Universidade Federal do Piauí

Centro de Ciências da Natureza

Pós-Graduação em Matemática

Mestrado em Matemática

Controlabilidade Aproximada da Equação de Navier-Stokes

Renan de Oliveira e Silva

Teresina - 2010

Renan de Oliveira e Silva

Dissertação de Mestrado:

Controlabilidade Aproximada da Equação de Navier-Stokes

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Alexandro Marinho Oliveira
Co-Orientador:
Prof. Dr. Marcondes Rodrigues Clark

Teresina - 2010

FICHA CATALOGRÁFICA

Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí

Biblioteca Comunitária Jornalista Carlos Castelo Branco

O48c Oliveira, Renan Silva.

Controlabilidade Aproximada da Equação de Navier-Stokes.

Teresina: 2010.

67fls. 5il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Piauí, 2010.

Orientador: Prof^{o}. Dr. Alexandro Marinho Oliveira

1. Matemática Aplicada. 2. Controlabilidade Aproximada. (Matemática) 3. Modelo de Navier-Stokes. I. Título.

CDD:519

À minha mãe,

Lina Maria de Oliveira,

com amor.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me permitido aprender o pouco que sei e por me deixar conviver com as pessoas maravilhosas que citarei aqui.

Agradeço à minha mãe, Lina Maria de Oliveira, pela sua atenção, amor, grandiosidade e por ter proporcionado, com muito sacrifício, a educação que possuo. Agradeço também à minha família: Gisele de Oliveira Silva (irmã) e Rogério Roberto Silva (pai) por estarem sempre ao meu lado nos momentos difíceis da minha vida. Agradeço também a Amanda Costa Figueiredo e família pela convivência amorosa e por ser minha segunda família.

Agradeço aos professores Alexandro Marinho Oliveira e Marcondes Rodrigues Clark por terem acreditado em mim e me apoiado num momento delicado de minha vida em que pensei em abandonar meus estudos em Matemática. Fico feliz por fazer parte da escola liderada pelo professor Marcondes e por ter sido orientado pelo jovem porém grande matemático Alexandro Marinho.

Agradeço aos amigos que fiz na minha graduação na UFPI, em particular ao grande amigo Pitágoras Carvalho, que me acompanha, mesmo que à distância, nos momentos bons e ruins desde 2004. Espero manter esse laço de amizade por bastante tempo. O mesmo vale para o amigo Luís Carlos Martins Abreu, cidadão de Hidrolândia -CE.

Agradeço ao corpo de professores do Departamento de Matemática da UFPI. Em particular, agradeço aos professores Barnabé Pessoa Lima, Newton Luís Santos e Marcondes (novamente) pelos ótimos cursos dados. Agradeço também ao professor João Xavier da Cruz Neto por ter sido meu orientador na minha proveitosa iniciação científica.

Agradeço aos professores do Curso de Mestrado em Matemática por se empenharem tanto em seus cursos, que não deixam a desejar em relação aos cursos dados em outros centros de pós-graduação espalhados pelo país. Em particular aos professores Barnabé, Paulo Alexandre Araújo Souza, Jurandir de Oliveira Lopes, Marcondes Rodrigues Clark, Roger Peres de Moura e Marcos Vinícius Travaglia.

Agradeço aos amigos que fiz no corpo de estudantes do mestrado em Matemática, pela boa convivência, pela educação, por tudo. Em particular, agradeço ao amigo Cleyton Natanael pela sua companhia e ajuda.

Agradeço aos amigos Emanuel Veras de Souza e Fábio Gomes Ribeiro, alunos do Curso de Mestrado em Física da UFPI pelas frutíferas discussões sobre Física.

Agradeço ao professor Geraldo de Souza pela amizade e incentivo.

Agradeço ao programa de incentivo à educação REUNI pelo apoio financeiro.

Quando assistia aos jogos olímpicos, Leon, príncipe de Pilos, perguntou a Pitágoras como ele descrevia a si mesmo. Pitágoras respondeu: "Eu sou um filósofo", mas Leon nunca tinha ouvido a palavra antes e pediu que explicasse.

"A vida, príncipe Leon, pode muito bem ser comparada a estes jogos. Na imensa multidão aqui reunida alguns vieram à procura de lucros, outros foram trazidos pelas esperanças e ambições da fama e da glória. Mas entre eles existem uns poucos que vieram para observar e entender tudo o que se passa aqui.
Com a vida acontece a mesma coisa. Alguns são influenciados pela busca de riqueza, enquanto outros são dominados pela febre do poder e da dominação. Mas os melhores entre os homens se dedicam à descoberta do significado e do propósito da vida. Eles tentam descobrir os segredos da natureza. Este tipo de homem eu chamo de filósofo, pois embora nenhum homem seja completamente sábio, em todos os assuntos, ele pode amar a sabedoria como a chave para os segredos da natureza."

"Rodear-se entre os grandes não o fará grande, mas reconhecer sua insignificância é um enorme passo para a sabedoria."

Filósofo anônimo.

Tudo depende de mim

Hoje levantei cedo pensando no que eu tenho a fazer antes que o relógio marque meia-noite. É minha função escolher que tipo de dia vou ter hoje.

Posso reclamar porque está chovendo ou agradecer às águas por lavarem a poluição.

Posso ficar triste por não ter dinheiro ou me sentir encorajado para administrar minhas finanças, evitando desperdício.

Posso reclamar sobre minha saúde ou dar graças por estar vivo.

Posso me queixar dos meus pais por não terem me dado tudo o que eu queria ou posso ser grato por ter nascido.

Posso reclamar por ter que ir trabalhar ou agradecer por ter trabalho.

Posso sentir tédio com as tarefas da casa ou agradecer a Deus por ter um teto para morar.

Posso lamentar decepções com amigos ou me entusiasmar com a possibilidade de fazer novas amizades.

Se as coisas não saíram como planejei, posso ficar feliz por ter hoje para recomeçar.

O dia está na minha frente, esperando para ser o que eu quiser.

E aqui estou eu, o escultor que pode dar forma.

Tudo depende só de mim.

Charles Chaplin

Resumo

Estudamos neste trabalho a controlabilidade aproximada para o sistema de equação de Navier-Stokes:

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \mu \Delta u + \nabla p = f \quad \text{em} \quad Q \\ div(u) = 0 \quad \text{em} \quad Q, \\ u = 0 \quad \text{em} \quad \Sigma, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \end{array} \right. ,$$

onde $u(x,t) = (u_1(x,t), \ldots.., u_n(x,t))$ é o vetor velocidade do fluido moderado avaliado no ponto (x,t), $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $p = p(x,t)$ é a pressão do fluido avaliado no ponto (x,t), μ representa uma constante, $u_0(x)$ é a velocidade inicial. Ω é um aberto bem regular do $\mathbb{R}^n$, $Q = \Omega \times [0,T]$, $\Sigma = \partial Q$.

Palavras-chave: Sistemas de equações de Navier-Stokes, Teoria do Controle, controlabilidade aproximada.

Abstract

In this work we study the aproximated controllability for the Navier-Stokes equations

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \mu\Delta u + \nabla p = f \quad \text{in} \quad Q \\ div(u) = 0 \quad \text{in} \quad Q, \\ u = 0 \quad \text{in} \quad \Sigma, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{in} \quad \Omega, \end{array}\right.,$$

where $u(x,t) = (u_1(x,t), ..., u_n(x,t))$ is the moderate velocity vector fluid on the point (x,t), $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $p = p(x,t)$ is the pressure of the fluid avaliado on the point (x,t), μ represents a constant, $u_0(x)$ is the initial velocity. Ω is a regular open set of $\mathbb{R}^n$, $Q = \Omega \times [0,T]$, $\Sigma = \partial Q$.

Keywords: System of Navier-Stokes equations, Control Theory, aproximated controllability.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Quando em 1990, durante as Jornadas Hispano-Francesas sobre Controle de Sistemas Distribuídos, Jacques Louis Lions[1] introduziu, pela primeira vez, o conceito de controlabilidade aproximada para equação do calor [29], criou-se assim uma imensa família de problemas aproximadamente controláveis.

Neste encontro, J.L. Lions mostrou que a controlabilidade aproximada era uma consequência do Teorema de Hahn Banach quando se trabalha com um funcional que representa os custos para obter tal tipo de controlabilidade. Além disso, deu uma caracterização dos controles que aproximam o estado ideal do sistema por meio das soluções de um sistema de otimalidade.

