Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sobre um Sistema Não Linear Acoplado do Tipo Termoelástico com Condições de Acústica na Fronteira

Raul Kazan da Cunha Araújo

Teresina - 2017

Raul Kazan da Cunha Araújo

Dissertação de Mestrado:

Sobre um Sistema Não Linear Acoplado do Tipo Termoelástico com Condições de Acústica na Fronteira

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Marcondes Rodrigues Clark

Teresina - 2017

FICHA CATALOGRÁFICA
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial do CCN

A663s Araújo, Raul Kazan da Cunha.
Sobre um sistema não linear acoplado do tipo termoelástico com condições de acústica na fronteira / Raul Kazan da Cunha Araújo – Teresina, 2017.
83f.: il. color

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática, 2017.
Orientador: Prof. Dr. Marcondes Rodrigues Clark.

1. Análises - Sistema não Linear. 2. Comportamento Assintótico. I. Título

CDD 515.355

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Sobre um Sistema não Linear Acoplado do Tipo Termoelástico com Condições de Acústica na Fronteira

RAUL KAZAN DA CUNHA ARAUJO

Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 20 de fevereiro de 2017.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Marcondes Rodrigues Clark - Orientador

Isaías Pereira de Jesus
Prof. Dr. Isaías Pereira de Jesus - UFPI

Marcos Vinicio Travaglia
Prof. Dr. Marcos Vinício Travaglia - UFPI

Roger Peres de Moura
Prof. Dr. Roger Perez de Moura - UFPI

Dedico esse trabalho aos meus pais, cujo apoio e carinho foram indispensáveis à minha formação.

Agradecimentos

Primeiramente, sou grato aos meus pais, Ediron Alves e Maria Cilêda, por todo apoio, carinho e dedicação dispensados a meu favor, sem isso, seria impossível alcançar meus objetivos. Agradeço à minha irmã, Maria Eduarda, que sempre tem sido, ao longo da minha vida, uma companheira indispensável.

Agradeço à minha namorada Josy Fernandes, cuja jovialidade, desprendimento e companheirismo serviram de estímulo para que pudesse concluir essa etapa tão importante da minha vida.

Sou imensamente grato ao professor Marcondes Rodrigues Clark, que tem me apoiado e orientado desde a época da iniciação científica. Agradeço-lhe não apenas por sua grande contribuição para minha formação profissional, mas também, por suas preciosas lições de vida que jamais serão esquecidas.

Agradeço à todos os professores do programa de pós-graduação em matemática da UFPI, pela amizade e pela dedicação ao ensino. Sou especialmente grato aos professores que me ministraram disciplinas durante o período do mestrado, são eles: Barnabé P. Lima, Carlos Humberto, Isaías Pereira, José Francisco, Kelton Bezerra e Marcondes Clark.

Agradeço aos meus amigos e amigas de graduação e mestrado, pelo companheirismo, momentos de descontração e estudos em grupo. A ajuda deles foi indispensável para que pudesse chegar até aqui. Em especial, sou grato à Andressa Gomes, Antônio Aguiar, Antônio de Pádua, Antônio Luiz, Atécio Alves, Bruno Mendes, Davi Pereira, Elianderson Santos, Erlane Vieira, Fernando Gomes, Fernando Lima, Francisca Maria, Hércules Bezerra, Jeferson Silva, Jhonata Bezerra, José Edilson, José Lucas, Josimauro Borges, Juliana Gomes, Kelvin Jhonson, Lívio Leandro, Lucas Cassiano, Lucas Quaresma, Rafael Emanoel, Ray Victor, Sandoel Vieira, Tiago Menezes, Yldenilson Almeida.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

"A lição é a seguinte: nunca desista, nunca, nunca, nunca. Em nada. Grande ou pequeno, importante ou não. Nunca desista. Nunca se renda à força, nunca se renda ao poder aparentemente esmagador do inimigo."

Winston Churchill

Resumo

Nessa dissertação provaremos a existência e unicidade de solução global para um sistema não linear do tipo termoelástico com condições de acústica sobre a fronteira. Demonstraremos a existência aplicando o método de Faedo-Galerkin-Lions e a unicidade via Método da Energia. Além disso, provaremos que, sob certas hipóteses, a energia total: $E(t) =$

$$\frac{1}{2}\left\{|u'(t)|^2 + |\theta(t)|^2 + \left(\frac{2\lambda}{\rho+2}\right)\|u(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} + \alpha(t)\left[\|u(t)\|^2 + |f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1} + |f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1}\right]\right\}$$

associada ao problema decai assintoticamente quando $t \to \infty$.

Palavras-Chave: Existência e Unicidade de Solução Global; Sistema Não Linear do Tipo Termoelástico; Condições de Acústica na Fronteira; Comportamento Assintótico.

Abstract

In this dissertation we will prove the existence and uniqueness of the global solution for the nonlinear coupled system of the thermoelastic type with acoustic boundary conditions. We will prove the existence by Faedo-Galerkin-Lions method and the uniqueness via energy method. In addition, we'll see that under certain hypotheses the total energy: $E(t) =$

$$\frac{1}{2}\left\{|u'(t)|^2 + |\theta(t)|^2 + \left(\frac{2\lambda}{\rho+2}\right)\|u(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} + \alpha(t)\left[\|u(t)\|^2 + |f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1} + |f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1}\right]\right\}$$

associated with the problem decays asymptotically when $t \to \infty$.
Keyworks: Existence and Uniqueness of the Global Solution; Nonlinear system; Acoustic Boundary Conditions; Asymptotic behavior.

Sumário

Resumo **iv**

Abstract **v**

Notações Importantes **1**

Introdução **2**

1 Preliminares **4**

1.1 Tópicos de Análise Funcional 4

1.1.1 Convergência Fraca e Convergência Fraca Estrela 4

1.1.2 Espaços Separáveis e Reflexivos 4

1.2 Teoria das Distribuições Escalares 5

1.2.1 Notações 5

1.2.2 O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ 6

1.2.3 A Derivada Distribucional 6

1.3 Os espaços $L^p(\Omega)$ 7

1.4 Espaços de Sobolev 10

1.4.1 $W^{m,p}(\Omega)$ 10

1.4.2 $W^{m,\infty}(\Omega)$ 11

1.4.3 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 11

1.4.4 Teoremas de Imersão 12

1.4.5 Identidade de Gauss 12

1.5 Espaços $L^p(0,T;X)$ 13

1.6 Distribuição Vetorial 15

1.7 Existência e Prolongamento de Soluções de EDO's 16

1.8 Funções Próprias e Decomposição Espectral 17

1.9 Desigualdades 18

2 Existência e Unicidade de Solução Global **20**

2.1 Soluções do Problema Aproximado 22

2.2 Estimativas a priori das soluções aproximadas 28

2.3 Passagem ao Limite das Soluções Aproximadas 40

2.4 Verificação das Condições Iniciais 50

2.5 Unicidade das Soluções 54

3 Comportamento Assintótico **58**

Notações Importantes

A seguir, listamos as notações que foram relevantes ao nosso trabalho.

▷ Operador Gradiente: $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$.

▷ Operador Laplaciano: $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

▷ $Q = \Omega \times (0, T)$, sendo T um número real positivo.

▷ Espaço $H_\Delta(\Omega)$: $H_\Delta(\Omega) = \{f; f \in H^1(\Omega) \text{ e } \Delta f \in L^2(\Omega)\}$.

▷ Norma de $H_\Delta(\Omega)$: $\|f\|^2_{H_\Delta(\Omega)} = |f|^2 + |\Delta f|^2$.

▷ $V = \{f; f \in H^1(\Omega) \text{ e } \gamma_0(f) = f\big|_{\Gamma_0} = 0\}$.

▷ Norma de $X \cap Y$: $\|f\|_{X\cap Y} = \|f\|_X + \|f\|_Y$, onde X e Y são espaços normados.

▷ Os símbolos $(.,.), ((.,.)), (.,.)_{\Gamma_1}, |.|, \|.\|, |.|_{\Gamma_1}$ denotam os produtos internos e respectivas normas dos espaços $L^2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ e $L^2(\Gamma_1)$.

▷ O produto interno e a norma de $H_0^1(\Omega)$ também serão representados por $((.,.))$ e $\|.\|$, respectivamente.

▷ A norma de V, que é equivalente a de $H^1(\Omega)$ e que é a mesma norma do $H_0^1(\Omega)$, isto é,

$$\|f\|_V = \left(\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = |\nabla f|_{L^2(\Omega)},$$

também será representada por $\|.\|$. O contexto deixará claro ao leitor sobre qual das normas, se de $H^1(\Omega)$ ou $H_0^1(\Omega)$ ou V, estaremos usando.

▷ Quando o contexto deixar claro, denotaremos o valor absoluto por $|.|$, caso contrário, usaremos $|.|_{\mathbb{R}}$.

Introdução

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto limitado, aberto e conexo do $\mathbb{R}^n$, situado localmente num dos lados de sua fronteira Γ, à qual supomos ser uma variedade compacta sem bordo, de classe C^2 e $(n-1)$-dimensional. Suponhamos ainda que Γ seja formada por duas partes disjuntas Γ_0 e Γ_1 ($\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ e $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$), ambas conexas e de medida positiva. Nesse trabalho, faremos uma análise do sistema não-linear acoplado do tipo termoelástico e com condições de acústica sobre a fronteira

$$\begin{aligned}
u'' - \alpha\Delta u + \lambda|u|^\rho u + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta = 0 \;\; &\text{em} \;\; \Omega \times (0,\infty), \\
\theta' - \beta\left(\int_\Omega \theta dx\right)\Delta\theta + (\mathbf{a}\cdot\nabla)u' = 0 \;\; &\text{em} \;\; \Omega \times (0,\infty), \\
u = 0 \;\; &\text{sobre} \;\; \Gamma_0 \times (0,\infty), \\
u' + f_1\delta'' + f_2\delta' + f_3\delta = 0 \;\; &\text{sobre} \;\; \Gamma_1 \times (0,\infty), \\
\frac{\partial u}{\partial \nu} - \delta' + \eta(u') = 0 \;\; &\text{sobre} \;\; \Gamma_1 \times (0,\infty), \\
\theta = 0 \;\; &\text{sobre} \;\; \Gamma \times (0,\infty),
\end{aligned} \tag{1}$$

onde $\alpha : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\beta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\eta : \Gamma_1 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f_i : \Gamma_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, para $i = 1,2,3$, são funções dadas, λ e ρ são constantes positivas, $a = (a_1, \ldots, a_n)$ é um vetor fixado do $\mathbb{R}^n$, $(\mathbf{a}\cdot\nabla)$ é o operador $\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ é o operador laplaciano, ν denota o vetor normal unitário exterior sobre Γ_1 e, por fim, $'$ denota a derivada em relação à t no sentido das distribuições. Suponhamos ainda que o sistema (1) esteja submetido às condições iniciais e de fronteira

$$\begin{aligned}
u(x,0) = u_0(x), u'(x,0) = u_1(x) \;\; &\text{para} \;\; x \in \Omega, \\
\theta(x,0) = \theta_0(x) \;\; &\text{para} \;\; x \in \Omega, \\
\delta(x,0) = \delta_0(x), \delta'(x,0) = \frac{\partial u_0}{\partial \nu}(x) + \eta(x, u_1(x)) \;\; &\text{para} \;\; x \in \Gamma_1,
\end{aligned} \tag{2}$$

onde $u_0, u_1, \theta_0 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\delta_0 : \Gamma_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções dadas.

As condições acústicas sobre a fronteira foram tratadas por Morse-Ingard (1968) e o problema correspondente, dependente do tempo, foi formulado pela primeira vez por Beale-Rosencrans (1974). Esse trabalho pioneiro foi seguido pelo artigo de Beale (1976), onde vemos um análise detalhada das condições acústicas sobre a fronteira para a equação linear da onda em domínios limitados. O primeiro trabalho envolvendo equações não lineares foi realizado por C.L Frota e J.A. Goldstein num artigo publicado em 2000, vide [8], onde eles trataram da Equação de Carrier. Essa dissertação baseia-se no trabalho de C.L Frota, H.R. Clark e P. Braz e Silva, vide [2], sendo esse artigo, até onde sabemos, o primeiro a englobar, num mesmo problema, condições de Dirichlet, Feedback e condições acústicas sobre a fronteira para um sistema acoplado do tipo termoelástico.

Esse trabalho está esquematizado do seguinte modo:

No capítulo 1, enunciamos resultados de Análise Funcional, Distribuição de Schwarz, Espaços de Sobolev, entre outros, com o objetivo de fornecer a base matemática necessária ao completo entendimento da sequência do texto.

No capítulo 2, empregamos os métodos de Faedo-Galerkin-Lions e da Energia para demonstrar, respectivamente, a existência e unicidade de solução global para o problema (1)-(2).

No capítulo 3 apresentamos um estudo do comportamento assintótico do energia total associada ao sistema (1) e vemos que, para demonstrar o seu decaimento ao longo do tempo, é necessário supor que os subconjuntos Γ_0 e Γ_1 têm uma geometria especial.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Tópicos de Análise Funcional

1.1.1 Convergência Fraca e Convergência Fraca Estrela

Definição 1.1. *Seja E um espaço vetorial normado. O dual topológico de E, ou simplesmente dual de E, o qual representamos por* E'*, é o conjunto de todos os funcionais lineares contínuos* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$*.*

Definição 1.2 (Convergência Fraca)**.** *Sejam E um espaço de Banach e* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de* E*. Então,* x_k *converge fraco para* x *em* E *, notação* $x_k \rightharpoonup x$ *se, e somente se,* $\langle f, x_k\rangle \to \langle f, x\rangle$*, para todo* $f \in E'$*.*

Definição 1.3 (Convergência Fraca Estrela)**.** *Sejam* E *um espaço de Banach e* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de* E'*. Então,* f_k *converge fraco estrela para* f *em* E'*, notação* $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *se, e somente se,* $\langle f_k, x\rangle \to \langle f, x\rangle$*, para todo* $x \in E$*.*

Observação 1.1. *Lembremos que as topologias fraca e fraca estrela, num espaço normado* E*, são representadas por* $\sigma(E, E')$ *e* $\sigma(E', E)$*, respectivamente.*

1.1.2 Espaços Separáveis e Reflexivos

Seja E um espaço normado. Em E podemos definir a aplicação

$$J : E \longrightarrow E'', \langle J(x), f\rangle = \langle f, x\rangle \quad \text{para todos} \quad x \in E \quad \text{e} \quad f \in E'.$$

à qual é chamada de *mergulho canônico* de E em E''.

Definição 1.4 (Espaço Reflexivo)**.** *Um espaço normado* E *é dito reflexivo quando o mergulho canônico for sobrejetivo, isto é,* $J(E) = E''$.

Definição 1.5. *Um espaço normado* E *que tem um subconjunto enumerável e denso em* E *é dito separável.*

Teorema 1.1 (Banach-Alaoglu-Bourbaki)**.** *Para todo espaço normado E, a bola*

$$B'_E = \{f \in E'; \|f\| \leqslant 1\}$$

é compacta na topologia fraca estrela.

Demonstração. Vide [3], pag. 66. □

Lembremos que um espaço topológico X é metrizável quando existir um métrica em X que define a topologia de X. Agora, podemos enunciar o seguinte

Teorema 1.2. *Seja* E *um espaço de Banach. Então,* E *é separável se, e somente se, a bola unitária* $(B'_E, \sigma(E', E))$ *for metrizável.*

Demonstração. Vide [3], pág.74. □

Corolário 1.1. *Sejam* E *um espaço de Banach separável e* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *uma sequência limitada do seu espaço dual* E'. *Então existe uma subsequência* $(f_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ *de* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *que converge fraco estrela.*

Demonstração. Vide [3], pág.76. □

Teorema 1.3. *Em um espaço de Banach reflexivo, toda sequência limitada possui subsequência fracamente convergente.*

Demonstração. Vide [3], pág. 69. □

1.2 Teoria das Distribuições Escalares

1.2.1 Notações

Chamamos de multi-índice a qualquer n-upla $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, onde $\alpha_i \in \mathbb{N}$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Escrevemos $\alpha \in \mathbb{N}^n$. A ordem de um multi-índice α, denotada por $|\alpha|$ é o inteiro positivo

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n.$$

O operador derivada parcial, de ordem α, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, denotado por D^α, é definido por

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}.$$

1.2.2 O espaço $C_0^\infty(\Omega)$

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ e $\phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real contínua. O suporte de ϕ, denotado por $\mathrm{supp}\phi$, é o fecho do conjunto dos pontos $x \in \Omega$, tal que, $\phi(x) \neq 0$. Representamos por

$$\mathrm{supp}\phi = \overline{\{x \in \Omega; \phi(x) \neq 0\}}^{\Omega}.$$

Definição 1.6. *Denotamos por $C_0^\infty(\Omega)$ a classe de todas as funções reais em Ω, infinitamente diferenciáveis e cujo suporte é compacto, isto é,*

$$\phi \in C_0^\infty(\Omega) \Longrightarrow \phi \in C^\infty(\Omega) \ \text{ e } \ \mathrm{supp}\phi \ \text{ é compacto.}$$

Definição 1.7. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência contida em $C_0^\infty(\Omega)$. Dizemos que $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge para ϕ em $C_0^\infty(\Omega)$ quando:*

1. $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ *e existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que $\mathrm{supp}\phi \subset K$ e $\mathrm{supp}\phi_k \subset K$, para todo $k \in \mathbb{N}$;*

2. $D^\alpha\phi_k \to D^\alpha\phi$, *uniformemente, para todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$.*

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$, munido com a noção de convergência acima é denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

1.2.3 A Derivada Distribucional

Definição 1.8. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Uma aplicação $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma distribuição, quando for linear e contínua, ou seja,*

1. $T(\alpha\psi + \beta\phi) = \alpha T(\psi) + \beta T(\phi)$, *para todos $\psi, \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.*

2. *Se $\phi_k \to \phi$ em $\mathcal{D}(\Omega)$ então $T(\phi_k) \to T(\phi)$ em $\mathbb{R}$.*

O valor da distribuição T em $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ será representado por $\langle T, \phi\rangle$.
O espaço das distribuições em $\mathcal{D}(\Omega)$ também pode ser munido com uma noção de convergência, à qual, é dada a seguir através da seguinte definição.

Definição 1.9. *Considere o espaço das distribuições em* $\mathcal{D}(\Omega)$. *Dizemos que a sequência* $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *converge para* T, *nesse espaço, quando a sucessão* $(\langle T_k, \phi\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$ *converge para* $\langle T, \phi\rangle$, *para todo* $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

O espaço das distribuições em $\mathcal{D}(\Omega)$, munido com a noção de convergência acima, é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Agora, iremos tratar de um conceito muito utilizado na teoria das Equações Diferenciais Parciais (EDP), que é a *derivada no sentido das distribuições* ou *derivada segundo Sobolev-Schwartz*.

Definição 1.10. *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto,* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *e* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *um multi-índice. Definimos a derivada distribucional de ordem* α *de* T *como sendo a aplicação linear e contínua* $D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, *dada por*

$$\langle D^\alpha T, \phi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \phi\rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Segue, da definição acima, que cada distribuição T possui derivadas de todas as ordens. Notemos que a aplicação

$$\begin{aligned} D^\alpha \ : \ \mathcal{D}'(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \\ T &\longmapsto D^\alpha T, \end{aligned}$$

é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$, ou seja, se $T_k \to T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ então $D^\alpha T_k \to D^\alpha T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

1.3 Os espaços $L^p(\Omega)$

Definição 1.11. *Um* σ*-álgebra num conjunto* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *é uma família* $\mathcal{M}$ *de subconjuntos de* Ω *que satisfaz as seguintes condições:*

1. $\Omega, \emptyset \in \mathcal{M}$.

2. *Se* $A \in \mathcal{M}$ *então* $A^c := \Omega - A \in \mathcal{M}$.

3. *Se* $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência em* $\mathcal{M}$ *então* $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{M}$.

Neste caso, o par $(\Omega, \mathcal{M})$ *é chamado espaço mensurável e cada elemento da* σ*-álgebra é dito conjunto mensurável.*

Seja $\mathcal{F}$ uma coleção de subconjuntos de Ω, a interseção de todas as σ-álgebras que contêm $\mathcal{F}$ é também uma σ-álgebra, denominada de σ-álgebra gerada por $\mathcal{F}$ e denotada por $\mathcal{M}(\mathcal{F})$.

Quando (Ω, τ) é um espaço topológico, a σ-álgebra $\mathcal{M}(\tau)$ é chamada de σ-álgebra de Borel de Ω e denotada por $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\Omega)$. Os elementos de $\mathbf{B}$ são chamados de conjuntos de Borel ou borelianos.

Definição 1.12. *Seja $(\Omega, \mathcal{M})$ um espaço mensurável. Uma função $f : (\Omega, \mathcal{M}) \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita mensurável quando $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$, para todo boreliano $A \in \mathbf{B}(\mathcal{R})$.*

Definição 1.13. *Uma medida no espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{M})$ é uma função $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, \infty]$, satisfazendo:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$.

2. *Se $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos disjuntos dois a dois de $\mathcal{M}$, então*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

A medida μ é dita finita se $\mu(\Omega) < \infty$ e é dita σ-finita se existir uma sequência $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}$, tal que $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ e $\mu(A_k) < \infty$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Definição 1.14. *Seja $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $1 \leqslant p < \infty$. Denotamos por $L^p(\Omega)$ o espaço das funções mensuráveis $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que, $|f|^p$ é integrável, à Lebesgue, em Ω. Em símbolos:*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; f \quad \textit{é mensurável e} \quad |f|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

É possível mostrar, vide [16], pág.10, que $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definição 1.15. *Seja $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Dizemos que $L^\infty(\Omega)$ é o conjunto das funções mensuráveis $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que são limitadas quase sempre em Ω, isto é,*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; f \quad \textit{é mensurável e} \quad \exists r > 0 \quad \textit{tal que} \quad |f(x)| \leqslant r \quad \textit{em q.t.p de} \quad x \in \Omega\}.$$

Vemos também em [16], pág.13, que $L^\infty(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|f\|_\infty = \inf\{r > 0; |f| \leqslant r \text{ em q.t.p de } \Omega\}.$$

A desigualdade a seguir, denominada *Desigualdade de Hölder*, desempenha um importante papel em nosso trabalho.

Teorema 1.4. *Seja* $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ *um espaço de medida e* $p, q > 1$ *tais que* $1/p + 1/q = 1$. *Se* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$ *então* $fg \in L^1(\Omega)$ *e, além disso,*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leqslant \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Demonstração. Vide [16], pág. 8. □

Teorema 1.5. *Sejam* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de* $L^p(\Omega)$ *e* $f \in L^p(\Omega)$ *tal que* $\|f_k - f\|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0$. *Então, existe uma subsequência* $(f_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ *de* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *e uma função* h *de* $L^p(\Omega)$ *tais que*

1. $f_{k_j}(x) \to f(x)$ *em q.t.p de* Ω.
2. $|f_{k_j}(x)| \leqslant h(x)$ *para todo* $j \in \mathbb{N}$ *e em q.t.p de* Ω.

Demonstração. Vide [3], pág. 94. □

Representamos por $L^1_{loc}(\Omega)$ o conjunto das funções $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ integráveis, à Lebesgue, em cada subconjunto compacto K de Ω. Em símbolos

$$L^1_{loc}(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; \int_K |f(x)|dx < \infty, \text{ para todo compacto } K \subset \Omega \right\}.$$

O espaço $L^1_{loc}(\Omega)$ é chamado espaço das funções *localmente integráveis* em Ω.

Observação 1.2. *Um tipo particular, muito importante, de distribuição, é aquele definido a partir de funções de* $L^1_{loc}(\Omega)$.
Seja $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ *e definamos* $T_f : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ *por*

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx.$$

Então, T_f *é uma distribuição em* $\mathcal{D}(\Omega)$.

De fato, a linearidade de T_f *decorre da linearidade da integral. Agora, seja* $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *uma sequência em* $\mathcal{D}(\Omega)$ *tal que* $\phi_k \to 0$ *segundo a definição (1.7). Assim,*

$$|\langle T_f, \phi_k\rangle = \left|\int_\Omega f(x)\phi_k(x)\right| \leqslant \max_{x\in K}|\phi_k(x)|\int_K |f(x)|dx$$

onde K *é o compacto da Definição 1.7. Como o lado direito da desigualdade acima converge para* 0*, então* $\langle T_f, \phi_k\rangle \to 0$ *e, portanto,* T_f *é contínua.*

Lema 1.1 (Du Bois Raymond)**.** *Seja* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$*. Então,* $T_f \equiv 0$ *se, e somente se,* $f = 0$ *quase sempre em* Ω.

Demonstração. Vide [14], pág.8. □

Segue, do Lema de Du Bois Raymond, que T_f é univocamente determinada no sentido de que se $T_f = T_g$ então $f = g$ quase sempre em Ω.

1.4 Espaços de Sobolev

1.4.1 $W^{m,p}(\Omega)$

Definição 1.16. *Sejam* Ω *um aberto do* $\mathbb{R}^n$, $p \in [1,\infty)$ *e* $m \in \mathbb{N}$*. Denotamos por* $W^{m,p}(\Omega)$ *o espaço vetorial cujos elementos são as funções* $f \in L^p(\Omega)$ *tais que* $D^\alpha f \in L^p(\Omega)$*, para todo multi-índice* $\alpha \in \mathbb{N}^n$*, com* $|\alpha| \leqslant m$.

Temos que $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega |D^\alpha f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Os espaços de Banach $W^{m,p}(\Omega)$ são chamados *espaços de Sobolev*, de ordem m, em Ω. Quando $p = 2$, os espaços $W^{m,2}(\Omega)$ recebem uma notação especial, a saber

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega).$$

Na verdade $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, com o produto interno

$$(f,g)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leqslant m}(D^\alpha f, D^\alpha g)\,,$$

onde $(.,.)$ representa o produto interno em $L^2(\Omega)$.

Um resultado muito usado em nosso trabalho é o seguinte

Teorema 1.6 (Teorema do Traço)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aberto, limitado e cuja fronteira Γ é de classe C^1. Então existe um operador linear limitado*

$$T : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\Gamma)$$

tal que

1. $Tf = f\big|_\Gamma$ *se* $f \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$,

2. *Existe uma constante* $C > 0$*, que depende apenas de* p *e* Ω*, tal que*

$$\|Tf\|_{L^p(\Gamma)} \leqslant C\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \forall f \in W^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração. Vide [6], pág. 258. □

1.4.2 $W^{m,\infty}(\Omega)$

Seja m um inteiro não negativo. Denotamos por $W^{m,\infty}(\Omega)$ o espaço vetorial

$$W^{m,\infty}(\Omega) = \{f \in L^\infty(\Omega); D^\alpha f \in L^\infty(\Omega), \forall \ \ |\alpha| \leqslant m\}.$$

A expressão

$$\|f\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha f\|_{L^\infty(\Omega)},$$

define um norma na qual $W^{m,\infty}(\Omega)$ torna -se um espaço de Banach.

