Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Existência de extremais para problemas maximizantes relacionados à desigualdade de Trudinger-Moser

Antônio de Pádua Farias de Souza Filho

Teresina - 2016

Antônio de Pádua Farias de Souza Filho

Dissertação de Mestrado:

Existência de extremais para problemas maximizantes relacionados à desigualdade de Trudinger-Moser

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. José Francisco Alves de Oliveira

Teresina - 2016

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Comunitária Jornalista Carlos Castello Branco
Serviço de Processamento Técnico

S729e Souza Filho, Antônio de Pádua Farias de.
Existência de extremais para problemas maximizantes relacionados à desigualdade de Trundinger-Moser / Antônio de Pádua Farias de Souza Filho. -- 2016.
69 f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática, Teresina, 2016.
"Orientação: Prof. Dr. José Francisco Alves de Oliveira."

1. Análises. 2. Equações Diferenciais Parciais. 3. Desigualdade de Trudinger-Monser. I. Título.

CDD 515.353

Ao meu pai Antônio de Pádua Farias de Souza, à minha mãe Maria de Jesus de Oliveira Souza, meus familiares e amigos.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus por conceder-me a dádiva de existir e sempre está ao meu lado dando-me força para enfrentar a todas as dificuldades que aparecem em minha vida.

Agradeço ao meu professor da graduação Carlos Augusto que sempre acreditou em mim, dizendo palavras de incentivo quando eu ficava afligido diante das dificuldades que apareciam no curso. Agradeço-lhe pelo apoio, amizade e ensinamentos, que sempre pude contar quando eu solicitava-lhe.

Agradeço ao professor Renan por acreditar em mim e pelos importantíssimos conhecimentos transmitidos que fizeram grande diferença em minha vida.

Agradeço a todos os professores da graduação que, sem exceção de algum, sempre me ajudavam a extinguir as dúvidas que apareciam no decorrer do curso.

Agradeço ao professor Alexandro Marinho que foi meu orientador durante minha participação no importante programa de iniciação científica na UFPI ajudando a criar em mim um grande interesse pela matemática de modo que me sentisse realizado por ter a oportunidade de conhecer todo o seu encanto. Agradeço-lhe também por sempre estar disposto a me ajudar tanto em minha vida acadêmica como também no que for possível.

Agradeço ao professor José Francisco pela orientação, amizade, paciência e por ter-me apresentado de maneira tão clara e fascinante conhecimentos do mundo da matemática, em particular, da tão essencial e interessante Análise Matemática.

Agradeço aos meus parceiros, que conheci na graduação, pela amizade, pelas palavras de incentivo e por nunca deixarem de acreditar em mim.

Agradeço aos amigos do mestrado pelos momentos bons e também ruins que vivenciamos juntos. Dentre eles, relato aqui, a Andressa Gomes, que desde a graduação tem sido e sempre será uma pessoa muito importante em minha vida, o Rafael e o Jhonata que desde quando entrei no mestrado sempre foram grandes amigos, os quais desejo sempre tê-los em minha vida, aos demais parceiros do mestrado como Ray Victor, Lucas Machado, Lucas Quaresma, Antônio Aguiar, Jéferson, Sandoel, Elianderson, Jaciel, e a todos os demais que sempre pude contar.

Agradeço a minha família em especial meu pai, minha mãe, minha tia Enedina, minha tia Helena e meu tio Marcelo que sempre estiveram do meu lado, me ajudando e apoiando nos diversos momentos desta minha emocionante trajetória.

Agradeço aos professores do mestrado por todo o conhecimento transmitido e boa vontade de repassá-los. Agradeço também a todos os amigos que tive a sorte de conhecê-los neste período.

Agradeço à CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior- pelo suporte financeiro, o qual me proporcionou condições de cursar uma pós-graduação, e à Coordenação de Pós-graduação em Matemática da UFPI.

"*E quando você pensar em desistir, lembre-se dos motivos que te fizeram aguentar até agora.*".

Hudson Menezes

Resumo

Neste trabalho estudamos a existência de funções extremais para a Desigualdade de Trudinger-Moser clássica quando o domínio é a bola em $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{N} \geqslant 2$. Além disso, investigamos a existência de extremais para problemas maximizantes com não-linearidades gerais que tem crescimento subcrítico e crítico em um domínio limitado suave arbitrário $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Por fim, apresentamos algumas aplicações para equações diferenciais parciais elípticas relacionadas.

Abstract

In this work we study the existence of extremal functions to the classical Trudinger-Moser inequality in the case that the domain is the ball in $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$. Moreover, we investigate the existence of extremals to maximizing problems with general nonlinearities that have subcritical and critical growth when the domain is an arbitrary smooth bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Finally, we present some applications to related elliptic partial differential equations.

Sumário

Notações

- Ω é um subconjunto aberto e limitado em $\mathbb{R}^N$.
- $C_0^\infty(\Omega)$ são as funções com suporte compacto em Ω infinitamente diferenciáveis.
- $W_0^{1,N}(\Omega)$ é o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ no espaço $W^{1,N}(\Omega)$.
- $L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R};\ \text{mensurável e } \int_\Omega |u|^p dx < \infty \mid 1 \leqslant p < \infty\}$ denota o espaço de Lebesgue.
- $\|u\|_p^p = \int_\Omega |\nabla u|^p dx$.
- $\|u\|_{L^p}^p = \int_\Omega |u|^p dx$.
- $\mathcal{L}_N$ é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 1$.
- $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$ denota o espaço de medida Radon no $\overline{\Omega}$.
- ω_{N-1} representa a medida $(N-1)$-dimensional da esfera unitária no $\mathbb{R}^N$.
- $B_r(x_0)$ é a bola de centro x_0 e raio r no $\mathbb{R}^N$.
- $u^\sharp$ é o rearranjamento decrescente de uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mensurável definido em $[0, |\Omega|]$ por

$$\begin{aligned} u^\sharp(0) &= \sup \mathrm{ess}(u) \\ u^\sharp(s) &= \inf\{t|\mu_u(t) < s,\ \ s > 0\}, \end{aligned}$$

onde, $\mu_u(t) = |\{u > t\}|$.

Introdução

Neste trabalho estudamos a existência de funções extremais para problemas maximizantes associados com a desigualdade de Trudinger-Moser e apresentamos algumas aplicações para equações diferenciais elípticas. Mais precisamente, considere $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$, um domínio limitado e suave e seja $W_0^{1,N}(\Omega)$ o espaço de Sobolev clássico munido com a norma de Dirichlet $\|u\|_N^N = \int_\Omega |\nabla u|^N dx$.

Foi provado por Trudinger em [32] que existe α suficientemente pequeno tal que a integral $\int_\Omega e^{\alpha u^{N/(N-1)}} dx$ é limitada independentemente de $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ com $\|u\|_N \leqslant 1$. Resultados similares foram obtidos independentemente por Yudovich em [34] e Pohozaev em [29]. Mais tarde, J. Moser [28] estabeleceu o melhor valor para α provando o seguinte:

$$\sup_{\|u\|_N \leqslant 1} \int_\Omega e^{\alpha |u|^{\frac{N}{N-1}}} dx \leqslant C_{N,\alpha} |\Omega| \quad \text{se} \quad \alpha \leqslant \alpha_N,$$

onde $|\Omega|$ é a medida de Lebesgue de Ω em $\mathbb{R}^N$, $\alpha_N = N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}$ e ω_{N-1} é a área da superfície esférica unitária $S^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$. Além disso, para $\alpha > \alpha_N$ a integral acima pode ser feita arbitrariamente grande escolhendo $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$, $\|u\|_N \leqslant 1$ apropriada. No Capítulo 2 apresentamos uma prova do resultado de Moser mesclando as ideias de Moser e os trabalhos de Marshall [26].

Em vista da desigualdade de Trudinger-Moser para $\alpha \leqslant \alpha_N$, o seguinte supremo está bem definido:

$$M = \frac{1}{|\Omega|} \sup_{\|u\|_N \leqslant 1} \int_\Omega e^{\alpha u^{N/(N-1)}} dx.$$

Aqui surge o problema maximizante, isto é, determinar $u_0 \in W_0^{1,N}(\Omega)$, $\|u_0\|_N \leqslant 1$ tal que $M = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega e^{\alpha u_0^{N/(N-1)}} dx$; tal função chama-se função extremal para M. O primeiro resultado nessa direção é devido a Lennart Carleson e Alice Chang em [23], que provaram em 1986 a existência de função extremal para a desigualdade de Trudinger-Moser, quando Ω é uma bola em qualquer dimensão. Em [27] M. Struwe estudou a existência de funções extremais para um domínio não-simétrico. No caso em que $N = 2$, ele obteve uma condição suficiente para a existência de uma função extremal, usando a análise de blow-up. Em 1992, M. Flucher em [15] introduziu outro método, o rearranjamento conforme, e deduziu uma desigualdade isoperimétrica que implica a existência de funções extremais quando Ω é um domínio qualquer limitado e suave em $\mathbb{R}^2$. Depois, K. Lin em [24] generalizou a existência de uma função extremal para um domínio limitado suave qualquer em $\mathbb{R}^N$, com $N \geqslant 2$. Veja também em [18] alguns resultados relacionados. Recentemente, Y. Li [35] obteve a existência de um extremal para certas desigualdades do tipo Trudinger-Moser em variedades Riemannianas.

Nessa dissertação apresentaremos a demonstração de existência de extremal para M quando $\Omega = B_1(0)$ representa a bola unitária em $\mathbb{R}^N$ centrada na origem. Para $\alpha < \alpha_N$, o resultado segue facilmente como consequência direta do Teorema da Convergência de Vitali, mesmo para $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ arbitrário. O estudo do caso $\alpha_N = \alpha$ é delicado; para isso, utilizamos a prova de Lennart Carleson e Alice Chang em [23] que está baseada nas seguintes etapas:

Etapa 1: Supõe-se que não existe uma função extremal para M, prova-se

$$M = \sup_{\|u\|_N \leqslant 1} \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega e^{\alpha u^{N/(N-1)}} dx = (1 + \exp(1 + 1/2 + \ldots + 1/(N-1)))\,.$$

Etapa 2: Para cada $N \geqslant 2$, constroi-se uma função $\{\gamma_N\}$ com $\gamma_N \in W_0^{1,N}(\Omega)$ e $\|\gamma_N\|_N = 1$, de modo que

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega e^{\gamma_N^{N/(N-1)}} dx > 1 + \exp(1 + 1/2 + \ldots + 1/(N-1)).$$

Provadas essas duas etapas, a existência de função extremal segue facilmente por contradição. No Capítulo 3 estudamos a existência de função extremal para problemas maximizantes gerais de acordo com os trabalhos de B. Ruf, D. G. de Figueiredo e J. M. do Ó [10]. Mas precisamente, investigamos o problema extremal para o supremo

$$S_N = \frac{1}{|\Omega|} \sup_{\|u\|_N \leqslant 1} \int_\Omega F(u) dx,$$

onde

(F1) $F \in C^1(\mathbb{R})$,

(F2) F é crescente sobre $\mathbb{R}^+$, e $F(t) = F(|t|)$,

(F3) $0 \leqslant F(t) \leqslant e^{\alpha_N |t|^{\frac{N}{N-1}}} - 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, (F4) $\lim_{|t|\to\infty} e^{-\alpha_N|t|^{\frac{N}{N-1}}} F(t)$ existe.

Consideraremos F com crescimento crítico e sub-crítico conforme as definições a seguir. Dizemos que F tem *crescimento subcrítico* se

$$\lim_{t\to\infty} \frac{F(t)}{e^{\alpha_N|t|^{\frac{N}{N-1}}}} = 0;$$

por outro lado, dizemos que F tem *crescimento crítico* se

$$\lim_{t\to\infty} F(t)e^{-\alpha_N|t|^{\frac{N}{(N-1)}}} = 1.$$

No Capítulo 4, aplicaremos os resultados estabelecidos no estudo de equações diferenciais elípticas.

Capítulo 1

Noções Preliminares

O objetivo desse capítulo é apresentar alguns resultados preliminares que serão utilizados ao longo do trabalho.

1.1 Análise Funcional (Resultados Básicos)

Definição 1.1.1. *Seja* (E, d) *um espaço métrico. Uma sequência* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *em* E *é dita de Cauchy em* E *se, para cada* $\epsilon > 0$ *existir* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $d(x_n, x_m) \leqslant \epsilon$ *para todo* $m, n \geqslant n_0$*. Nesse sentido, dizemos que* (E, d) *é completo de toda sequência de Cauchy em* E *converge para um elemento* x *de* E*.*

Observamos que dado um espaço linear E munido com uma norma $\|\cdot\|$, podemos definir uma métrica induzida por esta norma, isto é, $d(x, y) = \|x - y\|$.

Definição 1.1.2 (Espaço de Banach)**.** *Um espaço linear normado E é dito um espaço de Banach se este for um espaço métrico completo com relação à métrica induzida pela norma.*

Vale ressaltar que uma sequência $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ em um espaço de Banach E converge se, e somente se, $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em E, isto é, se, e somente se, $\|u_n - u_m\|_E \to 0$ quando $m, n \to \infty$.

Definição 1.1.3. *Um espaço de Banach E é separável quando contém um subconjunto enumerável e denso.*

Seja E um espaço linear sobre $\mathbb{R}$ munido com a norma $\|\cdot\|_E$. O espaço dual de E, E^* é o espaço formado pelos funcionais lineares contínuos $f : E \to \mathbb{R}$ munido com a norma

$$\|f\|_{E^*} = \sup_{\|x\|_E = 1} |f(x)|.$$

Análogo, o dual de E^*, E^{**}, é chamado bidual de E.

Definição 1.1.4. *Seja E um espaço normado. O mergulho canônico π de E em E^{**} é definido para $x \in E$ por*

$$\pi(x) : f \mapsto f(x),$$

para todo $f \in E^*$.

Definição 1.1.5. *Um espaço de Banach E é dito ser reflexivo se a aplicação π na Definição 1.1.4 é sobrejetora.*

1.2 Espaços de Sobolev

1.2.1 Definições e Propriedades Básicas

Começaremos com a definição de derivadas "fracas". Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ com $\partial\Omega \in C^1$. Suponha que $u \in C^1(\Omega)$ seja uma função continuamente diferenciável e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ uma função suave com suporte compacto em Ω. Segue da fórmula de integração por partes que

$$\int_\Omega u(\partial_i \varphi) = -\int_\Omega (\partial_i u)\varphi \tag{1.1}$$

para $i = 1, 2, ..., N$ (aqui denotamos por ∂_i a derivada parcial de primeira ordem $D^i = \partial/\partial_i$). Não há termos de fronteira exatamente porque φ tem suporte compacto em Ω. Note que as integrais em (1.1) estão bem definidas. Isto motiva a definição de derivada fraca.

Definição 1.2.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto. Dizemos que uma função $v_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ é a derivada fraca de u, se*

$$\int_\Omega u(\partial_i \varphi) = -\int_\Omega v_i \varphi, \tag{1.2}$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Se este for o caso, denotamos

$$v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \tag{1.3}$$

e escrevemos $\nabla u = \text{grad } u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$.

Observamos que se existe v_i, esta é única pelo Lema de Du Bois-Raymond ([16, p.16]) como se pode ver em [14].

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e seja $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leqslant p < \infty$.

Definição 1.2.2 (Espaço de Sobolev). *Definimos o espaço de Sobolev* $W^{1,p}(\Omega)$ *por*

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \text{ para } i = 1, \ldots, N\}$$

com a norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\Omega)}$$

Definimos ainda

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \text{ fecho de } C_0^\infty(\Omega) \text{ no espaço } W^{1,p}(\Omega)$$

.

Teorema 1.2.3. $W^{1,p}(\Omega)$ *é um espaço de Banach, separável se* $1 \leqslant p < \infty$*, e reflexivo se* $1 < p < \infty$.

Demonstração: ver em [4, p.203]. ■

Definição 1.2.4. *Sejam* X *e* Y *espaços de Banach. Dizemos que* X *está continuamente imerso em* Y *e escrevemos*

$$X \hookrightarrow Y$$

se $X \subset Y$ *e existe uma constante* C *tal que*

$$\|u\|_Y \leqslant C\|u\|_X \ \ \forall u \in X. \tag{1.4}$$

Definição 1.2.5. *Sejam* X *e* Y *espaços de Banach tal que* X *está continuamente imerso em* Y*. Dizemos que* X *está compactamente imerso em* Y *e escrevemos*

$$X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$$

se toda bola unitária em X *é precompacta em* Y *ou, equivalentemente, toda sequência limitada em* X *possui subsequência que converge em* Y.

O seguinte resultado estabelece uma equivalência entre a norma de Dirichlet $\|u\|_p = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ e a norma $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\Omega)}$ para o espaço de Sobolev clássico $W_0^{1,N}(\Omega)$.

Teorema 1.2.6. *(Desigualdade de Poincaré). Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto e limitado, e $1 \leqslant p < \infty$, então existe uma constante $K = K(p)$ tal que para toda $u \in C_0^1(\Omega)$*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant K\|u\|_p.$$

Demonstração: ver em [2, p.183]. ∎

Proposição 1.2.7. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}$ C^1.*

(a) *Se $1 \leqslant p < N$, então $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para todo $1 \leqslant q \leqslant p^* = \frac{pN}{N-p}$. Em particular, existe uma constante $C > 0$ tal que $\|u\|_{L^q(\Omega)} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ para toda função $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

(b) *Se $p = N$, então $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $1 \leqslant q < \infty$.*

Demonstração: ver em [4, p.285]. ∎

Teorema 1.2.8. *(Rellich-Kondrachov). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto C^1. Então temos a imersão compacta $W_0^{1,N}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$ para todo $q \in [N, +\infty)$.*

Demonstração: ver em [4, p.285]. ∎

1.3 Resultados de Teoria da Medida

Definição 1.3.1. *Uma sequência de funções $(f_n)_{n=1}^\infty$ mensuráveis em $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é dita ser **uniformemente integrável sobre** Ω desde que para cada $\varepsilon > 0$ exista $\delta > 0$ tal que*

$$A \subset \Omega \text{ é mensurável e } |A| < \delta, \text{ então } \int_A |f_n| < \varepsilon, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

onde $|A|$ é a medida de Lebesgue de A em $\mathbb{R}^N$.

Proposição 1.3.2. *(Desigualdade de Hölder) Seja $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$ com $p \geqslant 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $uv \in L^1(\Omega)$ e $\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leqslant \|u\|_{L^p(\Omega)}\|v\|_{L^q(\Omega)}$.*

Demonstração: ver em [4, p.92]. ∎

Teorema 1.3.3. *(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) Seja* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *uma sequência de funções integráveis que converge em quase todo ponto (q.t.p) de* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *para uma função real mensurável* f*. Se existe uma função integrável* g *tal que* $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ *em quase todo ponto (isto é, a menos de um conjunto de medida nula em* Ω*) de* Ω*, para todo* $n \geqslant 1$*, então* f *é integrável e* $\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0$*.*

Demonstração: ver em [4, p.90]. ∎

Teorema 1.3.4. *(Integração em Coordenadas Esféricas) Se* $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *é uma função mensurável, positiva ou integrável, tal que* $u(x) = \nu(r)$*, onde* $r = |x|$ *para alguma função* ν *definida em* $(0, +\infty)$*, então*

$$\int_{\mathbb{R}^N} u dx = \omega_{N-1} \int_0^{\infty} \nu(r) r^{N-1} dr.$$

Demonstração: ver em [20, p.209]. ∎

Teorema 1.3.5. *(Teorema Fundamental do Cálculo para a Integral de Lebesgue) Seja* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função real a uma variável real. Para todo* x*,* $x_0 \in [a, b]$*, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) F *é absolutamente contínua;*

(ii) *para alguma função* $f \in L^1([a, b])$ *temos*

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t) dt.$$

(iii) F *é diferenciável em quase todo ponto,* $\dot{F} \in L^1([a, b])$ *e* $F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x} \dot{F}(t) dt$.

Demonstração: ver em [17, p.85]. ∎

Teorema 1.3.6. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *e* $1 < p < \infty$*. Suponha que exista uma sequência de funções* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *em* $L^p(\Omega)$ *que é limitada em* $L^p(\Omega)$*, ou seja, existe uma constante* M *para qual*

$$\|f_n\|_{L^p} \leqslant M, \ \forall \ n \geqslant 1.$$

Então a sequência $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *é uniformemente integrável em* Ω*.*

Demonstração: ver em [19, p.142]. ∎

Teorema 1.3.7. *(Riesz-Fischer). Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *e* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Então,* $L^p(\Omega)$ *é um espaço de Banach. Além disso, se uma sequência em* $L^p(\Omega)$ *converge em* $L^p(\Omega)$ *para uma função* u *em* L^p, *então uma subsequência converge q.t.p. em* Ω *para* u.

Demonstração: ver em [19, p.148]. ∎

Teorema 1.3.8. *(Teorema da Convergência de Vitali) Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *de medida finita. Suponha que uma sequência de funções* $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ *é uniformemente integrável sobre* Ω. *Se* $u_n \to u$ *q.t.p. em* Ω, *então* u *é integrável em* Ω *e* $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega u_n = \int_\Omega u$.

Demonstração: ver em [19, p.98]. ∎

O seguinte resultado é conhecido como Princípio de Concentração-Compacidade e desempenhará papel importante nos capítulos 3 e 4.

Teorema 1.3.9. ***(P-L. Lions)*** *Sejam* $N \geqslant 2$ *e* Ω *um subconjunto do* $\mathbb{R}^N$ *aberto e limitado. Seja* $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ *uma sequência em* $W_0^{1,N}(\Omega)$ *tal que* $\int_\Omega |\nabla u_n|^N dx \leqslant 1$, $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ *e* $\mu \in \mathcal{M}(\overline{\Omega})$ *(espaço de medida Radon sobre* $\overline{\Omega}$*). Assumindo que*

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } W_0^{1,N}(\Omega), \quad u_n \to u \text{ q.t.p. em } \Omega \quad \text{e} \quad |\nabla u_n|^N \overset{*}{\rightharpoonup} \mu \text{ em } \mathcal{M}(\overline{\Omega}), \tag{1.5}$$

temos as seguintes alternativas:

(i) *Se* $u = 0$, $\mu = \delta_{x_0} \in \overline{\Omega}$ *é medida de Dirac concentrada em* x_0 *e*

$$\int_\Omega e^{(N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}|u_n|^{\frac{N}{N-1}})} dx \to c + \mathcal{L}_N(\Omega)$$

para algum $c \in [0, \infty)$ *e,* $\mathcal{L}_N(\Omega)$ *a medida de Lebesgue de* Ω *no* $\mathbb{R}^N$, *então*

$$e^{(N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}|u_N|^{\frac{N}{N-1}})} \overset{*}{\rightharpoonup} c\delta_{x_0} + \mathcal{L}_N|\Omega \text{ em } \mathcal{M}(\overline{\Omega}). \tag{1.6}$$

(ii) *Se* $u = 0$ *e* μ *não é uma medida de Dirac concentrada em um ponto, então existe* $p > 1$ *tal que*

$$e^{(N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}p|u_n|^{\frac{N}{N-1}})} \text{ é limitada em } L^1(\Omega). \tag{1.7}$$

(iii) *Se* $u \neq 0$, *então existe* $p > 1$ *tal que*

$$e^{(N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}p|u_n|^{\frac{N}{N-1}})} \text{ é limitada em } L^1(\Omega). \tag{1.8}$$

Mais ainda, em ambos os casos (ii) e (iii),

$$e^{(N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}|u_N|^{\frac{N}{N-1}})} \to e^{(N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}|u|^{\frac{N}{N-1}})} \text{ em } L^1(\Omega), \tag{1.9}$$

como consequência do Teorema da Convergência de Vitali, Teorema 1.3.8.