Neste mesmo encontro, disse que o método poderia ser aplicado ao Sistema de Navier-Stokes linearizado e na bibliografia do trabalho [29] mencionou que a prova estava contida em suas notas de aulas do College de France 1990/1991. Ele não as publicou, sendo demonstrado por L. A Medeiros por meio do Teorema de Mizohata [34] e C. Fabre [10] no caso geral.

O fator essencial no estudo desta teoria é o que se denomina de *Teoremas de Continuação Única*, pois é comum em problemas de controlabilidade aproximada saber:

"se a solução da equação de estado é nula em um cilindro ω
contido no cilidro Q do $\mathbb{R}^{n+1}$, então o princípio da continuação
única afirma que ela é nula no cilindro Q."

[1] J.L.Lions 1928-2001

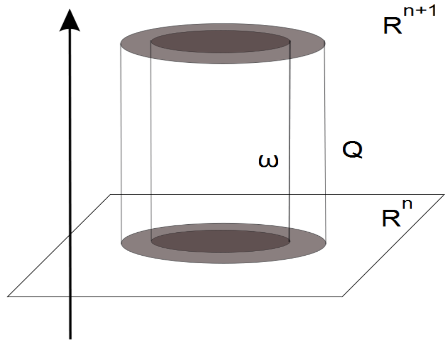


Figure 1.1: Uma situação para o teorema

Isto é essencial, porque permite concluir exatamente se o sistema é aproximadamente controlável. A questão é que, os teoremas de continuação única dependem da natureza do problema em questão. Para tal, muitos autores tem conseguido teoremas de continuação única para diversos problemas, entre as quais pode-se citar, teorema da continuação de Mizohata [34], quando os coeficientes do operador que aparece no sistema são analíticos. Quando os coeficientes do operador são funções limitadas e mensuráveis, a controlabilidade aproximada foi investigada, entre outros autores, por C. Fabre [10], onde ela provou a propriedade da continuação única para esse caso geral relativo ao sistema de Navier-Stokes. A mesma generalização da continuação única de Mizohata pode ser encontradas em Saut-Scheurer [47]. No presente trabalho utiliza-se o resultado de continuação única da C. Fabre [10].

Desde a publicação do artigo [29], a controlabilidade aproximada tem sido motivo de estudo de muitos autores, entre as quais pode-se citar entre outros: Lebeau [11] no caso linear, Fabre [10], Fabre-Puel-Zuazua [12], Fernandez-Zuazua [13], Zuazua [59], caso não linear.

Para o caso de sistema distribuídos com as semilinearidades do tipo $f(u)$ e $f(u, \nabla u)$ a situação é mais complicada, veja por exemplo Zuazua [59], [13] respectivamente, onde o autor exige que as semilinearidade tenham algumas restrições afim de linearizá-las e em seguida aplicar o teorema do ponto fixo de Schauder. A partir daí, a controlabilidade aproximada é obtida como no caso linear. Isto representou um passo importante nesta teoria, pois é possível obter resultado de controle aproximado para sistema distribuídos semilineares. Outros autores deram outras contribuições, mostrando ser possível obter resultados semelhantes em domínios não cilíndricos e até mesmo não limitados, como se pode ver em; Medeiros-Límaco [32] e Silvano [48], Solimar [49] respectivamente.

1.1 O Modelo

Considere uma região do $\mathbb{R}^3$ ocupada por um fluido em movimento. Suponha-se que esta região seja um aberto limitado Ω, cuja fronteira representa-se por Γ, a qual admite-se ser bem regular contendo o fluido. A normal externa à Γ representa-se por η.

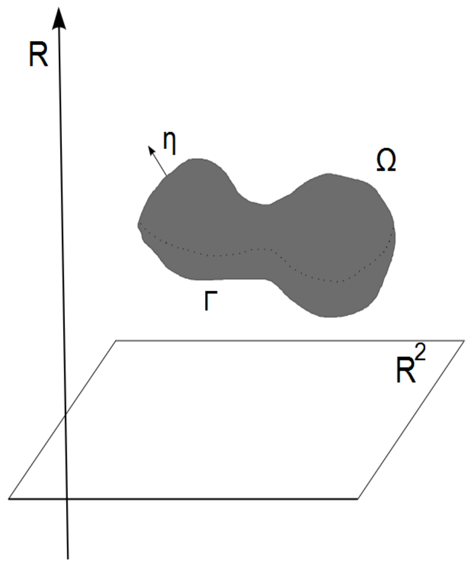


Figure 1.2: $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ com fronteira Γ e normal η

Entende-se por fluxo do fluido através de Γ a massa de fluido que atravessa Γ na direção da normal η na unidade de tempo. Considere um elemento $d\Gamma$ de Γ e seja u o vetor velocidade das partículas, isto é, $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ onde $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Representando por $\rho(x,t)$ a densidade do fluido, resulta que o fluxo de fluido através de Γ na direção da normal é

$$\int_\Gamma \rho(x,t)u(x,t)\eta \, d\Gamma.$$

A massa de fluido no interior de Ω é dada por

$$M(t) = \int_\Omega \rho(x,t)\, dx.$$

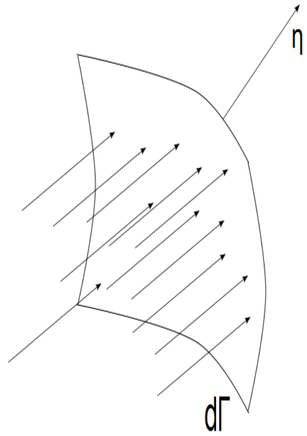


Figure 1.3: Fluxo através de $d\Gamma$

A variação da massa $M(t)$ é dada por

$$\frac{dM}{dt} = \int_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dx.$$

O fluxo de fluido que entra em Ω através de Γ é

$$-\int_\Gamma \rho(x,t)u(x,t)\eta\, d\Gamma,$$

na unidade de tempo. Assim, do princípio da conservação da massa, obtém-se

$$\int_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dx + \int_\Gamma \rho(x,t)u(x,t)\eta\, d\Gamma = 0$$

em cada instante. Do teorema da divergência, obtém-se

$$\int_\Omega \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho u) \right\} dx = 0$$

para cada aberto limitado. Logo, tem-se a equação de continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho u) = 0$$

quase sempre em Ω.

Supondo que $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ é derivável, tem-se

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \rho, u).$$

Sendo $div(\rho u) = \rho\, div(u) + (\nabla \rho, u)$, tem-se da equação da continuidade que

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\, div(u) = 0 \;\text{ em }\; \Omega.$$

Sendo ρ uma constante, porque supõe-se o fluido imcompressível, obtém-se

$$div(u) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega.$$

O momentum de Ω, supondo-se $\rho = 1$, é

$$m(t) = \int_\Omega u(x,t)\, dx.$$

A variação do momentum no tempo é

$$\frac{dm}{dt} = \int_\Omega \frac{du}{dt}\, dx.$$

Esta variação deve ser igual a resultantes das forças aplicadas em Ω, elas são de duas espécies

(i) Volumétricas aplicadas em Ω de densidade $f(x,t) = (f_1(x,t), f_2(x,t), f_3(x,t))$.

(ii) Tensões internas e viscosidades na fronteira Γ de Ω cujas componentes supõem-se da forma

$$F_i(x,t) = \sum_{j=1}^{3} \xi_{ij}(x,t)\eta_j, \quad i = 1,2,3,$$

onde η_j representa as componentes do vetor unitário $\overrightarrow{\eta}$ a normal externa à fronteira Γ e $\xi_{ij}(x,t)$ *tensor de tensões de Cauchy.*

Do equilíbrio entre as forças e a variação do momentum (Lei de Newton), resulta que

$$\int_\Omega \frac{du}{dt}dx = \int_\Omega f(x,t)dx + \int_\Gamma F(x,t)d\Gamma. \tag{1.1}$$

Observação 1.1. *Alterações nas propriedades de um fluido em movimento podem ser medida de duas maneiras diferentes. Pode-se medir uma determinada propriedade, quer pela realização da medição em um ponto fixo no espaço onde as partículas do fluido passam, ou seguindo uma porção de fluido ao longo da sua trajetória. A derivada de um campo no que diz respeito a uma posição fixa no espaço é chamado de* ***derivada Euleriana*** *enquanto a derivada segundo o movimento de uma porção do fluido é chamada de* ***derivada convectiva****.*

A derivada convectiva é definida como

$$\frac{du}{dt} := \frac{\partial u}{\partial t} + u.\nabla u. \tag{1.2}$$

O primeiro termo do lado direito da equação acima é a derivada Euleriana ordinária, isto é, a derivada sobre uma referência fixa, representando mudanças em um ponto em relação ao tempo. Enquanto que o segundo termo representa uma quantidade de alterações no que diz respeito à posição. Esta derivada "especial" é, na realidade, a derivada ordinária de uma função de muitas variáveis ao longo de um percurso na sequência do movimento de fluidos, que pode ser obtido facilmente através da aplicação da regra da cadeia.

