



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

Condição suficiente para a Trivialidade Bilipschitz

Emerson dos Santos Pinheiro de Matos

Teresina - 2017

Emerson dos Santos Pinheiro de Matos

Dissertação de Mestrado:

Condição suficiente para a Trivialidade Bilipschitz

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Carlos Humberto Soares Júnior

Teresina - 2017

FICHA CATALOGRÁFICA
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial do CCN

M434c Matos, Emerson dos Santos Pinheiro de.
Condição Suficiente para a Trivialidade Bilipschitz /
Emerson dos Santos Pinheiro de Matos – Teresina: 2016.
50f

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí,
Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em
Matemática, 2016.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Humberto Soares Júnior.

1. Geometria e Topologia. 2. Singularidades. I. Título

CDD 516

*À minha família, especialmente minha mãe
Alina e meu irmão Anderson. Por todo o
carinho e inspiração, sem vocês nada seria.*

Agradecimentos

Agradeço ao meu pai Antonio Pinheiro pelo exemplo de vida e por toda a inspiração que me concede, quando penso em alguém altruísta, lembro-me de você.

À minha mãe por todo o carinho, dedicação e amor concedidos, que se manteve ao meu lado nos melhores e piores momentos da minha existência, nada que possa fazer ou dizer poderá te recompensar.

Ao meu irmão Anderson pelos conselhos preciosos, modelo de pai e profissional com grande senso de justiça e ética, sem dúvida você é uma das pessoas que mais admiro.

Aos meus colegas de jornada pelo espaço-tempo dividido, pelas diversas experiências e angústias compartilhadas, especialmente à Edymilais, Fagner, Ramon e Lúcio, considero-os hoje como membros da minha família.

Ao meu orientador Prof. Dr. Carlos Humberto pela paciência, compreensão e amizade. Sem seu suporte e o dos amigos e familiares supracitados, não sei se teria permanecido no corpo discente do mestrado, foram pequenas ações que tiveram grande impacto na minha formação profissional e pessoal, além disto, sua disponibilidade e contribuições foram valiosas para a construção e aprimoramento deste trabalho, meus sinceros agradecimentos.

A todos os meus amigos, parentes e professores não citados, mas sempre lembrados. Cada um teve um papel de destaque nesta etapa da minha vida. Obrigado por tudo.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho estudamos a Trivialidade Bilipschitz de famílias de germes de funções analíticas, bem como a influência da Filtração de Newton para que ocorra a Trivialidade Bilipschitz. Usamos a existência de soluções de campos de vetores controlados para obter estimativas do valor da filtração de Newton de aplicações polinômiais $\theta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ para que as deformações $f_t = f + t \cdot \theta$ sejam trivialmente bilipschitz onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ é um germe de aplicação polinomial satisfazendo uma condição específica com relação à algum Poliedro de Newton.

Palavras-Chave: Singularidades, Poliedro de Newton, Funções Bi-Lipschitz.

Abstract

In this work, it was studied the Bilipschitz Triviality of germ families regarding analytical functions as well as Newton Filtration influence on such trivialities. It was used the solution of controlled vectors field to estimate values of Newton Filtration of polynomials applications $\theta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ in order to have deformations $f_t = f + t \cdot \theta$ being trivial bilipschitz where $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ is a germ of polynomial application satisfying a specific condition with regard to some Newton polyhedral.

Introdução

Inicialmente introduzimos conceitos preliminares de anéis de polinômios e módulos com o intuito de tornar o texto mais acessível e didático para uma primeira leitura por alunos de graduação. Este capítulo pode ser omitido, se necessário, partindo se assim do capítulo que trata de uma introdução à Teoria de Singularidades onde definimos os conceitos de germes de aplicações suaves, ação de grupos, a \mathcal{R} -equivalência de germes em $\varepsilon_{n,p}^0$ e caracterizamos os polinômios quase-homogêneos.

Além disso, definimos o conceito de Poliedro de Newton de um germe analítico

$$f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}, f = \sum_{n \in \mathbb{N}^k} a_n x^n \text{ com } x^n = x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k} \text{ e } a_n \in \mathbb{R}.$$

Em seguida definimos a função controle $\rho(x)$ associada a f , com o objetivo de averiguar as implicações que a Filtração de Newton têm sobre alguns germes de função analítica.

Finalmente introduzimos o conceito da bilipschitz- \mathcal{R} -Equivalência e da trivialidade bilipschitz, mostrando por fim uma condição suficiente para que esta última ocorra em germes polinomiais. Na artigo de Fernandes e Ruas [16] os autores encontram uma condição, a saber

$$a + 2b + 3c \geq 17,$$

para que no exemplo de Briançon-Speder [17] a família

$$f_t(x, y, z) = f(x, y, z) + t \cdot x^a y^b z^c$$

seja trivialmente bilipschitz. Através do resultado principal desta dissertação mostraremos casos que não satisfazem a condição acima, mas que a família ainda seja trivialmente bilipschitz. Citaremos algumas situações que não satisfazem o teorema principal deste trabalho, mas que satisfazem a condição $a + 2b + 3c \geq 17$ aumentando a extensão de famílias trivialmente bilipschitz conhecidas.

Deixamos em Apêndice a demonstração da existência do campo de vetores utilizado no resultado principal, bem como outros resultados que consideramos importantes mas que podem ser suprimidos, com o intuito de dar fluidez ao texto.

Sumário

1	Conceitos Preliminares	10
1.1	Anéis de Polinômios	10
1.2	Módulos	14
2	Introdução a Teoria das Singularidades	16
2.1	Germes de Aplicações	16
2.2	Jatos de Germes	17
2.3	Polinômios Quase-Homogêneos	19
3	Poliedro e Filtração de Newton	22
3.1	Poliedro de Newton	22
3.2	Filtração de Newton	25
4	Trivialidades Bilipschitz	34
4.1	A Trivialidade Bilipschitz	34
4.2	Teorema Principal e Exemplos	39
5	Apêndice	46

Capítulo 1

Conceitos Preliminares

O objetivo desta seção é familiarizar o leitor com os elementos de álgebra comutativa, requisitos necessários para o entendimento dos capítulos seguintes.

1.1 Anéis de Polinômios

Definição 1.1.1 *Seja $(A, +, \cdot)$ um anel comutativo. Um polinômio numa variável sobre A é uma sequência $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$, onde $a_i \in A$ para todo índice e onde $a_i \neq 0$ somente para um número finito de índices.*

Seja $\mathcal{A} = \{ \text{polinômios em uma variável sobre } A \}$. No conjunto \mathcal{A} , definimos as operações:

$$\begin{aligned} \oplus : \mathcal{A} \times \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A} \\ ((a_0, a_1, \dots, a_n, \dots), (b_0, b_1, \dots, b_n, \dots)) &\mapsto (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n, \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \odot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A} \\ ((a_0, a_1, \dots, a_n, \dots), (b_0, b_1, \dots, b_n, \dots)) &\mapsto (c_0, c_1, \dots, c_n, \dots) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{cases} c_0 = a_0 b_0 \\ c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 \\ \vdots \\ c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 \\ \vdots \end{cases}$$

A verificação de que $(\mathcal{A}, \oplus, \odot)$ é um anel é relativamente simples e por isso será omitida. Temos que o elemento neutro aditivo é o elemento $(0, 0, \dots, 0)$, o elemento neutro multiplicativo é o elemento $(1, 0, \dots, 0)$ e o inverso de $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ com respeito à \oplus é o elemento $(-a_0, -a_1, \dots, -a_n, \dots)$.

A multiplicação de \mathcal{A} é comutativa, pois a multiplicação de A é comutativa e usando as definições de \oplus e \odot temos que:

$$(0, \dots, 0, \underbrace{a_n}_{\text{lugar } n+1}, 0, \dots) = (a_n, 0, 0, \dots) \odot (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{lugar } n+1}, 0, \dots)$$

e que

$$(0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{lugar } n+1}, 0, \dots) = (1, 0, 0, \dots)^n$$

portanto

$$(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) = (a_0, 0, 0, \dots) \oplus [(a_1, 0, 0, \dots) \odot (0, 1, 0, 0, \dots)] \oplus \\ \oplus [(a_2, 0, 0, \dots) \odot (0, 1, 0, 0, \dots)^2] \oplus \dots \oplus [(a_n, 0, 0, \dots) \odot (0, 1, 0, 0, \dots)^n].$$

Convencionando x para o elemento $(0, 1, 0, \dots)$, a_i para o elemento $(a_i, 0, 0, \dots)$, além de $+$ e \cdot para \oplus e \odot respectivamente, quando não houver confusão em qual anel está se realizando a operação. Podemos escrever, desta forma, o elemento

$$(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

onde $a_ix^i = a_i \odot x^i$. Desta forma o anel

$$\mathcal{A} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_ix^i \mid n \in \mathbb{N} \text{ e } a_i \in A \right\}.$$

é o anel de polinômios numa variável sobre A o qual será denotado por $A[x]$.

Definição 1.1.2 *Seja A um anel e seja $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in A[x]$ com $a_n \neq 0$. O inteiro n se chama grau de $f(x)$. O coeficiente a_n se chama coeficiente líder de $f(x)$. Quando o coeficiente líder for igual a 1, o polinômio $f(x)$ é dito mônico.*

Por indução, podemos definir o anel de polinômios em k variáveis sobre o anel A do seguinte modo:

$$A[x_1, x_2, \dots, x_n] = \{A[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]\} [x_n]$$

Da comutatividade de A , temos que a ordem das variáveis também é comutativa, por exemplo $A[x_1, x_2] = A[x_2, x_1]$.

Definição 1.1.3 *Um ideal \mathcal{P} em A é dito primo se $\mathcal{P} \neq A$ e se $xy \in \mathcal{P} \Rightarrow x \in \mathcal{P}$ ou $y \in \mathcal{P}$.*

Definição 1.1.4 *Um ideal \mathcal{M} é dito maximal se $\mathcal{M} \neq A$ e se não existe ideal \mathcal{I} tal que $\mathcal{M} \subset \mathcal{I} \subset A$. Então $\mathcal{M} = \mathcal{I}$ ou $\mathcal{I} = A$*

Equivalentemente temos:

$$\mathcal{P} \text{ é primo} \Leftrightarrow A/\mathcal{P} \text{ é um domínio de integridade; } \mathcal{M} \text{ é maximal} \Leftrightarrow A/\mathcal{M} \text{ é um corpo.}$$

Lema 1.1.5 (Lema de Zorn)(ver Dugundji [3], pag. 31-32): *Seja Σ um conjunto parcialmente ordenado tal que toda cadeia em Σ possui uma cota superior. Então Σ possui um elemento maximal.*

Teorema 1.1.6 *Todo anel A não-nulo, comutativo e com a unidade 1, têm pelo menos um ideal maximal.*

Demonstração: Seja Ω o conjunto de todos os ideais diferentes de A , ou seja,

$$\Omega = \{\mathcal{I} \subset A \mid \mathcal{I} \neq A\}.$$

Note que $0 \in \Omega$, então $\Omega \neq \emptyset$ e Ω com a relação de inclusão é parcialmente ordenado. Seja $\{\mathcal{I}_\alpha\}_{\alpha \in L}$ uma cadeia em Ω e $\Sigma = \bigcup_{\alpha \in L} \mathcal{I}_\alpha$. Afiramos que Σ é ideal de A , pois dados $x, y \in \Sigma$, temos que existem $\alpha, \beta \in L$ tais que $x \in \mathcal{I}_\alpha$ e $y \in \mathcal{I}_\beta$. Desta forma temos $x + y \in \mathcal{I}_\alpha \cup \mathcal{I}_\beta \subset \Sigma$. Além disso dados $a \in A$ e $x \in \Sigma$ existe $\alpha \in L$, tal que $x \in \mathcal{I}_\alpha$, portanto $ax \in \mathcal{I}_\alpha$ e consequentemente $ax \in \Sigma$. ■

Atente que $\mathcal{I}_\alpha \subset \Sigma$, $\forall \alpha \in L$ e que $\Sigma \subset \Omega$, pois $\Sigma \neq A$ já que $1 \notin \Sigma$, visto que isto implicaria $1 \in \mathcal{I}_\alpha$ para algum $\alpha \in L$. Desta forma temos que Σ é cota superior de Ω . Logo, pelo Lema de Zorn existe $\mathcal{M} \in \Omega$ elemento maximal. Como \mathcal{M} é ideal e elemento maximal pela relação de inclusão, temos que \mathcal{M} é um ideal maximal.

Corolário 1.1.7 *Seja A anel comutativo com a unidade. Se $\mathcal{I} \neq A$ é um ideal de A , então existe um ideal maximal de A que contém \mathcal{I} , além disso, todo elemento não invertível está contido em um ideal maximal.*

Demonstração: Consideremos o anel A/\mathcal{I} . Temos pelo teorema 1.1.1 que A/\mathcal{I} têm pelo menos um ideal maximal. Seja \mathcal{M} tal ideal, seus elementos são da forma $\bar{x} = x + \mathcal{I}$, note que \mathcal{M} pode ser visto como ideal de A ao se considerar para cada classe \bar{x} como a soma do elemento x com todos os possíveis elementos de \mathcal{I} e se este não for maximal em A , então temos que existe um \mathcal{N} ideal de A que contém \mathcal{M} . Mas isto significa que $\mathcal{N} + \mathcal{I} = \{z + i \mid z \in \mathcal{N} \text{ e } i \in \mathcal{I}\}$ é ideal de A/\mathcal{I} contendo \mathcal{M} , contradizendo assim sua maximalidade em A/\mathcal{I} . Logo este é maximal em A e contém \mathcal{I} . A outra parte do corolário é feita aplicando a primeira parte ao ideal gerado pelo elemento não invertível. ■

Definição 1.1.8 *Um anel que possui apenas um ideal maximal é chamado de anel local.*

Definição 1.1.9 *Definimos o radical de Jacobson de um anel A , como sendo a interseção de todos os ideais maximais de A , isto é,*

$$Jac(A) := \bigcap_{\mathcal{M} \in \mathcal{A}} \mathcal{M}$$

onde \mathcal{M} é um ideal maximal de A .