Demonstração: ver em [30]. ∎

1.4 Resultados da Teoria dos Pontos Críticos

Definição 1.4.1. *Seja* X *um espaço de Banach e* $I \in C^1(X, \mathbb{R})$*. Uma sequência* $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ *é uma sequência de Palais-Smale no nível* c *(em abreviação,*$(PS)_c$*) se*

$$I(u_n) \to c, \quad \dot{I}(u_n) \to 0.$$

Dizemos que o funcional I *satisfaz a condição* $(PS)_c$ *se toda sequência* $(PS)_c$ *possui uma subsequência convergente (na norma) em* X*. Quando o funcional* I *satisfaz a condição* $(PS)_c$ *para todo* $c \in \mathbb{R}$*, dizemos que* I *satisfaz esta condição (em abreviação,* I *satisfaz* (PS)*).*

Teorema 1.4.2. *(Teorema do Passo da Montanha, TPM) Seja* X *um espaço de Banach com norma* $\|\cdot\|_X$*, e* $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ *um funcional satisfazendo a condição* $(PS)_c$*. Suponha que*

(i) $I(0) = 0$

(ii) $\exists R > 0,\ \alpha > 0;\ \|u\|_X = R \Rightarrow I(u) \geqslant \alpha$

(iii) $\exists u_1 \in X;\ \|u_1\|_X > R$ *e* $I(u_1) < \alpha$.

Se definirmos

$$\Gamma = \{\varphi([0,1]); \varphi \in C([0,1], X), \varphi(0) = 0, \varphi(1) = u_1\},$$

então

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} I(\gamma(t))$$

é um valor crítico de I*.*

Demonstração: ver em [14, p.505]. ■

Capítulo 2

A Desigualdade de Trudinger-Moser e existência de extremais

Neste capítulo, enunciaremos e provaremos a Desigualdade de Trudinger-Moser clássica e discutiremos a existência de funções extremais nos casos subcríticos e críticos.

2.1 Desigualdade de Trudinger-Moser clássica

Pela imersão de Sobolev dado na Proposição 1.2.7 temos, que se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ para $1 \leqslant p < N$

$$\sup_{\|u\|_p \leqslant 1} \int_\Omega |u|^q dx < \infty \text{ para } 1 \leqslant q \leqslant p^*. \tag{2.1}$$

onde $p^* = Np/(N-p)$ é o expoente crítico de Sobolev. Tal supremo para o caso $q = p^*$ nunca é atingido em um domínio suave diferente de $\mathbb{R}^N$. Além disso, como veremos no exemplo a seguir, o supremo em (2.1) não existe para $q > p^*$.

Exemplo 2.1.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e suponha que $1 \leqslant p < N$ e $q > p^*$, isto é, $-\frac{N}{q} > 1 - \frac{N}{p}$. Construiremos uma função $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $u \notin L^q(\Omega)$, portanto mostrando que $W_0^{1,p}(\Omega)$ não está imerso em $L^q(\Omega)$. Assumiremos, sem perda de generalidade, que a origem pertence a Ω. Para todo $R > 0$, seja $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < R\}$. Fixemos R suficientemente pequeno tal que $\bar{B}_{2R} \subset \Omega$. Seja $v(x) = |x|^\mu$; o valor de μ será dado mais adiante. Evidentemente, $v \in C^\infty(\mathbb{R}^N - \{0\})$. Seja $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N - \{0\})$ uma função satisfazendo $u(x) = v(x)$ em B_R e $u(x) = 0$ fora de B_{2R}. A filiação de u em $W_0^{1,p}(\Omega)$*

depende somente do comportamento de ν *próxima da origem:*

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \Leftrightarrow \nu \in W_0^{1,p}(B_R).$$

Derivando parcialmente $\nu(x)$*, obtemos* $\frac{\partial \nu}{\partial x_i}(x) = \mu x_i |x|^{\mu-2}$ *e, portanto* $|\nabla \nu(x)| \leqslant \mu |x|^{\mu-1}$ *e, fazendo* $\rho = |x|$*, pelo Teorema sobre integração em coordenadas esféricas,*

$$\int_{B_R} |\nabla \nu(x)|^p \leqslant \omega_{N-1} \mu^p \int_0^R \rho^{(\mu-1)p+N-1} d\rho.$$

Idem para $\nu(x)$ *no lugar de sua derivada acima. Portanto,* $\nu \in W_0^{1,p}(B_R)$ *e* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *desde que* $(\mu-1)p + N - 1 > -1$*, isto é,* $\mu > 1 - (N/p)$*.Por outro lado,*

$$\int_\Omega |u(x)|^q dx \geqslant \int_{B_R} |\nu(x)|^q dx = \omega_{N-1}^q \int_0^R \rho^{\mu q + N - 1} d\rho.$$

De onde, concluímos que é necessário $\mu q + N - 1 > -1$*, isto é,* $\mu > -\frac{N}{p}$ *para que* $u \in L^q(\Omega)$*. Portanto, impondo* $q > p^* = \frac{Np}{(N-p)}$*, ou seja,* $-\frac{N}{q} > 1 - \frac{N}{p}$*, se escolhermos* μ *de modo que* $-\frac{N}{q} \geqslant \mu \geqslant 1 - (N/p)$*, teremos que* $u \notin L^q(\Omega)$*.*

No caso $p = N$, temos (formalmente) $p^* = \infty$. De fato, neste caso, a imersão contínua $W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é válida para todo $q \in [1, \infty)$, veja Proposição 1.2.7. Isto sugere $W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$. No entanto, como veremos a seguir, isso não é verdade.

Exemplo 2.1.2. *Seja* $\Omega = B_1 \subset \mathbb{R}^N$, $N > 1$*. Prove que a função*

$$u(x) := \log\left(\log\left(\frac{e}{|x|}\right)\right), \quad x \in B_1(0)\backslash\{0\},$$

pertence a $W_0^{1,p}(B_1(0))$ *mas não a* $L^\infty(B_1(0))$*.*

É claro que $u \notin L^\infty(B_1)$*, pois* u *não é limitada próximo à origem. Por outro lado, chegamos à conclusão que* $\|u\|_N < \infty$*, como segue:*

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = -\frac{x_i}{\log\left(\frac{e}{|x|}\right)|x|^2}, \quad \textit{com } i = 1, 2, \ldots, n.$$

De onde,

$$\|u\|_N^N = \int_{B_1} |\nabla u|^N dx = \int_{B_1} |x|^{-N} \left(\log\left(\frac{e}{|x|}\right)\right)^{-N} dx = \omega_{N-1} \lim_{\sigma \to 0} \int_\sigma^1 \left(\log\left(\frac{e}{r}\right)\right)^{-N} r^{-1} dr,$$

onde ω_{N-1} *é a área da superfície esférica unitária* $S^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$*. Considerando a mudança de variáveis* $\delta = \log \frac{e}{r}$ *obtemos*

$$\|u\|_N^N = -\omega_{N-1} \lim_{\sigma \to 0} \int_{\log(\frac{e}{\sigma})}^1 \delta^{-N} d\delta = -\lim_{\sigma \to 0} \omega_{N-1} \frac{\delta^{1-N}}{1-N}\bigg|_{\log(\frac{e}{\sigma})}^1 = \frac{\omega_{N-1}}{N-1}.$$

Diante do Exemplo 2.1.2, surge o seguinte problema: determinar o crescimento máximo para uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para a qual $g(u) \in L^1(\Omega)$ sempre que $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$. Note que $g(t) = t^q, 1 \leqslant q < \infty$ satisfaz a condição da questão. No entanto, não sabemos se esse é o crescimento máximo admitido. Para resolver esse problema, trocando-se os espaços de Lebesgue pelos espaços de Orlicz $L_\phi(\Omega)$ (veja [2]), foi mostrado por Yudovich [34], Pohozaev [29] e Trudinger [32] que $W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L_\phi(\Omega)$, com a N-função $\phi(s) = e^{\mu|s|^{\frac{N}{N-1}}} - 1$, para um determinado $\mu > 0$. Este resultado foi aprimorado por J. Moser [28], obtendo a famosa Desigualdade de Trudinger-Moser, a qual discutiremos a seguir.

Teorema 2.1.3 (Desigualdade de Trudinger-Moser Clássica)**.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$, com $N \geqslant 2$. Então, para todo $\alpha > 0$ tem-se $e^{\alpha|u|^{\frac{N}{N-1}}} \in L^1(\Omega)$. Além disso, existe constante $C = C(N) > 0$ tal que*

$$\sup_{\|u\|_N \leqslant 1} \int_\Omega e^{\alpha|u|^{\frac{N}{N-1}}} dx \begin{cases} \leqslant C\mathcal{L}_N(\Omega) & se \quad \alpha \leqslant \alpha_N; \\ = \infty & se \quad \alpha > \alpha_N, \end{cases}$$

onde $\mathcal{L}_N(\Omega)$ é a medida de Lebesgue de Ω em $\mathbb{R}^N$, $\alpha_N = N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}$ e ω_{N-1} é a área da superfície esférica unitária $S^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$.

Demonstração: Como trocando u por $|u|$ o supremo não é alterado, podemos assumir $u \geqslant 0$. Também, é suficiente provar o Teorema 2.1.3 para um conjunto de funções u que são densas na bola unitária de $W_0^{1,N}(\Omega)$. Podemos supor então, que $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Fazendo uso da técnica de simetrização de Schwarz [22], obtemos que existe relacionada a u, uma função radialmente simétrica $u^* \in W_0^{1,N}(B_R(0))$, definida por

$$u^* = u^\sharp(|B_1(0)||x|^N), \quad x \in B_R(0),$$

onde $u^\sharp$ representa o rearranjamento decrescente de u (ver [22]),com $B_R(0) \subset \mathbb{R}^N$ tal que $|B_R(0)| = |\Omega|$. A simetrização u^* satisfaz:

- $|\{x : u^*(x) > \rho\}| = |\{x \in \Omega : u(x) > \rho\}|$ para todo $\rho > 0$.
- u^* é simétrica e não-crescente na norma $|x|$, com $u^*(|x|) = 0$; $|x| = R$, onde $|B_R(0)| = |\Omega|$.

Além disso, dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mensurável com $f \geqslant 0$ ou $f(u) \in L^1(\Omega)$, então

$$\int_{B_R(0)} f(u^*)dx = \int_\Omega f(u)dx,$$

e, temos a desigualdade de Pólya-Szegö temos que

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^N dx \geqslant \int_{B_R(0)} |\nabla u^*|^N dx. \tag{2.2}$$

Em particular,

$$\int_{B_R(0)} e^{\alpha u^{* \frac{N}{N-1}}} dx = \int_{\Omega} e^{\alpha |u|^{\frac{N}{N-1}}} dx. \tag{2.3}$$

Note que, utilizando (2.2) e (2.3), é suficiente mostrar que

$$\sup_{\|u^*\|_N \leqslant 1} \int_{B_R} e^{\alpha |u^*|^{\frac{N}{N-1}}} dx \begin{cases} \leqslant C_{N,\alpha}|\Omega| & \text{se} \quad \alpha \leqslant \alpha_N; \\ = \infty & \text{se} \quad \alpha > \alpha_N. \end{cases} \tag{2.4}$$

De fato, sejam os conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}$ definidos por

$$A = \left\{ \int_{\Omega} e^{\alpha |u|^{\frac{N}{N-1}}}; \; u \in W_0^{1,N}(\Omega), \; \|u\|_N \leqslant 1 \right\}$$

e

$$B = \left\{ \int_{B_R(0)} e^{\alpha |u^*|^{\frac{N}{N-1}}}; \; u \in W_0^{1,N}(\Omega), \; \|u^*\|_N \leqslant 1 \right\}.$$

Note que, dado $a \in A$, por (2.2) e (2.3) existe $b \in B$ tal que $a = b$. Portanto, temos que $A \subset B$. Logo, $\sup A \leqslant \sup B$, o que mostra a suficiência de tal escolha.

Afim de simplificar (2.4), seja $\rho = Re^{-\frac{t}{N}}$ para $\rho = |x|$ e defina $w(t) = N^{\frac{N-1}{N}} \omega_{N-1}^{\frac{1}{N}} u^*(\rho)$. Então, $w(t)$ é uma função C^1 não-decrescente em $[0, +\infty)$. (Pois u^* é não-crescente em ρ). Note que

$$w(t) = N^{\frac{N-1}{N}} \omega_{N-1}^{\frac{1}{N}} u^*(\rho)$$

implica em

$$\dot{w}(t) = N^{\frac{N-1}{N}} \omega_{N-1}^{\frac{1}{N}} \frac{du^*}{d\rho}\frac{d\rho}{dt} = N^{\frac{N-1}{N}} \omega_{N-1}^{\frac{1}{N}} \frac{du^*}{d\rho}\left(-\frac{R}{N}e^{-\frac{t}{N}}\right).$$

Daí,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\dot{w}|^N dt &= \int_0^\infty N^{N-1}\omega_{N-1}\left(\frac{R}{N}\right)^N e^{-t}\left|\frac{du^*}{d\rho}\right|^N dt \\ &= \int_0^\infty \omega_{N-1}\frac{R^N}{N}e^{-t}\left|\frac{du^*}{d\rho}\right|^N dt \\ &= \int_0^R \omega_{N-1}\frac{1}{N}\rho^N\left|\frac{du^*}{d\rho}\right|^N N\frac{1}{\rho}d\rho \\ &= \int_0^R \omega_{N-1}\rho^{N-1}\left|\frac{du^*}{d\rho}\right|^N d\rho \\ &= \int_{B_R(0)} |\nabla u^*(x)|^N dx, \end{aligned} \tag{2.5}$$

onde a última igualdade é justificada pelo Teorema 1.3.4.

Novamente, utilizando Teorema 1.3.4, temos

$$\int_{B_R(0)} e^{\alpha |u^*|^{\frac{N}{N-1}}} dx = |\Omega| \int_0^\infty e^{\frac{\alpha}{\alpha_N} w(t)^{\frac{N}{N-1}} - t} dt. \tag{2.6}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\int_{B_R(0)} e^{\alpha |u^*|^{\frac{N}{N-1}}} dx &= \omega_{N-1} \int_0^R e^{\alpha |u^*(\rho)|^{\frac{N}{N-1}}} \rho^{N-1} d\rho \\
&= -\omega_{N-1} \int_\infty^0 e^{\alpha \left| u^*(e^{-\frac{t}{N}} R)\right|^{\frac{N}{N-1}}} \frac{1}{N} e^{-t} R^N dt \\
&= R^N \frac{\omega_{N-1}}{N} \int_0^\infty e^{\alpha \left| w(t) N^{\frac{1-N}{N}} \omega_{N-1}^{-\frac{1}{N}} \right|^{\frac{N}{N-1}} - t} dt \\
&= |B_R(0)| \int_0^\infty e^{\frac{\alpha}{\alpha_N} \left| w(t)^{\frac{N}{N-1}} \right| - t} dt.
\end{aligned}$$

Tomando $\beta = \frac{\alpha}{\alpha_N}$, das expressões em (2.3) e (2.6), concluímos que para mostrar que $\exp(\alpha u^{\frac{N}{N-1}}) \in L^1(\Omega)$, para todo $\alpha > 0$ é suficiente provar

$$\int_0^\infty e^{\beta w(t)^{\frac{N}{N-1}} - t} dt < \infty \tag{2.7}$$

para todo $\beta > 0$. Provaremos (2.7). Como $\dot{w} \in L^N(0, \infty)$, dado $\varepsilon > 0$, existe um $T = T(\varepsilon)$ tal que

$$\int_T^\infty \dot{w}(t)^N dt < \varepsilon,$$

donde, concluímos, pela desigualdade de Hölder, que

$$w(t) - w(T) = \varepsilon^{\frac{1}{N}} (t - T)^{\frac{N-1}{N}}, \quad \text{para} \quad t \geqslant T.$$

Logo,

$$\lim_{t \to \infty} \frac{w(t)}{t^{\frac{N-1}{N}}} = 0.$$

Assim, dado $\beta > 0$, temos $\beta w(t)^{\frac{N}{N-1}} < \frac{t}{2}$ para t suficientemente grande, donde segue (2.7).

De (2.5) e (2.6) reduzimos o problema (2.4) a seguinte

$$\sup_{w \in J} \int_0^\infty e^{\beta w(t)^{\frac{N}{N-1}} - t} dt \begin{cases} \leqslant C & \text{se} \quad \beta \leqslant 1; \\ = \infty & \text{se} \quad \beta > 1, \end{cases} \tag{2.8}$$

onde $J = \{w \in C^1[0, \infty) : w(0) = 0, \int_0^\infty \dot{w}(t)^N dt \leqslant 1, \dot{w} \geqslant 0\}$.

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo e, novamente, da desigualdade de Hölder

$$w(t) = \int_0^t \dot{w}(s) ds \leqslant t^{(N-1)/N} \left(\int_0^t \dot{w}(s)^N ds \right)^{1/N} \leqslant t^{(N-1)/N},$$

e daí, para $\beta < 1$,

$$\int_0^\infty e^{\beta w(t)^{N/(N-1)}-t}dt \leqslant \int_0^\infty e^{(\beta-1)t}dt = \frac{1}{1-\beta}$$

o que conclui (2.8) neste caso. O caso $\beta = 1$ é delicado e procedemos mais cuidadosamente.

Seja $\Theta : \Omega \to \mathbb{R}^+$. Considerando (como em [13, p.14]) $\mathcal{L}_N(\{x \in \Omega : \Theta(x) > t\}), \forall\ t \geqslant 0$, a medida do conjunto em que $\Theta \geqslant t$, definamos a integral de Θ sobre Ω como

$$\int_\Omega \Theta(x)dx = \int_0^\infty \mathcal{L}_N(\{x \in \Omega : \Theta(\Omega) \geqslant t\})dt. \tag{2.9}$$

Utilizando a definição de integral em 2.9, obtemos:

$$\int_0^\infty e^{w(t)^{N/(N-1)}-t}dt = \int_0^\infty \mathcal{L}_1(\{t \in (0,\infty) : e^{w(t)^{N/(N-1)}-t} \geqslant \tau\})d\tau \tag{2.10}$$

onde $\mathcal{L}_1$ representa a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$.

Afirmação 2.1.4. *Para cada função mensurável* $\delta : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, *segue que*

$$\int_0^\infty e^{-\delta(l)}dl = \int_{-\infty}^\infty \mathcal{L}_1(\{l > 0 : \delta(l) \leqslant t\})e^{-t}dt.$$

Demonstração: Observando que para $t > 0$, $e^{-\delta(l)} \geqslant t \Leftrightarrow \delta(l) \leqslant \ln\frac{1}{t}$, obtemos

$$\{l > 0 : e^{-\delta(l)} \geqslant t\} = \{l > 0 : \delta(l) \leqslant \ln\frac{1}{t}\}.$$

Portanto,

$$\int_0^\infty e^{-\delta(l)}dl = \int_0^\infty \mathcal{L}_1(\{l > 0 : \delta(l) \leqslant \ln\frac{1}{t}\})dt. \tag{2.11}$$

Através da mudança de variável $\xi = \ln\frac{1}{t}$ para cada $t \in (0,\infty)$, chegamos em

$$\int_0^\infty \mathcal{L}_1(\{l > 0 : \delta(l) \leqslant \ln\frac{1}{t}\})dt = \int_{-\infty}^\infty \mathcal{L}_1(\{l > 0 : \delta(l) \leqslant \xi\})e^{-\xi}d\xi. \tag{2.12}$$

A afirmação agora segue de (2.11) e (2.12). ∎

Pela Afirmação 2.1.4 podemos reescrever a equação (2.10) como

$$\int_0^\infty e^{w(t)^{\frac{N}{N-1}}-t}dt = \int_{-\infty}^\infty \mathcal{L}_1(\Gamma_\tau)e^{-\tau}d\tau, \tag{2.13}$$

onde $\Gamma_\tau = \{t > 0 : t - w(t)^{\frac{N}{N-1}} \leqslant \tau\}$. Note que

$$w(t) \leqslant t^{\frac{N-1}{N}} \Leftrightarrow t - w(t)^{\frac{N}{N-1}} \geqslant 0,\ \ \forall t \geqslant 0.$$

o que implica em $\Gamma_\tau = \emptyset$ se $\tau < 0$.

Logo, temos liberdade para reescrever (2.13) como

$$\int_0^\infty e^{w(t)^{\frac{N}{N-1}}-t}dt = \int_0^\infty \mathcal{L}_1(\Gamma_\tau)e^{-\tau}d\tau. \tag{2.14}$$

Afirmação 2.1.5. *Para cada* $\tau > 0$ *temos* $\mathcal{L}_1(\Gamma_\tau) \leqslant (c_N + 2)\tau$, *onde* $c_N = \frac{7}{1-\sigma^{\frac{1}{1-N}}}$, *com* $\sigma = 1 + 2^{1-N}$.

Demonstração: Analisaremos os dois seguintes casos:

CASO I: Se $\Gamma_\tau \subseteq [0, 2\tau]$, então $\mathcal{L}_1(\Gamma_\tau) = \displaystyle\int_{\Gamma_\tau} 1 d\tau \leqslant \int_0^{2\tau} 1 d\tau = 2\tau.$

Neste caso, obviamente temos $\mathcal{L}_1(\Gamma_\tau) \leqslant (c_N + 2)\tau$.

CASO II: Se $\Gamma_\tau \nsubseteq [0, 2\tau]$.