Por exemplo, a medição das mudanças na velocidade do vento na atmosfera pode ser obtida com a ajuda de um ***anemômetro*** *em uma estação meteorológica ou montá-lo em um balão meteorológico. O anemômetro no primeiro caso é a medição da velocidade de todas as partículas que se deslocam a passar por um ponto fixo no espaço, enquanto que no segundo caso, o instrumento está medindo mudanças na velocidade em que se move com o fluido.*

$\square$

Vejamos porque o uso da derivada Euleriana ordinária não é suficiente quando desejamos saber a variação de velocidade, aceleração de uma partícula supondo esta movimentando-se juntamente com o fluido. Para evitar confusão, esclarecemos que é comum em Física considerar uma partícula de um fluido não uma molécula, (ou átomo) compositora (compositor) do fluido em si, mas sim um pequeno aglomerado do fluido. Trata-se de um estudo macroscópico em certo sentido. Consideremos uma partícula no instante t_0 na posição (x_0, y_0, z_0). Após um instante Δt, ela estará (lembre-se que a partícula está movendo-se juntamente com o fluido) na posição $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$. Tratemos, resumidamente, então de movimento desde $P = (x_0, y_0, z_0, t_0)$ até $P' = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z, t_0 + \Delta t)$, como na figura a seguir.

Assim, se a função que descreve o movimento para tais partículas for $u(x, y, z, t)$ (para uma partícula que está em (x, y, z) no instante t), então supondo u diferenciável temos que, se o deslocamento de P até P' for suficientemente pequeno (e Δt também),

$$u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z, t_0 + \Delta t) = u(x_0 + u_x \Delta t, y_0 + u_y \Delta t, z_0 + u_z \Delta t, t_0 + \Delta t) =$$
$$= u(x_0, y_0, z_0, t_0) + \frac{\partial u}{\partial x} u_x \Delta t + \frac{\partial u}{\partial y} u_y \Delta t + \frac{\partial u}{\partial z} u_z \Delta t + \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t.$$

Aqui utilizamos o fato de que para deslocamentos pequenos, temos $\Delta x_j \cong u_{x_j} \Delta t$. Logo, se desejamos calcular $\frac{\Delta u}{\Delta t}$:

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial x} u_x + \frac{\partial u}{\partial y} u_y + \frac{\partial u}{\partial z} u_z + \frac{\partial u}{\partial t}.$$

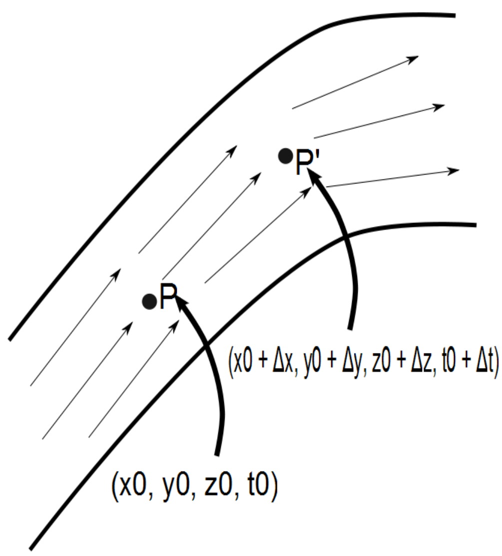


Figure 1.4: Deslocamento de um ponto $P = (x_0, y_0, z_0, t_0)$ até
$P' = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z, t_0 + \Delta t)$

Isto nos dá a derivada convectiva enunciada acima. Note que um fluido pode estar acelerado e mesmo assim ter $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$. E este fato não é incomum! Podemos ter um fluido em movimento circular com aceleração ordinária $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$ mas acelerado! É que ele está com aceleração centrípeta não-nula. A derivada convectiva explica isso. $\Box$

Substituindo (1.2) em (1.1) tem-se que

$$\int_\Omega \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + u.\nabla u \right\} dx = \int_\Omega f(x,t)dx + \int_\Gamma F(x,t)d\Gamma. \tag{1.3}$$

Passando às componentes obtém-se:

$$\int_\Omega \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j \right\} dx = \int_\Omega f_i(x,t)dx + \int_\Gamma \sum_{j=1}^{3} \xi_{ij}(x,t)\eta_j d\Gamma, \tag{1.4}$$

$i = 1, 2, 3$.

Do Lema de Gauss, segue-se que

$$\sum_{j=1}^{3} \int_\Gamma \xi_{ij}(x,t)\eta_j d\Gamma = \sum_{j=1}^{3} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} \xi_{ij}(x,t)dx. \tag{1.5}$$

Substituindo (1.5) em (1.4) obtém-se

$$\int_\Omega \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u.\nabla u_i \right\} dx = \int_\Omega f_i(x,t)dx + \sum_{j=1}^{3} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} \xi_{ij}(x,t)dx \tag{1.6}$$

para $i = 1, 2, 3$ em cada instante t e para cada Ω. Daí, resulta que

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u.\nabla u_i = f_i(x,t) + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\xi_{ij}(x,t) \tag{1.7}$$

para $i = 1, 2, 3$.

A equação (1.7) é chamada de **equação do momentum de Cauchy**. O princípio da tensão de Cauchy afirma que, quando sobre um meio contínuo agem forças, isto é, forças na superfície e no interior, existem reações internas (forças), ao longo de todo o meio, agindo entre os pontos do material. Com base neste princípio, Cauchy demonstrou que o estado de tensão em um ponto no meio está completamente definido pelas nove componentes de um tensor cartesiano de segunda ordem chamada de tensor de tensões de Cauchy, dado por

$$\xi_{ij} = \begin{pmatrix} \xi_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \xi_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \xi_{zz} \end{pmatrix}$$

onde o ξ é a tensão normal e τ é a tensão de corte. Este tensor é dividido em dois

$$\xi_{ij} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_{xx}+p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \xi_{yy}+p & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \xi_{zz}+p \end{pmatrix} = -p\delta_{ij}I + \sigma_{ij}$$

onde I é matriz identidade 3×3, $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$, $p = -\frac{1}{3}(\xi_{xx} + \xi_{yy} + \xi_{zz})$ é a pressão do fluido e o σ_{ij} na equação acima é chamado de **tensor de tensões de desvio**. Mais detalhes, podem ser vistos em Batchelor [2].

Logo,

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\xi_{ij} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

Assim, a equação (1.7) pode ser escrita como

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u.\nabla u_i = f_i(x,t) - \frac{\partial p}{\partial x_i} + div(\sigma_i)$$

para $i = 1, 2, 3$.

Escrevendo de modo compacto a equação acima obtém-se

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u.\nabla u = f(x,t) - \nabla p + div(\sigma)$$

Portanto o movimento de fluidos incompressíveis é descrito pelo sistema de equações

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + u.\nabla u + \nabla p = div(\sigma) + f(x,t),\ x \in \Omega,\ \ t > 0, \\ &div(u) = 0,\ x \in \Omega,\ \ t > 0, \end{aligned} \tag{1.8}$$

onde $\sigma = (\sigma_{ik})$ é o tensor de tensões de desvio, $tr\sigma = 0$, p é a pressão do fluido e f é a força externa. A equação acima ainda está incompleta. Para a conclusão, é necessário formular hipóteses sobre a forma de σ, ou seja, necessita-se de uma lei constitutiva para o tensor tensões, que pode ser obtido para uma família de fluidos específicos.

A introdução em (1.8) da variação no tensor de tensões σ tem o propósito de considerar reações que surgem no fluido durante seu movimento. Estabelecendo, por meio da **Lei de Hooke**, a relação entre σ e o tensor de deformações linearizado $D = (D_{ik}) = \frac{1}{2}\left(u_{ix_k} + u_{kx_i}\right)$ e suas derivadas, tem-se assim o tipo de fluido. Uma tal relação entre σ e D é o que chama-se de **equação reológica** ou uma **equação de estado** veja por exemplo Serrin [16] e Clifford [6]. O exemplo mais simples de uma equação reológica correspondendo a um fluido incompressível ideal é a equação $\sigma = 0$, e neste caso, o movimento de um fluido incompressível ideal é descrito pela equação de Euler

$$\left| \begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + u.\nabla u + \nabla p = f \\ &div(u) = 0. \end{aligned} \right. \tag{1.9}$$

O axioma de Stokes, veja Serrin [16] e Ladyzhenskaya [23], constitui o sistema mais popular entre todos os axiomas que descrevem o movimento de fluidos viscosos. Um fluido o qual é definido pela equação que satisfaz o axioma de Stokes são ditos *fluidos de Stokes*. Para tais fluidos incompressíveis a equação definida tem a forma (veja [16]-[23])

$$\sigma = \alpha D + \beta D^2, \tag{1.10}$$

onde α e β são funções específicas.