Teorema 1.1.10 *Seja A um anel comutativo com a unidade 1. Então se $x \in A$ não for invertível existe um ideal maximal \mathcal{M} de A que contém x .*

Demonstração: Seja Ω o conjunto de todos os ideais próprios de A que contém x . Temos que Ω com a relação de inclusão é parcialmente ordenado. Seja $\Sigma = \bigcup \mathcal{I}_\alpha$ onde $\mathcal{I}_\alpha \in \Omega$ para cada α , temos Σ um ideal de A e cota superior de Ω , já que $\forall \alpha, x \in \mathcal{I}_\alpha \Rightarrow x \in \Sigma$. Logo pelo Lema de Zorn, Ω têm um elemento maximal \mathcal{M} , que é um ideal maximal de A e contém x , concluindo a demonstração. ■

Teorema 1.1.11 *Seja A um anel comutativo com a unidade 1. Então $x \in Jac(A) \Leftrightarrow 1 - xy$ é invertível em A para todo $y \in A$.*

Demonstração: Suponha que $x \in \text{Jac}(A)$ e que $1 - xy$ não é invertível. Pelo Corolário 1.1.7 temos que $1 - xy$ está contido em um ideal maximal \mathcal{M} . Mas $x \in \text{Jac}(A) \subseteq \mathcal{M}$. Portanto $xy \in \mathcal{M}$, daí $1 = (1 - xy) + xy \in \mathcal{M}$ o que é um absurdo. Reciprocamente, suponha que $(1 - xy)$ é invertível $\forall y \in A$ e que $x \notin \text{Jac}(A)$, então $x \notin \mathcal{M}$ para algum \mathcal{M} maximal. Portanto $\bar{x} \in A/\mathcal{M}$ é diferente de $\bar{0}$. Como \mathcal{M} é maximal A/\mathcal{M} é corpo, daí existe $\bar{y} \in A/\mathcal{M}$ tal que $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{1}$, o que implica $1 - xy = \bar{0}$ e daí temos que $1 - xy$ não é invertível. ■

Proposição 1.1.12 *Seja A um anel e \mathcal{M} um ideal próprio de A tal que todo $x \in A - \mathcal{M}$ é invertível em A . Então A é um anel local e \mathcal{M} é um ideal maximal.*

Demonstração: Seja I ideal de A , então I é composto de elementos não invertíveis e daí temos $I \subseteq \mathcal{M}$. Logo \mathcal{M} é o único ideal maximal de A . ■

Proposição 1.1.13 *Seja A um anel e \mathcal{M} um ideal maximal de A , tal que todo elemento de $1 + \mathcal{M} = \{1 + x; x \in \mathcal{M}\}$ é invertível em A . Então A é um anel local*

Demonstração: Seja $x \in A - \mathcal{M}$, uma vez que \mathcal{M} é maximal o ideal gerado por x e por \mathcal{M} é igual a A , isto é, $(x) + \mathcal{M} = A$. Daí existe $y \in A$ e $t \in \mathcal{M}$, tais que $xy + t = 1$, portanto $xy = 1 - t$ e daí temos $xy \in 1 + \mathcal{M}$ e pela hipótese xy é invertível implicando que o próprio x é invertível. Pela proposição anterior temos que A é um anel local. ■

Definição 1.1.14 *Sejam $(A, +, \cdot)$ e (B, \oplus, \odot) dois anéis. Uma aplicação $f : A \rightarrow B$ é um homomorfismo se ela satisfaz as condições seguintes:*

$$i) f(x + y) = f(x) \oplus f(y), \text{ para todo } x, y \in A.$$

$$ii) f(x \cdot y) = f(x) \odot f(y), \text{ para todo } x, y \in A.$$

$$iii) f(1_A) = 1_B.$$

Exemplos:

1. $Id : (A, +, \cdot) \rightarrow (A, +, \cdot)$, definido por $Id(a) = a, \forall a \in A$ é um homomorfismo chamado de *identidade*.
2. Se \mathcal{I} é um ideal de $(A, +, \cdot)$ então $\phi : (A, +, \cdot) \rightarrow (A/\mathcal{I}, \oplus_{\mathcal{I}}, \odot_{\mathcal{I}})$, definido por $\phi(a) = a + \mathcal{I}, \forall a \in A$ é um homomorfismo chamado de *projeção canônica*.
3. Se $f : (A, +, \cdot) \rightarrow (B, \oplus, \odot)$ e $g : (B, \oplus, \odot) \rightarrow (C, \oplus_o, \odot_o)$ são homomorfismos, então $g \circ f : (A, +, \cdot) \rightarrow (C, \oplus_o, \odot_o)$ é um homomorfismo.

Seja $f : (A, +, \cdot) \rightarrow (B, \oplus, \odot)$ um homomorfismo de anéis. Temos a seguir algumas das propriedades dos homomorfismos.

- 1) Seja $\ker f := \{a \in A \mid f(a) = 0\} \subseteq A$. Então $\ker f$ é um ideal de A chamado de *núcleo* de f ;
- 2) Seja $\text{Im} f := \{f(a) \in B \mid a \in A\} \subseteq B$. Então $(\text{Im} f, \oplus, \odot)$ é um anel chamado de *imagem*

de f ;

$$3) f(0_A) = 0_B;$$

$$4) f(-a) = -f(a), \forall a \in A;$$

$$5) f \text{ é injetiva se, e somente se, } \ker f = \{0\};$$

Se f for um homomorfismo bijetivo, dizemos que f é um *isomorfismo*.

Teorema 1.1.15 (Teorema dos isomorfismos)(ver Garcia [11], pag 29):

Seja $f : (A, +, \cdot) \rightarrow (B, \oplus, \odot)$ um homomorfismo de anéis então a aplicação abaixo é um isomorfismo de anéis.

$$\begin{aligned} \bar{f} : (A/\ker f, \oplus, \odot) &\rightarrow (Im f, \oplus, \odot) \\ \bar{a} &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

1.2 Módulos

Definição 1.2.1 Seja \mathcal{A} um anel comutativo. Um \mathcal{A} -módulo é par (M, μ) onde M é um grupo abeliano aditivo e μ é uma aplicação de $\mathcal{A} \times M$ em M tal que, se nós escrevemos ax para $\mu(x + y)$ com $a \in \mathcal{A}$ e $x \in M$, as seguintes condições são satisfeitas:

$$a(x + y) = ax + ay,$$

$$(a + b)x = ax + bx,$$

$$(ab)x = a(bx)$$

$$1x = x$$

para $a, b \in \mathcal{A}$ e $x, y \in M$.

Exemplos:

1. Um ideal \mathcal{I} de \mathcal{A} é um \mathcal{A} -módulo.
2. Seja \mathcal{K} um corpo. Um \mathcal{K} -espaço vetorial é um exemplo \mathcal{K} -módulo.
3. Seja $\mathcal{A} = \mathcal{K}[x]$ onde \mathcal{K} é um corpo. \mathcal{A} assim descrito é um \mathcal{K} -módulo.

Definição 1.2.2 Sejam \mathcal{M}, \mathcal{N} \mathcal{A} -módulos. Uma função $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ é um homomorfismo de \mathcal{A} -módulos (ou \mathcal{A} -homomorfismo) se

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$f(ax) = a \cdot f(x)$$

para todo $a \in \mathcal{A}$ e todo $x, y \in \mathcal{M}$.

Definição 1.2.3 Um submódulo \mathcal{N} de um \mathcal{A} -módulo \mathcal{M} é um subgrupo fechado com a multiplicação de elementos de \mathcal{A} , ou seja,

$$a \cdot n \in \mathcal{N}, \forall a \in \mathcal{A} \text{ e } \forall n \in \mathcal{N}$$

Definição 1.2.4 Dados os elementos m_1, m_2, \dots, m_n do \mathcal{A} -módulo \mathcal{M} . Dizemos que

$$\mathcal{N} = (m_1, m_2, \dots, m_n) = \{a_1 m_1 + \dots + a_n m_n; a_i \in \mathcal{A}\}$$

para todo i é o submódulo gerado por m_1, m_2, \dots, m_n .

Observação: Dado um \mathcal{A} -módulo \mathcal{M} , pode-se, analogamente ao caso de anéis, definir núcleo e imagem por \mathcal{A} -homomorfismo e estes são submódulos de \mathcal{M} .

Definição 1.2.5 O grupo abeliano \mathcal{M}/\mathcal{N} com \mathcal{N} submódulo de \mathcal{M} com a estrutura definida por $a(x + \mathcal{N}) = ax + \mathcal{N}$ é um módulo, denominado quociente de \mathcal{M} por \mathcal{N} . Com isto definimos o conúcleo de um \mathcal{A} -homomorfismo $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ por:

$$\text{Coker}(f) = \mathcal{N}/\text{Im}(f)$$

que é um módulo quociente de \mathcal{N} .

Se \mathcal{N}, \mathcal{P} são submódulos de \mathcal{M} , definimos $(\mathcal{N} : \mathcal{P})$ como sendo o conjunto de todos os elementos $a \in \mathcal{A}$ tais que $a\mathcal{P} \subseteq \mathcal{N}$ é um ideal de \mathcal{A} . Em particular $(0 : \mathcal{M})$ que é conjunto de todos os elementos $a \in \mathcal{A}$ tais que $a\mathcal{M} \subseteq 0$ é chamado de ideal anulador de \mathcal{M} , denotado por: $\text{Ann}(\mathcal{M})$.

Proposição 1.2.6 (ver Atiah [4], pag 21) Seja M um \mathcal{A} -módulo, seja α um ideal de \mathcal{A} , e seja ϕ um endomorfismo de \mathcal{A} -módulos, tal que $\phi(M) \subseteq \alpha M$. Então ϕ satisfaz uma equação da forma

$$\phi^n + a_1 \phi^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

onde os termos a_i pertencem a α .

Corolário 1.2.7 Seja M um \mathcal{A} -módulo finitamente gerado e seja α um ideal de \mathcal{A} tal que $\alpha M = M$. Então existe $x \equiv 1 \pmod{\alpha}$ tal que $xM = 0$.

Prova: Basta tomar ϕ como a identidade, $x = 1 + a_1 + \dots + a_n = 0$.

Lema 1.2.8 (Lema de Nakayama): Seja M um \mathcal{A} -módulo finitamente gerado e seja α um ideal de \mathcal{A} contendo o $\text{Jac}(\mathcal{A})$. Então $\alpha M = M$ implica $M = 0$.

Demonstração: Temos que M é finitamente gerado, α é um ideal de \mathcal{A} , tal que $\alpha M = M$. Então existe $x \in \mathcal{A}$; $x \equiv 1 \pmod{\alpha}$ e $xM = 0$. Por outro lado $\alpha \subseteq \text{Jac}(\mathcal{A})$. Daí $1 - x \in \alpha \subseteq \text{Jac}(\mathcal{A})$, decorrendo que $1 - (1 - x)y$ é inversível $\forall y \in \mathcal{A}$. Particularmente, tomando $y = 1$, temos:

$$1 - (1 - x) = x \text{ é inversível.}$$

Logo $x^{-1}xM = M = 0$.

■

Capítulo 2

Introdução a Teoria das Singularidades

2.1 Germes de Aplicações

Sejam X um espaço topológico, $x \in X$ um ponto, Y um conjunto qualquer e

$$M = \{(U, f); f : U \rightarrow Y, \text{ é uma função, } U \text{ vizinhança de } x \text{ em } X\}.$$

Em M definimos a relação:

$$(U, f) \approx (V, g) \Leftrightarrow \text{ existe } W \text{ vizinhança de } x \text{ em } U \cap V \text{ tal que } f|_W \equiv g|_W$$

Observação: A relação, acima definida, é uma relação de equivalência e a classe de equivalência da relação é chamada de germe da aplicação de X em Y no ponto $x \in X$. Usualmente denotaremos a classe de equivalência (U, f) simplesmente por f .

Exemplo 1: Considere a função $f(x) = \frac{x^4-4}{x^2-2}$. Veremos qual a classe de f no ponto $x = 2012$.

Primeiramente note que $x^4 - 4 = (x^2 - 2)(x^2 + 2)$ e que $\mathbb{R} - \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ é aberto. Daí $(\mathbb{R} - \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}, f) \approx (U, x^2 + 2)$, para todo $U \subset \mathbb{R}$ aberto contendo $x = 2012$ e que não contenha os pontos $x = -\sqrt{2}$ e $x = \sqrt{2}$.

Denotaremos por $\varepsilon_{n,p}^x$ ao conjunto de todos os germes de aplicações suaves $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ no ponto $x \in U$, isto é, $\varepsilon_{n,p}^x = \{(f, x); f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p, f \text{ suave em } x \in U\}$.

Notações:

1. Em caso de x ser a origem de \mathbb{R}^n usamos a notação $\varepsilon_{n,p}$.
2. Em caso de $p = 1$ usamos a notação ε_n^x .

Observações:

1. Pode-se mostrar que ε_n^a é um anel comutativo com unidade e além disso os anéis ε_n^a e ε_n^b são isomorfos.
2. Podemos tomar $\varepsilon_{n,p}^a = \{f = (f_1, f_2, \dots, f_p) | f_i \in \varepsilon_n^a\} = \varepsilon_n^a \times \dots \times \varepsilon_n^a$, daí $\varepsilon_{n,p}^a$ é um ε_n^a -módulo livre.

Desta forma todo germe $f \in \varepsilon_{n,p}$ com $f(0) = 0$ induz um homomorfismo $f^* : \varepsilon_p \rightarrow \varepsilon_n$ pela composição $f^*(g) = g \circ f$.

Definição 2.1.1 Definimos \mathfrak{m}_n como o conjunto de todos os germes $f \in \varepsilon_n$ tais que $f(0) = 0$.

Proposição 2.1.2 \mathfrak{m}_n é o único ideal maximal de ε_n ;

Demonstração: É fácil ver que \mathfrak{m}_n é ideal de ε_n . Mostraremos que \mathfrak{m}_n é maximal. De fato, seja $I \subset \varepsilon_n$ ideal tal que \mathfrak{m}_n está contido propriamente em I . Logo, existe $f \in I$ tal que $f \notin \mathfrak{m}_n$. Portanto $f(0) \neq 0$ e daí a função $f(x) \neq 0$ para alguma vizinhança V de 0. Logo, $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ está bem definida em V e além disso o produto dos germes $f(x) \cdot g(x) = 1$ o que implica que f é invertível e conseqüentemente $I = \varepsilon_n$. Note que todo $f \in \varepsilon_n - \mathfrak{m}_n$ é invertível, então pela Proposição 1.1.12 temos que \mathfrak{m}_n é o único ideal maximal de ε_n . ■

Proposição 2.1.3 $\mathfrak{m}_n^k = \mathfrak{m}_n \times \dots \times \mathfrak{m}_n$ é gerado pelos monômios de grau k nas variáveis x_1, x_2, \dots, x_n .

Além disso, $\mathfrak{m}_n^k = \left\{ f \in \varepsilon_n; \frac{\partial^{(a)}(f)}{\partial x^a}(0) = 0, 0 \leq a < k \right\}$

Demonstração: Para o caso de $k = 1$ devemos provar que $\mathfrak{m}_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. Obviamente $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \subset \mathfrak{m}_n$, pois se $g \in \langle x_1, \dots, x_n \rangle \Rightarrow g(x) = x_1 h_1(x) + \dots + x_n h_n(x) \Rightarrow g(0) = 0 \Rightarrow g \in \mathfrak{m}_n$. Reciprocamente seja $f \in \mathfrak{m}_n$ um germe de função e considere uma vizinhança V da origem, defina para cada $x \in V$ a aplicação $\phi_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\phi_x(t) = f(tx)$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo $\int_0^1 \phi'_x(t) dt = \phi_x(1) - \phi_x(0)$.

Note que $\phi_x(0) = 0$ e $\phi_x(1) = f(x)$, daí

$$f(x) = \int_0^1 \frac{d[f(tx)]}{dt} dt = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{df(tx)}{dx_i} \right) dt = \sum_{i=1}^n x_i \left[\int_0^1 \frac{df}{dx_i}(tx) dt \right] = x_1 h_1(x) + \dots + x_n h_n(x)$$

onde $h_i(x) = \int_0^1 \frac{df}{dx_i}(tx) dt$ o que implica que $f \in \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. Por indução temos que se o resultado for válido para \mathfrak{m}_n^k , então

$$\mathfrak{m}_n^{k+1} = \mathfrak{m}_n^k \times \mathfrak{m}_n = \langle x^k \rangle \times \langle x \rangle$$

Garantindo a primeira parte do resultado.

A inclusão $\mathfrak{m}_n^k \subset \left\{ f \in \varepsilon_n; \frac{\partial^{(a)}(f)}{\partial x^a}(0) = 0, 0 \leq a < k \right\}$ torna-se trivial pelo que foi demonstrado. Se $f \in \left\{ f \in \varepsilon_n; \frac{\partial^{(a)}(f)}{\partial x^a}(0) = 0, 0 \leq a < k \right\}$ o polinômio de Taylor de f em torno da origem até a ordem k é nula, daí este polinômio é gerado pelos monômios de grau k , o que implica que $f \in \mathfrak{m}_n^k$ concluindo assim a demonstração.

2.2 Jatos de Germes

Definição 2.2.1 Dado um germe $f \in \varepsilon_n$, definimos o k -jato de f na origem como sendo o polinômio de Taylor de f , na origem, até a ordem k .