Neste caso temos a decomposição $\Gamma_\tau = (\Gamma_\tau \cap [0, 2\tau]) \cup (\Gamma_\tau \cap \{t > 0 : t > 2\tau\})$. Assim,

$$\mathcal{L}_1(\Gamma_\tau) \leqslant \int_{\Gamma_\tau \cap [0,2\tau]} 1 d\tau + \int_{\Gamma_\tau \cap \{t>0:t>2\tau\}} 1 d\tau.$$

Como a primeira integral da desigualdade acima é menor do que ou igual a 2τ, é suficiente provarmos que a segunda integral é menor do que ou igual a $c_N\tau$, isto é, para todo $x_1, x_2 \in \Gamma_\tau$ tal que $2\tau \leqslant x_1 < x_2$, tem-se $x_2 - x_1 \leqslant c_N\tau$. Com efeito, segue da definição de Γ_τ e da desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} x_1 - \tau \leqslant w(x_1)^{\frac{N}{N-1}} &= \left(\int_0^{x_1} \dot{w}(s) ds\right)^{\frac{N}{N-1}} \leqslant x_1 \left(\int_0^{x_1} \dot{w}(s)^N\right)^{\frac{1}{N-1}} \\ &\leqslant x_1 \left(1 - \int_{x_1}^{\infty} \dot{w}(s)^N ds\right)^{\frac{1}{N-1}}. \end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados por x_1, obtemos

$$1 - \frac{\tau}{x_1} \leqslant \left(1 - \int_{x_1}^{\infty} \dot{w}(s)^N ds\right)^{\frac{1}{N-1}},$$

donde,

$$\int_{x_1}^{\infty} \dot{w}(s)^N ds \leqslant 1 - (1 - \frac{\tau}{x_1})^{N-1}. \tag{2.15}$$

Pela definição de Γ_τ, da desigualdade de Hölder e (2.15), temos

$$\begin{aligned} x_2 - \tau &\leqslant \left(\int_0^{x_2} \dot{w}(s)\right)^{\frac{N}{N-1}} \\ &\leqslant \left[x_1^{\frac{N-1}{N}} \left(\int_0^{x_1} \dot{w}(s)^N ds\right)^{\frac{1}{N}} + (x_2 - x_1)^{\frac{N-1}{N}} \left(\int_{x_1}^{x_2} \dot{w}(s)^N ds\right)^{\frac{1}{N}}\right]^{\frac{N}{N-1}} \\ &\leqslant \left[x_1^{\frac{N-1}{N}} + (x_2 - x_1)^{\frac{N-1}{N}} \left(\int_{x_1}^{\infty} \dot{w}(s)^N ds\right)^{\frac{1}{N}}\right]^{\frac{N}{N-1}} \\ &\overset{(2.15)}{\leqslant} \left(x_1^{\frac{N-1}{N}} + (x_2 - x_1)^{\frac{N-1}{N}} \left(1 - (1 - \frac{\tau}{x_1})^{N-1}\right)^{\frac{1}{N}}\right)^{\frac{N}{N-1}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{x_2}{x_1} - \frac{\tau}{x_1} \leqslant \left[1 + (\frac{x_2}{x_1} - 1)^{\frac{N-1}{N}} \left(1 - (1 - \frac{\tau}{x_1})^{N-1}\right)^{\frac{1}{N}}\right]^{\frac{N}{N-1}},$$

equivalentemente,

$$P(1-\ell) + \ell \leqslant \left[1 + P^{\frac{N-1}{N}}(1-\ell)^{\frac{N-1}{N}}(1-\ell^{N-1})^{\frac{1}{N}}\right]^{\frac{N}{N-1}}, \tag{2.16}$$

onde $P = \frac{x_2 - x_1}{\tau}$ e $\ell = 1 - \frac{\tau}{x_1}$. Note que $\frac{1}{2} \leqslant \ell < 1$ porque $x_1 > 2\tau$.
Da convexidade de $\psi(x) = x^{\frac{N}{N-1}}$, temos que $\psi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \psi(x)\lambda + \psi(y)(1-\lambda)$, para todo $\lambda \in [0.1]$. Tomando $x = \lambda^{-1} P^{\frac{N-1}{N}}(1-\ell)^{\frac{N-1}{N}}(1-\ell^{N-1})^{\frac{1}{N}}$ e $y = (1-\lambda)^{-1}$, obtemos

$$\left[1 + P^{\frac{N-1}{N}}(1-\ell)^{\frac{N-1}{N}}(1-\ell^{n-1})^{\frac{1}{N}}\right]^{\frac{N}{N-1}} \leqslant (1-\lambda)^{-\frac{1}{N-1}} + \lambda^{-\frac{1}{N-1}} P(1-\lambda)(1-\ell^{N-1})^{\frac{N}{N-1}}. \tag{2.17}$$

De (2.16) e (2.17), segue

$$P(1-\ell) + \ell \leqslant (1-\lambda)^{-\frac{1}{N-1}} + \lambda^{-\frac{1}{N-1}} P(1-\lambda)(1-\ell^{N-1})^{\frac{N}{N-1}},$$

o que implica

$$P \leqslant \frac{(1-\lambda)^{-\frac{1}{N-1}} - \ell}{(1-\ell)\left[1 - \lambda^{-\frac{1}{N-1}}(1-\ell^{N-1})^{\frac{1}{N-1}}\right]}.$$

Fazendo $\lambda = 1 - \ell^{2(N-1)}$, temos

$$\begin{aligned} P &\leqslant \frac{\ell^{-2} - \ell}{(1-\ell)\left[1 - (1-\ell^{2(N-1)})^{\frac{1}{1-N}}(1-\ell^{N-1})^{-\frac{1}{N-1}}\right]} \\ &= \frac{(1-\ell)(\ell^{-2} + \ell^{-1} + 1)}{(1-\ell)\left[1 - \left(\frac{1-\ell^{2(N-1)}}{1-\ell^{N-1}}\right)^{\frac{1}{1-N}}\right]} \\ &= \frac{\ell^{-2} + \ell^{-1} + 1}{1 - (1+\ell^{N-1})^{\frac{1}{1-N}}} \\ &\leqslant c_N. \end{aligned}$$

Combinando $CASOI$ e $CASOII$ concluimos a afirmação. ∎

Pela Afirmação 2.1.5 e equação (2.14), temos

$$\int_0^\infty \mathcal{L}_1(\Gamma_\tau)e^{-\tau}d\tau \leqslant (c_N + 2)\int_0^\infty \tau e^{-\tau}d\tau = c_N + 2.$$

Então,

$$\int_0^\infty e^{w(t)^{\frac{N}{N-1}} - t}dt \leqslant c_N + 2.$$

Isto conclui (2.8) para o caso $\beta = 1$. A seguir mostraremos que para $\beta > 1$ a integral em (2.8) pode ser arbitrariamente grande. Para isso, tomemos a sequência $\eta(s) = \min\{s, 1\}$ e $w_{t_1}(t) = t_1^{\frac{N-1}{N}}\eta(t/t_1)$ com $t_1 > 0$, então temos

a) $w_{t_1}(0) = 0$, pois $\eta(0) = 0$;

b) $\dot{w}_{t_1}(t) \geqslant 0$, pois $\dot{w}_{t_1}(t) = t_1^{-\frac{1}{N}}\dot{\eta}(t/t_1)$ para todo $t_1 > 0$;

c) $\int_0^\infty \dot{w}_{t_1}(t)^N dt = \int_0^\infty t_1^{-1}\dot{\eta}(t/t_1)^N dt = \int_0^{t_1} t_1^{-1} dt = 1$, para todo $t_1 > 0$.

Portanto, $w_{t_1} \in J$, e também,

$$\int_0^\infty e^{\beta w_{t_1}(t)^{\frac{N}{N-1}} - t}dt = \int_0^\infty e^{\beta t_1 \eta(\frac{t}{t_1}) - t}dt > \int_{t_1}^\infty e^{\beta t_1 - t}dt = e^{(\beta-1)t_1}.$$

Logo, para $t_1 \to \infty$ temos $e^{(\beta-1)t_1} \to \infty$, pois $\beta > 1$. De onde, concluímos que o supremo não existe, neste caso. ■

Em contrapartida ao expoente crítico de Sobolev $p* = Np/(N-p), 1 \leqslant p < N$ dizemos que α_N da desigualdade de Trudinger-Moser é a constante crítica no caso $p = N$.

Nos últimos anos, várias generalizações, extensões e aplicações foram obtidas a partir desta desigualdade. Entre tais resultados, podemos destacar as desigualdades relacionadas com a de Trudinger-Moser. Para o caso em que $\Omega = \mathbb{R}^N$, por exemplo, extensões foram obtidas por [12], para $N = 2$, J.M. Do Ó [21] para $N \geqslant 2$, Ruf [7] e Ruf e Li [33] para $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ilimitado. Extensões envolvendo derivadas de ordem superior foram dadas por D. R. Adams [1].

2.2 Existência de extremais

De acordo com a desigualdade de Trudinger-Moser clássica, podemos considerar o supremo

$$M = \sup_{\|u\|_N \leqslant 1} \int_\Omega e^{\alpha|u|^{\frac{N}{N-1}}}dx, \quad \alpha \leqslant \alpha_N. \tag{2.18}$$

Assim, podemos questionar sobre a existência de uma função extremal para cada $\alpha \leqslant \alpha_N$, isto é, $u_0 \in W_0^{1,N}(\Omega)$ com $\|u_0\|_N \leqslant 1$ tal que

$$M = \int_\Omega e^{\alpha|u_0|^{\frac{N}{N-1}}}dx. \tag{2.19}$$

A existência de extremais para a desigualdade de Trudinger-Moser no caso $\alpha < \alpha_N$ (subcrítico) é uma simples consequência do Teorema de Vitali, já o caso $\alpha = \alpha_N$ (crítico) é delicado. No caso $\alpha = \alpha_N$ este foi provado por L. Carleson e A. Chang [23] para $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^N$, por M.

Flucher [15] para domínios limitados arbitrários $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, e por K. C. Lin [24] para domínios limitados no $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$. Em [27] M. Struwe estudou a existência de funções extremais para domínios não-simétricos.

Nessa seção provaremos a existência de extremal no caso subcrítico $\alpha < \alpha_N$ para $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ arbitrário e; para o caso crítico $\alpha = \alpha_N$, quando $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^N$ segundo o trabalho de L. Carleson e A. Chang [23].

2.2.1 Caso subcrítico

Teorema 2.2.1. *Para $\alpha < \alpha_N$, existe uma função extremal $\bar{u}$ para (2.18).*

Demonstração: Considere uma sequência maximizante (u_n) para (2.18), isto é, $u_n \in W_0^{1,N}(\Omega)$, $\|u_n\|_N \leqslant 1$ tal que

$$\int_\Omega e^{\alpha|u_n|^{N/(N-1)}}dx \to M = \sup_{\|u\|_N \leqslant 1} \int_\Omega e^{\alpha|u|^{N/(N-1)}}dx.$$

Sendo $(u_n)_{n=1}^\infty$ limitada e $W_0^{1,N}(\Omega)$ um espaço reflexivo, pelo Teorema 1.2.3, temos $u_n \rightharpoonup \bar{u}$, a menos de uma subsequência, em $W_0^{1,N}(\Omega)$ com $\|\bar{u}\|_N \leqslant \liminf \|u_n\|_N \leqslant 1$. Pelo Teorema de Rellich-Kondrachov, temos a imersão compacta $W_0^{1,N}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^N(\Omega)$. Logo, $u_n \to \bar{u}$ em $L^N(\Omega)$ a menos de uma subsequência. Do Teorema de Riesz-Fischer, temos que $u_n(x) \to \bar{u}(x)$ q.t.p. em Ω. Logo, $e^{\alpha u_n^{N/(N-1)}(x)} \to e^{\alpha \bar{u}^{N/(N-1)}(x)}$ q.t.p. em Ω. Tomando $p > 1$ tal que $\alpha p < \alpha_N$, tem-se pela Desigualdade de Trudinger-Moser 2.1.3

$$\int_\Omega e^{\alpha p u_n^{N/(N-1)}}dx \leqslant \int_\Omega e^{\alpha_N u_n^{N/(N-1)}}dx \leqslant C_N|\Omega|,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, $e^{\alpha u_n^{N/(N-1)}}$ é uniformemente integrável pelo Teorema 1.3.6. Logo, pelo Teorema da Convergência de Vitali temos

$$\int_\Omega e^{\alpha \bar{u}^{N/(N-1)}}dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega e^{\alpha u_n^{N/(N-1)}}dx = M,$$

o que prova o Teorema. ■

2.2.2 Caso crítico

A partir de agora, provaremos a existência de uma função extremal u para (2.18) no caso crítico $\alpha = \alpha_N$ quando $\Omega = B_1(0)$ em $\mathbb{R}^N$. Usando simetrização e mudança de variáveis como Moser fez em [28], o problema foi reduzido ao seguinte problema de cálculo unidimensional:

Teorema 2.2.2. *Seja* J *a classe de funções* $w \in C^1([0,+\infty))$ *satisfazendo*

$$w(0) = 0, \quad \dot{w}(t) \geqslant 0 \quad \text{e} \quad \int_0^\infty \dot{w}(t)^N dt \leqslant 1.$$

Então,

$$\sup_{w \in J} \int_0^\infty e^{w^{P_N}(t)-t} dt, \tag{2.20}$$

é atingido por alguma função $w^\star \in J$. *Aqui,* $P_N = \frac{N}{N-1}$, $N \geqslant 2$.

Na demonstração do teorema acima serão utilizados os dois seguintes lemas, onde o primeiro tem seu papel resumido a demonstrar o segundo. Para uma maior clareza, apresentaremos as provas destes resultados mais adiante.

Lema 2.2.3. *Seja*

$$K_\delta = \{\psi : [0,\infty) \to \mathbb{R} \text{ mensurável tal que } \psi \geqslant 0 \text{ e } \int_0^\infty \psi^N dt \leqslant \delta\}.$$

Então, para cada $c > 0$ *temos*

$$\sup_{\psi \in K_\delta} \int_0^\infty e^{c\int_0^t \psi(\ell)d\ell - t} < e^{((N-1)/N)^{N-1}(c^N/N)\delta} e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N-1}}. \tag{2.21}$$

Lema 2.2.4. *Para cada* $a > 0$ *e* w *uma função* C^1 *com* $\dot{w} \geqslant 0$, $\int_a^\infty \dot{w}^N dt \leqslant \delta$, *temos*

$$\int_a^\infty e^{w^{P_N}(t)-t} dt \leqslant e^{w^{P_N}(a)-a}. \frac{1}{1-\delta^{\frac{1}{(N-1)}}} \times e^{(c^N/N)((N-1)/N)^{N-1}\beta_N}.e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{(N-1)}}, \tag{2.22}$$

onde $\beta_N = \delta(1-\delta^{\frac{1}{(N-1)}})^{(-N+1)}$, *e* $c = P_N w^{P_N - 1}(a)$ $(P_N = N/(N-1))$.

2.2.3 Demonstração do Teorema 2.2.2

Dividiremos a demonstração em duas etapas, em que estabeleceremos a existência do extremal $w^\star$ por contradição.

Etapa 1

Assumiremos que não existe função extremal para (2.20), e concluiremos que

$$\sup_{w \in J} \int_0^\infty e^{w^{P_N}(t)-t} dt = 1 + e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{(N-1)}}.$$

Etapa 2

Apresentaremos uma função $w \in J$ satisfazendo

$$\int_0^\infty e^{w^{P_N}(t)-t} dt > 1 + e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{(N-1)}}.$$

Observe que as Etapas 1 e 2 resultam em uma contradição. Essa contradição advém do fato de supormos que não existe função extremal para (2.20). Assim, provadas estas duas etapas, segue o Teorema 2.2.2.

Demonstração da Etapa 1

Para cada $w \in J$, defina $I(w) = \int_0^\infty e^{w^{P_N}(t)-t}$, e seja $M = \sup_{w \in J} I(w)$. Escolha uma sequência $(w_n)_{n=1}^\infty \in J$ tal que $I(w_n) \to M$. Provaremos que $(w_n)_{n=1}^\infty$ satisfaz as seguintes propriedades:

(a) Para cada $A > 0$, $\int_0^A (\dot{w}_n)^N \, dt \to 0$ quando $n \to \infty$.

(b) Seja a_n o primeiro ponto em $[0, \infty)$ com $w_n^{P_N}(a_n) = a_n - 2\log a_n$ (se tal a_n existe). Então $a_n \to \infty$ quando $n \to \infty$.

(c) $\limsup\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_{a_n}^\infty e^{w_n^{P_N}(t)-t} \leqslant e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N-1}}$.

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^{a_n} e^{w_n^{P_N}(t)-t} = 1$.

Note que a afirmação na Etapa 1 é uma consequência direta de (c) e (d). Agora, provaremos as propriedades acima.

Na prova de (a), argumentaremos novamente por contradição. Suponha que (a) é falso, isto é, suponha que existe $A > 0$ e $\delta \geqslant 0$ com $\int_0^A (\dot{w}_n)^N \, dt \geqslant \delta$ para todo $n \geqslant n_0$. Então $\int_A^\infty (\dot{w}_n)^N \, dt \leqslant 1 - \delta$ para todo $n \geqslant n_0$. Portanto, para $t \geqslant A$, através da desigualdade de Hölder:

$$w_n(t) - w_n(A) = \int_A^t 1.\dot{w}_n(t)dt \leqslant (t-A)^{\frac{N-1}{N}} \left(\int_A^t \dot{w}_n^N \right)^{\frac{1}{N}} \leqslant (t-A)^{\frac{N-1}{N}} (1-\delta)^{\frac{1}{N}}. \quad (2.23)$$

Donde,

$$w_n(t) = \int_A^t \dot{w}_n(t)dt + w_n(A) \leqslant (t-A)^{\frac{N-1}{N}} (1-\delta)^{\frac{1}{N}} + w_n(A). \quad (2.24)$$

Fazendo uso da desigualdade

$$(a+x)^P \leqslant a^P + P a^{P-1} x + x^P,$$

com $0 < x < \infty$, $a > 0$ e $1 < P \leqslant 2$ em (2.24), temos

$$\begin{aligned}
w_n(t)^{\frac{N}{N-1}} &\leqslant \left[(1-\delta)^{\frac{1}{N}}(t-A)^{\frac{N-1}{N}} + w_n(A)\right]^{\frac{N}{N-1}} \\
&\leqslant \left[(1-\delta)^{\frac{1}{N}}(t-A)^{\frac{N-1}{N}}\right]^{\frac{N}{N-1}} \\
&+ \frac{N}{N-1}\left[(1-\delta)^{\frac{1}{N}}(t-A)^{\frac{N-1}{N}}\right]^{\frac{1}{N-1}} w_n(A) + w(A)_n^{\frac{N}{N-1}} \\
&\leqslant \left[(1-\delta)^{\frac{1}{N}}(t-A)^{\frac{N-1}{N}}\right]^{\frac{N}{N-1}} \\
&+ \frac{N}{N-1}\left\{\left[(1-\delta)^{\frac{1}{N}}(t-A)^{\frac{N-1}{N}}\right]^{\frac{1}{N-1}} w_n(A) + w(A)_n^{\frac{N}{N-1}}\right\}.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder, $w_n(A)^{\frac{N}{N-1}} \leqslant A$, donde temos

$$w_n(t)^{\frac{N}{N-1}} \leqslant (1-\delta)^{\frac{1}{N-1}}(t-A) + \frac{N}{N-1}\left[(1-\delta)^{\frac{1}{N(N-1)}}(t-A)^{\frac{1}{N}}A^{\frac{N-1}{N}} + A\right].$$

Agora, $\lim_{x\to\infty}\frac{x^k}{x} = 0$, com $k < 1$, fazendo $x = t - A$ acima, podemos tomar $N_0 >> A$ tal que

$$w_n(t)^{\frac{N}{N-1}} \leqslant (1-\delta/2)^{\frac{1}{N-1}}(t-A) + \frac{N}{N-1}A \tag{2.25}$$

para todo $t \geqslant N_0$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int_{N_0}^{\infty} e^{{w_n}^{P_N}(t)-t}dt &\leqslant e^{P_N A}\int_{N_0}^{\infty} e^{((1-\delta/2)^{1/(N-1)}-1)t}dt \\
&\leqslant e^{P_N A}\frac{1}{1-(1-\delta/2)^{\frac{1}{N-1}}}e^{((1-\delta/2)^{1/(N-1)}-1)N_0} \leqslant \varepsilon
\end{aligned} \tag{2.26}$$

quando N_0 é grande e $n \geqslant n_0$.

Seja $w^* \in K$ o limite de alguma subsequência de $(w_n)_{n=1}^{\infty}$. Como no intervalo $[0, N_0]$, $w_n(t) \leqslant t^{(N-1)/N} \leqslant N_0^{(N-1)/N}$, pelo Teorema da Convergência de Lebesgue segue que

$$I_{N_0}(w^*) = \int_0^{N_0} e^{{w^*}^{P_N}(t)-t}dt \geqslant I_{N_0}(w_n) - \varepsilon, \text{ quando } n \text{ é grande.} \tag{2.27}$$

Portanto, temos que $I(w^*) \geqslant I_{N_0}(w^*) \geqslant I_{N_0}(w_n) - \varepsilon \geqslant (I(w_n) - \varepsilon) - \varepsilon$ por (2.25) e (2.29). Como isso acontece para todo $\varepsilon > 0$, temos que $I(w^*) = M$, o que contradiz a hipótese da Etapa 1 em dizer que não existe extremal e, portanto, (a) acontece.

Na demonstração de (b), percebe-se que não existe perda de generalidade nenhuma considerar $\log^+$ em vez de $\log$, pois estamos analisando a_n em $[1, \infty)$. Observamos que para n suficientemente grande o ponto a_n existe.

Afirmação 2.2.5. *Se tal ponto a_n acima não existir, então $w_n^{P_N}(t) \leqslant t - 2\log^+ t$, para todo t, e portanto, chegaríamos em $M \leqslant \overline{\lim} I(w_n) \leqslant 2$, o que é falso, pela Etapa 2.*

Demonstração:

De fato, se $w_n(t_0)^{p_N} > t_0 - 2\log^+ t_0$, para algum t_0, daí, pelo teorema do valor intermediário do cálculo, ocorreria a igualdade para um $t' \in [1, t_0]$, pois pela desigualdade de Hölder, já sabemos que $w_n(t)^{p_N} \leqslant t$ em $[0,1]$, o que contradiz a hipótese de tal a_n não existir. ■

Consideremos a seguinte afirmação:

Afirmação 2.2.6. *Para cada* $A > 0$*, existem* n_0 *e* $\eta > 0$ *tais que para todo* $t \in [0, A]$

$$w_n^{\frac{N}{N-1}}(t) \leqslant \eta t < t - 2\log t,$$

para $n \geqslant n_0$*. De onde segue que* $a_n \to \infty$*.*

Demonstração: De fato, como $w_n(0) = 0$,

$$\begin{aligned}
w_n(t) &= w_n(t) - w_n(0) \\
&= \int_0^t \dot{w}_n(s)ds \\
&= \int_0^t 1 \cdot \dot{w}_n(s)ds \\
&\leqslant \int_0^t 1 \cdot |\dot{w}_n(s)|ds \\
&\leqslant \left(\int_0^t |1|^{\frac{N}{N-1}} ds\right)^{\frac{N-1}{N}} \left(\int_0^t |\dot{w}_n(s)|^N ds\right)^{\frac{1}{N}} \\
&= t^{\frac{N-1}{N}} \left(\int_0^t |\dot{w}_n(s)|^N ds\right)^{\frac{1}{N}}
\end{aligned}$$

onde, na última desigualdade, aplicamos a Desigualdade de Ḧolder para $q = N$ e $p = \frac{N}{N-1}$. Portanto,

$$w_n(t)^{\frac{N}{N-1}} \leqslant t\left(\int_0^t |\dot{w}_n(s)|^N ds\right)^{\frac{1}{N-1}}.$$

Como sabemos por (a), fixado A arbitrário, $\int_0^A |\dot{w}_n(t)|^N dt \to 0$ se $n \to +\infty$, então dado $\eta > 0$ temos

$$w_n(t)^{\frac{N}{N-1}} \leqslant t\left(\int_0^t |\dot{w}_n(s)|^N ds\right)^{\frac{1}{N-1}} \leqslant \eta t \tag{2.28}$$

para todo $t \in [0, A]$ desde que n seja suficientemente grande. Note que é possível escolher η pequeno tal que

$$\eta t < t - 2\log t, \quad \text{para todo} \quad t \in [0, A].$$

De fato, basta tomar $\eta < (e-2)/e$. Para tal escolha de η, segue por (2.28)

$$w_n(t)^{\frac{N}{N-1}} \leqslant \eta t < t - 2\log t, \quad \text{para todo} \quad t \in [0, A].$$

Resta verficar que $a_n \to +\infty$ quando $n \to \infty$. Com efeito, como vimos acima, dado $A > 0$ existem $\eta > 0$ e n_0 tais que $w_n(t)^{\frac{N}{N-1}} < t - 2\log t$ para todo $t \in [0, A]$ e $n \geqslant n_0$. Pela definição de a_n, temos $a_n > A$ para $n \geqslant n_0$ e sendo A arbitrário segue o resultado.

Provaremos (c) como uma consequência direta de (a) e (b) e do Lema 2.2.4. Faremos isso, aplicando o Lema 2.2.4 para $w = w_n$, $a = a_n$ e $\delta = \delta_n = \int_{a_n}^{\infty} \dot{w}_n^N dt$. Pelo Lema 2.2.4 temos

$$\int_{a_n}^{\infty} e^{w_n^{P_N}(t)-t} dt \leqslant \frac{1}{1-\delta_n^{\frac{1}{N-1}}} e^{K_n} e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N-1}} \tag{2.29}$$

onde

$$\begin{aligned} K_n &= w_n(a_n)^{P_N} - a_n + \frac{1}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{N-1} \beta_n (P_N w_n^{P_N-1}(a_n))^N \\ &= w_n(a_n)^{P_N} - a_n + \frac{1}{N-1}\beta_n w_n^{P_N}(a_n) \\ &= w_n(a_n)^{P_N} - a_n + \frac{1}{N-1}\frac{\delta_n}{\left(1-\delta_n^{\frac{1}{(N-1)}}\right)^{N-1}} w_n^{P_N}(a_n). \end{aligned}$$

Como $w_n \in J$,

$$\begin{aligned} w_n(a_n)^{P_N} &= \left(\int_0^{a_n} \dot{w}_n d(t) dt\right)^{P_N} \\ &\leqslant \left(a_n^{\frac{N-1}{N}} \left(\int_0^{a_n} \dot{w}_n^N(t) dt\right)^{\frac{1}{N}}\right)^{P_N} \\ &= \left(a_n^{\frac{N-1}{N}} \left(\int_0^{\infty} \dot{w}_n^N(t) dt - \int_{a_n}^{\infty} \dot{w}_n^N(t) dt\right)^{\frac{1}{N}}\right)^{P_N} \\ &= \left(a_n^{\frac{N-1}{N}} (1-\delta_n)^{\frac{1}{N}}\right)^{P_N}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \delta_n &\leqslant 1 - \left(\frac{w_n^{P_N}}{a_n}\right)^{N-1} \\ &= 1 - \left(1 - \frac{2\log^+ a_n}{a_n}\right)^{N-1} \\ &\leqslant (N-1)\frac{2\log^+ a_n}{a_n} \to 0 \text{ quando } n \to \infty, \end{aligned} \tag{2.30}$$

onde usamos acima a desigualdade elementar $1 - t^d \leqslant d(1-t), \quad t \geqslant 0$ para todo $d \geqslant 1$.