Se em (1.10) $\alpha \equiv constante \equiv 2\nu > 0$ e $\beta \equiv 0$ tem-se a lei de Newton

$$\sigma = 2\nu D. \tag{1.11}$$

Um fluido definido pela equação (1.11) é dito um fluido Newtoniano. Substituindo (1.11) em (1.8) obtém-se a equação de movimento de um fluido Newtoniano, o qual é chamada de equação de Navier-Stokes:

$$\left| \begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + u.\nabla u - \nu\Delta u + \nabla p = f \\ &div(u) = 0. \end{aligned} \right. \tag{1.12}$$

A constante ν é chamada de coeficiente de viscosidade cinemática.

Agora notemos que na fórmula da derivada convectiva $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u.\nabla u$ podemos supor que o fluido está movimentando-se com velocidades moderadas, isto é, que em pequenas variações do tempo há uma pequena variação no espaço. Isto significa, que as quantidades $\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z$ são insignificantes para Δt pequeno, já que $\Delta x_j = u_{x_j}\Delta t$. Podemos, então, omitir a parte $u.\nabla u$ da derivada convectiva. Alguém poderia argumentar que se isto é possível, então por que não omitir aquilo logo no início dos cálculos? A resposta é que isto é apenas uma aproximação, e a experiência nos diz que aproximações grotescas não devem ser feitas logo no início de deduções de equações diferenciais.

1.2 O Propósito do Trabalho

O que propõe-se neste trabalho é obter a controlabilidade aproximada para o sistema:

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \mu\Delta u + \nabla p = f \quad \text{em} \quad Q \\ div(u) = 0 \quad \text{em} \quad Q, \\ u = 0 \quad \text{em} \quad \Sigma, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \end{array} \right. \tag{1.13}$$

onde $u(x,t) = (u_1(x,t), \ldots.., u_n(x,t))$ é o vetor velocidade do fluido moderado avaliado no ponto (x,t), $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $p = p(x,t)$ é a pressão do fluido avaliado no ponto (x,t), μ representa uma constante, $u_0(x)$ é a velocidade inicial.

A função f assumirá a seguinte forma:

- No Capítulo 2, f será apenas uma função dada em algum espaço adequado.
- No Capítulo 3, $f = v\chi_{\mathcal{O}}$, onde v será a função controle distribuída em $\mathcal{O}$.

Este trabalho divide-se em: No Capítulo 2 estuda-se a existência, unicidade e regularidade de soluções forte e fraca, necessárias para o estudo da controlabilidade. No Capítulo 3 assumindo a existência e unicidade de soluções, caracterizar-se-á o estudo da controlabilidade aproximada para o sistema (1.13).

Passemos agora a alguns resultados que serão usados livremente no restante deste texto.

1.3 Os espaços $L^p(\Omega)$

Aqui todas as integrais tomadas sobre o conjunto Ω são integrais no sentido de *Lebesgue*. Supomos conhecidas as definições "mais simples" da teoria de Medida, como conjuntos mensuráveis, funções mensuráveis a Lebesgue, etc.

Definição 1.1. *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável. Definimos o espaço de funções $L^p(\Omega)$ por*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; \|f\|_p < \infty\},$$

onde

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para o caso de $p = \infty$, definimos

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; \|f\|_\infty < \infty\},$$

onde

$$\|f\|_\infty = \underset{x\in\Omega}{sup\ ess}\, |f(x)| = \inf\{C > 0; |f(x)| \leq C \text{ quase sempre }\}$$

Definição 1.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $1 \leq p < \infty$. Dizemos que uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é localmente p-integrável em Ω, e denotamos $f \in L^p_{loc}(\Omega)$, se para todo compacto $K \subset \Omega$ temos*

$$\left(\int_\Omega |f\chi_K(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

onde χ_K é a função característica de K.

Teorema 1.1 (Desigualdade de Hölder)**.** *Suponhamos $1 < p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $f \in L^P(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, então o produto fg está em $L^1(\Omega)$ e vale*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

□

Teorema 1.2 (Desigualdade de Minkowski)**.** *Suponhamos $1 < p < \infty$ e $f, g \in L^P(\Omega)$. Então*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

E $f + g \in L^P(\Omega)$.

□

Teorema 1.3. *Os espaços* $L^p(\Omega)$ *são de Banach, se* $1 \leq p \leq \infty$.

□

Passemos agora para as convoluções. Sejam $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Para cada x, consideremos

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

Quando tal integral existe, isto é, é finita, dizemos que u é a convolução de f por g e denotamos $u(x) = (f * g)(x)$.

Propriedades da convolução

Sejam f e g como acima. Suponhamos que $(f * g)(x)$ exista, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Então temos as seguintes propriedades:

a) $f * g = g * f$ (Comutatividade);

b) $(f * g) * h = f * (g * h)$ (Associatividade);

c) Se definirmos $\tau_y f(x) = f(x - y)$ (translação de ordem y de f), então $\tau_z(f * g) = (\tau_z f) * g = f * (\tau_z g)$.

□

Sabendo disso, temos o seguinte teorema.

Teorema 1.4. *Suponhamos* $1 \leq p, q, r < \infty$ *tais que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. *Se* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *e* $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, *então* $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ *e vale*

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

□

1.4 Distribuições

Definição 1.3. *Dado um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, definimos o suporte de u, onde u é uma função mensurável, por*

$$supp\ u = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}.$$

Introduziremos agora uma notação para derivadas mais gerais às que estamos acostumados a trabalhar.

Assim, dizemos que uma $k-$upla de inteiros não-negativos $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ é um multi-índice, com ordem $|\alpha| = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$.

Sabendo disto, definimos o operador de derivação de ordem α por

$$D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_k^{\alpha_k}}.$$

Estamos aptos para a seguinte definição:

Definição 1.4. *Denominamos de $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis e de suporte compacto contido em Ω. Tais funções são chamadas de funções testes.*

Tal espaço, $C_0^\infty(\Omega)$, constitui um espaço vetorial. Precisamos definir nele uma noção de convergência. Tal noção de convergência foi introduzida por *Schwartz*:

Definição 1.5 (Noção de convergência em $C_0^\infty(\Omega)$)**.** *Dizemos que uma sucessão $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$ quando forem satisfeitas as seguintes condições:*

- *todas as φ_n possuem suportes contidos em um compacto* **fixo** *$K \subset \Omega$;*
- *a sucessão $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para φ uniformemente em K, juntamente com todas as suas derivadas de todas as ordens.*

Observação 1.2. *O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$, munido da noção de convergência acima definida, é representado por $D(\Omega)$.*

Definição 1.6 (Distribuições sobre Ω)**.** *Denomina-se distribuição sobre Ω a toda aplicação linear contínua $T : D(\Omega) \to \mathbb{R}$.*

Observação 1.3. *Costumamos denotar por $< T, u >$ ao valor da distribuição T aplicada a $u \in D(\Omega)$.*

Exemplo 1.4.1. *Seja* $u \in L^p_{loc}(\Omega)$. *O funcional* $T_u : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ *dado por*

$$< T_u, \varphi >= \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx$$

define uma distribuição sobre Ω.

Definição 1.7. *Consideremos o espaço vetorial de todas as distribuições sobre* Ω. *Neste espaço, dizemos que a sucessão* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* T *se a sucessão* $(< T_n, \varphi >)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* $< T, \varphi >$ *em* $\mathbb{R}$, *para toda* $\varphi \in D(\Omega)$. *Denotamos este espaço com essa noção de convergência por* $D'(\Omega)$.

Com estímulo no seguinte teorema, definiremos a derivada de distribuições.