Notação: $j^k f(0) = f(0) + df(0) \cdot x + \frac{1}{2} d^2 f(0) \cdot x^2 + \dots + \frac{1}{k!} d^k f(0) \cdot x^k$.

Definição 2.2.2 Definimos o espaço dos k -jatos por:

$$J^k(n) = \{ j^k f(0); f \in \varepsilon_n, f(0) = 0 \}$$

Proposição 2.2.3 $J^k(n)$ é um espaço vetorial de dimensão finita. Além disso $\frac{\varepsilon_n}{\mathfrak{m}_n^{k+1}} \simeq J^k(n)$.

Demonstração: Mostraremos que $J^k(n)$ é subespaço de \mathfrak{m}_n . Sejam $j^k f(0), j^k g(0) \in J^k(n)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\begin{aligned} \alpha j^k f(0) + j^k g(0) &= \alpha f(0) + \alpha f'(0)x + \cdots + \alpha \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + g(0) + g'(0)x + \cdots + \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k = \\ &= (\alpha f(0) + g(0)) + (\alpha f'(0) + g'(0))x + \cdots + (\alpha \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \frac{g^{(k)}(0)}{k!})x^k \in J^k(n) \end{aligned}$$

pois é o k-jato da função $\alpha f + g$ e além disso $f(0) = g(0) = 0$, concluindo que $J^k(n)$ é subespaço vetorial de \mathfrak{m}_n . Como a dimensão de \mathfrak{m}_n é finita temos assim provado a primeira parte da proposição.

Para provar a segunda parte definimos a função $\phi_k : \varepsilon_n \rightarrow J^k(n)$ com $\phi_k(f) = j^k f(0)$. A aplicação ϕ_k está bem definida por conta da unicidade da expansão em série de Taylor de f em torno da origem. Mostrando que ϕ_k é homomorfismo, sejam $f, g \in \varepsilon_n$ temos que:

$$\begin{aligned} \phi_k(f + g) &= j^k(f + g)(0) = (f(0) + g(0)) + (f'(0) + g'(0))x + \cdots + \frac{(f^{(k)}(0) + g^{(k)}(0))}{k!} x^k = \\ &= j^k(f)(0) + j^k(g)(0) = \phi_k(f) + \phi_k(g). \end{aligned}$$

Analogamente se verifica para αf , com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f \in \varepsilon_n$, concluindo que ϕ_k é homomorfismo. Afirmamos também que $\ker(\phi_k) = \mathfrak{m}_n^{k+1}$, de fato, seja $f \in \ker(\phi_k)$ então $j^k(f)(0) = 0$ o que implica $\frac{d^{(a)}f(0)}{dx^a} = 0$ para todo $a \in \{0, 1, \dots, k\} \Rightarrow f \in \mathfrak{m}_n^{k+1}$. Reciprocamente seja $f \in \mathfrak{m}_n^{k+1}$ então $\frac{d^{(a)}f(0)}{dx^a} = 0$ para todo $a \in \{0, 1, \dots, k\}$ o que implica $f \in \ker(\phi_k)$.

É fácil ver que ϕ_k é sobrejetora, logo pelo Teorema dos Isomorfismos temos $\frac{\varepsilon_n}{\mathfrak{m}_n^{k+1}} \simeq J^k(n)$. ■

Definição 2.2.4 Sejam G um grupo e C um conjunto qualquer. Uma **ação** do grupo G no conjunto C é uma função

$$\varphi : G \times C \rightarrow C$$

tal que:

1. $\varphi(e, c) = c$ para todo $c \in C$
2. $\varphi(g_1, \varphi(g_2, c)) = \varphi(g_1 \cdot g_2, c)$

Uma ação define uma relação de equivalência em C da seguinte forma:

$$x, y \in C, x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G \text{ tal que } \varphi(g, x) = y$$

As classes de equivalências são chamadas de **órbitas** e denotadas por

$$G \cdot c = \{\varphi(g, c) \in C; g \in G\} = \{d \in C; d \sim c\} = \{g \cdot c; g \in G\}$$

Exemplo 2: Sejam G um grupo e C um conjunto não-vazio qualquer. A função $\varphi : G \times C \rightarrow C$ dada por: $\varphi(g, x) = x$ para todo $x \in C$ e $g \in G$ é uma ação de G sobre C chamada de ação trivial.

Exemplo 3: Sejam (H, \cdot) e $(G, *)$ dois grupos, $\sigma : H \rightarrow G$ um homomorfismo de grupos. A função $\varphi : H \times G \rightarrow G$ definida por $\varphi(a, x) = \sigma(a) * x$ é uma ação de H sobre G .

Solução: Dados $a, b \in H$ e $x \in G$ temos que $\varphi(a, \varphi(b, x)) = \sigma(a) * \varphi(b) * x = \sigma(a \cdot b) * x = \varphi(a \cdot b, x)$. Portanto φ é uma ação de H em G .

Definição 2.2.5 Denotamos por R_n o conjunto de todos os germes de aplicações $h : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^n, 0$ tal que h é difeomorfismo local.

Notação: $R_n = \{h : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^n, 0; h \text{ difeomorfismo local}\}$.

Para as definições a seguir consideraremos

$$\varepsilon_{n,p}^0 = \mathbf{m}_n \cdot \varepsilon_{n,p} = \varepsilon_{n,p}^0 = \{f : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p, 0; f \text{ é } C^\infty\}.$$

Definição 2.2.6 A \mathcal{R} -Equivalência está relacionada à ação $r : R_n \times \varepsilon_{n,p}^0 \rightarrow \varepsilon_{n,p}^0$ dada por $r(h, f) = f \circ h^{-1}$. Ou seja, dois germes $f, g \in \varepsilon_{n,p}^0$ estão relacionados (são \mathcal{R} -equivalentes), se e somente se, existir $h \in R_n$ tal que $f \circ h^{-1} = g$. Isto é, o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n, 0 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^p, 0 \\ & h \downarrow & \nearrow g \\ & \mathbb{R}^n, 0 & \end{array}$$

Notação: $f \stackrel{\mathcal{R}}{\sim} g$.

Exemplo 4: Pela Forma Local das Submersões, se $f : \mathbb{R}^{p+k}, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p, 0$ é tal que $f'(0)$ é sobrejetiva, então existe um germe $h \in R_{p+k}$ tal que $f \circ h(x, y) = x, (x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^k$.

2.3 Polinômios Quase-Homogêneos

Seja $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ o anel dos polinômios sobre \mathbb{R} nas variáveis x_1, \dots, x_n .

Definição 2.3.1 Um polinômio $p \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ é dito homogêneo de grau d quando todos os monômios forem do tipo

$$x_1^{r_1} \cdot x_2^{r_2} \cdot \dots \cdot x_n^{r_n},$$

com $r_1 + \dots + r_n = d$.

Exemplo 5: $p(x, y, z) = xyz + x^2y + zx^2 + z^3$ é homogêneo de grau 3 em $\mathbb{R}[x, y, z]$.

Se identificarmos o monômio $x_1^{r_1} \cdot x_2^{r_2} \cdot \dots \cdot x_n^{r_n}$ com a n-upla (r_1, \dots, r_n) podemos caracterizar um polinômio homogêneo de grau d como sendo o polinômio cujos monômios estão sobre o hiperplano

$$x_1 + \dots + x_n = d$$

Exemplo 6: No polinômio $p(x, y, z) = 5x^3 + xyz + 3yz^2 + 2z^3$ podemos identificar seus monômios com os termos $(3, 0, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 2), (0, 0, 3)$ os quais estão sobre o plano $x + y + z = 3$.

Definição 2.3.2 Um polinômio $p(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} a_\alpha \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$ é dito quase-homogêneo de pesos (w_1, w_2, \dots, w_n) e grau pesado d quando para cada $a_\alpha \neq 0$, $w_1\alpha_1 + w_2\alpha_2 + \dots + w_n\alpha_n = d$.

Exemplo 7: $p(x, y, z) = x^{15} + x^3y^6 + x^2y^2z^3$ é quase-homogêneo de pesos $(1, 2, 3)$ e grau pesado 15.

Proposição 2.3.3 Seja $p(x)$ um polinômio quase-homogêneo do tipo $(w_1, \dots, w_n; d)$. Seja

$$w' = \text{mdc} \{w_1, \dots, w_n\}$$

então $p(x)$ é quase-homogêneo do tipo $(\frac{w_1}{w'}, \dots, \frac{w_n}{w'}; \frac{d}{w'})$.

Demonstração: Seja $a_k \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$ um monômio de $p(x)$, então

$$w_1\alpha_1 + w_2\alpha_2 + \dots + w_n\alpha_n = d.$$

Daí,

$$\frac{w_1}{w'}\alpha_1 + \frac{w_2}{w'}\alpha_2 + \dots + \frac{w_n}{w'}\alpha_n = \frac{d}{w'}.$$

Concluindo assim a proposição.

Devido a Proposição 2.3.3, podemos supor a partir daqui que os pesos são primos entre si. Fixados os pesos w_1, \dots, w_n , associamos à estes a ação do grupo multiplicativo $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ em \mathbb{R}^n por:

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\mapsto (t^{w_1}x_1, t^{w_2}x_2, \dots, t^{w_n}x_n) \end{aligned} \tag{2.1}$$

com $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Proposição 2.3.4 Um polinômio $p(x) \in \mathbb{R}^n[x_1, \dots, x_n]$ é quase-homogêneo do tipo $(w_1, \dots, w_n; d)$ se, e somente se, $p(tx) = p(t^{w_1}x_1, t^{w_2}x_2, \dots, t^{w_n}x_n) = t^d p(x)$.

Demonstração: Seja $p(x) = \sum a_\alpha x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \in \mathbb{R}^n[x_1, \dots, x_n]$ um polinômio quase-homogêneo do tipo $(w_1, \dots, w_n; d)$. Então $w_1\alpha_1 + w_2\alpha_2 + \dots + w_n\alpha_n = d$ e daí

$$\begin{aligned} p(tx) &= p(t^{w_1}x_1, t^{w_2}x_2, \dots, t^{w_n}x_n) = \sum a_\alpha (t^{w_1}x_1)^{\alpha_1} (t^{w_2}x_2)^{\alpha_2} \dots (t^{w_n}x_n)^{\alpha_n} = \\ &= \sum a_\alpha t^{w_1\alpha_1 + w_2\alpha_2 + \dots + w_n\alpha_n} \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} = t^d \sum a_\alpha x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} = t^d p(x). \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha que $p(tx) = t^d p(x)$. Portanto

$$t^d \sum a_\alpha x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} = \sum a_\alpha t^{w_1\alpha_1 + w_2\alpha_2 + \dots + w_n\alpha_n} \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

Logo

$$t^d = t^{w_1\alpha_1 + w_2\alpha_2 + \dots + w_n\alpha_n} \Rightarrow w_1\alpha_1 + w_2\alpha_2 + \dots + w_n\alpha_n = d$$

Ou seja, $p(x)$ é quase-homogêneo da forma $(w_1, \dots, w_n; d)$. ■

Proposição 2.3.5 Seja $p(x) \in \mathbb{R}^n[x_1, \dots, x_n]$ um polinômio quase-homogêneo do tipo $(w_1, \dots, w_n; d)$, então $p(x) \in \mathfrak{M}_n \cdot Jp$. Onde $Jp = \left\langle \frac{\partial p}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial p}{\partial x_n}(x) \right\rangle$.

Demonstração: Para isso basta mostrarmos que $w_1 x_1 \frac{\partial p}{\partial x_1} + \dots + w_n x_n \frac{\partial p}{\partial x_n} = d \cdot p(x)$, pois da proposição 2.1.3 temos \mathfrak{M}_n gerado pelos monômios x_1, \dots, x_n .

De fato, da proposição 2.3.4 temos $p(t^{w_1}x_1, t^{w_2}x_2, \dots, t^{w_n}x_n) = t^d p(x_1, \dots, x_n)$. Derivando em relação a t obtemos:

$$\sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial p}{\partial x_i}(tx) \cdot t^{w_i-1} \cdot x_i = d \cdot t^{d-1} p(x)$$

fazendo $t = 1$ temos

$$d \cdot p(x) = \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{d} \cdot x_i \cdot \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

Logo $p(x) \in \mathfrak{m}_n \cdot Jp$.



Capítulo 3

Poliedro e Filtração de Newton

3.1 Poliedro de Newton

Definição 3.1.1 Considere $f = \sum_{n \in \mathbb{N}^k} a_n x^n$, uma função analítica onde $x^n = x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}$ e $a_n \in \mathbb{R}$.

Definimos o suporte de f por:

$$\text{supp } f = \{n \in \mathbb{N}^k : a_n \neq 0\}$$

Exemplo 8: Seja $f = \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y, z) = x^4 + xyz^3 + xz + y^4 + z^5$, temos o

$$\text{supp } f = \{(4, 0, 0), (1, 1, 3), (1, 0, 1), (0, 4, 0), (0, 0, 5)\}$$

Definição 3.1.2 Dizemos que $f = \sum_{n \in \mathbb{N}^k} a_n x^n$ é cômodo se para qualquer $i = 1, \dots, k$ o monômio $x_i^{n_i}$ aparece em f com coeficiente não-nulo.

Exemplo 9: Seja $f = \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4 + xyz$ é cômodo enquanto o polinômio $g = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $g(x, y, z) = x^5 + xy^4$ não é cômodo.

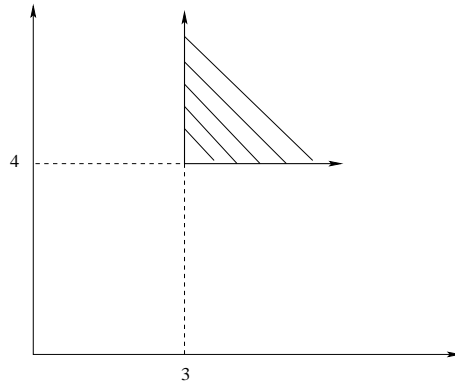
Definição 3.1.3 Seja $f = \sum_{n \in \mathbb{N}^k} a_n x^n \in \mathbb{R}[[x_1, \dots, x_k]]$, definimos o Poliedro de Newton de f como sendo o fecho convexo em \mathbb{R}_+^k do conjunto

$$\bigcup (n + \mathbb{R}_+^k)$$

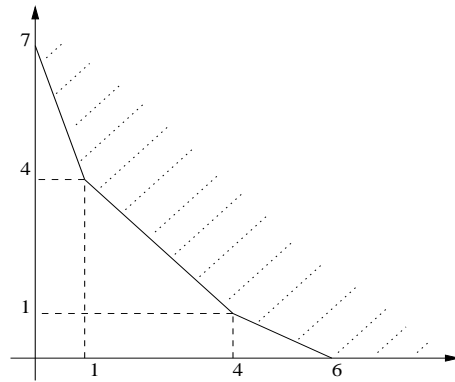
onde $n \in \text{supp } f \setminus \{0\}$.

Notação: $\Gamma_+(f)$.

O termo $\mathbb{R}_+^k = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}; x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, k\}$ é usado para caracterizar o octante positivo de \mathbb{R}^k . Para ajudar a compreensão exemplificaremos através de uma figura como seria o conjunto $(3, 4) + \mathbb{R}_+^2$.



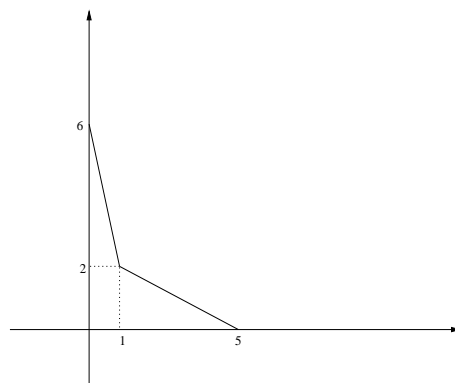
Exemplo 10: Seja $f = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^6 + x^4y + xy^4 + y^7$ temos o poliedro de Newton caracterizado pela figura a seguir.