Assim, temos

$$\begin{aligned}
K_n &= w_n(a_n)^{P_N} - a_n + \frac{1}{N-1}\frac{\delta_n}{\left(1-\delta_n^{\frac{1}{N-1}}\right)^{N-1}} w_n^{P_N}(a_n)\\
&= w_n^{P_N}(a_n)\left[1+\frac{\delta_n}{N-1}\right] - w_n^{P_N}(a_n)\frac{\delta_n}{N-1} + \frac{1}{N-1}\frac{\delta_n}{\left(1-\delta_n^{\frac{1}{N-1}}\right)^{N-1}} w_n^{P_N}(a_n) - a_n\\
&= w_n^{P_N}(a_n)\left[1+\frac{\delta_n}{N-1}\right] - a_n + \frac{\delta_n}{N-1} w_n^{P_N}(a_n)\left[\frac{1-(1-\delta_n^{\frac{1}{N-1}})^{N-1}}{(1-\delta_n^{\frac{1}{N-1}})^{N-1}}\right].
\end{aligned}$$

Usando que $\frac{w_n^{P_N}(a_n)}{a_n} = 1 - \frac{2\log a_n}{a_n}$, obtemos

$$\begin{aligned}
K_n &= a_n\left\{\frac{w_n^{P_N}(a_n)}{a_n}\left[1+\frac{\delta_n}{N-1}\right] - 1 + \frac{\delta_n}{N-1}\frac{w_n^{P_N}(a_n)}{a_n}\left[\frac{1-(1-\delta_n^{\frac{1}{N-1}})^{N-1}}{(1-\delta_n^{\frac{1}{N-1}})^{N-1}}\right]\right\}\\
&= a_n\left\{(1-\frac{2\log a_n}{a_n})\left[1+\frac{\delta_n}{N-1}+\frac{\delta_n}{N-1}\frac{1-(1-\delta_n^{\frac{1}{N-1}})^{N-1}}{(1-\delta_n^{\frac{1}{N-1}})^{N-1}}\right] - 1\right\}\\
&= a_n\left\{-\frac{2\log a_n}{a_n} + (1-\frac{2\log a_n}{a_n})\frac{\delta_n}{N-1}\left[\frac{1}{(1-\delta_n^{\frac{1}{N-1}})^{N-1}}\right]\right\}\\
&= \frac{a_n}{(1-\delta_n^{\frac{1}{N-1}})^{N-1}}\left\{-\frac{2\log a_n}{a_n}(1-\delta_n^{\frac{1}{N-1}})^{N-1} + (1-\frac{2\log a_n}{a_n})\frac{\delta_n}{N-1}\right\}\\
&= \frac{a_n}{(1-\delta_n^{\frac{1}{N-1}})^{N-1}}\left\{\frac{\delta_n}{N-1} - \frac{\delta_n}{N-1}\frac{2\log a_n}{a_n} - \frac{2\log a_n}{a_n}(1-\delta_n^{\frac{1}{N-1}})^{N-1}\right\}.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$K_n = \frac{a_n}{(1-\delta_n^{\frac{1}{N-1}})^{N-1}} Q_n,$$

onde

$$Q_n = \frac{\delta_n}{N-1} - \frac{\delta_n}{N-1}\frac{2\log^+ a_n}{a_n} - \frac{2\log^+ a_n}{a_n}(1-\delta_n^{\frac{1}{N-1}})^{N-1}.$$

Novamente, usando a desigualdade elementar citada acima, temos

$$1-(1-\delta^{\frac{1}{N-1}})^{N-1} \leqslant (N-1)\delta^{\frac{1}{N-1}}. \tag{2.31}$$

De (2.31) e do fato que $\delta \leqslant (N-1)\frac{2\log^{+} a_n}{a_n}$ por (2.30), concluímos

$$
\begin{aligned}
Q_n &= \frac{\delta_n}{N-1} - \frac{\delta_n}{N-1}\frac{2\log^{+} a_n}{a_n} - \frac{2\log^{+} a_n}{a_n}(1-\delta_n^{\frac{1}{N-1}})^{N-1} \\
&\leqslant \frac{2\log^{+} a_n}{a_n} - \frac{\delta_n}{N-1}\frac{2\log^{+} a_n}{a_n} - \frac{2\log^{+} a_n}{a_n}(1-\delta_n^{\frac{1}{N-1}})^{N-1} \\
&\leqslant \frac{2\log^{+} a_n}{a_n} - \frac{\delta_n}{N-1}\frac{2\log^{+} a_n}{a_n} + \frac{2\log^{+} a_n}{a_n}\left((N-1)\delta_n^{\frac{1}{N-1}} - 1\right) \\
&\leqslant (N-1)\frac{2\log^{+} a_n}{a_n}\delta_n^{\frac{1}{N-1}} \\
&\leqslant (N-1)^{\frac{N}{N-1}}\left(\frac{2\log^{+} a_n}{a_n}\right)^{\frac{N}{N-1}}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
K_n \leqslant \frac{(N-1)^{\frac{N}{N-1}} a_n}{(1-\delta_n^{\frac{1}{N-1}})^{N-1}}\left(\frac{2\log^{+} a_n}{a_n}\right)^{\frac{N}{N-1}}.
$$

Como $a_n \to \infty$ e $\delta_n \to 0$ quando $n \to \infty$, temos

$$
K_n \to 0 \ \text{ quando } \ n \to \infty. \tag{2.32}
$$

Combinando (2.29), (2.30) e (2.32) temos a desigualdade

(c')

$$
\lim_{n\to\infty}\int_{a_n}^{\infty} e^{w^{P_N}(t)-t}dt \leqslant e^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{N-1}}.
$$

Por outro lado, lembrando que $w_n \geqslant 0$, conseguimos limitar inferiormente a mesma integral por 1 quando n é grande, concluindo assim a demonstração da afirmação em (d) e da Etapa 1.

Demonstração da Etapa 2

Procederemos aqui através de uma construção explícita. Seja ν_N, para cada $N \geqslant 2$, a sequência de funções dada por

$$
\nu_N(t) = \begin{cases} \left(\dfrac{N-1}{N}\right)(N-1)^{-1/N}t, & 0 \leqslant t \leqslant N, \\ (t-1)^{(N-1)/N}, & N \leqslant t \leqslant B_N, \\ (B_N-1)^{(N-1)/N}, & t \geqslant B_N, \end{cases}
$$

onde $B_N = (N-1)\exp\left(P_N^N - P_N\right) + 1$ é escolhido de forma a $\int_0^\infty (\dot{\nu}_N)^N\, dt = 1$.

Portanto, $\nu_N \in J$. Considerando a mudança de variável $t = Nx$, seja

$$\begin{aligned} I_N &= \int_0^\infty e^{\nu_N^{P_N}(t)-t}dt \\ &= N\int_0^1 e^{(N-1)x^{N/(N-1)}-Nx}dx + N\int_1^{B_N/N} e^{-1}dx \\ &+ N\int_{B_N/N}^\infty e^{B_N-1-Nx}dx \\ &= N\int_0^1 e^{(N-1)x^{N/(N-1)}-Nx}dx + e^{-1}(B_N - N + 1). \end{aligned}$$

Realizaremos agora a estimativa de I_N nos dois casos seguintes:

Caso I: Quando $N = 2$, fazendo $-(x-1) = s$, então

$$I_2 = 2\int_0^1 e^{x^2-2x}dx + e \;=\; \frac{2}{e}\int_0^1 e^{s^2}ds + e \geqslant \frac{2,723}{e} + e > 1 + e.$$

Caso II: Quando $N \geqslant 3$, temos $(N-1)x^{N/(N-1)} - Nx \geqslant -1$ para $x \in [0,1]$, pois $(N-1)x^{N/(N-1)} - Nx$ é uma função decrescente nesse intervalo. Daí,

$$I_N \geqslant S_N = \frac{N}{e} + \frac{1}{e}(B_N - N + 1) = \frac{1}{e}[(N-1)\exp\left(P_N^N - P_N\right) + 2].$$

Concluiremos a demonstração deste caso provando o seguinte Lema técnico:

Lema 2.2.7.

$$S_N > 1 + \exp\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{N-1}\right).$$

Demonstração do Lema (2.2.7)

Seja $b_N = \left(\frac{N}{N-1}\right)^N - \frac{N}{N-1}$, $\gamma_N = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{N-1} - \ln(N-1)$. Aqui, levaremos em consideração o fato que $b_N \to e - 1$ e $\gamma_N \to \gamma$, onde $\gamma \approx 0,5772$ denota a Constante de Euler-Mascheroni, quando $N \to \infty$. Note que

$$b_N \geqslant b_{N+1}, \text{ portanto } b_N \geqslant \lim_{k\to\infty} b_k = e - 1. \tag{2.33}$$

$$\gamma_N - \gamma_{N+1} = \ln\left(\frac{N}{N-1}\right) - \frac{1}{N} > 0$$

para todo N. Portanto,

$$\gamma_N \leqslant \gamma_6 \tag{2.34}$$

para $N \geqslant 6$.

Definindo $R_N = 1 + e^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{N-1}}$, obtemos

$$R_N = 1 + (N-1)e^{\gamma_N} \leqslant 1 + (N-1)e^{\gamma_6}$$

para todo $N \geqslant 6$. E também,

$$S_N = \frac{1}{e}[(N-1)\exp\left(P_N^N - P_N\right) + 2] \geqslant (N-1)e^{e-1} + \frac{2}{e},$$

para todo N. Portanto, para $N \geqslant 6$

$$\begin{aligned} S_N - R_N &\geqslant (N-1)\left[e^{e-1} - e^{\gamma_6}\right] + \frac{2}{e} - 1 \\ &\geqslant 5\left[e^{e-1} - e^{\gamma_6}\right] + \frac{2}{e} - 1. \end{aligned}$$

Utilizando estimativas numéricas, temos que $e^{e-1} \geqslant 2,0507$, $\gamma_6 \leqslant 0,68$, $e^{\gamma_6} \leqslant 1,9738$. Logo,

$$S_N - R_N \geqslant 5(0,0769) + \frac{2}{e} - 1 > 0$$

para todo $N \geqslant 6$.

Aplicando $N = 3$, 4 e 5 diretamente em S_N e R_N, vemos também que $S_N > R_N$.

2.2.4 Demonstração dos Lemas 2.2.3 e 2.2.4

Demonstração do Lema 2.2.3

Inicialmente, note que $\int_{N_0}^{\infty} e^{c\int_0^t \psi(\ell)d\ell - t}dt$ é uniformemente pequeno para todo $\psi \in K_\delta$ quando $N_0 \to \infty$. De fato, para cada $\varepsilon > 0$, tome $N_0 >> 0$ para que, se $t > N_0$, então

$$\frac{c\delta^{\frac{1}{N}}t^{(N-1)/N}}{t} < \frac{1}{2}$$

e

$$2e^{-N_0/2} < \varepsilon.$$

Como $\int_0^t \psi(\ell)d\ell \leqslant t^{\frac{N-1}{N}}\delta^{\frac{1}{N}}$, obtemos

$$\int_{N_0}^{\infty} e^{c\int_0^t \psi(\ell)d\ell - t} \leqslant \int_{N_0}^{\infty} e^{c\delta^{\frac{1}{N}}t^{(N-1)/N} - t}dt,$$

de onde

$$\int_{N_0}^{\infty} e^{c\int_0^t \psi(\ell)d\ell - t}dt \leqslant \int_{N_0}^{\infty} e^{\frac{t}{2} - t},$$

o que implica em

$$\begin{aligned} \int_{N_0}^{\infty} e^{c\int_0^t \psi(\ell)d\ell - t}dt &\leqslant \int_{N_0}^{\infty} e^{-\frac{t}{2}} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Com argumentos similares aos utilizados em (2.26) e (2.27) podemos mostrar que existe uma função extremal ψ_0 para

$$S_{c,\delta} = \sup_{\psi \in K_\delta} \int_0^\infty e^{c\int_0^t \psi(s)ds - t} dt.$$

Com efeito, para $\psi \in K_\delta$, denote

$$I(\psi) = \int_0^\infty e^{c\int_0^t \psi(\ell)d\ell - t} dt$$

e

$$I_{N_0}(\psi) = \int_0^{N_0} e^{c\int_0^t \psi(\ell)d\ell - t} dt.$$

Seja $(\psi_n)_{n=1}^\infty \subset K_\delta$ uma sequência tal que $I(\psi_n)$ converge para $S_{c,\delta}$. Por hipótese, temos que (ψ_n) é limitada em $L^N([0,\infty))$; portanto, a menos de uma subsequência, temos $\psi_n \rightharpoonup \psi_0$ em $L^N([0,\infty))$ com $\|\psi_0\| \leqslant \liminf_{n\to\infty}\|\psi_n\| \leqslant \delta$ e, portanto, $\psi_0 \in K_\delta$. Consequentemente, $\psi_n|_{[0,N_0]} \rightharpoonup \psi_0|_{[0,N_0]}$ em $L^N([0,N_0])$; isto implica em

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \psi_n(s)ds = \int_0^t \psi_0(s)ds$$

para todo $t \in [0, N_0]$ (cf. [19, Teorema 11]). Dado $N_0 > 0$, sendo $\int_0^t \psi_n(s)ds \leqslant \delta^{\frac{1}{N}} N_0^{\frac{N-1}{N}}$ para $t \leqslant N_0$, então segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue 1.3.3 que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{N_0} e^{\int_0^t \psi_n(s)ds - t} = \int_0^{N_0} e^{\int_0^t \psi_0(s)ds - t} = I_{N_0}(\psi_0) \geqslant I_{N_0}(\psi_n) - \varepsilon.$$

Para N_0 e n suficientemente grandes, temos

$$I(\psi_0) \geqslant I_N(\psi_0) \geqslant I_N(\psi_n) - \varepsilon \geqslant I(\psi_n) - 2\varepsilon.$$

Fazendo $n \to \infty$, temos $I(\psi_0) \geqslant S_{c,\delta} - 2\varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$, que implica em $I(\psi_0) = S_{c,\delta}$.

É simples verificar que podemos tomar $\psi_0 \in K_\delta$ tal que $\int_0^\infty \psi_0^N dt = \delta$. De fato, pois se $\int_0^\infty \psi_0^N(t)dt < \delta$, tomando $h \in K_\delta$ dada por

$$h = \frac{\delta^{\frac{1}{N}}\psi_0}{\|\psi_0\|_{L^N([0,\infty))}}$$

temos $\int_0^\infty h^N dt = \delta$. Além disso, sendo $\|\psi_0\|_{L^N}^N < \delta$ temos $\psi_0(t) \leqslant h(t)$ o que implica

$$\int_0^\infty e^{c\psi_0(t) - t} \leqslant \int_0^\infty e^{ch(t) - t} dt.$$

Logo, podemos trocar ψ_0 por h, se necessário.

Seja $\psi_0 \in K_\delta$ uma função extremal não-negativa. Por Multiplicadores de Lagrange aplicado ao funcional $H(\psi_0) = \int_0^\infty e^{\int_0^t \psi_0(s)ds - t}dt$ e ao vínculo $g(\psi_0) = \int_0^\infty \psi_0^N dt - \delta$, existe uma constante $\lambda_1 > 0$ tal que, para toda $\nu \in L^N(0,\infty)$,

$$\int_0^\infty e^{c\int_0^t \psi_0(s)ds - t}\left(\int_0^t \nu(s)ds\right)dt = \lambda_1 \int_0^\infty \psi_0^{N-1}(t)\nu(t)dt.$$

Em particular, podemos concluir que para toda $\xi \in C_0^1(0,\infty)$,

$$\int_0^\infty e^{c\int_0^t \psi_0(s)ds - t}\xi(t)dt = \lambda_1 \int_0^\infty \psi_0^{N-1}(t)\dot{\xi}(t)dt. \tag{2.35}$$

Como $e^{c\int_0^t \psi_0(s)ds - t} \in C[0,\infty)$, então a integral indefinida $F(t) = \int_0^t e^{c\int_0^s \psi_0(\theta)d\theta - s}ds$ é uma função C^1 em $[0,\infty)$ e $\dot{F}(t) = e^{c\int_0^t \psi_0(s)ds - t}$. Lembrando que $\xi \in C_0^1(0,\infty)$, de (2.35), obtemos

$$\int_0^\infty (F + \lambda_1\psi_0^{N-1})\dot{\xi}(t)dt = \int_0^\infty (F\dot{\xi} + \dot{F}\xi)dt = \int_0^\infty \frac{d}{dt}(F(t)\xi(t))dt = 0.$$

Portanto, do Lema de Dubois-Reymond para $\mathbb{R}$, temos:

$$F + \lambda_1\psi_0^{N-1} = C \text{ q.t.p. em } [0,\infty)$$

e segue que $\phi = C - F$ é uma função C^1 satisfazendo $\phi = \lambda_1\psi_0^{N-1}$ q.t.p. em $[0,\infty)$. Também temos que $\dot{\phi} = -\dot{F} < 0$ sobre $[0,\infty)$. Daí, ganhamos que podemos tomar uma função C^1 extremal para $S_{c,\delta}$. Mais ainda, de $\dot{F} = -\dot{\phi}$, obtemos a seguinte equação diferencial:

$$e^{c\int_0^t \psi_0(s)ds - t} = L\dot{\psi}_0(t)(\psi(t))^{N-2},$$

isto é, para $\varphi(t) = \int_0^t \psi_0(s)ds$,

$$e^{c\varphi(t) - t} = L\ddot{\varphi}(t)(\dot{\varphi}(t))^{N-2},$$

para alguma constante L.

Fazendo $p(t) = c\varphi(t) - t$, obtemos

$$e^{p(t)} = L\ddot{p}(t)(\dot{p}(t) + 1)^{N-2}, \tag{2.36}$$

com $p(t)$ satisfazendo

$$\int_0^\infty (\dot{p} + 1)^N dt = c^N\delta \tag{2.37}$$

$$p(0) = 0; \text{ também de (2.37), } \dot{p}(\infty) = -1, \ p(\infty) = -\infty. \tag{2.38}$$

De fato, senão para algum $\varepsilon_0 > 0$ pode-se encontrar um $A > 0$ tal que $|\dot{p}(t) + 1| \geqslant \varepsilon_0$ para $t > A$. E também, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário,

$$\begin{aligned} p(\infty) - p(0) &= \int_0^\infty \dot{p}(t)dt \\ &= \int_0^{N_0} \dot{p}(t)dt + \int_{N_0}^\infty \dot{p}(t)dt \\ &= \int_0^{N_0} \dot{p}(t)dt + \int_{N_0}^\infty (\varepsilon - 1)dt. \end{aligned}$$

Considerando as informações obtidas em relação à função $p(t)$ vamos agora procurar estimativas para a integral $J = \int_0^\infty e^{p(t)}dt$. Começaremos multiplicando (2.36) por $\dot{p}(t)$ e integramos em $\int_0^\infty dt$ para obtermos

$$\begin{aligned} \int_0^t \dot{p}(t)e^{p(t)}dt &= L\int_0^t \dot{p}(t)\ddot{p}(t)(\dot{p}(t)+1)^{N-2}dt \\ &= L\int_0^t \dot{u}u^{N-2}(u-1)du \\ &= L\left[\frac{1}{N}(\dot{p}+1)^N(t) - \frac{1}{N-1}(\dot{p}+1)^{N-1}(t)\right] + C_1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$e^{p(t)} = L\left[\frac{1}{N}(\dot{p}+1)^N(t) - \frac{1}{N-1}(\dot{p}+1)^{N-1}(t)\right] + C_2. \tag{2.39}$$

Fazendo $t \to \infty$, e usando (2.38) achamos $C_2 = 0$. Comparando (2.36) e (2.39) obtemos

$$\ddot{p}(t) = \frac{1}{N}(\dot{p}+1)^2(t) - \frac{1}{(N-1)}(\dot{p}+1)(t). \tag{2.40}$$

Da equação de Bernoulli, fazendo $\dot{p} + 1 = y^{-1}$, obtemos

$$\ln\left(y - \frac{(N-1)}{N}\right)\Big|_{t_0}^{t} = \frac{1}{N-1}(t - t_0).$$

Logo,

$$1 + \dot{p}(t) = \frac{N}{N-1}(1 + Me^{t/(N-1)})^{-1}. \tag{2.41}$$

A constante M será determinada através da igualdade

$$c^N\delta = \int_0^\infty (1+\dot{p}(t))^N dt = \left(\frac{N}{N-1}\right)^N (N-1)\left(\log\frac{1+M}{M} - \sum_{i=1}^{N-1}\frac{1}{i(1+M)^i}\right), \tag{2.42}$$

a qual é justificada por:

De (2.41), e da mudança de variável $r^{-1} = Me^{t/(N-1)}$temos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty (1+\dot{p}(t))^N dt &= \left(\frac{N}{N-1}\right)^N \int_0^\infty (1+Me^{t/(N-1)})^{-N} \\
&= \left(\frac{N}{N-1}\right)^N \frac{1}{N-1}\int_0^M (1+\frac{1}{r})^{-N}\frac{1}{r}dr \\
&= \left(\frac{N}{N-1}\right)^N \frac{1}{N-1}\int_0^{\frac{1}{M}} \frac{r^{N-1}}{(r+1)^N}dr.
\end{aligned}$$

Agora, tomando convenientemente, $r = z - 1$ temos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty (1+\dot{p}(t))^N dt &= \left(\frac{N}{N-1}\right)^N \frac{1}{N-1}\int_1^{\frac{1+M}{M}} \frac{1-\left[1-(z-1)^{N-1}\right]}{z^N}dz \\
&= \left(\frac{N}{N-1}\right)^N \frac{1}{N-1}\left(\int_1^{\frac{1+M}{M}} \frac{1}{z}dz - \int_1^{\frac{1+M}{M}} \frac{1-(1-1/z)^{N-1}}{z}dz\right) \\
&= \left(\frac{N}{N-1}\right)^N \frac{1}{N-1}\left(\log\frac{1+M}{M} - \int_1^{\frac{1+M}{M}} \frac{1}{z^2}\sum_{i=0}^{N-2}(1-1/z)^i dz\right) \\
&= \left(\frac{N}{N-1}\right)^N \frac{1}{N-1}\left(\log\frac{1+M}{M} - \sum_{i=1}^{N-1}\frac{1}{i}(1-1/z)^i\Big|_1^{\frac{1+M}{M}}\right) \\
&= \left(\frac{N}{N-1}\right)^N \frac{1}{N-1}\left(\log\frac{1+M}{M} - \sum_{i=1}^{N-1}\frac{1}{i}\frac{1}{(1+M)^i}\right).
\end{aligned}$$

Substituindo $t = 0$ em (2.39), obtemos

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{L}{N}(\dot{p}(0)+1)^N - \frac{L}{N-1}(\dot{p}(0)+1)^{N-1} \\
&= \frac{L}{N}\left(\frac{P_N}{1+M}\right)^N - \frac{L}{(N-1)}\left(\frac{P_N}{1+M}\right)^{N-1}. \qquad (2.43)
\end{aligned}$$

Integrando diretamente (2.36) ganhamos

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^\infty e^{p(t)}dt \\
&= L\int_0^\infty \ddot{p}(t)(\dot{p}(t)+1)^{N-2}dt \\
&= \frac{L}{N-1}(\dot{p}(t)+1)^{N-1}\Big|_0^\infty \\
&= -\frac{L}{N-1}\left(\frac{P_N}{1+M}\right)^{N-1}. \qquad (2.44)
\end{aligned}$$

Logo, de (2.41), (2.43) e (2.44) obtemos

$$J = \frac{1+M}{M}.$$

Como $1+\dot{p}(t) = c\dot{\varphi}(t) \geqslant 0$, ganhamos $1+M \geqslant 0$, e de $J \geqslant 0$ segue que $M \geqslant 0$.