Teorema 1.5 (Green-Gauss)**.** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto aberto, limitado e com fronteira suave. Suponha que* $u \in C^1(\bar{\Omega})$. *Então:*

$$\int_\Omega u_{x_i} dx = \int_\Gamma u\nu_i dS, \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Corolário 1 (Fórmula de integração por partes de Gauss)**.** *Sejam* $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$, *com* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto aberto, limitado e com fronteira suave. Então:*

$$\int_\Omega u_{x_i} v dx = \int_\Gamma uv\nu_i dS - \int_\Omega uv_{x_i} dx, \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Definição 1.8. *Consideremos uma distribuição* $T \in D'(\Omega)$. *Denominamos por derivada de* T *a distribuição* $D^\alpha T$, *definida em* $D(\Omega)$ *através de*

$$< D^\alpha T, \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < T, D^\alpha \varphi >, \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Observação 1.4. *Analisando bem a definição acima e lembrando da definição de uma função teste, ganhamos que* **qualquer** *distribuição em* $D'(\Omega)$ *possui derivada de todas as ordens.*

Afirmação. A aplicação $D^\alpha : D'(\Omega) \to D'(\Omega), \quad T \mapsto D^\alpha T$ é linear e contínua no sentido de convergência definida em $D'(\Omega)$.

1.5 Os espaços de Banach $L^P(0, T; X)$

Vejamos algumas propriedades básicas para os espaços $L^P(0, T; X)$. Eles são de grande utilidade para o nosso estudo e são usados com grande frequência em Equações Diferenciais Parciais, principalmente quando o espaço de Banach X é um espaço de Sobolev.

Definição 1.9. *Sejam X um espaço de Banach real, cujo dual topológico é denotado por X', e o intervalo $(0,T) \subset \mathbb{R}$ equipado com a medida de Lebesgue dt. O espaço $L^P(0,T;X)$ é o espaço vetorial das (classes de) funções vetoriais $f:(0,T) \to X$, definidas quase sempre em $(0,T)$ com valores em X, fortemente mensuráveis e tais que a função numérica $t \mapsto \|f(t)\|_X$ está em $L^P(0,T)$.*

Aqui dizemos que uma função vetorial $f:(0,T) \to X$ é *fortemente mensurável* quando existir uma sequência de funções simples f_n tal que $f_n(t) \to f(t)$, em X quase sempre em $(0,T)$. Dizer que a função numérica $t \mapsto \|f(t)\|_X$ está em $L^P(0,T)$ significa dizer que $\left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$. Isto nos permite definir a seguinte norma:

$$\|f\|_{p,X} = \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}}, \;\; se \;\; 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|f\|_{\infty,X} = \operatorname*{supess}_{0<t<T} \|u(t)\|_X.$$

A verificação de que tanto $\|f\|_{p,X}$, $1 \leq p < \infty$ como $\|f\|_{\infty,X}$ são normas é análoga ao caso das normas definidas da mesma forma para os espaços $L^P(0,T)$, ou um caso mais geral $L^P(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto.

Também temos analogamente ao caso $L^P(0,T)$, que $L^P(0,T;X)$ é um espaço de Banach. Devido a isso, já escrevemos desde o início com a notação de classes $(L^P(0,T;X))$ em vez de primeiramente falarmos em $\mathfrak{L}^P(0,T;X)$ para somente depois estudarmos a relação de equivalência $g \approx f \Leftrightarrow g = f$ quase sempre e então definirmos

$$[f] = \{u \in \mathfrak{L}^P(0,T;X); u(t) = f(t) \,\text{quase sempre}\}.$$

No caso interessante em que $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, podemos definir uma estrutura hilbertiana no espaço $L^P(0,T;X)$ através do seguinte produto interno

$$((f,g)) = \int_0^T (f(t),g(t))_X dt,$$

onde $(f(t),g(t))_X$ denota o produto interno (em X) entre f e g. Ou seja, se X é um espaço de Hilbert, então $L^2(0,T;X)$ é também um espaço de Hilbert. Isto é de grande importância.

O próximo resultado nos dá uma relação entre as normas dos espaços $L^p(0,T;X)$ e $L^q(0,T;Y)$ quando $X \hookrightarrow Y$, isto é, quando temos $X \subset Y$ e a aplicação de imersão $i : X \to Y$, $i(x) = x$ é contínua. Neste caso temos $\|i(x)\|_Y = \|x\|_Y \leq C\|x\|_X$, para alguma constante $C > 0$.

Lemma 1.5.1. *Sejam X e Y dois espaços de Banach e suponhamos $X \hookrightarrow Y$. Se $1 \leq q < p \leq \infty$, então*

$$L^P(0,T;X) \hookrightarrow L^q(0,T;Y).$$

Demonstração: *Tomemos $u \in L^p(0,T;X)$. Por definição, u é fortemente mensurável. Recordamos isto para garantirmos que a aplicação $t \mapsto \|u(t)\|_X$ seja mensurável e portanto integrável. Seja C a constante de imersão de X em Y. Logo, $\|u(t)\|_Y^q \leq C^q\|u(t)\|_X^q$ quase sempre. De $u \in L^P(0,T;X)$ ganhamos que a aplicação $t \mapsto \|u(t)\|_X^q$ pertence ao espaço $L^{\frac{p}{q}}(0,T)$, pois*

$$\|u(t)\|_X^p = \left(\|u(t)\|_X^{\frac{p}{q}}\right)^q = (\|u(t)\|_X^q)^{\frac{p}{q}},$$

e então $\displaystyle\int_0^T (\|u(t)\|_X^q)^{\frac{p}{q}}\,dt = \int_0^T \|u(t)\|_X^p dt < \infty$. Em particular, $t \mapsto C^q\|u(t)\|_X^q$ está em $L^{\frac{p}{q}}(0,T)$. Chamando de s o conjugado de $\frac{p}{q}$, i.e., $\frac{1}{s} + \frac{q}{p} = 1$, conseguimos que $t \mapsto C^q\|u(t)\|_X^q$ está em $L^1(0,t)$, pois

$$\int_0^T 1.C^q\|u(t)\|_X^q dt \leq \left(\int_0^T dt\right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_0^T (C^q\|u(t)\|_X^q)^{\frac{p}{q}}\,dt\right)^{\frac{q}{p}} =$$

$$= \sqrt[s]{T}\left(\int_0^T (C\|u(t)\|_X)^p\,dt\right)^{\frac{q}{p}} < \infty.$$

Logo, $u \in L^q(0,T;Y)$. Falta mostrar que a imersão $L^P(0,T;X) \hookrightarrow L^q(0,T;Y)$ é contínua. Para isso, notemos que

$$\int_0^T \|u(t)\|_Y^q dt \leq \int_0^T C^q\|u(t)\|_X^q dt \leq C^p\sqrt[s]{T}\left[\left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\right]^q,$$

o que implica que $\|u\|_{q,Y} \leq C^{\frac{p}{q}}T^{\frac{1}{sq}}\|u\|_{p,X}$, ou seja, existe $\tilde{C} > 0$ satisfazendo $\|u\|_{q,Y} \leq \tilde{C}\|u\|_{p,X}$ e a imersão é contínua, como queríamos. ∎

Em Análise Funcional, dado um espaço de Banach X, geralmente estamos interessados na caracterização do seu dual, denotado por X', que é o espaço dos funcionais lineares definidos em X. É um resultado conhecido de Análise Funcional que se X é um espaço normado, então X' é um espaço de Banach. No nosso caso, $X' = \{f : X \to$

$\mathbb{R}$ (*ou* $\mathbb{C}$), *f linear*$\}$. No caso dos espaços $L^p(0,T;X)$ não poderia deixar de ser diferente. A seguir enunciamos um teorema que caracteriza $L^p(0,T;X)'$, cuja demonstração foge aos objetivos do humilde texto.

Teorema 1.6. *Sejam X um espaço de Banach e X' o seu dual. Existe uma identificação entre os espaços $L^p(0,T;X)'$ e $L^q(0,T;X')$, onde $p,q \in \mathbb{R}$, com $1 \leq p < \infty$ são tais que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Isto é,*

$$[L^p(0,T;X)]' \simeq L^q(0,T;X').$$

Observação 1.5. *Há uma notação bastante utilizada em Análise que deve ser comentada para evitar entendimentos errôneos. Trata-se de escrevermos $< f,x >$ em vez de $f(x)$, onde $f \in X'$ e $x \in X$. Mais especificamente, costuma-se escrever $< f,x >_{X',X}$ para descrever que temos uma dualidade X',X.*

Descrevamos rapidamente o significado dos espaços do tipo $L^q(0,T;X')$. Assumimos tacitamente aqui
$X \equiv (X, \|\cdot\|_X)$. Assim, analogamente ao caso $L^p(0,T;X)$, $L^q(0,T;X')$ é o espaço vetorial das (classes de) funções vetoriais $\varphi : (0,T) \to X'$, definidas quase sempre em $(0,T)$ com valores em X', fortemente mensuráveis e tais que a função numérica $t \mapsto \|\varphi(t)\|'_X$ está em $L^q(0,T)$.

