal que*

$$|\theta'(0)| + \|\theta(0)\| + \left\|\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))} \leqslant C\|h\|_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))}$$

e

$$\|\theta\|_{C([0,T];H_0^1(\Omega))} \leqslant C\|h\|_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))}$$

para toda $h \in W_0^{1,1}(0,T;H_0^1(\Omega))$.

Demonstração. Uma prova desse resultado pode ser encontrado em [30]. □

Demonstração do Teorema 2.6. Será feita em duas etapas.

Etapa I - Nessa etapa mostraremos que $z \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$. Como as imersões $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ e $H_0^1(0,T;H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Gamma))$ são densas, existem sequências $(z_{0m})_{m\in\mathbb{N}}$, $(z_{1m})_{m\in\mathbb{N}}$ e $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ em $H_0^1(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ e $H_0^1(0,T;H^{\frac{3}{2}}(\Gamma))$ respectivamente, satisfazendo

$$\left| \begin{array}{l} z_{0m} \to z_0 \ \text{ em } \ L^2(\Omega); \\ z_{1m} \to z_1 \ \text{ em } \ H^{-1}(\Omega); \\ g_m \to g \ \ em \ \ L^2(0,T;L^2(\Gamma)). \end{array} \right. \tag{2.112}$$

Devido a sobrejetividade do operador traço γ_0, existe $\widehat{g_m}$ em $H_0^1(0,T;H^2(\Omega))$ tal que $\gamma_0\widehat{g_m} = g_m$ sobre $\Gamma \times (0,T)$. Assim podemos assumir que $g_m \in H_0^1(0,T;H^2(\Omega))$. Pelo lema 2.5, o problema

$$\left| \begin{array}{l} z_m'' - \Delta z_m + p z_m = f \ \ em \ \ Q; \\ z_m = g_m \ \ sobre \ \ \Gamma \times (0,T); \\ z_m(0) = z_{0m}, \ \ z_m'(0) = z_{1m} \ \ em \ \ \Omega, \end{array} \right. \tag{2.113}$$

possui única solução fraca z_m, tal que

$$z_m \in C^0([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega)).$$

Além disso, z_m é também solução ultra-fraca de (2.113), deste modo $z_m - z$ é solução ultra-fraca de

$$\left| \begin{array}{l} (z_m - z)'' - \Delta(z_m - z) + p(z_m - z) = 0 \ \ em \ \ Q; \\ z_m - z = g_m - g \ \ sobre \ \ \Gamma \times (0,T); \\ (z_m - z)(0) = z_{0m} - z_0, \ \ (z_m - z)'(0) = z_{1m} - z_1 \ \ em \ \ \Omega. \end{array} \right. \tag{2.114}$$

A desigualdade do teorema 2.5 aplicada neste problema, resulta

$$\|z_m - z\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant C\left(\|z_{0m} - z_0\|_{L^2(\Omega)} + \|z_{1m} - z_1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|g_m - g\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))}\right).$$

Fazendo $m \to \infty$ e usando as convergência em (2.112), obtemos que $z_m \to z$ em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Em particular, $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Usando a propriedade da norma $\|\cdot\|_{L^\infty(0,T)}$ e considerando $m > n$, temos

$$|z_m(t) - z_n(t)|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|z_m - z_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \ \text{ quase sempre em } \ (0,T).$$

Como $z_n \in C^0([0,T];H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow C^0([0,T];L^2(\Omega))$, então

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} |z_m(t) - z_n(t)|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|z_m - z_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}.$$

Desde modo, $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $C^0([0,T];L^2(\Omega))$, e sendo este um espaço de Banach, existe $\widetilde{z}$ tal que

$$z_m \to \widetilde{z} \ \text{ em } \ C^0([0,T];L^2(\Omega)).$$

Visto que $C^0([0,T];L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, segue da unicidade do limite em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, que $z = \widetilde{z}$. Portanto, $z \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$.

Etapa II - Nessa etapa mostraremos que $z' \in C^0([0,T];H^{-1}(\Omega))$. Seja $h \in \mathcal{D}(Q)$ e considere o problema retrógrado dado por (2.111). Pelos teoremas 2.2 e 2.3, este problema possui única solução fraca θ, tal que

$$\theta \in C^0([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega)).$$

Do teorema 2.4 resulta que

$$\frac{\partial\theta}{\partial\eta} \in L^2(0,T;L^2(\Gamma)).$$

Como z é solução ultra-fraca de (2.2) e $h' \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ temos que $z \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ e satisfaz

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega zh'dxdt &= \langle z_1,\theta(0)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} - \langle z_0,\theta'(0)\rangle_{L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)}\\ &\quad -\int_\Omega\int_\Gamma g\frac{\partial\theta}{\partial\eta}d\Gamma dt + \int_0^T\int_\Omega f\theta dxdt.\end{aligned}$$

Em vista do lema 2.6, $z' \in W^{-1,\infty}(0,T;L^2(\Omega))$ e

$$\begin{aligned}-\langle z',h\rangle &= \langle z_1,\theta(0)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} - \langle z_0,\theta'(0)\rangle_{L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)}\\ &\quad -\int_\Omega\int_\Gamma g\frac{\partial\theta}{\partial\eta}d\Gamma dt + \int_0^T\int_\Omega f\theta dxdt.\end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Cauchy-Schwartz e desigualdades de operadores, obtemos

$$\begin{aligned}|\langle z',h\rangle| &\leqslant |z_0||\theta'(0)| + \|z_1\|_{H^{-1}(\Omega)}\|\theta(0)\|_{H_0^1(\Omega)} + \|g\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))}\left\|\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))}\\ &\quad +\|\theta\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}\|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}.\end{aligned}$$

Devido o lema 2.7, ganhamos que

$$|\langle z',h\rangle| \leqslant C\left(|z_0| + \|z_1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|g\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))} + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\right)\|h\|_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))}, \tag{2.115}$$

para toda $h \in \mathcal{D}(Q)$. Como $\mathcal{D}(Q)$ é denso $L^1(0,T;H_0^1(\Omega))$, (2.115) é válido para toda $h \in L^1(0,T;H_0^1(\Omega))$. Com isto, $z' \in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$ e

$$\|z'\|_{L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leqslant C\left(|z_0| + \|z_1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|g\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))} + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\right). \quad (2.116)$$

Então mostramos que se z é solução ultra-fraca de um problema como em (2.2), então vale (2.116). Com isto e do fato de $z_m - z$ ser solução ultra-fraca de (2.114), obtemos

$$\|z'_m - z'\|_{L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leqslant C\left(|z_{0m} - z_0| + \|z_{1m} - z_1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|g_m - g\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))}\right).$$

Fazendo $m \to \infty$ e usando as convergências em (2.112), obtemos que $z'_m \to z'$ em $L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Em particular, $(z'_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Usando a propriedade da norma $\|\cdot\|_{L^\infty(0,T)}$ e considerando $m > n$ temos

$$\|z'_m(t) - z'_n(t)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leqslant \|z'_m - z'_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \text{ quase sempre em } (0,T).$$

Como $z'_n \in C^0([0,T];L^2(\Omega)) \hookrightarrow C^0([0,T];H^{-1}(\Omega))$, então

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} |z_m(t) - z_n(t)|_{H^{-1}(\Omega)} \leqslant \|z_m - z_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}.$$

Desde modo, $(z'_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $C^0([0,T];H^{-1}(\Omega))$, e sendo este um espaço de Banach, existe ξ tal que

$$z'_m \to \xi \text{ em } C^0([0,T];H^{-1}(\Omega)).$$

Visto que $C^0([0,T];H^{-1}(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$, segue da unicidade do limite em $L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$, que $z' = \xi$. Portanto, $z' \in C^0([0,T];H^{-1}(\Omega))$.

Capítulo 3

Estimativa de Carleman para equação da onda com potencial

Dedicamos este capítulo a provar a Desigualdade de Carleman Global para os operadores

$$L_0 := \partial_{tt} - \Delta$$

e

$$L := L_0 + p,$$

sendo p o potencial, onde p e p' pertencem a $L^\infty(Q)$. A vantagem de encontrarmos tais estimativas é que elas nos permitem estudar uma onda que se propaga em um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$ a partir de informações referentes a uma parte dessa região. Mostraremos a Desigualdade de Carleman para funções que possuem traço na fronteira, por isso denominada estimativa global correspondente aos operadores definidos acima.

Consideremos o conjunto

$$X := \left\{ \begin{array}{c} v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)); \quad v' \in L^2(0,T;L^2(\Omega)); \quad Lv \in L^2(0,T;L^2(\Omega)); \\ v = 0 \ \text{ sobre } \ \Sigma, \\ v(0) = v(T) = 0 \ \text{ e } \ v'(0) = v'(T) = 0 \ \text{ em } \ \Omega \end{array} \right\}. \tag{3.1}$$

Vejamos que X está bem definido. Como $\{ \theta\psi; \theta \in \mathcal{D}(0,T) \ \text{ e } \ \psi \in \mathcal{D}(\Omega)\} \subset X$, então $X \neq \emptyset$. Devido ao corolário 1.4.2 obtemos que:

$$v \in C^0([0,T];L^2(\Omega)) \quad \text{e} \quad v' \in C^0([0,T];H^{-1}(\Omega)).$$

Assim faz sentido $v(0)$, $v(T)$, $v'(0)$ e $v'(T)$. Na verdade vale mais, pois como $v \in X$, tomando $f := Lv$, temos

$$\left|\begin{array}{l} v'' - \Delta v + pv = f \ \ \mathrm{em} \ \ Q; \\ v = 0 \ \ \mathrm{sobre} \ \ \Sigma; \\ v(0) = 0, \ \ v'(0) = 0 \ \ \Omega, \end{array}\right.$$

e pelos teoremas de regularidade 2.3 e 2.4 segue que:

$$v \in C^0([0,T]; H_0^1(\Omega)), \quad v' \in C^0([0,T]; L^2(\Omega)) \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} \in L^2(0,T; L^2(\Gamma)).$$

Seja $x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$ e definimos

$$\phi(x,t) = |x - x_0|^2 - \beta t^2 + M_0, \tag{3.2}$$

onde $0 < \beta < 1$ e $M_0 > 0$ tais que $\phi(x,t) \geqslant 1$ em Q.

Seja $\lambda > 0$ e definimos a **função peso** como sendo

$$\varphi_\lambda(x,t) := e^{\lambda \phi(x,t)}.$$

Logo,

$$\varphi_\lambda' = \lambda \phi' \varphi_\lambda \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial x_i} = \lambda \varphi_\lambda \frac{\partial \phi}{\partial x_i}.$$

Para cada $s > 0$ e $v \in X$, consideremos

$$w := e^{s\varphi_\lambda(x,t)} v(x,t).$$

Como $v \in X$ e φ_λ é bem regular, obtemos que $w \in X$. Seja

$$P_0(w) := e^{s\varphi_\lambda} L_0(e^{-\varphi_\lambda} w) = e^{s\varphi_\lambda} L_0(v). \tag{3.3}$$

Reescreveremos o operador P_0 a partir do operador L_0. Notemos que:

$$\begin{aligned} (e^{-s\varphi_\lambda} w)' &= e^{-s\varphi_\lambda} w' - s{\varphi_\lambda}' e^{-s\varphi_\lambda} w \\ &= e^{-s\varphi_\lambda}\left(w' - s\lambda \phi' \varphi_\lambda w\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (e^{-s\varphi_\lambda} w)'' &= e^{-s\varphi_\lambda}\left(w'' - s\lambda \phi'' \varphi_\lambda w - s\lambda^2 |\phi'|^2 \varphi_\lambda w - s\lambda \phi' \varphi_\lambda w'\right) \\ &\quad - s\lambda \phi' \varphi_\lambda e^{-s\varphi_\lambda}\left(w' - s\lambda \phi' \varphi_\lambda w\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (e^{-s\varphi_\lambda} w)'' &= e^{-s\varphi_\lambda}\left(w'' - 2s\lambda^2 |\phi'|^2 \varphi_\lambda - s\lambda \phi' \varphi_\lambda w'\right) \\ &\quad + e^{-s\varphi_\lambda}\left(-s\lambda \phi'' \varphi_\lambda w + s^2\lambda^2 |\phi'|^2 \varphi_\lambda^2 w - s\lambda^2 |\phi'|^2 \varphi_\lambda\right). \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}\left(e^{-s\varphi_\lambda}w\right) &= e^{-s\varphi_\lambda}\frac{\partial w}{\partial x_i} - s\lambda\tfrac{\partial\phi}{\partial x_i}\varphi_\lambda e^{-s\varphi_\lambda}w\\
&= e^{-s\varphi_\lambda}\left(\frac{\partial w}{\partial x_i} - s\lambda\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\varphi_\lambda w\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(e^{-s\varphi_\lambda}w\right) &= e^{-s\varphi_\lambda}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} - 2s\lambda\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_i}\varphi_\lambda - s\lambda\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i^2}\varphi_\lambda w\right)\\
&\quad + e^{-s\varphi_\lambda}\left(-s\lambda^2\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)^2\varphi_\lambda w + s^2\lambda^2\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)^2\varphi_\lambda^2 w\right).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\left(e^{-s\varphi_\lambda}w\right) &= e^{-s\varphi_\lambda}\left(\Delta w - 2s\lambda\varphi_\lambda\nabla\phi\cdot\nabla w - s\lambda\varphi_\lambda\Delta\phi w\right)\\
&\quad + e^{-s\varphi_\lambda}\left(-s\lambda^2|\nabla\phi|^2\varphi_\lambda w + s^2\lambda^2|\nabla\phi|^2\varphi_\lambda^2 w\right).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Tomemos M_1 satisfazendo

$$\frac{2\beta}{\beta+N} < M_1 < \frac{2}{\beta+N}. \tag{3.7}$$

Substituindo (3.4) e (3.6) em (3.3), obtemos

$$P_0 w = P_1 w + P_2 w + R_0 w, \tag{3.8}$$

onde

$$P_1 w = w'' - \Delta w + s^2\lambda^2\varphi_\lambda^2\left(|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2\right)w;$$

$$\begin{aligned}
P_2 w &= (M_1 - 1)\, s\lambda\varphi_\lambda\left(\phi'' - \Delta\phi\right)w - s\lambda^2\varphi_\lambda\left(|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2\right)w\\
&\quad -2s\lambda\varphi_\lambda\left(\phi' w' - \nabla\phi\cdot\nabla w\right),
\end{aligned}$$

e

$$R_0 w = -M_1 s\lambda\varphi_\lambda\left(\phi'' - \Delta\phi\right)w. \tag{3.9}$$

Dado $x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$ definimos Γ_{x_0}, subconjunto de Γ, como sendo

$$\Gamma_{x_0} = \{x \in \Gamma; \eta(x)\cdot(x - x_0) > 0\}.$$

Teorema 3.1. *Suponhamos que exista* $x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$ *tal que* $\Gamma_{x_0} \subset \Gamma_0$*, onde* $\Gamma_0 \subset \Gamma$*. Então para cada* $m > 0$*, existem* λ_0*,* s_0 *e uma constante* $C = C(s_0, \lambda_0, \Omega, x_0, m)$ *tal que para todo* p *com* $p, p' \in L^\infty(Q)$ *e* $\|p\|_{L^\infty(Q)} \leqslant m$*, temos*

$$\begin{aligned}
&s\lambda\int_0^T\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}\varphi_\lambda\left(|v'|^2 + |\nabla v|^2\right)dxdt + s^3\lambda^3\int_0^T\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}\varphi_\lambda^3|v|^2 dxdt\\
&\quad + \int_0^T\int_\Omega |P_1 w|^2 dxdt + \int_0^T\int_\Omega |P_2 w|^2 dxdt\\
&\leqslant C\int_0^T\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}|Lv|^2 dxdt + Cs\lambda\int_0^T\int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi_\lambda}\varphi_\lambda\left|\frac{\partial v}{\partial\eta}\right|^2 d\Gamma dt,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

para todo $s \geqslant s_0$*,* $\lambda \geqslant \lambda_0$ *e para todo* $v \in X$*.*

Demonstração. A prova será feita em cinco etapas:

Etapa I - Primeiramente vejamos que é suficiente demonstrar o teorema 3.1 para $L_0 v$ no lugar de Lv em (3.10).

De fato, como $L_0 v = Lv - pv$ e $\|p\|_{L^\infty(Q)} \leqslant m$ obtemos

$$|L_0 v|^2 \leqslant 2\left(|Lv|^2 + |pv|^2\right) \leqslant 2\left(|Lv|^2 + m^2|v|^2\right). \tag{3.11}$$

Sendo a desigualdade (3.10) válido para $L_0 v$, de (3.11), resulta que:

$$\begin{aligned}
s\lambda \int_0^T \int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda} \varphi_\lambda \left(|v'|^2 + |\nabla v|^2\right) dxdt + s^3\lambda^3 \int_0^T \int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda} \varphi_\lambda^3 |v|^2 dxdt \\
+ \int_0^T \int_\Omega |P_1 w|^2 dxdt + \int_0^T \int_\Omega |P_2 w|^2 dxdt \\
\leqslant C \int_0^T \int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda} |L_0 v|^2 dxdt + Cs\lambda \int_0^T \int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi_\lambda} \varphi_\lambda \left|\frac{\partial v}{\partial \eta}\right|^2 d\Gamma dt \\
\leqslant 2C \int_0^T \int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda} |Lv|^2 dxdt + Cs\lambda \int_0^T \int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi_\lambda} \varphi_\lambda \left|\frac{\partial v}{\partial \eta}\right|^2 d\Gamma dt + 2m^2 C \int_0^T \int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda} |v|^2 dxdt.
\end{aligned}$$

Como $\varphi_\lambda \geqslant 1$ em Q e tomando $\lambda \geqslant 1$, obtemos $\lambda^3 \varphi_\lambda^3 \geqslant 1$. Portanto,

$$2m^2 C \int_0^T \int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda} |v|^2 dxdt \leqslant 2m^2 \lambda^3 C \int_0^T \int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda} \varphi_\lambda^3 |v|^2 dxdt.$$

Deste modo,

$$\begin{aligned}
s\lambda \int_0^T \int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda} \varphi_\lambda \left(|v'|^2 + |\nabla v|^2\right) dxdt + (s^3\lambda^3 - 2m^2\lambda^3 C) \int_0^T \int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda} \varphi_\lambda^3 |v|^2 dxdt \\
+ \int_0^T \int_\Omega |P_1 w|^2 dxdt + \int_0^T \int_\Omega |P_2 w|^2 dxdt \\
\leqslant 2C \int_0^T \int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda} |Lv|^2 dxdt + 2Cs\lambda \int_0^T \int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi_\lambda} \varphi_\lambda \left|\frac{\partial v}{\partial \eta}\right|^2 d\Gamma dt.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Observemos que $s^3\lambda^3 - 2m^2\lambda^3 C = \left(1 - \dfrac{2m^2 C}{s^3}\right) s^3\lambda^3$. Como as integrais de (3.12) são positivas, tomando

$$s_0 > (2m^2 C)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow A_0 := 1 - \frac{2m^2 C}{{s_0}^3} > 0$$

e

$$s \geqslant s_0 \Rightarrow 0 < A_0 = 1 - \frac{2m^2 C}{{s_0}^3} \leqslant 1 - \frac{2m^2 C}{s^3} < 1,$$

resulta que:

$$A_0 s\lambda \int_0^T \int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}\varphi_\lambda \left(|v'|^2 + |\nabla v|^2\right) dxdt + A_0 s^3\lambda^3 \int_0^T \int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}\varphi_\lambda^3 |v|^2 dxdt$$
$$+A_0 \int_0^T \int_\Omega |P_1 w|^2 dxdt + A_0 \int_0^T \int_\Omega |P_2 w|^2 dxdt$$
$$\leqslant 2C \int_0^T \int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}|Lv|^2 dxdt + 2Cs\lambda \int_0^T \int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi_\lambda}\varphi_\lambda \left|\frac{\partial v}{\partial \eta}\right|^2 d\Gamma dt.$$

Portanto,

$$s\lambda \int_0^T \int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}\varphi_\lambda \left(|v'|^2 + |\nabla v|^2\right) dxdt + s^3\lambda^3 \int_0^T \int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}\varphi_\lambda^3 |v|^2 dxdt$$
$$+ \int_0^T \int_\Omega |P_1 w|^2 dxdt + \int_0^T \int_\Omega |P_2 w|^2 dxdt$$
$$\leqslant C_0 \int_0^T \int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}|Lv|^2 dxdt + C_0\lambda \int_0^T \int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi_\lambda}\varphi_\lambda \left|\frac{\partial v}{\partial \eta}\right|^2 d\Gamma dt,$$

onde $C_0 = \frac{2C}{A_0}$. Assim, obtemos (3.10) com uma nova constante C_0.