1.4.3 $W_0^{m,p}(\Omega)$

Definição 1.17. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que $W_0^{m,p}(\Omega)$ é o fecho, em $W^{m,p}(\Omega)$, do espaço $\mathcal{D}(\Omega)$, isto é,*

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Note que $W_0^{m,p}(\Omega)$ é fechado em $W^{m,p}(\Omega)$ e, portanto, ele próprio é um espaço de Banach. Como consequência da desigualdade de Poincaré, vide Seção 1.9, temos que

$$\|f\|_0 = \left(\sum_{0<|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

define um norma em $W_0^{m,p}(\Omega)$ e, além disso, ela é equivalente à norma de $W^{m,p}(\Omega)$.

Observação 1.3. *Vemos em [6], pág. 259, que $W_0^{1,p}(\Omega)$ é o núcleo do operador T, sendo T o operador dado pelo Teorema do Traço.*

1.4.4 Teoremas de Imersão

Definição 1.18. *Sejam* X *e* Y *espaços de Banach. Dizemos que* X *está continuamente imerso em* Y*, notação* $X \hookrightarrow Y$*, quando* $X \subset Y$ *e existir uma constante* $C > 0$*, tal que,*

$$\|x\|_Y \leqslant C\|x\|_X, \forall x \in X.$$

Se toda sequência limitada em X *admitir uma subsequência convergente em* Y*, dizemos que* X *é compactamente imerso em* Y *e escrevemos* $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$.

Agora temos condições de enunciar o seguinte teorema

Teorema 1.7. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *limitado. Se* $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$ *então* $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

Demonstração. Vide [10], pág. 111. □

Teorema 1.8. *Sejam* Ω *um subconjunto limitado do* $\mathbb{R}^n$*,* $n \geqslant 2$*,* Ω *de classe* C^m *e* $1 \leqslant p < \infty$*. Então,*

1. $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), 1 \leqslant q \leqslant \dfrac{np}{n - mp}$ *se* $mp < n$,
2. $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), 1 \leqslant q < \infty,$ *se* $mp = n$.

Demonstração. Vide [11], pág. 75. □

Teorema 1.9. *(Rellich-Kondrachov) Sejam* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *e* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aberto limitado de classe* C^1*. Então as seguintes imersões são compactas:*

1. $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leqslant q < \dfrac{np}{n-p}$, *se* $p < n$,
2. $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leqslant q < \infty$, *se* $p = n$,
3. $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$, *se* $p > n$.

Demonstração. Vide [11], pág. 79. □

1.4.5 Identidade de Gauss

Denotamos por $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ ao espaço formado pelas restrições à $\overline{\Omega}$ das funções $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Vemos em [12], pág. 126, que se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto, limitado, cuja fronteira Γ é bem regular então $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é denso em $H^1(\Omega)$. Além disso, se $f, g \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ vale a identidade

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(fg)dx = \int_\Gamma fg\nu_i d\Gamma,$$

onde $\nu_i = \cos(x_i, \nu)$, ν representando a normal unitária externa à Γ. Portanto,

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} g dx = -\int_\Omega f \frac{\partial g}{\partial x_i} dx + \int_\Gamma fg\nu_i d\Gamma,$$

para todo par $f, g \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$. Por densidade, temos que a identidade acima, denominada *identidade de Gauss*, vale para todo par $f, g \in H^1(\Omega)$.

1.5 Espaços $L^p(0,T;X)$

Nessa seção, estendemos as noções de mensurabilidade e integrabilidade às funções $f : [0,T] \longrightarrow X$, onde X é um espaço de Banach e cuja norma é representada por $\|.\|_X$.

Definição 1.19. *1. Uma função $s : [0,T] \longrightarrow X$ é chamada simples quando tem a forma*

$$s(t) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}(t) u_i,$$

onde, cada E_i é um conjunto Lebesgue mensurável de $[0,T]$, χ_{E_i} é a função característica de E_i e $u_i \in X$, para cada $i = 1\dots, n$.

2. Uma função $f : [0,T] \longrightarrow X$ é fortemente mensurável quando existe uma sequência de funções simples $s_k : [0,T] \longrightarrow X$ tal que

$$s_k(t) \longrightarrow f(t) \quad \text{em q.t.p de} \quad [0,T].$$

Definição 1.20. *Seja X um espaço de Banach. Denotamos por $L^p(0,T;X)$, com $1 \leqslant p \leqslant \infty$, o espaço vetorial das (classes de equivalência de) funções $f : (0,T) \longrightarrow X$, fortemente mensuráveis, tais que a aplicação $t \longmapsto \|f(t)\|_X \in L^p(0,T)$.*

O espaço $L^p(0,T;X)$, com $1 \leqslant p < \infty$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|f\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Caso $p = \infty$, temos que $L^\infty(0,T;X)$ é completo com a norma

$$\|f\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{0<t<T} \text{ess} \|f(t)\|_X.$$

Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0,T;X)$ é um espaço de Hilbert cujo produto interno é dado por

$$\langle f, g\rangle_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T \langle f(t), g(t)\rangle_X dt.$$

Observação 1.4. *Vemos em [10] que, quando* X *é reflexivo e separável e,* $1 < p < \infty$*, então* $L^p(0,T;X)$ *é reflexivo e separável e, além disso, seu dual topológico* $L^p(0,T;X)'$ *identifica-se com o espaço de Banach* $L^q(0,T;X')$*, sendo* q *o conjugado de* p*, isto é,* $1/p + 1/q = 1$*. A dualidade entre* $L^p(0,T;X)$ *e* $L^q(0,T;X')$ *é dada na forma integral*

$$\langle f, g\rangle_{L^q(0,T;X'),L^p(0,T;X)} = \int_0^T \langle f(t), g(t)\rangle_{X',X} dt,$$

onde $\langle .,.\rangle_{X',X}$ *representa a dualidade entre* X *e* X'*.*
O dual topológico de $L^1(0,T;X)$ *identifica-se com* $L^\infty(0,T;X')$*.*

A seguir, enunciamos importantes resultados concernentes aos espaços $L^p(0,T;X)$ e que foram essenciais para o desenvolvimento de nosso trabalho.

Proposição 1.1. *Sejam* X *e* Y *espaços de Banach e suponha* $X \hookrightarrow Y$*. Se* $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$ *então*

$$L^p(0,T;X) \hookrightarrow L^q(0,T;Y).$$

Demonstração. Vide [10]. □

Teorema 1.10 (Aubin-Lions)**.** *Considere* $X \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow Y$ *espaços de Banach tais que* X *é reflexivo e imerso compactamente em* B *e* B *imerso continuamente em* Y*. Suponha* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *uma sequência uniformemente limitada em* $L^2(0,T;X)$ *tal que* $(f'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *é limitada em* $L^p(0,T;Y)$*, para algum* $p > 1$*. Então, existe uma subsequência* $(f_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ *de* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *que converge fortemente em* $L^2(0,T;B)$*.*

Demonstração. Vide [4], pág. 70. □

Lema 1.2 (Lions)**.** *Sejam* Ω *um aberto do* R^n*,* g_j *e* g *funções de* $L^p(\Omega)$*, com* $1 < p < \infty$*, tais que*

1. $\|g_j\| \leqslant C$ *para todo* $j \in \mathbb{N}$*, para algum* $C > 0$*,*

2. $g_j \to g$ *em q.t.p de* Ω*.*

Então, $g_j \rightharpoonup g$ *em* $L^p(\Omega)$*.*

Demonstração. Vide [4], pág. 72. □

Definição 1.21. *Seja* X *um espaço de Banach. Representamos por* $C^0([0,T];X)$ *ao espaço de Banach das funções contínuas* $f:[0,T]\longrightarrow X$*, munido da norma*

$$\|f\|_{C^0([0,T];X)} = \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|f(t)\|_X.$$

Proposição 1.2. *Sejam* X *e* Y *espaços de Banach tais que* X *é imerso, contínua e densamente, em* Y*. Suponha que* $f\in L^1(0,T;X)$ *e* $f'\in L^1(0,T;Y)$*. Então* $f\in C^0([0,T];Y)$*.*

Demonstração. Vide [4], pág. 35. □

1.6 Distribuição Vetorial

Sejam $f\in L^p(0,T;X)$, fixada arbitrariamente, e $\tau_f:\mathcal{D}(0,T)\longrightarrow X$ a aplicação dada por

$$\langle\tau_f,\phi\rangle = \int_0^T f(t)\phi(t)dt, \quad \forall\phi\in\mathcal{D}(0,T).$$

Note, primeiramente, que a integral acima é um vetor de X. Observe também que τ_f é linear e contínua. Com efeito, a lineridade é imediata e, quanto a continuidade, seja $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{D}(0,T)$ tal que $\phi_k\to 0$ quando $k\to\infty$. Então,

$$\begin{aligned}\|\langle\tau_f,\phi\rangle\|_X &= \left\|\int_0^T f(t)\phi_k(t)dt\right\|_X\\ &\leqslant \int_0^T \|f(t)\|_X|\phi(t)|_{\mathbb{R}}dt\\ &\leqslant \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^T |\phi_k(t)|_{\mathbb{R}}^q dt\right)^{\frac{1}{q}},\end{aligned}$$

sendo $1/p+1/q=1$. Portanto,

$$\|\langle\tau_f,\phi\rangle\|_X \leqslant \|f\|_{L^p(0,T;X)}\|\phi_k\|_{L^q(0,T)}. \tag{1.1}$$

Como $\phi_k\to 0$ uniformemente, temos, por (1.1), que $\langle\tau_f,\phi_k\rangle\to 0$, quando $k\to\infty$. Concluímos daí que τ_f é contínua.

Dizemos que τ_f é uma distribuição sobre $\mathcal{D}(0,T)$, a valores no espaço vetorial X, definida por uma função $f\in L^p(0,T;X)$, e escrevemos:

$$\tau_f\in\mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T);X).$$

O espaço $\mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T);X)$ é denominado espaço vetorial de todas as distribuições em $\mathcal{D}(0,T)$ tomando valores em X.

1.7 Existência e Prolongamento de Soluções de EDO's

Seja D um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$ cujos elementos são denotados por (t,x), onde $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$ e seja $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função não necessariamente contínua. Associado à função f e à um ponto $(t_0, x_0) \in D$ temos o Problema de Valor Inicial (PVI), também chamado Problema de Cauchy,

$$\begin{cases} x' &= f(t,x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Definição 1.22. *Uma solução, no sentido estendido, do Problema de Cauchy (1.2) é uma função* $\phi(t)$ *absolutamente contínua, tal que, para algum número real* $\beta > 0$*, tenhamos*

- $(t, \phi(t)) \in D$ *para todo* $t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$*,*
- $\phi(t_0) = x_0$*,*
- $\phi'(t) = f(t, \phi(t))$ *quase sempre em* $[t_0 - \beta, t_0 + \beta_0]$.

Definição 1.23. *Dizemos que uma função* $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *satisfaz as condições de Caratheodory quando:*

- $f(t,x)$ *é mensurável em* t*, para cada* x *fixado;*
- $f(t,x)$ *é contínua em* x*, para cada* t *fixo;*
- *para cada compacto* $K \subset D$ *existe uma função* $m_K(t)$*, integrável, tal que,*

$$\|f(t,x)\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant m_K(t), \quad \forall \quad (t,x) \in D.$$

Considere o retângulo $R = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}; |t - t_0| \leqslant a \;\text{ e }\; |x - x_0| \leqslant b\}$ com $a, b > 0$.

Teorema 1.11 (Teorema de Caratheodory)**.** *Seja* $f : R \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *satisfazendo as condições de Carathéodory em* R*. Então, o problema* (1.2) *admite uma solução* $\phi(t)$ *sobre algum intervalo* $|t - t_0| \leqslant \beta$*.*

Demonstração. Vide [14], pág. 156. □

Uma consequência imediata do Teorema de Caratheodory é o seguinte resultado:

Corolário 1.2. *Sejam* $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *aberto e* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *satisfazendo as condições de Carathéodory. Então, o problema (1.2) tem solução, para todo* $(t_0, x_0) \in D$*.*

Sejam $\phi(t)$ uma solução de $x' = f(t,x)$ sobre um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e J tal que $I \subset J$. Dizemos que $\phi(t)$ tem prolongamento até J quando existir uma aplicação $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que φ é solução de $x' = f(t,x)$ e $\varphi\Big|_I = \phi$. Um resultado muito importante para o nosso trabalho e que é consequência do Teorema 2, enunciado na pág. 159 de [14] é a seguinte proposição

Proposição 1.3. *Sejam* $D = [0,T] \times B$, *sendo* T *um número real positivo,* $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leqslant b \text{ com } b > 0\}$ *e* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *satisfazendo as condições de Carathéodory. Além disso, considere* $\phi(t)$ *uma solução de*

$$x' = f(t,x)$$

$$x(0) = x_0, \quad |x_0| \leqslant b.$$

Suponha que em qualquer intervalo I *onde* $\phi(t)$ *estiver definida, se tenha* $\phi(t) \leqslant M$, *para todo* $t \in I$, M *independente de* I *e* $M < b$. *Então* ϕ *tem um prolongamento até* $[0,T]$.

Demonstração. Vide [14], pág. 164. □

1.8 Funções Próprias e Decomposição Espectral

Teorema 1.12. *Suponha* Ω *um subconjunto aberto e limitado do* $\mathbb{R}^n$. *Então,*

1. *Existe uma sequência de números reais* $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *satisfazendo:*

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \dots$$

e

$$\lambda_k \to \infty \text{ quando } k \to \infty.$$

2. *Existe uma base ortonormal* $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *de* $L^2(\Omega)$ *tais que* $e_k \in H_0^1(\Omega)$ *e, além disso*

$$\begin{cases} -\Delta e_k = \lambda_k e_k & \text{em } \Omega \\ e_k = 0 & \text{em } \Gamma, \end{cases}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Dizemos que os números $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *são os autovalores de* $-\Delta$, *com a condição de Dirichlet, e que as funções* e_k *são as autofunções associadas aos autovalores. Se, além disso,* Ω *possuir uma fronteira* Γ *de classe* C^2 *então temos que* $e_k \in H^2(\Omega)$, *para cada* $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Vide [6], pág. 335. □

1.9 Desigualdades

- **Desigualdade de Gronwall**. *Sejam* $C > 0$, $f : (s, T) \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função integrável, com* $f(t) \geqslant 0$ *quase sempre em* (s, T) *e* $g : [s, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua e não negativa, tal que*

$$g(t) \leqslant C + \int_s^t f(\xi)g(\xi)d\xi, \quad \forall t \in [s, T].$$

Então

$$g(t) \leqslant Ce^{\int_s^t f(\xi)d\xi}, \quad \forall t \in [s, T].$$

Demonstração. Vide [4], pág. 55. □

- **Desigualdade de Gronwall - Forma Diferencial.** *Seja* $\eta(.)$ *uma função não negativa e absolutamente contínua em* $[0, T]$.

1. *Se* η *satisfaz, para quase todo* $t \in [0, T]$, *a desigualdade diferencial*

$$\eta'(t) \leqslant \psi(t) + \varphi(t)\eta(t),$$

onde $\psi(t)$ *e* $\eta(t)$ *são funções não negativas e integráveis em* $[0, T]$, *então*

$$\eta(t) \leqslant e^{\int_0^t \varphi(s)ds}\left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)ds\right]$$

para todo $0 \leqslant t \leqslant T$.

2. *Em particular, se* $\eta' \leqslant \varphi\eta$ *em* $[0, T]$ *e* $\eta(0) = 0$, *temos*

$$\eta \equiv 0 \ \text{ em } \ [0, T].$$

Demonstração. Vide [6], pág. 624. □

- **Desigualdade de Young.** *Sejam* $1 < p, q < \infty$ *tais que* $1/p + 1/q = 1$. *Então,*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

para todos $a, b > 0$.

Demonstração. Vide [6], pág. 622. □

- **Desigualdade de Poincaré.** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um subconjunto aberto e limitado do* $\mathbb{R}^n$. *Então, existe uma constante* $C = C(\Omega, p)$, *tal que*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C\|f\|_0, \quad \forall f \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

onde, $\|f\|_0 = \left(\sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Demonstração. Vide [4], pág. 57. □

Capítulo 2

Existência e Unicidade de Solução Global

Neste capítulo demonstraremos que, adicionando algumas hipóteses sobre a constante ρ, bem como, sobre as funções α, β, f_i, com $i = 1, 2, 3$ e η, o problema não linear de valor inicial e de fronteira (1) - (2) tem uma única solução forte. Para tal, começamos com a seguinte definição:

Definição 2.1. *Uma solução global para o problema não linear com condições iniciais e de fronteira (1) - (2) é uma tripla* (u, θ, δ) *na classe*

$$\left| \begin{array}{l} u \in L^{\infty}_{loc}(0, \infty; V \cap H_{\Delta}(\Omega)), u' \in L^{\infty}_{loc}(0, \infty; V), u'' \in L^{\infty}_{loc}(0, \infty; L^2(\Omega)), \\ \theta, \theta' \in L^{\infty}_{loc}(0, \infty; L^2(\Omega)) \cap L^2_{loc}(0, \infty; H^1_0(\Omega)), \\ \delta, \delta', \delta'' \in L^{\infty}_{loc}(0, \infty; L^2(\Gamma_1)), \end{array} \right.$$

tal que, para todo $T > 0$ fixado, temos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} u'' - \alpha\Delta u + \lambda|u|^{\rho}u + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta = 0 \quad &\text{em} \quad L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega)), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} - \delta' + \eta(u', .) = 0 \quad &\text{em} \quad L^{\infty}\left(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)\right), \\ \theta' - \beta\left(\int_{\Omega} \theta dx\right)\Delta\theta + (\mathbf{a}\cdot\nabla)u' = 0 \quad &\text{em} \quad L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega)), \\ u' + f_1\delta'' + f_2\delta' + f_3\delta = 0 \quad &\text{em} \quad L^{\infty}(0, T; L^2(\Gamma_1)), \end{aligned} \tag{2.1}$$

e as condições iniciais (2) são satisfeitas.

Observação 2.1. *Recordemos que os espaços* V *e* $H_{\Delta}(\Omega)$ *estão definidos em Notações Importantes, vide página* 1.

O principal resultado deste capítulo é o seguinte

Teorema 2.1. *Suponhamos que*

$$
\begin{aligned}
&1.\quad \boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \quad e \quad \lambda > 0, \\
&2.\quad \rho \in \mathbb{R} \quad e \quad \rho \in (0, \infty) \quad se \quad n = 1, \rho \in [1/2, \infty) \quad se \quad n = 2, \\
&\quad\quad ou \quad \rho \in [1/n, 2/(n-2)] \quad se \quad n \geqslant 3, \\
&3.\quad \alpha \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+), \alpha' \in L^1(\mathbb{R}^+) \quad e \quad \alpha(t) \geqslant \alpha_0 > 0, \quad em\ q.t.p\ de \quad \mathbb{R}^+, \\
&4.\quad \beta \quad \text{é diferenciável com} \quad \beta' \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}) \quad e \quad \beta(x) \geqslant \beta_0 > 0, \\
&5.\quad f_i \in C^0(\Gamma_1), i = 1, 2, 3 \quad com \quad f_i(x) > 0, i = 1, 3 \quad e \\
&\quad\quad f_2(x) \geqslant 0 \quad \text{para todo} \quad x \in \Gamma_1, \\
&6.\quad x \mapsto \eta(x, s) \quad \text{é contínua em } \Gamma_1, \text{ para todo} \quad s \in \mathbb{R} \quad \text{fixado}, \\
&\quad\quad |\eta(x, s) - \eta(x, r)| \leqslant L|s - r|, \quad \text{para todo} \quad x \in \Gamma_1, s, r \in \mathbb{R}, \quad com \quad L > 0, \\
&\quad\quad \eta(x, 0) = 0, \quad \text{para todo} \quad x \in \Gamma_1, \\
&\quad\quad [\eta(x, s) - \eta(x, r)]\,(s - r) \geqslant \eta_0 (s - r)^2 \quad com \quad \eta_0 > 0.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Então, para cada conjunto de dados iniciais

$$
(u_0, u_1, \theta_0, \delta_0) \in (V \cap H_\Delta(\Omega)) \times V \times H^1_0(\Omega) \times L^2(\Gamma_1),
$$

o problema de valor inicial e de fronteira (1) - (2) admite uma única solução no sentido da definição (2.1).

Demonstração. Demonstraremos o teorema (2.1) usando o método de Faedo-Galerkin-Lions, o qual é organizado do seguinte modo:

1. Soluções do problema aproximado;
2. Estimativas "a priori"das soluções aproximadas;
3. Passagem ao limite das soluções aproximadas;
4. Verificação das condições iniciais;
5. Unicidade das soluções.

2.1 Soluções do Problema Aproximado

Notemos que os espaços $V \cap H_\Delta(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ e $L^2(\Gamma_1)$ são separáveis. Assim, podemos tomar sequências $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ e $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ em $V \cap H_\Delta(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ e $L^2(\Gamma_1)$, respectivamente, tais que:

- Para todo $m \in \mathbb{N}$, os conjuntos $\{w_1, \dots, w_m\}$, $\{v_1, \dots, v_m\}$ e $\{z_1, \dots, z_m\}$ são linearmente independentes,

- As combinações lineares finitas dos $w_i's$, $v_i's$ e $z_i's$ são densas em $V \cap H_\Delta(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ e $L^2(\Gamma_1)$, respectivamente.

- A sequência $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é formada por soluções do problema da autovalores $((v_i, v)) = \lambda_i(v_i, v)$, para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

Podemos supor, via processo de Gram-Schmidt, que $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ e $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ são bases ortonormais de $L^2(\Omega)$ e $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma base ortonormal de $L^2(\Gamma_1)$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, façamos $W_m = [w_1, \dots, w_m]$, $V_m = [v_1, \dots, v_m]$ e $Z_m = [z_1, \dots, z_m]$ os subgrupos gerados pelos primeiros m vetores das sequências $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ e $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$, respectivamente. O problema aproximado consiste em encontrar funções $u_m : [0, T) \longrightarrow W_m$, $\theta_m : [0, T) \longrightarrow V_m$ e $\delta_m : [0, T) \longrightarrow Z_m$ dadas por

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} p_{im}(t) w_i, \; \theta_m(t) = \sum_{i=1}^{m} q_{im}(t) v_i \text{ e } \delta_m(t) = \sum_{i=1}^{m} r_{im}(t) z_i$$

tais que

$$\begin{aligned}(u_m''(t), w) + \alpha(t)\big[((u_m(t), w)) - (\delta_m'(t), w)_{\Gamma_1} + (\eta(u_m'(t)), w)_{\Gamma_1}\big] \\ +\lambda \int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m(t) w dx + ((\mathbf{a} \cdot \nabla)\theta_m(t), w) = 0, \; \forall w \in W_m,\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$(\theta_m'(t), v) + \beta \left(\int_\Omega \theta_m(t) dx \right) ((\theta_m(t), v)) + ((\mathbf{a} \cdot \nabla) u_m'(t), v) = 0, \; \forall v \in V_m, \tag{2.4}$$

$$(u_m'(t) + f_1 \delta_m''(t) + f_2 \delta_m'(t) + f_3 \delta_m(t), z)_{\Gamma_1} = 0, \; \forall z \in Z_m \tag{2.5}$$

e, além disso,

$$u_m(0) = u_{0m} \to u_0 \quad \text{em} \quad V \cap H_\Delta(\Omega), \tag{2.6}$$

$$u'_m(0) = u_{1m} \to u_1 \quad \text{em} \quad V, \tag{2.7}$$

$$\theta_m(0) = \theta_{0m} \to \theta_0 \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega), \tag{2.8}$$

$$\delta_m(0) = \delta_{0m} \to \delta_0 \quad \text{em} \quad L^2(\Gamma_1), \tag{2.9}$$

$$\delta'_m(0) = \frac{\partial u_{0m}}{\partial \nu} + \eta(u_{1m}) \to \frac{\partial u_0}{\partial \nu} + \eta(u_1) \quad \text{em} \quad L^2(\Gamma_1). \tag{2.10}$$

O sistemas (2.3), (2.4) e (2.5) são equivalentes aos sistemas

$$\begin{aligned}(u''_m(t), w_j) + \alpha(t)\big[((u_m(t), w_j)) - (\delta'_m(t), w_j)_{\Gamma_1} + (\eta(u'_m(t), w_j)_{\Gamma_1}\big] +& \\ \lambda \int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m(t) w_j \, dx + ((\mathbf{a} \cdot \nabla)\theta_m(t), w_j) = 0,&\end{aligned}$$

$$(\theta'_m(t), v_j) + \beta\left(\int_\Omega \theta_m(t)dx\right)((\theta_m(t), v_j)) + ((\mathbf{a} \cdot \nabla)u'_m(t), v_j) = 0,$$

$$(u'_m(t) + f_1\delta''_m(t) + f_2\delta'_m(t) + f_3\delta_m(t), z_j)_{\Gamma_1} = 0$$

para todo $j = 1, \ldots, m$. Da definição de $u_m(t)$, $\theta_m(t)$ e $\delta_m(t)$ e, da ortonormalidade de $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ em $L^2(\Omega)$ e de $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ em $L^2(\Gamma_1)$ temos, para cada $j = 1, \ldots, m$ que

$$\begin{aligned}&p''_{jm}(t) + \alpha(t)\Big[\sum_{i=1}^m p_{im}(t)((w_i, w_j)) - \sum_{i=1}^m r'_{im}(t)(z_i, w_j)_{\Gamma_1} + (\eta(u'_m), w_j)_{\Gamma_1}\Big] \\ &+\lambda \int_\Omega |u_m|^\rho u_m w_j \, dx + \sum_{i=1}^m q_{im}(t)((\mathbf{a} \cdot \nabla)v_i, w_j) = 0,\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$q'_{jm}(t) + \beta\left(\int_\Omega \theta_m dx\right)\sum_{i=1}^m q_{im}(t)((v_i, v_j)) + \sum_{i=1}^m p'_{im}(t)((\mathbf{a} \cdot \nabla)w_i, v_j) = 0, \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^m p'_{im}(t)(w_i, z_j)_{\Gamma_1} + \sum_{i=1}^m r''_{im}(t)(f_1 z_i, z_j)_{\Gamma_1} + \sum_{i=1}^m r'_{im}(t)(f_2 z_i, z_j)_{\Gamma_1} \\ &+ \sum_{i=1}^m r_{im}(t)(f_3 z_i, z_j)_{\Gamma_1} = 0.\end{aligned} \tag{2.13}$$

O sistema (2.11) pode ser escrito na forma matricial:

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} p''_{1m}(t) \\ \vdots \\ p''_{mm}(t) \end{bmatrix} + \alpha(t)\left\{ \begin{bmatrix} ((w_1, w_1)) & \cdots & ((w_m, w_1)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ((w_1, w_m)) & \cdots & ((w_m, w_m)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{1m}(t) \\ \vdots \\ p_{mm}(t) \end{bmatrix} \right. \\
&\qquad - \begin{bmatrix} (z_1, w_1)_{\Gamma_1} & \cdots & (z_m, w_1)_{\Gamma_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (z_1, w_m)_{\Gamma_1} & \cdots & (z_m, w_m)_{\Gamma_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r'_{1m}(t) \\ \vdots \\ r'_{mm}(t) \end{bmatrix} \\
&\qquad \left. + \begin{bmatrix} (\eta(u'_m), w_1)_{\Gamma_1} \\ \vdots \\ (\eta(u'_m), w_m)_{\Gamma_1} \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} \lambda \int_\Omega |u_m|^\rho u_m w_1 dx \\ \vdots \\ \lambda \int_\Omega |u_m|^\rho u_m w_m dx \end{bmatrix} \\
&\qquad + \begin{bmatrix} ((\mathbf{a} \cdot \nabla) v_1, w_1) & \cdots & ((\mathbf{a} \cdot \nabla) v_m, w_1) \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ ((\mathbf{a} \cdot \nabla) v_1, w_m) & \cdots & ((\mathbf{a} \cdot \nabla) v_m, w_m) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_{1m}(t) \\ \vdots \\ q_{mm}(t) \end{bmatrix} = 0.
\end{aligned}
$$