Sabendo disso, a dualidade entre os espaços $L^p(0,T;X)' = L^q(0,T;X')$ e $L^p(0,T;X)$ vem dada na forma integral por

$$< u,v >_{L^q(0,T;X'),L^p(0,T;X)} := \int_0^T < u(t),v(t) >_{X',X} dt.$$

Uma motivação desta definição vem do teorema da representação de Riesz para L^p, com $1 < p < \infty$, que nos diz:

Teorema 1.7 (Teorema da representação de Riesz para $L^p(X)$)**.** *Sejam $1 < p < \infty$ e $\Omega \subset X$ um conjunto mensurável. Se $\varphi \in [L^p(\Omega)]'$, então existe $g \in L^q(\Omega)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, tal que $\varphi(f) = \int_\Omega fg dx$, dx a medida de Lebesgue. Além disso, vale $\|\varphi\| = \|g\|_q$.*

Chequemos agora se tal dualidade em forma de integral está bem definida. Para isso, vejamos o seguinte lema.

Lemma 1.5.2. *Se p e q são índices conjugados, $u \in L^p(0,T;X)$ e $v \in L^q(0,T;X')$, então a função (real) $t \mapsto < v(t),u(t) >_{X',X}$ está em $L^1(0,T)$.*

Demonstração: *Ora, sabemos que* $|< v(t), u(t) >_{X',X}| \leq \|v(t)\|_{X'}\|u(t)\|_X$*,* $\forall t \in (0,T)$*. (Lembremos que para cada* t *em* $(0,T)$*,* $v(t)$ *é um elemento de* X' *e* $u(t)$ *de* X*, logo faz sentido o que acabamos de dizer.) Assim,*

$$\left|\int_0^T < v(t), u(t) >_{X',X} dt\right| \leq \int_0^T |< v(t), u(t) >_{X',X}| \, dt \leq$$

$$\leq \int_0^T \|v(t)\|'_X \|u(t)\|_X dt \leq \left(\int_0^T \|v(t)\|^q_{X'} dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^T \|u(t)\|^p_X dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Portanto, $\left|\int_0^T < v(t), u(t) >_{X',X} dt\right| \leq \|v\|_{q,X'}\|u\|_{p,X}$ *e a dualidade faz sentido.* ■

A título de informação, vejamos uma aplicabilidade simples do resultado anterior. Seja Ω um aberto **limitado** do $\mathbb{R}^n$ e denotemos por Q o cilindro $\Omega \times (0,T)$. Tomando $X = L^2(\Omega)$, obtemos o espaço de Hilbert $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Afirmamos que há uma identificação entre $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e $L^2(Q)$. Com efeito, se $u \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, então $u(t) \in L^2(\Omega), \forall t \in (0,T)$. Ou seja, para cada $t \in (0,T)$, $u(t)$ é uma função de $\Omega \to \mathbb{R}$. Denotemos nesse sentido $u(t)(x) = u_t(x) = u(x,t)$, $x \in \Omega$. Portanto:

$$\int_0^T \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt = \int_0^T \left(\int_\Omega | \, u(x,t) \, |^2 \, dx\right) dt.$$

Utilizando o teorema de Fubini, concluímos que

$$\|u\|^2_{2,L^2(\Omega)} = \int_0^T \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt = \int_Q | \, u(x,t) \, |^2 \, dQ = \|u\|^2_{L^2(Q)}.$$

Observação 1.6. *Esta identificação é importante para caracterizações de espaços mais gerais,* $L^p(0,T;L^p(\Omega))$*, que ficam identificados (num raciocínio análogo) com* $L^p(Q)$*.*

Para finalizar, falemos rapidamente de distribuições vetoriais.

Definição 1.10. *Definimos o espaço das distribuições vetoriais sobre* $(0,T)$ *com valores em* X*, e denotamos por* $D'(0,T;X)$*, como sendo o espaço das aplicações lineares e contínuas de* $D(0,T)$ *em* X*.*

Analogamente ao caso de distribuição em $D'(\Omega)$ (ver exemplo 1.4.1), temos o seguinte:

Exemplo 1.5.1. *Dada* $u \in L^p(0,T;X)$*, com* $1 \leq p < \infty$*, tomemos* $T_u : D(0,T) \to \mathbb{R}$ *por*

$$< T_u, \varphi >= \int_0^T u(t)\varphi(t)dt.$$

1.6 Espaços de Sobolev

Tratemos agora dos importantes espaços de Sobolev, que são essenciais para a resolução de inúmeras equações diferenciais parciais. Novamente, apenas listaremos alguns resultados importantes, pois este texto não tem a pretensão de ser um tratado sobre a teoria dos espaços de Sobolev.

Definição 1.11. *Seja $1 \leq p < \infty$. Definimos o espaço de Sobolev $H^p(\Omega)$ como sendo o conjunto de todas as funções $f \in L^2(\Omega)$ tais que para qualquer multi-índice α tal que $|\alpha| \leq p$ temos que $D^\alpha f \in L^2(\Omega)$.*

Aqui sempre tratamos das derivadas no sentido das distribuições. Assim,

$$H^p(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega); D^\alpha f \in L^2(\Omega),\ \forall \alpha \,\text{tal que}\, |\alpha| \leq p\}.$$

Definimos primeiramente os espaços de Sobolev para o caso simples $L^2(\Omega)$ por motivos didáticos e práticos. Além disso, são os espaços deste tipo em particular que mais utilizaremos neste texto.

De um modo mais geral, definimos os espaços de Sobolev da seguinte maneira:

Definição 1.12. *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é o espaço das funções $f \in L^p(\Omega)$ tais que $D^\alpha f \in L^p(\Omega)$, para todo multi-índice $|\alpha| \leq m$.*

Ou seja,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega); D^\alpha f \in L^p(\Omega), \forall\, \alpha \,\text{tal que}\, |\alpha| \leq m\}.$$

Uma propriedade importante dos espaços $W^{m,p}$ é que eles se tornam espaços normados com as seguintes normas:

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad se\ 1 \leq p < \infty$$

ou

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_\infty.$$

Mais do que isso, para estas normas, temos que

Teorema 1.8. *O espaço* $(W^{m,p}, \|\cdot\|_{m,p})$ *é um espaço de Banach, para* $1 \leq p \leq \infty$.

Sabendo disso, voltemos ao caso mais simples $H^p(\Omega)$ e ponhamos a seguinte estrutura de produto interno:

$$(u,v) = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}, \; u, v \in H^p(\Omega).$$

Com isto e com o teorema anterior, ganhamos que os espaços $(H^p(\Omega), (\cdot,\cdot))$ são espaços de Hilbert.

Definição 1.13. *Definimos o espaço* $W_0^{m,p}(\Omega)$ *como sendo o fecho de* $C_0^\infty(\Omega)$ *em* $W^{m,p}(\Omega)$.

Ou seja,

$$W_0^{m,p}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Denotamos o *dual topológico* de $H_0^{m,p}(\Omega)$ por $H^{-m}(\Omega)$.

A seguir temos algumas desigualdades importantes na teoria.

Teorema 1.9 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ **limitado***. Então, dada qualquer* $u \in H_0^1(\Omega)$*, existe uma constante* $C = C(\Omega) > 0$ *tal que*

$$\|u\|_2^2 \leq C\|\nabla u\|_2^2.$$

□

O seguinte resultado nos dá uma caracterização do dual do espaço $H_0^1(\Omega)$:

Afirmação. Se f é uma aplicação linear contínua sobre $H^{-1}(\Omega)$, então existem funções $v_1, \ldots, v_{n+1}$ em $L^2(\Omega)$ tais que

$$f(x) = \left(v_1 + \sum_{i=2}^{n+1} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)(x).$$

1.7 Lemas Técnicos

Citemos aqui importantes resultados de existência local e de prolongamento de soluções para alguns sistemas de equações diferenciais ordinárias.