Etapa II - Cálculos explícitos

Notemos a imersão contínua e densa

$$H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega).$$

Portanto,

$$L^2(0,T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T; H_0^1(\Omega)),$$

é densa. Desta forma, como veremos adiante, podemos considerar a função v em $L^2(0,T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$.

De (3.8), segue que

$$(P_1 w + P_2 w)^2 = (P_0 w - R_0 w)^2$$

e daí,

$$|P_1 w|^2 + |P_2 w|^2 + 2P_1 w P_2 w \leqslant 2|P_0 w|^2 + 2|R_0 w|^2,$$

que substituindo em (3.3) e integrando em Q, obtemos:

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_\Omega \left(|P_1 w|^2 + |P_2 w|^2\right) dxdt + 2\int_0^T \int_\Omega P_1 w P_2 w dxdt \\ &\leqslant 2\int_0^T \int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}|L_0 v|^2 dxdt + 2\int_0^T \int_\Omega |R_0 w|^2 dxdt. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Comparando (3.10) e (3.13) desenvolveremos as parcelas $\int_0^T \int_\Omega P_1 w P_2 w dxdt$ e $\int_0^T \int_\Omega |R_0 w|^2 dxdt$. Para tal, reecreveremos P_1 e P_2, como segue:

$$P_1 w = A_1 + A_2 + A_3 \;\text{ e }\; P_2 w = B_1 + B_2 + B_3,$$

onde,

$$A_1 = w''; \qquad A_2 = -\triangle w; \qquad A_3 = s^2\lambda^2\varphi_\lambda^2 \left(|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2\right) w;$$

$$B_1 = (M_1 - 1)\, s\lambda\varphi_\lambda \left(\phi'' - \triangle\phi\right) w; \qquad B_2 = -s\lambda^2\varphi_\lambda \left(|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2\right) w;$$

$$B_3 = -2s\lambda\varphi_\lambda \left(\phi' w' - \nabla\phi \cdot \nabla w\right).$$

Denotando por

$$I_{jk} := (A_j, B_k)_{L^2(0,T;L^2(\Omega))},$$

resulta que,

$$\int_0^T \int_\Omega P_1 w P_2 w dx dt = (P_1 w, P_2 w)_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = \sum_{j,k=1}^{3} I_{jk}.$$

Antes dos cálculos de alguns I_{jk}, são mencionadas identidades utilizadas.

Cálculo de I_{11}

Para isso utilizaremos integração por partes, o fato de $w \in X$ e as identidades:

- $\phi''' = 0;$ $\qquad (\Delta\phi)' = 0;$ $\qquad \frac{d}{dt}|w|^2 = 2ww';$ $\qquad (\varphi_\lambda)' = \lambda\varphi_\lambda\phi';$
- $(\varphi_\lambda\phi')' = \varphi_\lambda(\phi'' + \lambda|\phi'|^2).$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
I_{11} &= s\lambda(M_1 - 1)\int_0^T \int_\Omega w''\varphi_\lambda \left(\phi'' - \Delta\phi\right) w dx dt \\
&= -s\lambda(M_1 - 1)\int_0^T \int_\Omega w' \left(\varphi_\lambda \left(\phi'' - \Delta\phi\right) w\right)' dx dt \\
&= -s\lambda(M_1 - 1)\int_0^T \int_\Omega w' \left(\varphi_\lambda' w \left(\phi'' - \Delta\phi\right) + \varphi_\lambda w' \left(\phi'' - \Delta\phi\right)\right) dx dt \\
&= -s\lambda(M_1 - 1)\int_0^T \int_\Omega w' w \varphi_\lambda' \left(\phi'' - \Delta\phi\right) dx dt \\
&\quad -s\lambda(M_1 - 1)\int_0^T \int_\Omega |w'|^2 \varphi_\lambda \left(\phi'' - \Delta\phi\right) dx dt \\
&= -s\lambda^2 \frac{(M_1 - 1)}{2}\int_0^T \int_\Omega \frac{d}{dt}|w|^2 \varphi_\lambda \phi' \left(\phi'' - \Delta\phi\right) dx dt \\
&\quad -s\lambda(M_1 - 1)\int_0^T \int_\Omega |w'|^2 \varphi_\lambda \left(\phi'' - \Delta\phi\right) dx dt \\
&= -s\lambda^2 \frac{(1 - M_1)}{2}\int_0^T \int_\Omega |w|^2 \varphi_\lambda \left(\phi'' + \lambda|\phi'|^2\right) \left(\phi'' - \Delta\phi\right) dx dt \\
&\quad -s\lambda(M_1 - 1)\int_0^T \int_\Omega |w'|^2 \varphi_\lambda \left(\phi'' - \Delta\phi\right) dx dt.
\end{aligned}$$

Cálculo de I_{12}

Usaremos integração por partes, o fato de $w \in X$, e dentre outras a identidades:

- $(|\phi'|^2 - |\triangle\phi|^2)' = 2\phi'\phi''$.

$$\begin{aligned}
I_{12} &= -s\lambda^2 \int_0^T \int_\Omega w'' w \varphi_\lambda \left(|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2\right) dxdt \\
&= s\lambda^2 \int_0^T \int_\Omega w' \left[\left(\varphi_\lambda' w + \varphi_\lambda w'\right)\left(|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2\right) + \varphi_\lambda w \left(|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2\right)'\right] dxdt \\
&= \frac{s\lambda^3}{2} \int_0^T \int_\Omega \frac{d}{dt}|w|^2 \varphi_\lambda \phi' \left(|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2\right) dxdt \\
&\quad + s\lambda^2 \int_0^T \int_\Omega |w'|^2 \varphi_\lambda \left(|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2\right) dxdt \\
&\quad + s\lambda^2 \int_0^T \int_\Omega 2w'w\varphi_\lambda \phi'\phi'' dxdt \\
&= \frac{s\lambda^3}{2} \int_0^T \int_\Omega \frac{d}{dt}|w|^2 \varphi_\lambda \phi' \left(|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2\right) dxdt \\
&\quad + s\lambda^2 \int_0^T \int_\Omega |w'|^2 \varphi_\lambda \left(|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2\right) dxdt \\
&\quad + s\lambda^2 \int_0^T \int_\Omega \frac{d}{dt}|w|^2 \varphi_\lambda \phi'\phi'' dxdt.
\end{aligned}$$

Utilizando integração por partes, na primeira e na terceira parcela, obtemos:

$$\begin{aligned}
I_{12} &= -\frac{s\lambda^3}{2} \int_0^T \int_\Omega |w|^2 [(\varphi_\lambda'\phi' + \varphi_\lambda\phi'')(|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2) + \varphi_\lambda\phi' 2\phi'\phi''] dxdt \\
&\quad + s\lambda^2 \int_0^T \int_\Omega |w'|^2 \varphi_\lambda \left(|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2\right) dxdt \\
&\quad - s\lambda^2 \int_0^T \int_\Omega |w|^2 (\varphi_\lambda'\phi'\phi'' + \varphi_\lambda |\phi''|^2) dxdt \\
&= -\frac{s\lambda^4}{2} \int_0^T \int_\Omega |w|^2 \varphi_\lambda |\phi'|^2 (|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2) dxdt - \frac{s\lambda^3}{2} \int_0^T \int_\Omega |w|^2 \varphi_\lambda \phi'' |\phi'|^2 dxdt \\
&\quad + \frac{s\lambda^3}{2} \int_0^T \int_\Omega |w|^2 \varphi_\lambda \phi'' |\nabla\phi|^2 dxdt - s\lambda^3 \int_0^T \int_\Omega |w|^2 \varphi_\lambda |\phi'|^2 \phi'' dxdt \\
&\quad + s\lambda^2 \int_0^T \int_\Omega |w'|^2 \varphi_\lambda \left(|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2\right) dxdt - s\lambda^3 \int_0^T \int_\Omega |w|^2 \varphi_\lambda |\phi'|^2 \phi'' dxdt \\
&\quad - s\lambda^2 \int_0^T \int_\Omega |w|^2 \varphi_\lambda |\phi''|^2 dxdt \\
&= -\frac{s\lambda^4}{2} \int_0^T \int_\Omega |w|^2 \varphi_\lambda |\phi'|^2 (|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2) dxdt - \frac{5s\lambda^3}{2} \int_0^T \int_\Omega |w|^2 \varphi_\lambda \phi'' |\phi'|^2 dxdt \\
&\quad + \frac{s\lambda^3}{2} \int_0^T \int_\Omega |w|^2 \varphi_\lambda \phi'' |\nabla\phi|^2 dxdt + s\lambda^2 \int_0^T \int_\Omega |w'|^2 \varphi_\lambda \left(|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2\right) dxdt \\
&\quad - s\lambda^2 \int_0^T \int_\Omega |w|^2 \varphi_\lambda |\phi''|^2 dxdt.
\end{aligned}$$

Cálculo de I_{13}

Utilizaremos integração por partes, Fórmula de Green, o fato de $w \in X$, as identidades:

- $\nabla\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda\nabla\phi;\qquad \nabla|w|^2 = w'\nabla w'$,

dentre outras. De fato,

$$
\begin{aligned}
I_{13} &= -2s\lambda\int_0^T\int_\Omega w''\varphi_\lambda(w'\phi' - \nabla w\cdot\nabla\phi)dxdt\\
&= -2s\lambda\int_0^T\int_\Omega w''\varphi_\lambda w'\phi' dxdt + 2s\lambda\int_0^T\int_\Omega w''\varphi_\lambda\nabla w\cdot\nabla\phi dxdt\\
&= -s\lambda\int_0^T\int_\Omega \frac{d}{dt}|w'|^2\varphi_\lambda\phi' dxdt\\
&\quad -2s\lambda\int_0^T\int_\Omega w'\left(\varphi_\lambda'\nabla w\cdot\nabla\phi + \varphi_\lambda(\nabla w\cdot\nabla\phi)'\right)dxdt\\
&= s\lambda\int_0^T\int_\Omega |w'|^2(\varphi_\lambda'\phi' + \varphi_\lambda\phi'')dxdt - 2s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega w'\varphi_\lambda'\nabla w\cdot\nabla\phi dxdt\\
&\quad -2s\lambda\int_0^T\int_\Omega w'\varphi_\lambda\nabla(w')\cdot\nabla\phi dxdt\\
&= s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega |w'|^2\varphi_\lambda|\phi'|^2 dxdt + s\lambda\int_0^T\int_\Omega |w'|^2\varphi_\lambda\phi'' dxdt\\
&\quad -2s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega w'\varphi_\lambda\phi'\nabla w\cdot\nabla\phi dxdt - 2s\int_0^T\int_\Omega w'\nabla(w')\cdot\nabla\varphi_\lambda dxdt\\
&= s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega |w'|^2\varphi_\lambda|\phi'|^2 dxdt + s\lambda\int_0^T\int_\Omega |w'|^2\varphi_\lambda\phi'' dxdt\\
&\quad -2s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega w'\varphi_\lambda\phi'\nabla w\cdot\nabla\phi dxdt - s\int_0^T\int_\Omega \nabla|w'|^2\cdot\nabla\varphi_\lambda dxdt.
\end{aligned}
$$

Usando a Fórmula de Green na última integral e observando que $w' = 0$ em Σ e que $\Delta\varphi_\lambda = \lambda^2\varphi_\lambda|\nabla\phi|^2 + \lambda\varphi_\lambda\Delta\phi$, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\int_0^T\int_\Omega \nabla|w'|^2\cdot\nabla\varphi_\lambda dxdt &= -\int_0^T\int_\Omega |w'|^2\Delta\varphi_\lambda dxdt\\
&= -\lambda\int_0^T\int_\Omega |w'|^2(\lambda\varphi_\lambda|\nabla\phi|^2 + \varphi_\lambda\Delta\phi)dxdt.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
I_{13} &= s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega |w'|^2\varphi_\lambda|\phi'|^2 dxdt + s\lambda\int_0^T\int_\Omega |w'|^2\varphi_\lambda\phi'' dxdt\\
&\quad -2s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega w'\varphi_\lambda\phi'\nabla w\cdot\nabla\phi dxdt + s\int_0^T\int_\Omega |w'|^2\varphi_\lambda(\lambda|\nabla\phi|^2 + \Delta\phi)dxdt.
\end{aligned}
$$

Cálculo de I_{21}

Utilizaremos a Fórmula de Green, o fato de $w \in X$ e as identidades:

- $\nabla(\phi'' - \Delta\phi) = 0; \qquad \Delta\left(\varphi_\lambda(\phi'' - \Delta\phi)\right) = (\lambda\varphi_\lambda|\nabla\phi|^2 + \lambda\varphi_\lambda\Delta\phi)(\phi'' - \Delta\phi).$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
I_{21} &= (1-M_1)s\lambda\int_0^T\int_\Omega \Delta w\varphi_\lambda w(\phi''-\Delta\phi)dxdt \\
&= (M_1-1)s\lambda\int_0^T\int_\Omega \nabla w\cdot\nabla\left(\varphi_\lambda w(\phi''-\Delta\phi)\right)dxdt \\
&= (M_1-1)s\lambda\int_0^T\int_\Omega \nabla w\cdot(w\nabla\varphi_\lambda+\varphi_\lambda\nabla w)(\phi''-\Delta\phi)dxdt \\
&= (M_1-1)s\lambda\int_0^T\int_\Omega w\nabla w\cdot\nabla\varphi_\lambda(\phi''-\Delta\phi)dxdt \\
&\quad +(M_1-1)s\lambda\int_0^T\int_\Omega |\nabla w|^2\varphi_\lambda(\phi''-\Delta\phi)dxdt \\
&= \frac{(M_1-1)}{2}s\lambda\int_0^T\int_\Omega \nabla|w|^2\cdot\nabla\varphi_\lambda(\phi''-\Delta\phi)dxdt \\
&\quad +(M_1-1)s\lambda\int_0^T\int_\Omega |\nabla w|^2\varphi_\lambda(\phi''-\Delta\phi)dxdt \\
&= \frac{(1-M_1)}{2}s\lambda\int_0^T\int_\Omega |w|^2\Delta\left(\varphi_\lambda(\phi''-\Delta\phi)\right)dxdt \\
&\quad +(M_1-1)s\lambda\int_0^T\int_\Omega |\nabla w|^2\varphi_\lambda(\phi''-\Delta\phi)dxdt \\
&= \frac{(1-M_1)}{2}s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda(\lambda|\nabla\phi|^2+\Delta\phi)(\phi''-\Delta\phi)dxdt \\
&\quad +(M_1-1)s\lambda\int_0^T\int_\Omega |\nabla w|^2\varphi_\lambda(\phi''-\Delta\phi)dxdt.
\end{aligned}$$

Cálculo de I_{22}

Usaremos a Fórmula de Green, o fato de $w \in X$ e as identidades:

- $\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i\partial x_j} = 2\delta_{ij}; \qquad D^2\phi = 2Id; \qquad D^2\phi(v,v) = 2|v|^2; \qquad \sum_{i,j=1}^N\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i\partial x_j}\right)^2 = 4N;$
- $\nabla\phi = 2(x-x_0); \qquad |\nabla\phi|^2 = 4|x-x_0|^2;$
- $\Delta|\nabla\phi|^2 = 2\sum_{i,j=1}^N\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i\partial x_j}\right)^2; \qquad \nabla|\nabla\phi|^2 = 4\nabla\phi;$
- $\nabla\phi\cdot\nabla|\phi|^2 = 4\nabla\phi\cdot\nabla\phi = 4|\nabla\phi|^2 = 2D^2\phi(\nabla\phi,\nabla\phi);$
- $\Delta\left(\varphi_\lambda(|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2)\right) = (\lambda^2\varphi_\lambda|\nabla\phi|^2 + \lambda\varphi_\lambda\Delta\phi)(|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2) - 2\lambda\varphi_\lambda\nabla\phi\cdot\nabla(|\nabla\phi|^2)$
$- \varphi_\lambda\Delta|\nabla\phi|^2.$

De fato,

$$
\begin{aligned}
I_{22} &= s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega w\Delta w\varphi_\lambda(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)dxdt\\
&= -s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega \nabla w\cdot\nabla\left(w\varphi_\lambda(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)\right)dxdt\\
&= -s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega \nabla w\cdot\left(\nabla w\varphi_\lambda(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)+w\nabla(\varphi_\lambda(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2))\right)dxdt\\
&= -s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega |\nabla w|^2\varphi_\lambda(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)dxdt\\
&\quad -\frac{s\lambda^2}{2}\int_0^T\int_\Omega \nabla|w|^2\cdot\nabla(\varphi_\lambda(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2))dxdt\\
&= -s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega |\nabla w|^2\varphi_\lambda(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)dxdt\\
&\quad +\frac{s\lambda^2}{2}\int_0^T\int_\Omega |w|^2\triangle(\varphi_\lambda(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2))dxdt\\
&= -s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega |\nabla w|^2\varphi_\lambda(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)dxdt\\
&\quad +\frac{s\lambda^2}{2}\int_0^T\int_\Omega |w|^2(\lambda^2\varphi_\lambda|\nabla\phi|^2+\lambda\varphi_\lambda\Delta\phi)(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)dxdt\\
&\quad +\frac{s\lambda^2}{2}\int_0^T\int_\Omega |w|^2\left(-2\lambda\varphi_\lambda\nabla\phi\cdot\nabla(|\nabla\phi|^2)\right)dxdt\\
&\quad +\frac{s\lambda^2}{2}\int_0^T\int_\Omega |w|^2\left(-\varphi_\lambda\triangle|\nabla\phi|^2\right)dxdt\\
&= -s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega |\nabla w|^2\varphi_\lambda(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)dxdt\\
&\quad +\frac{s\lambda^3}{2}\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda(\lambda|\nabla\phi|^2+\Delta\phi)(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)dxdt\\
&\quad -2s\lambda^3\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda D^2\phi(\nabla\phi,\nabla\phi)dxdt\\
&\quad -s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda\sum_{i,j=1}^N\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i\partial x_j}\right)^2dxdt.
\end{aligned}
$$

Cálculo de I_{23}

Utilizaremos a Fórmula de Green, integração por partes, o fato de $w\in X$ e as identidades:

- $\nabla\varphi_\lambda=\lambda\varphi_\lambda\nabla\phi$; $\quad \nabla(w'\phi'-\nabla w\cdot\nabla\phi)=\phi'(\nabla w)'-\nabla(\nabla w\cdot\nabla\phi)$;
- $\nabla(\nabla w\cdot\nabla\phi)\cdot\nabla w=\frac{1}{2}\nabla\phi\cdot\nabla|\nabla w|^2+D^2\phi(\nabla w,\nabla w)$.