Ou seja o poliedro de Newton $\Gamma_+(f)$ neste caso pode ser pensado como a parte ilimitada de \mathbb{R}_+^2 a partir dos segmentos de reta que ligam os pontos $(6, 0)$, $(4, 1)$, $(1, 4)$ e $(0, 7)$.

Definição 3.1.4 Definimos a *Frenteira de Newton*, ou *Polígono de Newton*, da série f na origem como sendo a união das faces compactas do poliedro $\Gamma_+(f)$, denotada por $\Gamma(f)$.

Exemplo 11: Seja $f(x, y) = x^5 + xy^2 + y^6$, temos o polígono de Newton dado como sendo a união dos segmentos de reta que ligam os pontos $(5, 0)$, $(1, 2)$ e $(0, 6)$.

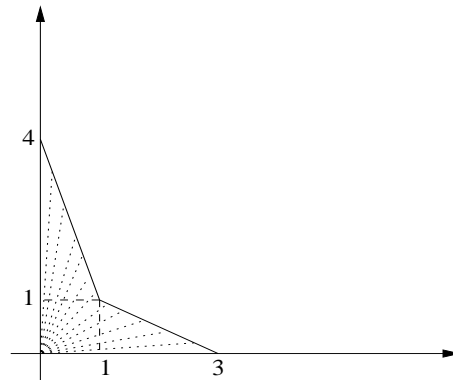


Definição 3.1.5 Definimos a Parte Principal Newtoniana ou simplesmente Parte Principal do polinômio f , como sendo o polinômio

$$f_0 = \sum_{n \in \Gamma(f)} a_n x^n.$$

A união de todos os segmentos de origem em $0 \in \mathbb{R}$ e extremo sobre $\Gamma(f)$ será denotada pela notação $\Gamma_-(f)$.

Exemplo 12: Seja $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 + y^4 + xy$, temos a parte principal Newtoniana dada por $g(x, y) = x^3 + y^4 + xy$ e $\Gamma_-(f)$ será dado de acordo com a figura a seguir:



Seja $\Gamma_+ \subseteq \mathbb{R}^k$ um poliedro de Newton, dado um vetor $v \in \mathbb{R}_+^k$ definiremos

$$l(v) = \min \{ \langle v, x \rangle; x \in \Gamma_+ \}$$

Definição 3.1.6 Uma face de Γ_+ é um subconjunto da forma

$$\Delta(v) = \{ x \in \Gamma_+; \langle v, x \rangle = l(v) \text{ para algum } v \in \mathbb{R}_+^k \setminus \{0\} \}$$

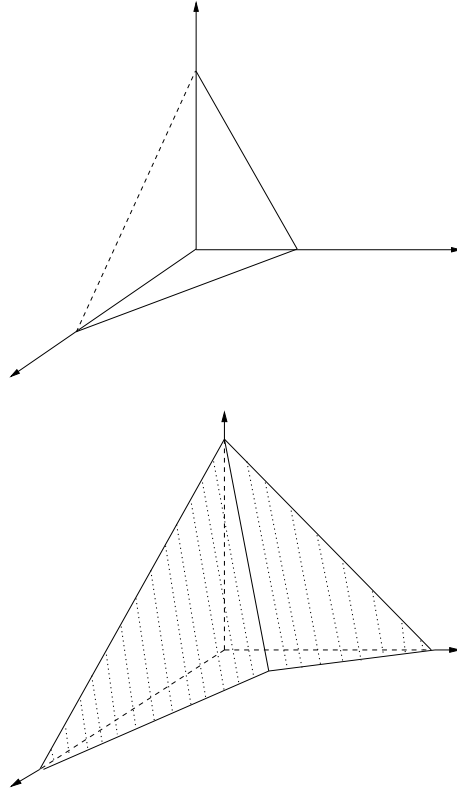
Como $v \in \mathbb{R}_+^k$ e $x \in \Gamma_+$, temos que o menor valor que $\langle x, v \rangle - l(v)$ pode assumir é zero, logo

$$\langle x, v \rangle = v_1 x_1 + v_2 x_2 + \dots + v_k x_k = l(v)$$

está contido no hiperplano perpendicular a v .

Dizemos que um vetor $v \in \mathbb{Z}_+^k \setminus \{0\}$ é primitivo quando v é o vetor de menor comprimento entre os vetores do conjunto $\{ \lambda v : \lambda \in \mathbb{R}_+ \} \cap \{ \mathbb{Z}_+^k \setminus \{0\} \}$. Além disso diremos que uma face $\Delta(v)$ têm dimensão d , $0 \leq d \leq k - 1$ quando o menor subespaço afim que contém $\Delta(v)$ têm dimensão d .

Definiremos $C(\Delta)$ como sendo o cone convexo de vértice 0 e de base Δ , isto é, a reunião de todas as semi-retas de \mathbb{R}^k partindo da origem que passam por Δ e consideraremos Δ um poliedro compacto, convexo, de dimensão q (q entre 0 e $k - 1$) em \mathbb{R}^k cujos vértices pertencem a \mathbb{Z}^k . Chamamos a atenção para o fato de que para cada face as faces podem ter dimensões distintas, por exemplo, no \mathbb{R}^3 as faces podem ter dimensões 0 (um vértice do poliedro), 1 ou 2 como vemos nas figuras a seguir:



3.2 Filtração de Newton

Definição 3.2.1 *Seja R um anel comutativo com unidade qualquer, uma filtração sobre R é uma função*

$$d : R \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$$

tal que:

- $d(1) \geq 0, d(0) = +\infty$;
- $d(x + y) \geq \min \{d(x), d(y)\}$;
- $d(x \cdot y) \geq d(x) + d(y)$.

Definição 3.2.2 *Dizemos que uma filtração d é homogênea quando $d(x^q) = q \cdot d(x), \forall x \in R$ e para qualquer $q \in \mathbb{N}$.*

Afirmção: Para cada face de dimensão máxima existe um único vetor primitivo que $\Delta = \Delta(v)$.

Demonstração: Seja $\Gamma_+(f)$ um poliedro de Newton em \mathbb{R}_+^n , sabemos que o suporte de f é um subconjunto de \mathbb{Z}^n . Um face Δ compacta de dimensão máxima está contida em um hiperplano $H \subset \mathbb{R}^n$, consideremos $supp(f) = \{(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}), i \in \alpha\}$ com α caracterizando os monômios de f . Observe que uma face de dimensão máxima têm no mínimo n vértices.

Dessa forma podemos caracterizar $n - 1$ vetores linearmente independentes em H , com entradas em \mathbb{Z} , tomando v como o produto vetorial desses vetores, teremos v ortogonal a H , logo tome $\frac{1}{\lambda}v \in \mathbb{Z}^n$ onde λ é o mdc das entradas de v .

■

Feita essa afirmação, sejam v_1, v_2, \dots, v_r os vetores primitivos correspondentes às faces de dimensão $k - 1$ de Γ , tais que $l(v_j) \neq 0$ para todo $j = 1, 2, \dots, r$. Seja M o mínimo múltiplo comum entre $l(v_1), \dots, l(v_r)$ ou qualquer outro múltiplo comum desses números. Para cada $j = 1, 2, \dots, r$ consideremos a aplicação linear

$$\phi_{\Delta(v_j)} : \mathbb{R}_+^k \rightarrow \mathbb{R}_+$$

dada por

$$\phi_{\Delta(v_j)}(n) = \frac{M}{l(v_j)} \langle n, v_j \rangle$$

Definimos assim a aplicação filtrante associada a Γ_+ como a aplicação

$$\phi : \mathbb{R}_+^k \rightarrow \mathbb{R}_+$$

dada por $\phi(n) = \min \{ \phi_{\Delta(v_j)}(n) ; j = 1, 2, \dots, r \}$

Observe que $\phi|_{C(\Delta(v_j))}(n) = \phi_{\Delta(v_j)}(n)$.

Definição 3.2.3 Chamamos filtração de Newton induzida por Γ_+ a aplicação

$$d : \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

dada por

$$d(h) = \min \{ \phi(n) : n \in \text{supp}(h) \}$$

quando $h \neq 0$ e $d(0) = +\infty$

Afirmação: A aplicação d assim definida é uma filtração.

Demonstração: Observemos que a unidade de $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_k]$ é dada por $1 = x_1^0 \cdots x_k^0$ daí $\text{supp}(1) = \{(0, 0, \dots, 0)\}$. Logo

$$d(1) = \min \{ \phi(n) ; n \in \text{supp}(1) \} = 0$$

De $\phi(0, \dots, 0) = \min \{ \phi_{\Delta(v_j)}(0, \dots, 0) \} = \min \left\{ \frac{M}{l(v_j)} \langle (0, \dots, 0), v_j \rangle \right\} = 0$, satisfazendo a primeira condição de filtração.

Mostraremos que $d(f + g) \geq \min \{ d(f), d(g) \}$.

Tomando

$$f = \sum_i a_i x_1^{q_{1i}} x_2^{q_{2i}} \cdots x_k^{q_{ki}} \text{ e } g = \sum_j b_j x_1^{m_{1j}} x_2^{m_{2j}} \cdots x_k^{m_{kj}}$$

temos que $\text{supp}(f + g) \subset \text{supp}(f) \cup \text{supp}(g)$. Consideremos $n \in \text{supp}(f)$ e $m \in \text{supp}(g)$ tais que $d(f) = \phi(n)$ e $d(g) = \phi(m)$ e sem perda de generalidade suponha $d(f) \geq d(g)$, então

$$\begin{aligned} d(f + g) &= \min \{ \phi(\alpha) ; \alpha \in \text{supp}(f + g) \} \geq \min \{ \phi(\alpha) : \alpha \in \text{supp}(f) \text{ ou } \alpha \in \text{supp}(g) \} = \\ &= \min \{ d(f), d(g) \} \end{aligned}$$

como queríamos mostrar. Resta-nos verificar a terceira e última condição para que d seja filtração, ou seja, resta mostrar que $d(f \cdot g) \geq d(f) + d(g)$.

$$\text{Note que } f \cdot g = \left(\sum_i a_i x_1^{q_{1i}} x_2^{q_{2i}} \cdots x_k^{q_{ki}} \right) \cdot \left(\sum_j b_j x_1^{m_{1j}} x_2^{m_{2j}} \cdots x_k^{m_{kj}} \right)$$

Logo os elementos do $\text{supp}(f \cdot g)$ são somas de elementos do $\text{supp}(f)$ com elementos do $\text{supp}(g)$, portanto

$$\begin{aligned} d(f \cdot g) &= \min\{\phi(\gamma); \gamma \in \text{supp}(f \cdot g)\} = \min\{\phi(\alpha + \beta); \alpha \in \text{supp}(f) \text{ e } \beta \in \text{supp}(g)\} = \\ &= \min\left\{\frac{M}{l(v_j)}\langle \alpha, v_j \rangle + \frac{M}{l(v_j)}\langle \beta, v_j \rangle; \alpha \in \text{supp}(f) \text{ e } \beta \in \text{supp}(g)\right\} \geq \\ &\geq \min\left\{\frac{M}{l(v_j)}\langle \alpha, v_j \rangle; \alpha \in \text{supp}(f)\right\} + \min\left\{\frac{M}{l(v_i)}\langle \beta, v_i \rangle; \beta \in \text{supp}(g)\right\} = \\ &= \min\{\phi(\alpha); \alpha \in \text{supp}(f)\} + \min\{\phi(\beta); \beta \in \text{supp}(g)\} = d(f) + d(g). \end{aligned}$$

Na desigualdade acima, a igualdade só ocorre quando o valor de $\phi(\alpha)$ e $\phi(\beta)$ são obtidos pelo mesmo vetor primitivo v_j . ■

Consideremos a matriz $A = (a_j^i)$, $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$ uma matriz de inteiros não-negativos. Denotaremos as linhas e colunas da matriz A por

$$a_i = (a_i^1, \dots, a_i^m) \text{ e } a^j = (a_1^j, \dots, a_n^j)$$

Ou seja,

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^m \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}$$

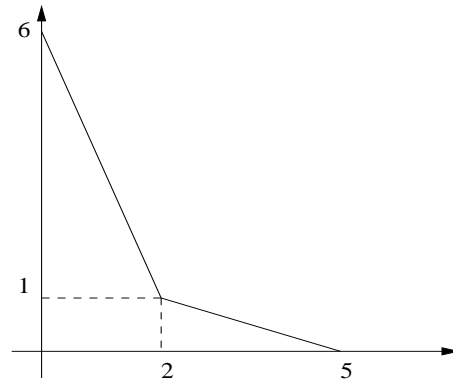
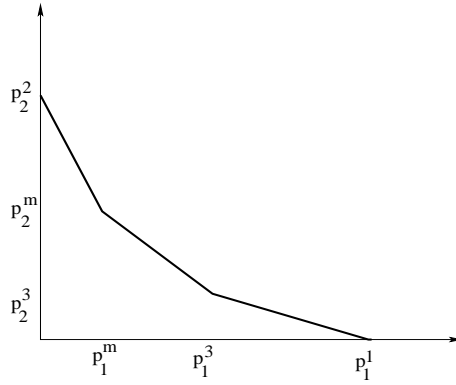
Dessa forma para $p \in \mathbb{R}$ denotaremos por $p_i^j = p \cdot a_i^j$ e $p^j = p \cdot a^j$, além disso A assim definida é denominada matriz de vértices do suporte de f quando cada coluna da matriz A pertence ao suporte de f , isto é, $\text{supp}(f) = \text{supp}(A) = \{a^j, j = 1, \dots, m\}$. Chamaremos a matriz A de matriz de Newton de f quando A é uma matriz de vértices do suporte que gera o poliedro de Newton de f , ou seja, a interseção de $\Gamma_+(f)$ com cada eixo coordenado é não-vazio, isto é, A possui um bloco diagonal, por exemplo, para $n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & 0 & \cdots & a_1^m \\ 0 & a_2^2 & \cdots & a_2^m \end{pmatrix}$$

temos o polígono de Newton de ρ^{2p} dado pela primeira figura da página a seguir.

A matriz de Newton A também pode ser chamada de matriz cômoda, pois um polinômio que lhe é associado é um polinômio cômodo e no que segue, consideraremos $\Gamma_+(f) = \Gamma_+(A)$ e A uma matriz de vértices cômoda.

Exemplo 13: A seguir faremos um exemplo prático do cálculo da filtração de Newton de uma matriz A . Considere a matriz de Newton



$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

temos o polígono de Newton de A dado por:

Observe que cada face é dada por um polinômio quase homogêneo, a saber

$$p_{\Delta_1}(x, y) = x^5 + x^2y \text{ e } p_{\Delta_2}(x, y) = y^6 + x^2y,$$

daí temos p_{Δ_1} do tipo $(1, 3; 5)$ e p_{Δ_2} do tipo $(5, 2; 12)$, de onde tiramos os vetores primitivos que caracterizam cada face $v_{\Delta_1} = (1, 3)$ e $v_{\Delta_2} = (5, 2)$.