Definição 1.14 (Condições de Carathéodory)**.** *Sejam* D *um subconjunto do* $\mathbb{R}^{n+1}$*, cujos elementos são denotados por* (x,t)*, onde* $t \in \mathbb{R}$ *e* $x \in \mathbb{R}^n$ *e* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *uma aplicação. Dizemos que* f *satisfaz as condições de Carathéodory se:*

a) $f(x,t)$ é mensurável em t para cada x fixo;

b) $f(x,t)$ é contínua em x para todo t fixo;

c) Para cada compacto $U \subset D$, existe uma função real integrável $m_U(t)$ tal que

$$|f(x,t)| \leq m_U(t), \quad \forall\,(x,t) \in U.$$

Teorema 1.10 (Carathéodory)**.** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação nas condições de Carathéodory sobre o retângulo $R = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}; |t - t_0| \leq a,\ |x - x_0| \leq b\}$, com $a, b \in \mathbb{R}_+$. Então existe uma solução $\varphi(t)$ do problema*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases},$$

sobre algum intervalo do tipo $(t_0 - \beta, t_0 + \beta)$, para algum $\beta > 0$.

Corolário 2 (Prolongamento de soluções)**.** *Sejam $D = [0,T] \times B$, com $0 < T < \infty$ e $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq b,\ \ b > 0\}$, e f satisfazendo as condições de Carathéodory. Seja $\varphi(t)$ uma solução de*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,t), \\ x(t_0) = x_0,\ \ |x| \leq b. \end{cases}$$

Se em qualquer intervalo I onde $\varphi(t)$ está definida tivermos $|\varphi(t)| \leq M,\ \forall t \in I$, onde M é uma constante independente de I e $M < b$, então φ tem um prolongamento até $[0,T]$.

Capítulo 2

O Modelo de Navier-Stokes

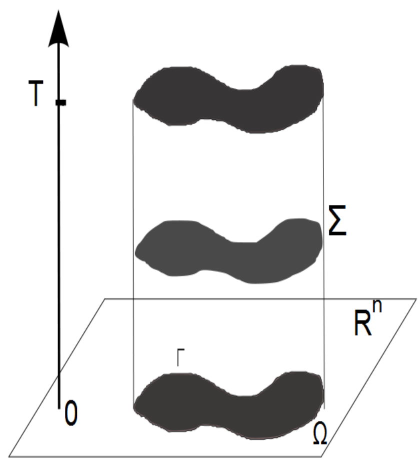
O objetivo deste Capítulo é encontrar existência e unicidade de soluções fortes e fracas para o sistema (1.13), pois este estudo é pré-requisito ao estudo da controlabilidade aproximada.

2.1 Notações

Denota-se por Ω um aberto, conexo, limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ de classe C^2, Q é o cilindro $\Omega \times (0,T)$ com fronteira lateral $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$, $T > 0$.

Considera-se $\mathcal{O}$ um subconjunto aberto de Ω e $\chi_{\mathcal{O}}$ a função característica de $\mathcal{O}$. Para $v \in \left(L^2(\mathcal{O} \times (0,T))\right)^n$ considera-se a função $v\chi_{\mathcal{O}}$. Note que $v = (v_1, ..., v_n)$ é um vetor com $v_i \in L^2(\mathcal{O} \times (0,T))$, para $i = 1, 2, ..., n$.

No espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ denota-se por $e_1 = (1, 0, \cdots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \cdots, 0), ...$



....., $e_n = (0, \cdots, 0, 1)$ a base canônica do $\mathbb{R}^n$ e $x = (x_1, \cdots, x_n)$ pontos deste espaço.

O operador diferencial

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(1 \leq i \leq n)$$

será denotado por D_i e se $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ é um multi-índice, α_i números inteiros não negativos, D^α será o operador diferencial

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{[\alpha]}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

onde $[\alpha] = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, em particular, se $[\alpha] = 0$ segue-se que D^0 é o operador identidade.

Denota-se por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ o espaço das funções reais definidas sobre Ω com a $p-$ésima potência integrável segundo Lebesgue $dx = dx_1 \cdots dx_n$. Este, é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{ou} \quad \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \underset{\Omega}{\text{supess}} |u(x)|.$$

Para $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto escalar

$$(u, w) = \int_\Omega u(x) w(x) dx.$$

O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é o espaço das funções pertencentes a $L^p(\Omega)$ com derivadas, no sentido das distribuições, de todas as ordens menor ou igual a m pertencentes a $L^p(\Omega)$(m um inteiro não negativo e $1 \leq p \leq \infty$). Este, é um espaço de Banach com a norma

$$||u||_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{j=\alpha} ||D^\alpha u||^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Quando $p = 2$, $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto escalar

$$((u, \nu))_{H^m(\Omega)} = \sum_{j=\alpha \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha \nu).$$

Seja $D(\Omega)$ o espaço das funções C^∞ com suporte compacto contido em Ω. O fecho de $D(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$ será denotado por $W_0^{m,p}(\Omega)$ ou $H_0^m(\Omega)$ quando $p = 2$.

Relembra-se, quando necessário, algumas propriedades clássicas desses espaços. Por conveniência, devido ao uso frequente de funções com n componentes, deve-se usar as seguintes notações no texto:

$$\mathbf{D}(\Omega) = \{D(\Omega)\}^n, \qquad \mathbf{H}_0^m(\Omega) = \{H_0^m(\Omega)\}^n$$

$$\mathbf{H}^m(\Omega) = \{H^m(\Omega)\}^n, \qquad \mathbf{L}^2(\Omega) = \{L^2(\Omega)\}^n.$$

Todos esses espaços são equipados com a norma natural do produto de espaços ou uma equivalente, exceto em $D(\Omega)$, o qual não é espaço normado.

Relembra-se que, se Ω é limitado em alguma direção, então vale a desigualdade de Poincaré:

$$|u|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq c(\Omega)|Du|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \quad \forall\, u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega),$$

onde D é a derivada em alguma direção e $c(\Omega)$ é uma constante dependendo somente de Ω. Nesse caso a norma sobre $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ é equivalente à norma:

$$||u|| = \left[\sum_{i=1}^{n} |D_i u|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

com a norma associada ao produto escalar:

$$((u,v)) = \sum_{i=1}^{n}(D_i u, D_i v),$$

para a qual o espaços $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert. Assim, equipa-se o espaço $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ com produto escalar $((,.,))$ e norma $||.||$. Também $\mathbf{L}^2(\Omega)$ será equipado com produto interno e norma respectivamente

$$(u,v)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} (u_i, v_i)_{L^2(\Omega)}\,, \ |v| = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Seja $\mathcal{V}$ o espaço(sem topologia)

$$\mathcal{V} = \{u \in \mathbf{D}(\Omega),\ div(u) = 0\}.$$

O fecho de $\mathcal{V}$ em $\mathbf{L}^2(\Omega)$ e $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ serão representados por H e V respectivamente. Em Lions [28] e Temam [52], caracteriza-se H e V como

$$H = \{u \in \mathbf{L}^2(\Omega),\ div(u) = 0, \ \ u.\nu|_\Gamma = 0\} \ \text{ e } \ V = \{u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega),\ div(u) = 0\}.$$

O espaço V está contido em H com imersão contínua e densa. Denota-se por H' e V' os duais fortes de H e V respectivamente. Seja τ a imersão de V em H. O operador adjunto τ^* é linear, um a um e contínuo de H' em V', pois $\tau(V) = V$ é denso em H e $\tau^*(H')$ é denso em V'. Portanto H' pode ser identificado com um subespaço denso de V'. Por outro lado, pelo Teorema da Representação de Riesz, pode-se identificar H e H' e chegar às seguintes inclusões

$$V \hookrightarrow H \equiv H' \hookrightarrow V', \tag{2.1}$$

onde as inclusões são densas e contínuas.

2.2 Existência e Unicidade de Soluções para (1.13)

Sejam V e H os dois espaços de Hilbert da seção anterior, com produtos internos $(\,,\,)$, $((\,,\,))$ e normas $|\,.\,|$, $||\,.\,||$ respectivamente.

Investiga-se nesta seção, a existência, unicidade e regularidade das soluções do problema (1.13) com $f(x,t) = v(x,t)\chi_{\mathcal{O}}$ para $(x,t) \in Q$.

Para tal, necessita-se obter uma base apropriada para o espaço funcional V. De fato, em Temam [52] é conhecido que, se Ω é um aberto limitado de classe C^2, as seguintes asserções são equivalentes:

[i] Existe uma única $u \in V$ satisfazendo

$$\nu\,((u,v)) = (f,v), \quad \forall\, v \in V, \text{ para cada } f$$

[ii] Existem $u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, $p \in L^2(\Omega)$ satisfazendo

$$\left|\begin{array}{l} -\nu\Delta u + \nabla p = f \text{ em } \Omega \\ div(u) = 0 \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma, \end{array}\right.$$

no sentido das distribuições em Ω, onde f é dada em $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

Esta caracterização do problema de Stokes motiva definir o operador

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbf{L}^2(\Omega) &\longrightarrow V \\ f &\longrightarrow \Phi f = u, \end{aligned}$$

onde u é uma função satisfazendo $[i]$ para cada f.