Com efeito,

$$
\begin{aligned}
I_{23} &= 2s\lambda\int_0^T\int_\Omega \Delta w[\varphi_\lambda(w'\phi' - \nabla w\cdot\nabla\phi)]dxdt\\
&= -2s\lambda\int_0^T\int_\Omega \nabla w\cdot\nabla[\varphi_\lambda(w'\phi' - \nabla w\cdot\nabla\phi)]dxdt\\
&\quad +2s\lambda\int_0^T\int_\Gamma \varphi_\lambda(w'\phi' - \nabla w\cdot\nabla\phi)\frac{\partial w}{\partial\eta}d\Gamma dt\\
&= -2s\lambda\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda\nabla(w'\phi' - \nabla w\cdot\nabla\phi)\cdot\nabla w dxdt\\
&\quad -2s\lambda\int_0^T\int_\Omega \nabla w\cdot\nabla\varphi_\lambda(w'\phi' - \nabla w\cdot\nabla\phi)dxdt\\
&\quad +2s\lambda\int_0^T\int_\Gamma \varphi_\lambda(w'\phi' - \nabla w\cdot\nabla\phi)\frac{\partial w}{\partial\eta}d\Gamma dt\\
&= -2s\lambda\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda[\phi'(\nabla w)' - \nabla(\nabla w\cdot\nabla\phi)]\cdot\nabla w dxdt\\
&\quad -2s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda w'\phi'\nabla w\cdot\nabla\phi dxdt + 2s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda|\nabla w\cdot\nabla\phi|^2dxdt\\
&\quad +2s\lambda\int_0^T\int_\Gamma \varphi_\lambda(w'\phi' - \nabla w\cdot\nabla\phi)\frac{\partial w}{\partial\eta}d\Gamma dt\\
&= -2s\lambda\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda\phi'(\nabla w)'\cdot\nabla w dxdt + 2s\lambda\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda\nabla(\nabla w\cdot\nabla\phi)\cdot\nabla w dxdt\\
&\quad -2s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda w'\phi'\nabla w\cdot\nabla\phi dxdt + 2s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda|\nabla w\cdot\nabla\phi|^2dxdt\\
&\quad +2s\lambda\int_0^T\int_\Gamma \varphi_\lambda(w'\phi' - \nabla w\cdot\nabla\phi)\frac{\partial w}{\partial\eta}d\Gamma dt\\
&= -s\lambda\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda\phi'\frac{d}{dt}|\nabla w|^2dxdt + 2s\lambda\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda\nabla(\nabla w\cdot\nabla\phi)\cdot\nabla w dxdt\\
&\quad -2s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda w'\phi'\nabla w\cdot\nabla\phi dxdt + 2s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda|\nabla w\cdot\nabla\phi|^2dxdt\\
&\quad +2s\lambda\int_0^T\int_\Gamma \varphi_\lambda(w'\phi' - \nabla w\cdot\nabla\phi)\frac{\partial w}{\partial\eta}d\Gamma dt\\
&= s\lambda\int_0^T\int_\Omega [\varphi_\lambda\phi']'|\nabla w|^2dxdt + 2s\lambda\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda\nabla(\nabla w\cdot\nabla\phi)\cdot\nabla w dxdt\\
&\quad -2s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda w'\phi'\nabla w\cdot\nabla\phi dxdt + 2s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda|\nabla w\cdot\nabla\phi|^2dxdt\\
&\quad +2s\lambda\int_0^T\int_\Gamma \varphi_\lambda(w'\phi' - \nabla w\cdot\nabla\phi)\frac{\partial w}{\partial\eta}d\Gamma dt\\
&= s\lambda\int_0^T\int_\Omega (\lambda\varphi_\lambda|\phi'|^2 + \varphi_\lambda\phi'')|\nabla w|^2dxdt + s\lambda\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda\nabla\phi\cdot\nabla|\nabla w|^2dxdt\\
&\quad +2s\lambda\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda D^2\phi(\nabla w,\nabla w)dxdt - 2s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda w'\phi'\nabla w\cdot\nabla\phi dxdt\\
&\quad +2s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda|\nabla w\cdot\nabla\phi|^2dxdt + 2s\lambda\int_0^T\int_\Gamma \varphi_\lambda(w'\phi' - \nabla w\cdot\nabla\phi)\frac{\partial w}{\partial\eta}d\Gamma dt.
\end{aligned}
$$

Como $\Delta\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda\Delta\phi$, usando novamente a Fórmula de Green na segunda parcela, obtemos:

$$\begin{aligned}
I_{23} &= s\lambda\int_0^T\int_\Omega(\lambda\varphi_\lambda|\phi'|^2+\varphi_\lambda\phi'')|\nabla w|^2dxdt - s\int_0^T\int_\Omega|\nabla w|^2\Delta\varphi_\lambda dxdt\\
&+s\int_0^T\int_\Gamma|\nabla w|^2\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\eta}d\Gamma dt + 2s\lambda\int_0^T\int_\Omega\varphi_\lambda D^2\phi(\nabla w,\nabla w)dxdt\\
&-2s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega\varphi_\lambda w'\phi'\nabla w\cdot\nabla\phi dxdt + 2s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega\varphi_\lambda|\nabla w\cdot\nabla\phi|^2dxdt\\
&+2s\lambda\int_0^T\int_\Gamma\varphi_\lambda(w'\phi'-\nabla w\cdot\nabla\phi)\frac{\partial w}{\partial\eta}d\Gamma dt\\
&= s\lambda\int_0^T\int_\Omega(\lambda\varphi_\lambda|\phi'|^2+\varphi_\lambda\phi'')|\nabla w|^2dxdt - s\lambda\int_0^T\int_\Omega|\nabla w|^2(\lambda\varphi_\lambda|\nabla\phi|^2+\varphi_\lambda\Delta\phi)dxdt\\
&+s\lambda\int_0^T\int_\Gamma|\nabla w|^2\varphi_\lambda\frac{\partial\phi}{\partial\eta}d\Gamma dt + 2s\lambda\int_0^T\int_\Omega\varphi_\lambda D^2\phi(\nabla w,\nabla w)dxdt\\
&-2s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega\varphi_\lambda w'\phi'\nabla w\cdot\nabla\phi dxdt + 2s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega\varphi_\lambda|\nabla w\cdot\nabla\phi|^2dxdt\\
&+2s\lambda\int_0^T\int_\Gamma\varphi_\lambda(w'\phi'-\nabla w\cdot\nabla\phi)\frac{\partial w}{\partial\eta}d\Gamma dt.
\end{aligned}$$

Do teorema da regularidade escondida 2.4, resulta que:

$$\begin{aligned}
I_{23} &= s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega\varphi_\lambda|\nabla w|^2(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)dxdt + s\lambda\int_0^T\int_\Omega\varphi_\lambda|\nabla w|^2(\phi''-\Delta\phi)dxdt\\
&+s\lambda\int_0^T\int_\Gamma\left|\frac{\partial w}{\partial\eta}\right|^2\varphi_\lambda\frac{\partial\phi}{\partial\eta}d\Gamma dt + 2s\lambda\int_0^T\int_\Omega\varphi_\lambda D^2\phi(\nabla w,\nabla w)dxdt\\
&-2s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega\varphi_\lambda w'\phi'\nabla w\cdot\nabla\phi dxdt + 2s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega\varphi_\lambda|\nabla w\cdot\nabla\phi|^2dxdt\\
&-2s\lambda\int_0^T\int_\Gamma\varphi_\lambda\left|\frac{\partial w}{\partial\eta}\right|^2\frac{\partial\phi}{\partial\eta}d\Gamma dt\\
&= s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega\varphi_\lambda|\nabla w|^2(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)dxdt + s\lambda\int_0^T\int_\Omega\varphi_\lambda|\nabla w|^2(\phi''-\Delta\phi)dxdt\\
&-s\lambda\int_0^T\int_\Gamma\varphi_\lambda\left|\frac{\partial w}{\partial\eta}\right|^2\frac{\partial\phi}{\partial\eta}d\Gamma dt + 2s\lambda\int_0^T\int_\Omega\varphi_\lambda D^2\phi(\nabla w,\nabla w)dxdt\\
&-2s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega\varphi_\lambda w'\phi'\nabla w\cdot\nabla\phi dxdt + 2s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega\varphi_\lambda|\nabla w\cdot\nabla\phi|^2dxdt.
\end{aligned}$$

Cálculo de I_{31}

$$\begin{aligned}
I_{31} &= \int_0^T\int_\Omega s^2\lambda^2\varphi_\lambda^2 w(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)(M_1-1)s\lambda\varphi_\lambda(\phi''-\Delta\phi)wdxdt\\
&= (M_1-1)s^3\lambda^3\int_0^T\int_\Omega\varphi_\lambda^3|w|^2(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)(\phi''-\Delta\phi)dxdt.
\end{aligned}$$

Cálculo de I_{32}

$$
\begin{aligned}
I_{32} &= \int_0^T\int_\Omega s^2\lambda^2\varphi_\lambda^2 w(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)(-s\lambda^2\varphi_\lambda w)(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)w\,dxdt\\
&= -s^3\lambda^4\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda^3|w|^2(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)^2dxdt.
\end{aligned}
$$

Cálculo de I_{33}

Utilizaremos a Fórmula de Green, integração por partes, o fato de $w\in X$ e as identidades:

- $\varphi_\lambda^3(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)\nabla\phi = \frac{1}{3\lambda}\nabla\left(\varphi_\lambda^3(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)\right)+\frac{4}{9\lambda^2}\nabla\varphi_\lambda^3;$
- $\Delta\left(\varphi_\lambda^3(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)\right) = 9\lambda^2\varphi_\lambda^3|\nabla\phi|^2(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)+3\lambda\varphi_\lambda^3\Delta\phi(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)-6\lambda\varphi_\lambda^3\nabla\phi\cdot\nabla|\nabla\phi|^2-\varphi_\lambda^3\Delta|\nabla\phi|^2;$
- $\Delta\varphi_\lambda^3 = 9\lambda^2\varphi_\lambda^3|\nabla\phi|^2+3\lambda\varphi_\lambda^3\Delta\phi;$
- $\Delta\phi = 2N,\quad \Delta|\nabla\phi|^2 = 8N,\quad \nabla\phi\cdot\nabla|\nabla\phi|^2 = 2D^2\phi(\nabla\phi,\nabla\phi).$

De fato,

$$
\begin{aligned}
I_{33} &= \int_0^T\int_\Omega s^2\lambda^2\varphi_\lambda^2 w(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)(-2s\lambda\varphi_\lambda)(w'\phi'-\nabla w\cdot\nabla\phi)dxdt\\
&= -s^3\lambda^3\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda^3 2ww'\phi'(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)dxdt\\
&\quad +s^3\lambda^3\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda^3(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)\nabla\phi\cdot(2w\nabla w)dxdt\\
&= -s^3\lambda^3\int_0^T\int_\Omega \frac{d}{dt}|w|^2\varphi_\lambda^3\phi'(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)dxdt\\
&\quad +s^3\lambda^3\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda^3(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)\nabla\phi\cdot\nabla|w|^2dxdt\\
&= s^3\lambda^3\int_0^T\int_\Omega |w|^2[\varphi_\lambda^3\phi'(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)]'dxdt\\
&\quad +s^3\lambda^3\int_0^T\int_\Omega \left[\frac{1}{3\lambda}\nabla\left(\varphi_\lambda^3(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)\right)+\frac{4}{9\lambda^2}\nabla\varphi_\lambda^3\right]\cdot\nabla|w|^2dxdt\\
&= s^3\lambda^3\int_0^T\int_\Omega |w|^2\left[3\lambda\varphi_\lambda^3|\phi'|^2(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)+\varphi_\lambda^3\phi''(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)+2\varphi_\lambda^3\phi''|\phi'|^2\right]dxdt\\
&\quad +s^3\lambda^3\int_0^T\int_\Omega \left[\frac{1}{3\lambda}\nabla\left(\varphi_\lambda^3(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)\right)+\frac{4}{9\lambda^2}\nabla\varphi_\lambda^3\right]\cdot\nabla|w|^2dxdt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 3s^3\lambda^4 \int_0^T \int_\Omega |w|^2 \varphi_\lambda^3 |\phi'|^2 (|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2) dxdt + s^3\lambda^3 \int_0^T \int_\Omega |w|^2 \varphi_\lambda^3 \phi'' (|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2) dxdt \\
&\quad + 2s^3\lambda^3 \int_0^T \int_\Omega |w|^2 \varphi_\lambda^3 \phi'' |\phi'|^2 dxdt + \frac{s^3\lambda^2}{3} \int_0^T \int_\Omega \nabla \left(\varphi_\lambda^3 (|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2) \right) \cdot \nabla |w|^2 dxdt \\
&\quad + \frac{4s^3\lambda}{9} \int_0^T \int_\Omega \nabla \varphi_\lambda^3 \cdot \nabla |w|^2 dxdt \\
&= 3s^3\lambda^4 \int_0^T \int_\Omega |w|^2 \varphi_\lambda^3 |\phi'|^2 (|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2) dxdt + s^3\lambda^3 \int_0^T \int_\Omega |w|^2 \varphi_\lambda^3 \phi'' (|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2) dxdt \\
&\quad + 2s^3\lambda^3 \int_0^T \int_\Omega |w|^2 \varphi_\lambda^3 \phi'' |\phi'|^2 dxdt - \frac{s^3\lambda^2}{3} \int_0^T \int_\Omega |w|^2 \Delta \left(\varphi_\lambda^3 (|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2) \right) dxdt \\
&\quad - \frac{4s^3\lambda}{9} \int_0^T \int_\Omega |w|^2 \Delta \varphi_\lambda^3 dxdt \\
&= 3s^3\lambda^4 \int_0^T \int_\Omega |w|^2 \varphi_\lambda^3 |\phi'|^2 (|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2) dxdt + s^3\lambda^3 \int_0^T \int_\Omega |w|^2 \varphi_\lambda^3 \phi'' (|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2) dxdt \\
&\quad + 2s^3\lambda^3 \int_0^T \int_\Omega |w|^2 \varphi_\lambda^3 \phi'' |\phi'|^2 dxdt - 3s^3\lambda^4 \int_0^T \int_\Omega |w|^2 \varphi_\lambda^3 |\nabla\phi|^2 (|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2) dxdt \\
&\quad - s^3\lambda^3 \int_0^T \int_\Omega |w|^2 \varphi_\lambda^3 \Delta\phi (|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2) dxdt + 2s^3\lambda^3 \int_0^T \int_\Omega |w|^2 \varphi_\lambda^3 \nabla\phi \cdot \nabla |\nabla\phi|^2 dxdt \\
&\quad + \frac{s^3\lambda^2}{3} \int_0^T \int_\Omega |w|^2 \varphi_\lambda^3 \Delta |\nabla\phi|^2 dxdt - 4s^3\lambda^3 \int_0^T \int_\Omega |w|^2 \varphi_\lambda^3 |\nabla\phi|^2 dxdt \\
&\quad - \frac{4s^3\lambda^2}{3} \int_0^T \int_\Omega |w|^2 \varphi_\lambda^3 \Delta\phi dxdt \\
&= 3s^3\lambda^4 \int_0^T \int_\Omega |w|^2 \varphi_\lambda^3 |\phi'|^2 (|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2) dxdt + s^3\lambda^3 \int_0^T \int_\Omega |w|^2 \varphi_\lambda^3 \phi'' (|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2) dxdt \\
&\quad + 2s^3\lambda^3 \int_0^T \int_\Omega |w|^2 \varphi_\lambda^3 \phi'' |\phi'|^2 dxdt - 3s^3\lambda^4 \int_0^T \int_\Omega |w|^2 \varphi_\lambda^3 |\nabla\phi|^2 (|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2) dxdt \\
&\quad - s^3\lambda^3 \int_0^T \int_\Omega |w|^2 \varphi_\lambda^3 \Delta\phi (|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2) dxdt + 4s^3\lambda^3 \int_0^T \int_\Omega |w|^2 \varphi_\lambda^3 D^2\phi(\nabla\phi, \nabla\phi) dxdt \\
&\quad + \frac{8Ns^3\lambda^2}{3} \int_0^T \int_\Omega |w|^2 \varphi_\lambda^3 dxdt - 2s^3\lambda^3 \int_0^T \int_\Omega |w|^2 \varphi_\lambda^3 D^2\phi(\nabla\phi, \nabla\phi) dxdt \\
&\quad - \frac{8Ns^3\lambda^2}{3} \int_0^T \int_\Omega |w|^2 \varphi_\lambda^3 dxdt \\
&= 3s^3\lambda^4 \int_0^T \int_\Omega |w|^2 \varphi_\lambda^3 (|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2)^2 dxdt \\
&\quad + s^3\lambda^3 \int_0^T \int_\Omega |w|^2 \varphi_\lambda^3 (\phi'' - \Delta\phi)(|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2) dxdt \\
&\quad + 2s^3\lambda^3 \int_0^T \int_\Omega |w|^2 \varphi_\lambda^3 \left(\phi'' |\phi'|^2 + D^2\phi(\nabla\phi, \nabla\phi) \right) dxdt.
\end{aligned}
$$

Etapa III - Estimar $\int_0^T\int_\Omega P_1wP_2w\,dxdt$

Dos cálculos dos I_{jk}'s obtidos anteriomente, temos:

$$\begin{aligned}
\int_0^T\int_\Omega P_1wP_2w\,dxdt &= \sum_{j,k=1}^{3} I_{jk}\\
&= 2s\lambda\int_0^T\int_\Omega |w'|^2\varphi_\lambda\phi''dxdt - M_1s\lambda\int_0^T\int_\Omega |w'|^2\varphi_\lambda(\phi''-\Delta\phi)dxdt\\
&+2s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda\left(|w'|^2|\phi'|^2-2w'\phi'\nabla w\cdot\nabla\phi+|\nabla\phi\cdot\nabla w|^2\right)dxdt\\
&+M_1s\lambda\int_0^T\int_\Omega |\nabla w|^2\varphi_\lambda(\phi''-\Delta\phi)dxdt - s\lambda\int_0^T\int_\Gamma \varphi_\lambda\left|\frac{\partial w}{\partial\eta}\right|^2\frac{\partial\phi}{\partial\eta}d\Gamma dt\\
&+2s\lambda\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda D^2\phi(\nabla w,\nabla w)dxdt\\
&+M_1s^3\lambda^3\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda^3|w|^2(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)(\phi''-\Delta\phi)dxdt\\
&2s^3\lambda^3\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda^3\left(\phi''|\phi'|^2+D^2\phi(\nabla\phi,\nabla\phi)\right)dxdt\\
&+2s^3\lambda^4\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda^3|w|^2(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)^2dxdt+X_1.
\end{aligned}$$

Usaremos aqui as identidades:

- $\phi''=-2\beta;\qquad \Delta\phi=2N;\qquad D^2\phi(\nabla w,\nabla w)=2|\nabla w|^2.$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_0^T\int_\Omega P_1wP_2w\,dxdt &= -4\beta s\lambda\int_0^T\int_\Omega |w'|^2\varphi_\lambda dxdt + 2M_1(\beta+N)s\lambda\int_0^T\int_\Omega |w'|^2\varphi_\lambda dxdt\\
&+2s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda(w'\phi'+\nabla\phi\cdot\nabla w)^2dxdt\\
&-2M_1(\beta+N)s\lambda\int_0^T\int_\Omega |\nabla w|^2\varphi_\lambda dxdt \qquad (3.14)\\
&-2s\lambda\int_0^T\int_\Gamma \varphi_\lambda\left|\frac{\partial w}{\partial\eta}\right|^2(x-x_0)\cdot\eta(x)d\Gamma dt + 4s\lambda\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda|\nabla w|^2dxdt\\
&-2(\beta+N)M_1s^3\lambda^3\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda^3|w|^2(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)dxdt\\
&+2s^3\lambda^3\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda^3\left(\phi''|\phi'|^2+2|\nabla\phi|^2\right)dxdt\\
&+2s^3\lambda^4\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda^3|w|^2(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)^2dxdt+X_1,
\end{aligned}$$

onde:

$$
\begin{aligned}
X_1 \;=\; & -s\lambda\int_0^T\int_\Omega |w'|^2\varphi_\lambda\Delta\phi dxdt-\frac{1-M_1}{2}s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda(\phi''+\lambda|\phi'|^2)(\phi''-\Delta\phi)dxdt\\
&-\frac{s\lambda^4}{2}\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda|\phi'|^2(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)dxdt-\frac{5}{2}s\lambda^3\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda|\phi'|^2\phi''dxdt\\
&+\frac{s\lambda^3}{2}\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda\phi''|\nabla\phi|^2dxdt-s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega |w'|^2\varphi_\lambda|\nabla\phi|^2dxdt\\
&-s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda|\phi''|^2dxdt+s\lambda\int_0^T\int_\Omega |w'|^2\varphi_\lambda(\Delta\phi+\lambda|\nabla\phi|^2)dxdt\\
&+\frac{1-M_1}{2}s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda(\phi''-\Delta\phi)(\Delta\phi+\lambda|\nabla\phi|^2)dxdt\\
&-s\lambda\int_0^T\int_\Omega |\nabla w|^2\varphi_\lambda(\phi''-\Delta\phi)dxdt-s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega |\nabla w|^2\varphi_\lambda(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)dxdt\\
&+\frac{s\lambda^3}{2}\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda(\Delta\phi+\lambda|\nabla\phi|^2)(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)dxdt\\
&-2s\lambda^3\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda D^2\phi(\nabla\phi,\nabla\phi)dxdt-s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda\sum_{i,j=1}^N(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i\partial x_j})^2dxdt\\
&+s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda|\nabla w|^2(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)dxdt+s\lambda\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda|\nabla w|^2(\phi''-\Delta\phi)dxdt.
\end{aligned}
$$

Observando que alguns termos se cancelam, resulta que:

$$
\begin{aligned}
X_1 \;=\; & -\frac{1-M_1}{2}s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda(\phi''+\lambda|\phi'|^2)(\phi''-\Delta\phi)dxdt\\
&-\frac{s\lambda^4}{2}\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda|\phi'|^2(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)dxdt-\frac{5}{2}s\lambda^3\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda|\phi'|^2\phi''dxdt\\
&+\frac{s\lambda^3}{2}\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda\phi''|\nabla\phi|^2dxdt-s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda|\phi''|^2dxdt\\
&+\frac{1-M_1}{2}s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda(\phi''-\Delta\phi)(\Delta\phi+\lambda|\nabla\phi|^2)dxdt\\
&+\frac{s\lambda^3}{2}\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda(\Delta\phi+\lambda|\nabla\phi|^2)(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)dxdt\\
&-2s\lambda^3\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda D^2\phi(\nabla\phi,\nabla\phi)dxdt-s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda\sum_{i,j=1}^N(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i\partial x_j})^2dxdt.
\end{aligned}
$$

Agora iremos estimar cada uma das nove parcelas de X_1.