Analogamente, o sistema (2.12) pode ser escrito da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} q'_{im}(t) \\ \vdots \\ q'_{mm}(t) \end{bmatrix} + \beta\left(\int_\Omega \theta_m dx\right) \cdot \begin{bmatrix} ((v_1, v_1)) & \cdots & ((v_m, v_1)) \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ ((v_1, v_m)) & \cdots & ((v_m, v_m)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_{1m}(t) \\ \vdots \\ q_{mm}(t) \end{bmatrix} \\
&\qquad + \begin{bmatrix} ((\mathbf{a} \cdot \nabla) w_1, v_1) & \cdots & ((\mathbf{a} \cdot \nabla) w_m, v_1) \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ ((\mathbf{a} \cdot \nabla) w_1, v_m) & \cdots & ((\mathbf{a} \cdot \nabla) w_m, v_m) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p'_{1m}(t) \\ \vdots \\ p'_{mm}(t) \end{bmatrix} = 0.
\end{aligned}
$$

O sistema (2.13) pode ser visto na forma:

$$\begin{bmatrix} (w_1, z_1)_{\Gamma_1} & \cdots & (w_m, z_1)_{\Gamma_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (w_1, z_m)_{\Gamma_1} & \cdots & (w_m, z_m)_{\Gamma_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p'_{1m}(t) \\ \vdots \\ p'_{mm}(t) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} (f_1 z_1, z_1)_{\Gamma 1} & \cdots & (f_1 z_m, z_1)_{\Gamma_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (f_1 z_1, z_m)_{\Gamma_1} & \cdots & (f_1 z_m, z_m)_{\Gamma_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r''_{1m}(t) \\ \vdots \\ r''_{mm}(t) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} (f_2 z_1, z_1)_{\Gamma 1} & \cdots & (f_2 z_m, z_1)_{\Gamma_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (f_2 z_1, z_m)_{\Gamma_1} & \cdots & (f_2 z_m, z_m)_{\Gamma_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r'_{1m}(t) \\ \vdots \\ r'_{mm}(t) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} (f_3 z_1, z_1)_{\Gamma 1} & \cdots & (f_3 z_m, z_1)_{\Gamma_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (f_3 z_1, z_m)_{\Gamma_1} & \cdots & (f_3 z_m, z_m)_{\Gamma_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{1m}(t) \\ \vdots \\ r_{mm}(t) \end{bmatrix} = 0.$$

Os sistemas acima podem ser reescritos na forma :

$$\left| \begin{array}{l} P''(t) + \alpha(t)[A_0 P(t) - AR'(t) + N] + C + D_0 Q(t) = 0, \\ Q'(t) + EQ(t) + DP'(t) = 0, \\ A^T P'(t) + F_1 R''(t) + F_2 R'(t) + F_3 R(t) = 0, \end{array} \right. \tag{2.14}$$

onde

$P(t) = [p_{1m}(t) \dots p_{mm}(t)]^T, Q(t) = [q_{1m}(t) \dots q_{mm}(t)]^T, R(t) = [r_{1m}(t) \dots r_{mm}(t)]^T,$
$A_0 = [((w_i, w_j))]_{m\times m}, A = [(z_i, w_j)_{\Gamma_1}]_{m\times m}, N = [(\eta(u'_m), w_j)_{\Gamma_1}]_{m\times 1},$
$C = [\lambda \int_\Omega \psi(u_m) w_j dx]_{m\times 1}, D_0 = [((\mathbf{a}\cdot\nabla)v_i, w_j)]_{m\times m}, D = [((\mathbf{a}\cdot\nabla)w_i, v_j)]_{m\times m},$
$E = \beta\left(\int_\Omega \theta_m dx\right)[((v_i, v_j))]_{m\times m}, F_1 = [(f_1 z_i, z_j)_{\Gamma_1}]_{m\times m}, F_2 = [(f_2 z_i, z_j)_{\Gamma_1}]_{m\times m}$ e
$F_3 = [(f_3 z_i, z_j)_{\Gamma_1}]_{m\times m}$, onde $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por $\psi(s) = |s|^\rho s$.

Como F_1 é invertível, o sistema (2.14) é equivalente a:

$$\left| \begin{array}{l} P''(t) = -\alpha(t)[A_0 P(t) - AR'(t) + N] - C - D_0 Q(t), \\ Q'(t) = -EQ(t) - DP'(t), \\ R''(t) = -F_1^{-1} A^T P'(t) - F_1^{-1} F_2 R'(t) - F_1^{-1} F_3 R(t). \end{array} \right. \tag{2.15}$$

Pondo $B_1 = [w_1, \dots, w_m], B_2 = [v_1, \dots v_m]$, as quais são matrizes linha e

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix}, \text{ onde } X_1 = P(t), X_2 = P'(t), X_3 = Q(t), X_4 = R(t) \text{ e } X_5 = R'(t)$$

e, considerando o sistema (2.15), obtemos

$$\begin{aligned} X' &= \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \\ X_3' \\ X_4' \\ X_5' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2 \\ -\alpha(t)[A_0X_1 - AX_5 + N(B_1X_2)] - C(B_1X_1) - D_0X_3 \\ -E(B_2X_3)X_3 - DX_2 \\ X_5 \\ -F_1^{-1}A^TX_2 - F_1^{-1}F_2X_5 - F_1^{-1}F_3X_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha(t)N(B_1X_2) - C(B_1X_1) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_m & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha(t)A_0 & 0 & -D_0 & 0 & \alpha(t)A \\ 0 & -D & -E(B_2X_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_m \\ 0 & -F_1^{-1}A^T & 0 & -F_1^{-1}F_3 & -F_1^{-1}F_2 \end{bmatrix} \cdot X \end{aligned}$$

Considere a aplicação $\phi : [0, T] \times \mathbb{R}^{5m} \longrightarrow \mathbb{R}^{5m}$ dada por

$$\phi(t, X) = \phi_1(t, X) + \phi_2(t, X),$$

onde

$$\phi_1(t, X) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha(t)N(BX_2) - C(BX_1) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\phi_2(t, X) = \begin{bmatrix} 0 & I_m & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha(t)A_0 & 0 & -D_0 & 0 & \alpha(t)A \\ 0 & -D & -E(BX_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_m \\ 0 & -F_1^{-1}A^T & 0 & -F_1^{-1}F_3 & -F_1^{-1}F_2 \end{bmatrix} \cdot X.$$

A seguir, mostramos que $\phi(t, X)$ satisfaz as condições do teorema de Caratheodory. De fato, seja $U = [0, T] \times B$, onde $B = \{X \in \mathbb{R}^{5m}; \|X - X_0\|_{\mathbb{R}^{5m}} \leqslant R\}$. Então,

i) $\phi(t, X)$ é mensurável em t, para cada X fixo, pois $\alpha \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}^+)$.

ii) As aplicações $N(B_1X_2)$, $C(B_1X_1)$ e $E(B_2X_3)$ são contínuas em X. Com efeito, observemos que

$$\begin{aligned}\|N(B_1\widehat{X}_2) - N(B_1X_2)\|_{\mathbb{R}^m} &= \sum_{i=1}^{m}\left|\int_{\Gamma_1}[\eta(x, B_1\widehat{X}_2) - \eta(x, B_1X_2)]w_i d\Gamma\right| \\ &\leqslant L\left(\sum_{i=1}^{m}\int_{\Gamma_1}|w_i|\,d\Gamma\right)|B_1\widehat{X}_2 - B_1X_2|.\end{aligned}$$

Então, dado $\epsilon > 0$ existe $\sigma = \epsilon\left(L\sum_{i=1}^{m}|w_i|_{L^1(\Gamma_1)}\right)^{-1} > 0$ tal que

$$|B_1\widehat{X}_2 - B_1X_2| < \sigma \Rightarrow \|N(B_1\widehat{X}_2) - N(B_1X_2)\|_{\mathbb{R}^m} < \epsilon,$$

donde vemos que $N(B_1X_2)$ é contínua. Agora, da continuidade de ψ, temos que para cada $\epsilon > 0$, existe $\sigma > 0$ tal que

$$|B_1\widehat{X}_1 - B_1X_1| < \sigma \Rightarrow |\psi(B_1\widehat{X}_1) - \psi(B_1X_1)| < \epsilon.$$

Daí,

$$\begin{aligned}\|C(B_1\widehat{X}_1) - C(B_1X_1)\|_{\mathbb{R}^m} &= \sum_{i=1}^{m}\left|\int_{\Omega}[\psi(B_1\widehat{X}_1) - \psi(B_1X_1)]w_i dx\right| \\ &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{m}\int_{\Omega}|w_i|\,dx\right)\epsilon.\end{aligned}$$

Assim, a função $C(B_1X_1)$ é contínua. Observemos ainda que

$$E(B_2X_3) = \beta\left(\int_{\Omega}B_2X_3dx\right)\nu, \text{ onde } \nu = [((\nu_i, \nu_j))]_{m\times m}$$

e que, sendo β contínua, dado $\epsilon > 0$, existe $\sigma > 0$ tal que

$$\left|\int_{\Omega}B_2\widehat{X}_3dx - \int_{\Omega}B_2X_3dx\right| < \sigma \Rightarrow \left|\beta\left(\int_{\Omega}B_2\widehat{X}_3dx\right) - \beta\left(\int_{\Omega}B_2X_3dx\right)\right| < \frac{\epsilon}{\|\nu\|_{\mathbb{R}^{m^2}}}.$$

Então, tomando $\widehat{\sigma} = \frac{\sigma}{vol\Omega}$ resulta que

$$\begin{aligned}|B_2\widehat{X}_3 - B_2X_3| < \widehat{\sigma} \Rightarrow \left|\int_{\Omega}B_2\widehat{X}_3dx - \int_{\Omega}B_2X_3dx\right| &\leqslant \\ \int_{\Omega}|B_2\widehat{X}_3 - B_2X_3|dx < \sigma \Rightarrow \|E(B_2\widehat{X}_3) - E(B_2X_3)\|_{\mathbb{R}^{m^2}} &< \epsilon.\end{aligned}$$

Decorre daí a continuidade de $E(B_2X_3)$ com relação à X. Portanto, para cada t fixado, $\phi(t, X)$ é uma aplicação contínua em X.

iii) Consideremos um compacto $K \subset [0,T] \times B$. Então existe $m_K(t) \in L^1([0,T])$ tal que $\|\phi(t,X)\|_{\mathbb{R}^{5m}} \leqslant m_K(t)$, para todo $(t,X) \in K$. Com efeito, a continuidade de $N(B_1X_2)$, $C(B_1X_1)$ e $E(B_2X_3)$ nos garante a existência de constantes positivas M_0, M_1, M_2 e M_3 tais que

$$\begin{aligned} \|\phi_1(t,X)\|_{\mathbb{R}^{5m}} &\leqslant |\alpha(t)|M_0 + M_1, \\ \|\phi_2(t,X)\|_{\mathbb{R}^{5m}} &\leqslant |\alpha(t)|M_2 + M_3. \end{aligned}$$

Então, tomando $m_K(t) = |\alpha(t)|M + \widehat{M}$, onde $M = M_0 + M_2$ e $\widehat{M} = M_1 + M_3$, obtemos que

$$\begin{aligned} \|\phi(t,X)\|_{\mathbb{R}^{5m}} &\leqslant \|\phi_1(t,X)\|_{\mathbb{R}^{5m}} + \|\phi_2(t,X)\|_{\mathbb{R}^{5m}} \\ &\leqslant m_K(t), \end{aligned}$$

para todo $(t,X) \in K$ e, como $\alpha \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+)$ vemos que $m_K(t) \in L^1([0,T])$. Concluimos, pelo teorema de Caratheodory, que o problema de Cauchy

$$\begin{cases} X' = \Phi(t,X) \\ X(0) = X_0 \end{cases} \tag{2.16}$$

admite solução sobre um intervalo $[0,t_m)$, ou seja, as funções $p_{im}(t), q_{im}(t)$ e $r_{im}(t)$ existem, para $i = 1 \dots m$ e satisfazem (2.3), (2.4) e (2.5).

2.2 Estimativas a priori das soluções aproximadas

Na seção anterior mostramos a existência de ternas de funções $\{u_m(t), \theta_m(t), \delta_m(t)\}$ soluções do poblema aproximado (2.3) − (2.10) em $[0,t_m)$. Este intervalo será estendido ao intervalo $[0,T]$, onde T é arbitrário, graças à primeira estimativa estabelecida a seguir.

Estimativa I. Tomando $w = 2u'_m, v = 2\theta_m$ e $z = 2\delta'_m$ em (2.3), (2.4) e (2.5), respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} &2(u''_m(t), u'_m(t)) + 2\alpha(t)[((u_m(t), u'_m(t))) - (\delta'_m(t), u'_m(t))_{\Gamma_1} + (\eta(u'_m(t)), u'_m(t))_{\Gamma_1}] \\ &+2\lambda \int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m(t) u'_m(t)\,dx + 2((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta_m(t), u'_m(t)) = 0, \end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned} 2(\theta'_m(t), \theta_m(t)) + 2\beta\left(\int_\Omega \theta_m(t)\,dx\right)((\theta_m(t), \theta_m(t))) \\ +2((\mathbf{a}\cdot\nabla)u'_m(t), \theta_m(t)) = 0, \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$2(u'_m(t),\delta'_m(t))_{\Gamma_1}+2(f_1\delta''_m(t),\delta'_m(t))_{\Gamma_1}+2(f_2\delta'_m(t),\delta'_m(t))_{\Gamma_1}$$
$$+2(f_3\delta_m(t),\delta'_m(t))_{\Gamma_1}=0. \tag{2.19}$$

Usando as identidades

$$\begin{aligned}
2(u''_m(t),u'_m(t)) &= \frac{d}{dt}|u'_m(t)|^2,\\
2((u'_m(t),u_m(t))) &= \frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2,\\
\int_\Omega |u_m(t)|^\rho_{\mathbb{R}} u_m(t)u'_m(t)dx &= \frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)},\\
2(\theta'_m(t),\theta_m(t)) &= \frac{d}{dt}|\theta_m(t)|^2,\\
2(f_1\delta''_m(t),\delta'_m(t))_{\Gamma_1} &= \frac{d}{dt}|f_1^{\frac12}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1},\\
2(f_3\delta_m(t),\delta'_m(t))_{\Gamma_1} &= \frac{d}{dt}|f_3^{\frac12}\delta_m(t)|^2_{\Gamma_1}.
\end{aligned}$$

em (2.17), (2.18) e (2.19), obtemos

$$\frac{d}{dt}|u'_m(t)|^2+\alpha(t)\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2+2\alpha(t)(\eta(u'_m(t)),u'_m(t))_{\Gamma_1}+\frac{2\lambda}{\rho+2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}$$
$$+2((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta_m(t),u'_m(t))=2\alpha(t)(\delta'_m(t),u'_m(t))_{\Gamma_1}, \tag{2.20}$$

$$\frac{d}{dt}|\theta_m(t)|^2+2\beta\left(\int_\Omega\theta_m(t)dx\right)\|\theta_m(t)\|^2+2((\mathbf{a}\cdot\nabla)u'_m(t),\theta_m(t))=0, \tag{2.21}$$

$$\frac{d}{dt}|f_1^{\frac12}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1}+\frac{d}{dt}|f_3^{\frac12}\delta_m(t)|^2_{\Gamma_1}+2|f_2^{\frac12}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1}=-2(u'_m(t),\delta'_m(t))_{\Gamma_1}. \tag{2.22}$$

Agora, notemos que

$$\begin{aligned}
\alpha(t)\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 &= \frac{d}{dt}\Big(\alpha(t)\|u_m(t)\|^2\Big)-\alpha'(t)\|u_m(t)\|^2,\\
\alpha(t)\frac{d}{dt}|f_1^{\frac12}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1} &= \frac{d}{dt}\Big(\alpha(t)|f_1^{\frac12}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1}\Big)-\alpha'(t)|f_1^{\frac12}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1},\\
\alpha(t)\frac{d}{dt}|f_3^{\frac12}\delta_m(t)|^2_{\Gamma_1} &= \frac{d}{dt}\Big(\alpha(t)|f_3^{\frac12}\delta_m(t)|^2_{\Gamma_1}\Big)-\alpha'(t)|f_3^{\frac12}\delta_m(t)|^2_{\Gamma_1}.
\end{aligned}$$

Além disso, como $\nu_i\in H^1_0(\Omega)$, para todo $i=1,\dots,m$ temos, pela identidade de Gauss, que

$$\int_\Omega\frac{\partial u'_m}{\partial x_i}(t)\theta_m(t)dx = -\int_\Omega u'_m(t)\frac{\partial\theta_m}{\partial x_i}(t)dx,$$

para $i=1,\dots,m$. Logo,

$$\begin{aligned}
2((\mathbf{a}\cdot\nabla)u'_m(t),\theta_m(t)) &= 2\int_\Omega(\mathbf{a}\cdot\nabla)u'_m(t)\theta_m(t)dx\\
&= -2\sum_{i=1}^m\int_\Omega a_iu'_m(t)\frac{\partial\theta_m}{\partial x_i}(t)dx\\
&= -2(u'_m(t),(\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta_m(t)).
\end{aligned}$$

Assim,

$$2((\mathbf{a}\cdot\nabla)u'_m(t),\theta_m(t))+2(u'_m(t),(\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta_m(t))=0.$$

Somando as identidades (2.20), (2.21) e (2.22) e, considerando as observações acima, obtemos

$$\begin{aligned}E'_m(t)+2\alpha(t)(\eta(u'_m(t)),u'_m(t))_{\Gamma_1}+2\beta\left(\int_\Omega\theta_m(t)dx\right)\|\theta_m(t)\|^2+2\alpha(t)|f_2^{\frac{1}{2}}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1}=\\ \alpha'(t)\left[\|u_m(t)\|^2+|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1}+|f_3^{\frac{1}{2}}\delta_m(t)|^2_{\Gamma_1}\right],\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}E_m(t)=|u'_m(t)|^2+\frac{2\lambda}{\rho+2}\|u_m(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}+|\theta_m(t)|^2\\ +\alpha(t)\left[\|u_m(t)\|^2+|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1}+|f_3^{\frac{1}{2}}\delta_m(t)|^2_{\Gamma_1}\right]\quad .\end{aligned}$$

Das hipóteses sobre β e η temos as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned}2\beta_0\|\theta_m(t)\|^2&\leqslant 2\beta\left(\int_\Omega\theta_m(t)dx\right)\|\theta_m(t)\|^2,\\ 2\alpha_0\eta_0|u'_m(t)|^2_{\Gamma_1}&\leqslant 2\alpha(t)(\eta(u'_m(t)),u'_m(t))_{\Gamma_1}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}E'_m(t)+2\alpha_0\eta_0|u'_m(t)|^2_{\Gamma_1}+2\beta_0\|\theta_m(t)\|^2+2\alpha(t)|f_2^{\frac{1}{2}}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1}\quad\leqslant\\ \alpha'(t)\left[\|u_m(t)\|^2+|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1}+|f_3^{\frac{1}{2}}\delta_m(t)|^2_{\Gamma_1}\right].\end{aligned}$$

Notemos que

$$\frac{|\alpha'(t)|}{\alpha_0}E_m(t)\geqslant|\alpha'(t)|\left[\|u_m(t)\|^2+|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1}+|f_3^{\frac{1}{2}}\delta_m(t)|^2_{\Gamma_1}\right],$$

e, desse modo,

$$E'_m(t)+2\alpha_0\eta_0|u'_m(t)|^2_{\Gamma_1}+2\beta_0\|\theta_m(t)\|^2+2\alpha(t)|f_2^{\frac{1}{2}}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1}\leqslant\frac{|\alpha'(t)|}{\alpha_0}E_m(t).$$

Portanto, para todo $t\in[0,t_m)$, temos

$$E_m(t)+2\alpha_0\eta_0\int_0^t|u'_m(s)|^2_{\Gamma_1}ds+2\beta_0\int_0^t\|\theta_m(s)\|^2ds\leqslant E_m(0)+\frac{1}{\alpha_0}\int_0^t|\alpha'(s)|E_m(s)ds.$$

Notemos que $E_m(0)$ é limitado. Com efeito,

$$\begin{aligned}E_m(0)=|u'_m(0)|^2+\frac{2\lambda}{\rho+2}\|u_m(0)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}+|\theta_m(0)|^2\\ +\alpha(0)\left[\|u_m(0)\|^2+|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'_m(0)|^2_{\Gamma_1}+|f_3^{\frac{1}{2}}\delta_m(0)|^2_{\Gamma_1}\right]\end{aligned}$$

e, pelas relações (2.6) - (2.10), temos que

$$\begin{array}{lll}(u_m(0))_{m\in\mathbb{N}} & \text{é limitada em} & V\cap H_\Delta(\Omega),\\ (u'_m(0))_{m\in\mathbb{N}} & \text{é limitada em} & V,\\ (\theta_m(0))_{m\in\mathbb{N}} & \text{é limitada em} & L^2(\Omega),\\ (\delta_m(0))_{m\in\mathbb{N}} & \text{é limitada em} & L^2(\Gamma_1),\\ (\delta'_m(0))_{m\in\mathbb{N}} & \text{é limitada em} & L^2(\Gamma_1).\end{array} \tag{2.23}$$

Pela cadeia de imersões

$$V\cap H_\Delta(\Omega)\hookrightarrow V\hookrightarrow H^1(\Omega)\hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega),$$

temos que $(u_m(0))_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em V e em $L^{\rho+2}(\Omega)$ e $(u'_m(0))_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(\Omega)$. Segue daí e, de (2.23), que $(E_m(0))_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada, isto é, existe uma constante C tal que

$$E_m(t)+2\alpha_0\eta_0\int_0^t|u'_m(s)|^2_{\Gamma_1}ds+2\beta_0\int_0^t\|\theta_m(s)\|^2ds\leqslant$$
$$C+\frac{1}{\alpha_0}\int_0^t|\alpha'(s)|E_m(s)ds,$$

donde,

$$E_m(t)\leqslant C+\frac{1}{\alpha_0}\int_0^t|\alpha'(s)|E_m(s)ds, \forall t\in[0,t_m).$$

Pela desigualdade de Gronwall, para todo $t\in[0,t_m)$ temos

$$E_m(t)\leqslant Ce^{\frac{1}{\alpha_0}\int_0^t|\alpha'(s)|ds}\leqslant Ce^{\frac{1}{\alpha_0}\|\alpha'\|_{L^1(0,\infty)}}.$$

Logo, existe uma constante, ainda denotada por C, à qual independe de m, tal que

$$E_m(t)+2\alpha_0\eta_0\int_0^t|u'_m(s)|^2_{\Gamma_1}ds+2\beta_0\int_0^t\|\theta_m(s)\|^2ds\leqslant C. \tag{2.24}$$

Agora, notemos que

$$|u'_m(t)|^2, |\theta_m(t)|^2\leqslant C \text{ e } \|u_m(t)\|^2\leqslant \tfrac{1}{\alpha_0}C$$

e, além disso, como $V\hookrightarrow L^2(\Omega)$ e $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(\nu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ são ortonormais em $L^2(\Omega)$, temos que

$$\|X_1(t)\|^2_{\mathbb{R}^m}=\sum_{i=1}^m[p_{im}(t)]^2=\left(\sum_{i=1}^m p_{im}(t)w_i,\sum_{i=1}^m p_{im}(t)w_i\right)=|u_m(t)|^2\leqslant\frac{1}{\alpha_0}K,$$

onde K é uma constante. Além disso,

$$\|X_2(t)\|^2_{\mathbb{R}^m}=\sum_{i=1}^m[p'_{im}(t)]^2=\left(\sum_{i=1}^m p'_{im}(t)w_i,\sum_{i=1}^m p'_{im}(t)w_i\right)=|u'_m(t)|^2\leqslant C$$

e

$$\|X_3(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 = \sum_{i=1}^{m} [q_{im}(t)]^2 = \left(\sum_{i=1}^{m} q_{im}(t)\nu_i, \sum_{i=1}^{m} q_{im}(t)\nu_i \right) = |\theta_m(t)|^2 \leqslant C.$$

Por outro lado, sendo $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ortonormal em $L^2(\Gamma_1)$ e pondo

$$0 < \bar{f}_1 = \min_{x\in\bar{\Gamma}_1} f_1(x) \quad \text{e} \quad 0 < \bar{f}_3 = \min_{x\in\bar{\Gamma}_1} f_3(x)$$

então,

$$|\delta_m'(t)|_{\Gamma_1}^2 + |\delta_m(t)|_{\Gamma_1}^2 \leqslant \frac{1}{b} E_m(t),$$

onde $b = \min\{\alpha_0\bar{f}_1, \alpha_0\bar{f}_3\} > 0$. Portanto,

$$\|X_4(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 = \sum_{i=1}^{m} [r_{im}(t)]^2 = \Big(\sum_{i=1}^{m} r_{im}(t)z_i, \sum_{i=1}^{m} r_{im}(t)z_i \Big)_{\Gamma_1} = |\delta_m(t)|_{\Gamma_1}^2 \leqslant \frac{1}{b} C$$

e

$$\|X_5(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 = \sum_{i=1}^{m} [r_{im}'(t)]^2 = \Big(\sum_{i=1}^{m} r_{im}'(t)z_i, \sum_{i=1}^{m} r_{im}'(t)z_i \Big)_{\Gamma_1} = |\delta_m'(t)|_{\Gamma_1}^2 \leqslant \frac{1}{b} C.$$

Assim, $\|X(t)\|_{\mathbb{R}^{5m}} \leqslant M$, onde M é uma constante que não depende de m. Portanto, tomando um número b adequado, como na Proposição 1.3, podemos prolongar $X(t)$ ao intervalo $[0, T]$. Como T foi tomado arbitrariamente, concluímos que o problema aproximado possui uma terna de soluções $\{u_m(t), \theta_m(t), \delta_m(t)\}$ definida em $[0, \infty)$.