Calculando $l(v_{\Delta_1})$ e $l(v_{\Delta_2})$:

$$l(v_{\Delta_1}) = \min\{\langle(1, 3), (5, 0)\rangle, \langle(1, 3), (0, 6)\rangle\} = 5$$

$$l(v_{\Delta_2}) = \min\{\langle(5, 2), (5, 0)\rangle, \langle(5, 2), (0, 6)\rangle\} = 12$$

De onde temos $M = 60$ e a seguir calculamos a filtração de Newton:

$$\begin{aligned} \phi(h) &= \min\{\phi_{\Delta_1}(h), \phi_{\Delta_2}(h)\} = \min\left\{\frac{60}{5}\langle(a, b), (1, 3)\rangle, \frac{60}{12}\langle(a, b), (5, 2)\rangle\right\} = \\ &= \{12a + 36b, 25a + 10b\} \end{aligned}$$

Definição 3.2.4 A função controle $\rho(x)$ do Poliedro de Newton $\Gamma_+(f)$ é definida por

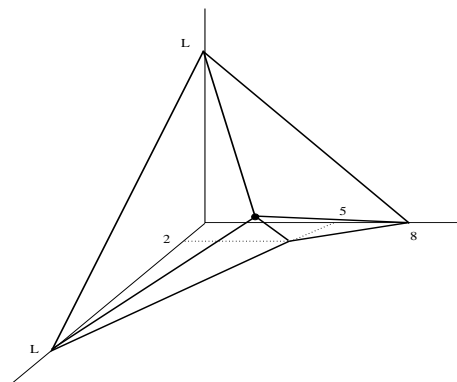
$$\rho(x) = \left(\sum_{j=1}^m x^{2p^j}\right)^{\frac{1}{2p}} = \left(\sum_{j=1}^m x_1^{2p_1^j} \cdot x_2^{2p_2^j} \cdot \dots \cdot x_n^{2p_n^j}\right)^{\frac{1}{2p}}$$

onde p é tomado grande o suficiente para que os números $2p_i^j$ são inteiros e ρ^{2p} é um polinômio.

Exemplo 14: Se a matriz A é da forma

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & l & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & l & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

temos o poliedro de newton $\Gamma_+(A)$ dado acima e a função controle deste poliedro é dada por:



$$\rho(x_1, x_2, x_3) = (x_1^{16} + x_2^{2l} + x_3^{2l} + x_1^{10}x_3^4 + x_1^6x_2^2x_3^6)^{\frac{1}{2}}.$$

Definição 3.2.5 Seja $f \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ um polinômio, $d \in \mathbb{Q}^+$ e A a matriz de Newton associada a f , denotamos:

$$\Gamma_+(\rho^d) = \Gamma_+(dA)$$

$$\Gamma(\rho^d) = \Gamma(dA)$$

Definição 3.2.6 Seja $f \in \varepsilon_n$ um germe de função analítica definido por

$$f(x) = \sum_v c_v x^v, \text{ onde } v = (v_1, \dots, v_n)$$

Dizemos que f é uma A -forma de grau d se $v \in \Gamma(\rho^d)$ para todo $c_v \neq 0$ na série de Taylor de f .

Ou seja, o polígono de Newton de f é paralelo ao polígono dado por ρ .

Exemplo 15: Considere

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

então $\rho(x, y) = (x^8 + y^{10} + x^2y^6)^{\frac{1}{2}}$ é a função controle associada e $f(x, y) = x^8 + y^{10} + x^2y^6$ é uma A -forma de grau 2 com $\Gamma(\rho^2) = \{(8, 0), (0, 10), (2, 6)\}$. Note que para essa matriz A poderíamos ter tomado a função controle associada por

$$\rho(x, y) = |x|^4 + |y|^5 + |x|^1 |y|^3$$

Definição 3.2.7 Seja $f : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ um germe de função analítica dado por

$$f(x) = H_d(x) + \dots + H_{d+i}(x) + \dots$$

onde H_i são A -formas de grau i . Dizemos que 0 é um ponto $\Gamma_+(\rho^d)$ -isolado de f , se para cada face compacta Δ de $\Gamma(\rho^d)$, a equação

$$f_{\Delta}(x) = 0$$

não têm solução em $(\mathbb{R} - \{0\})^n$.

Exemplo 16: Para $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ temos que $f(x, y) = x^8 + y^{10} + x^2y^6$ admite 0 como ponto $\Gamma_+(\rho^d)$ -isolado. De fato,

$$f_{\Delta_1}(x, y) = x^8 + x^2y^6 = 0 \text{ se, e somente se } x = 0 \text{ ou } x = y = 0.$$

$$f_{\Delta_2}(x, y) = y^{10} + x^2y^6 = 0 \text{ se, e somente se } y = 0 \text{ ou } x = y = 0$$

Seja $V \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto algébrico, isto é, o conjunto das raízes de um número finito de equações polinômiais e $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto definido por um número finito de desigualdades polinômiais, ou seja,

$$U = \{x \in \mathbb{R}^m; g_1(x) > 0, \dots, g_l(x) > 0\}.$$

O conjunto $U \cap V$ é semi-algébrico, em outras palavras, $U \cap V$ é definido por um número finito de equações e desigualdades polinômiais.

Lema 3.2.8 (Lema de Seleção de Curvas) Se $U \cap V$ contém pontos arbitrariamente próximos da origem, isto é, 0 pertence ao fecho de $U \cap V$, então existe uma curva analítica real $p : [0, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$ com $p(0) = 0$ e $p(t) \in U \cap V, \forall t > 0$.

Fixada uma filtração, definimos os ideais finitamente gerados $A_r = \{g \in O_n; \text{fil}(g) \geq r\}$ com $O_n = \{f : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0; f \in C^\infty \text{ ou } f \text{ é analítica}\}$. Seja $\lambda : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ uma função analítica, se pudermos escrever

$$\lambda(t) = a_k t^k + a_{k+1} t^{k+1} + \dots, \text{ com } a_k \neq 0$$

diremos que $\lambda(t)$ é equivalente a t^k e denotamos por $\lambda(t) \simeq t^k$.

Lema 3.2.9 Seja $f : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ um germe de função analítica. Se $\text{supp}(f) \in \Gamma_+(\rho^d)$ então existe $c_1 > 0$ tal que, em uma vizinhança da origem

$$\|f(x)\| \leq c_1 \rho(x)^d$$

isto é, $\frac{f(x)}{\rho(x)^d}$ é limitada.

Demonstração: É suficiente mostrar que para todo $x^a \in \Gamma_+(\rho^d)$ existe um número real $c > 0$ tal que

$$\rho^d \geq c \cdot \|x^a\|$$

em uma vizinhança da origem, pois para todo germe analítico $g : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ cujo $\text{supp}(g) \in \Gamma_+(\rho^d)$ existem monômios $x^{\gamma_1}, \dots, x^{\gamma_s} \in A_{\text{fil}(\rho^d)}$ tais que $g(x) = \sum_{i=1}^s g_i(x) x^{\gamma_i}$ e, portanto, basta limitar cada g_i em vizinhança da origem.

Suponhamos que para todo $c > 0$ e para toda vizinhança V da origem em \mathbb{R}^n , existe $x \in V$ tal que $\rho^d < c \|x^a\|$. Então, 0 pertence ao fecho do conjunto $X = \{(x, c); \rho(x)^d < c \|x^a\|\}$. Note que X é semi-algébrico daí pelo Lema de Seleção da Curva existe uma curva analítica $\gamma : [0, \epsilon) \rightarrow X$ com $\gamma(0) = 0, \gamma(t) = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t), c(t))$ e $\lambda_1(t) \simeq t^{\alpha_1}, \dots, \lambda_n(t) \simeq t^{\alpha_n}$ e $c(t) \simeq t^\beta$. Então, de $\rho^d(\gamma(t)) < t^\beta \|\lambda(t)^a\|$, com $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t))$ nos dando

$$\left(\sum_j t^{2p\alpha_1 a_1^j} \dots t^{2p\alpha_n a_n^j} \right)^{\frac{d}{2p}} < t^\beta \cdot t^{\alpha_1 a_1} \dots t^{\alpha_n a_n} < t^{\alpha_1 a_1} \dots t^{\alpha_n a_n}$$

portanto $\left(\sum_j t^{2p\langle \alpha, a^j \rangle} \right)^{\frac{d}{2p}} < t^{\langle \alpha, a \rangle}$ e conseqüentemente $\langle \alpha, a \rangle < \inf_j \{ \langle \alpha, d \cdot a^j \rangle \}$ pois estamos trabalhando em vizinhanças da origem. Isto implica que a filtração de x^a é menor que a filtração de ρ^d o que contradiz o fato de $x^a \in \Gamma_+(\rho^d)$.

■

Lema 3.2.10 Seja $f : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ um germe de função analítica definido por

$$f(x) = H_d(x) + \dots + H_{d+l}(x) + \dots$$

Se f admite 0 como um ponto $\Gamma_+(\rho^d)$ -isolado, então existe um número real positivo c_2 tal que

$$\|f(x)\| \geq c_2 \cdot \rho(x)^d$$

em uma vizinhança da origem de \mathbb{R}^n .

Demonstração: Fazendo a demonstração para o caso de duas variáveis ($n = 2$), isto é, $\Gamma(\rho^d)$ têm duas faces compactas de dimensão 1. Como $f(x) = H_d(x) + \dots + H_{d+l}(x) + \dots$, tomamos a função controle ρ tal que:

$$\Gamma(\rho^d) = \Gamma(f)$$

Daí tomamos o polígono de Newton $\Gamma(\rho^d)$ cujo suporte será dado por:

$$\text{supp}(\rho^d) = \{(a, 0), (b, c), (0, d)\}$$

daí

$$\rho^d(x) = |x_1|^a + |x_1|^b |x_2|^c + |x_2|^d$$

Suponha, por contradição, que para todo $\theta > 0$ e para toda vizinhança V da origem, têm-se $x \in V$ tal que

$$\|f(x)\| < \theta \rho^d(x)$$

isto é, a origem pertence ao fecho de

$$X = \{(x, \theta); |f(x)| < \theta \cdot \rho^d(x)\}$$

Como X é semi-algébrico, do Lema de Seleção das Curvas, existe uma curva analítica

$$\lambda : [0, \epsilon] \rightarrow X$$

tal que $\lambda(0) = 0$, $\lambda(t) = (x_1(t), x_2(t), \theta(t))$ e que

$$x_1(t) \sim t^{\alpha_1}, x_2(t) \sim t^{\alpha_2} \text{ e } \theta(t) \sim t^\beta$$

Daí $\rho^d(\lambda(t)) = t^{a\alpha_1 + t^{b\alpha_1 + c\alpha_2} + t^{d\alpha_2}}$ e conseqüentemente $\rho^d(\lambda(t)) \sim t^A$, com $A = \min\{a\alpha_1, b\alpha_1 + c\alpha_2, d\alpha_2\}$

Como f é uma A -forma temos que $f_\Delta(x)$ é quase-homogêneo e como a equação $f_\Delta(x) = 0$ não têm solução em $(\mathbb{R}^2 - \{0\})$ para qualquer face $\Delta \in \Gamma_+(\rho^d)$, então existe um número real $c_1 > 0$ (veja o lema 5.0.5 no anexo para mais detalhes) tal que

$$|f_{\Delta_1}(x)| \geq c_1 (|x_1|^a + |x_1|^b |x_2|^c) \quad (3.1)$$

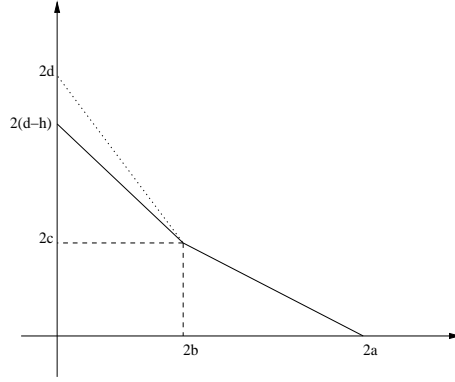
quando $x \rightarrow 0$.

Note que $\rho_{\Delta_1}^d(x) = |x_1|^a + |x_1|^b \cdot |x_2|^c$, daí $\rho_{\Delta_1}^d(x) \sim t^{A_1}$ com $A_1 = \min\{a\alpha_1, b\alpha_1 + c\alpha_2\}$.

Defina $g(x) = f(x) - f_{\Delta_1}(x)$ e suponha, por contradição, que $A < d\alpha_2$, isto é, $A = \min\{a\alpha_1, b\alpha_1 + c\alpha_2, d\alpha_2\} \neq d\alpha_2$, podemos escolher h suficientemente pequeno tal que $A < (d - h)\alpha_2$

Logo o poliedro de Newton $\Gamma_+(g^2) \subset \Gamma_+(|x_1|^{2a} + |x_1|^{2b} \cdot |x_2|^{2c} + |x_2|^{2d})$ daí pelo Lema anterior temos

$$|g(x)| \leq \frac{c_1}{2} \left(|x_1|^a + |x_1|^b \cdot |x_2|^c + |x_2|^{d-h} \right) \quad (3.2)$$



fazendo $q(x_1, x_2) = |x_1|^a + |x_1|^b \cdot |x_2|^c + |x_2|^{d-h}$. Notamos que $q(\lambda(t)) \sim t^A$ e como $\lambda(t) \subset X$ têm-se

$$|f(\lambda(t))| \leq \theta(t) \rho^d(\lambda(t)) \quad (3.3)$$

Como estamos trabalhando em vizinhanças da origem 3.3 implica que

$$O(f) \geq O(\theta(t) \cdot \rho^d(\lambda(t)))$$

isto é, $O(f \circ \lambda) \geq O(\theta(t)) + O(\rho^d \circ \lambda)$ o que implica $O(f \circ \lambda) \geq \beta + A$. Onde $O(f \circ \lambda) = \alpha \Leftrightarrow f \circ \lambda \simeq t^\alpha$.

De 3.1 temos, novamente por estarmos em vizinhanças da origem, que $O(f_{\Delta_1} \circ \lambda) \leq A$ e de 3.2 $O(g \circ \lambda) \geq A$.

Daí como $f(\lambda(t)) = g(\lambda(t)) + f_{\Delta_1}(\lambda(t))$, temos

$$O(f \circ \lambda) = \min\{O(g \circ \lambda), O(f_{\Delta_1} \circ \lambda)\} < A$$

Contradição. Fazendo o mesmo raciocínio para os casos: $a \cdot \alpha_1 < A$ e $b \cdot \alpha_1 + c \cdot \alpha_2$ teremos contradições semelhantes, portanto

$$A = a \cdot \alpha_1 = b \cdot \alpha_1 + c \cdot \alpha_2 = d \cdot \alpha_2$$

Observe que a equação da face Δ_1 é dada por $\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 = A$, porém $d \cdot \alpha_2 = A$, portanto $d \cdot \alpha_2 \in \Delta_1$ o que contradiz o fato de termos duas faces compactas distintas.

■

Capítulo 4

Trivialidades Bilipschitz

O problema da trivialização de famílias de germes de aplicações é um dos grandes pontos de investigação na teoria de Singularidades, H. Soares em [15] utiliza a técnica de construção de campos de vetores controlados para obter resultados sobre a $C^l - \mathcal{R}$ -trivialidade para germes de aplicações quase-homogêneas. Tal técnica pode ser aplicada para a caracterização da trivialidade bilipschitz e com o uso dela buscaremos neste capítulo, obter uma condição suficiente para a trivialidade bilipschitz de famílias de germes de funções suaves.

4.1 A Trivialidade Bilipschitz

Definição 4.1.1 Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ um número positivo. Uma função $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ é chamada λ -Lipschitz se satisfaz:

$$\|\phi(x) - \phi(y)\| \leq \lambda \|x - y\|, \forall x, y \in U.$$

Um germe de aplicação $h : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^n, 0$ é dito bilipschitz quando h é lipschitz com inversa lipschitz, ou equivalentemente, se existem constantes positivas λ_1, λ_2 tais que

$$\lambda_1 \|x - y\| \leq \|h(x) - h(y)\| \leq \lambda_2 \|x - y\|$$

.

Definição 4.1.2 Sejam $f, g : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p, 0$ germes de aplicações diferenciáveis. Dizemos que f e g são bilipschitz- \mathcal{R} -equivalentes se existir um germe de aplicação bilipschitz $h : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^n, 0$ tal que $g(h(x)) = f(x)$;

Seja $f_t : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p, 0, t \in I$ (I intervalo de \mathbb{R}) uma família de germes de funções suaves, isto é, existe uma vizinhança U de 0 em \mathbb{R}^n e uma função suave $F : U \times I \rightarrow \mathbb{R}^p$ tal que $F(0, t) = 0$ e $f_t(x) = F(x, t), \forall t \in I, \forall x \in U$.