Lembremos que:

- $\phi' = -2\beta t;$ $\qquad \phi'' = -2\beta;$ $\qquad \Delta\phi = 2N;$ $\qquad D^2(\phi) = Id;$
- $|\nabla\phi|^2 = 4|x-x_0|^2;$ $\qquad \displaystyle\sum_{i,j=1}^N\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i\partial x_j}\right)^2 = 4N.$

Sendo Ω limitado e $x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$, existe $R > 0$ tal que

$$|\nabla\phi|^2 \leqslant 4R^2.$$

Como $\varphi_\lambda = e^{\lambda\phi}$, $\lambda > 0$ e $\phi \geqslant 1$ em Q então,

$$\varphi_\lambda \geqslant 1, \quad \varphi_\lambda^2 \geqslant 1 \quad \text{e} \quad \varphi_\lambda^3 \geqslant \varphi_\lambda^2 \quad \text{em} \quad Q.$$

Como $e^a \geqslant a, \quad \forall \; a \in \mathbb{R}$, temos

$$\varphi_\lambda \geqslant \lambda\phi \geqslant \lambda \quad \text{em} \quad Q.$$

Tomando $\lambda \geqslant 1$, segue que:

$$1 \leqslant \lambda^2, \quad \lambda \leqslant \lambda^3 \quad \text{e} \quad \lambda^2 \leqslant \lambda^3.$$

Primeira parcela de X_1

$$\begin{aligned}
&\left|-\tfrac{1-M_1}{2}s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda(\phi'' + \lambda|\phi'|^2)(\phi'' - \Delta\phi)dxdt\right| \\
\leqslant\; & \tfrac{|1-M_1|}{2}s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda|-2\beta + \lambda 4\beta^2t^2||-2\beta - 2N|dxdt \\
\leqslant\; & |1-M_1|(\beta+N)s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda(2\beta\lambda + \lambda 4\beta^2T^2)dxdt \\
\leqslant\; & \underbrace{|1-M_1|(\beta+N)(2\beta+4\beta^2T^2)}_{C_1}s\lambda^3\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda^3 dxdt \\
=\; & C_1 s\lambda^3\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda^3 dxdt.
\end{aligned}$$

Segunda parcela de X_1

$$\begin{aligned}
&\left|-\tfrac{s\lambda^4}{2}\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda|\phi'|^2(|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2)dxdt\right| \\
\leqslant\; & \tfrac{s\lambda^3}{2}\int_0^T\int_\Omega \lambda|w|^2\varphi_\lambda 4\beta^2t^2(4\beta^2t^2 + 4R^2)dxdt \\
\leqslant\; & \underbrace{(4\beta^2T^2 + 4R^2)2\beta^2T^2}_{C_2}s\lambda^3\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda^3 dxdt \\
=\; & C_2 s\lambda^3\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda^3 dxdt.
\end{aligned}$$

Terceira parcela de X_1

$$\begin{aligned}
\left|-\frac{5}{2}s\lambda^3\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda|\phi'|^2\phi'' dxdt\right| \;\leqslant\; & \frac{5}{2}s\lambda^3\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda 4\beta^2t^2 2\beta dxdt \\
\leqslant\; & \underbrace{20\beta^3T^2}_{C_3}s\lambda^3\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda dxdt \\
\leqslant\; & C_3 s\lambda^3\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda^3 dxdt.
\end{aligned}$$

Quarta parcela de X_1

$$\begin{aligned}\left|\frac{s\lambda^3}{2}\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda \varphi^{''}|\nabla\varphi|^2 dxdt\right| &\leqslant \frac{s\lambda^3}{2}\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda 2\beta 4R^2 dxdt\\ &= \underbrace{4R^2\beta}_{C_4} s\lambda^3\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda dxdt\\ &\leqslant C_4 s\lambda^3\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda^3 dxdt.\end{aligned}$$

Quinta parcela de X_1

$$\begin{aligned}\left|-s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda |\varphi^{''}|^2 dxdt\right| &\leqslant s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda 4\beta^2 dxdt\\ &= \underbrace{4\beta^2}_{C_5} s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda dxdt\\ &\leqslant C_5 s\lambda^3\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda^3 dxdt.\end{aligned}$$

Sexta parcela de X_1

$$\begin{aligned}&\left|\tfrac{1-M_1}{2}s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda(\varphi^{''}-\Delta\varphi)(\Delta\varphi+\lambda|\nabla\varphi|^2)dxdt\right|\\ \leqslant\ & \tfrac{|1-M_1|}{2}s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda(2\beta+2N)(2N+\lambda 4R^2)dxdt\\ \leqslant\ & |1-M_1|(\beta+N)s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda^3(\lambda 2N+\lambda 4R^2)dxdt\\ \leqslant\ & \underbrace{|1-M_1|(\beta+N)(2N+4R^2)}_{C_6} s\lambda^3\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda^3 dxdt\\ =\ & C_6 s\lambda^3\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda^3 dxdt.\end{aligned}$$

Sétima parcela de X_1

$$\begin{aligned}&\left|\tfrac{s\lambda^3}{2}\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda(\Delta\varphi+\lambda|\nabla\varphi|^2)(|\varphi^{'}|^2-|\nabla\varphi|^2)dxdt\right|\\ \leqslant\ & \tfrac{s\lambda^3}{2}\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda(2N+\lambda 4R^2)(4\beta^2t^2+4R^2)dxdt\\ \leqslant\ & 2(\beta^2T^2+R^2)s\lambda^3\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda(\lambda 2N+\lambda 4R^2)dxdt\\ \leqslant\ & \underbrace{2(\beta^2T^2+R^2)(2N+4R^2)}_{C_7} s\lambda^3\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda \lambda dxdt\\ \leqslant\ & C_7 s\lambda^3\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda^3 dxdt.\end{aligned}$$

Oitava parcela de X_1

$$\begin{aligned}\left|-2s\lambda^3\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda D^2\phi(\nabla\phi,\nabla\phi)dxdt\right| &\leqslant 2s\lambda^3\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda 2|\nabla\phi|^2dxdt\\ &\leqslant \underbrace{8R^2}_{C_8}s\lambda^3\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda dxdt\\ &\leqslant C_8 s\lambda^3\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda^3 dxdt.\end{aligned}$$

Nona parcela de X_1

$$\begin{aligned}\left|-s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda\sum_{i,j=1}^N(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i\partial x_j})^2dxdt\right| &\leqslant s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda 4N dxdt\\ &= \underbrace{4N}_{C_9}s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda dxdt\\ &\leqslant C_9 s\lambda^3\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda^3 dxdt.\end{aligned}$$

Então, para $\lambda > 1$, $s > 0$ e $C_0 = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant 9} C_i$, temos:

$$|X_1| \leqslant C_0 s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda^3 dxdt. \tag{3.15}$$

Etapa IV

Como M_1 verifica (3.7), definimos $M_2 := 2M_1(\beta+N)$. Portanto,

$$4\beta < M_2 < 4.$$

De (3.14), obtemos:

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega P_1wP_2wdxdt &= (-4\beta+M_2)s\lambda\int_0^T\int_\Omega |w'|^2\varphi_\lambda dxdt\\ &+2s\lambda^2\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda(w'\phi'+\nabla\phi\cdot\nabla w)^2dxdt\\ &+(4-M_2)s\lambda\int_0^T\int_\Omega |\nabla w|^2\varphi_\lambda dxdt\\ &-2s\lambda\int_0^T\int_\Gamma \varphi_\lambda\left|\frac{\partial w}{\partial\eta}\right|^2(x-x_0)\cdot\eta(x)d\Gamma dt\\ &-M_2s^3\lambda^3\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda^3|w|^2(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)dxdt\\ &+2s^3\lambda^3\int_0^T\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda^3\left(\phi''|\phi'|^2+2|\nabla\phi|^2\right)dxdt\\ &+2s^3\lambda^3\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda^3|w|^2\lambda(|\phi'|^2-|\nabla\phi|^2)^2dxdt+X_1.\end{aligned}$$

Definimos F_λ como:

$$F_\lambda(\phi) := \lambda\left(|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2\right)^2 - \frac{M_2}{2}\left(|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2\right) + \left(\phi''|\phi'|^2 + 2|\nabla\phi|^2\right)$$

Sendo $\varphi_\lambda(w'\phi' + \nabla\phi\cdot\nabla w)^2 \geqslant 0$ e usando a definição de F_λ, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega P_1 w P_2 w\,dxdt \;\geqslant\; & (-4\beta + M_2)s\lambda\int_0^T\int_\Omega |w'|^2\varphi_\lambda\,dxdt\\ & +(4 - M_2)s\lambda\int_0^T\int_\Omega |\nabla w|^2\varphi_\lambda\,dxdt\\ & -2s\lambda\int_0^T\int_\Gamma \varphi_\lambda\left|\frac{\partial w}{\partial\eta}\right|^2 (x - x_0)\cdot\eta(x)\,d\Gamma dt\\ & +2s^3\lambda^3\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda^3|w|^2F_\lambda(\phi)\,dxdt + X_1.\end{aligned} \tag{3.16}$$

Estimaremos a penúltima parcela de (3.16). Para isto, reescreveremos F_λ usando a definição de ϕ.

$$\begin{aligned}F_\lambda(\phi) &= \lambda\left(4\beta^2t^2 - 4|x - x_0|^2\right)^2 - \frac{M_2}{2}\left(4\beta^2t^2 - 4|x - x_0|^2\right) + \left(-8\beta^3t^2 + 8|x - x_0|^2\right)\\ &= 16\lambda\left(|x - x_0|^2 - \beta^2t^2\right)^2 + 2M_2\left(|x - x_0|^2 - \beta^2t^2\right) + 8\left(|x - x_0|^2 - \beta^3t^2\right)\\ &\quad +(8\beta - 8\beta)\left(|x - x_0|^2 - \beta^2t^2\right)\\ &= 16\lambda\left(|x - x_0|^2 - \beta^2t^2\right)^2 + 2(M_2 + 4\beta)\left(|x - x_0|^2 - \beta^2t^2\right) + 8(1 - \beta)|x - x_0|^2.\end{aligned}$$

Como $0 < \beta < 1$ e $x_0 \notin \overline{\Omega}$, existe $K > 0$ tal que

$$8(1 - \beta)|x - x_0|^2 \geqslant K > 0 \quad \forall (x, t) \in Q.$$

Seja $X := |x - x_0|^2 - \beta^2t^2$. Logo,

$$F_\lambda(\phi) \geqslant 16\lambda X^2 + 2(M_2 + 4\beta)X + K := P_\lambda(X).$$

Vejamos que P_λ é uma equação quadrática em X, com descriminante

$$\triangle = 4(M_2 + 4\beta) - 64\lambda K.$$

Para $\lambda > \lambda_0 \gg 1$ temos que $\triangle < 0$. Assim P_λ não possui raízes reais e sendo $16\lambda > 0$, obtemos que $P_\lambda > 0$ para todo X. Deste modo, para $\lambda > \lambda_0$, existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\min_{X\in\mathbb{R}} P_\lambda(X) \geqslant \alpha_0.$$

Assim, para $\lambda \geqslant \lambda_0$

$$F_\lambda(\phi) \geqslant P_\lambda(X) \geqslant \alpha_0 \quad \text{em} \quad Q. \tag{3.17}$$

De (3.17) e (3.16) e tomando $0 < C_2 < \min\{M_2 - 4\beta, 4 - M_2, 2\alpha_0, 1\}$, resulta que:

$$\begin{aligned}
\int_0^T\int_\Omega P_1wP_2w\,dxdt \ &\geqslant\ (-4\beta + M_2)s\lambda\int_0^T\int_\Omega |w'|^2\varphi_\lambda\,dxdt \\
&\quad +(4-M_2)s\lambda\int_0^T\int_\Omega |\nabla w|^2\varphi_\lambda\,dxdt \\
&\quad -2s\lambda\int_0^T\int_\Gamma \varphi_\lambda\left|\frac{\partial w}{\partial\eta}\right|^2 (x-x_0)\cdot\eta(x)\,d\Gamma dt \\
&\quad +2\alpha_0 s^3\lambda^3\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda^3|w|^2\,dxdt + X_1 \\
&\geqslant\ C_2 s\lambda\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda(|w'|^2 + |\nabla w|^2)\,dxdt \\
&\quad -2s\lambda\int_0^T\int_\Gamma \varphi_\lambda\left|\frac{\partial w}{\partial\eta}\right|^2 (x-x_0)\cdot\eta(x)\,d\Gamma dt \qquad (3.18)\\
&\quad +C_2 s^3\lambda^3\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda^3|w|^2\,dxdt + X_1.
\end{aligned}$$

De (3.15), segue que:

$$X_1 \geqslant -C_0 s\lambda^3\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda^3|w|^2\,dxdt.$$

Tomando $s_0 \gg 0$ tal que $s_0 \geqslant \left(\dfrac{C_0}{C_2}\right)^{\frac{1}{2}}$ e $C_3 := C_2 - \dfrac{C_0}{s_0^2}$, temos que:

$$0 < C_3 \leqslant C_2 - \frac{C_0}{s^2} < C_2 < 1 \quad \text{para} \quad s \geqslant s_0,$$

e deste modo obtemos,

$$\begin{aligned}
C_2 s^3\lambda^3\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda^3|w|^2\,dxdt + X_1 \ &\geqslant\ (C_2 s^3\lambda^3 - C_0 s\lambda^3)\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda^3|w|^2\,dxdt \\
&=\ \left(C_2 - \frac{C_0}{s^2}\right)s^3\lambda^3\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda^3|w|^2\,dxdt \\
&\geqslant\ C_3 s^3\lambda^3\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda^3|w|^2\,dxdt.
\end{aligned}$$

Utilizando esta última desigualdade em (3.18), obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^T\int_\Omega P_1wP_2w\,dxdt \ &\geqslant\ C_3 s\lambda\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda(|w'|^2 + |\nabla w|^2)\,dxdt \\
&\quad -2s\lambda\int_0^T\int_\Gamma \varphi_\lambda\left|\frac{\partial w}{\partial\eta}\right|^2 (x-x_0)\cdot\eta(x)\,d\Gamma dt \\
&\quad +C_3 s^3\lambda^3\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda^3|w|^2\,dxdt, \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

para $s \geqslant s_0$ e $\lambda \geqslant \lambda_0$.

De (3.9), vale que:

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega |R_0 w|^2 dxdt &= M_1^2 s^2\lambda^2 \int_0^T\int_\Omega |\varphi_\lambda(\phi'' - \triangle\phi)w|^2 dxdt \\ &= M_1^2 s^2 \lambda^2 4(\beta + N)^2 \int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda^2 |w|^2 dxdt \\ &= M_2^2 s^2\lambda^2 \int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda^2 |w|^2 dxdt. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Tomando $\lambda_0 \gg 0$ tal que $\lambda_0 \geqslant \dfrac{M_2^2}{C_2 s_0}$ e $C_4 := \left(C_3 - \dfrac{M_2^2}{s_0\lambda_0}\right)$, temos que:

$$0 < C_4 \leqslant C_3 - \frac{M_2^2}{s\lambda} < C_3 < 1 \quad \text{para} \quad s \geqslant s_0, \quad \lambda \geqslant \lambda_0,$$

e deste modo,

$$\begin{aligned} C_3 s^3\lambda^3 \int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda^3 |w|^2 dxdt - M_2^2 s^2\lambda^2 \int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda^3|w|^2 dxdt \\ = \left(C_3 - \frac{M_2^2}{s\lambda}\right) s^3\lambda^3 \int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda^3 |w|^2 dxdt \\ \geqslant C_4 s^3\lambda^3 \int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda^3 |w|^2 dxdt, \end{aligned} \tag{3.21}$$

para $s \geqslant s_0$ e $\lambda \geqslant \lambda_0$.

De (3.19), (3.20) e (3.21), temos que:

$$\begin{aligned} \int_0^T\int_\Omega P_1 w P_2 w dxdt - \int_0^T\int_\Omega |R_0 w|^2 dxdt \geqslant\ & C_4 s\lambda \int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda(|w'|^2 + |\nabla w|^2) dxdt \\ & -2s\lambda \int_0^T\int_\Gamma \varphi_\lambda \left|\frac{\partial w}{\partial \eta}\right|^2 (x - x_0)\cdot\eta(x) d\Gamma dt \\ & + C_4 s^3\lambda^3 \int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda^3 |w|^2 dxdt, \end{aligned} \tag{3.22}$$

para $s \geqslant s_0$ e $\lambda \geqslant \lambda_0$.

Como por hipótese, $\Gamma_{x_0} \subseteq \Gamma_0$, considerando $M = \max\left\{1, \sup_{x\in\overline{\Omega}} |x - x_0|\right\}$ e utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_0^T\int_\Gamma \varphi_\lambda \left|\frac{\partial w}{\partial\eta}\right|^2 (x - x_0)\cdot\eta(x) d\Gamma dt &\leqslant \int_0^T\int_{\Gamma_0} \varphi_\lambda \left|\frac{\partial w}{\partial\eta}\right|^2 (x - x_0)\cdot\eta(x) d\Gamma dt \\ &\leqslant \int_0^T\int_{\Gamma_0} \varphi_\lambda \left|\frac{\partial w}{\partial\eta}\right|^2 |x - x_0||\eta(x)| d\Gamma dt \\ &\leqslant M\int_0^T\int_{\Gamma_0} \varphi_\lambda \left|\frac{\partial w}{\partial\eta}\right|^2 d\Gamma dt. \end{aligned} \tag{3.23}$$

De (3.22) e (3.23), resulta que

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega P_1wP_2w\,dxdt-\int_0^T\int_\Omega |R_0w|^2dxdt \geqslant\; & C_4s\lambda\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda(|w'|^2+|\nabla w|^2)dxdt\\ &-2Ms\lambda\int_0^T\int_{\Gamma_0}\varphi_\lambda\left|\frac{\partial w}{\partial\eta}\right|^2 d\Gamma dt \\ &+C_4s^3\lambda^3\int_0^T\int_\Omega \varphi_\lambda^3|w|^2dxdt,\end{aligned} \tag{3.24}$$

para $s\geqslant s_0$ e $\lambda\geqslant\lambda_0$. Utilizando (3.24) em (3.13) ganhamos:

$$\begin{aligned}2\int_0^T\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}|L_0v|^2dxdt \geqslant\; & \int_0^T\int_\Omega |P_1w|^2+|P_2w|^2dxdt\\ &+2\left(\int_0^T\int_\Omega P_1wP_2w\,dxdt-\int_0^T\int_\Omega|R_0w|^2dxdt\right)\\ \geqslant\; & \int_0^T\int_\Omega |P_1w|^2+|P_2w|^2dxdt\\ &+2C_4s\lambda\int_0^T\int_\Omega\varphi_\lambda(|w'|^2+|\nabla w|^2)dxdt\\ &-4Ms\lambda\int_0^T\int_{\Gamma_0}\varphi_\lambda\left|\frac{\partial w}{\partial\eta}\right|^2d\Gamma dt\\ &+2C_4s^3\lambda^3\int_0^T\int_\Omega\varphi_\lambda^3|w|^2dxdt,\end{aligned}$$

para $s\geqslant s_0$ e $\lambda\geqslant\lambda_0$. Como $4M\geqslant 2$ e $0<C_4<1$, resulta:

$$\begin{aligned}4M\int_0^T\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}|L_0v|^2dxdt \geqslant\; & C_4\int_0^T\int_\Omega |P_1w|^2+|P_2w|^2dxdt\\ &+2C_4s\lambda\int_0^T\int_\Omega\varphi_\lambda(|w'|^2+|\nabla w|^2)dxdt\\ &-4Ms\lambda\int_0^T\int_{\Gamma_0}\varphi_\lambda\left|\frac{\partial w}{\partial\eta}\right|^2d\Gamma dt\\ &+2C_4s^3\lambda^3\int_0^T\int_\Omega\varphi_\lambda^3|w|^2dxdt,\end{aligned}$$

para $s\geqslant s_0$ e $\lambda\geqslant\lambda_0$. Dividindo por C_4 e tomando $C=\frac{4M}{C_4}$, obtemos

$$\begin{aligned}&2s\lambda\int_0^T\int_\Omega\varphi_\lambda(|w'|^2+|\nabla w|^2)dxdt+2s^3\lambda^3\int_0^T\int_\Omega\varphi_\lambda^3|w|^2dxdt\\ &\quad+\int_0^T\int_\Omega|P_1w|^2dxdt+\int_0^T\int_\Omega|P_2w|^2dxdt\\ &\leqslant C\int_0^T\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}|L_0v|^2dxdt+Cs\lambda\int_0^T\int_{\Gamma_0}\varphi_\lambda\left|\frac{\partial w}{\partial\eta}\right|^2d\Gamma dt,\end{aligned} \tag{3.25}$$

para $s\geqslant s_0$ e $\lambda\geqslant\lambda_0$.