Estimativa II. Derivando (2.3), (2.4) e (2.5) com relação à t, obtemos

$$\begin{aligned} &(u_m'''(t), w) + \alpha'(t)\Big[((u_m(t), w)) - (\delta_m'(t), w)_{\Gamma_1} + (\eta(u_m'(t)), w)_{\Gamma_1}\Big] \\ &\quad +\alpha(t)\left[((u_m'(t), w)) - (\delta_m''(t), w)_{\Gamma_1} + (\eta'(u_m'(t))u_m''(t), w)_{\Gamma_1}\right] \\ &+\lambda(\rho+1)\int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m'(t) w dx + ((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta_m'(t), w) = 0, \forall w \in W_m, \end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned} &(\theta_m''(t), v) + \beta'\left(\int_\Omega \theta_m(t)dx\right)\int_\Omega \theta_m'(t)dx((\theta_m(t), v)) \\ &+\beta\left(\int_\Omega \theta_m(t)dx\right)((\theta_m'(t), v)) + ((\mathbf{a}\cdot\nabla)u_m''(t), v) = 0, \forall v \in V_m, \end{aligned} \tag{2.26}$$

$$(u_m''(t) + f_1\delta_m'''(t) + f_2\delta_m''(t) + f_3\delta_m'(t), z)_{\Gamma_1} = 0, \forall z \in Z_m. \tag{2.27}$$

Usando $w = 2u''_m(t)$, $v = 2\theta'_m(t)$ e $z = 2\delta''_m(t)$, respectivamente, em (2.25), (2.26) e (2.27), obtemos

$$
\begin{aligned}
&2(u'''_m(t), u''_m(t)) + 2\alpha'(t)\Big[((u_m(t), u''_m(t))) - (\delta'_m(t), u''_m(t))_{\Gamma_1} \\
&+(\eta(u'_m(t)), u''_m(t))_{\Gamma_1}\Big] + 2\alpha(t)\Big[((u'_m(t), u''_m(t))) - (\delta''_m(t), u''_m(t))_{\Gamma_1} \\
&+(\eta'(u'_m(t))u''_m(t), u''_m(t))_{\Gamma_1}\Big] + 2\lambda(\rho+1)\int_\Omega |u_m(t)|^\rho u'_m(t) u''_m(t)dx \\
&+2((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta'_m(t), u''_m(t)) = 0,
\end{aligned} \tag{2.28}
$$

$$
\begin{aligned}
&2(\theta''_m(t), \theta'_m(t)) + 2\beta'\left(\int_\Omega \theta_m(t)dx\right)\int_\Omega \theta'_m(t)dx((\theta_m(t), \theta'_m(t))) \\
&+2\beta\left(\int_\Omega \theta_m(t)dx\right)((\theta'_m(t), \theta'_m(t))) + 2((\mathbf{a}\cdot\nabla)u''_m(t), \theta'_m(t)) = 0,
\end{aligned} \tag{2.29}
$$

$$
\begin{aligned}
&2(u''_m(t), \delta''_m(t))_{\Gamma_1} + 2(f_1\delta'''_m(t), \delta''_m(t))_{\Gamma_1} + 2(f_2\delta''_m(t), \delta''_m(t))_{\Gamma_1} \\
&+2(f_3\delta'_m(t), \delta''_m(t))_{\Gamma_1} = 0.
\end{aligned} \tag{2.30}
$$

De modo análogo à Estimativa I, temos as identidades:

$$
\begin{aligned}
2(u'''_m(t), u''_m(t)) &= \frac{d}{dt}|u''_m(t)|^2, \\
2((u'_m(t), u''_m(t))) &= \frac{d}{dt}\|u'_m(t)\|^2, \\
2(\theta'_m(t), \theta''_m(t)) &= \frac{d}{dt}|\theta'_m(t)|^2, \\
2(f_1\delta'''_m(t), \delta''_m(t))_{\Gamma_1} &= \frac{d}{dt}|f_1^{\frac{1}{2}}\delta''_m(t)|^2_{\Gamma_1}, \\
2(f_3\delta'_m(t), \delta''_m(t))_{\Gamma_1} &= \frac{d}{dt}|f_3^{\frac{1}{2}}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1}.
\end{aligned}
$$

Substituindo as identidades acima em (2.28), (2.29) e (2.30), obtemos:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}|u''_m(t)|^2 + 2\alpha'(t)\Big[((u_m(t), u''_m(t))) - (\delta'_m(t), u''_m(t))_{\Gamma_1} + (\eta(u'_m(t)), u''_m(t))_{\Gamma_1}\Big] \\
&+\alpha(t)\frac{d}{dt}\|u'_m(t)\|^2 - 2\alpha(t)(\delta''_m(t), u''_m(t))_{\Gamma_1} + 2\alpha(t)(\eta'(u'_m(t)u''_m(t), u''_m(t))_{\Gamma_1} \\
&+2\lambda(\rho+1)\int_\Omega |u_m(t)|^\rho u'_m(t)u''_m(t)dx + 2((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta'_m(t), u''_m(t)) = 0,
\end{aligned} \tag{2.31}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}|\theta'_m(t)|^2 + 2\beta'\left(\int_\Omega \theta_m(t)dx\right)\int_\Omega \theta'_m(t)dx((\theta'_m(t), \theta_m(t))) \\
&+2\beta\left(\int_\Omega \theta_m(t)dx\right)\|\theta'_m(t)\|^2 + 2((\mathbf{a}\cdot\nabla)u''_m(t), \theta'_m(t)) = 0,
\end{aligned} \tag{2.32}
$$

$$2(u''_m(t), \delta''_m(t))_{\Gamma_1} + \frac{d}{dt}|f_1^{\frac{1}{2}}\delta''_m(t)|^2_{\Gamma_1} + \frac{d}{dt}|f_3^{\frac{1}{2}}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1} + 2|f_2^{\frac{1}{2}}\delta''_m(t)|^2_{\Gamma_1} = 0. \quad (2.33)$$

Agora, notemos que

$$\begin{aligned}
\alpha(t)\frac{d}{dt}\|u'_m(t)\|^2 &= \frac{d}{dt}\Big(\alpha(t)\|u'_m(t)\|^2\Big) - \alpha'(t)\|u'_m(t)\|^2,\\
\alpha(t)\frac{d}{dt}|f_1^{\frac{1}{2}}\delta''_m(t)|^2_{\Gamma_1} &= \frac{d}{dt}\Big(\alpha(t)|f_1^{\frac{1}{2}}\delta''_m(t)|^2_{\Gamma_1}\Big) - \alpha'(t)|f_1^{\frac{1}{2}}\delta''_m(t)|^2_{\Gamma_1},\\
\alpha(t)\frac{d}{dt}|f_3^{\frac{1}{2}}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1} &= \frac{d}{dt}\Big(\alpha(t)|f_3^{\frac{1}{2}}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1}\Big) - \alpha'(t)|f_3^{\frac{1}{2}}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1}.
\end{aligned}$$

Além disso, usando o Lema de Gauss, temos

$$\int_\Omega \frac{\partial \theta'_m}{\partial x_i}(t)u''_m(t)dx = -\int_\Omega \theta'_m(t)\frac{\partial u''_m}{\partial x_i}(t)dx,$$

para $i = 1, \ldots, n$. Como

$$2((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta'_m(t), u''_m(t)) = 2\int_\Omega (\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta'_m(t)u''_m(t)dx = 2\sum_{i=1}^n a_i \int_\Omega \theta'_m(t)\frac{\partial u''_m}{\partial x_i}(t)dx,$$

então

$$2((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta'_m(t), u''_m(t)) + 2((\mathbf{a}\cdot\nabla)u''_m(t), \theta'_m(t)) = 0.$$

Somando as equações (2.31), (2.32) e (2.33) e, considerando as observações acima, resulta que

$$\begin{aligned}
&F'_m(t) + 2\alpha'(t)\Big[((u_m(t), u''_m(t))) - (\delta'_m(t), u''_m(t))_{\Gamma_1} + (\eta(u'_m(t)), u''_m(t))_{\Gamma_1}\Big]\\
&+2\alpha(t)(\eta'(u'_m(t))u''_m(t), u''_m(t))_{\Gamma_1} + 2\lambda(\rho+1)\int_\Omega |u_m(t)|^\rho u'_m(t)u''_m(t)dx \qquad (2.34)\\
&+2\beta'\left(\int_\Omega \theta_m(t)dx\right)\int_\Omega \theta'_m(t)dx((\theta'_m(t), \theta_m(t))) + 2\beta\left(\int_\Omega \theta_m(t)dx\right)\|\theta'_m(t)\|^2\\
&+2\alpha(t)|f_2^{\frac{1}{2}}\delta''_m(t)|^2_{\Gamma_1} = \alpha'(t)\Big[\|u'_m(t)\|^2 + |f_1^{\frac{1}{2}}\delta''_m(t)|^2_{\Gamma_1} + |f_3^{\frac{1}{2}}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1}\Big],
\end{aligned}$$

onde,

$$F_m(t) = |u''_m(t)|^2 + |\theta'_m(t)|^2 + \alpha(t)\Big[\|u'_m(t)\|^2 + |f_1^{\frac{1}{2}}\delta''(t)|^2_{\Gamma_1} + |f_3^{\frac{1}{2}}\delta'_m(t)|^2_{\Gamma_1}\Big].$$

Das hipóteses $(2.2)_{3,4,6}$ do Teorema 2.1 obtemos as desigualdades

$$\begin{aligned}
&2\alpha(t)(\eta'(u'_m(t))u''_m(t), u''_m(t))_{\Gamma_1} \geqslant 2\alpha_0\eta_0|u''_m(t)|^2_{\Gamma_1},\\
&2\beta\left(\int_\Omega \theta_m(t)dx\right)\|\theta'_m(t)\|^2 \geqslant 2\beta_0\|\theta'_m(t)\|^2.
\end{aligned}$$

que aplicadas em (2.34) resultam que

$$
\begin{aligned}
&F_m'(t) + 2\alpha_0\eta_0|u_m''(t)|^2_{\Gamma_1} + 2\beta_0\|\theta_m'(t)\|^2 \leqslant \alpha'(t)\Big[\|u_m'(t)\|^2 + |f_1^{\frac{1}{2}}\delta_m''(t)|^2_{\Gamma_1} + |f_3^{\frac{1}{2}}\delta_m'(t)|^2_{\Gamma_1}\Big] \\
&-2\alpha'(t)\Big[((u_m(t), u_m''(t))) - (\delta_m'(t), u_m''(t))_{\Gamma_1} + (\eta(u_m'(t)), u_m''(t))_{\Gamma_1}\Big] \qquad (2.35) \\
&-2\lambda(\rho+1)\int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m'(t)u_m''(t)dx - 2\beta'\left(\int_\Omega \theta_m(t)dx\right)\int_\Omega \theta_m'(t)dx((\theta_m(t), \theta_m'(t))).
\end{aligned}
$$

Tomando $w = 2u_m''(t)$ em (2.3) e, multiplicando ambos os lados por $-\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}$, temos

$$
\begin{aligned}
&-2\alpha'(t)\Big[((u_m(t), u_m''(t))) - (\delta_m'(t), u_m''(t))_{\Gamma_1} + (\eta(u_m'(t)), u_m''(t))_{\Gamma_1}\Big] = \\
&2\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}|u_m''(t)|^2 + 2\lambda\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}\int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m(t)u_m''(t)dx + 2\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta_m(t), u_m''(t)).
\end{aligned}
$$

Usando a identidade acima em (2.35), temos

$$
\begin{aligned}
&F_m'(t) + 2\alpha_0\eta_0|u_m''(t)|^2_{\Gamma_1} + 2\beta_0\|\theta_m'(t)\|^2 \leqslant \alpha'(t)\Big[\|u_m'(t)\|^2 + |f_1^{\frac{1}{2}}\delta_m''(t)|^2_{\Gamma_1} + |f_3^{\frac{1}{2}}\delta_m'(t)|^2_{\Gamma_1}\Big] \\
&+2\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}|u_m''(t)|^2 + 2\lambda\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}\int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m(t)u_m''(t)dx + 2\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta_m(t), u_m''(t)) \\
&-2\lambda(\rho+1)\int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m'(t)u_m''(t)dx - 2\beta'\left(\int_\Omega \theta_m'(t)\right)\int_\Omega \theta_m'(t)dx((\theta_m(t), \theta_m'(t))).
\end{aligned}
$$

A seguir, obteremos um majorante para os termos do lado direito da equação acima. Inicialmente, usando o fato de $\alpha(t) \geqslant \alpha_0$ e a definição de $F_m(t)$, temos:

$$
2\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}|u_m''(t)|^2 + \alpha'(t)\Big[\|u_m'(t)\|^2 + |f_1^{\frac{1}{2}}\delta_m'(t)|^2 + |f_3^{\frac{1}{2}}\delta_m(t)|^2\Big] \leqslant \frac{3|\alpha'(t)|}{\alpha_0}F_m \leqslant CF_m. \qquad (2.36)
$$

Analisemos agora a integral $\displaystyle\int_\Omega |u_m(t)|^\rho|u_m'(t)||u_m''(t)|dx$.

(i) Se $n = 1$ e $0 < \rho < \infty$, então $V \hookrightarrow H^1(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}) \hookrightarrow L^2(\Omega)$. Assim, pela Desigualdade de Hölder,

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |u_m(t)|^\rho|u_m'(t)||u_m''(t)|dx &\leqslant \big(\sup_{x\in\overline{\Omega}} |u_m(t)|\big)^\rho \int_\Omega |u_m'(t)||u_m''(t)|dx \\
&\leqslant C\|u_m(t)\|^\rho|u_m'(t)||u_m''(t)| \\
&\leqslant C\|u_m(t)\|^\rho\|u_m'(t)\||u_m''(t)|.
\end{aligned}
$$

(ii) Se $n = 2$ e $\frac{1}{2} \leqslant \rho < \infty$, então $2 \leqslant 4\rho < \infty$. Assim, $V \hookrightarrow H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{4\rho}(\Omega)$ e $V \hookrightarrow H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$. Daí, usando a Desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u_m(t)|^\rho |u_m'(t)||u_m''(t)|dx &\leqslant \left(\int_\Omega |u_m(t)|^{2\rho}|u_m'(t)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |u_m''(t)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant \left(\int_\Omega |u_m(t)|^{4\rho}dx\right)^{\frac{1}{4}}\left(\int_\Omega |u_m'(t)|^4dx\right)^{\frac{1}{4}}|u_m''(t)|\\
&= \left[\left(\int_\Omega |u_m(t)|^{4\rho}dx\right)^{\frac{1}{4\rho}}\right]^\rho |u_m'(t)|_{L^4(\Omega)}|u_m''(t)|\\
&= |u_m(t)|_{L^{4\rho}(\Omega)}|u_m'(t)|_{L^4(\Omega)}|u_m''(t)|\\
&\leqslant C\|u_m(t)\|^\rho \|u_m'(t)\||u_m''(t)|.
\end{aligned}$$

(iii) Se $n \geqslant 3$ e $\frac{1}{n} \leqslant \rho \leqslant \frac{2}{n-2}$, então $1 \leqslant n\rho \leqslant \frac{2n}{n-2}$. Logo, $V \hookrightarrow H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2}} \hookrightarrow L^{n\rho}(\Omega)$. Sendo $\frac{2}{n} + \frac{n-2}{n} = 1$ e usando a Desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u_m(t)|^\rho |u_m'(t)||u_m''(t)|dx &\leqslant \left(\int_\Omega |u_m(t)|^{2\rho}|u_m'(t)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |u_m''(t)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant \left[\left(\int_\Omega |u_m(t)|^{n\rho}dx\right)^{\frac{2}{n}}\left(\int_\Omega |u_m'(t)|^{\frac{2n}{n-2}}dx\right)^{\frac{n-2}{n}}\right]^{\frac{1}{2}}|u_m''(t)|\\
&= \left[\left(\int_\Omega |u_m(t)|^{n\rho}dx\right)^{\frac{1}{n\rho}}\right]^\rho \left(\int_\Omega |u_m'(t)|^{\frac{2n}{n-2}}dx\right)^{\frac{n-2}{2n}}|u_m''(t)|\\
&= |u_m(t)|^\rho_{L^{n\rho}(\Omega)}|u_m'(t)|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)}|u_m''(t)|\\
&\leqslant C\|u_m(t)\|^\rho \|u_m'(t)\||u_m''(t)|.
\end{aligned}$$

Portanto, em todos os casos temos

$$\int_\Omega |u_m(t)|^\rho |u_m'(t)||u_m''(t)|dx \leqslant C\|u_m(t)\|^\rho \|u_m'(t)\||u_m''(t)|.$$

Daí,

$$-C\|u_m(t)\|^\rho \|u_m'(t)\||u_m''(t)| \leqslant \int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m'(t)u_m''(t)dx. \tag{2.37}$$

Multiplicando (2.37) por $-2\lambda(\rho+1)$ e usando a desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned}
-2\lambda(\rho+1)\int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m'(t)u_m''(t)dx &\leqslant C\|u_m(t)\|^\rho \|u_m'(t)\||u_m''(t)| \qquad (2.38)\\
&\leqslant C\Big[\|u_m'(t)\|^2 + |u_m''(t)|^2\Big] \leqslant CF_m(t).
\end{aligned}$$

De modo análogo, mostramos que

$$\frac{2\lambda\alpha'(t)}{\alpha(t)}\int_\Omega |u_m(t)|^\rho |u_m(t)||u_m''(t)|dx \leqslant C + CF_m(t) \tag{2.39}$$

É importante frisar que nos cálculos acima e, nos que vem a seguir, C denota várias constantes positivas. Agora, notemos que

$$2\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta_m(t),u''_m(t)) \leqslant 2\frac{|\alpha'(t)|}{\alpha_0}\int_\Omega\left|\sum_{i=1}^n a_i\frac{\partial\theta_m(t)}{\partial x_i}\right||u''_m(t)|dx \leqslant$$
$$\frac{|\alpha'(t)|}{\alpha_0}\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}|a_i|\right)\sum_{i=1}^n\left(\left|\frac{\partial\theta_m(t)}{\partial x_i}\right|^2+|u''_m(t)|^2\right) \leqslant C\|\theta_m(t)\|^2+CF_m(t). \tag{2.40}$$

Além disso, segue da desigualdade (2.24) e, do fato da terna $\{u_m,\theta_m,\delta_m\}$ estar definida em $[0,\infty)$, que existe uma constante C tal que

$$E_m(t)+2\alpha_0\eta_0\int_0^\infty|u'_m(t)|^2_{\Gamma_1}dt+2\beta_0\int_0^\infty\|\theta_m(t)\|^2dt \leqslant C \tag{2.41}$$

para todo $m\in\mathbb{N}$ e, todo $t\geqslant 0$. Agora, observemos que, dados $m\in\mathbb{N}$ e $t\geqslant 0$, temos

$$\left|\int_\Omega\theta_m(t)dx\right| \leqslant \|\theta_m(t)\|_{L^1(\Omega)} \leqslant C|\theta_m(t)| \leqslant C \tag{2.42}$$

sendo que a última desigualdade decorre de (2.41). Da relação acima e, tendo em conta que $\beta'\in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$, temos que

$$\beta'\left(\int_\Omega\theta_m(t)dx\right) \leqslant \sup_{|\xi|\leqslant C} ess|\beta'(\xi)| = \beta_1.$$

Usando os fatos acima e as desigualdades de Schwarz e Young, temos que

$$-2\beta'\left(\int_\Omega\theta_m(t)dx\right)\int_\Omega\theta'_m(t)dx((\theta_m(t),\theta'_m(t))) \leqslant$$
$$2\beta_1\|\theta'_m(t)\|_{L^1(\Omega)}\|\theta_m(t)\|\|\theta'_m(t)\| \leqslant C\|\theta_m(t)\|^2|\theta'_m(t)|^2+\beta_0\|\theta'_m(t)\|^2 \leqslant$$
$$C\|\theta_m(t)\|^2F_m(t)+\beta_0\|\theta'_m(t)\|^2 \tag{2.43}$$

Portanto, das desigualdades (2.36), (2.38), (2.39), (2.40) e (2.43), obtemos

$$F'_m(t)+2\alpha_0\eta_0|u''_m(t)|^2_{\Gamma_1}+\beta_0\|\theta'_m(t)\|^2 \leqslant$$
$$C\Big(1+\|\theta_m(t)\|^2+F_m(t)+\|\theta_m(t)\|^2F_m(t)\Big) \tag{2.44}$$

Agora, mostraremos que $F_m(0)$ é limitada. De fato, sendo $u_m(0)$ solução do problema aproximado, então

$$|u''_m(0)|^2-\alpha(0)(\Delta u_m(0),u''_m(0))+\lambda(|u_m(0)|^\rho u_m(0),u''_m(0))+((a\cdot\nabla)\theta_m(0),u''_m(0))=0.$$

Segue, da desigualdade de Cauchy-Schwarz, que

$$|u''_m(0)|^2 \leqslant \alpha(0)|\Delta u_m(0)||u''_m(0)|+\lambda\Big||u_m(0)|^\rho u_m(0)\Big||u''_m(0)|$$
$$+\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}|a_i|\right)\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial\theta_m(0)}{\partial x_i}\right||u''_m(0)|,$$

dividindo ambos os lados por $|u''_m(0)|$ e, aplicando a desigualdade de Young, obtemos

$$|u''_m(0)| \leqslant \alpha(0)|\Delta u_m(0)| + \lambda||u_m(0)|^\rho u_m(0)| + C\|\theta_m(0)\|^2 + \frac{Cn}{2}. \tag{2.45}$$

Evidentemente, se $|u''_m(0)| = 0$ então (2.45) permanece válido. Como $u_m(0) \to u_0$ em $V \cap H_\Delta(\Omega)$ então, $\|u_m(0) - u_0\|_{V\cap H_\Delta(\Omega)} \to 0$ quando $m \to \infty$ e, portanto, $\|u_m(0) - u_0\|_{H_\Delta(\Omega)} \to 0$ e, além disso, da sequência de imersões

$$V \cap H_\Delta(\Omega) \hookrightarrow V \hookrightarrow H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

temos que $|u_m(0) - u_0| \to 0$ quando $m \to \infty$. Por outro lado, temos

$$|\Delta u_m(0) - \Delta u_0|^2 = \|u_m(0) - u_0\|^2_{H_\Delta(\Omega)} - |u_m(0) - u_0|^2,$$

o que implica que $|\Delta u_m(0) - \Delta u_0| \to 0$. Isso nos mostra que $(\Delta u_m(0))$ é limitada em $L^2(\Omega)$. A limitação da sequência $(||u_m(0)|^\rho u_m(0)|)_{m\in\mathbb{N}}$ decorre da continuidade da função $\psi(s) = |s|^\rho s$. Além disso, decorre de (2.8) que $(\theta_m(0))_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em $H^1(\Omega)$ e, portanto, existe uma constante C, que independe de m, tal que $|u''_m(0)| \leqslant C$.

Agora, sendo θ_m solução do problema aproximado, então

$$|\theta'_m(0)|^2 + \beta\left(\int_\Omega \theta_m(0)dx\right)((\theta_m(0), \theta'_m(0))) + ((\mathbf{a}\cdot\nabla)u'_m(0), \theta'_m(0)) = 0$$

temos, de (2.42), que existe uma constante C tal que

$$\int_\Omega \theta_m(t)dx \in [-C, C], \forall t \in [0, \infty),$$

pela continuidade da função β existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\beta\left(\int_\Omega \theta_m(0)dx\right) \leqslant C, \forall m \in \mathbb{N}.$$

Além disso, considerando o fato de $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ser uma base de soluções do problema de autovalores $((v_i, v)) = \lambda_i(v_i, v)$, para todo $v \in H^1_0(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}|\theta'_m(0)|^2 \leqslant C\left(\max_{1\leqslant i\leqslant m}|\lambda_i|\right)\sum_{i=1}^m |(q_{im}(0)v_i, \theta'_m(0))| \\ + \left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}|a_i|\right)\sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u'_m(0)}{\partial x_i}\right| |\theta'_m(0)|,\end{aligned}$$

e, da desigualdade de Cauchy-Schwarz, resulta que

$$|\theta'_m(0)|^2 \leqslant C|\theta'_m(0)| + \left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}|a_i|\right)\sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u'_m(0)}{\partial x_i}\right| |\theta'_m(0)|.$$

Usando a desigualdade de Young e, notando que $(u'_m(0))_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em V, obtemos uma constante C tal que $|\theta'_m(0)| \leqslant C$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Agora, tomando $z = \delta''_m(0)$ em (2.5), obtemos

$$|(f_1\delta''_m(0), \delta''_m(0))_{\Gamma_1}| \leqslant |(u'_m(0), \delta''_m(0))_{\Gamma_1}| + |(f_2\delta'_m(0), \delta''_m(0))_{\Gamma_1}| + |(f_3\delta_m(0), \delta''_m(0))_{\Gamma_1}|.$$

Lembrando que $\overline{f}_1 = \min\limits_{x\in\overline{\Gamma}_1} f_1(x)$, fazendo $\overline{f}_2 = \max\limits_{x\in\overline{\Gamma}_1} f_2(x)$, $\overline{f}_3 = \max\limits_{x\in\overline{\Gamma}_1} f_3(x)$ e usando Cauchy-Schwarz, temos

$$\overline{f}_1|\delta''_m(0)|^2_{\Gamma_1} \leqslant |u'_m(0)|_{\Gamma_1}|\delta''_m(0)|_{\Gamma_1} + \overline{f}_2|\delta'_m(0)|_{\Gamma_1}|\delta''_m(0)|_{\Gamma_1} + \overline{f}_3|\delta_m(0)|_{\Gamma_1}|\delta''_m(0)|_{\Gamma_1}.$$

Da Estimativa I, segue as limitações das sequências $(u'_m(0))_{m\in\mathbb{N}}$ e $(\delta'_m(0))_{m\in\mathbb{N}}$ em $L^2(\Gamma_1)$ e, como $\delta_m(0) \to \delta_0$ em $L^2(\Gamma_1)$, temos que $(\delta_m(0))_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada nesse espaço. Assim, existe uma constante C, que independe de m, tal que $|\delta''_m(0)| \leqslant \frac{C}{\overline{f}_1}$. Portanto, $(F_m(0))_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada.

Agora, seja $T > 0$ fixado arbitrariamente, então, integrando (2.44) de 0 à t, com $0 \leqslant t \leqslant T$ e, observando (2.41), obtemos

$$F_m(t) + 2\alpha_0\eta_0\int_0^t |u''_m(s)|^2_{\Gamma_1} ds + \beta_0\int_0^t \|\theta'_m(s)\|^2 ds \leqslant C + \int_0^t C(1 + \|\theta_m(s)\|^2)F_m(s)ds. \quad (2.46)$$

Segue de (2.46) e, da desigualdade de Gronwall, que

$$F_m(t) \leqslant Ce^{\int_0^t \left(\|\theta_m(s)\|^2+1\right)C ds} \leqslant Ce^{CT},$$

onde na última desigualdade, usamos (2.41) e, concluímos daí, que existe uma constante C_T, independente de m, tal que, para todo $0 \leqslant t \leqslant T$,

$$F_m(t) + 2\alpha_0\eta_0\int_0^t |u''_m(s)|^2_{\Gamma_1} ds + \beta_0\int_0^t \|\theta'_m(s)\|^2 ds \leqslant C_T. \quad (2.47)$$

2.3 Passagem ao Limite das Soluções Aproximadas

Nesta seção passamos o limite, quando $m \to \infty$, no problema aproximado. Notemos que, pelas Estimativas I e II, temos

$$(u_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;V) \equiv \big(L^1(0,T;V')\big)', \tag{2.48}$$

$$(u'_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;V) \equiv \big(L^1(0,T;V')\big)', \tag{2.49}$$

$$(u''_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \equiv \big(L^1(0,T;L^2(\Omega))\big), \tag{2.50}$$

$$(\gamma_0(u'_m)) \text{ é limitada em } L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)), \tag{2.51}$$

$$(\theta_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{2.52}$$

$$(\theta'_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{2.53}$$

$$(\delta_m),(\delta'_m),(\delta''_m) \text{ são limitadas em } L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_1)) \equiv \big(L^1(0,T;L^2(\Gamma_1))\big)', \tag{2.54}$$

Observação 2.2. *Por questão de simplicidade faremos* $Q = \Omega \times (0,T)$.