Definição 4.1.3 Seja $F : \mathbb{R}^n \times I, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma deformação de $f(x) = F(x, 0)$. A família f_t é bilipschitz trivial se existir um germe de aplicação $H : \mathbb{R}^n \times I, 0 \rightarrow \mathbb{R}^n, H_t$ bilipschitz ($H_t(x) = H(x, t)$), tal que:

- (a) $H(x, 0) = x$;
- (b) $H(0, t) = 0$;
- (c) $F(H(x, t), t) = f(x)$.

A condição (c) pode ser reescrita como:

(c') $f_t \circ H_t = f$, para todo $t \in I$.

Observe que derivando em relação à t a expressão dada em (c) obtemos:

$$(c'') \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(H(x, t), t) \cdot \frac{\partial H_i}{\partial t}(x, t) \right] + \frac{\partial F}{\partial t}(H(x, t), t) = 0.$$

Afirmamos que determinar H satisfazendo (a), (b) e (c'') é equivalente a resolver o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \text{(d)} \left[\sum_{i=1}^n \varepsilon_i(x, t) \cdot \frac{\partial F}{\partial x_i}(x, t) \right] + \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) = 0. \\ \text{(e)} \varepsilon_i(0, t) = 0, \forall i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

De fato, seja $x' = \varepsilon(x, t)$ em que $\varepsilon(x, t) = (\varepsilon_1(x, t), \dots, \varepsilon_n(x, t))$ é um campo com $\varepsilon(0, t) = 0$. Consideremos o fluxo associado

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0 &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, t) &\mapsto H(x, t) \end{aligned}$$

tal que $H(x, s) = x$. Então

$$\frac{\partial H}{\partial t}(x, s) = \varepsilon(H(x, t), t)$$

Por (d), segue-se que

$$\left[\sum_{i=1}^n \varepsilon_i(x, t) \cdot \frac{\partial F}{\partial x_i}(x, t) \right] + \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) = 0 \Rightarrow \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial H_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_i}(x, t) \right] + \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) = 0$$

Portanto valem (a) e (c'').

Tomando $x = 0$ em $\frac{\partial H}{\partial t}(x, t) = \varepsilon(H(x, t), t)$ obtemos

$$\frac{\partial H}{\partial t}(0, t) = \varepsilon(H(0, t), t) \text{ e } H(0, s) = 0$$

Por outro lado, a aplicação $x(t) \equiv 0$ também é solução do PVI

$$\begin{cases} x' = \varepsilon(x, t) \\ x(s) = 0 \end{cases}$$

Logo, pela unicidade das soluções $H(0, t) = x(t) = 0$, provando (b). Assim sendo, temos que (d) e (e) são equivalentes a (a), (b) e (c'').

Afirmamos também que (a), (b) e (c) são equivalentes a (a), (b) e (c''). De fato vimos que (c) \Rightarrow (c''), suponhamos então que valem (a), (b) e (c''). De (c'') obtemos

$$\begin{aligned} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(H(x, t), t) \cdot \frac{\partial H_i}{\partial t}(x, t) \right] + \frac{\partial F}{\partial t}(H(x, t), t) = 0 &\Rightarrow \frac{\partial(F \circ H)}{\partial t}(x, t) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \int \frac{\partial}{\partial t}(F \circ H)(x, t) = 0 &\Rightarrow (F \circ H)(x, t) = c(x) \Rightarrow F(H(x, t), t) = c(x). \end{aligned}$$

Em particular tomando $t = 0$, temos $c(x) = F(H(x, 0), 0) = F(x, 0) = f(x)$, portanto vale (c).

Fixando a filtração de Newton associado a $\Gamma_+(A)$, definimos os números

$$R = \max_j \max_i \left\{ \frac{M}{l(v^j)} v_i^j \right\} \quad \text{e} \quad r = \min_j \min_i \left\{ \frac{M}{l(v^j)} v_i^j \right\}$$

onde $M = \text{mmc}\{l(v^j)\}$ e $v^j = (v_1^j, \dots, v_n^j)$ são os vetores primitivos associados às faces compactas de dimensão $n - 1$ de $\Gamma(A)$.

Por exemplo se

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

temos calculado no exemplo 13 os valores $l(v_1) = 5$, $l(v_2) = 12$ e $M = 60$, onde

$$v_1 = (1, 3) \text{ e } v_2 = (5, 2)$$

Logo

$$R = \max_j \max_i \left\{ \frac{M}{l(v^j)} v_i^j \right\} = \max \{12; 28; 25; 10\} = 28$$

e

$$r = \min_j \min_i \left\{ \frac{M}{l(v^j)} v_i^j \right\} = \min \{12; 28; 25; 10\} = 10.$$

Seja $h : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ um germe de função analítica tal que $\text{supp}(h) \in \Gamma_+(\rho^d)$, segue do Lema 3.2.9 que $\frac{h(x)}{\rho^d(x)}$ é limitado.

Observação: Se a filtração de h é suficientemente mais alta que a filtração de ρ^d teremos que $\text{Grad} \left(\frac{h}{\rho^d} \right)$ é limitada, isto é,

$$\| \nabla \frac{h}{\rho^d} \| \leq M$$

daí $\frac{h}{\rho^d}$ é M -lipschitz.

Fazemos notar o seguinte: Considere fixada uma filtração de Newton induzida por $\Gamma_+(A)$. Vimos que a filtração de um monômio $f(x, y) = x^a y^b$ é dada por:

$$\text{fil}(x^a y^b) = w_1 a + w_2 b,$$

daí a filtração de $\frac{\partial(x^a y^b)}{\partial x}$ será dada por $w_1(a - 1) + w_2 b$, ou seja,

$$\text{fil} \left(\frac{\partial(x^a y^b)}{\partial x} \right) = \underbrace{w_1 a + w_2 b}_{\text{fil}(f)} - w_1.$$

Por outro lado

$$\text{fil} \left(\frac{\partial(x^a y^b)}{\partial y} \right) = w_1 a + w_2(b - 1) = \underbrace{w_1 a + w_2 b}_{\text{fil}(f)} - w_2,$$

como $R \geq w_1$ e $R \geq w_2$, temos que:

$$\text{fil} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) + R \geq \text{fil}(f).$$

Podemos estender este raciocínio para germes de funções analíticas com domínio $\mathbb{R}^n, 0$.

Proposição 4.1.4 Se $fil(h) \geq d \cdot M + R$, então $\frac{h}{\rho^d}$ é lipschitz.

Demonstração: Temos que $h : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ um germe de função analítica com $supp(h) \in \Gamma_+(\rho^d)$, portanto:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{h}{\rho^d} \right) = \frac{\rho^d \cdot \frac{\partial h}{\partial x_i} - h \cdot \frac{\partial \rho^d}{\partial x_i}}{\rho^{2d}}.$$

Daí

$$\nabla \left(\frac{h}{\rho^d} \right) = \frac{\rho^d \cdot \nabla h - h \cdot \nabla \rho^d}{\rho^{2d}}.$$

Por outro lado:

$$fil \left(\rho^d \cdot \frac{\partial h}{\partial x_i} \right) \geq fil(\rho^d) + fil\left(\frac{\partial h}{\partial x_i}\right) \geq fil(\rho^d) + fil(h) - R$$

$$fil \left(h \cdot \frac{\partial \rho^d}{\partial x_i} \right) \geq fil(h) + fil\left(\frac{\partial \rho^d}{\partial x_i}\right) \geq fil(h) + fil(\rho^d) - R$$

De onde tiramos que:

$$fil \left(\rho^d \cdot \frac{\partial h}{\partial x_i} - h \cdot \frac{\partial \rho^d}{\partial x_i} \right) \geq fil(h) + fil(\rho^d) - R \geq d \cdot M + R + fil(\rho^d) - R.$$

por conta da hipótese $fil(h) \geq d \cdot M + R$. Portanto:

$$fil \left(\rho^d \cdot \frac{\partial h}{\partial x_i} - h \cdot \frac{\partial \rho^d}{\partial x_i} \right) \geq fil(\rho^d) + d \cdot M.$$

Ora $fil(\rho^d) = d \cdot fil(\rho) = d \cdot M$, logo

$$fil \left(\rho^d \cdot \frac{\partial h}{\partial x_i} - h \cdot \frac{\partial \rho^d}{\partial x_i} \right) \geq 2d \cdot M = fil(\rho^{2d}).$$

Logo $\Gamma_+ \left(\rho^d \cdot \frac{\partial h}{\partial x_i} - h \cdot \frac{\partial \rho^d}{\partial x_i} \right) \subset \Gamma_+(\rho^{2d})$, e daí pelo lema 3.2.9 temos que existe $c_i > 0$ tal que

$$\left\| \rho^d \cdot \frac{\partial h}{\partial x_i} - h \cdot \frac{\partial \rho^d}{\partial x_i} \right\| \leq c_i \cdot \rho^{2d},$$

o que implica que

$$\left\| \frac{\rho^d \cdot \frac{\partial h}{\partial x_i} - h \cdot \frac{\partial \rho^d}{\partial x_i}}{\rho^{2d}} \right\| \leq c_i,$$

concluindo que ∇f é limitada e pelo Teorema do Valor Médio temos que f é lipschitz. ■

Seja $f : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p, 0$ um germe de função analítica, com $n \geq p$, definimos $N_R^* f = \sum_I M_I^{2\alpha_I}$ onde M_I percorre os determinantes dos menores $p \times p$ de df , $I = \{i_1, \dots, i_p\}$, $\alpha_I = \frac{\alpha}{s_I}$ com $s_I = fil(M_I)$ e $\alpha = mmc\{s_I\}$.

Exemplo 17: Considere uma filtração fixada e a aplicação $f : \mathbb{R}^3, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$

$$f(x, y, z) = (zxy + y^2, x^3 + z^2 + x^2y),$$

Então

$$Jac(f) = \begin{bmatrix} zy & zx + 2y & xy \\ 3x^2 + 2xy & x^2 & 2z \end{bmatrix},$$

Portanto

$$M_1 = \begin{vmatrix} zy & zx + 2y \\ 3x^2 + 2y & x^2 \end{vmatrix} = x^2zy + (3x^2 + 2y)(zx + 2y) \text{ e}$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} zx + 2y & xy \\ x^2 & 2z \end{vmatrix} = (zx + 2y)(2z) + x^3y.$$

Daí

$$N_R^*f = (x^2zy + 3x^3z + 6x^2y + 2xyz + 4y^2)^{2\alpha_1} + (2xz^2 + 4yz + x^3y)^{2\alpha_2}.$$

Observe que $fil(M_I^{2\alpha_I}) = 2\alpha_I \cdot fil(M_I) = 2\alpha_I \cdot s_I = 2\alpha$, logo $fil(N_R^*f) = 2\alpha$.

Suponha que $N_R^*f = H_D + \dots + H_L$ onde H_I são A -formas de grau I com 0 como um ponto $\Gamma_+(\rho^D)$ -isolado de N_R^*f . Ora

$$N_R^*f = \| N_R^*f \| = \| H_D + \dots + H_L \| \leq \| H_D \| + \dots + \| H_L \|$$

Aplicando o lema 3.2.9 em cada parcela H_I , temos a existência de $c_I > 0$ tal que em uma vizinhança da origem

$$\| H_I \| \leq c_I \cdot \rho^D$$

Logo

$$N_R^*f \leq c_D \rho^D + \dots + c_L \rho^D = (c_D + \dots + c_L) \rho^D = c_2 \rho^D.$$

Por outro lado $N_R^*f = H_D + \dots + H_L$ têm o 0 como ponto $\Gamma_+(\rho^D)$ -isolado. Então pelo lema 3.2.10 existe um número real c_1 tal que $N_R^*f \geq c_1 \cdot \rho^D$, nos garantindo a existência de $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$c_1 \cdot \rho^D \leq N_R^*f \leq c_2 \cdot \rho^D$$

Considere o germe analítico $\theta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ e a deformação $f_t = f + t \cdot \theta$ com $fil(\theta_i) > fil(f_i)$ e $0 \leq t \leq 1$. Observe que:

$$Jac(f_t) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} + t \cdot \frac{\partial \theta_i}{\partial x_j} \right]_{p \times n} = Jac(f) + t \cdot Jac(\theta),$$

de onde tiramos que:

$$N_R^*f_t = N_R^*f + t \cdot \Theta.$$

Logo temos:

$$N_R^*f = \| N_R^*f \| = \| N_R^*f_t - t \cdot \Theta \| \leq \| N_R^*f_t \| + t \cdot \| \Theta \| \leq N_R^*f_t + \| \Theta \|,$$

pois $t \in [0, 1]$. Sabemos que existe $c_1 > 0$, tal que

$$c_1 \rho^D \leq N_R^* f \leq N_R^* f_t + \|\Theta\|$$

e uma vez que $\text{fil}(\Theta) > \text{fil}(N_R^* f)$ obtemos que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Theta}{\rho^D} = 0$ (veja a Proposição 5.0.8 no Apêndice), portanto

$$c_1 \rho^D \leq N_R^* f_t.$$

Por outro lado

$$N_R^* f_t \leq N_R^* f + \|\Theta\| \leq c_2 \rho^D + \|\Theta\|.$$

Ora

$$\text{fil}(\Theta) > \text{fil}(N_R^* f) > \text{fil}(\rho^D), \text{ logo } \Gamma_+(\Theta) \subset \Gamma_+(\rho^D)$$

e do Lema 3.2.9 temos que existe $c_3 > 0$ tal que $\|\Theta\| \leq c_3 \rho^D$.

Portanto

$$N_R^* f_t \leq N_R^* f + \|\Theta\| \leq c_2 \rho^D + c_3 \rho^D$$

Daí segue o seguinte resultado.

Lema 4.1.5 *Seja $f : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p, 0$ um germe de aplicação polinomial. Suponhamos que $N_R^* f = H_D + \dots + H_L$ admite 0 como um ponto $\Gamma_+(\rho^d)$ -isolado. Então, se $f_t = f + t \cdot \theta$, $t \in [0, 1]$ é uma deformação de f onde $\theta : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p, 0$ é um germe de aplicação polinomial com $\text{fil}(\theta_i) > \text{fil}(f_i)$ existem $c_1, c_2 > 0$ tais que*

$$c_1 \rho^D \leq N_R^* f_t \leq c_2 \rho^D.$$

4.2 Teorema Principal e Exemplos

Mostramos ao longo do texto que a Teoria de Singularidades têm em seu meio a preocupação com as classes das funções, não apenas com estas em si mas, com toda uma classe de \mathcal{R} -equivalência, daí é natural que se questione quais as condições para que toda uma família de classes seja \mathcal{R} -equivalente a um germe polinomial f e o que se pode afirmar ao se introduzir uma deformação da forma $f_t = f + t \cdot \theta$ em f , onde θ é um germe analítico. O resultado a seguir é devido a A. Fernandes & H. Soares em [8].