Etapa V - Retorno à v

Como $v = e^{-s\varphi_\lambda} w$, então

$$v' = -s\lambda\varphi_\lambda \phi' e^{-s\varphi_\lambda} w + e^{-s\varphi_\lambda} w' \quad \text{e} \quad \nabla v = -s\lambda\varphi_\lambda \nabla\phi e^{-s\varphi_\lambda} w + e^{-s\varphi_\lambda}\nabla w. \tag{3.26}$$

Sendo $w = 0$ sobre Σ, de (3.26), temos

$$\nabla v = e^{-s\varphi_\lambda}\nabla w \quad \text{sobre} \quad \Sigma.$$

Logo,

$$e^{s\varphi_\lambda}\frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\partial w}{\partial \eta} \quad \text{sobre} \quad \Sigma.$$

Quadrando, e em seguida multiplicando por φ_λ e integrando, obtemos:

$$\int_0^T\int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi_\lambda}\varphi_\lambda \left|\frac{\partial v}{\partial \eta}\right|^2 d\Gamma dt = \int_0^T\int_{\Gamma_0} \varphi_\lambda \left|\frac{\partial w}{\partial \eta}\right|^2 d\Gamma dt. \tag{3.27}$$

Considerando $\rho = \max\limits_{\overline{\Omega}\times[0,T]} \left\{2|\phi'|^2, 2|\nabla\phi|^2\right\}$ e observando (3.26), temos:

$$\begin{aligned} e^{2s\varphi_\lambda}|v'|^2 &= \left|-s\lambda\varphi_\lambda\phi' w + w'\right|^2 \leqslant 2|w'|^2 + 2s^2\lambda^2\varphi_\lambda^2|\phi'|^2|w|^2 \\ &\leqslant 2|w'|^2 + \rho s^2\lambda^2\varphi_\lambda^2 e^{2s\varphi_\lambda}|v|^2 \quad \text{em} \quad Q. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{2s\varphi_\lambda}|\nabla v|^2 &= |-s\lambda\varphi_\lambda w\nabla\phi + \nabla w|^2 \leqslant 2|\nabla w|^2 + 2s^2\lambda^2\varphi_\lambda^2|\nabla\phi|^2|w|^2 \\ &\leqslant 2|\nabla w|^2 + \rho s^2\lambda^2\varphi_\lambda^2 e^{2s\varphi_\lambda}|v|^2 \quad \text{em} \quad Q. \end{aligned}$$

Somando,

$$e^{2s\varphi_\lambda}\varphi_\lambda\left(|v'|^2 + |\nabla v|^2\right) \leqslant 2e^{2s\varphi_\lambda}\varphi_\lambda\left(|w'|^2 + |\nabla w|^2\right) + 2\rho s^2\lambda^2\varphi_\lambda^3 e^{2s\varphi_\lambda}|v|^2 \quad \text{em} \quad Q.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & s\lambda\int_0^T\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}\varphi_\lambda\left(|v'|^2 + |\nabla v|^2\right)dxdt + s^3\lambda^3\int_0^T\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}\varphi_\lambda^3|v|^2 dxdt \\ \leqslant\ & 2s\lambda\int_0^T\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}\varphi_\lambda\left(|w'|^2 + |\nabla w|^2\right)dxdt + 2\rho s^2\lambda^2\int_0^T\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}\varphi_\lambda^3|v|^2 dxdt \\ & +s^3\lambda^3\int_0^T\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}\varphi_\lambda^3|v|^2 dxdt \\ =\ & 2s\lambda\int_0^T\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}\varphi_\lambda\left(|w'|^2 + |\nabla w|^2\right)dxdt + (2\rho s^2\lambda^2 + s^3\lambda^3)\int_0^T\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}\varphi_\lambda^3|v|^2 dxdt. \end{aligned}$$

Tomando $\lambda_0 \gg 0$ e $s_0 \gg 0$ tal que $2\rho \leqslant s_0\lambda_0$, temos que $2\rho s^2\lambda^2 \leqslant s^3\lambda^3$ para $s \geqslant s_0$, $\lambda \geqslant \lambda_0$ e deste modo,

$$\begin{aligned} & s\lambda\int_0^T\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}\varphi_\lambda\left(|v'|^2 + |\nabla v|^2\right)dxdt + s^3\lambda^3\int_0^T\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}\varphi_\lambda^3|v|^2 dxdt \\ & \leqslant 2s\lambda\int_0^T\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}\varphi_\lambda\left(|w'|^2 + |\nabla w|^2\right)dxdt + 2s^3\lambda^3\int_0^T\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}\varphi_\lambda^3|v|^2 dxdt. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Substituindo (3.27) e (3.28) em (3.25), obtemos a desigualdade de Carleman:

$$s\lambda \int_0^T \int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda} \varphi_\lambda \left(|v'|^2 + |\nabla v|^2 \right) dx dt + s^3\lambda^3 \int_0^T \int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda} \varphi_\lambda^3 |v|^2 dx dt$$
$$+ \int_0^T \int_\Omega |P_1 w|^2 dx dt + \int_0^T \int_\Omega |P_2 w|^2 dx dt$$
$$\leqslant C \int_0^T \int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda} |L_0 v|^2 dx dt + Cs\lambda \int_0^T \int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi_\lambda} \varphi_\lambda \left| \frac{\partial v}{\partial \eta} \right|^2 d\Gamma dt,$$

para $s \geqslant s_0$, $\lambda \geqslant \lambda_0$ e para todo $v \in X$. □

Observação 3.1. *Na desigualdade de Carmelan* (3.10) *podemos tomar* $-T$ *no lugar de* 0*, com as devidas adaptações em* X *definido em* (3.1)*. Veja J. P. Puel [35].*

Capítulo 4

Controle Exato na Fronteira

Neste capítulo faremos a controlabilidade exata na fronteira da equação da onda. Para isso, consideremos o problema,

$$\left|\begin{array}{l} u'' - \Delta u + pu = 0 \ \ em \ \ Q; \\ u = v \ \ sobre \ \ \Gamma_0 \times (0,T); \\ u = 0 \ \ sobre \ \ \Gamma \setminus \Gamma_0 \times (0,T); \\ u(0) = u_0, \ \ u'(0) = u_1 \ \ em \ \ \Omega, \end{array}\right. \tag{4.1}$$

onde as condições iniciais $(u_0, u_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, o potencial p é tal que p, $p' \in L^\infty(Q)$ e o controle $v \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_0))$. Pelo teorema 2.5, o problema 4.1 possui uma única solução ultra-fraca u, e pelo teorema 2.6, temos

$$u \in C^0([0,T];L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T];H^{-1}(\Omega)).$$

A controlabilidade exata para o sistema (4.1) pode ser formulada como sendo: para $T \gg 0$ e para todo par $(\varphi_0, \varphi_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, deve-se encontrar um controle $v \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_0))$ tal que a solução $u = u(x,t,v)$ satisfaça

$$u(T) = \varphi_0 \ \text{ e } \ u'(T) = \varphi_1 \ \text{ em } \ \Omega. \tag{4.2}$$

Observação 4.1. *Devido a linearidade de* (4.1)*, basta considerarmos o caso em que* $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$.

De fato, seja o resultado verdadeiro para este caso. Dado $(\varphi_0, \varphi_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, seja y a solução ultra-fraca de

$$\left|\begin{array}{l} y'' - \Delta y + py = 0 \ \ em \ \ Q; \\ y = 0 \ \ sobre \ \ \Sigma; \\ y(0) = \varphi_0, \ \ y'(0) = -\varphi_1 \ \ em \ \ \Omega, \end{array}\right.$$

fornecida pelo pelo teorema 2.5. Do teorema 2.6, segue que $y(T) \in L^2(\Omega)$ e $y'(T) \in H^{-1}(\Omega)$. Do que foi admitido, para as condições iniciais $(u_0 - y(T), u_1 + y'(T)) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, resulta que existe um controle $v \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_0))$ tal que a solução ultra-fraca, z, de

$$\left|\begin{array}{l} z'' - \Delta z + pz = 0 \ \ em \ \ Q; \\ z = v \ \ sobre \ \ \Gamma_0 \times (0,T); \\ z = 0 \ \ sobre \ \ \Gamma \setminus \Gamma_0 \times (0,T); \\ z(0) = u_0 - y(T), \ \ z'(0) = u_1 + y'(T) \ \ em \ \ \Omega, \end{array}\right.$$

satisfaz $z(T) = 0$ e $z'(T) = 0$.

Definindo $w(t) := z(t) + y(T-t)$, temos que w verifica

$$\left|\begin{array}{l} w'' - \Delta w + pw = 0 \ \ em \ \ Q; \\ w = v \ \ sobre \ \ \Gamma_0 \times (0,T); \\ w = 0 \ \ sobre \ \ \Gamma \setminus \Gamma_0 \times (0,T); \\ w(0) = u_0, \ \ w'(0) = u_1 \ \ em \ \ \Omega; \\ w(T) = \varphi_0, \ \ w'(T) = \varphi_1. \end{array}\right.$$

Portanto, w é solução de (4.1) e pela unicidade da solução ultra-fraca, segue que $w = u$, isto é, existe um controle $v \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_0))$ tal que a solução ultra-fraca de (4.1) satisfaz (4.2).

Para tal usaremos a Desigualdade de Carleman, feita no capítulo 3, para obtermos a Desigualdade de Observabilidade e concluiremos utilizando o Método da Unicidade de Hilbert (HUM).

4.1 Desigualdade de Observabilidade

Consideremos o sistema adjunto

$$\left|\begin{array}{l} \psi'' - \Delta\psi + p\psi = 0 \ \ em \ \ Q; \\ \psi = 0 \ \ sobre \ \ \Sigma; \\ \psi(0) = \psi_0, \ \ \psi'(0) = \psi_1 \ \ em \ \ \Omega, \end{array}\right. \tag{4.3}$$

onde $\psi_0 \in H_0^1(\Omega)$, $\psi_1 \in L^2(\Omega)$ e p, $p' \in L^\infty(Q)$. Pelo teorema 2.2, o problema (4.3) possui uma única solução fraca ψ, e pelos teoremas 2.3 e 2.4, temos

$$\psi \in C^0([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega)) \ \ e \ \ \frac{\partial\psi}{\partial\eta} \in L^2(0,T;L^2(\Gamma)). \tag{4.4}$$

A energia do sistema (4.3) é dado por

$$E(t) := \frac{1}{2}|\psi'(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\psi(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)},$$

e desta forma para $t = 0$, temos

$$E_0 := E(0) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\psi_1|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\psi_0|^2 dx.$$

A desigualdade desejada é obtida pelo teorema a seguir.

Teorema 4.1. *Seja* $\Gamma_0 \subset \Gamma$ *e suponhamos que*

- *existe* $x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$ *tal que* $\Gamma_{x_0} \subset \Gamma_0$*;*
- $T > 2 \sup_{x\in\overline{\Omega}} |x - x_0|$.

Então existe uma constante positiva C *tal que para toda* $\psi_0 \in H^1_0(\Omega)$ *e* $\psi_1 \in L^2(\Omega)$*, vale que*

$$E_0 \leqslant C \int_0^T \int_{\Gamma_0} \left|\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right|^2 d\Gamma dt. \tag{4.5}$$

onde, ψ *é a solução fraca de* (4.3).

Demonstração. A prova será feita em etapas.

Etapa I - Primeiramente faremos algumas estimativas para o funcional energia. Devido a imersão contínua e densa

$$L^2(0,T;H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;H^1_0(\Omega)),$$

como veremos adiante, podemos considerar a função ψ em $L^2(0,T;H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega))$. Daí, multiplicando $(4.3)_1$ por ψ', integrando em Ω, e utilizando o Teorema de Green na segunda parcela, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \psi''(t)\psi'(t)dx - \int_\Omega \psi'(t)\Delta\psi(t)dx + \int_\Omega p(t)\psi(t)\psi'(t)dx \\ &= \int_\Omega \psi''(t)\psi'(t)dx + \int_\Omega \nabla\psi'(t)\cdot\nabla\psi(t)dx - \int_\Gamma \psi'(t)\frac{\partial\psi}{\partial\eta}(t)d\Gamma \\ &\quad + \int_\Omega p(t)\psi(t)\psi'(t)dx. \end{aligned}$$

De $(4.3)_2$ segue que $\psi' = 0$ sobre Σ, e portanto,

$$\int_\Omega \psi''(t)\psi'(t)dx + \int_\Omega \nabla\psi'(t)\cdot\nabla\psi(t)dx + \int_\Omega p(t)\psi(t)\psi'(t)dx = 0. \tag{4.6}$$

Por outro lado,

$$E'(t) = (\psi''(t), \psi'(t)) + ((\psi'(t), \psi(t))) = \int_\Omega \psi''(t)\psi'(t)dx + \int_\Omega \nabla\psi'(t)\cdot\nabla\psi(t)dx. \quad (4.7)$$

De (4.6) e (4.7), resulta que

$$E'(t) + \int_\Omega p(t)\psi(t)\psi'(t)dx = 0. \quad (4.8)$$

Usando as desigualdades de Hölder e Young, segue que

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega p(t)\psi(t)\psi'(t)dx\right| &\leqslant \|p(t)\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega |\psi(t)||\psi'(t)|dx \\ &\leqslant \|p\|_{L^\infty(Q)}|\psi(t)|_{L^2(\Omega)}|\psi'(t)|_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant \|p\|_{L^\infty(Q)}\left(\frac{1}{2}|\psi(t)|^2 + \frac{1}{2}|\psi'(t)|^2\right). \end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade Poincaré-Friedrichs, e assumindo sem perda que sua constante $\widehat{C} \geqslant 1$ e tomando $C_0 = \widehat{C}^2$, temos

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega p(t)\psi(t)\psi'(t)dx\right| &\leqslant \|p\|_{L^\infty(Q)}\left(\frac{\widehat{C}^2}{2}\|\psi(t)\|^2 + \frac{1}{2}|\psi'(t)|^2\right) \\ &\leqslant C_0\|p\|_{L^\infty(Q)}\left(\frac{1}{2}\|\psi(t)\|^2 + \frac{1}{2}|\psi'(t)|^2\right) \quad (4.9) \\ &\leqslant C_0\|p\|_{L^\infty(Q)}E(t). \end{aligned}$$

De (4.8) e (4.9), temos

$$-C_0\|p\|_{L^\infty(Q)}E(t) \leqslant E'(t) \leqslant C_0\|p\|_{L^\infty(Q)}E(t). \quad (4.10)$$

Da desigualdade à direita em (4.10), segue que

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-C_0\|p\|_{L^\infty(Q)}t}E(t)\right) \leqslant 0.$$

Integrando de s à t, onde $s \leqslant t \in [0, T]$ e dividindo por $e^{-C_0\|p\|_{L^\infty(Q)}t}$, resulta que

$$E(t) \leqslant e^{C_0\|p\|_{L^\infty(Q)}(t-s)}E(s) \quad \text{para} \quad s \leqslant t \quad \text{em} \quad [0, T].$$

Analogamente, utilizando a desigualdade à esquerda em (4.10), obtemos

$$E(t) \leqslant e^{C_0\|p\|_{L^\infty(Q)}(s-t)}E(s) \quad \text{para} \quad t \leqslant s \quad \text{em} \quad [0, T].$$

Desta forma,

$$E(t) \leqslant e^{C_0\|p\|_{L^\infty(Q)}|t-s|}E(s) \quad \text{para} \quad t, s \in [0, T]. \quad (4.11)$$

Fazendo $s = \frac{T}{2}$ em (4.11) e definindo $E_M := E(\frac{T}{2})$, segue que

$$E(t) \leqslant e^{C_0 \|p\|_{L^\infty(Q)} |t - \frac{T}{2}|} E_M \leqslant e^{C_0 \|p\|_{L^\infty(Q)} T} E_M \quad \text{para todo} \quad t \in [0, T]. \tag{4.12}$$

Analogamente, fazendo $t = \frac{T}{2}$,

$$E_M \leqslant e^{C_0 \|p\|_{L^\infty(Q)} T} E(s) \quad \text{para todo} \quad s \in [0, T]. \tag{4.13}$$

Etapa II

Como $x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$, definimos

$$\phi_M(x, t) := |x - x_0|^2 - \beta \left(t - \frac{T}{2} \right)^2 + M_0,$$

onde β é escolhido tal que

$$1 > \beta > \frac{4}{T^2} \sup_{x \in \Omega} |x - x_0|^2$$

e M_0 é escolhido de modo que

$$\phi_M \geqslant 1, \quad \text{para todo} \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T).$$

Assim, temos que:

$$\phi_M(x, t) = |x - x_0|^2 - \beta \left(t - \frac{T}{2} \right)^2 + M_0 \leqslant |x - x_0|^2 + M_0 = \varphi_M \left(x, \frac{T}{2} \right) \quad \forall\, t \in [0, T].$$

Visto que, $x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$, então

$$\phi_M \left(x, \frac{T}{2} \right) = |x - x_0|^2 + M_0 > M_0 \quad \forall\, x \in \Omega.$$

Sendo ϕ_M contínua e $\overline{\Omega} \times [0, T]$ compacto, existe $\rho > 0$ tal que

$$\phi_M(x, t) \geqslant M_0, \quad \forall (x, t) \in \Omega \times \left[\frac{T}{2} - \rho, \frac{T}{2} + \rho \right]. \tag{4.14}$$

Devido a escolha de β, temos

$$\varphi_M(x, T) = \varphi_M(x, 0) = |x - x_0|^2 - \beta \frac{T^2}{4} + M_0 < M_0, \quad \forall x \in \Omega.$$

Novamente, da continuidade de ϕ_M, existe $\delta > 0$ tal que

$$\phi_M(x, t) \leqslant M_0, \quad \forall (x, t) \in \Omega \times [0, \delta] \cup [T - \delta, T]. \tag{4.15}$$

Tomemos uma função $\theta_\delta \in C_0^\infty([0, T], \mathbb{R})$ satisfazendo

$$0 \leqslant \theta_\delta \leqslant 1, \quad \forall t \in [0, T] \quad \text{e} \quad \theta_\delta(t) = 1 \quad \forall t \in [\delta, T - \delta]. \tag{4.16}$$

Uma construção da função θ_δ pode ser encontrada em [10] ou [25].