De (2.48)-(2.54) e do Corolário 1.1 , existem subsequências de $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$, $(\theta_m)_{m\in\mathbb{N}}$ e $(\delta_m)_{m\in\mathbb{N}}$, que ainda denotaremos dessa forma, tais que

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;V), \tag{2.55}$$

$$u'_m \overset{*}{\rightharpoonup} \tilde{u} \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;V), \tag{2.56}$$

$$u''_m \overset{*}{\rightharpoonup} \hat{u} \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{2.57}$$

$$\gamma_0(u'_m) \rightharpoonup \gamma_0(\tilde{v}) \quad \text{em} \quad L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)), \tag{2.58}$$

$$\theta_m \rightharpoonup \theta \quad \text{em} \quad L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{2.59}$$

$$\theta'_m \rightharpoonup \tilde{\theta} \quad \text{em} \quad L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{2.60}$$

$$\delta_m \overset{*}{\rightharpoonup} \delta \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_1)), \tag{2.61}$$

$$\delta'_m \overset{*}{\rightharpoonup} \tilde{\delta} \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_1)), \tag{2.62}$$

$$\delta''_m \overset{*}{\rightharpoonup} \hat{\delta} \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_1)). \tag{2.63}$$

Pela cadeia de imersões

$$L^\infty(0,T;V) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega)) \equiv L^2(Q) \hookrightarrow \mathcal{D}'(Q)$$

temos que $u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u$ e $u'_m \overset{*}{\rightharpoonup} \tilde{u}$ em $\mathcal{D}'(Q)$. Além disso,

$$\langle u'_m, \phi\rangle = -\langle u_m, \phi'\rangle \to -\langle u, \phi'\rangle = \langle u', \phi\rangle, \forall \phi \in \mathcal{D}(Q).$$

Assim, $u'_m \overset{*}{\rightharpoonup} u'$ em $\mathcal{D}'(Q)$ e segue, da unicidade do limite fraco-estrela, que $\widetilde{u} = u'$. De modo análogo, mostramos que $\widehat{u} = u''$, $\gamma_0(\widetilde{v}) = \gamma_0(u')$, $\widetilde{\theta} = \theta'$, $\widetilde{\delta} = \delta'$ e $\widehat{\delta} = \delta''$.

Seja $m_0 \in \mathbb{N}$ fixado arbitrariamente e consideremos o problema aproximado com $m \geqslant m_0$. Então multiplicando (2.3), (2.4) e (2.5) por $\zeta(t) \in \mathcal{D}(0,T)$ e, integrando de 0 à T, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T (u''_m(t), w)\zeta(t)dt + \int_0^T \alpha(t)((u_m(t), w))\zeta(t)dt - \int_0^T \alpha(t)(\delta'_m(t), w)_{\Gamma_1}\zeta(t)dt \\ + \int_0^T \alpha(t)(\eta(u'_m(t)), w)_{\Gamma_1}\zeta(t)dt + \lambda\int_0^T (|u_m(t)|^\rho u_m(t), w)\zeta(t)dt \\ + \int_0^T ((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta_m(t), w)\zeta(t)dt = 0,\end{aligned} \tag{2.64}$$

$$\begin{aligned}\int_0^T (\theta'_m(t), v)\zeta(t)dt + \int_0^T \beta\left(\int_\Omega \theta_m(t)dx\right)((\theta_m(t), v))\zeta(t)dt \\ + \int_0^T ((\mathbf{a}\cdot\nabla)u'_m(t), v)\zeta(t)dt = 0,\end{aligned} \tag{2.65}$$

$$\begin{aligned}\int_0^T (u'_m(t), z)_{\Gamma_1}\zeta(t)dt + \int_0^T (f_1\delta''_m(t), z)_{\Gamma_1}\zeta(t)dt + \int_0^T (f_2\delta'_m(t), z)_{\Gamma_1}\zeta(t)dt \\ + \int_0^T (f_3\delta_m(t), z)_{\Gamma_1}\zeta(t)dt = 0.\end{aligned} \tag{2.66}$$

Analisaremos agora a convergência das integrais em (2.64).

- Convergência da integral $\displaystyle\int_0^T (u''_m(t), w)\zeta(t)dt$.

Vimos que $u''_m \overset{*}{\rightharpoonup} u''$ em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, isto é,

$$\langle u''_m, \xi\rangle_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),L^1(0,T;L^2(\Omega))} \to \langle u'', \xi\rangle_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),L^1(0,T;L^2(\Omega))}$$

para toda $\xi \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$. Isso equivale a dizer que

$$\int_0^T \langle u''_m(t), \xi(t)\rangle_{L^2(\Omega),L^2(\Omega)}dt \to \int_0^T \langle u''(t), \xi(t)\rangle_{L^2(\Omega),L^2(\Omega)}dt.$$

Portanto, pelo Teorema da Representação de Riesz, temos que

$$\int_0^T (u''_m(t), w)\zeta(t)dt \to \int_0^T (u''(t), w)\zeta(t)dt$$

para toda $w \in W_{m_0}$.

- Convergência da integral $\displaystyle\int_0^T \alpha(t)((u_m(t), w))\zeta(t)dt$.

Como $V \hookrightarrow H^1(\Omega)$ então $L^\infty(0,T;V) \hookrightarrow L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$ e, por (2.55), temos que $u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u$ em $L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$, isto é,

$$\int_0^T \langle \xi(t), u_m(t)\rangle_{H^1(\Omega)',H^1(\Omega)} dt \to \int_0^T \langle \xi(t), u(t)\rangle_{H^1(\Omega)',H^1(\Omega)} dt$$

para toda $\xi \in L^1(0,T;H^1(\Omega)')$. Então, pelo Teorema da Representação de Riesz, temos

$$\int_0^T ((u_m(t), \xi(t)))dt \to \int_0^T ((u(t), \xi(t)))dt.$$

Portanto,

$$\int_0^T \alpha(t)((u_m(t), w))\zeta(t)dt \to \int_0^T \alpha(t)((u(t), w))\zeta(t)dt,$$

para todo $w \in W_{m_0}$.

- Convergência da integral $-\int_0^T \alpha(t)(\delta'_m(t), w)_{\Gamma_1}\zeta(t)dt$.

Vimos que $\delta'_m \overset{*}{\rightharpoonup} \delta'$ em $L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_1))$, ou seja,

$$\langle \delta'_m, \xi\rangle_{L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_1)),L^1(0,T;L^2(\Gamma_1))} \to \langle \delta', \xi\rangle_{L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_1)),L^1(0,T;L^2(\Gamma_1))}.$$

Daí e, do Teorema da Representação de Riesz, segue que

$$-\int_0^T \alpha(t)(\delta'_m(t), w)_{\Gamma_1}\zeta(t)dt \to -\int_0^T \alpha(t)(\delta'(t), w)_{\Gamma_1}\zeta(t)dt$$

para todo $w \in W_{m_0}$.

- Convergência da integral $\lambda\int_0^T (|u_m(t)|^\rho u_m(t), w)\zeta(t)dt$.

Como $L^\infty(0,T;V) \hookrightarrow L^2(0,T;V) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega))$ temos, por (2.48) e (2.49) que $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ e $(u'_m)_{m\in\mathbb{N}}$ são limitadas em $L^2(0,T;V)$ e $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, respectivamente. Então, pelo teorema de Aubin-Lions, existe uma subsequência de $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$, que denotaremos por $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$, tal que

$$u_m \to u \ \text{ em } \ L^2(0,T;L^2(\Omega)) \equiv L^2(Q).$$

Logo, pelo Teorema 1.5 , existe uma subsequência $(u_{m_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$, que ainda denotaremos por $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$, tal que

$$u_m \to u \ \text{ em q.t.p de } \ Q,$$

e, sendo $\psi(s) = |s|^\rho s$ uma função contínua, temos

$$|u_m|^\rho u_m \to |u|^\rho u \text{ em q.t.p de } Q. \tag{2.67}$$

Além disso, temos que $V \hookrightarrow L^r(\Omega)$ com $r = 2\rho + 2$ e, desse modo, $L^\infty(0,T;V) \hookrightarrow L^\infty(0,T;L^r(\Omega))$. Agora, notemos que

$$\|u_m(t)\|^r_{L^r(\Omega)} = \int_\Omega |u_m(t)|^{2\rho+2} dx = \Big||u_m(t)|^\rho u_m(t)\Big|^2,$$

donde, por (2.48)

$$(|u_m|^\rho u_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.68}$$

Então, decorre do Lema 1.2, de (2.67) e (2.68), que

$$|u_m|^\rho u_m \rightharpoonup |u|^\rho u \text{ em } L^2(Q),$$

isto é,

$$\int_0^T \int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m(t) \xi dx dt \to \int_0^T \int_\Omega |u(t)|^\rho u(t) \xi dx dt$$

para toda $\xi \in L^2(Q)$. Portanto,

$$\lambda \int_0^T (|u_m(t)|^\rho u_m(t), w) \zeta(t) dt \to \lambda \int_0^T (|u(t)|^\rho u(t), w) \zeta(t) dt$$

para todo $w \in W_{m_0}$.

- Convergência da integral $\displaystyle\int_0^T \alpha(t)(\eta(u_m'(t)), w)_{\Gamma_1} \zeta(t) dt$.

Primeiramente, notemos que $(\eta(u_m'))_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))$. Com efeito, usando as hipóteses $(2.2)_6$ do Teorema 2.1, encontramos

$$\begin{aligned} |\eta(u_m')|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))} &= \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\eta(u_m'(t)|^2_{\mathbb{R}} d\Gamma dt \leqslant \\ L^2 \int_0^T \int_{\Gamma_1} |u_m'(t)|^2_{\mathbb{R}} d\Gamma dt &= L^2 |u_m'|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))}, \end{aligned}$$

e sendo $(u_m')_{m\in\mathbb{N}}$ limitada em $L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))$, segue o resultado. Além disso, existe uma subsequência $(\eta(u_m'))_{m\in\mathbb{N}}$ de $(\eta(u_m'))_{m\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\eta(u_m') \to \eta(u') \text{ em q.t.p de } \Gamma_1 \times (0,T),$$

e, portanto, pelo Lema 1.2 , temos que

$$\eta(u'_m) \rightharpoonup \eta(u') \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)),$$

e, concluímos daí que,

$$\int_0^T \alpha(t)(\eta(u'_m(t)),w)_{\Gamma_1}\zeta(t)dt \to \int_0^T \alpha(t)(\eta(u'(t)),w)_{\Gamma_1}\zeta(t)dt.$$

- Convergência da integral $\int_0^T ((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta_m(t),w)\zeta(t)dt.$

Decorre de (2.52) que $((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ donde, pelo Teorema 1.3, existe uma subsequência de $((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta_m)_{m\in\mathbb{N}}$, que denotaremos por $((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta_m)_{m\in\mathbb{N}}$ e $\chi \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \equiv L^2(Q)$ tais que

$$(\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta_m \rightharpoonup \chi \text{ em } L^2(Q),$$

isto é,

$$\int_0^T\int_\Omega ((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta_m(t,x))\xi(t,x)dxdt \to \int_0^T\int_\Omega \chi(t,x)\xi(t,x)dxdt, \tag{2.69}$$

para toda $\xi \in L^2(Q)$. Além disso, notemos que, por (2.52) e (2.53), $(\theta_m)_{m\in\mathbb{N}}$ e $(\theta'_m)_{m\in\mathbb{N}}$ são limitadas em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ e $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, respectivamente, donde, pelo Teorema de Aubin-Lions, existe uma subsequência $(\theta_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $(\theta_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\theta_m \to \theta \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.70}$$

Agora, observemos que, para cada $m\in\mathbb{N}$ a função θ_m define uma distribuição em $\mathcal{D}(Q)$, denotada por T_{θ_m}, onde

$$\langle T_{\theta_m},\phi\rangle = \int_0^T\int_\Omega \theta_m(t,x)\phi(t,x)dxdt, \forall\phi\in\mathcal{D}(Q).$$

Assim, por (2.70),

$$\langle T_{\theta_m},\phi\rangle \to \langle T_\theta,\phi\rangle, \forall\phi\in\mathcal{D}(Q),$$

donde, $T_{\theta_m}\to T_\theta$ em $\mathcal{D}'(Q)$ e, pela continuidade da derivação em $\mathcal{D}'(Q)$, temos que

$$T_{(\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta_m} \to T_{(\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta} \text{ em } \mathcal{D}'(Q),$$

decorre daí e de (2.69) que $T_{(\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta} = T_\chi$ e, do Lema de Du Bois Raymond, $(\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta = \chi$ quase sempre em Q. Portanto,

$$\int_0^T ((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta_m(t),w)\zeta(t)dt \to \int_0^T ((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta(t),w)\zeta(t)dt,$$

para todo $w \in W_{m_0}$. Então, fazendo $m \to \infty$ em (2.64), usando os resultados de convergência acima obtidos e o fato de $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ser uma base de $V \cap H_\Delta(\Omega)$, obtemos

$$\int_0^T (u''(t), w)\zeta(t)dt + \int_0^T \alpha(t)((u(t), w))\zeta(t)dt - \int_0^T \alpha(t)(\delta'(t), w)_{\Gamma_1}\zeta(t)dt$$
$$+ \int_0^T \alpha(t)(\eta(u'(t)), w)_{\Gamma_1}\zeta(t)dt + \lambda\int_0^T (|u(t)|^\rho u(t), w)\zeta(t)dt$$
$$+ \int_0^T ((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta(t), w)\zeta(t)dt = 0,$$

para todo $w \in V \cap H_\Delta(\Omega)$, ou ainda,

$$\left\langle \frac{d}{dt}(u', w), \zeta \right\rangle + \left\langle \alpha(t)\Big[((u, w)) - (\delta', w)_{\Gamma_1} + (\eta(u'), w)_{\Gamma_1}\Big], \zeta \right\rangle \qquad (2.71)$$
$$+ \langle(\lambda|u|^\rho u, w), \zeta\rangle + \langle((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta, w), \zeta\rangle = 0,$$

para todo $\zeta \in \mathcal{D}(0,T)$.

Agora, faremos uma análise da convergência das integrais em (2.65).

- Convergência da integral $\displaystyle\int_0^T (\theta_m'(t), v)\zeta(t)dt$.

Segue, de (2.53), que existe uma subsequência de $(\theta_m)_{m\in\mathbb{N}}$, que ainda denotaremos por $(\theta_m)_{m\in\mathbb{N}}$, tal que

$$\theta_m' \rightharpoonup \theta' \ \text{ em } \ L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$

isto é,

$$\int_0^T (\theta_m'(t), \xi(t))dt \to \int_0^T (\theta'(t), \xi(t))dt,$$

para todo $\xi \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Portanto,

$$\int_0^T (\theta_m'(t), v)\zeta(t)dt \to \int_0^T (\theta'(t), v)\zeta(t)dt,$$

para toda $v \in V_{m_0}$.

- Convergência da integral $\displaystyle\int_0^T \beta\left(\int_\Omega \theta_m(t)dx\right)((\theta_m(t), v))\zeta(t)dt$.

Sendo $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de autofunções do operador laplaciano, podemos tomar $v = -\Delta\theta_m(t)$ em (2.4) e obtermos

$$\frac{d}{dt}|\nabla\theta_m(t)|^2 + 2\beta\left(\int_\Omega \theta_m(t)dx\right)|\Delta\theta_m(t)|^2 = 2((\mathbf{a}\cdot\nabla)u_m'(t), \Delta\theta_m(t)).$$

Lembrando que $\beta\left(\int_\Omega \theta_m(t)dx\right) \geqslant \beta_0$ e, aplicando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Young na igualdade acima, obtemos

$$\frac{d}{dt}|\nabla\theta_m(t)|^2 + 2\beta_0|\Delta\theta_m(t)|^2 \leqslant C|\nabla u_m'(t)|^2 + \beta_0|\Delta\theta_m(t)|^2. \tag{2.72}$$

Agora, integrando (2.72) de 0 à T e usando o fato de $(u_m')_{m\in\mathbb{N}}$ ser limitada em $L^\infty(0,T;V)$, encontramos

$$|\nabla\theta_m(t)|^2 + \beta_0\int_0^T |\Delta\theta_m(t)|^2 dt \leqslant C, \tag{2.73}$$

onde C é uma constante que não depende de m e $0 \leqslant t \leqslant T$.
Recordemos que $(\theta_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ e $(\theta_m')_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e, portanto, pelo Teorema de Aubin-Lions, existe uma subsequência de $(\theta_m)_{m\in\mathbb{N}}$, ainda denotada por $(\theta_m)_{m\in\mathbb{N}}$, tal qu

$$\left(\int_0^T |\theta_m(t) - \theta(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \to 0 \ \text{ quando } \ m \to 0. \tag{2.74}$$

Além disso, segue de (2.42) e de $\beta' \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$, que β é Lipschitziana quase sempre em $[-C, C]$ com constante de Lipschitz M. Agora, notemos que, dados $v \in V_{m_0}$ e $\zeta \in \mathcal{D}(0,T)$, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left(\beta\left(\int_\Omega \theta_m(t)dx\right)\nabla\theta_m(t) - \beta\left(\int_\Omega \theta(t)dx\right)\nabla\theta(t), \nabla v\right)\zeta(t)dt = \\
\int_0^T \left[\beta\left(\int_\Omega \theta_m(t)dx\right) - \beta\left(\int_\Omega \theta(t)dx\right)\right](\nabla\theta_m(t), \nabla v)\zeta(t)dt + \\
+\int_0^T \left(\beta\left(\int_\Omega \theta(t)dx\right)[\nabla\theta_m(t) - \nabla\theta(t)], \nabla v\right)\zeta(t)dt.
\end{aligned} \tag{2.75}$$

Observando que $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, usando (2.73), a desigualdade de Cauchy-Schwarz e o fato de β ser Lipschitz quase sempre, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left[\beta\left(\int_\Omega \theta_m(t)dx\right) - \beta\left(\int_\Omega \theta(t)dx\right)\right](\nabla\theta_m(t), \nabla v)\zeta(t)dt \leqslant \\
C|\zeta|_{L^2(0,T)}\left(\int_0^T |\theta_m(t) - \theta(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Então, por (2.74),

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^T \left[\beta\left(\int_\Omega \theta_m(t)dx\right) - \beta\left(\int_\Omega \theta(t)dx\right)\right](\nabla\theta_m(t), \nabla v)\zeta(t)dt = 0. \tag{2.76}$$

Analisemos agora o último termo de (2.75). Inicialmente, notemos que, pela continuidade de β e, por (2.42), $\left|\beta\left(\int_\Omega \theta(t)dx\right)\right| \leqslant C$. Além disso, resulta da desigualdade de Cauchy-Schwarz, que

$$|(\nabla\theta_m(t) - \nabla\theta(t), \nabla v)\zeta(t)|_{\mathbb{R}} \leqslant C|\nabla\theta_m(t) - \nabla\theta(t)|.$$

Assim, como $\theta_m \rightharpoonup \theta$ em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, obtemos

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^T \left(\beta\left(\int_\Omega \theta(t)dx\right)\left[\nabla\theta_m(t) - \nabla\theta(t)\right], \nabla v\right)\zeta(t)dt = 0. \tag{2.77}$$

Usando (2.76) e (2.77) em (2.75), encontramos

$$\int_0^T \left(\beta\left(\int_\Omega \theta_m(t)dx\right)\nabla\theta_m(t), \nabla v\right)\zeta(t)dt \to \int_0^T \left(\beta\left(\int_\Omega \theta(t)dx\right)\nabla\theta(t), \nabla v\right)\zeta(t)dt,$$

para todo $v \in V_{m_0}$ e todo $\zeta \in \mathcal{D}(0,T)$.

- Convergência da integral $\displaystyle\int_0^T ((\mathbf{a}\cdot\nabla)u'_m(t), v)\zeta(t)dt$.

Segue, de (2.49), que $((\mathbf{a}\cdot\nabla)u'_m)$ é limitada em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Então, pelo Corolário 1.1, existem uma subsequência $((\mathbf{a}\cdot\nabla)u'_m)$ e $\chi \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, tais que

$$(\mathbf{a}\cdot\nabla)u'_m \overset{*}{\rightharpoonup} \chi \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),$$

isto é,

$$\int_0^T \langle(\mathbf{a}\cdot\nabla)u'_m(t), \xi(t)\rangle_{L^2(\Omega),L^2(\Omega)}dt \to \int_0^T \langle\chi(t), \xi(t)\rangle_{L^2(\Omega),L^2(\Omega)}dt.$$

Assim, pelo Teorema da Representação de Riesz,

$$\int_0^T ((\mathbf{a}\cdot\nabla)u'_m(t), \xi(t))dt \to \int_0^T (\chi(t), \xi(t))dt, \tag{2.78}$$

para toda $\xi \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$. A seguir, mostraremos que $\chi = (\mathbf{a}\cdot\nabla)u'$. De fato, por (2.49) e (2.50), temos que (u'_m) e (u''_m) são limitadas em $L^2(0,T;V)$ e $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, respectivamente. Logo, pelo teorema de Aubin-Lions, existe uma subsequência $(u'_m)_{m\in\mathbb{N}}$, tal que

$$u'_m \to u' \quad \text{em} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)) \equiv L^2(Q). \tag{2.79}$$

Agora, notemos que, para cada $m \in \mathbb{N}$, u'_m define uma distribuição em $\mathcal{D}(Q)$, denotada por $T_{u'_m}$ e, tal que,

$$\langle T_{u'_m}, \phi\rangle = \int_0^T\int_\Omega u'_m(t,x)\phi(t,x)dxdt,$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}(Q)$. Assim, por (2.79), temos que $T_{u'_m} \to T_{u'}$ em $\mathcal{D}'(Q)$ e decorre, da continuidade da derivação no espaço das funções teste, que

$$\langle T_{(\mathbf{a}\cdot\nabla)u'_m}, \phi\rangle \to \langle T_{(\mathbf{a}\cdot\nabla)u'}, \phi\rangle, \forall \phi \in \mathcal{D}(Q).$$

Logo, podemos concluir por (2.78) e, pela unicidade do limite em $\mathcal{D}'(Q)$, que $T_{(\mathbf{a}\cdot\nabla)u'} = T_\chi$ e, pelo Lema de Du Bois Raymond, temos que $(\mathbf{a}\cdot\nabla)u' = \chi$ quase sempre em Q. Portanto,

$$\int_0^T ((\mathbf{a}\cdot\nabla)u'_m(t), v)\zeta(t)dt \to \int_0^T ((\mathbf{a}\cdot\nabla)u'(t), v)\zeta(t)dt,$$

para todo $v \in V_{m_0}$. Assim, fazendo $m \to \infty$ em (2.65), usando os resultados de convergência de integrais obtidos acima e, levando em conta o fato de $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ser uma base de $H_0^1(\Omega)$, temos

$$\int_0^T (\theta'(t), v)\zeta(t)dt + \int_0^T \beta\left(\int_\Omega \theta(t)dx\right)((\theta(t), v))\zeta(t)dt \\ + \int_0^T ((\mathbf{a}\cdot\nabla)u'(t), v)\zeta(t)dt = 0,$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Equivalentemente,

$$\langle(\theta', v), \zeta\rangle + \left\langle \beta\left(\int_\Omega \theta dx\right)((\theta, v)), \zeta\right\rangle + \langle((\mathbf{a}\cdot\nabla)u', v), \zeta\rangle = 0,$$

para todo $\zeta \in \mathcal{D}(0, T)$.

Analisaremos agora a convergência das integrais em (2.66).

- Convergência da integral $\displaystyle\int_0^T (u'_m(t), z)_{\Gamma_1}\zeta(t)dt$.

Temos, de (2.58), que $u'_m \rightharpoonup u'$ em $L^2(0, T; L^2(\Gamma_1))$, isto é,

$$\int_0^T (u'_m(t), \xi(t))_{\Gamma_1} dt \to \int_0^T (u'(t), \xi(t))_{\Gamma_1} dt,$$

para toda $\xi \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1))$. Em particular, tomando $\xi = z\zeta(t)$, com $z \in Z_{m_0}$, obtemos

$$\int_0^T (u'_m(t), z)_{\Gamma_1}\zeta(t)dt \to \int_0^T (u'(t), z)_{\Gamma_1}\zeta(t)dt.$$

- Convergência da integral $\displaystyle\int_0^T (f_1\delta''_m(t), z)_{\Gamma_1}\zeta(t)dt$.

Temos, por (2.63), que $\delta''_m \overset{*}{\rightharpoonup} \delta''$ em $L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_1))$, o que significa dizer que

$$\langle \delta''_m, \xi\rangle_{L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_1)),L^1(0,T;L^2(\Gamma_1))} \to \langle \delta'', \xi\rangle_{L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_1)),L^1(0,T;L^2(\Gamma_1))},$$

e, então, pelo Teorema da Representação de Riesz, obtemos

$$\int_0^T (\delta_m''(t), \xi(t))_{\Gamma_1} dt \to \int_0^T (\delta''(t), \xi(t))_{\Gamma_1} dt,$$

para todo $\xi \in L^1(0, T; L^2(\Gamma_1))$. Tomando, em particular, $\xi = z\zeta(t)$, temos

$$\int_0^T (f_1\delta_m''(t), z)_{\Gamma_1} \zeta(t) dt \to \int_0^T (f_1\delta''(t), z)_{\Gamma_1} \zeta(t) dt.$$

Analogamente, mostramos que

$$\int_0^T (f_2\delta_m'(t), z)_{\Gamma_1} \zeta(t) dt \to \int_0^T (f_2\delta'(t), z)_{\Gamma_1} \zeta(t) dt,$$
$$\int_0^T (f_3\delta_m(t), z)_{\Gamma_1} \zeta(t) dt \to \int_0^T (f_3\delta(t), z)_{\Gamma_1} \zeta(t) dt,$$

para todo $z \in Z_{m_0}$. Portanto, fazendo $m \to \infty$ em (2.66), usando os resultados de convergência acima obtidos e lembrando que $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ forma uma base de $L^2(\Gamma_1)$, temos

$$\begin{aligned}\int_0^T (u'(t), z)_{\Gamma_1} \zeta(t) dt + \int_0^T (f_1\delta''(t), z)_{\Gamma_1} \zeta(t) dt + \int_0^T (f_2\delta'(t), z)_{\Gamma_1} \zeta(t) dt \\ + \int_0^T (f_3\delta(t), z)_{\Gamma_1} \zeta(t) dt = 0,\end{aligned}$$

para todo $z \in L^2(\Gamma_1)$. Ou ainda,

$$\langle (u', z)_{\Gamma_1}, \zeta\rangle + \langle (f_1\delta'', z)_{\Gamma_1}, \zeta\rangle + \langle (f_2\delta', z)_{\Gamma_1}, \zeta\rangle + \langle (f_3\delta, z)_{\Gamma_1}, \zeta\rangle = 0,$$

para todo $\zeta \in \mathcal{D}(0, T)$.