Teorema 4.2.1 *Seja $f : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p, 0$ um germe polinomial. Suponha que $N_R^* f = \sum_I M_I^{2\alpha_I} = H_D + \dots + H_L$ admite 0 como um ponto $\Gamma_+(\rho^D)$ -isolado. Se $f_t = f + t \cdot \theta$ é uma deformação de f com $\text{fil}(\theta_i) \geq \text{fil}(f_i) + R - r$, então f_t é bilipschitz trivial.*

Demonstração: Seja M_{t_I} um menor $p \times p$ de df_t , $I = (i_1, \dots, i_p)$, $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p \leq n$. Então existe um campo de vetores W_I associado a M_{t_I} , tal que

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} \cdot M_{t_I} = df_t(W_{t_I})$$

onde

$$W_{t_I} = \sum_{s=1}^n w_s \frac{\partial}{\partial x_s}, \text{ com } \begin{cases} w_i = 0, \text{ se } i \notin I \\ w_{i_m} = \sum_{j=1}^r \left[\text{cof} \left(\frac{\partial f_{t_j}}{\partial x_{i_m}} \right) \theta_j \right] \text{ com } i_m \in I \end{cases}.$$

(veja no Apêndice os Lemas 5.0.4 e 5.0.5)

Seja $W_R = \sum_I M_{t_I}^{2\alpha_I-1} \cdot W_{t_I}$, temos então que $N_R^* f_t \cdot \frac{\partial f_t}{\partial t} = df_t \cdot W_R$. Observe que:

$$\text{fil}(W_R) = \text{fil} \left(\sum_I M_{t_I}^{2\alpha_I-1} \cdot W_{t_I} \right) = \min_I \left\{ \text{fil}(M_{t_I}^{2\alpha_I-1}) + \text{fil}(W_{t_I}) \right\}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \text{fil}(W_R) &= \min_I \left\{ \text{fil}(M_{t_I}^{2\alpha_I-1}) + \text{fil}(W_{t_I}) \right\} \geq \\ &\geq \min_I \left\{ (2\alpha_{t_I} - 1) \text{fil } M_{t_I} + \text{fil } W_{t_I} \right\} = \min_I \left\{ 2\alpha_{t_I} \cdot \text{fil } M_{t_I} - \text{fil } M_{t_I} + \text{fil } W_{t_I} \right\}. \end{aligned}$$

Como $\alpha = \alpha_{t_I} \cdot s_{t_I}$, temos

$$\text{fil}(W_R) \geq \min_I (2\alpha - \text{fil}(M_{t_I}) + \text{fil}(W_{t_I})),$$

por outro lado $\left(\frac{\partial f_t}{\partial t} \right)_j = \theta_j$ e daí

$$\begin{aligned} \text{fil}(W_{t_I}) &= \text{fil} \left(w_{i_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} + \dots + w_{i_p} \cdot \frac{\partial}{\partial x_{i_p}} \right) = \text{fil} \left(\sum_{j=1}^p N_{j i_1} \cdot \theta_j + \dots + \sum_{j=1}^p N_{j i_p} \cdot \theta_j \right) \geq \\ &\geq \min_{j, i_m} \text{fil} (N_{j i_m} \cdot \theta) \geq \min_{j, i_m} (\text{fil } N_{j i_m} + \text{fil } \theta_j). \end{aligned}$$

Onde $N_{j i_m}$ é o $(p-1) \times (p-1)$ menor cofator de $\frac{\partial f_{t_j}}{\partial x_{i_m}}$ em df_t . Portanto

$$\text{fil}(W_R) \geq \min_{I, j} (2\alpha - \text{fil } M_{t_I} + \text{fil } N_{j i_m} + \text{fil } \theta_j).$$

Analisando a expansão de M_{t_I} pela linha ∂f_{t_j}

$$\begin{aligned} M_{t_I} &= \begin{vmatrix} \dots & & \frac{\partial f_{t_1}}{\partial x_{i_m}} & & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{t_j}}{\partial x_{i_1}} & \dots & \frac{\partial f_{t_j}}{\partial x_{i_m}} & \dots & \frac{\partial f_{t_j}}{\partial x_{i_p}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & & \frac{\partial f_{t_p}}{\partial x_{i_m}} & & \dots \end{vmatrix} = \\ &= \frac{\partial f_{t_j}}{\partial x_{i_1}} \text{cof}(j i_1) + \dots + \frac{\partial f_{t_j}}{\partial x_{i_m}} N_{j i_m} + \dots + \frac{\partial f_{t_j}}{\partial x_{i_p}} \text{cof}(j i_p) \end{aligned}$$

daí

$$\text{fil } M_{t_I} \leq \text{fil} \left(\frac{\partial f_{t_j}}{\partial x_{i_m}} N_{j i_m} \right) \Rightarrow \text{fil } M_{t_I} - \text{fil} \frac{\partial f_{t_j}}{\partial x_{i_m}} \leq \text{fil} (N_{j i_m})$$

De onde se conclui que:

$$fil(W_R) \geq \min \left\{ 2\alpha - fil(M_{t_l}) + fil(M_{t_l}) - fil\left(\frac{\partial f_{t_j}}{\partial x_{i_m}}\right) + fil\theta_j \right\}.$$

Fazemos notar que, de forma análoga à qual trabalhamos na página 35 deste documento, o fato de $r \leq w_1$ e $r \leq w_2$ então

$$fil\left(\frac{\partial f_t}{\partial x_i}\right) \leq fil f_t - r \Rightarrow -fil\left(\frac{\partial f_t}{\partial x_i}\right) \geq r - fil f_t.$$

Portanto

$$\min \left\{ 2\alpha - fil\left(\frac{\partial f_t}{\partial x_i}\right) + fil\theta_j \right\} \geq \min \{ 2\alpha + r - fil f_t + fil\theta_j \},$$

da hipótese do Teorema temos $fil(W_R) \geq 2\alpha + R = fil(N_R^* f_t) + R$.

Seja $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0 \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0$ o campo de vetores

$$V(x, t) = \frac{W_R}{N_R^* f_t}$$

pelo Lema 4.1.5 temos a existência de $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$c_1 \rho^D \leq N_R^* f_t \leq c_2 \rho^D \Rightarrow c_1 \leq \frac{N_R^* f_t}{\rho^D} \leq c_2.$$

Logo usando a Proposição 4.1.4 temos que o campo V é lipschitz. Logo a equação

$$\frac{\partial f_t}{\partial t}(x, t) = (\partial f_t)_x(V(x, t))$$

implica a trivialidade bilipschitz da família f_t em uma vizinhança de $t = 0$. O mesmo argumento em uma vizinhança de $t = t_0, \forall t_0 \in [0, 1]$ completa a prova do Teorema. ■

Exemplo 4.2.2 (Exemplo de Briançon-Speder)

Considere a família $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ com

$$F(x, y, z, t) = x^{15} + xy^7 + z^5 + t \cdot x^a y^b z^c.$$

Fernandes e Ruas [16] mostraram que se $a + 2b + 3c \geq 17$ então F_t é bilipschitz-trivial ao longo do parâmetro t , próximo da origem.

Seja

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

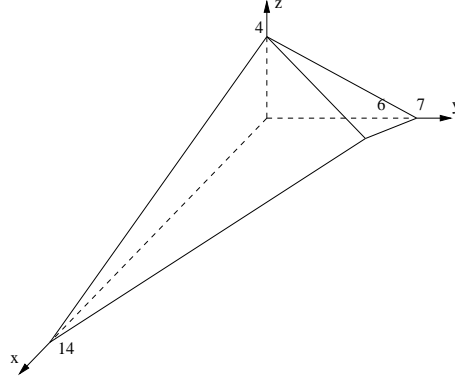
Em F_t consideraremos $f(x, y, z) = x^{15} + xy^7 + z^5$ e $\theta = x^a y^b z^c$. Disso temos que

$$df = [15x^{14} + y^7 \quad 7xy^6 \quad 5z^4]$$

de onde tiramos

$$M_1 = 15x^{14} + y^7, \quad M_2 = 7xy^6, \quad M_3 = 5z^4$$

As faces compactas do poliedro $\Gamma_+(A)$ (figura a seguir) são dadas por:



$P_{\Delta_1}(x, y, z) = x^{14} + z^4 + xy^6$ e $P_{\Delta_2}(x, y, z) = y^7 + z^4 + xy^6$, que são quase homogêneos do tipo $(6, 13, 21, 84)$ e $(4, 4, 7, 28)$. De onde tiramos os vetores primitivos $v_1 = (6, 13, 21)$ e $v_2 = (4, 4, 7)$ e os valores:

$$l(v_1) = \langle (6, 13, 21), (1, 6, 0) \rangle = 84$$

$$l(v_2) = \langle (4, 4, 7), (1, 6, 0) \rangle = 28$$

$$M = \text{mmc}\{l(v_1), l(v_2)\} = 84$$

$$R = \max\{6, 13, 21, 3 \cdot 4, 3 \cdot 7\} = 21 \text{ e } r = \min\{6, 13, 21, 3 \cdot 4, 3 \cdot 7\} = 6$$

Temos que $N_R^* f = M_1^{2\alpha_1} + M_2^{2\alpha_2} + M_3^{2\alpha_3}$, com $\alpha_i = \frac{\alpha}{s_i}$, $s_i = \text{fil } M_i$ e $\alpha = \text{mmc}\{s_i\}$. Genericamente a filtração de um monômio $x^a y^b z^c$ é dado por:

$$\text{fil}(x^a y^b z^c) = \min\{\langle (a, b, c), (6, 13, 21) \rangle, 3 \langle (a, b, c), (4, 4, 7) \rangle\}$$

Daí a filtração de f é o mínimo das filtrações dos monômios x^{15}, xy^7, z^5 , isto é:

$$\text{fil } f = \min\left\{\underbrace{\text{fil } x^{15}}_{90}, \underbrace{\text{fil } xy^7}_{96}, \underbrace{\text{fil } z^5}_{105}\right\} = 90.$$

Calculando os valores dos termos s_i

$$s_1 = \text{fil } M_1 = \text{fil}(x^{14} + y^7) = \min\{\text{fil}(x^{14}), \text{fil}(y^7)\} = 84$$

Fazendo as contas análogas a anterior para s_2, s_3 obtemos $s_1 = s_2 = s_3 = 84$, logo $\alpha_i = 1$, para $i = 1, 2$ ou 3 . Desta forma:

$$N_R^* f = (15x^{14} + y^7)^2 + (7xy^6)^2 + (5z^4)^2 \text{ é uma } A\text{-forma de grau } 2.$$

Note que 0 é um ponto $\Gamma_+(\rho^2)$ isolado pois:

$$(N_R^* f)_{\Delta_1} = 225x^{28} + 49x^2y^{12} + 25z^8 \Leftrightarrow x = z = 0$$

$$(N_R^* f)_{\Delta_2} = y^{14} + 49x^2y^{12} + 25z^8 \Leftrightarrow x = y = z = 0$$

Ou seja $(N_R^* f)_{\Delta_i}$ não têm soluções fora dos eixos coordenados qualquer que seja $i = 1, 2$.

Logo para que $F(x, y, z, t) = f_t(x, y, z) = x^{15} + xy^7 + z^5 + t \cdot x^a y^b z^c$ seja trivialmente bilipschitz é suficiente que

$$\text{fil}(x^a y^b z^c) \geq \text{fil}(f) + R - r$$

isto é,

$$\min\{6a + 13b + 21c, 12a + 12b + 21c\} \geq 90 + 21 - 6 = 105$$

O artigo [16] de Fernandes e Ruas não pode detectar quaisquer das deformações $x^a y^b z^c$ a seguir, para os monômios:

$$xy^3 z^3, x^3 y^2 z^3, x^2 y z^4, x z^5, z^5, x^7 z^3$$

porém as famílias f_t são trivialmente bilipschitz pelo Teorema 4.2.1. Por outro lado o nosso resultado principal não capta a deformação

$$f_t(x, y, z) = x^{15} + xy^7 + z^5 + t \cdot x^{17}$$

pois $fil(x^{17}) = 102$, porém ainda é uma família trivialmente bilipschitz já que satisfaz a hipótese $a + 2b + 3c \geq 17$, mostrada em [16].

Exemplo 4.2.3 Seja $f : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ definida por

$$f(x, y) = (xy, x^{2b+2} - y^{2b} + x^{2r} \cdot y^{2s}),$$

com $r + s = b$, $r + 2s = b + 1$ e $r > s$.

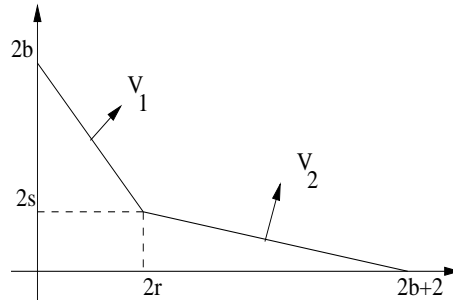
Calculando df :

$$df = \begin{pmatrix} y & x \\ (2b+2)x^{2b+1} + 2bx^{2r-1} \cdot y^{2s} & -2b \cdot y^{2b-1} + 2s \cdot x^{2r} \cdot y^{2s-1} \end{pmatrix}$$

Logo o único menor M_i de df é dado por:

$$\begin{aligned} M_i &= -2by^{2b} + 2sx^{2r}y^{2s} - (2b+2)x^{2b+2} - 2rx^{2r}y^{2s} = \\ &= -2(by^{2b} - sx^{2r}y^{2s} + (b+1)x^{2b+2} + rx^{2r}y^{2s}) = \\ &= -2(by^{2b} + x^{2r}y^{2s} + (b+1)x^{2b+2} + (r-s)x^{2r}y^{2s}). \end{aligned}$$

Observamos que se $br + (b+1)s < (b+1)b$ é satisfeito, o poliedro de Newton de $\Gamma_+(\rho^{2b(b+1)})$ têm duas faces compactas como na figura:



onde

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{b} & 0 & \frac{r}{(b+1)b} \\ 0 & \frac{1}{b+1} & \frac{s}{(b+1)b} \end{pmatrix}.$$

De onde tiramos os polinômios que caracterizam as faces:

$$p_{\Delta_1}(x, y) = x^{2r} \cdot y^{2s} + y^{2b} \quad \text{e} \quad p_{\Delta_2}(x, y) = x^{2b+2} + x^{2r} \cdot y^{2s}$$

respectivamente quase-homogêneos do tipo:

$$(1, 1; 2b) \quad \text{e} \quad (1, 2; 2b + 2)$$

De onde tiramos $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (1, 2)$. Calculando os valores $l(v_1)$ e $l(v_2)$:

$$l(v_1) = \langle (1, 1), (2r, 2s) \rangle = 2b$$

$$l(v_2) = \langle (1, 2), (2r, 2s) \rangle = 2r + 4s = 2(r + 2s) = 2(b + 1)$$

Observe que $M_i = H_{2b(b+1)}$, ou seja, uma A -forma de grau $2b(b+1)$, logo $N_R^* f = M_i^2$, admite 0 como ponto $\Gamma_+(\rho^{2b(b+1)})$ -isolado, pois

$$\begin{aligned} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; N_R^* f|_{\Delta_1} = 0\} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (r - s)x^{2r} \cdot y^{2s} + by^{2b} = 0\} \subset \\ &\subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \cdot y = 0\}, \end{aligned}$$

pois $r > s$ e

$$\begin{aligned} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; N_R^* f|_{\Delta_2} = 0\} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (r - s)x^{2r} \cdot y^{2s} + (b + 1)x^{2b+2} = 0\} \subset \\ &\subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \cdot y = 0\}. \end{aligned}$$

Neste caso, o controle associado a A é:

$$\rho(x, y) = (x^{2b+2} + y^{2b} + x^{2r} \cdot y^{2s})^{\frac{1}{2b(b+1)}}.$$

Como $M = mmc\{l(v_1), l(v_2)\} = 2b(b + 1)$, obtemos que a filtração de um monômio $x^\alpha y^\beta$ é dada por:

$$\begin{aligned} \text{fil}(x^\alpha y^\beta) &= \min \left\{ \frac{2b(b+1)}{2b} \langle (\alpha, \beta), (1, 1) \rangle, \frac{2b(b+1)}{2(b+1)} \langle (\alpha, \beta), (1, 2) \rangle \right\} = \\ &= \min \{(b + 1)(\alpha + \beta), b(\alpha + 2\beta)\}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

De onde tiramos

$$\text{fil}(xy) = \min \{2(b + 1), 3b\} = 2b + 2.$$

$$\text{fil}(y^{2b}) = \min \{2b(b + 1), 4b\} = 2b(b + 1).$$

$$\text{fil}(x^{2r} y^{2s}) = \min \{2b(b + 1), 2b(b + 1)\} = 2b(b + 1).$$

$$\text{fil}(x^{2b+2}) = \min \{(2b + 2)(b + 1), 2b(b + 1)\} = 2b(b + 1).$$

Portanto $\text{fil}(xy) = 2b + 2$ e $\text{fil}(x^{2b+2} - y^{2b} + x^{2r} y^{2s}) = 2b(b + 1)$. Calculando os valores de

$$R = \max_{i,j} \left\{ \frac{M}{l(v_i^j)} v_i^j \right\} \quad \text{e} \quad r = \min_{i,j} \left\{ \frac{M}{l(v_i^j)} v_i^j \right\}:$$

$$R = \max \left\{ \frac{2b(b+1)}{2b}, \frac{2b(b+1)}{2(b+1)}, \frac{2b(b+1)}{2b} \cdot 2 \right\} = \max \{b + 1, b, 2b\} = 2b.$$

$$r = \min \left\{ \frac{2b(b+1)}{2b}, \frac{2b(b+1)}{2(b+1)}, \frac{2b(b+1)}{2b} \cdot 2 \right\} = \min \{b + 1, b, 2b\} = b.$$

Agora, seja $\theta_1 = x^{b-1} \cdot y$ e $\theta_2 = x^{2b-1} \cdot y$. Então

$$\text{fil}(\theta_1) = b(b + 1) \geq \text{fil} f_1 + R - r = 3b + 2$$

$$\text{fil}(\theta_2) = b(2b + 3) \geq \text{fil} f_2 + R - r = b(2b + 3)$$

Portanto a família $f_t(x, y) = (xy, x^{2b+2} - y^{2b} + x^{2r} \cdot y^{2s}) + t(x^{b-1} \cdot y, x^{2b+1} \cdot y)$ é trivialmente bilipschitz.