Etapa III

A ideia é utilizar a Estimativa de Carleman em ψ. Porém não sabemos se $\psi \in X$, visto que não temos conhecimento se $\psi(T) = \psi'(T) = 0$ em Ω. Isto nos leva a definirmos

$$z(x,t) := \theta_\delta(t)\psi(x,t),$$

onde ψ é a solução de (4.3). Portanto,

$$z'' = \theta''_\delta\psi + 2\theta'_\delta\psi' + \theta_\delta\psi'' \quad \text{e} \quad \Delta z = \theta_\delta\Delta\psi. \tag{4.17}$$

Por (4.17) e $(4.3)_1$, segue que:

$$z'' - \Delta z + pz = \theta''_\delta\psi + 2\theta'_\delta\psi' + \theta_\delta(\psi'' - \Delta\psi + p\psi) = \theta''_\delta\psi + 2\theta'_\delta\psi'.$$

Logo,

$$\left| \begin{array}{l} Lz = z'' - \Delta z + pz = \theta''_\delta\psi + 2\theta'_\delta\psi' \;\; \mathrm{em} \;\; Q; \\ z = 0 \;\; \mathrm{sobre} \;\; \Sigma; \\ z(0) = z(T) = 0, \;\; z'(0) = z'(T) = 0 \;\; \mathrm{em} \;\; \Omega. \end{array} \right. \tag{4.18}$$

Da regularidade de ψ em (4.4) e de (4.18), concluimos que $z \in X$, definido em (3.1). Para $\lambda > 0$, denotamos

$$\varphi_\lambda(x,t) = e^{\lambda\phi_M(x,t)}.$$

Pela Desigualdade de Carleman, existem s_0, λ_0 e C_1 tal que para todo $s \geqslant s_0$ e $\lambda \geqslant \lambda_0$ temos

$$\begin{aligned} & s\lambda \int_0^T \int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}\varphi_\lambda \left(|z'|^2 + |\nabla z|^2\right) dxdt \\ \leqslant\; & C_1 \int_0^T \int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}|Lz|^2 dxdt + C_1 s\lambda \int_0^T \int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi_\lambda}\varphi_\lambda \left|\frac{\partial z}{\partial \eta}\right|^2 d\Gamma dt. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Comparando (4.5) e (4.19), somos levados a majorar o primeiro termo à direita de (4.19) e minorar o termo à esquerda de (4.19).

- Majorar $\displaystyle\int_0^T \int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}|Lz|^2 dxdt.$

De (4.16), segue que $\theta_\delta^{(j)}(t) = 0$ para $t \in [\delta, T-\delta]$, $j \geqslant 1$. Como $\theta_\delta \in C_0^\infty([0,T])$ existe $\alpha > 0$ tal que $\left|\theta_\delta^{(j)}\right|^2 \leqslant \alpha$ em $[0,T]$ para $j = 0,1,2$. Usando a Desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}|Lz|^2 dxdt &= \int_0^T\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}|\theta_\delta''\psi+2\theta_\delta'\psi'|^2dxdt\\ &\leqslant \int_0^T\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}\left(2|\theta_\delta''\psi|^2+8|\theta_\delta'\psi'|^2\right)dxdt\\ &\leqslant 16\alpha\left(\int_0^\delta+\int_{T-\delta}^T\right)\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}\left(\frac{|\psi|^2}{2}+\frac{|\psi'|^2}{2}\right)dxdt.\end{aligned}$$

De (4.15), da Desigualdade de Poincaré e de (4.12), obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}|Lz|^2 dxdt &\leqslant 16\alpha e^{2se^{\lambda M_0}}\left(\int_0^\delta+\int_{T-\delta}^T\right)\int_\Omega\left(\frac{|\psi|^2}{2}+\frac{|\psi'|^2}{2}\right)dxdt\\ &\leqslant 16\alpha C_0e^{2se^{\lambda M_0}}\left(\int_0^\delta+\int_{T-\delta}^T\right)\int_\Omega\left(\frac{|\nabla\psi(t)|^2}{2}+\frac{|\psi'(t)|^2}{2}\right)dxdt\\ &= 16\alpha C_0e^{2se^{\lambda M_0}}\left(\int_0^\delta+\int_{T-\delta}^T\right)E(t)dt\\ &\leqslant 16\alpha C_0e^{2se^{\lambda M_0}}2\delta e^{C_0\|p\|_{L^\infty(Q)}T}E_M\\ &= 32\delta\alpha C_0E_Me^{2se^{\lambda M_0}+C_0\|p\|_{L^\infty(Q)}T}.\end{aligned}\tag{4.20}$$

- Minorar $\displaystyle\int_0^T\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}\varphi_\lambda\left(|z'|^2+|\nabla z|^2\right)dxdt.$

Sendo $\phi_M\geqslant 1$, de (4.14) e de (4.13), temos

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}\varphi_\lambda\left(|z'|^2+|\nabla z|^2\right)dxdt &\geqslant \int_{\frac{T}{2}-\rho}^{\frac{T}{2}+\rho}\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}\left(|z'|^2+|\nabla z|^2\right)dxdt\\ &\geqslant e^{2se^{\lambda M_0}}\int_{\frac{T}{2}-\rho}^{\frac{T}{2}+\rho}\int_\Omega\left(|z'(t)|^2+|\nabla z(t)|^2\right)dxdt\\ &= 2e^{2se^{\lambda M_0}}\int_{\frac{T}{2}-\rho}^{\frac{T}{2}+\rho}E(t)dt\\ &\geqslant 2e^{2se^{\lambda M_0}}e^{-C_0\|p\|_{L^\infty(Q)}T}E_M2\rho\\ &= 4\rho E_Me^{2se^{\lambda M_0}-C_0\|p\|_{L^\infty(Q)}T}.\end{aligned}\tag{4.21}$$

De (4.19), (4.20) e (4.21) resulta que:

$$\begin{aligned}4s\lambda\rho E_Me^{2se^{\lambda M_0}-C_0\|p\|_{L^\infty(Q)}T} &\leqslant 32C_1\delta\alpha C_0E_Me^{2se^{\lambda M_0}+C_0\|p\|_{L^\infty(Q)}T}\\ &\quad +C_1s\lambda\int_0^T\int_{\Gamma_0}e^{2s\varphi_\lambda}\varphi_\lambda\left|\frac{\partial z}{\partial\eta}\right|^2d\Gamma dt,\end{aligned}$$

para todo $s\geqslant s_0$ e $\lambda\geqslant\lambda_0$. Dividindo por $e^{2se^{\lambda M_0}}$, vale que:

$$\begin{aligned}&4s\lambda\rho E_Me^{-C_0\|p\|_{L^\infty(Q)}T}-32C_1\delta\alpha C_0E_Me^{C_0\|p\|_{L^\infty(Q)}T}\\ &\leqslant C_1s\lambda\int_0^T\int_{\Gamma_0}e^{2s(\varphi_\lambda-e^{\lambda M_0})}\varphi_\lambda\left|\frac{\partial z}{\partial\eta}\right|^2d\Gamma dt.\end{aligned}$$

Escolhendo, $\lambda \gg 0$ e $s \gg 0$, segue que:

$$0 \leqslant 3s\lambda\rho e^{-C_0\|p\|_{L^\infty(Q)}T} - 32C_1\delta\alpha C_0 e^{C_0\|p\|_{L^\infty(Q)}T}.$$

Portanto,

$$s\lambda\rho e^{-C_0\|p\|_{L^\infty(Q)}T} E_M \leqslant C_1 s\lambda \int_0^T \int_{\Gamma_0} e^{2s(\varphi_\lambda - e^{\lambda M_0})}\varphi_\lambda \left|\frac{\partial z}{\partial \eta}\right|^2 d\Gamma dt. \tag{4.22}$$

Fazendo $t = 0$ em (4.12) e de (4.22), resulta que

$$E_0 \leqslant e^{C_0\|p\|_{L^\infty(Q)}T} E_M \leqslant \frac{C_1 e^{2C_0\|p\|_{L^\infty(Q)}T}}{\rho} \int_0^T \int_{\Gamma_0} e^{2s(\varphi_\lambda - e^{\lambda M_0})}\varphi_\lambda \left|\frac{\partial z}{\partial \eta}\right|^2 d\Gamma dt. \tag{4.23}$$

Notemos que, $e^{2s(\varphi_\lambda - e^{\lambda M_0})}\varphi_\lambda$ é limitada em $\overline{Q}$ e que

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = \theta_\delta \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \Rightarrow \left|\frac{\partial z}{\partial \eta}\right| \leqslant \left|\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right|.$$

Portando, de (4.23) concluimos que existe uma constante $C = C(T, p)$ tal que

$$E_0 \leqslant C \int_0^T \int_{\Gamma_0} \left|\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right|^2 d\Gamma dt.$$

$\square$

Usando o Método da Unicidade de Hilbert (HUM) obteremos como consequência a controlabilidade exata da equação (4.1).

4.2 Descrição do HUM

A metodologia do HUM é baseada em certo critério de construção e unicidade de um espaço de Hilbert H, por completamento. O método leva em consideração a unicidade e regularidade das soluções das equações de onda. Nesta seção provaremos o seguinte teorema.

Teorema 4.2. *Seja $\Gamma_0 \subset \Gamma$ e suponhamos que*

- *existe* $x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$ *tal que* $\Gamma_{x_0} \subset \Gamma_0$*;*
- $T > 2 \sup_{x \in \overline{\Omega}} |x - x_0|$*;*
- $p, p' \in L^\infty(Q)$.

Então, para todo par de condições iniciais $(u_0, u_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ *e* $(\varphi_0, \varphi_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ *dados, existe um controle* $v \in L^2(0,T; L^2(\Gamma_0))$ *tal que a solução ultra-fraca,* u *de* (4.1) *satisfaz*

$$u(T) = \varphi_0 \quad e \quad u^{'}(T) = \varphi_1. \tag{4.24}$$

Demonstração. A demonstração será feita por etapas.

Etapa I

Dado $(\psi_0, \psi_1) \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$, devido o teorema 2.1, o problema

$$\left| \begin{array}{l} \psi^{''} - \Delta\psi + p\psi = 0 \ \ \text{em} \ \ Q; \\ \psi = 0 \ \ \text{sobre} \ \ \Sigma; \\ \psi(0) = \psi_0, \ \ \psi^{'}(0) = \psi_1 \ \ \text{em} \ \ \Omega, \end{array} \right. \tag{4.25}$$

admite única solução forte com a regularidade

$$\psi \in L^\infty(0,T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \ \text{ e } \ \psi^{'} \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)).$$

Além disso, uma vez que a solução forte é também solução fraca, segue do teorema 2.4 que

$$\frac{\partial\psi}{\partial\eta} \in L^2(0,T; L^2(\Gamma)). \tag{4.26}$$

Etapa II

Considere o problema retrógado

$$\left| \begin{array}{l} \phi^{''} - \Delta\phi + p\phi = 0 \ \ \text{em} \ \ Q; \\ \phi = \dfrac{\partial\psi}{\partial\eta} \ \ \text{sobre} \ \ \Gamma_0 \times (0,T); \\ \phi = 0 \ \ \text{sobre} \ \ \Gamma \setminus \Gamma_0 \times (0,T); \\ \phi(T) = 0, \ \ \phi^{'}(T) = 0 \ \ \text{em} \ \ \Omega, \end{array} \right. \tag{4.27}$$

onde ψ é dada por (4.25). Para vermos que é um problema bem-posto, fazemos uma reversão no tempo, isto é, a mudança de variável $t \mapsto T - t$ e denotamos $\widehat{\phi}(t) = \phi(T-t)$ e $\widehat{\psi}(t) = \psi(T-t)$. Com isto, obtemos que $\widehat{\phi}$ satisfaz

$$\left| \begin{array}{l} \widehat{\phi}^{''} - \Delta\widehat{\phi} + \widehat{p}\widehat{\phi} = 0 \ \ \text{em} \ \ Q; \\ \widehat{\phi} = \dfrac{\partial\widehat{\psi}}{\partial\eta} \ \ \text{sobre} \ \ \Gamma_0 \times (0,T); \\ \widehat{\phi} = 0 \ \ \text{sobre} \ \ \Gamma \setminus \Gamma_0 \times (0,T); \\ \widehat{\phi}(0) = 0, \ \ \widehat{\phi}^{'}(0) = 0 \ \ \text{em} \ \ \Omega. \end{array} \right.$$

De (4.26), dos teoremas 2.5 e 2.6, segue que (4.27) possui única solução ultra-fraca ϕ, tal que

$$\phi \in C^0([0,T];L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T];H^{-1}(\Omega)).$$

Em particular,

$$\phi(0) \in L^2(\Omega) \;\text{ e }\; \phi'(0) \in H^{-1}(\Omega). \tag{4.28}$$

Etapa III

Da unicidade das soluções dos problemas (4.25) e (4.27), e de (4.28), está bem definido o operador

$$\begin{array}{rcl} \Lambda \,:\, \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) & \longrightarrow & H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \\ (\psi_0, \psi_1) & \longmapsto & (\phi'(0), -\phi(0)). \end{array}$$

Multiplicando ambos os lados de $(4.27)_1$ por ψ, solução de (4.25) e integrando em Q, obtemos

$$\int_0^T\int_\Omega \phi''\psi dxdt - \int_0^T\int_\Omega \psi\Delta\phi dxdt + \int_0^T\int_\Omega p\phi\psi dxdt = 0. \tag{4.29}$$

Análise da primeira integral - integrando por partes duas vezes e observando $(4.27)_4$, resulta que

$$\begin{aligned} \int_0^T\int_\Omega \phi''\psi dxdt &= \int_\Omega \phi'(x,T)\psi(x,T)dx - \int_\Omega \phi'(x,0)\psi(x,0)dx - \int_0^T\int_\Omega \phi'\psi' dxdt \\ &= -\int_\Omega \phi'(x,0)\psi(x,0)dx - \int_\Omega \phi(x,T)\psi'(x,T)dx \\ &\quad + \int_\Omega \phi(x,0)\psi'(x,0)dx + \int_\Omega \phi\psi'' dxdt \\ &= \int_\Omega \phi(x,0)\psi'(x,0)dx - \int_\Omega \phi'(x,0)\psi(x,0)dx + \int_0^T\int_\Omega \phi\psi'' dxdt. \end{aligned}$$

Utilizando $(4.25)_3$, temos

$$\int_0^T\int_\Omega \phi''\psi dxdt = \langle \phi(0), \psi_1\rangle_{L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)} - \langle \phi'(0), \psi_0\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} + \int_0^T\int_\Omega \phi\psi'' dxdt. \tag{4.30}$$

Análise da segunda integral - usando a Fórmula de Green duas vezes, de $(4.25)_2$ e $(4.27)_{2,3}$, temos

$$\begin{aligned} -\int_0^T\int_\Omega \psi\Delta\phi dxdt &= \int_0^T\int_\Omega \nabla\psi\cdot\nabla\phi dxdt - \int_0^T\int_\Gamma \psi\frac{\partial\phi}{\partial\eta} d\Gamma dt \\ &= \int_0^T\int_\Omega \nabla\psi\cdot\nabla\phi dxdt \\ &= -\int_0^T\int_\Omega \phi\Delta\psi dxdt + \int_0^T\int_\Gamma \phi\frac{\partial\psi}{\partial\eta} d\Gamma dt \\ &= -\int_0^T\int_\Omega \phi\Delta\psi dxdt + \int_0^T\int_{\Gamma_0} \left|\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right|^2 d\Gamma dt. \end{aligned}$$

Substituindo (4.30) e (4.31) em $(4.29)_3$, temos

$$\langle\phi(0),\psi_1\rangle-\langle\phi'(0),\psi_0\rangle+\int_0^T\int_\Omega\phi\left(\psi''-\Delta\psi+p\psi\right)dxdt+\int_0^T\int_{\Gamma_0}\left|\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right|^2 d\Gamma dt=0.$$

Devido a $(4.25)_1$ e da definição do operador Λ, obtemos

$$\begin{aligned}\langle\Lambda(\psi_0,\psi_1),(\psi_0,\psi_1)\rangle_{(H^{-1}(\Omega)\times L^2(\Omega))\times(H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega))} &= \langle\phi'(0),\psi_0\rangle+\langle-\phi(0),\psi_1\rangle\\ &= \int_0^T\int_{\Gamma_0}\left|\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right|^2 d\Gamma dt.\end{aligned}\tag{4.31}$$

Definimos

$$\begin{aligned}\|\cdot\|_F:\ \mathcal{D}(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (\psi_0,\psi_1) &\longmapsto \left(\int_0^T\int_{\Gamma_0}|\tfrac{\partial\psi}{\partial\eta}|^2 d\Gamma dt\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

onde ψ é solução de (4.25) e devido a linearidade e unicidade desta, $\|\cdot\|_F$ é uma semi-norma. Para obtermos uma norma precisamos provar que, sendo ψ solução de (4.25) com $(\psi_0,\psi_1)\in\mathcal{D}(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)$, então se $\|(\psi_0,\psi_1)\|_F=0$ implique que $(\psi_0,\psi_1)=(0,0)$. De fato, se $\|(\psi_0,\psi_1)\|_F=0$ então usando a Desigualdade de Observabilidade (4.5), existe $C>0$ tal que

$$E_0\leqslant C\int_0^T\int_{\Gamma_0}\left|\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right|^2 d\Gamma dt=C\|(\psi_0,\psi_1)\|_F^2=0,$$

logo $\psi_0=\psi_1=0$ q.s. em Ω. Denotamos $\mathcal{D}(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)$ com a norma $\|\cdot\|_F$ por F.

A norma de F é induzida pelo produto interno:

$$\langle(\psi_0,\psi_1),(\zeta_0,\zeta_1)\rangle_F=\int_0^T\int_{\Gamma_0}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}d\Gamma dt,$$

onde $\psi=\psi(x,t)$ e $\zeta=\zeta(x,t)$ são soluções de (4.25) com condições inicias (ψ_0,ψ_1) e (ζ_0,ζ_1), respectivamente. Notemos que

$$\langle\Lambda(\psi_0,\psi_1),(\zeta_0,\zeta_1)\rangle_{(H^{-1}(\Omega)\times L^2(\Omega))\times(H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega))}=\langle(\psi_0,\psi_1),(\zeta_0,\zeta_1)\rangle_F.\tag{4.32}$$

Para tal, multiplicamos ambos os lados de $(4.27)_1$ por ζ e repetimos o procedimente utilizado em (4.29) - (4.31).

Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz em (4.32), obtemos que:

$$|\langle\Lambda(\psi_0,\psi_1),(\zeta_0,\zeta_1)\rangle|\leqslant\|(\psi_0,\psi_1)\|_F\|(\zeta_0,\zeta_1)\|_F,$$

provando assim a continuidade da forma bilinear A definida por Λ em F, isto é,

$$\begin{aligned}A:\quad F\times F &\longrightarrow \mathbb{R}\\ ((\psi_0,\psi_1),(\zeta_0,\zeta_1)) &\longmapsto \langle\Lambda(\psi_0,\psi_1),(\zeta_0,\zeta_1)\rangle=\langle(\psi_0,\psi_1),(\zeta_0,\zeta_1)\rangle_F,\end{aligned}$$

é uma forma bilinear contínua.

Etapa IV

Do teorema 2.4 existe $C > 0$ tal que

$$\|(\psi_0, \psi_1)\|_F^2 = \int_0^T \int_{\Gamma_0} \left|\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right|^2 d\Gamma dt \leqslant C\|(\psi_0, \psi_1)\|^2_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}. \tag{4.33}$$

Da Desigualdade de Observabilidade resulta a desigualdade contrária

$$C_1\|(\psi_0, \psi_1)\|^2_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} \leqslant \int_0^T \int_{\Gamma_0} \left|\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right|^2 d\Gamma dt = \|(\psi_0, \psi_1)\|_F^2.$$

Portanto as normas $\|\cdot\|_F$ e $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}$ são equivalentes em $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$. Em vista da densidade de $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ em $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, obtemos que o completamento de F, que denotaremos por H, é o espaço $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Temos que Λ e A possuem extensões, por continuidade, à H. Continuamos representando estas extensões com a mesma notação. Portanto, agora temos que $\Lambda : H \to H'$, visto que $H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e $H' = H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Etapa V

Devido a Desigualdade de Observabilidade (4.5), a forma bilinear $A : H \times H \to \mathbb{R}$ é coerciva. Pelo Teorema de Lax-Milgram, para cada $(u_1, -u_0) \in H'$, existe um único $(\psi_0, \psi_1) \in H$ tal que

$$\langle \Lambda(\psi_0, \psi_1), (\zeta_0, \zeta_1)\rangle_{H'\times H} = \langle (u_1, -u_0), (\zeta_0, \zeta_1)\rangle_{H'\times H},$$

para todo $(\zeta_0, \zeta_1) \in H$.