De (2.42), quando $c^N\delta \to \infty$ tem-se $M \to 0$ e

$$\begin{aligned} J &= \frac{1+M}{M} \\ &= \exp\left(\left(\frac{N-1}{N}\right)^{N-1}\frac{1}{N}c^N\delta + \sum_{i=1}^{N-1}\frac{1}{i}\frac{1}{(1+M)^i}\right) \\ &\leqslant \exp\left(\left(\frac{N-1}{N}\right)^{N-1}\frac{1}{N}c^N\delta + \sum_{i=1}^{N-1}\frac{1}{i}\right), \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração do Lema 2.2.3.

Demonstração do Lema 2.2.4

Nesta demonstração faremos como uma consequência do Lema 2.2.3 por meio de mudança de variáveis. Suponha $w \in C^1$ com $\int_a^\infty \dot{w}^N(t)dt \leqslant \delta$. Seja $x = t-a$, $\psi(x) = w(x+a)-w(a)$ então

$$w(t) = \psi(x) + w(a) \text{ para todo } x \geqslant 0,$$
$$w^{P_N}(t) = (\psi(x)+w(a))^{P_N} \leqslant w^{P_N}(a) + P_N(w^{P_N-1}(a)\psi(x)) + \psi^{P_N}(x). \tag{2.45}$$

Como $\psi(0) = 0$, $\int_0^\infty \dot{\psi}^N(x) \leqslant \delta$, ganhamos $\psi(x) = \int_0^x \dot{\psi}(s)ds \leqslant x^{\frac{N-1}{N}}\left(\int_0^\infty \dot{\psi}^N(x)dx\right)^{\frac{1}{N}} \leqslant x^{\frac{N-1}{N}}\delta^{\frac{1}{N}}$. Então

$$\psi^{P_N}(x) \leqslant x\delta^{\frac{1}{N-1}}.$$

Considerando a mudança de variáveis $y = (1-\delta^{1/(N-1)})x$, $c = P_N w^{P_N-1}(a)$ e $\varphi(y) = \psi(x)$, de (2.45) temos

$$\begin{aligned} \int_a^\infty e^{w^{P_N}(t)-t}dt &\leqslant \int_0^\infty e^{w^{P_N}(a)+P_N(w^{P_N-1}(a)\psi(x))+\psi^{P_N}(x)-(x-a)}dx \\ &= e^{w^{P_N}(a)-a}\int_0^\infty e^{P_N(w^{P_N-1}(a)\psi(x))+\psi^{P_N}(x)-x}dx \\ &= e^{w^{P_N}(a)-a}\int_0^\infty e^{c\psi(x)+\psi^{P_N}(x)-x}dx \\ &\leqslant e^{w^{P_N}(a)-a}\int_0^\infty e^{c\psi(x)-(1-\delta^{\frac{1}{N-1}})x}dx \\ &= e^{w^{P_N}(a)-a}\frac{1}{(1-\delta^{\frac{1}{N-1}})}\int_0^\infty e^{c\varphi(y)-y}dy. \end{aligned}$$

Como $\beta_N = \int_0^\infty \dot{\varphi}^N(y)dy = \left(\int_0^\infty \dot{\psi}^N(x)dx\right)(1-\delta^{1/(N-1)})^{-N+1} \leqslant \delta(1-\delta^{1/(N-1)})^{-N+1}$, então, aplicando o Lema 2.2.3 provamos o que está afirmado no Lema 2.2.4.

Capítulo 3

Problemas maximizantes gerais

Neste capítulo consideraremos a existência de funções extremais para não-linearidades gerais que tenham crescimento crítico e subcrítico em $W_0^{1,N}(\Omega)$. Mais precisamente, considere não-linearidades F sob as seguintes hipóteses:

(F1) $F \in C^1(\mathbb{R})$,

(F2) F é crescente sobre $\mathbb{R}^+$, e $F(t) = F(|t|)$,

(F3) $0 \leqslant F(t) \leqslant e^{\alpha_N |t|^{\frac{N}{N-1}}} - 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$,

(F4) $\lim_{|t|\to\infty} e^{-\alpha_N |t|^{\frac{N}{N-1}}} F(t)$ existe.

Nesse sentido, dizemos que

$$F \text{ tem } \textit{crescimento subcrítico} \text{ se } \lim_{t\to\infty} \frac{F(t)}{e^{\alpha_N |t|^{\frac{N}{(N-1)}}}} = 0;$$

por outro lado, dizemos que F tem *crescimento crítico* se

$$\lim_{t\to\infty} F(t) e^{-\alpha_N |t|^{\frac{N}{(N-1)}}} = 1.$$

Considere

$$M = \sup_{\|u\|_N \leqslant 1} \int_\Omega (e^{\alpha_N |u|^{N/(N-1)}} - 1) dx.$$

e seja $(u_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência maximizante para M. Segundo o Teorema 1.3.9, se $(u_n)_{n=1}^\infty$ converge fracamente para $u \neq 0$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$ e $(|\nabla u_n|^N)_{n=1}^\infty$ converge para uma função μ na medida, então pelo Teorema de Vitali 1.3.8

$$M = \int_\Omega (e^{\alpha_N |u|^{N/(N-1)}} - 1) dx.$$

Ainda, se $u = 0$ e $\mu \neq \delta_{x_0}$ vale $M = 0$, o que é falso, pois sabemos que $M > 0$. Resta analizar o caso em que $u_n \rightharpoonup u$ e $\mu = \delta_{x_0}$. Nesse sentido, faremos a seguinte definição:

Definição 3.0.8. *Uma sequência* $u_n \subset W_0^{1,N}(\Omega)$ *é uma sequência concentrada normalizada se*

a) $\|u_n\|_N = 1$,

b) $u_n \rightharpoonup 0$ *fracamente em* $W_0^{1,N}(\Omega)$,

c) $\exists x_0 \in \Omega$ *tal que* $\forall \rho > 0 : \int_{\Omega \setminus B_\rho(x_0)} |\nabla u_n|^N dx \to 0$.

Primeiro, consideraremos o comportamento da sequência $\displaystyle\int_\Omega F(u_n)dx$ com não-linearidades F que tenham crescimento sub-crítico para sequências $\{u_n\}$ concentradas normalizadas.

Teorema 3.0.9. *Se* F *tem crescimento sub-crítico, então* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega F(u_n)dx = 0$ *para toda sequência concentrada normalizada* $(u_n)_{n=1}^\infty$.

Demonstração: Seja u_n uma sequência concentrada normalizada que tem o $0 \in \Omega$ como ponto de concentração; $u \geqslant 0$ (desde que $\|u\|_N$ e $F(u)$ não muda de sinal quando substituímos u por $|u|$). Neste momento, utilizaremos, novamente, a técnica de simetrização de Schwarz. Por construção

$$\int_{B_R(0)} F(u_n^*)dx = \int_\Omega F(u_n)dx,$$

e sabemos que

$$\int_{B_R(0)} |\nabla u_n^*|^N dx \leqslant \int_\Omega |\nabla u_n|^N dx = 1.$$

Considerando $z_n = \frac{u_n^*}{\|u_n^*\|^N} \geqslant u_n^*$, conseguimos obter, usando monotonicidade de *F(t)*,

$$\int_{B_R(0)} F(u_n^*)dx \leqslant \int_{B_R(0)} F(z_n)dx.$$

Portanto, é suficiente mostrar que

$$\int_{B_R(0)} F(z_n)dx = \omega_{N-1}\int_0^R F(z_n(\rho))\rho^{N-1}d\rho \to 0.$$

Equivalentemente, para provar que $\int_0^R F(z_n(\rho))\rho^{N-1}d\rho \to 0$, usaremos uma mudança de variáveis conveniente que transformará a integral radial em $[0,R]$ em uma integral sobre a semi-reta $[0,+\infty)$. Seja

$$\frac{\rho^N}{R^N} = \frac{|x|^N}{R^N} = e^{-t} \Rightarrow \rho^N = R^N e^{-t} \Rightarrow \rho = Re^{\frac{-t}{N}}e, w_n(t) = N^{\frac{N-1}{N}}\omega_{N-1}^{\frac{1}{N}} z_n(\rho).$$

Portanto $(w_n(t))_{n=1}^{\infty}$ é monótona crescente em $[0,+\infty)$. (Pois $(z_n(t))_{n=1}^{\infty}$ é monótona decrescente em t).

Note que

$$w_n(t) = N^{\frac{N-1}{N}}\omega_{N-1}^{\frac{1}{N}} z_n(\rho).$$

implica em

$$\dot{w}_n(t) = N^{\frac{N-1}{N}}\omega_{N-1}^{\frac{1}{N}}\frac{dz_n}{d\rho}\frac{d\rho}{dz} = N^{\frac{N-1}{N}}\omega_{N-1}^{\frac{1}{N}}\frac{dz_n}{d\rho}(-\frac{R}{N}e^{\frac{-t}{N}}).$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty}|\dot{w}_n|^N dt &= \int_0^{\infty} N^{N-1}\omega_{N-1}(\frac{R}{N})^N e^{-t}|\frac{dz_n}{d\rho}|^N dt \\
&= \int_0^{\infty}\omega_{N-1}\frac{R^N}{N}e^{-t}|\frac{dz_n}{d\rho}|^N dt \\
&= \int_0^{R}\omega_{N-1}\frac{1}{N}\rho^N|\frac{dz_n}{d\rho}|^N N\frac{1}{\rho}d\rho \\
&= \int_0^{R}\omega_{N-1}\rho^{N-1}|\frac{dz_n}{d\rho}|^N d\rho \\
&= \int_{B_R(0)}|\nabla z_n(x)|^N dx,
\end{aligned}$$

onde a última igualdade é justificada pelo Teorema 1.3.4.

Também temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty F(\alpha_N^{\frac{1-N}{N}} w_n(t))e^{-t}dt &= \int_0^\infty F(\alpha_N^{\frac{1-N}{N}}\alpha_N^{\frac{N-1}{N}} z_n(\rho))e^{-t}dt \\
&= \int_0^\infty F(z_n(\rho))e^{-t}dt \\
&= \frac{N}{R}\int_0^R F(z_n(\rho))e^{\frac{t}{N}}\frac{\rho^N}{R^N}d\rho \\
&= \frac{N}{R}\int_0^R F(z_n(\rho))\frac{\rho^{N-1}}{R^{N-1}}d\rho \\
&= \frac{N}{R^N}\int_0^R F(z_n(\rho))\rho^{N-1}d\rho
\end{aligned}$$

o que pelo Teorema 1.3.4, implica em

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty F(\alpha_N^{\frac{1-N}{N}} w_n(t))e^{-t}dt &= \frac{N}{R^N}\frac{1}{\omega_{N-1}}\int_{B_R} F(z_n(x))dx \\
&= \frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} F(z_n(x))dx.
\end{aligned}$$

Como nós estamos considerando que as funções $u_n(x)$ são concentradas em 0, a sequência $(z_n(t))_{n=1}^\infty$ é concentrada no 0 e a sequência $(w_n(t))_{n=1}^\infty$ em $+\infty$, isto é, para todo $A > 0$ fixado, temos $\int_0^A |\dot{w}_n|^N dt \to 0$. De fato, note que, dado $R_0 > 0, \exists \delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\int_{B_R(0)\setminus B_{R_0}(0)} |\nabla z_n|^N dx &= \frac{1}{\|u_n^*\|_N^N}\int_{B_R(0)\setminus B_\delta(0)} |\nabla u_n^*|^N dx \\
&\leqslant \frac{1}{\|u_n^*\|_N^N}\int_{\omega\setminus B_\delta(x_0)} |\nabla u_n|^N dx \to 0
\end{aligned}$$

quando $n \to +\infty$.

E, para todo $A > 0$,

$$\begin{aligned}
\int_0^A |\dot{w}_n(t)|^N dt &= \omega_{N-1}\int_{\frac{R}{e^{\frac{t}{N}}}}^R |\frac{d}{d\rho}z_n(\rho)|^N\rho^{N-1}d\rho \\
&= \int_{B_R(0)\setminus B_{\frac{R}{e^{\frac{t}{N}}}}(0)} |\nabla z_n|^N dx \to 0
\end{aligned}$$

quando $n \to +\infty$, em virtude do que se provou logo acima. ∎

Agora, analisaremos os dois distintos casos seguintes:

CASO A: Seja $a_n \in (0, +\infty)$ o primeiro ponto com $w_n^{\frac{N}{N-1}}(a_n) = a_n - 2\log(a_n)$ (se tal a_n existir).

A partir do que foi provado na afirmação 2.2.6 e da hipótese (F3), dado $\epsilon > 0$, tome $\eta > 0$ suficientemente pequeno e A arbitrariamente grande tal que $\frac{1}{1-\eta}(1-e^{(\eta-1)A}) + e^{-A} - 1 < \epsilon$.

Para tais η e A, tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geqslant n_0$, então $w_n^{\frac{N}{N-1}}(t) \leqslant t\left(\int_0^A |\dot{w}_n(s)|^N ds\right)^{\frac{1}{N-1}} \leqslant \eta t$. Daí,

$$
\begin{aligned}
\int_0^A F(\alpha_N^{\frac{1-N}{N}} w_n(t))e^{-t}dt &\leqslant \int_0^A (e^{\alpha_N|\alpha_N^{\frac{1-N}{N}} w_n(t)|^{\frac{N}{N-1}}} - 1)e^{-t}dt \\
&= \int_0^A (e^{\alpha_N|\alpha_N^{-1}||w_n(t)|^{\frac{N}{N-1}}} - 1)e^{-t}dt \\
&= \int_0^A (e^{|w_n(t)|^{\frac{N}{N-1}}} - 1)e^{-t}dt \\
&= \int_0^A (e^{w_n(t)^{\frac{N}{N-1}}} - 1)e^{-t}dt \\
&= \int_0^A (e^{\eta t} - 1)e^{-t}dt \\
&= \frac{1}{\eta - 1}(e^{(\eta-1)A} - 1) + (e^{-A} - 1) \\
&< \epsilon.
\end{aligned}
$$

Agora, considerando a_n como sendo o primeiro termo tal que $w_n^{\frac{N}{N-1}}(t) \geqslant t - 2\log t$, então dado $\epsilon > 0$, tome $A > 0$ arbitrariamente grande e $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$
-\frac{1}{a_n} + \frac{1}{A} + \frac{1}{e^{a_n}} - \frac{1}{e^A} < \epsilon,
$$

temos

$$
\begin{aligned}
\int_A^{a_n} F(\alpha_N^{\frac{1-N}{N}} w_n(t))e^{-t}dt &\overset{(F3)}{\leqslant} \int_A^{a_n} (e^{w_n^{\frac{N}{N-1}}(t)} - 1)e^{-t}dt \\
&\leqslant \int_A^{a_n} (e^{t-2\log t} - 1)e^{-t}dt \\
&= \int_A^{a_n} (e^{-2\log t} - e^{-t})dt \\
&= \int_A^{a_n} (t^{-2} - e^{-t})dt \\
&= \left(-\frac{1}{t} + e^{-t}\right)\Big|_A^{a_n} \\
&= -\frac{1}{a_n} + \frac{1}{A} + \frac{1}{e^{a_n}} - \frac{1}{e^A} \\
&< \epsilon.
\end{aligned}
$$

Observação. Como, para todo n, w_n é uma função crescente então a_n é o menor dos pontos tais que $w_n^{\frac{N}{N-1}}(t) = t - 2\log t$. Notemos também que se $t \in [A, a_n]$, então

$$
w_n^{\frac{N}{N-1}}(t) \leqslant t - 2\log t.
$$

De fato, se existisse $t_0 < a_n$ tal que $w_n^{\frac{N}{N-1}}(t_0) > t_0 - 2\log t_0$, considerando n suficientemente grande, pelo que vimos acima, teríamos

$$w_n^{\frac{N}{N-1}}(A) \leqslant \eta A < A - 2\log A,$$

para $\eta > 0$ suficientemente pequeno. Daí, pelo Teorema do Valor Intermediário, existiria um ponto $t_1 \in [A, t_0]$ tal que $w_n^{\frac{N}{N-1}}(t_1) = t_1 - 2\log t_1$, o que entraria em contradição como fato de a_n ser o primeiro ponto com tal propriedade.

Finalmente, para $t \in [a_n, +\infty)$, por $w_n^{\frac{N}{N-1}}(t)$ ser crescente, temos

$$w_n^{\frac{N}{N-1}}(t) \geqslant a_n - 2\log a_n = w_n^{\frac{N}{N-1}}(a_n),$$

e portanto, pela hipótese de subcriticalidade sobre $F \geqslant 0$, nós temos que para todo $\epsilon > 0$ fixado e $s \geqslant a_n$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geqslant n_0$ então

$$\frac{F(s)}{e^{\alpha_N s^{\frac{N}{N-1}}} - 1} < \epsilon,$$

isto é,

$$F(s) \leqslant \epsilon(e^{\alpha_N s^{\frac{N}{N-1}}} - 1),$$

portanto, para n suficientemente grande

$$\int_{a_n}^{+\infty} F(\alpha_N^{\frac{1-N}{N}} w_n(t))e^{-t}dt \leqslant \epsilon \int_{a_n}^{+\infty} e^{w_n^{\frac{N}{N-1}}(t)-t}dt \leqslant \epsilon\mathcal{C},$$

onde $\mathcal{C}$ é a constante de Trudinger-Moser. Portanto, está provado o caso A.

Caso B: Para todo $t \in \mathbb{R}$, nós temos $w_n^{\frac{N}{N-1}}(t) < t - 2\log^+ t$. Então, com raciocínio análogo ao caso A, temos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} F(\alpha_N^{\frac{1-N}{N}} w_n(t))e^{-t}dt &= \underbrace{\int_0^{A} F(\alpha_N^{\frac{1-N}{N}} w_n(t))e^{-t}dt}_{=0\,(\text{no limite, pelo caso } A)} + \int_A^{+\infty} F(\alpha_N^{\frac{1-N}{N}} w_n(t))e^{-t}dt \\
&\leqslant \int_A^{+\infty} (e^{w_n^{\frac{N}{N-1}}(t)} - 1)e^{-t}dt \\
&< \int_A^{+\infty} (e^{t-2\log(t)} - 1)e^{-t}dt \\
&= \frac{1}{A} - \lim_{\theta\to+\infty} \frac{1}{\theta} + \lim_{\theta\to+\infty} e^{-\theta} - e^{-A} \to 0
\end{aligned}$$

para A arbitrariamente grande, e $n \to +\infty$. ∎

Teorema 3.0.10. *Se* F *tem crescimento subcrítico, então*

$$\sup_{\|u\|_N=1}\int_\Omega F(u)dx$$

é atingido.

Demonstração: Percebemos que se $\sup_{\|u\|_N=1}\int_\Omega F(u)dx = 0$, então basta tomar $F = 0$ e está provado. Agora, se $\sup_{\|u\|_N=1}\int_\Omega F(u)dx > 0$, então do Teorema 3.0.9 não pode existir uma sequência normalizada concentrada em um ponto x_0, ou seja, satisfazendo as hipóteses do Teorema 1.3.9, com $u = 0$ e $\mu = \delta_{x_0} \in \overline{\Omega}$, que seja maximizante, isto é, se existe $(h_k)_{k=1}^\infty$, tal que $\int_\Omega F(h_k) \to \sup_{\|u\|_N=1}\int_\Omega F(u)$, quando $n \to \infty$, obtém-se que $(h_k)_{k=1}^\infty$ não é uma sequência concentrada normalizada.

Logo, desde que exista $(u_n)_{n=1}^\infty$ satisfazendo todas as hipóteses do Teorema 1.3.9 de modo que podemos extrair uma subsequência, ainda denotando por $(u_n)_{n=1}^\infty$ concluímos que, ou $u \neq 0$ e, pela condição (iii) tem-se que $\int_\Omega F(u_n)dx \to \sup_{\|u\|_N=1}\int_\Omega F(u)$ quando $n \to \infty$, ou então, acontece a condição (ii) do mesmo teorema, implicando no mesmo resultado, onde u será então um extremal. ■

Agora, consideraremos o crescimento crítico, nos restringindo ao caso $\Omega = B_1(0)$, a bola unitária no $\mathbb{R}^n$, estudando novamente o comportamento do funcional para sequências concentradas normalizadas.

Teorema 3.0.11. *Se* F *tem crescimento crítico, então*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{B_1(0)} F(u_n)dx \in [0, e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N-1}}|B_1(0)|]$$

para toda sequência concentrada normalizada $(u_n)_{n=1}^\infty$. *Em particular, existe uma sequência concentrada normalizada explícita* $(y_n)_{n=1}^\infty$ *com*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{B_1(0)} F(y_n)dx \in [0, e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N-1}}|B_1(0)|].$$

Procederemos pelas seguintes etapas:

(1) Se $(u_n)_{n=1}^\infty$ é qualquer sequência concentrada normalizada em $W_0^{1,N}(B_1)$, então

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{B_1} F(u_n)dx \leqslant e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N-1}}|B_1(0)|.$$

(2) Daremos uma sequência concentrada normalizada $(y_n)_{n=1}^\infty$ explícita com

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{B_1} F(y_n)dx = e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N-1}}|B_1(0)|.$$

Limite Superior

Primeiro note que de (F3) e a transformação realizada na demonstração do Teorema 3.0.9, chamando por conveniência $w_n = u_n$, é suficiente mostrar que para toda sequência concentrada normalizada $(u_n)_{n=1}^{\infty} \in C^1[0,\infty)$, isto é, $\int_0^\infty |u_n'|^N = 1$, $\int_0^A |u_n'|^N \to 0$, com $u_n(0) = 0$, $u_n'(t) \geqslant 0$ ($u_n(t)$ é crescente), nós temos

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_0^\infty (e^{u_n^{\frac{N}{N-1}}} - 1)e^{-t}dt \leqslant e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N-1}}, \tag{3.1}$$

ou seja,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_0^\infty e^{u_n^{\frac{N}{N-1}}-t}dt \leqslant 1 + e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N-1}}.$$

Mais precisamente, mostraremos que:
Se $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \int_0^\infty e^{u_n^{\frac{N}{N-1}}-t}dt > 2$, então $\{u_n\}$ possui as seguintes propriedades:

(1) Se $a_n \in [1,\infty)$ denota o primeiro ponto com $u_n^{\frac{N}{(N-1)}}(a_n) = a_n - 2\log a_n$, então $a_n \to \infty$.

(2) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \int_{a_n}^\infty e^{u_n^{\frac{N}{N-1}}-t}dt \leqslant e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N-1}}$.

(3) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \int_0^{a_n} e^{u_n^{\frac{N}{N-1}}-t}dt = 1$.

Demonstração: A estimativa em (6) decorre naturalmente dos itens (2) e (3).