Capítulo 5

Apêndice

Neste parte do trabalho provaremos resultados que complementam o texto, mas que consideramos de caráter opcional para uma leitura.

Definição 5.0.4 Um germe de função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dito quase-homogêneo de grau pesado d e pesos w_1, w_2, \dots, w_n , ou simplesmente do tipo $(w_1, w_2, \dots, w_n, d)$ quando

$$f(t^{w_1}x_1, t^{w_2}x_2, \dots, t^{w_n}x_n) = t^d \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Lema 5.0.5 Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ um germe de função quase-homogêneo do tipo $(w_1, w_2, \dots, w_n, 2d)$. Então existe $\theta > 0$ tal que $\|f(x)\| \geq \theta \cdot \rho^d(x)$.

Demonstração: Seja $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho^d(x) = 1\}$, note que para cada $x \neq 0$ existe $y \in S$ e $t > 0$ tal que $x = (t^{w_1}y_1, \dots, t^{w_n}y_n)$, pois a aplicação $\varphi : S \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi(y, t) = (t^{w_1}y_1, \dots, t^{w_n}y_n)$ é sobrejetora, pois S é homeomorfo a S_{n-1} , sendo $\psi : S_{n-1} \rightarrow S$ com $\psi(x) = t^w x$ o homeomorfismo subtendido, note que o fato de S_{n-1} ser compacto implica que S é compacto, portanto $\|f\|$ restrita a S admite um máximo e um mínimo. Agora considere $\theta = \min_{y \in S} \|f(y)\|$ então

$$\begin{aligned} \|f(x)\| &= \|f(t^{w_1}y_1, \dots, t^{w_n}y_n)\| = \|t^{2d} \cdot f(y)\| \geq t^{2d} \cdot \theta = t^{2d} \cdot \theta \cdot \rho^d(y) = \\ &= \theta \cdot \rho^d(t^{w_1}y_1, \dots, t^{w_n}y_n) = \theta \cdot \rho^d(x) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|f(x)\| \geq \theta \cdot \rho^d(x)$$

Portanto no Lema 3.2.10 se $\rho^d(x)$ têm uma face compacta, temos $\rho^d(x)$ quase-homogêneo e pelo Lema visto acima temos a existência do θ procurado. Mostrando que $\psi : S_{n-1} \rightarrow S$ com $\psi(x) = t^w x$ é um homeomorfismo.

Como $\rho^d(x) = x_1^{2a_1} + \dots + x_n^{2a_n} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ e além disso $\rho^d(x) > 0$, se $x \neq 0$, logo para cada $x \neq 0$ podemos escolher $t > 0$ tal que $t^{2d}\rho^d(x) = 1$.

Note que $t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ determina uma aplicação contínua estritamente positiva, daí a aplicação $\psi(x) = t^w x$ é contínua, perceba que ψ está bem definida pois

$$\begin{aligned} \rho^d(t^w x) &= \rho^d(t^{w_1}x_1, \dots, t^{w_n}x_n) = (t^{w_1}x_1)^{2a_1} + \dots + (t^{w_n}x_n)^{2a_n} = \\ &= t^{2a_1 w_1} x_1^{2a_1} + \dots + t^{2a_n w_n} x_n^{2a_n} = t^{2d}(x_1^{2a_1} + \dots + x_n^{2a_n}) = t^{2d}\rho^d(x) = 1. \end{aligned}$$

Lema 5.0.6 Sejam $f, \theta : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p, 0$ germes analíticos e

$$M_{p \times p} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_p}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{i_p}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial f_p}{\partial x_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_{i_p}} \end{pmatrix}$$

um menor $p \times p$ de df (com $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n$). Então

$$(\det M) \cdot \theta = df \left[\sum_{s=1}^p \sum_{r=1}^p [\text{cof} \left(\frac{\partial f_r}{\partial x_{i_s}} \right) \theta_r \frac{\partial}{\partial x_{i_s}}] \right]$$

Demonstração: Temos que $(\det M) \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_p \end{bmatrix} = (\det M) \cdot I \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_p \end{bmatrix}$ com I sendo a matriz identidade $p \times p$. Como

$$\det(M) \cdot I = M \cdot \text{adj}(M)$$

com $\text{adj}(M)$ sendo a matriz adjunta de M . Teremos

$$\begin{aligned} (\det M) \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_p \end{bmatrix} &= M \cdot \text{adj}(M) \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_p \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_p}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{i_p}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial f_p}{\partial x_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_{i_p}} \end{bmatrix}_{p \times p} \begin{bmatrix} \text{cof} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_{i_1}} \right) & \text{cof} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_{i_1}} \right) & \cdots & \text{cof} \left(\frac{\partial f_p}{\partial x_{i_1}} \right) \\ \text{cof} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_{i_2}} \right) & \text{cof} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_{i_2}} \right) & \cdots & \text{cof} \left(\frac{\partial f_p}{\partial x_{i_2}} \right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cof} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_{i_p}} \right) & \text{cof} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_{i_p}} \right) & \cdots & \text{cof} \left(\frac{\partial f_p}{\partial x_{i_p}} \right) \end{bmatrix}_{p \times p} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_p \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_p}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{i_p}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial f_p}{\partial x_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_{i_p}} \end{bmatrix}_{p \times p} \begin{bmatrix} \text{cof} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_{i_1}} \right) \theta_1 + \text{cof} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_{i_1}} \right) \theta_2 + \cdots + \text{cof} \left(\frac{\partial f_p}{\partial x_{i_1}} \right) \theta_p \\ \text{cof} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_{i_2}} \right) \theta_1 + \text{cof} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_{i_2}} \right) \theta_2 + \cdots + \text{cof} \left(\frac{\partial f_p}{\partial x_{i_2}} \right) \theta_p \\ \vdots \\ \text{cof} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_{i_p}} \right) \theta_1 + \text{cof} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_{i_p}} \right) \theta_2 + \cdots + \text{cof} \left(\frac{\partial f_p}{\partial x_{i_p}} \right) \theta_p \end{bmatrix}_{p \times 1} \end{aligned}$$

Observe que ao adicionar $n - p$ linhas nulas em $\text{adj}(M) \cdot \theta$ de forma que as linhas de índice $k \neq i_s$ são nulas e as linhas de índice i_s serão dadas por $\sum_{j=1}^p \text{cof} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_{i_s}} \right) \theta_j$ teremos uma matriz W_I tal que

$$df \cdot W_I = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \frac{\partial f_p}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{p \times n} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \text{cof} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_{i_1}} \right) \theta_1 + \text{cof} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_{i_1}} \right) \theta_2 + \cdots + \text{cof} \left(\frac{\partial f_p}{\partial x_{i_1}} \right) \theta_p \\ \text{cof} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_{i_2}} \right) \theta_1 + \text{cof} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_{i_2}} \right) \theta_2 + \cdots + \text{cof} \left(\frac{\partial f_p}{\partial x_{i_2}} \right) \theta_p \\ \vdots \\ \text{cof} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_{i_p}} \right) \theta_1 + \text{cof} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_{i_p}} \right) \theta_2 + \cdots + \text{cof} \left(\frac{\partial f_p}{\partial x_{i_p}} \right) \theta_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

Observe que $\det(M) \cdot \theta = df \cdot W_I$, com W_I sendo um campo de vetores associado a M tal que

$$W_I = \sum_{s=1}^n w_s \cdot \frac{\partial}{\partial x_s}, \text{ com } \begin{cases} w_s = 0 \text{ se } s \notin I \\ w_{i_m} = \sum_{j=1}^p [\text{cof} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_{i_m}} \right) \cdot \theta_j] \text{ com } i_m \in I. \end{cases}$$

De forma análoga, para cada deformação $f_t = f + t\theta$ é possível mostrar a existência de um campo de vetores W_{t_I} associado ao menor M_{t_I} que satisfaz

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} \cdot M_{t_I} = df_t(W_{t_I})$$

com

$$W_{t_I} = \sum_{s=1}^n w_s^t \cdot \frac{\partial}{\partial x_s}, \text{ com } \begin{cases} w_s^t = 0 \text{ se } s \notin I \\ w_{i_m}^t = \sum_{j=1}^p [\text{cof} \left(\frac{\partial f_{t_j}}{\partial x_{i_m}} \right) \cdot \theta_j] \text{ com } i_m \in I. \end{cases}$$

Lema 5.0.7 Seja $W_R = \sum_I M_{t_I}^{2\alpha_I-1} \cdot W_{t_I}$ é um menor de df_t e W_{t_I} é o campo de vetores associado a

M_{t_I} (como no lema anterior). Então $N_R^* f_t \cdot \frac{\partial f_t}{\partial t} = df_t \cdot W_R$.

Demonstração: Temos que

$$N_R^* f_t \cdot \frac{\partial f_t}{\partial t} = \sum_I M_{t_I}^{2\alpha_I} \cdot \frac{\partial f_t}{\partial t} = \sum_I M_{t_I}^{2\alpha_I-1} \cdot M_{t_I} \cdot \frac{\partial f_t}{\partial t} = \sum_I M_{t_I}^{2\alpha_I-1} \cdot df_t \cdot W_{t_I}$$

Pela linearidade de df_t temos

$$N_R^* f_t \cdot \frac{\partial f_t}{\partial t} = df_t \cdot \sum_I M_{t_I}^{2\alpha_I-1} \cdot W_{t_I} = df_t \cdot W_R.$$

Proposição 5.0.8 *Seja A uma matriz de vértices cômoda e $h : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ um germe de função analítica tal que $\text{supp}(h) \in \text{int}(\Gamma_+(\rho^d))$. Então,*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{\rho(x)^d} = 0.$$

Demonstração: Basta mostrarmos que para todo $a = (a_1, \dots, a_n)$, pertencente a $\text{int}(\Gamma_+(\rho^d))$ têm-se que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^a}{\rho(x)^d} = 0.$$

Suponhamos que isso não ocorre, então existe $c > 0$ tal que, para toda vizinhança V da origem de \mathbb{R}^n , existe $x \in V$ com

$$\left\| \frac{x^a}{\rho(x)^d} \right\| \geq c.$$

Isso significa que 0 pertence ao fecho do conjunto

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \geq c \cdot \rho(x)^d\}.$$

Como X é semi-algébrico, pelo Lema de Seleção das Curvas, existe uma curva analítica $\lambda : (0, \epsilon] \rightarrow X$, com $\lambda(0) = 0$ tal que

$$\lambda_1(t) \sim t^{\alpha_1}, \dots, \lambda_n(t) \sim t^{\alpha_n}.$$

Então, de $\rho(\lambda(t))^d \leq \frac{1}{c} \|\lambda(t)^a\|$ obtemos que

$$\inf_j \{\langle d \cdot a^j, \alpha \rangle\} \geq \langle a, \alpha \rangle.$$

Agora, $\Delta(\alpha) = \{b \in \Gamma_+(\rho^d); \langle b, \alpha \rangle = l(\alpha)\}$ é uma face de $\Gamma_+(\rho^d)$ onde

$$l(\alpha) = \min \{\langle c, \alpha \rangle; c \in \Gamma_+(\rho^d)\}.$$

Como $\Delta(\alpha)$ contém um dos vértices $d \cdot a^j$, temos que

$$\langle da^j, \alpha \rangle = l(\alpha).$$

Entretanto,

$$\langle a, \alpha \rangle \leq \langle da^j, \alpha \rangle = l(\alpha).$$

portanto $a \in \Gamma(\rho^d)$ o que contradiz a hipótese.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Dimca, *Topics on Real and Complex Singularities*. Friedr Vieweg & Sohn. (1987)
- [2] J.J. Risler & R. Benedetti, *Real algebraic and semi-algebraic sets*. Hermann, Paris. (1990)
- [3] J. Dugundji, *Topology*. Allyn and Bacon, Boston. (1973)
- [4] M. F. Atiyah & I. G. MacDonald, *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley. (1969)
- [5] M. A. S. Ruas, *C^l -Determinação Finita e Aplicações*, Tese de Doutorado, UFSCar, São Carlos. (1983)
- [6] C. Spohr, *Poliedro de Newton e o Número de Milnor*. Dissertação de Mestrado, UFSCar, São Carlos. (2006)
- [7] O. M. A. Yacoub, *Polyédre de Newton et trivialité en famille*. These, Universite D'Angers-U.F.R Sciences.
- [8] A. Fernandes & H. Soares, *Bilipschitz triviality of polynomial maps*. Cadernos de Matemática 04. Artigo 159, ICMC-USP. (2003)
- [9] E. L. Lima, *Curso de Análise, vol II*. IMPA - SBM, Quarta Edição. (1991)
- [10] M. A. S. Ruas, *On the Degree of C^l -Determinacy*. Math. Scandinavica, 59. (1986)
- [11] A. Garcia & Y. Lequain, *Elementos de Álgebra*, Projeto Euclides, IMPA - SBM. (2008)
- [12] C. G. Gibson, *Singular points of smooth mappings*. Pitman Publishing. (1979)
- [13] H. Soares, *Funções de Classe C^k* . Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, No. 1. (2003)
- [14] M. A. S. Ruas, *C^l -determinacy of weighted homogeneous germs*. Hokkaido Mathematical Journal. Vol. 26. (1997)
- [15] H. Soares, *Poliedros de Newton e trivialidade em famílias de aplicações*. Tese de Doutorado. ICMC-USP. (2003)
- [16] A. Fernandes & M. A. Ruas, *Bilipschitz determinacy of quasihomogeneous germs*. Notas do ICMC-USP. (2002)
- [17] J. Briançon & J. N. Speder, *La trivialité topologique n'implique pas le conditions de Whitney*. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 280. (1975)
- [18] C. G. Moreira & M. A. S. Ruas, *The curve selection lemma and Morse-Sard theorem*. Manuscripta math. 129, 401-408. Springer-Verlag. (2009)