Mostraremos agora que a terna $\{u, \theta, \delta\}$ é solução forte do sistema de equações diferenciais (1). De fato, se $w \in \mathcal{D}(\Omega) \subset V \cap H_\Delta(\Omega)$ então,

$$\int_0^T \left[(u''(t), w) + \alpha(t)((u(t), w)) + (\lambda|u(t)|^\rho u(t), w) + ((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta(t), w)\right]\zeta(t) dt = 0,$$

para todo $\zeta \in \mathcal{D}(0, T)$. Assim, pela fórmula de Green, temos

$$\int_0^T \left[(u''(t), w) - \alpha(t)(\Delta u(t), w) + (\lambda|u(t)|^\rho u(t), w) + ((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta(t), w)\right]\zeta(t) dt = 0.$$

Assim, pelo Lema de Du Bois Raymond, temos que

$$(u''(t), w) - \alpha(t)(\Delta u(t), w) + (\lambda|u(t)|^\rho u(t), w) + ((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta(t), w) = 0 \text{ em q.t.p de } (0, T),$$

para todo $w \in \mathcal{D}(\Omega)$. Novamente, pelo Lema de Du Bois Raymond, segue que

$$u'' - \alpha(t)\Delta u + \lambda|u|^\rho u + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta = 0 \text{ em q.t.p de } Q. \tag{2.80}$$

Analogamente, aplicando duas vezes o Lema de Du Bois Raymond, obtemos

$$\theta' - \beta\left(\int_\Omega \theta\right)\Delta\theta + (\mathbf{a}\cdot\nabla)u' = 0 \text{ em q.t.p de } Q,$$

$$u' + f_1\delta'' + f_2\delta' + f_3\delta = 0 \text{ em q.t.p de } \Gamma_1 \times (0,T).$$

Agora, multiplicando (2.80) por $w \in V \cap H_\Delta(\Omega)$ e $\zeta \in \mathcal{D}(0,T)$, e integrando em Q, obtemos

$$\int_0^T (u'', w)\zeta(t)dt - \int_0^T \alpha(t)(\Delta u, w)\zeta(t)dt + \int_0^T (\lambda|u|^\rho u, w)\zeta(t)dt + \int_0^T ((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta, w)\zeta(t)dt = 0,$$

e, pela fórmula de Green,

$$\int_0^T (u'', w)\zeta(t)dt + \int_0^T \alpha(t)\left[((u,w)) - \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}, w\right)_{\Gamma_1}\right]\zeta(t)dt + \int_0^T (\lambda|u|^\rho u, w)\zeta(t)dt + \int_0^T ((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta, w)\zeta(t)dt = 0. \tag{2.81}$$

Subtraindo (2.81) de (2.71), obtemos

$$\int_0^T \alpha(t)\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} - \delta' + \eta(u'), w\right)_{\Gamma_1}\zeta(t)dt = 0, \forall\zeta \in \mathcal{D}(0,T).$$

Resulta, do Lema de Du Bois Raymond, que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} - \delta' + \eta(u'), w\right)_{\Gamma_1} = 0 \text{ em q.t.p de } (0,T),$$

para todo $w \in V \cap H_\Delta(\Omega)$. Portanto,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} - \delta' + \eta(u') = 0 \text{ em q.t.p de } \Gamma_1 \times (0,T).$$

2.4 Verificação das Condições Iniciais

Nesta seção mostraremos que a terna de soluções $\{u, \theta, \delta\}$ satisfaz as condições iniciais do problema (1)-(2).

- $u(0) = u_0$.

Sendo $u \in L^\infty(0,T;V)$ e $u' \in L^\infty(0,T;V)$ então, pela Proposição 1.2, $u \in C^0([0,T];V)$, fazendo sentido calcular $u(0)$. Além disso, como $u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u$ em $L^\infty(0,T;V)$, então,

$$\int_0^T \langle u_m(t), w\rangle_{V,V'}\varphi(t)dt \to \int_0^T \langle u(t), w\rangle_{V,V'}\varphi(t)dt, \quad \forall w \in V', \quad \forall \varphi \in L^1(0,T).$$

Tomando, em particular, $w \in L^2(\Omega)$, a dualidade $\langle u_m(t), w\rangle_{V,V'}$ é dada por $(u_m(t), w)$ e, desse modo,

$$\int_0^T (u_m(t), w)\phi'(t)dt \to \int_0^T (u(t), w)\phi'(t)dt, \quad \forall w \in L^2(\Omega), \quad \forall \phi \in C^1([0,T]), \tag{2.82}$$

com $\phi(0) = 1$ e $\phi(T) = 0$. Analogamente, o fato de $u'_m \overset{*}{\rightharpoonup} u'$ em $L^\infty(0,T;V)$ nos garante que

$$\int_0^T (u'_m(t), w)\phi(t)dt \to \int_0^T (u'(t), w)\phi(t)dt, \quad \forall w \in L^2(\Omega), \quad \forall \phi \in C^1([0,T]), \tag{2.83}$$

com $\phi(0) = 1$ e $\phi(T) = 0$. Somando (2.82) e (2.83), obtemos

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(u_m(t), w\phi(t))dt \to \int_0^T \frac{d}{dt}(u(t), w\phi(t))dt.$$

Portanto,

$$(u_m(0), w) \to (u(0), w), \quad \forall w \in L^2(\Omega),$$

isto é,

$$u_m(0) \rightharpoonup u(0) \quad \text{em} \quad L^2(\Omega).$$

Como, por hipótese, $u_m(0) \to u_0$ em $V \cap H_\Delta(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ então $u_m(0) \rightharpoonup u_0$ em $L^2(\Omega)$ e, pela unicidade do limite fraco, $u(x,0) = u_0(x)$ para todo $x \in \Omega$.

- $u'(0) = u_1$.

Sendo $u' \in L^\infty(0,T;V)$ e $u'' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ então, pela Proposição 1.2, $u' \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$ e, portanto, existe $u'(0)$. Agora, observemos que

$$u'_m \overset{*}{\rightharpoonup} u' \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;V),$$
$$u''_m \overset{*}{\rightharpoonup} u'' \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),$$

resulta que

$$\int_0^T (u'_m(t), w)\phi'(t)dt \to \int_0^T (u'(t), w)\phi'(t)dt,$$
$$\int_0^T (u''_m(t), w)\phi(t)dt \to \int_0^T (u''(t), w)\phi(t)dt,$$

para todo $w \in L^2(\Omega)$ e todo $\phi \in C^1([0,T])$, com $\phi(0)=1$ e $\phi(T)=0$. Assim,

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(u'_m(t), w\phi(t))dt \to \int_0^T \frac{d}{dt}(u'(t), w\phi(t))dt,$$

e, portanto,

$$(u'_m(0), w) \to (u'(0), w), \quad \forall w \in L^2(\Omega),$$

isto é,

$$u'_m(0) \rightharpoonup u'(0) \text{ em } L^2(\Omega).$$

Por hipótese, temos que $u'_m(0) \to u_1$ em $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e, consequentemente, $u'_m(0) \rightharpoonup u_1$ em $L^2(\Omega)$. Portanto, pela unicidade do limite fraco, $u'(x,0) = u_1(x)$ para todo $x \in \Omega$.

- $\theta(0) = \theta_0$.

Sendo $\theta, \theta' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ então $\theta \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$ e faz sentido calcular $\theta(0)$. Observemos que

$$\theta_m \rightharpoonup \theta \text{ em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),$$
$$\theta'_m \rightharpoonup \theta' \text{ em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),$$

resulta em

$$\int_0^T ((\theta_m(t), w))\phi'(t)dt \to \int_0^T ((\theta(t), w))\phi'(t)dt,$$
$$\int_0^T ((\theta'_m(t), w))\phi(t)dt \to \int_0^T ((\theta'(t), w))\phi(t)dt,$$

para todo $w \in H_0^1(\Omega)$ e todo $\phi \in C^1([0,T])$ com $\phi(0)=1$ e $\phi(T)=0$. Assim, somando as duas relações acima, obtemos

$$\int_0^T \frac{d}{dt}((\theta_m(t), w\phi(t)))dt \to \int_0^T \frac{d}{dt}((\theta(t), w\phi(t)))dt.$$

Logo,

$$((\theta_m(0), w)) \to ((\theta(0), w)), \quad \forall w \in H_0^1(\Omega),$$

isto é,

$$\theta_m(0) \rightharpoonup \theta(0) \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Por hipótese temos que $\theta_m(0) \to \theta_0$ em $H_0^1(\Omega)$ e, como convergência forte implica em convergência fraca, temos que $\theta_m(0) \rightharpoonup \theta_0$. Então, pela unicidade do limite fraco, $\theta(x,0) = \theta_0(x)$ em Ω.

- $\delta(0)=\delta_0$.

Como $\delta,\delta'\in L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_1))$ então $\delta\in C^0([0,T];L^2(\Gamma_1))$ e, portanto, faz sentido calcular $\delta(0)$. Agora, notemos que

$$\begin{aligned}\delta_m &\overset{*}{\rightharpoonup} \delta \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_1)),\\ \delta'_m &\overset{*}{\rightharpoonup} \delta' \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_1)),\end{aligned}$$

resulta em,

$$\begin{aligned}\int_0^T(\delta_m(t),\xi(t))_{\Gamma_1}dt &\to \int_0^T(\delta(t),\xi(t))_{\Gamma_1}dt,\\ \int_0^T(\delta'_m(t),\xi(t))_{\Gamma_1}dt &\to \int_0^T(\delta'(t),\xi(t))_{\Gamma_1}dt,\end{aligned}$$

para todo $\xi\in L^1(0,T;L^2(\Gamma_1))$. Em particular, consideremos $\xi(t,x)=z(x)\phi(t)$, com $z\in L^2(\Gamma_1)$ e $\phi\in C^1([0,T])$, onde $\phi(0)=1$ e $\phi(T)=0$. Então, pelas relações acima, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T(\delta_m(t),z)_{\Gamma_1}\phi'(t)dt &\to \int_0^T(\delta(t),z)_{\Gamma_1}\phi'(t)dt,\\ \int_0^T(\delta'_m(t),z)_{\Gamma_1}\phi(t)dt &\to \int_0^T(\delta'(t),z))_{\Gamma_1}\phi(t)dt.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^T\frac{d}{dt}(\delta_m(t),z\phi(t))_{\Gamma_1}dt \to \int_0^T\frac{d}{dt}(\delta(t),z\phi(t))dt.$$

Assim,

$$(\delta_m(0),z)_{\Gamma_1}\to(\delta(0),z)_{\Gamma_1},\quad \forall z\in L^2(\Gamma_1).$$

Logo,

$$\delta_m(0)\rightharpoonup\delta(0) \quad \text{em} \quad L^2(\Gamma_1).$$

Por hipótese, $\delta_m(0)\rightharpoonup\delta_0$ em $L^2(\Gamma_1)$. Então, pela unicidade do limite fraco, $\delta(x,0)=\delta_0(x)$, para todo $x\in\Gamma_1$.

De modo análogo, mostramos que

$$\delta'(x,0)=\frac{\partial u_0}{\partial\nu}(x)+\eta(u_1(x)),\quad \forall x\in\Gamma_1.$$

2.5 Unicidade das Soluções

Nesta seção demonstraremos, via método da Energia, que nosso problema possui uma única solução. Para tanto, suponhamos que $\{u, \theta, \delta\}$ e $\{\widehat{u}, \widehat{\theta}, \widehat{\delta}\}$ sejam soluções do problema e sejam $v = u - \widehat{u}$, $w = \theta - \widehat{\theta}$ e $\varphi = \delta - \widehat{\delta}$. Então,

$$\begin{aligned}(v''(t), \xi) + \alpha(t)\Big[((v(t), \xi)) - (\varphi'(t), \xi)_{\Gamma_1} + (\eta(u'(t)) - \eta(\widehat{u}'(t)), \xi)_{\Gamma_1}\Big]\\ +\lambda \int_\Omega (|u(t)|^\rho_{\mathbb{R}} u(t) - |\widehat{u}(t)|^\rho_{\mathbb{R}}\widehat{u}(t))\, \xi dx + ((\mathbf{a}\cdot\nabla)w(t), \xi) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(w'(t), \phi) + \beta\left(\int_\Omega \theta(t)dx\right)((w(t), \phi))+\\ +\left[\beta\left(\int_\Omega \theta(t)dx\right) - \beta\left(\int_\Omega \widehat{\theta}(t)dx\right)\right]((\widehat{\theta}(t), \phi)) + ((\mathbf{a}\cdot\nabla)v'(t), \phi) = 0,\end{aligned} \tag{2.84}$$

$$(v'(t) + f_1\varphi''(t) + f_2\varphi'(t) + f_3\varphi(t), \zeta)_{\Gamma_1} = 0,$$

para todos $\xi \in V \cap H_\Delta(\Omega)$, $\phi \in H^1_0(\Omega)$ e $\zeta \in L^2(\Gamma_1)$.

Além disso,

$$\begin{aligned} v(x, t) = 0 \text{ em } \Gamma_0 \times (0, \infty);\quad w(x, t) = 0 \text{ em } \Gamma \times (0, \infty),\\ v(x, 0) = v'(x, 0) = w(x, 0) = 0 \text{ em } \Omega,\\ \varphi(x, 0) = 0 \text{ em } \Gamma_1,\\ \varphi'(x, 0) = 0 \text{ em } \Gamma_1.\end{aligned}$$

Tomando $\xi = 2v'(t)$, $\phi = 2w(t)$ e $\zeta = 2\varphi'(t)$ em $(2.84)_1 - (2.84)_3$, obtemos

$$\begin{aligned}2(v''(t), v'(t)) + 2\alpha(t)\Big[((v(t), v'(t))) - (\varphi'(t), v'(t))_{\Gamma_1} + (\eta(u'(t)) - \eta(\widehat{u}'(t)), v'(t))_{\Gamma_1}\Big]\\ +2\lambda \int_\Omega \Big(|u(t)|^\rho_{\mathbb{R}} u(t) - |\widehat{u}(t)|^\rho_{\mathbb{R}}\widehat{u}(t)\Big) v'(t) dx + 2((\mathbf{a}\cdot\nabla)w(t), v'(t)) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2(w'(t), w(t)) + 2\beta\left(\int_\Omega \theta(t)dx\right)\|w(t)\|^2 +\\ +2\left[\beta\left(\int_\Omega \theta(t)dx\right) - \beta\left(\int_\Omega \widehat{\theta}(t)dx\right)\right]((\widehat{\theta}(t), w(t))) + 2((\mathbf{a}\cdot\nabla)v'(t), w(t)) = 0,\end{aligned} \tag{2.85}$$

$$2(v'(t) + f_1\varphi''(t) + f_2\varphi'(t) + f_3\varphi(t), \varphi'(t))_{\Gamma_1} = 0.$$

Agora, observemos que

$$\begin{aligned} 2(v'(t), v''(t)) &= \frac{d}{dt}|v'(t)|^2, \\ 2((v(t), v'(t))) &= \frac{d}{dt}\|v(t)\|^2, \\ 2(w(t), w'(t)) &= \frac{d}{dt}|w(t)|^2, \\ 2(f_1\varphi''(t), \varphi'(t))_{\Gamma_1} &= \frac{d}{dt}|f_1^{\frac{1}{2}}\varphi'(t)|^2_{\Gamma_1} \\ 2(f_3\varphi(t), \varphi'(t))_{\Gamma_1} &= \frac{d}{dt}|f_3^{\frac{1}{2}}\varphi(t)|^2_{\Gamma_1}. \end{aligned} \tag{2.86}$$

Além disso, de modo análogo a Estimativa I, encontramos

$$2((\mathbf{a}\cdot\nabla)w(t), v'(t)) + 2((\mathbf{a}\cdot\nabla)v'(t), w(t)) = 0. \tag{2.87}$$

Assim, multiplicando $(2.85)_3$ por $\alpha(t)$, somando o resultado por $(2.85)_1$ e $(2.85)_2$ e considerando as identidades (2.86) e (2.87), obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}|v'(t)|^2 + \alpha(t)\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2 + 2\alpha(t)(\eta(u'(t)) - \eta(\widehat{u}'(t)), v'(t))_{\Gamma_1} \\ &+2\lambda\int_\Omega \left(|u(t)|^\rho_{\mathbb{R}}u(t) - |\widehat{u}(t)|^\rho_{\mathbb{R}}\widehat{u}(t)\right)v'(t)dx + \frac{d}{dt}|w(t)|^2 \\ +2\beta\left(\int_\Omega \theta(t)dx\right)\|w(t)\|^2 &+ 2\left[\beta\left(\int_\Omega \theta(t)dx\right) - \beta\left(\int_\Omega \widehat{\theta}(t)dx\right)\right]((\widehat{\theta}(t), w(t))) \\ &+\alpha(t)\frac{d}{dt}|f_1^{\frac{1}{2}}\varphi'(t)|^2_{\Gamma_1} + 2\alpha(t)|f_2^{\frac{1}{2}}\varphi'(t)|^2_{\Gamma_1} + \alpha(t)\frac{d}{dt}|f_3^{\frac{1}{2}}\varphi(t)|^2_{\Gamma_1} = 0 \end{aligned} \tag{2.88}$$

Observemos ainda que

$$\begin{aligned} \alpha(t)\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2 &= \frac{d}{dt}\left(\alpha(t)\|v(t)\|^2\right) - \alpha'(t)\|v(t)\|^2, \\ \alpha(t)\frac{d}{dt}|f_1^{\frac{1}{2}}\varphi'(t)|^2_{\Gamma_1} &= \frac{d}{dt}\left(\alpha(t)|f_1^{\frac{1}{2}}\varphi'(t)|^2_{\Gamma_1}\right) - \alpha'(t)|f_1^{\frac{1}{2}}\varphi'(t)|^2_{\Gamma_1}, \\ \alpha(t)\frac{d}{dt}|f_3^{\frac{1}{2}}\varphi(t)|^2_{\Gamma_1} &= \frac{d}{dt}\left(\alpha(t)|f_3^{\frac{1}{2}}\varphi(t)|^2_{\Gamma_1}\right) - \alpha'(t)|f_3^{\frac{1}{2}}\varphi(t)|^2_{\Gamma_1}. \end{aligned}$$

Então, usando as identidades acima em (2.88), obtemos

$$\begin{aligned} H'(t) &+ 2\alpha(t)(\eta(u'(t)) - \eta(\widehat{u}'(t)), v'(t))_{\Gamma_1} + 2\lambda\int_\Omega \left(|u(t)|^\rho_{\mathbb{R}}u(t) - |\widehat{u}(t)|^\rho_{\mathbb{R}}\widehat{u}(t)\right)v'(t)dx \\ &+2\beta\left(\int_\Omega \theta(t)dx\right)\|w(t)\|^2 + 2\left[\beta\left(\int_\Omega \theta(t)dx\right) - \beta\left(\int_\Omega \widehat{\theta}(t)dx\right)\right]((\widehat{\theta}(t), w(t))) \\ &+2\alpha(t)|f_2^{\frac{1}{2}}\varphi'(t)|^2_{\Gamma_1} = \alpha'(t)\left[\|v(t)\|^2 + |f_1^{\frac{1}{2}}\varphi'(t)|^2_{\Gamma_1} + |f_3^{\frac{1}{2}}\varphi(t)|^2_{\Gamma_1}\right], \end{aligned}$$

onde

$$H(t) = |v'(t)|^2 + |w(t)|^2 + \alpha(t)\left[\|v(t)\|^2 + |f_1^{\frac{1}{2}}\varphi'(t)|^2_{\Gamma_1} + |f_3^{\frac{1}{2}}\varphi(t)|^2_{\Gamma_1}\right].$$

Além disso, segue das hipóteses $(2.2)_4$ e $(2.2)_6$ do Teorema 2.1, que

$$2\beta\left(\int_\Omega \theta(t)dx\right)\|w(t)\|^2 \geqslant 2\beta_0\|w(t)\|^2,$$
$$2\alpha(t)(\eta(u'(t))-\eta(\widehat{u}'(t)),v'(t))_{\Gamma_1} \geqslant 2\eta_0\alpha_0|v'(t)|^2_{\Gamma_1}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} H'(t)+2\alpha_0\eta_0|v'(t)|^2_{\Gamma_1}+2\beta_0\|w(t)\|^2 &\leqslant \alpha'(t)\Big[\|v(t)\|^2 \\ +|f_1^{\frac{1}{2}}\varphi'(t)|^2_{\Gamma_1}+|f_3^{\frac{1}{2}}\varphi(t)|^2_{\Gamma_1}\Big] &+ 2\lambda\int_\Omega \big(|\widehat{u}(t)|^\rho_{\mathbb{R}}\widehat{u}(t)-|u(t)|^\rho_{\mathbb{R}}u(t)\big)v'(t)dx \\ +2\left[\beta\left(\int_\Omega \widehat{\theta}(t)dx\right)-\beta\left(\int_\Omega \theta(t)dx\right)\right]&((\widehat{\theta}(t),w(t))) \end{aligned} \tag{2.89}$$

Nosso objetivo agora é estimar o lado direito da desigualdade (2.89).

- Limitação de $2\lambda\int_\Omega \big(|\widehat{u}(t)|^\rho_{\mathbb{R}}\widehat{u}(t)-|u(t)|^\rho_{\mathbb{R}}u(t)\big)v'(t)dx$

O Teorema do Valor Médio, aplicado à função $\psi(s) = |s|^\rho s$, nos garante que, dados $a, b \in \mathbb{R}$, existe $\gamma \in (0,1)$ tal que

$$|\psi(b)-\psi(a)| = |\psi'(b+(a-b)\gamma)\cdot(b-a)|.$$

Tomando, em particular, $a = u(t)$ e $b = \widehat{u}(t)$, temos

$$\begin{aligned} ||\widehat{u}(t)|^\rho\widehat{u}(t)-|u(t)|^\rho u(t)| &= (\rho+1)|\widehat{u}(t)+(u(t)-\widehat{u}(t))\gamma|^\rho|\widehat{u}(t)-u(t)| \\ &\leqslant (\rho+1)2^\rho\big(|\widehat{u}(t)|+|u(t)|\big)^\rho|\widehat{u}(t)-u(t)| \\ &\leqslant (\rho+1)2^{2\rho}\big(|\widehat{u}(t)|^\rho+|u(t)|^\rho\big)|\widehat{u}(t)-u(t)|. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_\Omega ||\widehat{u}(t)|^\rho_{\mathbb{R}}\widehat{u}(t)-|u(t)|^\rho_{\mathbb{R}}u(t)|_{\mathbb{R}}|v'(t)|_{\mathbb{R}}dx \leqslant C\int_\Omega \big(|\widehat{u}(t)|^\rho_{\mathbb{R}}+|u(t)|^\rho_{\mathbb{R}}\big)|v(t)|_{\mathbb{R}}|v'(t)|_{\mathbb{R}}dx,$$

onde C é uma constante que não depende de t. Usando um raciocínio análogo ao da seção (2.2), encontramos

$$\int_\Omega \big(|\widehat{u}(t)|^\rho_{\mathbb{R}}+|u(t)|^\rho_{\mathbb{R}}\big)|v(t)|_{\mathbb{R}}|v'(t)|_{\mathbb{R}}dx \leqslant C\big(\|\widehat{u}(t)\|^\rho+\|u(t)\|^\rho\big)\|v(t)\||v'(t)|,$$

sendo que C é uma constante que não depende de t. Logo, usando a desigualdade de Young e lembrando que $u, \widehat{u} \in L^\infty(0,T;V)$, temos,

$$2\lambda\int_\Omega \big(|\widehat{u}(t)|^\rho_{\mathbb{R}}u(t)-|u(t)|^\rho_{\mathbb{R}}u(t)\big)v'(t)dx \leqslant C\big(\|v(t)\|^2+|v'(t)|^2\big). \tag{2.90}$$

- Limitação de $2\left[\beta\left(\int_\Omega \widehat{\theta}(t)dx\right) - \beta\left(\int_\Omega \theta(t)dx\right)\right]((\widehat{\theta}(t), w(t)))$.

Temos, por hipótese, que $\beta' \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$ e, desse modo, β é Lipschitz quase sempre em cada intevalo limitado $I \in \mathbb{R}$. Agora, notemos que, de (2.42),

$$\int_\Omega \theta(t)dx, \int_\Omega \widehat{\theta}(t)dx \in [-C, C].$$

Assim, existe $M > 0$, constante de Lipschitz de β em $[-C, C]$, tal que

$$\begin{aligned}
\left|\beta\left(\int_\Omega \widehat{\theta}(t)dx\right) - \beta\left(\int_\Omega \theta(t)dx\right)\right| &\leqslant M\left|\int_\Omega \widehat{\theta}(t)dx - \int_\Omega \theta(t)dx\right| \\
&\leqslant M\|w(t)\|_{L^1(\Omega)} \\
&\leqslant C|w|, \qquad (2.91)
\end{aligned}$$

onde, na última desigualdade usamos a imersão $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$. Assim, de (2.91), usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz, de Young e observando que $\widehat{\theta} \in C^0([0, T]; H^1_0(\Omega))$, obtemos

$$\begin{aligned}
2\left[\beta\left(\int_\Omega \widehat{\theta}(t)dx\right) - \beta\left(\int_\Omega \theta(t)dx\right)\right]((\widehat{\theta}(t), w(t))) &\leqslant 2C|w(t)|\|\widehat{\theta}(t)\|\|w(t)\| \\
&\leqslant C^2\frac{|w(t)|^2\|\widehat{\theta}(t)\|^2}{\beta_0} + \beta_0\|w(t)\|^2 \\
&\leqslant C|w(t)|^2 + \beta_0\|w(t)\|^2. \qquad (2.92)
\end{aligned}$$

Então, por (2.89), (2.91) e (2.92), temos

$$\begin{aligned}
H'(t) &\leqslant \frac{|\alpha'(t)|}{\alpha_0}H(t) + C\left(\|v(t)\|^2 + |v'(t)|^2\right) + C|w(t)|^2 \\
&\leqslant \frac{C}{\alpha_0}H(t) + \frac{C}{\alpha_0}H(t) + CH(t) + CH(t) \\
&\leqslant KH(t),
\end{aligned}$$

sendo $K := \text{máx}\left(\frac{C}{\alpha_0}, C\right)$. Sendo $H(0) = 0$, temos, pela desigualdade de Gronwall, na forma diferencial, que $H \equiv 0$ e, portanto, $u = \widehat{u}, \theta = \widehat{\theta}$ e $\delta = \widehat{\delta}$. □

Capítulo 3

Comportamento Assintótico

Nosso objetivo neste capítulo é demonstrar que quando os conjuntos Γ_0 e Γ_1 têm uma geometria especial, a função f_2 é estritamente positiva e a aplicação η assume uma forma específica, então a energia total: $E(t) =$

$$\frac{1}{2}\left\{|u'(t)|^2 + |\theta(t)|^2 + \left(\frac{2\lambda}{\rho+2}\right)\|u(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} + \alpha(t)\left[\|u(t)\|^2 + |f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1} + |f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1}\right]\right\}$$

associada a solução global do sistema (1) - (2) é assintóticamente estável quando $t \to \infty$.