Assim, $\Lambda(\psi_0, \psi_1) = (u_1, -u_0)$ e consequentemente

$$\phi(0) = u_0 \ \text{ e } \ \phi'(0) = u_1,$$

onde ϕ é solução ultra-fraca de (4.27). Portanto,

$$\left|\begin{array}{l} \phi'' - \Delta\phi + p\phi = 0 \ \text{ em } \ Q; \\ \phi = \dfrac{\partial \psi}{\partial \eta} \ \text{ sobre } \ \Gamma_0 \times (0, T); \\ \phi = 0 \ \text{ sobre } \ \Gamma \setminus \Gamma_0 \times (0, T); \\ \phi(T) = 0, \ \ \phi'(T) = 0 \ \text{ em } \ \Omega; \\ \phi(0) = u_0, \ \ \phi'(0) = u_1 \ \text{ em } \ \Omega. \end{array}\right. \tag{4.34}$$

Tomando $\nu = \dfrac{\partial\psi}{\partial\eta}$ em (4.1), obtemos

$$\left| \begin{array}{l} u'' - \Delta u + pu = f \ \ \text{em} \ \ Q; \\ u = \dfrac{\partial\psi}{\partial\eta} \ \ \text{sobre} \ \ \Gamma_0 \times (0,T); \\ u = 0 \ \ \text{sobre} \ \ \Gamma \setminus \Gamma_0 \times (0,T); \\ u(0) = u_0, \ \ u'(0) = u_1 \ \ \text{em} \ \ \Omega. \end{array} \right. \tag{4.35}$$

Da unicidade da solução ultra-fraca dos problemas (4.34) e (4.35) temos

$$u(x,t) = \phi(x,t) \ \ \text{q.s. em} \ \ \Omega \times (0,T).$$

Logo, u satisfaz $u(T) = \phi(T) = 0$ e $u'(T) = \phi'(T) = 0$.

Em vista da observação 4.1, a demonstração está concluida. □

Capítulo 5

Estabilidade do Problema Inverso

Neste capítulo, o objetivo é estudarmos o problema inverso, que consiste em obter a estabilidade e a unicidade do potencial, dependendo apenas da variável espacial, numa equação de onda a partir do conhecimento das medições do fluxo sobre uma parte da fronteira durante um período de tempo $(0, T)$. Mais precisamente, consideramos a equação de onda

$$\left| \begin{array}{l} u'' - \Delta u + pu = f \;\; em \;\; Q; \\ u = g \;\; sobre \;\; \Gamma \times (0, T); \\ u(0) = u_0, \;\; u'(0) = u_1 \;\; em \;\; \Omega, \end{array} \right. \tag{5.1}$$

onde o potencial $p = p(x)$ é desconhecido (mas assumido ser limitado, isto é, $p \in L^\infty(\Omega)$). Suponhamos ainda que $f \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$, $g \in L^2(0, T; L^2(\Gamma))$, $u_0 \in L^2(\Omega)$ e $u_1 \in H^{-1}(\Omega)$. Deste modo, para cada p, do teorema 2.5 o sistema (5.1) possui única solução ultra-fraca $u(p)$. Por outro lado, sabemos uma medida de $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}$ no conjunto $\Gamma_0 \times (0, T)$, onde Γ_0 é uma parte da fronteira Γ, isto é,

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \chi \;\; \text{sobre} \;\; \Gamma_0 \times (0, T).$$

A questão é: podemos recuperar p a partir de χ? Este é denominado o **problema inverso não linear**.

Para ser mais preciso, podemos fazer duas perguntas:

- **Unicidade**: é verdade que

$$\frac{\partial u(p)}{\partial \eta} = \frac{\partial u(q)}{\partial \eta} \;\; \text{sobre} \;\; \Gamma_0 \times (0, T) \Rightarrow p = q?$$

- **Estabilidade**: é verdade que

$$\|p-q\|_{X(\Omega)} \leqslant C\left\|\frac{\partial u(p)}{\partial \eta}-\frac{\partial u(q)}{\partial \eta}\right\|_{Y(\Gamma_0)},$$

para normas adequadas em $X(\Omega)$ e $Y(\Gamma_0)$?

Agora, consideraremos a equação

$$\left|\begin{array}{l} y'' - \Delta y + p(x)y = F(x)R(x,t) \;\; em \;\; Q; \\ y = 0 \;\; sobre \;\; \Gamma \times (0,T); \\ y(0) = 0, \;\; y'(0) = 0 \;\; em \;\; \Omega. \end{array}\right. \tag{5.2}$$

O **problema inverso linear** consiste em saber se é possível determinar F, a partir do conhecimento da derivada normal $\left.\frac{\partial y}{\partial \eta}\right|_{\Gamma_0\times(0,T)}$, onde R e p são dados e y é solução de (5.2).

Sendo mais preciso: existe uma constante C que satisfaça a desigualdade

$$\|F\|^2_{X(\Omega)} \leqslant C\left\|\frac{\partial y}{\partial \eta}\right\|^2_{Y(\Gamma_0)},$$

para normas adequadas em $X(\Omega)$ e $Y(\Gamma_0)$? As respostas de tais questionamentos são afirmativas e serão dadas pelos teoremas a seguir.

5.1 Problema Inverso Linear

Iniciaremos esta seção com um teorema de estabilidade para o problema inverso linear. Para tal será utilizado a estimativa Global de Carleman.

Teorema 5.1. *Considere* $m > 0$, $K > 0$ *e* $r > 0$ *constantes. Seja* $p \in L^\infty(\Omega)$ *com* $\|p\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant m$. *Assuma que* $F \in L^2(\Omega)$ *e* $R \in H^1(0,T;L^\infty(\Omega))$ *com*

$$\|R\|_{H^1(0,T;L^\infty(\Omega))} \leqslant K \;\; e \;\; |R(x,0)| \geqslant r, \quad \forall x \in \Omega. \tag{5.3}$$

Suponha que Γ_0 *e* T *satisfaçam as hipóteses geométricas:*

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \;\; tal\ que \;\; \Gamma_0 \supseteq \Gamma_{x_0} = \{x \in \Gamma; (x-x_0)\cdot\eta(x) > 0\} \;\; e \;\; T > \sup_{x\in\Omega}|x-x_0|.$$

Se y *é solução da equação* (5.2)*, então existe uma constante* $C = C(T,\Omega,\Gamma_0,K,r) > 0$ *tal que para toda* $F \in L^2(\Omega)$*, temos*

$$\frac{1}{C}\|F\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \left\|\frac{\partial y}{\partial \eta}\right\|^2_{H^1(0,T;L^2(\Gamma_0))} \leqslant C\|F\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{5.4}$$

Demonstração. A demonstração será feita em três etapas.

Etapa I

Pelos teoremas 2.2 e 2.3 o problema (5.2) é bem posto e a solução fraca y satisfaz

$$y \in C([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T]; L^2(\Omega)).$$

O teorema 2.4 nos fornece que $\frac{\partial y}{\partial \eta} \in L^2(0,T; L^2(\Gamma))$ e existe $C_1 = C_1(\Omega, T, m) > 0$ tal que

$$\left\| \frac{\partial y}{\partial \eta} \right\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))} \leqslant C_1 \|FR\|^2_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}$$

Utilizando o lema 1.4.1, temos

$$\|FR\|^2_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant C_2 \|FR\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant C_2 \|F\|^2_{L^2(\Omega)} \|R\|^2_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))}.$$

Portanto,

$$\left\| \frac{\partial y}{\partial \eta} \right\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))} \leqslant C_1 C_2 \|F\|^2_{L^2(\Omega)} \|R\|^2_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))}. \tag{5.5}$$

Por outro lado, considerando $\zeta = y'$, de (5.2), obtemos que ζ satisfaz

$$\left| \begin{array}{l} \zeta'' - \Delta\zeta + p(x)\zeta = F(x)R'(x,t) \quad em \quad Q; \\ \zeta = 0 \quad sobre \quad \Gamma \times (0,T); \\ \zeta(0) = 0, \quad \zeta'(0) = F(x)R(x,0) \quad em \quad \Omega, \end{array} \right. \tag{5.6}$$

no sentido fraco. Observemos que:

$$\zeta'(x,0) = y''(x,0) = F(x)R(x,0) + \Delta y(x,0) - p(x)y(x,0) = F(x)R(x,0).$$

Como $R \in H^1(0,T; L^\infty(\Omega))$, então $FR' \in L^1(0,T; L^2(\Omega))$, e pelo teorema 1.4.4, $R(0) \in L^\infty(\Omega)$, e assim $FR(0) \in L^2(\Omega)$. Repetindo o procedimento anterior para o sistema (5.6), obtemos que existe uma constante $C_3 = C_3(\Omega, T, m) > 0$ tal que

$$\left\| \frac{\partial y'}{\partial \eta} \right\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))} = \left\| \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))} \leqslant C_3 \|F\|^2_{L^2(\Omega)} \left(|R(0)|^2_{L^\infty(\Omega)} + \|R'\|^2_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))} \right). \tag{5.7}$$

De (5.5) e (5.7) obtemos $C = C(\Omega, T, m) > 0$ tal que

$$\left\| \frac{\partial y}{\partial \eta} \right\|^2_{H^1(0,T;L^2(\Gamma))} \leqslant 2 \left\| \frac{\partial y}{\partial \eta} \right\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))} + 2 \left\| \frac{\partial y'}{\partial \eta} \right\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))} \leqslant C \|F\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Isto demonstra a desigualdade do lado direito de (5.4).

Etapa II

Consideremos a extensão do problema (5.6) à $(-T, T)$ tal que $\zeta(x,t) = \zeta(x,-t)$, para todo $(x,t) \in \Omega \times (-T, 0)$. Da mesma forma estendemos R', e manteremos a mesma notação. Assim

$$\zeta \in C([-T,T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([-T,T]; L^2(\Omega)) \quad \text{e} \quad R' \in L^2(-T,T; L^\infty(\Omega)).$$

Seja $\beta \in (0,1)$, ϕ e φ_λ definidas como no capítulo 3. Pela hipótese sobre T, podemos escolher β tal que

$$\beta T^2 > \sup_{x\in\Omega} |x - x_0|^2.$$

Desta forma, para todo $x \in \Omega$, temos que:

$$\phi(x, \pm T) = |x - x_0|^2 - \beta T^2 + M_0 \leqslant \sup_{x\in\Omega} |x - x_0|^2 - \beta T^2 + M_0 < M_0.$$

Como ϕ é contínua, existe $\delta > 0$ tal que

$$\phi(x,t) \leqslant M_0, \quad \forall \ (x,t) \in \Omega \times [-T, -T+\delta] \cup [T-\delta, T]\,. \tag{5.8}$$

Visto que $x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$, resulta que:

$$\phi(x,0) = |x - x_0|^2 + M_0 > M_0, \quad \forall \ x \in \Omega. \tag{5.9}$$

Portanto, para todo $(x,t) \in \Omega \times [-T, -T+\delta] \cup [T-\delta, T]$, vale que:

$$\varphi_\lambda(x,t) = e^{\lambda\phi(x,t)} \leqslant e^{\lambda M_0} < e^{\lambda\phi(x,0)} = \varphi_\lambda(x,0).$$

Porém,

$$\varphi_\lambda(x,t) \leqslant \varphi_\lambda(x,0), \quad \forall \ (x,t) \in \Omega \times [-T,T]. \tag{5.10}$$

Tomemos uma função $\theta_\delta \in C_0^\infty([-T,T],[0,1])$ tal que

$$\theta_\delta(t) = 1, \quad \forall \ t \in [-T+\delta, T-\delta],$$

e considere $v = \theta_\delta \zeta$.

Como θ_δ é uma função somente na variável t, $\nabla\theta_\delta = 0$ e $\Delta\theta_\delta = 0$. Daí,

$$v'' = \theta_\delta'' \zeta + 2\theta_\delta' \zeta' + \theta_\delta \zeta'' \quad \text{e} \quad \Delta v = \theta_\delta \Delta\zeta.$$

Observando (5.6), e que $\theta_\delta(\pm T) = \theta'_\delta(\pm T) = 0$, obtemos que v é solução de

$$\left|\begin{array}{l} v'' - \Delta v + p(x)v = \theta_\delta(t)F(x)R'(x,t) + \theta''_\delta\zeta + 2\theta'_\delta\zeta' \;\; \text{em} \;\; Q; \\ v = 0 \;\; \text{sobre} \;\; \Gamma \times (0,T); \\ v(0) = 0, \;\; v'(x,0) = F(x)R(x,0) \;\; \text{em} \;\; \Omega; \\ v(\pm T) = v'(\pm T) = 0 \;\; \text{em} \;\; \Omega. \end{array}\right. \tag{5.11}$$

No que segue, $M_i > 0$, $i \geqslant 1$, corresponderá a uma constante genérica dependendo eventualmente de s_0, λ_0, T, Ω, Γ_0, β, θ_δ, r, K e δ, mas independe de $s > s_0$.

Etapa III

Utilizaremos a mesma notação do capítulo 3, a saber,

$$\phi(x,t) = |x - x_0|^2 - \beta t^2 + M_0, \quad \varphi_\lambda(x,t) = e^{\lambda\phi(x,t)},$$
$$w = e^{s\varphi_\lambda} v \quad \text{e} \quad P_1 w = w'' - \Delta w + s^2\lambda^2\varphi_\lambda^2\left(|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2\right) w.$$

Observando (5.11), temos que

$$\begin{array}{rl} w(0) = w(-T) = 0 & \text{em} \;\; \Omega, \\ w'(0) = e^{s\varphi_\lambda(0)} FR(0) \;\; \text{e} \;\; w'(-T) = 0 & \text{em} \;\; \Omega, \\ w = w' = 0 & \text{sobre} \;\; \Sigma. \end{array}$$

- Estimaremos

$$\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda(0)} |FR(0)|^2 dx.$$

Para tal desevolveremos o termo $\displaystyle\int_{-T}^{0}\int_\Omega P_1 w w' dx dt$.
Usando o mesmo argumento de imersão do capítulo 3 e a Fórmula de Green, então

$$\begin{aligned} \int_{-T}^{0}\int_\Omega w'\Delta w dx dt &= \int_{-T}^{0}\left[-\int_\Omega \nabla w' \cdot \nabla w dx + \int_\Gamma w' \frac{\partial w}{\partial \eta} d\Gamma\right] dt \\ &= -\frac{1}{2}\int_{-T}^{0}\int_\Omega \frac{d}{dt}|\nabla w|^2 dx dt \\ &= -\frac{1}{2}\int_\Omega \left[|\nabla w(0)|^2 - |\nabla w(-T)|^2\right] dx dt \\ &= 0. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Utilizando integração por partes e (5.12), temos:

$$
\begin{aligned}
&\int_{-T}^{0}\int_{\Omega} P_1 w w' dxdt \\
= \; & \int_{-T}^{0}\int_{\Omega} \left[w'' - \Delta w + s^2\lambda^2\varphi_\lambda^2\left(|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2\right) w\right] w' dxdt \\
= \; & \frac{1}{2}\int_{-T}^{0}\int_{\Omega} \frac{d}{dt}|w'|^2 dxdt - \int_{-T}^{0}\int_{\Omega} w'\Delta w dxdt \\
& + \frac{s^2\lambda^2}{2}\int_{-T}^{0}\int_{\Omega} \varphi_\lambda^2\left(|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2\right)\frac{d}{dt}|w|^2 dxdt \\
= \; & \frac{1}{2}\int_{\Omega}|w'(0)|^2 dx - \frac{s^2\lambda^2}{2}\int_{-T}^{0}\int_{\Omega}|w|^2\frac{d}{dt}\left[\varphi_\lambda^2(|\phi'|^2 - |\nabla\phi|^2)\right] dxdt \\
= \; & \frac{1}{2}\int_{\Omega} e^{2s\varphi_\lambda(0)}|FR(0)|^2 dx - \frac{s^2\lambda^2}{2}\int_{-T}^{0}\int_{\Omega}|w|^2\frac{d}{dt}\left[\varphi_\lambda^2(4\beta^2t^2 - 4|x-x_0|^2)\right] dxdt \\
= \; & \frac{1}{2}\int_{\Omega} e^{2s\varphi_\lambda(0)}|FR(0)|^2 dx - 4s^2\lambda^2\beta^2\int_{-T}^{0}\int_{\Omega}|w|^2\varphi_\lambda^2 t dxdt \\
& -4s^2\lambda^3\int_{-T}^{0}\int_{\Omega}|w|^2\phi'\varphi_\lambda^2(\beta^2t^2 - |x-x_0|^2) dxdt \\
= \; & \frac{1}{2}\int_{\Omega} e^{2s\varphi_\lambda(0)}|FR(0)|^2 dx - 4s^2\lambda^2\beta^2\int_{-T}^{0}\int_{\Omega}|w|^2\varphi_\lambda^2 t dxdt \\
& +8s^2\lambda^3\beta\int_{-T}^{0}\int_{\Omega}|w|^2\varphi_\lambda^2 t(\beta^2t^2 - |x-x_0|^2) dxdt.
\end{aligned}
$$

Podemos supor $\lambda \geqslant \lambda_0 \geqslant 1$. Da última igualdade e utilizando Cauchy-Schwarz, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega} e^{2s\varphi_\lambda(0)}|FR(0)|^2 dx \\
= \; & 2\int_{-T}^{0}\int_{\Omega} P_1 w w' dxdt + 8s^2\lambda^2\beta^2\int_{-T}^{0}\int_{\Omega}|w|^2\varphi_\lambda^2 t dxdt \\
& -16s^2\lambda^3\beta\int_{-T}^{0}\int_{\Omega}|w|^2\varphi_\lambda^2 t(\beta^2t^2 - |x-x_0|^2) dxdt \\
\leqslant \; & 2\left(\int_{-T}^{0}\int_{\Omega}|P_1 w|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-T}^{0}\int_{\Omega}|w'|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} + 8T\beta^2s^2\lambda^2\int_{-T}^{0}\int_{\Omega}|w|^2\varphi_\lambda^2 dxdt \\
& +M_1 s^2\lambda^3\int_{-T}^{0}\int_{\Omega}|w|^2\varphi_\lambda^2 dxdt \\
\leqslant \; & \frac{2}{s^{\frac{1}{2}}}\left(\int_{-T}^{0}\int_{\Omega}|P_1 w|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\left(s\int_{-T}^{0}\int_{\Omega}|w'|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} + 8T\beta^2s^2\lambda^3\int_{-T}^{0}\int_{\Omega}|w|^2\varphi_\lambda^2 dxdt \\
& +M_1 s^2\lambda^3\int_{-T}^{0}\int_{\Omega}|w|^2\varphi_\lambda^2 dxdt \\
\leqslant \; & \frac{2}{s^{\frac{1}{2}}}\left(\int_{-T}^{0}\int_{\Omega}|P_1 w|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\left(s\int_{-T}^{0}\int_{\Omega}|w'|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} + M_2 s^2\lambda^3\int_{-T}^{0}\int_{\Omega}|w|^2\varphi_\lambda^2 dxdt \\
\leqslant \; & \frac{1}{s^{\frac{1}{2}}}\left(\int_{-T}^{0}\int_{\Omega}|P_1 w|^2 dxdt + s\int_{-T}^{0}\int_{\Omega}|w'|^2 dxdt\right) + M_2 s^2\lambda^3\int_{-T}^{0}\int_{\Omega}|w|^2\varphi_\lambda^2 dxdt.
\end{aligned}
$$

Observemos que $\varphi_\lambda \geqslant 1$ e que podemos tomar $M_2 \geqslant 1$ e $s \geqslant s_0 \geqslant 1$. Logo,

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda(0)}|FR(0)|^2dx\\
\leqslant\ & \frac{M_2}{s^{\frac{1}{2}}}\left(\int_{-T}^{0}\int_\Omega |P_1w|^2dxdt + s\int_{-T}^{0}\int_\Omega |w'|^2dxdt\right) + \frac{M_2}{s^{\frac{1}{2}}}s^{\frac{1}{2}}s^2\lambda^3\int_{-T}^{0}\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda^3dxdt\\
\leqslant\ & \frac{M_2}{s^{\frac{1}{2}}}\left(\int_{-T}^{0}\int_\Omega |P_1w|^2dxdt + s\lambda\int_{-T}^{0}\int_\Omega \varphi_\lambda|w'|^2dxdt + s^3\lambda^3\int_{-T}^{0}\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda^3dxdt\right).
\end{aligned}
$$