Notemos que para n suficientemente grande temos a existência do ponto a_n tal que $u_n^{\frac{N}{N-1}} = a_n - 2\log^+ a_n$, pois, senão, então teríamos

$$u_n^{\frac{N}{N-1}}(t) < t - 2\log^+(t)$$

para todo t (onde $\log^+(t) = \max\{\log^+(t), 0\}$). De fato, como a_n é o primeiro, não pode existir um outro ponto de modo que

$$u_n^{\frac{N}{N-1}}(t) \geqslant t - 2\log^+(t),$$

pois se para esse ponto ocorresse a igualdade, teríamos uma contradição com o fato de a_n ser o primeiro com tal propriedade e, se

$$u_n^{\frac{N}{N-1}}(t_0) > t_0 - 2\log^+(t_0),$$

para algum t_0, então pelo CASO A

$$t_0 - 2\log^+(t_0) < u_n^{\frac{N}{N-1}}(t_0) < \eta t_0 < t_0 - 2\log t_0,$$

para η arbitrariamente pequeno e n grande o suficiente.

Deste modo, obtemos

$$u_n^{\frac{N}{N-1}}(t) < t - 2\log^+(t) \Rightarrow u_n^{\frac{N}{N-1}}(t) - t < -2\log^+(t) \Rightarrow \exp\left(u_n^{\frac{N}{N-1}}(t) - t\right) < \exp\left(-2\log^+(t)\right).$$

E portanto temos os seguintes casos:

Para $t \in [0,1]$, temos:

$$\exp\left(u_n^{\frac{N}{N-1}}(t) - t\right) < \exp 0 = 1;$$

Para $t > 1$:

$$\exp\left(u_n^{\frac{N}{N-1}}(t) - t\right) < \exp\left(\log(t^{-2})\right) = \frac{1}{t^2}.$$

De onde, temos no limite

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \exp\left(u_n^{\frac{N}{N-1}}(t) - t\right) \leqslant \lim_{n\to\infty}\int_0^1 1 + \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{1}{t^2} = 2,$$

o que contradiz a hipótese.

Notemos que para cada $A > 0$, nós podemos escolher números n_0 e $\eta > 0$ de modo que para todo $t \in [0, A]$ e todo $n \geqslant n_0$

$$u_n^{\frac{N}{N-1}}(t) \leqslant t\left(\int_0^A |u_n'|^N dt\right)^{\frac{1}{N-1}} \leqslant \eta t < t - 2\log^+ t. \tag{3.2}$$

Isto implica que $a_n \geqslant A$ para todo $n \geqslant n_0$, e desde A é tomado arbitrário, temos que $a_n \to \infty$ quando $n \to \infty$.

Para provar a propriedade (3), notemos que (3.2) também implica que $u_n \to \infty$ uniformemente sobre conjuntos compactos. Usando o fato que a_n é o primeiro ponto tal que $u_n^{\frac{N}{N-1}}(a_n) = a_n - 2\log^+ a_n$, dado $\epsilon > 0$ qualquer, de modo que

$$\frac{1}{\eta-1}\left[e^{(\eta-1)A} - 1\right] - \left[\frac{1}{a_n} - \frac{1}{A}\right] - 1 < 1 + \epsilon,$$

para A arbitrariamente grande e n suficientemente grande, com $A < a_n$ e $\eta < 1$ pequeno o suficiente, temos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{a_n} e^{u_n^{\frac{N}{N-1}}(t)-t}dt &\leqslant \int_0^A e^{u_n^{\frac{N}{N-1}}(t)-t}dt + \int_A^{a_n} e^{u_n^{\frac{N}{N-1}}(t)-t}dt \\
&= \int_0^A e^{u_n^{\eta t}-t}dt + \int_A^{a_n} e^{-2\log^+ t}dt \\
&\leqslant \frac{1}{N-1}e^{\eta t - t}\Big|_0^A + \int_A^{a_n}\frac{1}{t^2}dt \\
&= \frac{1}{\eta-1}e^{(\eta-1)A} - \frac{1}{\eta-1} - \frac{1}{t^2}\Big|_A^{a_n} \\
&= \frac{1}{\eta-1}\left[e^{(\eta-1)A} - 1\right] - \left[\frac{1}{a_n} - \frac{1}{A}\right] < 1 + \epsilon.
\end{aligned}$$

Por outro lado, segue que

$$\int_0^{a_n} e^{u_n^{\frac{N}{N-1}}(t)-t}dt \geqslant \int_0^{a_n} e^{-t}dt = 1-e^{-a_n} \to 1 \text{ para } a_n \to \infty.$$

Na demonstração da propriedade (2), utilizaremos o Lema 2.2.3, aplicando $w(t) = u_n(t)$, $a = a_n$ e $\delta = \delta_n = \int_{a_n}^{\infty} |\dot{u}_n|^N dt$. Portanto, temos

$$\int_{a_n}^{\infty} e^{u_n^{P_N}(t)-t}dt \leqslant \frac{1}{(1-\delta^{\frac{1}{N-1}})} e^{K_n} e^{1+1/2+\ldots+1/(N-1)} \tag{3.3}$$

onde

$$K_n = u_n^{P_N}(a_n)\left[1+\frac{1}{N-1}\frac{\delta_n}{(1-\delta_n^{1/(N-1)})^{(N-1)}}\right] - a_n.$$

De Hölder,

$$u_n^{P_N}(a_n) \leqslant a_n\left(\int_0^{a_n}|\dot{u}_n|^N dt\right)^{1/(N-1)}$$

e usando $\int_0^{\infty}|\dot{u}_n|^N dt = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} u_n^{P_N}(a_n) &\leqslant a_n\left(\int_0^{\infty}|\dot{u}_n|^N dt - \int_{a_n}^{\infty}|\dot{u}_n|^N dt\right)^{1/(N-1)} \\ &\leqslant a_n\,(1-\delta_n)^{1/(N-1)}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \delta_n &\leqslant 1-\frac{u_n^N(a_n)}{a_n^{N-1}} = 1-\left(1-\frac{2\log^+(a_n)}{a_n}\right)^{N-1} \\ &\leqslant (N-1)\frac{2\log^+(a_n)}{a_n} \to 0 \text{ quando } n\to\infty, \end{aligned}$$

onde usamos $z^{N-1}-w^{N-1} = (z-w)\sum_{i=0}^{N-2} w^i z^{(N-2)-i}$, para qualquer z, w>0.
Além disso, lembrando que $\delta_n \leqslant 1$, note que

$$\begin{aligned} \left|\frac{\delta_n}{N+1}\frac{(1-\delta_n^{1/(N-1)})^{1-N}-1}{\delta_n^{N/(N-1)}}\right| &= \left|\frac{\delta_n^{1/(-N+1)}}{N-1}\left((1-\delta_n^{1/(N-1)})^{1-N}-1\right)\right| \\ &= \frac{\delta_n^{1/(-N+1)}}{N-1}\left((1-\delta_n^{1/(N-1)})^{1-N}-1\right) \\ &\leqslant \frac{(\delta_n)^0}{N-1}(N-1)(1-\delta_n^{1/(N-1)})^{1-N} \\ &< \frac{3}{2} \text{ quando } n\to\infty. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{N-1}\frac{\delta_n}{(1-\delta^{1/(N-1)})^{N-1}} = \frac{\delta_n}{N-1} + \mathcal{O}(\delta_n^{N/(N-1)}),$$

e também,

$$
\begin{aligned}
& \left| \frac{\left(-2\log^{+}(a_n)\delta_n \frac{1}{(N-1)} - 2\log^{+}(a_n)\mathcal{O}(\delta_n^{\frac{N}{(N-1)}}) + a_n\mathcal{O}(\delta_n^{\frac{N}{(N-1)}})\right)}{\left(\left(\frac{\log^{N}(a_n)}{a_n}\right)^{\frac{1}{(N-1)}}\right)} \right| \\
\leqslant\ & \left|\left(-2\log^{+}(a_n)\delta_n\frac{1}{(N-1)}\right) \Big/ \left(\left(\log^{N}(a_n)/a_n\right)^{\frac{1}{(N-1)}}\right)\right| \\
+\ & \left|\left(-2\log^{+}(a_n)\mathcal{O}(\delta_n^{\frac{N}{(N-1)}}) + a_n\mathcal{O}(\delta_n^{\frac{N}{(N-1)}})\right) \Big/ \left(\left(\log^{N}(a_n)/a_n\right)^{\frac{1}{(N-1)}}\right)\right| \\
\leqslant\ & \left|-2\frac{\delta_n}{N-1}\log^{-1/(N-1)}(a_n)a_n^{\frac{1}{N-1}}\right| \\
+\ & \left|\left(-2\log^{+}(a_n)\mathcal{O}(\delta_n^{\frac{N}{(N-1)}}) + a_n\mathcal{O}(\delta_n^{\frac{N}{(N-1)}})\right) \Big/ \left(\left(\log^{N}(a_n)/a_n\right)^{\frac{1}{(N-1)}}\right)\right| \\
\leqslant\ & 2\frac{\delta_n}{N-1}\left(\frac{a_n}{\log a_n}\right)^{N-1} \\
+\ & \left|\left(-2\log^{+}(a_n)\mathcal{O}(\delta_n^{\frac{N}{(N-1)}}) + a_n\mathcal{O}(\delta_n^{\frac{N}{(N-1)}})\right) \Big/ \left(\left(\log^{N}(a_n)/a_n\right)^{\frac{1}{(N-1)}}\right)\right| \\
\leqslant\ & 4\left(\frac{\log e}{e}\right)^{\frac{N-2}{N-1}} \\
+\ & \left|\left(-2\log^{+}(a_n)\mathcal{O}(\delta_n^{\frac{N}{(N-1)}}) + a_n\mathcal{O}(\delta_n^{\frac{N}{(N-1)}})\right) \Big/ \left(\left(\log^{N}(a_n)/a_n\right)^{\frac{1}{(N-1)}}\right)\right| \\
=\ & 4\left(\frac{\log e}{e}\right)^{\frac{N-2}{N-1}} \\
+\ & \left|\left(-2\log^{+}(a_n)\mathcal{O}(\delta_n^{\frac{N}{(N-1)}}) + a_n\mathcal{O}(\delta_n^{\frac{N}{(N-1)}})\right) \Big/ \left(\mathcal{O}(\delta_n^{\frac{N}{(N-1)}})(\delta_n^{-\frac{N}{(N-1)}})\left(\frac{\log^{N}(a_n)}{a_n}\right)^{\frac{1}{(N-1)}}\right)\right| \\
=\ & 4\left(\frac{\log e}{e}\right)^{\frac{N-2}{N-1}} \\
+\ & \left|\left(-2\log^{+}(a_n) + a_n\right) \Big/ \left((\delta_n^{-\frac{N}{(N-1)}})\left(\frac{\log^{N}(a_n)}{a_n}\right)^{\frac{1}{(N-1)}}\right)\right| \\
=\ & 4\left(\frac{\log e}{e}\right)^{\frac{N-2}{N-1}} \\
+\ & \left|w^{P_N}(a_n) \Big/ \left((\delta_n^{-\frac{N}{(N-1)}})\left(\frac{\log^{N}(a_n)}{a_n}\right)^{\frac{1}{(N-1)}}\right)\right| \\
=\ & 4\left(\frac{\log e}{e}\right)^{\frac{N-2}{N-1}} \\
+\ & [2(N-1)]^{P_N}a_n^{-1} \\
<\ & 4\left(\frac{\log e}{e}\right)^{\frac{N-2}{N-1}} \\
+\ & [2(N-1)]^{P_N},
\end{aligned}
$$

daí,

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}\left(\left(\frac{\log^{N}(a_n)}{a_n}\right)^{1/(N-1)}\right) &= (-2\log^{+}(a_n))\left(\frac{\delta_n}{N-1}+\mathcal{O}(\delta_n^{N/(N-1)})\right)\\
&+ a_n\mathcal{O}(\delta_n^{N/(N-1)}),
\end{aligned}$$

o que implica em

$$\begin{aligned}
K_n &= u_n^{P_N}(a_n)\left[1+\frac{1}{N-1}\frac{\delta_n}{(1-\delta_n^{1/(N-1)})^{(N-1)}}\right]-a_n\\
&= (a_n-2\log^{+}(a_n))\left[1+\frac{1}{N-1}\frac{\delta_n}{(1-\delta_n^{1/(N-1)})^{(N-1)}}\right]-a_n\\
&= (a_n-2\log^{+}(a_n))\left(1+\frac{\delta_n}{N-1}+\mathcal{O}(\delta_n^{N/(N-1)})\right)-a_n\\
&= -2\log^{+}(a_n)+(a_n-2\log^{+}(a_n))\left(\frac{\delta_n}{N-1}+\mathcal{O}(\delta_n^{N/(N-1)})\right)\\
&= -2\log^{+}(a_n)+a_n\frac{\delta_n}{N-1}+(-2\log^{+}(a_n))\left(\frac{\delta_n}{N-1}+\mathcal{O}(\delta_n^{N/(N-1)})\right)\\
&+ a_n\mathcal{O}(\delta_n^{N/(N-1)})\\
&= -2\log^{+}(a_n)+a_n\frac{\delta_n}{N-1}+\mathcal{O}\left(\left(\frac{\log^{N}(a_n)}{a_n}\right)^{1/(N-1)}\right)\\
&\leqslant \mathcal{O}\left(\left(\frac{\log^{N}(a_n)}{a_n}\right)^{1/(N-1)}\right).
\end{aligned}$$

Como $a_n\to\infty$, então $\overline{\lim_{n\to\infty}}K_n\leqslant 0$. Portanto, obtemos de (3.3)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{a_n}^{\infty}e^{u_n^{P_N}(t)-t}dt\leqslant e^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{N-1}}.$$

■

Sequências Concentradas Maximizantes

Nós consideraremos a função $F(t)=e^{\alpha_N t^{N/(N-1)}}$, com $\Omega=B_1(0)$. Procuramos encontrar uma sequência de funções concentradas normalizadas $(u_n)_{n=1}^{\infty}\in C[0,\infty]$ explícitas, diferenciáveis por partes, com $y_n(0)=0$ e $\dot{y}_n(t)\geqslant 0$ e tal que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{\infty}e^{y_n^{N/(N-1)}(t)-t}dt\leqslant e^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{N-1}}.$$

Para cada $n\in\mathbb{N}$ seja $\delta_n=\frac{2\log n}{n}$ e seja

$$y_n(t)=\begin{cases}\frac{t}{n^{t/N}}(1-\delta_n)^{(N-1)/N}, & 0\leqslant t\leqslant n;\\ \frac{N-1}{(n(1-\delta_n))^{1/N}}\log\frac{A_n+1}{A_n+e^{-(t-n)/(N-1)}}+(n(1-\delta_n))^{(N-1)/N}, & n\leqslant t.\end{cases}\tag{3.4}$$

Antes de tudo, perceba que $(y_n(t))_{n=1}^{\infty}$ é contínua e diferenciável por partes; além disso, temos

$$\int_0^n |\dot{y}_n(t)|^N dt = (1-\delta_n)^{N-1}.$$

Agora, escolheremos A_n em (3.4) de modo que $\int_0^\infty |\dot{y}_n|^N dt = 1$, isto é,

$$\begin{aligned} \int_n^\infty |\dot{y}_n|^N dt &= 1-(1-\delta_n)^{N-1} = 1 - \sum_{i=0}^{N-1} \binom{N-1}{i} (-\delta_n)^i \\ &= (N-1)\delta_n - \sum_{i=2}^{N-1} \binom{N-1}{i} (-\delta_n)^i \\ &= (N-1)\delta_n - \sigma_N(\delta_n^2), \end{aligned} \tag{3.5}$$

onde

$$\sigma_N(s) = \begin{cases} 0, & N=2; \\ \mathcal{O}(s), & N>2. \end{cases}$$

Mostraremos que uma escolha de A_n é possível, com

$$A_n = \frac{1}{n^2} \frac{1}{e^{1+1/2+\cdots+1/(N-1)}} + \begin{cases} \mathcal{O}(1/n^4), & N=2; \\ \mathcal{O}(\log^2(n)/n^3), & N>2. \end{cases} \tag{3.6}$$

De fato, considerando a mudança de variáveis $s = t-n$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_n^\infty |\dot{y}_n|^N dt &= \int_n^\infty \frac{(N-1)^N}{n(1-\delta_n)} \left| \frac{d}{dt} [\log(A_n+1) - \log(A_n + e^{-(t-n)/(N-1)})] \right|^N dt \\ &= \int_n^\infty \frac{(N-1)^N}{n(1-\delta_n)} \left| \frac{1}{N-1} \frac{e^{-(t-n)/(N-1)}}{A_n + e^{-(t-n)/(N-1)}} \right|^N dt \\ &= \int_0^\infty \frac{(N-1)^N}{n(1-\delta_n)} \left| \frac{1}{N-1} \frac{e^{-s/(N-1)}}{A_n + e^{-s/(N-1)}} \right|^N ds. \end{aligned}$$

Agora, fazendo $r = e^{s/(N-1)}$, encontramos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{(N-1)^N}{n(1-\delta_n)} \left| \frac{1}{N-1} \frac{e^{-s/(N-1)}}{A_n + e^{-s/(N-1)}} \right|^N ds &= \int_1^\infty \frac{(N-1)^N}{n(1-\delta_n)} \left| \frac{1}{N-1} \frac{r^{-1}}{A_n + r^{-1}} \right|^N \frac{(N-1)}{r} dr \\ &= \int_1^\infty \frac{(N-1)}{n(1-\delta_n)} \frac{1}{(A_n r+1)^N} \frac{1}{r} dr. \end{aligned}$$

Por último, tome $\rho = \frac{1}{r}$ para obter

$$\begin{aligned} \frac{(N-1)}{n(1-\delta_n)} \int_1^\infty \frac{(N-1)}{n(1-\delta_n)} \frac{1}{(A_n r+1)^N} \frac{1}{r} dr &= \frac{(N-1)}{n(1-\delta_n)} \int_1^0 \frac{\rho}{(\frac{A_n}{\rho}+1)^N} \left(-\frac{1}{\rho^2}\right) d\rho \\ &= \frac{(N-1)}{n(1-\delta_n)} \int_0^1 \frac{\rho^{N-1}}{(A_n+\rho)^N} d\rho \end{aligned}$$

Agora, consideremos a mudança de variáveis $\tau = (A_n + \rho)^{-1}$, de modo que

$$\begin{aligned}
\frac{(N-1)}{n(1-\delta_n)}\int_0^1 \frac{\rho^{N-1}}{(A_n+\rho)^N}d\rho &= \frac{(N-1)}{n(\delta_n-1)}\int_{\frac{1}{A_n}}^{\frac{1}{A_n+1}} \frac{(\tau^{-1}-A_n)^{N-1}}{\tau^{-N+2}}d\tau \\
&= \frac{(N-1)}{n(1-\delta_n)}\int_{\frac{1}{A_n+1}}^{\frac{1}{A_n}} \frac{(\tau^{-1}-A_n)^{N-1}}{\tau^{-N+2}}d\tau \\
&= \frac{(N-1)}{n(1-\delta_n)}\int_{\frac{1}{A_n+1}}^{\frac{1}{A_n}} \frac{1+(1-A_n\tau)^{N-1}-1}{\tau}d\tau \\
&= \frac{(N-1)}{n(1-\delta_n)}\log\tau\Big|_{\frac{1}{A_n+1}}^{\frac{1}{A_n}} \\
&- \frac{(N-1)}{n(1-\delta_n)}\int_{\frac{1}{A_n+1}}^{\frac{1}{A_n}} \frac{1-(1-A_n\tau)^{N-1}}{\tau}d\tau.
\end{aligned}$$

Por último, tomemos $s = 1 - \tau A_n$, daí

$$\begin{aligned}
\frac{(N-1)}{n(1-\delta_n)}\log\frac{A_n+1}{A_n} &- \frac{(N-1)}{n(1-\delta_n)}\int_{\frac{1}{A_n+1}}^{\frac{1}{A_n}} \frac{1-(1-A_n\tau)^{N-1}}{\tau}d\tau \\
&= \frac{(N-1)}{n(1-\delta_n)}\log\frac{A_n+1}{A_n} - \frac{(N-1)}{n(1-\delta_n)}\int_0^{\frac{1}{1+A_n}} \frac{1-s^{N-1}}{1-s}ds \\
&= \frac{(N-1)}{n(1-\delta_n)}\log\frac{A_n+1}{A_n} - \frac{(N-1)}{n(1-\delta_n)}\sum_{j=1}^{N-1}\left(\frac{1}{1+A_n}\right)^j\frac{1}{j} \\
&= \frac{(N-1)}{n(1-\delta_n)}\left(\log\frac{A_n+1}{A_n} - \sum_{j=1}^{N-1}\left(\frac{1}{1+A_n}\right)^{N-j}\frac{1}{(N-j)}\right).
\end{aligned}$$

Logo, por (3.5), temos

$$\begin{aligned}
&\frac{(N-1)}{n(1-\delta_n)}\left(\log\frac{A_n+1}{A_n} - \sum_{j=1}^{N-1}\frac{1}{(1+A_n)^{N-j}(N-j)}\right) \\
&= (N-1)\delta_n - \sigma_N(\delta_n^2) = (N-1)\frac{2\log n}{n} + \sigma_N\left(\frac{\log^2 n}{n^2}\right),
\end{aligned}$$

donde,

$$\log\frac{A_n+1}{A_n} - \sum_{j=1}^{N-1}\frac{1}{(1+A_n)^{N-j}(N-j)} = \left(2\log n + \sigma_N\left(\frac{\log^2 n}{n}\right)\right)(1-\delta_N),$$

o que implica em

$$\begin{aligned}
\frac{A_n+1}{A_n} &= \exp\left(2\log n + \sigma_N\left(\frac{\log^2 n}{n}\right)(1-\delta_N)\right) \\
&\times \exp\left(\sum_{j=1}^{N-1}\frac{1}{(1+A_n)^{N-j}(N-j)}\right),
\end{aligned}$$

e finalmente, considerando que $e^x = 1 + \mathcal{O}(x)$, quando $x \to 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{A_n+1}{A_n} &= \exp\left(2\log n - \frac{4\log^2 n}{n} + \sigma_N\left(\frac{\log^2 n}{n}\right) + \sigma_N\left(\frac{\log n^2}{n}\right)\frac{-2\log n}{n}\right) \\
&\times \exp\left(\sum_{j=1}^{N-1}\frac{1}{(1+A_n)^{N-j}(N-j)}\right) \\
&= n^2\exp\left(-\frac{\log^2 n^2}{n} + \sigma_N\left(\frac{\log^2 n}{n}\right) + \sigma_N\left(\frac{\log n^2}{n}\right)\frac{-2\log n}{n}\right) \\
&\times \exp\left(\sum_{j=1}^{N-1}\frac{1}{(1+A_n)^{N-j}(N-j)}\right) \\
&= n^2\exp\left(-\frac{\log^2 n^2}{n} + \sigma_N\left(\frac{\log^2 n}{n}\right) + \sigma_N\left(\frac{\log n^2}{n}\right)\frac{-4\log^2 n}{n}\right) \\
&\times \exp\left(\sum_{j=1}^{N-1}\frac{1}{(1+A_n)^{N-j}(N-j)}\right) \\
&= n^2\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{\log^2 n}{n}\right)\right)\times\exp\left(\sum_{j=1}^{N-1}\frac{1}{(1+A_n)^{N-j}(N-j)}\right) \\
&= n^2\left(1+\sigma_N\left(\frac{\log^2 n}{n}\right)\right)\times\exp\left(\sum_{j=1}^{N-1}\frac{1}{(1+A_n)^{N-j}(N-j)}\right).
\end{aligned}$$

Observemos que A_n deve ser tomada não-negativa para satisfazer $y_n(t)$, e segue da última igualdade acima que $A_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{A_n+1}{A_n n^2} &= \left(1+\sigma_N\left(\frac{\log^2 n}{n}\right)\right) \\
&\times \left(\exp\sum_{j=1}^{N-1}\frac{1}{(N-j)} + \exp\left(\sum_{j=1}^{N-1}\frac{1}{(1+A_n)^{N-j}(N-j)}\right) - \exp\sum_{j=1}^{N-1}\frac{1}{(N-j)}\right).
\end{aligned}$$

Note que, pelo Teorema do Valor Médio para números reais, existe

$c_n \in \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{(N-j)}, \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{(1+A_n)^{N-j}(N-j)} \right)$ tal que

$$
\begin{aligned}
& \left| \left(\exp \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{(1+A_n)^{N-j}(N-j)} - \exp \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{(N-j)} \right) \Big/ \left(\frac{\log^2 n}{n} \right) \right| \\
= & \left| e^{c_n} \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{(N-j)} - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{(1+A_n)^{N-j}(N-j)} \right) \Big/ \left(\frac{\log^2 n}{n} \right) \right| \\
\leqslant & \; e^{c_n} \sum_{j=1}^{N-1} \left| \left(\frac{1}{(N-j)} - \frac{1}{(1+A_n)^{N-j}(N-j)} \right) \Big/ \left(\frac{\log^2 n}{n} \right) \right| \\
= & \; e^{c_n} \sum_{j=1}^{N-1} \left| \frac{1-(1+A_n)^{N-j}}{(1+A_n)^{N-j}(N-j)} \Big/ \left(\frac{\log^2 n}{n} \right) \right| \\
= & \; e^{c_n} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{(1+A_n)^{N-j}-1}{(1+A_n)^{N-j}(N-j)} \Big/ \left(\frac{\log^2 n}{n} \right) \\
\leqslant & \; e^{c_n} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{A_n(N-j)(1+A_n)^{N-j-1}}{(1+A_n)^{N-j}(N-j)} \Big/ \left(\frac{\log^2 n}{n} \right) \\
= & \; e^{c_n} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{A_n}{(1+A_n)} \left(\frac{n}{\log^2 n} \right) \\
\leqslant & \; \exp \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{(N-j)} \right) \sum_{j=1}^{N-1} \frac{A_n}{(1+A_n)} \left(\frac{n}{\log^2 n} \right) \\
= & \; \exp \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{(N-j)} \right) \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{n^2} \frac{1}{\left(1+\sigma_N(\log^2 n/n)\right)} \\
\times & \; \exp \left(- \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{(1+A_n)^{N-j}\,(N-j)} \right) \left(\frac{n}{\log^2 n} \right) \\
\leqslant & \; \exp \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{(N-j)} \right) \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{n^2} \frac{1}{\left(1+\sigma_N(\log^2 n/n)\right)} \left(\frac{n}{\log^2 n} \right) \\
= & \; \exp \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{(N-j)} \right) \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{n} \frac{1}{\left(\log^2 n + \sigma_N(\log^4 n/n)\right)} \to 0
\end{aligned}
$$

quando $n \to \infty$.