Para estudarmos o comportamento assintótico de $E(t)$ iremos supor que

$$f_i \in C^0(\Gamma_1), \quad f_i(x) > 0, \quad \forall x \in \Gamma_1 \ \text{ e } \ i = 1, 2, 3. \tag{3.1}$$

Suponhamos ainda que Γ_0 e Γ_1 são fechados, conexos, disjuntos e possuindo a seguinte geometria especial

$$\Gamma_0 = \{x \in \Gamma; m(x) \cdot \nu(x) \leqslant 0\},$$
$$\Gamma_1 = \{x \in \Gamma; m(x) \cdot \nu(x) > 0\},$$

onde $m : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é dada por $m(x) = x - x_0$, sendo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fixado arbitrariamente e $\nu(x)$ é o vetor normal unitário no ponto x. Segue da continuidade de $m(x) \cdot \nu(x)$ em Γ_1 que, por sua vez, é um conjunto compacto, que existe $\zeta \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 < \zeta := \min_{x \in \Gamma_1}\{m(x) \cdot \nu(x)\}.$$

Assumimos que η é dada da seguinte forma

$$\eta(x, s) = [m(x) \cdot \nu(x)]\, \eta_1(s), \quad \forall x \in \Gamma_1, \tag{3.2}$$

onde η_1 é uma função contínua satisfazendo

$$(i)\ [\eta_1(s)-\eta_1(r)](s-r) \geqslant \overline{\eta}_1(s-r)^2,\ \forall\, s,r\in\mathbb{R} \text{ e } \overline{\eta}_1>0, \tag{3.3}$$

$$(ii)\ |\eta_1(s)|_{\mathbb{R}} \leqslant \widehat{\eta}_1|s|_{\mathbb{R}},\ \forall\, s\in\mathbb{R}. \tag{3.4}$$

Finalmente, suponhamos que existam constantes positivas $\sigma, \alpha_1, \kappa_1$ e ϵ tais que

$$\frac{1}{\sigma} := \alpha_0 \leqslant \alpha(t) \leqslant \alpha_1 \ \text{ em q.t.p de } \ \mathbb{R}^+ \ \text{ e } \ \lambda \leqslant \frac{3}{16\kappa_1} \tag{3.5}$$

e,

$$|\alpha'(t)|_{\mathbb{R}} \leqslant \alpha_0\epsilon, \quad \forall t>0. \tag{3.6}$$

Agora, munido com as hipóteses adicionais acima, iremos analisar o comportamento assintótico de $E(t)$ quando $t\to\infty$.

Sendo $\{u,\theta,\delta\}$ solução do problema $(1)-(2)$ então,

$$\begin{aligned}
&(u''(t),u'(t)) + \alpha(t)\big[((u(t),u'(t))) - (\delta'(t),u'(t))_{\Gamma_1} + (\eta(u'(t)),u'(t))_{\Gamma_1}\big]\\
&+\lambda\int_\Omega |u(t)|^\rho u(t)u'(t)dx + ((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta(t),u'(t)) = 0,\\
&(\theta'(t),\theta(t)) + \beta\left(\int_\Omega \theta(t)dx\right)\|\theta(t)\|^2 + ((\mathbf{a}\cdot\nabla)u'(t),\theta(t)) = 0,\\
&(u'(t)+f_1\delta''(t)+f_2\delta'(t)+f_3\delta(t),\delta'(t))_{\Gamma_1} = 0.
\end{aligned}$$

Procedendo de modo análogo a Estimativa I, do capítulo anterior, encontramos

$$\begin{aligned}
&E'(t) + \beta\left(\int_\Omega \theta(t)dx\right)\|\theta(t)\|^2 + \alpha(t)(\eta(u'(t)),u'(t))_{\Gamma_1} + \alpha(t)|f_2^{\frac12}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1} =\\
&\frac{\alpha'(t)}{2}\Big[\|u(t)\|^2 + |f_1^{\frac12}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1} + |f_3^{\frac12}\delta(t)|^2_{\Gamma_1}\Big],
\end{aligned} \tag{3.7}$$

onde, $E(t) =$

$$\frac12\left\{|u'(t)|^2 + |\theta(t)|^2 + \left(\frac{2\lambda}{\rho+2}\right)\|u(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} + \alpha(t)\Big[\|u(t)\|^2 + |f_1^{\frac12}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1} + |f_3^{\frac12}\delta(t)|^2_{\Gamma_1}\Big]\right\}.$$

Seja $\overline{f}_i := \min\limits_{x\in\Gamma_1} f_i(x) \leqslant \max\limits_{x\in\Gamma_1} f_i(x) =: \widehat{f}_i$, para $i=1,2,3$. Então,

$$0<\overline{f}_i \leqslant f_i(x) \leqslant \widehat{f}_i \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} 1\leqslant \frac{f_i(x)}{\overline{f}_i} \leqslant \frac{\widehat{f}_i}{\overline{f}_i}, \quad \text{para } \ i=1,2,3.\\ 1\geqslant \frac{f_i(x)}{\widehat{f}_i} \geqslant \frac{\overline{f}_i}{\widehat{f}_i} \quad \text{para } \ i=1,2,3.\end{array}\right.$$

Daí,

$$\frac{f_1}{\widehat{f}_1} \leqslant 1 \leqslant \frac{f_2}{\overline{f}_2} \Longrightarrow \frac{\overline{f}_2}{\widehat{f}_1}f_1 \leqslant f_2.$$

Portanto,

$$\frac{\overline{f}_2}{\widehat{f}_1}\int_{\Gamma_1} f_1\delta'(t)^2 d\Gamma \leqslant \int_{\Gamma_1} f_2\delta'(t)^2 d\Gamma,$$

isto é,

$$\frac{\overline{f}_2}{\widehat{f}_1}|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1} \leqslant |f_2^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1}. \tag{3.8}$$

De (3.3) e (3.4) resulta que

$$\eta_1(u'(t))u'(t) \geqslant \overline{\eta}_1(u'(t))^2 \Longrightarrow (m(x)\cdot\nu(x))\eta_1(u'(t))u'(t) \geqslant (m(x)\cdot\nu(x))\overline{\eta}_1(u'(t))^2,$$

para todo $x \in \Gamma_1$. Assim,

$$(\eta(u'(t)), u'(t))_{\Gamma_1} \geqslant \overline{\eta}_1|(m(x)\cdot\nu(x))^{\frac{1}{2}}u'(t)|^2_{\Gamma_1}. \tag{3.9}$$

De (3.7), (3.8), (3.9) e notando que $\alpha'(t) \leqslant \alpha_0\epsilon \leqslant \alpha(t)\epsilon$ e $\beta\left(\int_\Omega \theta(t)dx\right)\|\theta(t)\|^2 \geqslant \beta_0\|\theta(t)\|^2$, encontramos

$$\begin{aligned}&E'(t) + \beta_0\|\theta(t)\|^2 + \alpha(t)\frac{\overline{f}_2}{\widehat{f}_1}|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1} + \alpha(t)\overline{\eta}_1|(m(x)\cdot\nu(x))^{\frac{1}{2}}u'(t)|^2_{\Gamma_1} \leqslant\\ &\frac{\alpha(t)}{2}\epsilon\left[\|u(t)\|^2 + |f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1} + |f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1}\right].\end{aligned} \tag{3.10}$$

Agora, podemos enunciar o seguinte resultado:

Teorema 3.1. *Assumamos as hipóteses* $(2.2)_{1,2,3,4,6}$ *do Teorema* 2.1. *Assumamos ainda as hipóteses adicionais* $(3.1)-(3.6)$. *Então,*

$$E(t) \leqslant \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}E(0)e^{-\frac{\epsilon\tau}{\epsilon_2}t}, \quad \forall t \geqslant 0, \tag{3.11}$$

onde $\epsilon, \epsilon_1, \epsilon_2$ *e* τ *são constantes positivas.*

Demonstração. Nesta demonstração, adaptaremos algumas ideias introduzidas por Chen em [5], mas, veja também Haraux & Zuazua [7] e Komornik & Zuazua [9]. Seja $\epsilon > 0$ tal que

$$\epsilon = \min\left\{\frac{\beta_0}{\kappa_2 + 1/(2\lambda_1)}, \frac{\overline{\eta}_1}{\kappa_3}, \frac{\overline{f}_2}{\widehat{f}_1\kappa_4}\right\}, \tag{3.12}$$

onde λ_1 é o primeiro autovalor do operador de Laplace, κ_2, κ_3 e κ_4 serão definidas mais à frente. Agora, definamos

$$E_\epsilon(t) := E(t) + \epsilon\mu(t),$$

onde

$$\mu(t) = 2(u'(t), (m\cdot\nabla)u(t)) + (n-1/2)(u'(t), u(t)) + [2\alpha(t) - 3\alpha_1](f_1\delta'(t), \delta(t))_{\Gamma_1}.$$

Usando $(1)_1$ e $(1)_4$, obtemos

$$\begin{aligned}
\mu'(t) &= 2\alpha(t)(\Delta u(t), (m\cdot\nabla)u(t)) - 2((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta(t), (m\cdot\nabla)u(t)) \\
&\quad -2\lambda(|u(t)|^\rho u(t), (m\cdot\nabla)u(t)) + 2(u'(t), (m\cdot\nabla)u'(t)) \\
&\quad +(n-1/2)\alpha(t)(\Delta u(t), u(t)) - (n-1/2)((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta(t), u(t)) \\
&\quad -\lambda(n-1/2)(|u(t)|^\rho u(t), u(t)) + (n-1/2)|u'(t)|^2 \qquad (3.13)\\
&\quad -[2\alpha(t) - 3\alpha_1](u'(t), \delta(t))_{\Gamma_1} - [2\alpha(t) - 3\alpha_1](f_2\delta'(t), \delta(t))_{\Gamma_1} \\
&\quad -[2\alpha(t) - 3\alpha_1]|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1} + [2\alpha(t) - 3\alpha_1]|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1} \\
&\quad +2\alpha'(t)(f_1\delta'(t), \delta(t))_{\Gamma_1} \\
&=: I_1 + \ldots + I_{13}.
\end{aligned}$$

Nosso objetivo agora é majorar os termos do lado direito da igualdade (3.13).

Observação 3.1. *Para todo* $v \in V \cap H^2(\Omega)$*, vale*

$$2(\Delta v, (m\cdot\nabla)v) \leqslant (n-2)\|v\|^2 + \widehat{m}^2 \int_{\Gamma_1} \frac{1}{m\cdot\nu}\left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma, \qquad (3.14)$$

onde $\widehat{m} := \max\limits_{x\in\overline{\Omega}} \|m(x)\|_{\mathbb{R}^n}$.
De fato, pela identidade de Relich, vide [9], temos

$$2(\Delta v, (m\cdot\nabla)v) = (n-2)\|v\|^2 - \int_\Gamma (m\cdot\nu)|\nabla v|^2 d\Gamma + 2\int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \nu}(m\cdot\nabla)v d\Gamma. \qquad (3.15)$$

Notemos que

$$-\int_\Gamma (m\cdot\nu)|\nabla v|^2 d\Gamma = -\int_{\Gamma_0}(m\cdot\nu)\left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma - \int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|\nabla v|^2 d\Gamma \qquad (3.16)$$

pois $\dfrac{\partial v}{\partial x_i} = \nu_i \dfrac{\partial v}{\partial \nu}$ *em* Γ_0 *e* $(m\cdot\nu) > 0$ *sobre* Γ_1.
Além disso, notemos que

$$2\int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \nu}(m\cdot\nabla)v d\Gamma = 2\int_{\Gamma_0}(m\cdot\nu)\left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma + 2\int_{\Gamma_1}\frac{\partial v}{\partial \nu}(m\cdot\nabla)v d\Gamma \qquad (3.17)$$

e, também,

$$\begin{aligned}
2\int_{\Gamma_1}\frac{\partial v}{\partial \nu}(m\cdot\nabla)v d\Gamma &\leqslant 2\int_{\Gamma_1}\left|\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_{\mathbb{R}}\widehat{m}|\nabla v|d\Gamma\\
&= 2\int_{\Gamma_1}\frac{\widehat{m}}{(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}}\left|\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_{\mathbb{R}}(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}|\nabla v|d\Gamma\\
&\leqslant \widehat{m}^2\int_{\Gamma_1}\frac{1}{m\cdot\nu}\left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma+\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|\nabla v|^2 d\Gamma.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade acima em (3.17), encontramos

$$2\int_{\Gamma}\frac{\partial v}{\partial \nu}(m\cdot\nabla)v d\Gamma \leqslant$$

$$2\int_{\Gamma_0}(m\cdot\nu)\left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma+\widehat{m}^2\int_{\Gamma_1}\frac{1}{m\cdot\nu}\left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma+\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|\nabla v|^2 d\Gamma. \tag{3.18}$$

Segue, de (3.15), (3.16) e (3.18) que

$$\begin{aligned}
2(\Delta v,(m\cdot\nabla)v)\leqslant (n-2)\|v\|^2+\int_{\Gamma_0}(m\cdot\nu)\left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma+\\
\widehat{m}^2\int_{\Gamma_1}\frac{1}{m\cdot\nu}\left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma
\end{aligned}$$

e, como $m\cdot\nu\leqslant 0$ *sobre* Γ_0 *temos que (3.14) é válido.*

Etapa 1. $I_1=2\alpha(t)(\Delta u(t),(m\cdot\nabla)u(t))$.

Decorre, da Observação 3.1, que

$$2\alpha(t)(\Delta u(t),(m\cdot\nabla)u(t))\leqslant -\alpha(t)(2-n)\|u(t)\|^2+\widehat{m}^2\alpha(t)\int_{\Gamma_1}\frac{1}{m\cdot\nu}\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma.$$

De $(1)_5$, (3.2) e (3.4), temos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2=|\delta'-\eta(u')|^2 &\leqslant (|\delta'|+|\eta(u')|)^2\\
&\leqslant 2(|\delta'|^2+|\eta(u')|^2)\\
&= 2|\delta'|^2+2|(m\cdot\nu)|^2|\eta_1(u')|^2\\
&\leqslant 2|\delta'|^2+2(m\cdot\nu)^2\widehat{\eta}_1^2|u'|^2.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\widehat{m}^2\alpha(t)\int_{\Gamma_1}\frac{1}{m\cdot\nu}\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma\leqslant 2\widehat{m}^2\alpha(t)\int_{\Gamma_1}\frac{1}{m\cdot\nu}|\delta'|^2 d\Gamma+2\widehat{m}^2\alpha(t)\widehat{\eta}_1^2\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|u'|^2 d\Gamma.$$

Agora, notemos que

$$|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1}=\int_{\Gamma_1}f_1|\delta'(t)|^2 d\Gamma\geqslant \overline{f}_1\int_{\Gamma_1}|\delta'(t)|^2 d\Gamma=\overline{f}_1|\delta'(t)|^2_{\Gamma_1},\ \text{ou seja, } |\delta'(t)|^2_{\Gamma_1}\leqslant\frac{1}{\overline{f}_1}|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1}.$$

Logo,

$$\int_{\Gamma_1} \frac{1}{(m\cdot\nu)}|\delta'(t)|^2 d\Gamma \leqslant \frac{1}{\zeta}\int_{\Gamma_1}|\delta'(t)|^2 d\Gamma = \frac{1}{\zeta}|\delta'(t)|^2_{\Gamma_1} \leqslant \frac{1}{\zeta\bar{f}_1}|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1},$$

donde concluímos que

$$I_1 \leqslant -\alpha(t)(2-n)\|u(t)\|^2 + \frac{2\alpha(t)\widehat{m}^2}{\zeta\bar{f}_1}|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1} + 2\widehat{m}^2\widehat{\eta}_1^2\alpha(t)|(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}u'(t)|^2_{\Gamma_1}. \quad (3.19)$$

Etapa 2. $I_2 = -2((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta(t),(m\cdot\nabla)u(t))$.

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned} -2((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta(t),(m\cdot\nabla)u(t)) &\leqslant 2|(\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta(t)||(m\cdot\nabla)u(t)| \\ &\leqslant 2\widehat{m}|(\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta(t)|\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Notemos que, para cada $i = 1,\ldots,n$, vale

$$2\widehat{m}|(\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta(t)|\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| = 2\left(\frac{4\widehat{m}|(\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta(t)|}{\sqrt{\alpha_0}}\right)\left(\frac{\sqrt{\alpha_0}}{4}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\right) \leqslant$$

$$\frac{16\widehat{m}^2}{\alpha_0}|(\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta(t)|^2 + \frac{\alpha_0}{16}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 \leqslant \frac{16\|a\|^2\widehat{m}^2 C}{\alpha_0}\|\theta(t)\|^2 + \frac{\alpha(t)}{16}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2,$$

onde $\|a\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}|a_i|_{\mathbb{R}}$ e C é um número real positivo. Aplicando a desigualdade acima em (3.20), obtemos

$$I_2 \leqslant \frac{16n\|a\|^2\widehat{m}^2 C}{\alpha_0}\|\theta(t)\|^2 + \frac{\alpha(t)}{16}\|u(t)\|^2. \quad (3.21)$$

Etapa 3. $I_3 + I_7 = -2\lambda(|u(t)|^\rho u(t),(m\cdot\nabla)u(t)) - \lambda(n-1/2)\|u(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}$.

Pondo $m = (m_1,\ldots,m_n)$, onde $m_k = x_k - x_{0_k}$, segue que

$$\begin{aligned} -2\lambda\big(|u(t)|^\rho u(t),(m\cdot\nabla)u(t)\big) &= -2\lambda\int_\Omega |u(t)|^\rho u(t)(m\cdot\nabla)u(t)\,dx \\ &= -2\lambda\sum_{k=1}^{n}\int_\Omega |u(t)|^\rho u(t)\,m_k\frac{\partial u(t)}{\partial x_k}\,dx. \end{aligned}$$

Pondo $\nu = (\nu_1,\ldots,\nu_n)$, temos, pela Fórmula de Green-Gauss, que

$$\begin{aligned} -\int_\Omega |u(t)|^\rho u(t)\,m_k\frac{\partial u(t)}{\partial x_k}\,dx &= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(|u(t)|^\rho u(t)(x_k - x_{0_k})\Big)u(t)\,dx \\ &\quad -\int_{\Gamma_1}|u(t)|^\rho u(t)(x_k - x_{0_k})u(t)\,\nu_k\,d\Gamma \\ &= \int_\Omega\Big(\rho|u(t)|^{\rho-1}\frac{\partial}{\partial x_k}|u(t)|u(t)(x_k - x_{0_k}) \\ &\quad +|u(t)|^\rho\frac{\partial u(t)}{\partial x_k}(x_k - x_{0_k}) + |u(t)|^\rho u(t)\Big)u(t)\,dx \\ &\quad -\int_{\Gamma_1}|u(t)|^\rho u(t)(x_k - x_{0_k})u(t)\,\nu_k\,d\Gamma, \end{aligned}$$

para cada $k \in \{1, \dots, n\}$. Assim,

$$\begin{aligned} -2\lambda \sum_{k=1}^{n} \int_{\Omega} |u(t)|^{\rho} u(t)\, m_k \frac{\partial u(t)}{\partial x_k}\, dx &= 2\lambda\rho \sum_{k=1}^{n} \int_{\Omega} |u(t)|^{\rho+1} m_k \frac{\partial}{\partial x_k} |u(t)|\, dx \\ &+ 2\lambda \sum_{k=1}^{n} \int_{\Omega} |u(t)|^{\rho} u(t)\, m_k \frac{\partial u(t)}{\partial x_k}\, dx \\ &+ 2n\lambda \int_{\Omega} |u(t)|^{\rho+2} dx - 2\lambda \int_{\Gamma_1} (m \cdot \nu) |u(t)|^{\rho+2} d\Gamma. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} -2\lambda \sum_{k=1}^{n} \int_{\Omega} |u(t)|^{\rho} u(t)\, m_k \frac{\partial u(t)}{\partial x_k}\, dx &= \lambda\rho \sum_{k=1}^{n} \int_{\Omega} |u(t)|^{\rho+1} m_k \frac{\partial}{\partial x_k} |u(t)|\, dx \\ &+ \lambda n \int_{\Omega} |u(t)|^{\rho+2} dx - \lambda \int_{\Gamma_1} (m \cdot \nu) |u(t)|^{\rho+2} d\Gamma. \end{aligned}$$

Novamente, pela Fórmula de Green-Gauss, para cada $k \in \{1, \dots, n\}$, encontramos:

$$\begin{aligned} \lambda\rho \int_{\Omega} |u(t)|^{\rho+1} m_k \frac{\partial}{\partial x_k} |u(t)|\, dx &= -\lambda\rho \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_k} \Big[|u(t)|^{\rho+1} (x_k - x_{0_k}) \Big] |u(t)| dx \\ &+ \lambda\rho \int_{\Gamma_1} |u(t)|^{\rho+1} (x_k - x_{0_k}) |u(t)| \nu_k\, d\Gamma \\ &= -\lambda\rho(\rho+1) \int_{\Omega} |u(t)|^{\rho+1} m_k \frac{\partial}{\partial x_k} |u(t)|\, dx \\ &- \lambda\rho \int_{\Omega} |u(t)|^{\rho+2}\, dx + \lambda\rho \int_{\Gamma_1} |u(t)|^{\rho+2} m_k \nu_k\, d\Gamma. \end{aligned}$$

Então,

$$\lambda\rho \int_{\Omega} |u(t)|^{\rho+1} m_k \frac{\partial}{\partial x_k} |u(t)|\, dx = -\frac{\lambda\rho}{\rho+2} \int_{\Omega} |u(t)|^{\rho+2}\, dx + \frac{\lambda\rho}{\rho+2} \int_{\Gamma_1} |u(t)|^{\rho+2} m_k \nu_k\, d\Gamma.$$

Resulta daí que

$$\lambda\rho \sum_{k=1}^{n} \int_{\Omega} |u(t)|^{\rho+1} m_k \frac{\partial}{\partial x_k} |u(t)|\, dx = -\frac{\lambda n\rho}{\rho+2} \int_{\Omega} |u(t)|^{\rho+2}\, dx + \frac{\lambda\rho}{\rho+2} \int_{\Gamma_1} (m \cdot \nu) |u(t)|^{\rho+2}\, d\Gamma.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} -2\lambda \sum_{k=1}^{n} \int_{\Omega} |u(t)|^{\rho} u(t)\, m_k \frac{\partial u(t)}{\partial x_k}\, dx &= \lambda \Big(n - \frac{n\rho}{\rho+2} \Big) \int_{\Omega} |u(t)|^{\rho+2} dx \\ &+ \lambda \Big(\frac{\rho}{\rho+2} - 1 \Big) \int_{\Gamma_1} (m \cdot \nu) |u(t)|^{\rho+2} d\Gamma \\ &\leqslant \frac{2\lambda n}{\rho+2} \int_{\Omega} |u(t)|^{\rho+2} dx \\ &= \frac{2\lambda n}{\rho+2} \|u(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}, \end{aligned}$$

pois $\dfrac{\rho}{\rho+2} - 1 < 0$.

Como $V \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega)$, então existe uma constante $C_0 > 0$ tal que

$$\|u(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} \leqslant C_0\|u(t)\|^{\rho+2} = C_0\|u(t)\|^{\rho}\|u(t)\|^2 \leqslant C_0 C\|u(t)\|^2,$$

pois $u \in L^\infty(0,T;V)$.

Usando essa última desigualdade, lembrando que $\alpha(t) \geqslant \alpha_0 > 0$ e tomando $\kappa_1 = \dfrac{C_0 C}{\alpha_0}$, podemos concluir que

$$\begin{aligned} I_3 + I_7 &\leqslant \frac{2\lambda n}{\rho+2}\|u(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} - \lambda\Big(n - \frac{1}{2}\Big)\|u(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} \\ &= \lambda\Big(\frac{2n}{\rho+2} - n\Big)\|u(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} + \frac{\lambda}{2}\|u(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} \\ &\leqslant -\frac{\lambda n\rho}{\rho+2}\|u(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} + \lambda\|u(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} \\ &\leqslant -\frac{\lambda n\rho}{\rho+2}\|u(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} + \lambda\kappa_1\alpha(t)\|u(t)\|^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$I_3 + I_7 \leqslant -\frac{\lambda n\rho}{\rho+2}\|u(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} + \lambda\kappa_1\alpha(t)\|u(t)\|^2. \tag{3.22}$$

Etapa 4. $I_4 = 2(u'(t), (m\cdot\nabla)u'(t))$.

Pela Fórmula de Green-Gauss temos, para todo $k \in \{1,\dots,n\}$, que

$$\begin{aligned} \int_\Omega u'(t)m_k\frac{\partial u'(t)}{\partial x_k}dx &= -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_k}\big(u'(t)m_k\big)u'(t)dx + \int_{\Gamma_1} u'(t)m_k u'(t)\nu_k d\Gamma \\ &= -\int_\Omega u'(t)m_k\frac{\partial u'(t)}{\partial x_k}dx - \int_\Omega (u'(t))^2dx + \int_{\Gamma_1} m_k\nu_k(u'(t))^2d\Gamma, \end{aligned}$$

donde,

$$2\int_\Omega u'(t)m_k\frac{\partial u'(t)}{\partial x_k}dx = -\int_\Omega (u'(t))^2dx + \int_{\Gamma_1} m_k\nu_k(u'(t))^2d\Gamma.$$

Assim,

$$\begin{aligned} I_4 = 2\sum_{k=1}^n\int_\Omega u'(t)m_k\frac{\partial u'(t)}{\partial x_k}dx &= -n\int_\Omega (u'(t))^2dx + \int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)(u'(t))^2d\Gamma \\ &= -n|u'(t)|^2 + |(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}u'(t)|^2_{\Gamma_1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$I_4 \leqslant -n|u'(t)|^2 + \frac{\alpha(t)}{\alpha_0}|(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}u'(t)|^2_{\Gamma_1}. \tag{3.23}$$

Etapa 5. $I_5 = (n-1/2)\alpha(t)(\Delta u(t), u(t))$.