Aplicando a Estimativa de Carleman na forma de (3.25), obtemos uma constante $C = C(s_0, \lambda_0, \Omega, x_0, m) > 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda(0)}|FR(0)|^2dx\\
\leqslant\ & \frac{M_2}{s^{\frac{1}{2}}}\left(\int_{-T}^{T}\int_\Omega |P_1w|^2dxdt + s\lambda\int_{-T}^{T}\int_\Omega \varphi_\lambda|w'|^2dxdt + s^3\lambda^3\int_{-T}^{T}\int_\Omega |w|^2\varphi_\lambda^3dxdt\right)\\
\leqslant\ & \frac{M_2C}{s^{\frac{1}{2}}}\left(\int_{-T}^{T}\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}|L_0v|^2dxdt + s\lambda\int_{-T}^{T}\int_{\Gamma_0} \varphi_\lambda\left|\frac{\partial w}{\partial\eta}\right|^2 d\Gamma dt\right). \qquad (5.13)
\end{aligned}
$$

Por (3.27) e procedendo como na $\mathtt{Etapa}$ I da demonstração do teorema 3.1, obtemos

$$
\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda(0)}|FR(0)|^2dx \leqslant \frac{M_3}{s^{\frac{1}{2}}}\left(\int_{-T}^{T}\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}|Lv|^2dxdt + s\lambda\int_{-T}^{T}\int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi_\lambda}\varphi_\lambda\left|\frac{\partial v}{\partial\eta}\right|^2 d\Gamma dt\right). \qquad (5.14)
$$

- Estimaremos a parcela $\displaystyle\int_{-T}^{T}\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}|Lv|^2dxdt.$

Utilizando (5.8), (5.10), (5.11) e as propriedades da θ_δ, temos

$$
\begin{aligned}
&\int_{-T}^{T}\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}|Lv|^2dxdt = \int_{-T}^{T}\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}\left|\theta_\delta(t)F(x)R'(x,t) + \theta_\delta''\zeta + 2\theta_\delta'\zeta'\right|^2 dxdt\\
\leqslant\ & 2\int_{-T}^{T}\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}\left|\theta_\delta(t)F(x)R'(x,t)\right|^2 dxdt + 2\int_{-T}^{T}\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}\left|\theta_\delta''\zeta + 2\theta_\delta'\zeta'\right|^2 dxdt\\
\leqslant\ & 2\int_{-T}^{T}\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}|F(x)R'(x,t)|^2dxdt\\
&+16\left(\int_{-T}^{-T+\delta} + \int_{T-\delta}^{T}\right)\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}\left(|\theta_\delta''\zeta|^2 + |\theta_\delta'\zeta'|^2\right)dxdt\\
\leqslant\ & 2\int_{-T}^{T}\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda(0)}|F(x)R'(x,t)|^2dxdt\\
&+M_4\left(\int_{-T}^{-T+\delta} + \int_{T-\delta}^{T}\right)\int_\Omega e^{2se^{\lambda M_0}}\left(|\zeta|^2 + |\zeta'|^2\right)dxdt\\
\leqslant\ & 2\int_{-T}^{T}\left[|R'(t)|^2_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda(0)}|F(x)|^2dx\right]dt\\
&+M_4\left(\int_{-T}^{-T+\delta} + \int_{T-\delta}^{T}\right)\int_\Omega e^{2se^{\lambda M_0}}(|\zeta|^2 + |\zeta'|^2)dxdt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant 2\int_{-T}^{T}|R'(t)|^2_{L^\infty(\Omega)}dt\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda(0)}|F(x)|^2dx\\
&\quad +M_4e^{2se^{\lambda M_0}}\left(\int_{-T}^{-T+\delta}+\int_{T-\delta}^{T}\right)\int_\Omega(|\zeta|^2+|\zeta'|^2)dxdt\\
&\leqslant 2|R'|^2_{L^2(-T,T;L^\infty(\Omega))}\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda(0)}|F(x)|^2dx \qquad (5.15)\\
&\quad +M_5e^{2se^{\lambda M_0}}\left(\int_{-T}^{-T+\delta}+\int_{T-\delta}^{T}\right)\int_\Omega\left(|\nabla\zeta(x,t)|^2+|\zeta'(x,t)|^2\right)dxdt,
\end{aligned}
$$

onde na última desigualdade, utilizamos a Desigualdade de Poincaré-Friedrichs. Observando (5.6) e a proposição 2.1, temos que existe uma constante $C=C(\Omega,T,m)>0$ tal que

$$
\begin{aligned}
\|\zeta(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)}+|\zeta'(t)|^2 &\leqslant C\left(\|\zeta(0)\|^2_{H^1_0(\Omega)}+|\zeta'(0)|^2_{L^2\Omega}+|FR'|^2_{L^1(-T,T;L^2(\Omega))}\right)\\
&= C\left(|FR(0)|^2_{L^2(\Omega)}+|FR'|^2_{L^1(-T,T;L^2(\Omega))}\right)\\
&= C\left(\int_\Omega|F(x)R(x,0)|^2dx+\left[\int_{-T}^{T}\left(\int_\Omega|F(x)R'(x,t)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}dt\right]^2\right)\\
&\leqslant C\left(|R(0)|^2_{L^\infty(\Omega)}|F|^2_{L^2(\Omega)}+\left[\int_{-T}^{T}|R'(t)|_{L^\infty(\Omega)}|F|^2_{L^2(\Omega)}dt\right]^2\right)\\
&= C\left(|R(0)|^2_{L^\infty(\Omega)}|F|^2_{L^2(\Omega)}+|F|^2_{L^2(\Omega)}|R'|^2_{L^1(-T,T;L^\infty(\Omega))}\right) \qquad (5.16)\\
&\leqslant C\left(|R(0)|^2_{L^\infty(\Omega)}+C_1|R'|^2_{L^2(-T,T;L^\infty(\Omega))}\right)|F|^2_{L^2(\Omega)}\\
&\leqslant M_6\left(|R(0)|^2_{L^\infty(\Omega)}+|R'|^2_{L^2(-T,T;L^\infty(\Omega))}\right)|F|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

De (5.9), (5.15), (5.16) e do teorema 1.4.4, resulta que:

$$
\begin{aligned}
&\int_{-T}^{T}\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}|L\nu|^2dxdt\\
&\leqslant 2|R'|^2_{L^2(-T,T;L^\infty(\Omega))}\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda(0)}|F(x)|^2dx\\
&\quad +2\delta M_5M_6\left(|R(0)|^2_{L^\infty(\Omega)}+|R'|^2_{L^2(-T,T;L^\infty(\Omega))}\right)e^{2se^{\lambda M_0}}|F|^2_{L^2(\Omega)}\\
&\leqslant 2|R'|^2_{L^2(-T,T;L^\infty(\Omega))}\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda(0)}|F(x)|^2dx \qquad (5.17)\\
&\quad +2\delta M_5M_6\left(|R(0)|^2_{L^\infty(\Omega)}+|R'|^2_{L^2(-T,T;L^\infty(\Omega))}\right)\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda(0)}|F(x)|^2dx\\
&\leqslant M_7\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda(0)}|F(x)|^2dx.
\end{aligned}
$$

Utilizando (5.17) em (5.14), segue que:

$$
\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda(0)}|FR(0)|^2dx\leqslant\frac{M_3}{s^{\frac{1}{2}}}\left(M_7\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda(0)}|F(x)|^2dx+s\lambda\int_{-T}^{T}\int_{\Gamma_0}e^{2s\varphi_\lambda}\varphi_\lambda\left|\frac{\partial\nu}{\partial\eta}\right|^2d\Gamma dt\right).
$$

Pela hipótese (5.3), vale que:

$$r^2\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda(0)}|F(x)|^2dx \leqslant \frac{M_3M_7}{s^{\frac{1}{2}}}\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda(0)}|F(x)|^2dx+M_3s^{\frac{1}{2}}\lambda\int_{-T}^{T}\int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi_\lambda}\varphi_\lambda\left|\frac{\partial v}{\partial\eta}\right|^2 d\Gamma dt.$$

Logo,

$$\left(1-\frac{M_8}{s^{\frac{1}{2}}}\right)\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda(0)}|F(x)|^2dx \leqslant M_9s^{\frac{1}{2}}\lambda\int_{-T}^{T}\int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi_\lambda}\varphi_\lambda\left|\frac{\partial v}{\partial\eta}\right|^2 d\Gamma dt,$$

onde $M_8 = \dfrac{M_3M_7}{r^2}$, que independe de s. Daí, tomando $s > 4M_8^2$, temos que $1-\dfrac{M_8}{s^{\frac{1}{2}}} > \frac{1}{2}$. Com isto e visto que $y'(x,t) = \zeta(x,t) = \zeta(x,-t)$ e $\varphi_\lambda(x,t) = \varphi_\lambda(x,-t)$, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda(0)}|F(x)|^2dx &\leqslant 2M_9s^{\frac{1}{2}}\lambda\int_{-T}^{T}\int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi_\lambda}\varphi_\lambda\left|\frac{\partial v}{\partial\eta}\right|^2 d\Gamma dt\\
&= 2M_9s^{\frac{1}{2}}\lambda\int_{-T}^{T}\int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi_\lambda}\varphi_\lambda\left|\theta_\delta\frac{\partial y'}{\partial\eta}\right|^2 d\Gamma dt\\
&\leqslant 2M_9s^{\frac{1}{2}}\lambda\int_{-T}^{T}\int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi_\lambda}\varphi_\lambda\left|\frac{\partial y'}{\partial\eta}\right|^2 d\Gamma dt\\
&= 4M_9s^{\frac{1}{2}}\lambda\int_{0}^{T}\int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi_\lambda}\varphi_\lambda\left|\frac{\partial y'}{\partial\eta}\right|^2 d\Gamma dt.
\end{aligned}$$

Sendo φ_λ bem regular, é limitada em $\Omega\times(-T,T)$ e de (5.9) existe $C = C(T,\Omega,\Gamma_0,K,r) > 0$ tal que

$$\|F\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C\left|\frac{\partial y'}{\partial\eta}\right|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_0))} \leqslant C\left|\frac{\partial y}{\partial\eta}\right|^2_{H^1(0,T;L^2(\Gamma_0))}. \tag{5.18}$$

□

Na próxima seção obteremos os resultados de regularidade e unicidade como consequência do caso linear.

5.2 Problema Inverso Não Linear

Podemos agora enunciar o principal resultado de estabilidade.

Teorema 5.2.1. *Considere* $m > 0$, $K > 0$ *e* $r > 0$. *Seja* $q \in L^\infty(\Omega)$ *com* $\|q\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant m$. *Assumamos que* $u(q)$, *solução da equação* (5.1), *é tal que*

$$\|u(q)\|_{H^1(0,T;L^\infty(\Omega))} \leqslant K$$

e assuma que a condição inicial u_0 *satisfaz*

$$|u_0(x)| \geqslant r, \quad \textit{para todo} \;\; x \in \Omega.$$

Suponha que Γ_0 *e* T *satisfaçam as hipóteses geométricas:*

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \quad \textit{tal que} \quad \Gamma \supseteq \Gamma_0 = \{x \in \Gamma; (x - x_0) \cdot \eta > 0\} \quad \textit{e} \quad T > \sup_{x \in \Omega} |x - x_0|.$$

Então para toda $p \in L^\infty(\Omega)$ *com* $\|p\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant m$, $\dfrac{\partial u(p)}{\partial \eta} - \dfrac{\partial u(q)}{\partial \eta} \in H^1(0, T; L^2(\Gamma_0))$ *e além disso, existe uma constante* $C = C(m, T, K, r) > 0$ *tal que para qualquer* $p \in L^\infty(\Omega)$ *com* $\|p\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant m$,

$$\left\| \frac{\partial u(p)}{\partial \eta} - \frac{\partial u(q)}{\partial \eta} \right\|_{H^1(0,T;L^2(\Gamma_0)} \leqslant C|p - q|_{L^2(\Omega)}, \tag{5.19}$$

e

$$|p - q|_{L^2(\Omega)} \leqslant C \left\| \frac{\partial u(p)}{\partial \eta} - \frac{\partial u(q)}{\partial \eta} \right\|_{H^1(0,T;L^2(\Gamma_0))}. \tag{5.20}$$

Observação 5.1. *A estimativa* (5.20) *representa a estabilidade de Lipschitz do problema inverso, enquanto* (5.19) *dá a dependência contínua da derivada normal, da solução em relação ao potencial.*

Demonstração. Denotando

$$y = u(p) - u(q),$$

temos que y é solução da seguinte equação da onda:

$$\left| \begin{array}{l} y'' - \Delta y + py = (q - p)u(q) \ \ \mathsf{em} \ \ Q; \\ y = 0 \ \ \mathsf{sobre} \ \ \Gamma \times (0, T); \\ y(0) = 0, \ \ y'(0) = 0 \ \ \mathsf{em} \ \ \Omega. \end{array} \right.$$

Tomando $F(x) = q(x) - p(x)$ e $R(x, t) = u(q)(x, t)$, e observando as hipóteses, temos:

$$F = q - p \in L^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega);$$
$$R = u(q) \in H^1(0, T; L^\infty(\Omega));$$
$$\|R\|_{H^1(0,T;L^\infty(\Omega))} = \|u(q)\|_{H^1(0,T;L^\infty(\Omega))} \leqslant K;$$
$$|R(x, 0)| = |u_0(x)| \geqslant r, \quad \text{para todo} \ \ x \in \Omega,$$

isto é, temos as hipóteses do teorema 5.1. Aplicando-os, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\frac{1}{C}\|q - p\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \left\| \frac{\partial u(p)}{\partial \eta} - \frac{\partial u(p)}{\partial \eta} \right\|^2_{H^1(0,T;L^2(\Gamma_0))} \leqslant C\|q - p\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

□

A unicidade segue diretamente da estabilidade de Lipschitz. De fato, se

$$\frac{\partial u(p)}{\partial \eta} = \frac{\partial u(q)}{\partial \eta},$$

então por (5.20) segue que

$$p = q.$$

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, R. A.: *Sobolev Spaces*, New York, Academic Press, 1975.

[2] BACHMAN, G. e NARICI, L.: *Functional Analysis.* New York, Academic Press, 1966.

[3] BAUDOUIN, L.: *Lipschitz stability in an inverse problem for the wave equation*, Université de Toulouse, France, Nov. 2001. Disponível em: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00598876>. Acesso em: 13 de abril de 2016.

[4] BAUDOUIN, L., BUHAN, M. e ERVEDOZA, S.: *Global Carleman estimates for waves and applications.* Communications in Partial Differential Equations 38, 5, pp. $823-859$, 2013.

[5] BOTELHO, G., PELLEGRINO, D. e TEIXEIRA, E.: *Fundamentos de Análise Funcional*, Textos Universitários, Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[6] BREZIS, H.: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2011.

[7] CARLEMAN, T.: *Sur un problème d'unicité pour les systèmes d'équations aux derivées partielles à deux variables independentes*, Ark. Mat. Astr. Fys., Vol 2B, 1939, pp: 1-9.

[8] CAVALCANTI, M. M. e DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.: *Introdução às Equações Diferenciais Parciais*, Maringá: UEM/DMA, 2010.

[9] CASTRO, N. N. O.: *Soluções Fracas para um Sistema Hiperbólico Envolvendo o Operador p-Laplaciano* $(2 < \mathrm{p} < 3)$. João Pessoa: UFPB, 2005.

[10] ELON, E. L.: *Curso de Análise.* Rio de Janeiro, IMPA, 2009.

[11] EVANS, L. C.: *Partial Diferencial Equations.* v. 19. Providence: American Mathematical Society, 1998.

[12] FLAMARION, M. V.: *Controlabilidade exata na fronteira para equação de ondas com potencial.* Dissertação de Mestrado. Universidade Federal Fluminense, Nitéroi, 2014.

[13] GOMES, E. L.: *Desigualdade de Carleman para Equação da Onda e Aplicações à Controlabilidade Exata e Problema Inverso.* Dissertação de Mestrado. Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2012.

[14] HÖRMANDER, L.: *Linear Partial Differential Operators*, Springer Verlag, Berlin, 1963.

[15] IMANUVILOV, O. Y.: *On Carleman estimate for hyperbolic equations.* Asym. Anal. 32, $185 - 220$, 2002.

[16] KESAVAN, S.: *Topics in functional analysis and applications.* John Wiley and Sons,New Delhi, 1989.

[17] KLIBANOV, M. V.: *Inverse problems and Carleman estimates.* Inverse Problems, $8(4) : 575 - 596$, 1992.

[18] KREYSZIG, E.: *Introduction Functional Analysis with Applications.* John Wiley e Sons, New York, 1978.

[19] LIONS, J. L.: *Contrôlabilité exacte, perturbation et stabilisation de Systèmes Distribués*, 1, Masson, Paris, 1988.

[20] LIONS, J. L.: *Hidden Regularity in some Nonlinear Hyperbolic Equations.* Matemática Aplicada e Computacional, Vol 6, pp. 7-15, 1987.

[21] LIONS, J. L. e MAGENES: *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications.* Berlin, Springer, 1972.

[22] LIONS, J. L. e MAGENES: *Problèmes aux limites non homogeneous et applications.* Paris, Dunod, 1968.

[23] MATOS, M. P.: *Integral de Bochner e os espaços* $L^p(0,T;X)$. Notas de Aula, UFPB, João Pessoa, 1998.

[24] MEDEIROS, L.A.: *Tópicos em Equações Diferenciais Parciais*, Parte I, IM- UFRJ, Rio de Janeiro, 2006.

[25] MEDEIROS, L.A. e MIRANDA, M.M.: *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferencias Parcias*. Rio de Janeiro: Editora da UFRJ/IM, 2011.

[26] MEDEIROS, L.A. e MIRANDA, M.M.: *Espaços de Sobolev: iniciação aos problemas elíticos não homogêneos*. Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2000.

[27] MEDEIROS, L. A.,MIRANDA, M. M. e LOURÊDO, A. T.: *Introduction to exact control theory method HUM*. Campina Grande: EDUEPB, 2013.

[28] MEDEIROS, L. A. e RIVERA, P. H.: *Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais*. Textos de Métodos Matemáticos, Instituto de Matemática - UFRJ, número 9, 1975.

[29] MICO, S. e ZUAZUA, E.: *An Introduction to the Controllability of Partial Differential Equations*. Universidade Autónoma de Madrid, Spain.

[30] MIRANDA, M. M.: *HUM and the Wave Equation with Variable Coefficients*. Jornal Asymtotic Analysis, 1995.

[31] MIRANDA, M. M.: *Traço para o Dual dos Espaços de Sobolev*. 28° SBA, 1988.

[32] MURILLO, K. P.: *Controlabilidade Exata e Aproximada da Equação da Onda Linear*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2008.

[33] OLIVEIRA, C. R.: *Introdução à análise funcional*. Projeto Euclides, Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

[34] PATHAK, R. S.: *A Course in Distribution Theory and Applications*. New Delhi, Narosa, 2009.

[35] PUEL, J. P.: *Global Carleman inequalities for the wave equations and applications to controllability and inverse problems*. Lectures notes used in advanced school "Control of Solids and Structures: Mathematical Modelling and Engineering Applications"at

the C.I.S.M. in Udine in June 2004 and to a part of D.E.A. course at the University Pierre et Marie Curie in 2003-2004.

[36] RIBEIRO, N.F.M.: *Dual de espaços* $\mathtt{L}^{\mathtt{p}}(\mathtt{p} > 1)$ *de Funções vetoriais.* Gazeta de Matemática N° $133 - 136$, Lisboa, 1976.

[37] RUDIN, W.: *Functional analysis.* McGraw-Hill, 1991.

[38] VISIK, M. I. e LADYZENSKAYA, O. A.: *Boundary value problems for partial differential equations and certain classes of perator equations.* Uspehi Mat. Nauk (NS), 11 (672), (1956) ; 41-97.

[39] YAMAMOTO, M.: *Uniqueness and stability in multidimensional hyperbolic inverse problems.* J. Math. Pures Appl. (9), $78(1) : 65 - 98$, 1999.