Assim, $\exp \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{(1+A_n)^{N-j}(N-j)} - \exp \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{(N-j)} = \mathcal{O}\left(\frac{\log^2 n}{n}\right)$, de onde

$$\begin{aligned}
\frac{A_n+1}{A_n n^2} &= \left(1+\sigma_N\left(\frac{\log^2 n}{n}\right)\right) \\
&\times \left(\exp \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{(N-j)} + \exp\left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{(1+A_n)^{N-j}(N-j)}\right) - \exp \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{(N-j)}\right) \\
&= \left(1+\sigma_N\left(\frac{\log^2 n}{n}\right)\right) \\
&\times \left(\exp \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{(N-j)} + \mathcal{O}\left(\frac{\log^2 n}{n}\right)\right) \\
&= \exp \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{(N-j)} + \mathcal{O}\left(\frac{\log^2 n}{n}\right),
\end{aligned}$$

para n grande, com $N \geqslant 3$.

Para o caso em que $N = 2$, veja a referência [10], onde encontramos

$$\frac{A_n+1}{A_n n^2} = e + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Logo,

$$\frac{A_n+1}{A_n n^2} = \exp\left(\sum_{j=2}^{N} 1/(j-1)\right) + \begin{cases} \mathcal{O}(1/n^2), & N=2; \\ \mathcal{O}(\log^2(n)/n), & N \geqslant 3, \end{cases} \tag{3.7}$$

quando n é grande.

Isto mostra a validade de (3.6).

O Limite

Agora vamos calcular o limite de $\int_0^\infty e^{y_n^{N/(N-1)}-t}dt$.

Proposição 3.0.12. *Seja* $\{y_n\}$ *a sequência em* (3.4). *Então*

$$\int_0^\infty e^{y_n^{N/(N-1)}(t)-t}dt \to 1 + e^{1+1/2+\ldots+1/(N-1)} \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Demonstração: (i) Da limitação superior provada acima, temos (desde que $(y_n)_{n=1}^\infty$ seja uma sequência concentrada normalizada) que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_0^\infty e^{y_n^{N/(N-1)}(t)-t}dt \leqslant 1 + e^{1+1/2+\ldots+1/(N-1)}.$$

Agora provaremos a outra desigualdade.

(ii) Começaremos mostrando que existe algum $c > 0$ tal que

$$\int_0^n e^{y_n^{N/(N-1)}(t)-t}dt \geqslant 1 + \frac{\Gamma(1+\frac{N}{N-1})}{n^{1/(N-1)}} - c\frac{\log n}{n^{N/(N-1)}} \quad \text{para } n \text{ grande}, \tag{3.8}$$

onde Γ denota a função gama. De fato, como $e^x \geqslant 1 + x$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^n e^{y_n^{N/(N-1)}(t)-t}dt &= \int_0^n e^{(1-\delta_n)(t^N/n)^{1/(N-1)}-t}dt \\
&\geqslant \int_0^n \left(1 + \frac{(1-\delta_n)t^{N/(N-1)}}{n^{1/(N-1)}}\right)e^{-t}dt \\
&= 1 - e^{-n} + \frac{(1-\delta_n)}{n^{1/(N-1)}}\left(\int_0^\infty t^{N/(N-1)}e^{-t}dt - \int_n^\infty t^{N/(N-1)}e^{-t}dt\right).
\end{aligned}$$

Segue de $e^{t/2} \geqslant t^{N/(N-1)}$ para n suficientemente grande, obtemos

$$\begin{aligned}
1 - e^{-n} &+ \frac{(1-\delta_n)}{n^{1/(N-1)}}\left(\int_0^\infty t^{N/(N-1)}e^{-t}dt - \int_n^\infty t^{N/(N-1)}e^{-t}dt\right) \\
&\geqslant 1 - e^{-n} + \frac{(1-\delta_n)}{n^{1/(N-1)}}\left(\int_0^\infty t^{N/(N-1)}e^{-t}dt - \int_n^\infty e^{-t/2}dt\right) \\
&= 1 - e^{-n} + \frac{(1-\delta_n)}{n^{1/(N-1)}}\Gamma\left(\frac{N}{N-1}+1\right) - 2\frac{(1-\delta_n)}{n^{1/(N-1)}}e^{\frac{-n}{2}} \\
&= 1 + \frac{\Gamma\left(\frac{N}{N-1}+1\right)}{n^{1/(N-1)}} - \frac{\delta_n}{n^{1/(N-1)}}\Gamma\left(\frac{N}{N-1}+1\right) - 2\frac{(1-\delta_n)}{n^{1/(N-1)}}e^{\frac{-n}{2}} - e^{-n}.
\end{aligned}$$

Provaremos agora que

$$\left(-\frac{\delta_n}{n^{1/(N-1)}}\Gamma\left(\frac{N}{N-1}+1\right) - 2\frac{(1-\delta_n)}{n^{1/(N-1)}}e^{\frac{-n}{2}} - e^{-n}\right) \geqslant -c\left(\log n/n^{N/(N-1)}\right),$$

para algum $c > 0$, ou equivalentemente,

$$\left(-\frac{\delta_n}{n^{1/(N-1)}}\Gamma\left(\frac{N}{N-1}+1\right) - 2\frac{(1-\delta_n)}{n^{1/(N-1)}}e^{\frac{-n}{2}} - e^{-n}\right)\Big/ - \delta_n/2n^{1/(N-1)} \leqslant c.$$

Realmente,como para cada $\varepsilon_1 > 0$ e $\varepsilon_2 > 0$ temos $4\frac{e^{-n/2}}{\delta_n} < \varepsilon_1$ e $\frac{2e^{-n}n^{1/(N-1)}}{\delta_n} < \varepsilon_2$ quando n é grande, temos

$$\begin{aligned}
\frac{-\frac{\delta_n}{n^{1/(N-1)}}\Gamma\left(\frac{N}{N-1}+1\right) - 2\frac{(1-\delta_n)}{n^{1/(N-1)}}e^{\frac{-n}{2}} - e^{-n}}{-\delta_n/2n^{1/(N-1)}} &= 2\Gamma(N/(N-1)+1) \\
&+ 4(1/\delta_n - 1)e^{-n/2} + \frac{2e^{-n}n^{1/(N-1)}}{\delta_n} \\
&\leqslant 2\Gamma(N/(N-1)+1) \\
&+ 4(1/\delta_n)e^{-n/2} + \frac{2e^{-n}n^{1/(N-1)}}{\delta_n} \\
&\leqslant 2\Gamma(N/(N-1)+1) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\
&= c.
\end{aligned}$$

Com isso, provamos que

$$\int_0^n e^{y_n^{N/(N-1)}(t)-t}dt \geqslant 1+\frac{\Gamma\left(\frac{N}{N-1}+1\right)}{n^{1/(N-1)}}-c\left(\log n/n^{N/(N-1)}\right)$$

quando $n \to \infty$.

(iii) A seguir, mostraremos que

$$\int_n^\infty e^{y_n^{N/(N-1)}(t)-t}dt \geqslant \exp\left(\sum_{j=2}^{N} 1/(j-1)\right)+\begin{cases} \mathcal{O}(1/n^2), & N=2; \\ \mathcal{O}(\log^2(n)/n), & N \geqslant 3. \end{cases} \tag{3.9}$$

Fazendo $s = t - n$ e considerando

$$z_n(s)=\frac{N-1}{n^{1/N}(1-\delta_n)^{1/N}}\log\frac{A_n+1}{A_n+e^{-s/(N-1)}} \text{ e } d_n = n(1-\delta_n).$$

Então, da relação $(1+x)^\alpha \geqslant 1+\alpha x$ para $x \geqslant -1$ e $\alpha > 1$, $\int_n^\infty e^{y_n^{N/(N-1)}(t)-t}dt$ torna-se

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \exp\left(\left[d_n^{\frac{N-1}{N}}+z_n(s)\right]^{N/(N-1)}-s-n\right)ds \\
= & \int_0^\infty \exp\left(d_n\left[1+z_n(s)d_n^{\frac{1-N}{N}}\right]^{N/(N-1)}-s-n\right)ds \\
\geqslant & \int_0^\infty \exp\left(d_n\left(1+\frac{N}{(N-1)}z_n(s)d_n^{\frac{1-N}{N}}\right)-s-n\right)ds \\
= & \int_0^\infty \exp\left(d_n+\frac{N}{(N-1)}z_n(s)d_n^{\frac{1}{N}}-s-n\right)ds \\
= & \int_0^\infty \exp\left(-2\log n+\frac{N}{(N-1)}z_n(s)(n-2\log n)^{\frac{1}{N}}-s\right)ds \\
= & \int_0^\infty n^{-2}\exp\left(N\log\left(\frac{A_n+1}{A_n+e^{-s/(N-1)}}\right)\right)e^{-s}ds \\
= & \int_0^\infty n^{-2}\left(\frac{A_n+1}{A_n+e^{-s/(N-1)}}\right)^N e^{-s}ds \\
= & \frac{(A_n+1)^N}{n^2}\int_0^\infty \frac{e^{-s}}{(A_n+e^{-s/(N-1)})^N}ds \\
= & \frac{(A_n+1)^N}{n^2}\int_0^\infty \frac{e^{-s}}{(A_n e^{s/(N-1)}+1)^N e^{-sN/(N-1)}}ds \\
= & \frac{(A_n+1)^N}{n^2}\int_0^\infty \frac{e^{s/(N-1)}}{(1+A_n e^{s/(N-1)})^N}ds.
\end{aligned}$$

Note que tomando $r = e^{\frac{s}{N-1}}$, encontramos

$$\frac{(A_n+1)^N}{n^2}\int_0^\infty \frac{e^{s/(N-1)}}{(1+A_n e^{s/(N-1)})^N}ds \quad = \quad \frac{(A_n+1)^N}{n^2}(N-1)\int_1^\infty \frac{dr}{(1+A_n r)^N}.$$

E, fazendo $u = 1 + A_n r$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{(A_n+1)^N}{n^2}(N-1)\int_1^\infty \frac{dr}{(1+A_n r)^N} &= \frac{(A_n+1)^N}{A_n}\frac{1}{n^2}(N-1)\int_{1+A_n}^\infty \frac{du}{u^N} \\ &= \frac{(1+A_n)}{n^2 A_n} \\ &= e^{1+1/2+\ldots+1/(N-1)} \\ &+ \begin{cases} \mathcal{O}(1/n^2), & N=2; \\ \mathcal{O}(\log^2(n)/n), & N \geqslant 3. \end{cases}\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_n^\infty e^{y_n^{N/(N-1)}(t)-t}dt &\geqslant e^{1+1/2+\ldots+1/(N-1)} \\ &+ \begin{cases} \mathcal{O}(1/n^2), & N=2; \\ \mathcal{O}(\log^2(n)/n), & N \geqslant 3. \end{cases}\end{aligned} \tag{3.10}$$

Finalmente,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{y_n^{N/(N-1)}(t)-t}dt \geqslant 1 + e^{1+1/2+\ldots+1/(N-1)}.$$

■

3.1 Não-linearidades Gerais F

Suponha agora que $F(t)$ é uma não-linearidade geral com crescimento crítico satisfazendo as hipóteses de F1 até F3. Isso nos permite escrever

$$G(t) = F(t) + 1 - e^{\alpha_N t^{N/(N-1)}}.$$

Daí,

$$\frac{G(t)}{e^{\alpha_N t^{N/(N-1)}}} = \frac{F(t)}{e^{\alpha_N t^{N/(N-1)}}} - 1 + \frac{1}{e^{\alpha_N t^{N/(N-1)}}},$$

donde concluímos que $G(t)$ tem crescimento sub-crítico.

Portanto, dos Teoremas 3.0.9 e 3.0.11, temos que para toda sequência concentrada normalizada $(u_n)_{n=1}^\infty$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega F(u_n)dx &= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \left(e^{\alpha_N u_n{}^{N/(N-1)}} - 1\right)dx + \lim_{n\to\infty}\int_\Omega G(u_n)dx \\ &\leqslant e^{1+1/2+\ldots+1/(N-1)}|B_1|,\end{aligned}$$

enquanto para a sequência $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ dada em (3.4) acontece

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega F(y_n)dx &= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \left(e^{\alpha_N y_n{}^{N/(N-1)}}-1\right)dx+\lim_{n\to\infty}\int_\Omega G(y_n)dx\\ &= e^{1+1/2+\ldots+1/(N-1)}|B_1|.\end{aligned}$$

Teorema 3.1.1. *Suponha que* F *satisfaz as hipóteses de* (F1) *a* (F4) *e a hipótese adicional*

(F5) $F(t)\geqslant e^{\alpha_N|t|^{N/(N-1)}}-1-\lambda|t|^{N/(N-1)}$.

Então, para $\lambda<\alpha_N$, *existe*

$$C_{N,\delta}=\sup_{\|u\|_N=1}\int_{B_1(0)}F(u)dx>e^{1+1/2+\ldots+1/(N-1)}|B_1(0)|$$

e $C_{N,\delta}$ *é atingido.*

Demonstração: Mostraremos que sob a condição (F4), obtemos

$$C_{N,\delta}=\sup_{\int_0^\infty|\dot{u}|^N=1}\int_0^\infty F(\alpha_N^{(1-N)/N}u)e^{-t}dt>e^{1+1/2+\ldots+1/(N-1)}.$$

De fato, pelas estimativas (3.8) e (3.10) temos para n suficientemente grande

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{y_n^{N/(N-1)}(t)-t} &= \int_0^n e^{y_n^{N/(N-1)}(t)-t}+\int_n^\infty e^{y_n^{N/(N-1)}(t)-t}\\ &\geqslant 1+\frac{\Gamma\left(\frac{N}{N-1}+1\right)}{n^{1/(N-1)}}-c\left(\log n/n^{N/(N-1)}\right)\\ &+ e^{1+1/2+\ldots+1/(N-1)}\\ &+ \begin{cases}\mathcal{O}(1/n^2), & N=2;\\ \mathcal{O}(\log^2(n)/n), & N\geqslant 3.\end{cases}\end{aligned}$$

Além disso, podemos estimar o termo

$$\begin{aligned}\lambda\int_0^\infty|y_n|^{N/(N-1)}e^{-t}dt &= \lambda\int_0^n\left|\frac{t}{n^{t/N}}(1-\delta_n)^{(N-1)/N}\right|^{N/(N-1)}e^{-t}dt\\ &+ \lambda\int_n^\infty|y_n|^{N/(N-1)}e^{-t}dt\\ &\leqslant \frac{\lambda}{n^{1/(N-1)}}\int_0^n|t|^{N/(N-1)}e^{-t}dt+\lambda\int_n^\infty|y_n|^{N/(N-1)}e^{-t}dt\\ &\leqslant \frac{\lambda}{n^{1/(N-1)}}\int_0^\infty|t|^{N/(N-1)}e^{-t}dt+\lambda\int_n^\infty|y_n|^{N/(N-1)}e^{-t}dt\\ &= \lambda\frac{\Gamma\left(1+\frac{N}{(N-1)}\right)}{n^{1/(N-1)}}+\lambda\int_n^\infty|y_n|^{N/(N-1)}e^{-t}dt.\end{aligned}$$

Agora tentaremos limitar o termo $\lambda\int_n^\infty|y_n|^{N/(N-1)}e^{-t}dt$ de maneira conveniente.

Afirmação 3.1.2. *Seja* c *uma constante real qualquer. Então, para* n *suficientemente grande, obtemos*

$$\lambda\int_n^\infty \left|\frac{N-1}{(n(1-\delta_n))^{1/N}}\log\frac{A_n+1}{A_n+e^{-(t-n)/(N-1)}}+(n(1-\delta_n))^{(N-1)/N}\right|^{N/(N-1)} e^{-t}dt \leqslant c\int_n^\infty ne^{-t}dt.$$

Demonstração: De fato, considere n grande o suficiente para $n(1-\delta_n)\geqslant 2-2\log 2$, $A_n>0$, e também

$$\begin{aligned}
& \lambda\int_n^\infty \left|\frac{N-1}{(n(1-\delta_n))^{1/N}}\log\frac{A_n+1}{A_n+e^{-(t-n)/(N-1)}}+(n(1-\delta_n))^{(N-1)/N}\right|^{N/(N-1)} \\
\times\ & e^{-t}dt \\
\leqslant\ & \lambda\int_n^\infty \left(\frac{N-1}{(n(1-\delta_n))^{1/N}}\log\frac{A_n+1}{A_n+e^{-(t-n)/(N-1)}}+(n(1-\delta_n))^{(N-1)/N}\right)^{N/(N-1)} \\
\times\ & e^{-t}dt \\
\leqslant\ & \lambda\int_n^\infty \left(\frac{N-1}{(2-2\log 2)^{1/N}}\log\frac{A_n+1}{A_n+e^{-(t-n)/(N-1)}}+n^{(N-1)/N}\right)^{N/(N-1)} e^{-t}dt \\
\leqslant\ & \lambda\int_n^\infty \left(\frac{N-1}{(2-2\log 2)^{1/N}}\log\frac{A_n+1}{A_n}+n^{(N-1)/N}\right)^{N/(N-1)} e^{-t}dt \\
=\ & \lambda\int_n^\infty \left(\frac{N-1}{(2-2\log 2)^{1/N}}\log\left(\left(\frac{A_n+1}{n^2A_n}\right)n^2\right)+n^{(N-1)/N}\right)^{N/(N-1)} e^{-t}dt \\
=\ & \lambda\int_n^\infty \left(\frac{N-1}{(2-2\log 2)^{1/N}}\left(\log\left(\frac{A_n+1}{n^2A_n}\right)+2\log n\right)+n^{(N-1)/N}\right)^{N/(N-1)} e^{-t}dt.
\end{aligned}$$

De (3.7), para n grande, existe $\hat{c}>0$ tal que $1<\frac{A_n+1}{n^2A_n}<\hat{c}e^{1+1/2+\ldots+1/(N-1)}$, daí

$$\begin{aligned}
& \lambda\int_n^\infty \left(\frac{N-1}{(2-2\log 2)^{1/N}}\left(\log\left(\frac{A_n+1}{n^2A_n}\right)+2\log n\right)+n^{(N-1)/N}\right)^{N/(N-1)} e^{-t}dt \\
\leqslant\ & \lambda\int_n^\infty \left(\frac{N-1}{(2-2\log 2)^{1/N}}\left(\log\hat{c}e^{1+1/2+\ldots+1/(N-1)}+2\log n\right)+n^{(N-1)/N}\right)^{N/(N-1)} \\
\times\ & e^{-t}dt.
\end{aligned}$$

Como

$$\frac{N-1}{(2-2\log 2)^{1/N}}\log\hat{c}e^{1+1/2+\ldots+1/(N-1)}\leqslant n^{(N-1)/N},$$

e também,

$$\frac{N-1}{(2-2\log 2)^{1/N}}2\log n\leqslant n^{(N-1)/N}$$

para n grande, obtemos

$$\begin{aligned}
& \lambda\int_n^\infty \left(\frac{N-1}{(2-2\log 2)^{1/N}}\left(\log \hat{c}e^{1+1/2+\ldots+1/(N-1)}+2\log n\right)+n^{(N-1)/N}\right)^{N/(N-1)} \\
\times\ & e^{-t}dt \\
\leqslant\ & \lambda\int_n^\infty \left(3n^{(N-1)/N}\right)^{N/(N-1)} e^{-t}dt \\
=\ & c\int_n^\infty ne^{-t}dt.
\end{aligned}$$

■

Portanto,

$$\lambda\frac{\Gamma\left(1+\frac{N}{(N-1)}\right)}{n^{1/(N-1)}}+\lambda\int_n^\infty |y_n|^{N/(N-1)}e^{-t}dt \leqslant \lambda\frac{\Gamma\left(1+\frac{N}{(N-1)}\right)}{n^{1/(N-1)}}+c\int_n^\infty ne^{-t}dt.$$

Logo, obtemos para $\lambda < 1$ e n suficientemente grande,

$$\begin{aligned}
C_{N,\delta} &= \sup_{\int_0^\infty |\dot{u}|^N=1}\int_0^\infty F(\alpha_N^{(1-N)/N}u)e^{-t}dt \\
&\geqslant \int_0^\infty F(\alpha_N^{(1-N)/N}y_n)e^{-t}dt \\
&\geqslant e^{1+1/2+\ldots+1/(N-1)}+(1-\lambda)\frac{\Gamma\left(1+\frac{N}{(N-1)}\right)}{n^{1/(N-1)}} \\
&- (\hat{c}+c)\frac{\Gamma\left(\frac{N}{N-1}+1\right)}{n^{1/(N-1)}}+\begin{cases}\mathcal{O}(1/n^2), & N=2;\\ \mathcal{O}(\log^2(n)/n), & N\geqslant 3.\end{cases} \\
&> e^{1+1/2+\ldots+1/(N-1)}.
\end{aligned}$$

Como do Teorema 3.0.11, para toda sequência concentrada normalizada $(u_n)_{n=1}^\infty$ em $W_0^{1,N}(B_1)$ temos

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty F(u_n(t))e^{-t}dt \leqslant e^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{(N-1)}},$$

então não pode existir uma sequência concentrada normalizada que seja maximizante para $C_{N,\delta}$. Também temos que, para $p > 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|B_1|}\int_\Omega \exp\left(\alpha_N p|z_n(x)|^{N/(N-1)}\right)dx &\geqslant \frac{1}{|B_1|}\int_\Omega \exp\left(\alpha_N|z_n(x)|^{N/(N-1)}\right)dx \\
&\geqslant \int_0^\infty \exp\left(\alpha_N^{1/N}|w_n(t)|^{N/(N-1)}-t\right)dt \\
&\geqslant \int_0^\infty \exp\left(\alpha_N^{1/N}w_n^{N/(N-1)}(t)-t\right)dt \\
&\geqslant \int_0^\infty F\left(\frac{1}{\alpha_N}\left(\alpha_N^{1/N}w_n(t)\right)\right)e^{-t}dt \\
&\geqslant \int_0^\infty F\left(\frac{1}{\alpha_N^{(N-1)/N}}w_n(t)\right)e^{-t}dt.
\end{aligned}$$

Logo, ganhamos do Teorema 1.3.9 a existência de extremal, isto é, que $C_{N,\delta}$ é atingido. ■

Capítulo 4

Aplicação a Problemas de Existência de soluções para EDPs

As relações (2.1) e a dada pela Desigualdade de Trudinger-Moser são importantes no que diz respeito à resolubilidade de equações diferenciais relacionadas a crescimento crítico, como segue, respectivamente:

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{2^*-2}u + g(u) & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta u = h(u)e^{4\pi u^2} = e^{4\pi u^2 + \log(h(u))} & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.2}$$

onde g e h são funções com crescimento subcrítico:

$$\frac{g(s)}{s^{2^*-1}} \to 0 \text{ quando } s \to \infty \text{ e } \frac{\log(h(s))}{s^2} \to 0 \text{ quando } s \to \infty,$$

respectivamente.