Aplicando a fórmula de Green e a condição de fronteira $(1)_5$, encontramos

$$\begin{aligned}
I_5 &= \Big(n-\frac{1}{2}\Big)\alpha(t)\int_\Omega u(t)\Delta u(t)dx \\
&= -\Big(n-\frac{1}{2}\Big)\alpha(t)\int_\Omega \nabla u(t)\cdot\nabla u(t)\,dx \\
&\quad +\Big(n-\frac{1}{2}\Big)\alpha(t)\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u(t)}{\partial\nu}u(t)\,d\Gamma \\
&= -\Big(n-\frac{1}{2}\Big)\alpha(t)\|u(t)\|^2 + \Big(n-\frac{1}{2}\Big)\alpha(t)\int_{\Gamma_1}\delta'(t)u(t)\,d\Gamma \\
&\quad -\Big(n-\frac{1}{2}\Big)\alpha(t)\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)\eta_1(u'(t))u(t)\,d\Gamma.
\end{aligned}$$

Da continuidade da função traço, temos que existe uma constante $C_1>0$ tal que $|(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}v|^2_{\Gamma_1}\leqslant (C_1/2)\|v\|^2$, para todo $v\in V$. Dessa desigualdade, de (3.2) e (3.4), obtemos

$$\begin{aligned}
&\left(n-\frac{1}{2}\right)\alpha(t)\int_{\Gamma_1}\delta'(t)u(t)\,d\Gamma \\
=&\ \alpha(t)\int_{\Gamma_1}2\sqrt{C_1}\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}}\delta'(t)\,\frac{(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{C_1}}\,u(t)\,d\Gamma \\
\leqslant&\ \alpha(t)\int_{\Gamma_1}\frac{1}{2}\Big[4C_1\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{(m\cdot\nu)}(\delta'(t))^2+\frac{(m\cdot\nu)}{4C_1}(u(t))^2\Big]d\Gamma \\
=&\ 2C_1\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\alpha(t)\int_{\Gamma_1}\frac{1}{(m\cdot\nu)}(\delta'(t))^2d\Gamma \\
&+\frac{\alpha(t)}{8C_1}\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)(u(t))^2d\Gamma \\
\leqslant&\ 2C_1\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\frac{\alpha(t)}{\zeta}|\delta'(t)|^2_{\Gamma_1}+\frac{\alpha(t)}{8C_1}|(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}u(t)|^2_{\Gamma_1} \\
\leqslant&\ 2C_1\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\frac{\alpha(t)}{\zeta\bar{f}_1}|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1}+\frac{\alpha(t)}{16}\|u(t)\|^2
\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
& -\left(n-\frac{1}{2}\right)\alpha(t)\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)\eta_1(u'(t))u(t)d\Gamma \\
\leqslant\ & \alpha(t)\int_{\Gamma_1}\left(n-\frac{1}{2}\right)(m\cdot\nu)|\eta_1(u'(t))|_{\mathbb{R}}|u(t)|_{\mathbb{R}}\,d\Gamma \\
=\ & \alpha(t)\int_{\Gamma_1}2\sqrt{C_1}\left(n-\frac{1}{2}\right)(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}|\eta_1(u'(t))|_{\mathbb{R}}\frac{(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{C_1}}|u(t)|_{\mathbb{R}}d\Gamma \\
\leqslant\ & \alpha(t)\int_{\Gamma_1}\frac{1}{2}\Big[4C_1\left(n-\frac{1}{2}\right)^2(m\cdot\nu)|\eta_1(u'(t))|^2_{\mathbb{R}}+\frac{(m\cdot\nu)}{4C_1}|u(t)|^2_{\mathbb{R}}\Big]d\Gamma \\
=\ & 2C_1\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\alpha(t)\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|\eta_1(u'(t))|^2_{\mathbb{R}}d\Gamma+\frac{\alpha(t)}{8C_1}\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|u(t)|^2_{\mathbb{R}}d\Gamma \\
\leqslant\ & 2C_1\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\alpha(t)\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)(\widehat{\eta}_1)^2|u'(t)|^2_{\mathbb{R}}d\Gamma+\frac{\alpha(t)}{8C_1}|(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}u(t)|^2_{\Gamma_1} \\
\leqslant\ & 2C_1\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\widehat{\eta}_1^2\alpha(t)|(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}u'(t)|^2_{\Gamma_1}+\frac{\alpha(t)}{16}\|u(t)\|^2.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
I_5 \ \leqslant\ & -\left(n-\frac{5}{8}\right)\alpha(t)\|u(t)\|^2+2C_1\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\frac{\alpha(t)}{\zeta\bar{f}_1}|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1} \\
& +2C_1\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\widehat{\eta}_1^2\alpha(t)|(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}u'(t)|^2_{\Gamma_1}. \qquad (3.24)
\end{aligned}
$$

Etapa 6. $I_6=(n-1/2)((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta(t),u(t))$.

Usando o lema de Gauss e o fato de $\theta(t)\in H_0^1(\Omega)$, encontramos

$$((a\cdot\nabla)\theta(t),u(t))=-((\mathbf{a}\cdot\nabla)u(t),\theta(t)).$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
& \left(n-\frac{1}{2}\right)((\mathbf{a}\cdot\nabla)\theta(t),u(t))=-\left(n-\frac{1}{2}\right)((\mathbf{a}\cdot\nabla)u(t),\theta(t))\leqslant \\
& \left(n-\frac{1}{2}\right)|(\mathbf{a}\cdot\nabla)u(t)||\theta(t)|\leqslant\left(n-\frac{1}{2}\right)\|a\|\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\right||\theta(t)|. \qquad (3.25)
\end{aligned}
$$

Notemos que, para cada $i=1,\ldots,n$, vale

$$
\begin{aligned}
& \left(n-\frac{1}{2}\right)\|a\||\theta(t)|\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\right|=\left(2\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\|a\||\theta(t)|}{\sqrt{\alpha_0}}\right)\left(\frac{\sqrt{\alpha_0}}{2}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\right|\right)\leqslant \\
& \frac{2\|a\|^2}{\alpha_0}\left(n-\frac{1}{2}\right)^2|\theta(t)|^2+\frac{\alpha_0}{8}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\right)^2\leqslant\frac{2\|a\|^2}{\alpha_0\lambda_1}\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\|\theta(t)\|^2+\frac{\alpha(t)}{8}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\right)^2,
\end{aligned}
$$

sendo que, na última desigualdade, usamos o fato de λ_1 ser o primeiro autovalor do operador laplaciano e, portanto, $\lambda_1|v|^2\leqslant\|v\|^2$, para todo $v\in H_0^1(\Omega)$. Aplicando essa desigualdade em (3.25), obtemos

$$I_6\leqslant\frac{2n\|a\|^2}{\alpha_0\lambda_1}(n-1/2)^2\|\theta(t)\|^2+\frac{\alpha(t)}{8}\|u(t)\|^2. \qquad (3.26)$$

Etapa 7. $I_9 + \ldots + I_{13}$.

• Aplicando a desigualdade de Young, temos

$$
\begin{aligned}
& -[2\alpha(t) - 3\alpha_1](u'(t), \delta(t))_{\Gamma_1} \\
= \; & -[2\alpha(t) - 3\alpha_1] \int_{\Gamma_1} \frac{1}{\sqrt{\alpha_0}(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}} \delta(t)\sqrt{\alpha_0}(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}} u'(t) d\Gamma \\
\leqslant \; & -[2\alpha(t) - 3\alpha_1] \int_{\Gamma_1} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha_0(m\cdot\nu)}(\delta(t))^2 + \alpha_0(m\cdot\nu)(u'(t))^2\right] d\Gamma \\
\leqslant \; & \frac{-[2\alpha(t) - 3\alpha_1]}{2\zeta\alpha_0\bar{f}_3}|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1} - \frac{[2\alpha(t) - 3\alpha_1]\alpha_0}{2}|(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}u'(t)|^2_{\Gamma_1} \\
= \; & \left[\frac{-\alpha(t)}{\zeta\alpha_0\bar{f}_3} + \frac{3\alpha_1}{2\zeta\alpha_0\bar{f}_3}\right]|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1} + \left[-\alpha(t)\alpha_0 + \frac{3\alpha_1\alpha_0}{2}\right]|(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}u'(t)|^2_{\Gamma_1} \\
\leqslant \; & \left[\frac{\alpha(t)}{\zeta\alpha_0\bar{f}_3} + \frac{3\alpha_1}{2\zeta\bar{f}_3\alpha_0}\cdot\frac{\alpha(t)}{\alpha_0}\right]|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1} + \left[\alpha(t)\alpha_0 + \frac{3\alpha_1\alpha_0}{2}\cdot\frac{\alpha(t)}{\alpha_0}\right]|(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}u'(t)|^2_{\Gamma_1} \\
= \; & \sigma\alpha(t)\left[\frac{1}{\bar{f}_3\zeta} + \frac{3\alpha_1}{2\bar{f}_3\zeta\alpha_0}\right]|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1} + \alpha(t)\left[\frac{1}{\sigma} + \frac{3\alpha_1}{2\sigma\alpha_0}\right]|(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}u'(t)|^2_{\Gamma_1},
\end{aligned}
$$

onde $\sigma = \dfrac{1}{\alpha_0}$.

•Aplicando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Young, encontramos

$$
\begin{aligned}
& -2[\alpha(t) - 3\alpha_1](f_2\delta'(t), \delta(t))_{\Gamma_1} \\
\leqslant \; & -[2\alpha(t) - 3\alpha_1]|f_2^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|_{\Gamma_1}|f_2^{\frac{1}{2}}\delta(t)|_{\Gamma_1} \\
= \; & -[2\alpha(t) - 3\alpha_1]\left(\sqrt{\alpha_0}|f_2^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|_{\Gamma_1}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_0}}|f_2^{\frac{1}{2}}\delta(t)|_{\Gamma_1}\right) \\
\leqslant \; & \frac{-[2\alpha(t) - 3\alpha_1}{2}\left[\alpha_0|f_2^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1} + \frac{1}{\alpha_0}|f_2^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1}\right] \\
\leqslant \; & -[2\alpha(t) - 3\alpha_1]\left[\frac{\alpha_0\widehat{f}_2}{2}|\delta'(t)|^2_{\Gamma_1} + \frac{\widehat{f}_2}{2\alpha_0}|\delta(t)|^2_{\Gamma_1}\right] \\
\leqslant \; & -[2\alpha(t) - 3\alpha_1]\left[\frac{\alpha_0\widehat{f}_2}{2\bar{f}_1}|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1} + \frac{\widehat{f}_2}{2\alpha_0\bar{f}_3}|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1}\right] \\
= \; & \left[\frac{-\alpha(t)\alpha_0\widehat{f}_2}{\bar{f}_1} + \frac{3\alpha_1\alpha_0\widehat{f}_2}{2\bar{f}_1}\right]|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1} + \left[\frac{-\alpha(t)\widehat{f}_2}{\alpha_0\bar{f}_3} + \frac{3\alpha_1\widehat{f}_2}{2\alpha_0\bar{f}_3}\right]|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1} \\
\leqslant \; & \left[\frac{\alpha(t)\alpha_0\widehat{f}_2}{\bar{f}_1} + \frac{3\alpha_1\alpha_0\widehat{f}_2}{2\bar{f}_1}\cdot\frac{\alpha(t)}{\alpha_0}\right]|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1} + \left[\frac{\alpha(t)\widehat{f}_2}{\alpha_0\bar{f}_3} + \frac{3\alpha_1\widehat{f}_2}{2\alpha_0\bar{f}_3}\cdot\frac{\alpha(t)}{\alpha_0}\right]|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1} \\
= \; & \alpha(t)\left[\frac{\widehat{f}_2}{\sigma\bar{f}_1} + \frac{3\widehat{f}_2\alpha_1}{2\sigma\bar{f}_1\alpha_0}\right]|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1} + \sigma\alpha(t)\left[\frac{\widehat{f}_2}{\bar{f}_3} + \frac{3\widehat{f}_2\alpha_1}{2\bar{f}_3\alpha_0}\right]|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1}.
\end{aligned}
$$

• Prosseguindo de modo análogo, resulta que

$$\begin{aligned}
2\alpha'(t)(f_1\delta'(t),\delta(t))_{\Gamma_1} &= 2\alpha'(t)\int_{\Gamma_1} f_1\delta'(t)\delta(t)d\Gamma \\
&= \alpha'(t)\int_{\Gamma_1}\frac{2}{\sqrt{\sigma}}f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)\sqrt{\sigma}f_1^{\frac{1}{2}}\delta(t)d\Gamma \\
&\leqslant |\alpha'(t)|\frac{1}{\sigma}|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1} + |\alpha'(t)|\sigma\frac{\widehat{f}_1}{\bar{f}_3}|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1} \\
&\leqslant \frac{\epsilon}{\sigma}\alpha(t)|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1} + \epsilon\sigma\alpha(t)\frac{\widehat{f}_1}{\bar{f}_3}|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1}.
\end{aligned}$$

• Notemos que

$$\begin{aligned}
-[2\alpha(t)-3\alpha_1]|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1} &\leqslant -2\alpha(t)|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1} + 3\alpha(t)\frac{\alpha_1}{\alpha_0}|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1} \\
&\leqslant -2\alpha(t)|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1} + 3\sigma\alpha_1\alpha(t)|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1}.
\end{aligned}$$

• Como $\alpha(t)\leqslant\alpha_1$, então

$$[2\alpha(t)-3\alpha_1]|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1} \leqslant [2\alpha(t)-3\alpha(t)]|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1} = -\alpha(t)|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
& I_9+\cdots+I_{13} \\
\leqslant\ & \alpha(t)\left[\frac{1}{\sigma}+\frac{3\alpha_1}{2\sigma\alpha_0}\right]|(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}u'(t)|^2_{\Gamma_1} + \alpha(t)\left[\frac{\widehat{f}_2}{\sigma\bar{f}_1}+\frac{3\widehat{f}_2\alpha_1}{2\sigma\bar{f}_1\alpha_0}+\frac{\epsilon}{\sigma}\right]|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1} \\
& -\alpha(t)|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1} - \alpha(t)\left[2-\sigma\left(\frac{1}{\bar{f}_3\zeta}+\frac{3\alpha_1}{2\bar{f}_3\zeta\alpha_0}+\frac{\widehat{f}_2}{\bar{f}_3}+\frac{3\widehat{f}_2\alpha_1}{2\bar{f}_3\alpha_0}+\frac{\epsilon\widehat{f}_1}{\bar{f}_3}+3\alpha_1\right)\right]|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1}.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Aplicando (3.19), (3.21)-(3.24), (3.26) e (3.27) em (3.13), obtemos

$$\begin{aligned}
\mu'(t) \leqslant\ & -\alpha(t)\left(\frac{19}{16}-\lambda\kappa_1\right)\|u(t)\|^2+\kappa_2\|\theta(t)\|^2-\frac{1}{2}|u'(t)|^2 \\
& -\frac{\lambda n\rho}{\rho+2}\|u(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}+\alpha(t)\kappa_3|(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}u'(t)|^2_{\Gamma_1} \\
& \alpha(t)\kappa_4|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1}-\alpha(t)|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1}-\alpha(t)\left[2-\sigma\kappa_5\right]|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1},
\end{aligned} \tag{3.28}$$

onde

$$\begin{aligned}
\kappa_2 &:= \frac{\|a\|^2 n}{\alpha_0}\left(16\widehat{m}^2C+\frac{2}{\lambda_1}(n-1/2)^2\right), \\
\kappa_3 &:= 2\widehat{m}^2\widehat{\eta}_1^2+\frac{1}{\alpha_0}+2C_1\widehat{\eta}_1^2(n-1/2)^2+\frac{1}{\sigma}+\frac{3\alpha_1}{2\sigma\alpha_0}, \\
\kappa_4 &:= \frac{2\widehat{m}^2}{\zeta\bar{f}_1}+\frac{2C_1(n-1/2)^2}{\zeta\bar{f}_1}+\frac{\widehat{f}_2}{\sigma\bar{f}_1}+\frac{3\widehat{f}_2\alpha_1}{2\sigma\bar{f}_1\alpha_0}+\frac{\epsilon}{\sigma}, \\
\kappa_5 &:= \frac{1}{\bar{f}_3\zeta}+\frac{3\alpha_1}{2\bar{f}_3\zeta\alpha_0}+\frac{\widehat{f}_2}{\bar{f}_3}+\frac{3\widehat{f}_2\alpha_1}{2\bar{f}_3\alpha_0}+\frac{\epsilon\widehat{f}_1}{\bar{f}_3}+3\alpha_1.
\end{aligned}$$

Multiplicando (3.28) por ϵ e somando por (3.10), obtemos

$$\begin{aligned} E'_\epsilon(t) \leqslant\; & -\frac{\epsilon}{2}|u'(t)|^2 - [\beta_0 - \epsilon\kappa_2]\,\|\theta(t)\|^2 - \epsilon\frac{\lambda n\rho}{\rho+2}\|u(t)\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} \\ & -\epsilon\alpha(t)\left[\left(\frac{11}{16} - \lambda\kappa_1\right)\|u(t)\|^2 + \frac{1}{2}|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1}\right] \\ & -\alpha(t)\left(\frac{\bar{f}_2}{\widehat{f}_1} - \epsilon\kappa_4\right)|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1} - \alpha(t)\,[\overline{\eta}_1 - \epsilon\kappa_3]\,|(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}u'(t)|^2_{\Gamma_1} \\ & -\alpha(t)\epsilon\left(\frac{3}{2} - \sigma\kappa_5\right)|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|^2_{\Gamma_1}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Analisaremos agora os termos do lado direito de (3.29).

- De (3.5) temos que $(11/16 - \lambda\kappa_1) \geqslant 1/2$. Então,

$$-\epsilon\alpha(t)\left(\frac{11}{16} - \lambda\kappa_1\right)\|u(t)\|^2 \leqslant -\frac{\epsilon\alpha(t)}{2}\|u(t)\|^2. \tag{3.30}$$

De (3.12) obtemos o seguinte:

- $\epsilon \leqslant \beta_0/(\kappa_2 + 1/(2\lambda_1)) \Longrightarrow \beta_0 - \epsilon\kappa_2 \geqslant \epsilon/2\lambda_1$. Portanto,

$$-\left[\beta_0 - \epsilon\kappa_2\right]\|\theta(t)\|^2 \leqslant -\frac{\epsilon}{2\lambda_1}\|\theta(t)\|^2 \leqslant -\frac{\epsilon}{2}|\theta(t)|^2, \tag{3.31}$$

sendo que, na última desigualdade, usamos o fato de $\lambda_1|v|^2 \leqslant \|v\|^2, \forall v \in H^1_0(\Omega)$.

- $\epsilon \leqslant \overline{\eta}_1/\kappa_3$ implica $\overline{\eta}_1 - \epsilon\kappa_3 \geqslant 0$ e, portanto,

$$-\alpha(t)\,[\overline{\eta}_1 - \epsilon\kappa_3]\,|(m\cdot\nu)^{\frac{1}{2}}u'(t)|^2_{\Gamma_1} \leqslant 0. \tag{3.32}$$

- $\epsilon \leqslant \bar{f}_2/\widehat{f}_1\kappa_4$ implica $\left(\bar{f}_2/\widehat{f}_1\right) - \epsilon\kappa_4 \geqslant 0$. Consequentemente,

$$-\alpha(t)\left[\frac{\bar{f}_2}{\widehat{f}_1} - \epsilon\kappa_4\right]|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|^2_{\Gamma_1} \leqslant 0. \tag{3.33}$$

- Pondo

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\bar{f}_3\zeta} + \frac{\widehat{f}_2}{\bar{f}_3} + \frac{\epsilon\widehat{f}_1}{\bar{f}_3} + 3\alpha_1, \\ b &= \frac{3\alpha_1}{2\bar{f}_3\zeta} + \frac{3\widehat{f}_2\alpha_1}{2\bar{f}_3}, \end{aligned}$$

então $\kappa_5 = a + b/\alpha_0$. Suponha α_0 escolhido de tal modo que $\sigma\kappa_5 = \kappa_5/\alpha_0 \leqslant 1$. Notemos que tal escolha é possível, pois $\kappa_5/\alpha_0 \leqslant 1$ implica $\alpha_0^2 - a\alpha_0 - b \geqslant 0$ e, por essa desigualdade, concluímos que α_0 satisfaz

$$\alpha_0 \leqslant \frac{a - \sqrt{a^2+4b}}{2} \quad \text{ou} \quad \alpha_0 \geqslant \frac{a + \sqrt{a^2+4b}}{2}$$

e, como $\alpha_0 > 0$, consideremos apenas a segunda desigualdade. Assim, sendo $\sigma = 1/\alpha_0$ então,

$$0 < \sigma \leqslant \frac{2}{a + \sqrt{a^2 + 4b}} \Longrightarrow \sigma\kappa_5 \leqslant 1.$$

Sendo $\sigma\kappa_5 \leqslant 1$ então $3/2 - \sigma\kappa_5 \geqslant 1/2$ e, portanto,

$$-\epsilon\alpha(t)\left[\frac{3}{2} - \sigma\kappa_5\right]|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|_{\Gamma_1}^2 \leqslant -\frac{\epsilon\alpha(t)}{2}|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|_{\Gamma_1}^2. \tag{3.34}$$

Aplicando (3.30) - (3.34) em (3.29), obtemos

$$E_\epsilon'(t) \leqslant -\epsilon\tau E(t), \tag{3.35}$$

onde $\tau = \min\{1, n\rho\}$.

Nosso objetivo agora é majorar $\mu(t)$. Notemos que, usando as desigualdades de Hölder e Young, obtemos

$$2\widehat{m}\int_\Omega u'\frac{\partial u}{\partial x_k}dx \leqslant 2\left[\int_\Omega (u')^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}\widehat{m}\left[\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \int_\Omega (u')^2 dx + \widehat{m}^2\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx,$$

para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$. Então,

$$\begin{aligned} 2\big(u'(t), (m\cdot\nabla)u(t)\big) &\leqslant 2\sum_{k=1}^n \int_\Omega \left|u'(t)m_k\frac{\partial u(t)}{\partial x_k}\right| dx \\ &\leqslant 2\widehat{m}\sum_{k=1}^n \int_\Omega |u'(t)|\left|\frac{\partial u(t)}{\partial x_k}\right| dx \\ &\leqslant n|u'(t)|^2 + \widehat{m}^2\|u(t)\|^2 \\ &\leqslant n|u'(t)|^2 + \widehat{m}^2\frac{\alpha(t)}{\alpha_0}\|u(t)\|^2. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \left(n - \frac{1}{2}\right)(u'(t), u(t)) &= \int_\Omega \left(n - \frac{1}{2}\right)u'(t)u(t)\,dx \\ &\leqslant \int_\Omega \frac{1}{2}\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)^2(u'(t))^2 + (u(t))^2\right]dx \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left(n - \frac{1}{2}\right)^2|u'(t)|^2 + \frac{C\alpha(t)}{2\alpha_0}\|u(t)\|^2, \end{aligned} \tag{3.37}$$

onde, na última desigualdade, usamos a imersão $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$. Pelas desigualdades de Cauchy-Schwarz e de Young, obtemos ainda

$$\begin{aligned} (f_1\delta'(t), \delta(t))_{\Gamma_1} &\leqslant |f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|_{\Gamma_1}|f_1^{\frac{1}{2}}\delta(t)|_{\Gamma_1} \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left[|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|_{\Gamma_1}^2 + |f_1^{\frac{1}{2}}\delta(t)|_{\Gamma_1}^2\right] \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left[|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|_{\Gamma_1}^2 + \frac{\widehat{f}_1}{\bar{f}_3}|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|_{\Gamma_1}^2\right]. \end{aligned} \tag{3.38}$$

De (3.36), (3.37) e (3.38), temos

$$\begin{aligned}|\mu(t)| \leqslant & \left[n+\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\right]|u'(t)|^2+\alpha(t)\left(\frac{\widehat{m}^2}{\alpha_0}+\frac{C}{2\alpha_0}\right)\|u(t)\|^2 \\ & +\alpha(t)\left(1+\frac{3\alpha_1}{2\alpha_0}\right)\left(|f_1^{\frac{1}{2}}\delta'(t)|_{\Gamma_1}^2+\frac{\widehat{f}_1}{\overline{f}_3}|f_3^{\frac{1}{2}}\delta(t)|_{\Gamma_1}^2\right).\end{aligned}$$

Agora, tomando $M_1 := \max\left\{1, \frac{\widehat{f}_1}{\overline{f}_3}\right\}$ e $M_2 := \max\left\{n+\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)^2, \frac{\widehat{m}^2}{\alpha_0}+\frac{C}{2\alpha_0}, M_1\left(1+\frac{3\alpha_1}{2\alpha_0}\right)\right\}$, resulta que $|\mu(t)| \leqslant 2M_2E(t)$, ou seja,

$$-2M_2E(t) \leqslant \mu(t) \leqslant 2M_2E(t) \Longrightarrow E(t)-2\epsilon M_2E(t) \leqslant E_\epsilon(t) \leqslant E(t)+2\epsilon M_2E(t),$$

e, tomando $\epsilon_1 := 1-2\epsilon M_2$ e $\epsilon_2 := 1+2\epsilon M_2$, obtemos

$$\epsilon_1E(t) \leqslant E_\epsilon(t) \leqslant \epsilon_2E(t). \tag{3.39}$$

Então, de (3.35) e (3.39), temos

$$E'_\epsilon(t) \leqslant -\epsilon\tau E(t) \leqslant -\frac{\epsilon\tau}{\epsilon_2}E_\epsilon(t),$$

o que implica em

$$E_\epsilon(t) \leqslant E_\epsilon(0)e^{-\frac{\epsilon\tau}{\epsilon_2}t}, \quad \forall t \geqslant 0.$$

Daí e de (3.39) obtemos (3.11) e o teorema está demonstrado. □

Referências Bibliográficas

[1] BEALE, J.T. *Spectral properties of an acoustic boundary condition.* Indiana Univ. Math. J., v. 25, n. 9, p. $895-917$, 1976.

[2] BRAZ e SILVA, P.; FROTA. C.L.; CLARK, H.R. *On a nonlinear coupled system of thermoelastic type with acoustic boundary conditions.* Comp. Appl. Math., 2015.

[3] BREZIS, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Springer, 2011.

[4] CASTRO, N.N.O. *Soluções fracas para um sistema hiperbólico envolvendo o operador p-laplaciano* $(2 < \mathsf{p} < 3)$. UFPB, 2005.

[5] CHEN, G. *Energy decay estimates and exact boundary-value controllability for the wave-equation in a bounded domain.* J. Math. Pures Appl., v. 58, p. $249-274$, 1979.

[6] EVANS, L.C. *Partial differential equations.* American Mathematical Society, 2010.

[7] HARAUX A.; ZUAZUA E. *Decay estimates for some semilinear damped hyperbolic problems.* Arch. Ration. Mech. Anal., v. 100, p. $191-206$, 1988.

[8] GOLDSTEIN, J.A.; FROTA, C.L. *Some nonlinear wave equations with acoustic boundary conditions.* J. Diff. Eq., v. 164, p.$92-109$, 2000.

[9] KOMORNIK V.; ZUAZUA E.*A direct method for boundary stabilization of the wave equation.* J. Math. Pures Appl., v. 69, p. $33-54$, 1990.

[10] MATOS, M. P. *Integral de Bochner e os espaços* $\mathsf{L}^\mathsf{p}(0,\mathsf{T};\mathsf{X})$. Notas de Aula, UFPB, João Pessoa, 1998.

[11] MIRANDA, M.M.; MEDEIROS, L.A. *Espaços de Sobolev*: Iniciação aos problemas elíticos não homogêneos. Rio de Janeiro: UFRJ, 2000.

[12] MIRANDA, M.M.; MEDEIROS, L.A. *Introdução aos espaços de Sobolev e às equações diferenciais parciais*. Rio de Janeiro: UFRJ, 2011.

[13] MORSE, P.M.; INGARD, K.U. *Theoretical acoustics*. New York: McGraw-Hill, 1968.

[14] RIVERA, P.H.; MEDEIROS, L.A. *Espaços de Sobolev e equações diferenciais parciais*. Rio de Janeiro: UFRJ, 1975.

[15] ROSENCRANS, S.I.; BEALE, J.T. *Acoustic boundary conditions*. Bull. Am. Math. Soc., v. 80, n. 6, p. 1276 − 1278, 1974.

[16] TEIXEIRA, E.; PELLEGRINO, D.; BOTELHO, G. *Fundamentos de Análise Funcional*. Rio de Janeiro: SBM, 2012.