Soluções fracas de (4.1) são dadas pelos pontos críticos do funcional

$$I(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{1}{2^*}|u|^{2^*} - G(u)dx$$

onde $G(s) = \int_0^s g(r)dr$. Como não há existência de extremais no caso crítico de Sobolev, como dito no início do Capítulo 2, então podemos encontrar alguns níveis de não-compacidade que a condição de Palais-Smale falha para o funcional $I(u)$. No famoso artigo [5] de Brezis e Nirenberg, superou-se tais obstáculos utilizando sequências de funções especiais obtidas de sequências maximizantes para (2.1), que eram funções concentradas explícitas convergindo fracamente para zero.

Foi mostrado em [3] por Adimurthi e em [11] que métodos similares podem ser empregados para provar resultados de existência para (4.2). De fato, considerando o funcional associado à equação (4.2)

$$T(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(u)dx \tag{4.3}$$

onde $F(s) = \int_0^s h(r)e^{4\pi r^2}dr$, novamente, encontramos níveis de não-compacidade, entretanto, diferentemente do caso Sobolev, aqui no caso $p = N$ há existência de extremal para $\alpha = \alpha_N$, em particular, $\alpha = 4\pi$. Para o caso Trudinger-Moser, não existem sequências concentradas maximizantes convergindo para extremais. Portanto, encontramos dificuldades na obtenção de resultados de existência ótimos. A sequência utilizada em [3] por Adimurthi e em [11] é a denominada sequência de Moser

$$z_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} (\log n)^{1/2} & \text{se} \quad 0 \leqslant |x| \leqslant \frac{1}{n} \\ \frac{\log \frac{1}{|x|}}{(\log n)^{1/2}} & \text{se} \quad \frac{1}{n} \leqslant |x| \leqslant 1 \\ 0 & \text{se} \qquad |x| > 1, \end{cases} \tag{4.4}$$

que foi proposta por J. Moser em [28] para provar que ocorre igualdade na Desigualdade de Trudinger-Moser com respeito à constante 4π no expoente. Esta sequência satisfaz

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (e^{4\pi u_n^2 - 1})dx = 2\pi, \tag{4.5}$$

enquanto a sequência concentrada explícita $\{y_n\}$ com $\|y_n\| = 1$ mencionada no Teorema 3.0.11 satisfaz

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (e^{4\pi u_n^2 - 1})dx = e\pi. \tag{4.6}$$

Seguiremos as mesmas ideias da demonstração de existência de soluções para a equação (4.2) utilizadas em [11], ou seja, dependendo do valor do limite (4.5) acima. Melhoraremos o resultado obtido usando o limite (4.6). Formalizando o raciocínio, devemos provar o seguinte:

Teorema 4.0.3. *Assuma que* $h \in C(\mathbb{R})$ *e seja* $f(s) = h(s)e^{4\pi s^2}$. *Assuma que*

(H1) $f(0) = 0$,

(H2) $\exists s_0 > 0$ *e* $\exists M > 0$ *tal que*

$$0 < F(s) = \int_0^s f(r)dr \leqslant M|f(s)| \quad \forall |s| \geqslant s_0, \quad \text{e}$$

(H3) $0 < F(s) \leqslant \frac{1}{2}f(s)s$, $\forall s \in \mathbb{R} - \{0\}$, $\forall x \in \Omega$.

Então a equação (4.2) *tem uma solução desde que*

$$\lim_{s\to\infty} h(s)s = \beta > \frac{1}{e\pi}. \tag{4.7}$$

É interessante relatar que em [11] foi provado que (4.2) tem uma solução desde que

$$\lim_{s\to\infty} h(s)s = \beta > \frac{1}{2\pi}.$$

Também, indicamos a referência [9] para ver resultados de não-existência de soluções para (4.2).

Demonstração do Teorema 4.0.3

Nos restringiremos ao caso radial, isto é, $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$. Considere o funcional

$$I(u) = \int_{B_1(0)} \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(u)\right] dx,$$

onde $F(s)$ está como no Teorema 4.0.3.

Sabe-se de [11] que este funcional satisfaz a condição de Palais-Smale $(PS)_c$ para $c < \frac{1}{2}$. Considerando o que foi realizado na demonstração do Teorema 3.0.9, podemos assumir que u_n é radialmente simétrica, e então podemos reescrever o funcional em coordenadas radiais da forma:

$$I(u) = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}|u_r|^2 - F(u)\right] 2\pi r dr.$$

Note que ao cancelarmos o termo 2π no funcional acima, teremos $\int_0^1 \left[\frac{1}{2}|u_r|^2 - F(u)\right] r dr$ que satisfaz a condição de Palais-Smale $(PS)_c$ para $c < \frac{1}{4\pi}$. Agora, faremos mudança de variáveis para transformar o intervalo $(0,1)$ no intervalo $(0,+\infty)$:

Seja

$$r = e^{-t/2}, \;\; dr = -\frac{1}{2}e^{-t/2}dt, \;\; u_t = u_r\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{2}u_r^{-t/2},$$

de onde obtemos

$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{2}|2u_t e^{t/2}|^2 - F(u)\right] \frac{1}{2}e^{-t}dt.$$

Multiplicando este funcional por 2, ganhamos o funcional

$$L(u) = \int_0^{+\infty} \left[2|u_t|^2 - F(u)e^{-t}\right] dt, \tag{4.8}$$

o qual satisfaz a condição de Palais-Smale $(PS)_c$ para $c < \frac{1}{2\pi}$.

Para concluir nossas modificações convenientes, substituímos $y = \sqrt{4\pi}u$ e multiplicamos $L(u)$ por π para conseguir

$$T(y) = \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{2}|y_t|^2 - \pi F\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}y\right) e^{-t}\right] dt, \tag{4.9}$$

que satisfaz (PS)c para $c < \frac{1}{2}$.

Depois de obtermos que o funcional $T(u)$ satisfaz $(PS)_c$ para $c < \frac{1}{2}$, agora vamos mostrar que ele possui um nível crítico c com $c < \frac{1}{2}$ desde que h fornecido nas hipóteses satisfaça $\lim_{s\to\infty} h(s)s = \beta > \dfrac{1}{e\pi}$ em (4.7).

Teorema 4.0.4. *Suponha que* $f(s) = h(s)e^{4\pi s^2}$ *satisfaz as hipóteses* $H1 - H3$*, e assuma também que* $\lim_{s\to\infty} h(s)s = \beta > \dfrac{1}{e\pi}$*. Então* $T(u)$ *tem nível crítico abaixo de* $\frac{1}{2}$.

Demonstração: Como em [11] usaremos o Teorema do Passo da Montanha 1.4.2. É suficiente provar que existe $w \in H_0^1$, $\|w\| = 1$ de modo que $\max_{t\geqslant 0} T(tw) < \dfrac{1}{2}$. Em [11] utilizou-se a sequência de Moser para a construir a demonstração, com a condição $\lim_{s\to\infty} h(s)s = \beta > \dfrac{1}{2\pi}$. Aqui, usaremos $\{y_n\}$.

Suponhamos, por contradição, que para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\max_{s\geqslant 0} T(sy_n) = \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{2}s^2|\dot{y}_n|^2 - \pi F\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}sy_n\right) e^{-t}\right] dt \geqslant \frac{1}{2},$$

com esse máximo acontecendo em $s = s_n$.

Assim,

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} s_n^2|\dot{y}_n|^2 dt \geqslant \frac{1}{2},$$

e portanto,

$$s_n^2 \int_0^{+\infty} |\dot{y}_n|^2 dt \geqslant 1.$$

Observando que

$$\int_0^{+\infty} |\dot{y}_n|^2 dt = (1-\delta_n)^{2-1} + (2-1)\delta_n = 1,$$

concluímos que

$$s_n^2 \geqslant 1.$$

Desde que $\frac{d}{ds}T(sy_n)\big|_{s=s_n} = 0$, então temos para n suficientemente grande, usando a condição (4.7),

$$\dot{T}(sy_n)\big|_{s=s_n} = s\int_0^{+\infty} |\dot{y}_n|^2 dt - \pi\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} y_n \dot{F}\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}sy_n\right)\big|_{s=s_n} e^{-t}dt = 0$$

Daí, de H2:

$$s_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^{+\infty} y_n f\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}s_n y_n\right) e^{-t}dt,$$

o que implica em

$$s_n^2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^{+\infty} s_n y_n f\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}s_n y_n\right) e^{-t}dt,$$

ou seja,

$$s_n^2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^{+\infty} s_n y_n h\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}s_n y_n\right) e^{4\pi\frac{s_n^2 y_n^2}{4\pi}} e^{-t}dt,$$

de modo equivalente,

$$s_n^2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^{+\infty} s_n y_n h\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}s_n y_n\right) e^{\left(s_n^2 y_n^2 - t\right)}dt.$$

Assim, concluímos que

$$s_n^2 = \pi\int_0^{+\infty} h\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}s_n y_n\right)\frac{s_n}{2\sqrt{\pi}}y_n e^{\left(s_n^2 y_n^2 - t\right)}dt. \tag{4.10}$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geqslant n_0$, então para $t \geqslant n$, em (4.10), obtemos

$$\begin{aligned} s_n^2 &\geqslant (\beta-\varepsilon)\pi\int_n^{+\infty} e^{\left(s_n^2 y_n^2 - t\right)}dt \\ &\geqslant (\beta-\varepsilon)\pi\int_n^{+\infty} e^{s_n^2(n-2\log n)-t}dt. \end{aligned}$$

Agora mostraremos que $s_n^2 \to 1$ quando $n \to \infty$, agindo por contradição. Para isto, suponhamos que existe uma subsequência $(s_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ de $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que para algum $\delta > 0$ tem-se $s_{n_j}^2 \geqslant 1+\delta$. Daí,

$$\begin{aligned} s_{n_j} &\geqslant (\beta-\varepsilon)\pi\int_{n_j}^{+\infty} e^{s_{n_j}^2(n_j-2\log n_j)-t}dt \\ &\geqslant (\beta-\varepsilon)\pi\int_{n_j}^{+\infty} e^{(1+\delta)(n_j-2\log n_j)-t}dt \\ &= (\beta-\varepsilon)\pi e^{n_j\delta-(1+\delta)2\log n_j} \\ &\geqslant (\beta-\varepsilon)\pi e^{\sqrt{n_j}(\sqrt{n_j}\delta-\log n_j)} \\ &\geqslant (\beta-\varepsilon)\pi e^{\sqrt{n_j}} \to \infty \end{aligned}$$

quando $j \to \infty$.

Logo encontraríamos, utilizando H3, que $\max\limits_{s \geqslant 0} T(sy_n)\big|_{s=s_n} \to -\infty$ quando $n \to +\infty$, o que contradiz $\max\limits_{s\geqslant 0} T(sy_n) \geqslant \frac{1}{2}$. Portanto, temos

$$s_n^2 \to 1.$$

Agora, realizaremos uma estimativa mais precisa: Fixe $A > 0$. Construa $[0, b_n) = \{t \in [0,\infty) : s_n y_n(t) < A\}$. Como $y_n(t) = \frac{t}{\sqrt{n}}\sqrt{1-\delta_n} \to \infty$, $t \geqslant 0$ fixado, concluímos que $s_n y_n(t) \to 0$ (nas mesmas condições), e daí,

$$b_n \to \infty.$$

Portanto, temos para $b_n \geqslant n$ e $t \geqslant b_n$ que

$$\begin{aligned}
s_n^2 &= \pi\int_0^{+\infty} f\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}s_n y_n\right)\frac{s_n}{2\sqrt{\pi}}y_n e^{-t}dt\\
&= \pi\int_0^{b_n} f\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}s_n y_n\right)\frac{s_n}{2\sqrt{\pi}}y_n e^{-t}dt\\
&+ \pi\int_{b_n}^{+\infty} f\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}s_n y_n\right)\frac{s_n}{2\sqrt{\pi}}y_n e^{-t}dt\\
&\geqslant \pi\int_0^{b_n} f\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}s_n y_n\right)\frac{s_n}{2\sqrt{\pi}}y_n e^{-t}dt\\
&+ (\beta-\varepsilon)\pi\int_{b_n}^{+\infty} e^{s_n^2 y_n^2 - t}dt\\
&= \pi\int_0^{b_n} f\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}s_n y_n\right)\frac{s_n}{2\sqrt{\pi}}y_n e^{-t}dt\\
&+ \left((\beta-\varepsilon)\pi\int_0^{+\infty} e^{s_n^2 y_n^2 - t}dt - (\beta-\varepsilon)\pi\int_0^{b_n} e^{s_n^2 y_n^2 - t}dt\right)
\end{aligned}\tag{4.11}$$

Perceba que a última integral em (4.11) vai para 1, pois,

$$1 - e^{-b_n} = \int_0^{b_n} e^{-t}dt \leqslant \int_0^{b_n} e^{s_n^2 u_n^2 - t}dt \leqslant \int_0^{b_n} e^{s_n^2 y_n^2 - t}dt$$

com y_n convergindo para a função extremal.

Agora note que $\forall n \in \mathbb{N}$, dado $\varepsilon > 0$, escolhendo b_ε suficientemente próximo de b_n, obtemos

$$\int_{b_\varepsilon}^{b_n} e^{s_n^2 y_n^2 - t}dt \leqslant e^{s_n^2 A^2}\int_{b_\varepsilon}^{b_n} e^{-t}dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

E também, lembrando que para $t \in [0, b_\varepsilon]$, $y_n(t) = \frac{t}{\sqrt{n}}\sqrt{1-\delta_n} \leqslant \frac{b_\varepsilon}{\sqrt{n}}\sqrt{1-\delta_n} = \tau_n$, com $\tau_n \to 0$ uniformemente em $[0, b_\varepsilon]$, podemos escolher N_0 suficientemente grande, de maneira que

$$\int_0^{b_\varepsilon} e^{s_n^2 y_n^2 - t}dt \leqslant e^{s_n^2\tau_n^2}\int_0^{b_\varepsilon} e^{-t}dt \leqslant 1 + \frac{\varepsilon}{2} \text{ para } n \geqslant N_0.$$

Para a segunda integral em (4.11), veja que

$$
\begin{aligned}
&\left|\pi\int_0^{b_n} f\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}s_n y_n\right)\frac{s_n}{2\sqrt{\pi}}y_n e^{-t}dt\right| \\
&\qquad\leqslant \int_0^{b_n}\left|f\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}s_n y_n\right)\frac{s_n}{2\sqrt{\pi}}y_n e^{-t}\right|dt \\
&\qquad= \int_0^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}s_n y_n\right)\frac{s_n}{2\sqrt{\pi}}y_n e^{-t}\chi_{[0,b_n]}\right|dt.
\end{aligned}
$$

Observando que dado $\varepsilon > 0$, existe N_ε grande, de modo que se $n \geqslant N_\varepsilon$, então $\left|\frac{s_n}{2\sqrt{\pi}}y_n\right| < \varepsilon$, e da continuidade de f, em particular, numa vizinhança de zero, encontramos

$$\left|f\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}s_n y_n\right)\frac{s_n}{2\sqrt{\pi}}y_n e^{-t}\chi_{[0,b_n]}\right| \leqslant \varepsilon e^{-t} < e^{-t}.$$

Como

$$f\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}s_n y_n(t)\right)\frac{s_n}{2\sqrt{\pi}}y_n(t)e^{-t}\chi_{[0,b_n]} \to 0 \text{ q.t.p. em } [0,b_n),$$

temos pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\int_0^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}s_n y_n\right)\frac{s_n}{2\sqrt{\pi}}y_n e^{-t}\chi_{[0,b_n]} - 0\right|dt \to 0,$$

quando $n \to \infty$.

Portanto, temos no limite, usando o Teorema 3.0.11 para $N = 2$, que

$$
\begin{aligned}
1 = \lim_{n\to\infty} s_n^2 &\geqslant (\beta-\varepsilon)\pi\left[\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} e^{s_n^2 y_n^2 - t}dt - 1\right] \\
&\geqslant (\beta-\varepsilon)\pi\left[\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} e^{y_n^2 - t}dt - 1\right] \\
&= (\beta-\varepsilon)\pi e.
\end{aligned}
$$

Daí,

$$\frac{1}{\pi e} \geqslant \beta - \varepsilon,$$

o que contradiz a hipótese de $\beta > \frac{1}{\pi e}$ para $\varepsilon > 0$ escolhido suficientemente pequeno. ∎

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, D. R., *A sharp inequality of J. Moser for high order derivatives*, Annals of Math. **128**, 385-398 (1988).

[2] ADAMS, R. A., *Sobolev spaces*, Academic press, New-York, Second edition, 2003.

[3] ADIRMUTHI, *Existence of positive solutions of the semilinear Dirichlet problem with critical growth for the n-Laplacian.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **17** (1990), no. 3, 393-413.

[4] BREZIS, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2011.

[5] BREZIS, H.; NIREMBERG, L., *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents.* Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983), no. 4, 437-477.

[6] BHATTACHARAYYA, PULIN, K., *Distributions: Generalized Functions with Applications in Sobolev Spaces.* Indian Institute of Tecnology Delhi, New Delhi, India, 2012.

[7] B. RUF, *A sharp Trudinger-Moser type inequality for unbounded domains in* $\mathbb{R}^2$, J. Funct. Anal. 219 (2005) 340-367.

[8] CAZENAVE, T., An introduction to semilinear elliptic equations, UFRJ: Rio de Janeiro, 2008.

[9] DE FIGUEIREDO, D. G.; B. RUF, *Existence and non-existence of radial solutions for elliptic equations with critical exponent in* $\mathbb{R}^2$, Comm. Pure Appl. Math. **48** (1995), no. 6, 639–655.

[10] DE FIGUEIREDO, D. G.; DO Ó, J. M.; RUF, B., *On an inequality by N. Trudinger and J. Moser and related elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math. **55** (2002), 135–152.

[11] DE FIGUEIREDO, D. G.; MIYAGAKI, O. H.; RUF, B., *Elliptic equations in* R^2 *with nonlinearities in the critical growth range.* Calc. Var. Partial Differential Equations **3**, 139–153 (1995)

[12] D. M. CAO, *Nontrivial solution of semilinear elliptic equation with critical exponent in* $\mathbb{R}^2$, Comm. Partial Differential Equations, 17 (1992), 407–435.

[13] E. H. LIEB, M. LOSS, *Analysis*, 2ª edição, Math. Association of America, 2001.

[14] EVANS, L. C., *Partial Differential Equations*, Second Edition (Graduate Studies in Mathematics), volume 19 of Graduate Series in Mathematics. American Mathematical Society, Province, Rhode Island, 2ª edição, 2010. ISBN 0821849743.

[15] FLUCHER, M., *Extremal functions for the Trudinger-Moser inequality in 2 dimensions.* Comment. Math. Helv. **67** (1992), no. 3, 471-497.

[16] GIAQUINTA, MARIANO; HILDEBRANT, STEFAN, *Calculus of Variations I*, Springer,(1996).

[17] GIOVANI, LEONI, *A first course in Sobolev spaces*, Graduate studies in mathematics, vol. 105. American Mathematical Society, Providence, R. I, 2009.

[18] GUOZHEN LU AND YUNYAN YANG, *Sharp constant and extremal function for the improved Moser-Trudinger inequality involving* L^p *norm in two dimension*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **25** (2009), no. 3, 963-979, DOI 10.3934/dcds.2009.25.25.963. MR2533985 (2010m:35011)

[19] H. L. ROYDEN,*Real Analysis*, 4th edition, Prentice Hall, New york, 2010.

[20] ISNARD, CARLOS , *Introdução à medida e integração*, 3.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

[21] J. M. DO Ó, N-*Laplacian equations in* $\boldsymbol{R}^N$ *with critical growth*, Abstr. Appl. Anal. 2 (1997) 301-315.

[22] Kesavan, S., *Symmetrization and Aplications*, Series in Analysis, Vol. 3, World Scientific, 2006.

[23] L. Carleson, S. Y. A. Chang, *On the existence of an extremal function for an inequality of J. Moser*, Bull. Sci. Math. **110** (1986), 113–127.

[24] Lin, K. C., *Extremal Functions for Moser's inequalities*, Trans. AMS **348**, 2663-2671 (1996).

[25] Lions, P.-L., *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case, Part 1* Rev. Mat. Iberoamericana **1**, (1985), 145–201

[26] Marshall, D. E., *A new proof of a sharp inequality concerning the Dirichlet integral*, ark. math. 27 (1989), 131-137.

[27] Michael Struwe, *Critical points of embeddings of* $H_0^{1,N}$ *em espaços de Orlicz* (English, with French summary), Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **5** (1988), no 5, 425-464. MR970849 (90c:35084).

[28] Moser, J., *A sharp form of an inequality by N. Trudinger*, Indiana Univ. Math. J. **20** (1970/71), 1077–1092.

[29] Pohožaev, S. I., *The Sobolev embedding in the case* $pl = n$, Proceedings of the Technical Scientific Conference on Advances of Scientific Research 1964–1965. Mathematics Section, Moscov. Energet. Inst. (1965), 158–170.

[30] R. Černý, A. Cianchi, S. Hencl, *Concentration-compactness principles for Moser-Trudinger inequalities: new results and proofs*, Ann. Mat. Pura Appl. **2** (2013), 225–243.

[31] Ruf, B., Tarsi, C., *On Trudinger-Moser type inequalities involving Sobolev-Lorentz spaces*. Ann. Mat. **188**, 369-397 (2009).

[32] Trudinger, N-S, *On imbeddings into Orlicz spaces and some applications*, J. Math. Mech. **17** (1967), 473–483.

[33] Y. Li, B. Ruf, *A sharp Trudinger-Moser type inequality for unbounded domains in* $\mathbb{R}^N$, Indiana Univ. Math. Res. Not. 13 (2010) 2394-2426.

[34] Yudovich, V. I., *Some estimates connected with integral operators and with solutions of elliptic equations*, Dok. Akad. Nauk SSSR **138** (1961), 804-808, English translation in Soviet Math. Doklady **2** 746-749 (1961).

[35] Yu Xiang Li,*Remarks on the extremal functions for the Moser-Inequality*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) **22** (2006), no. 2, 545-550, DOI 10.1007/s10114-0005-0568-7. MR2214376 (2006m:35101)