Faz-se notar que Φ está bem definida (devido à unicidade da u para cada f em $[i]$, é linear (devido às propriedades de produto interno), contínua de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ em V, já que $\nu\,((u,v)) = (f,v), \forall\, v \in V \Rightarrow \nu\,((\Phi f, v)) = (f,v), \forall\, v \in V \Rightarrow \nu\,((\Phi f, \Phi f)) = (f,f)$. E temos a limitação de Φ. E portanto Φ é contínua de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ em $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$.

Tem-se que $\mathbf{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbf{L}^2(\Omega)$ com imersão densa, contínua e compacta. Portanto Φ considerado como um operador de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ é compacto, além disso, Φ é auto adjunto.

Portanto, esse operador Φ possui uma sequência ortonormal de auto-funções $\{w_j\}_{j\geq 1}$, $\Phi w_j = \lambda_j w_j$, $\lambda_j > 0$, $\lambda_j \to \infty$ quando $j \to \infty$. Além disso, tem-se

$$w_j \in V, \;\; ((w_j, v)) = \lambda_j (w_j, v) \;\; \forall\, v \in V. \tag{2.2}$$

Como usual, tem-se

$$(w_j, w_k) = \delta_{jk} \;\text{ e }\; ((w_j, w_k)) = \lambda_j \delta_{jk} \quad \forall\, j, k.$$

2.2.1 Soluções Fracas

Nesta seção, procura-se uma função que resolva o problema (1.13) em algum sentido. No entanto, precisa-se definir o conceito de solução, uma vez que a função a ser procurada vai ser uma solução no sentido fraco, isto é, caracteriza-se o conceito de solução a ser procurada por:

Definição 2.1. *Diz-se que*

$$u : Q \longrightarrow R^n$$

é solução fraca de (1.13)*, quando*

$$u \in L^\infty(0,T;V), \;\; u' \in L^2(0,T;V')$$

e satisfaz

$$\frac{d}{dt}(u(t),v) + \mu((u(t),v)) = (f(t),v), \quad \forall\ v\ \in V \;\; \textit{no sentido de} \;\; D'(0,T) \tag{2.3}$$

com

$$u(0) = u_0.$$

Observação 2.1. *A princípio, é estranho não aparecer nesta definição nada relacionado à pressão p. No entanto, após achar uma função u satisfazendo esta definição é que encontra-se a função p satisfazendo o problema* (1.13) *em algum sentido.*

A definição acima permite enunciar um dos principais resultados desta seção.

Teorema 2.1. *Se $f \in L^2(0,T;H)$ e $u_0 \in H$, o problema misto* (1.13) *tem uma única solução fraca u, além disso*

$$u \in C^0([0,T];H).$$

Demonstração:

Emprega-se o método de Faedo-Galerkin com uma base para o espaço V. De fato, considere a sequência $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ construída em (2.2). Seja $V_m = [w_1, \cdots, w_m]$ o subespaço de V gerado pelos $m-$primeiros vetores de $\{w_j\}_{j\geq 1}$.

Primeiro, notemos que

$$(\nabla p, w_j) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial p}{\partial xi} w_{j_i} dx \stackrel{*}{=} \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega (-p_i) \frac{\partial w_j}{\partial x_i} dx = (-p, \operatorname{div} w_j) = 0,$$

pois $\operatorname{div} w_j = 0$, em Ω, $\forall j \in \{1, \ldots, m\}$. Em $*$, utilizamos a derivada no sentido das distribuições. Então o problema aproximado de (1.13), consiste em

$$\left| \begin{array}{l} \text{Encontrar } u_m(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} h_{im}(t) w_i \in V_m \ \text{ tal que} \\ (u_m'(t), v) \ + \ \mu\,((u_m(t), v)) = (f(t), v) \ \ \forall\, v \in V_m \\ u_m(0) = u_{0m} \to u_0 \ \ em \ \ H, \ m \to +\infty. \end{array} \right. \tag{2.4}$$

Resolvamos agora o sistema linear de equações diferenciais ordinárias que obtivemos. Para isso notemos que $u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} h_{im}(t) w_i$ implica $u_m'(t) = \sum_{i=1}^{m} h_{im}'(t) w_i$. Utilizando a ortonormalidade de $\{w_1, \ldots, w_m\}$, ganhamos que

$$\left| \begin{array}{l} h_{im}'(t) + \mu\, h_{im}(t) = (f(t), w_i) \ \ \forall\ i \in \{1, \ldots, m\} \\ h_{im}(0) = h_{i0m} \end{array} \right.$$

Para simplificar, utilizemos a seguinte notação: $v = (h_{1m}, h_{2m}, \ldots, h_{nm})$, $v_0 = (h_{10m}, h_{20m}, \ldots, h_{n0m})$. Logo, temos o seguinte sistema:

$$\left| \begin{array}{c} v'(t) + \mu v(t) = \tilde{f}_w(t) \\ v(0) = v_0 \end{array} \right.$$

Aqui $\tilde{f}_w(t)$ é o vetor coluna $\begin{pmatrix} (f(t), w_1) \\ (f(t), w_2) \\ \vdots \\ (f(t), w_n) \end{pmatrix}$.

Tomando $F(z,t) = F(t, v(t)) = \tilde{f}_w(t) - \mu\ v(t)$, o sistema anterior se escreve como

$$\left| \begin{array}{c} v'(t) = F(z,t) \\ v(0) = v_0 \end{array} \right. \tag{2.5}$$

Vejamos agora se temos as **condições de Carathéodory** para o nosso sistema acima:

a) fixando z, $F(z,t)$ é mensurável em t, pois está em $L^2(0, T, L^2(\Omega))$, já que as aplicações $t \mapsto (f(t), w_j)$ estão em $L^2(\Omega)$ para cada $t \in (0,T)$, $\ j \in \{1, \ldots, m\}$;

b) fixando t, $F(z,t)$ é contínua, pois a função $v(t) = (h_{1m}(t), h_{2m}(t), \ldots, h_{nm}(t))$ é contínua.

c) notemos que $\mid F(z,t) \mid = \mid \tilde{f}_w(t) - \mu\, v(t) \mid \leq K \mid f(t) \mid + \mid \mu \mid\mid v(t) \mid$, onde $K > 0$ é uma constante. Portanto, existe uma função integrável $m_U(t)$ tal que $\mid F(z,t) \mid \leq m_U(t)$, para todo compacto U contido no domínio de $F(z,t)$.

Logo, pelo teorema de existência de soluções de Carathéodory, o sistema (2.5) tem uma solução sobre algum intervalo $\mid t - 0 \mid < t_m,\ \ 0 < t_m < T$. Para o nosso interesse, consideremos apenas as soluções em $(0, t_m)$.

A dependência t_m está ligada ao fato de que o sistema (2.5) está relacionado ao problema aproximado (2.4). Nosso intuito é estender a solução para $[0, T]$. Portanto, retornando a este sistema, podemos considerar $(u'_m, v) + \mu\,((u_m, v)) = (f, v),\ \forall v \in V_m$. Logo, fazendo $v = u_m(t)$, temos que $(u'_m, u_m) + \mu\,((u_m, u_m)) = (f, u_m)$. Percebendo que $\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \mid u_m(t) \mid^2 = (u'_m, u_m)$, temos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \mid u_m(t) \mid^2 + \mu\,((u_m(t), u_m(t))) = (f(t), u_m(t)).$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \mid u_m(t) \mid^2 + \mu\,\|u_m(t)\|^2 \leq \mid f(t) \mid\mid u_m(t) \mid .$$

Integrando de 0 até t, $(0 < t < t_m < T)$, ganhamos:

$$\mid u_m(t) \mid^2 + 2\mu \int_0^t \|u_m(s)\|^2 ds \leq 2 \int_0^t \mid f(s) \mid\mid u_m(s) \mid ds$$

$$\leq \frac{2}{\mu}\left(\int_0^t |f(s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\mu^2 \int_0^t \|u_m(s)\|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Lembrando que $(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})^2 \geq 0 \Rightarrow a + b \geq 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$, ganhamos:

$$\mid u_m(t) \mid^2 + 2\mu \int_0^t \|u_m(s)\|^2 ds \leq \frac{1}{\mu}\int_0^t |f(s)|^2 ds + \mu \int_0^t \|u_m(s)\|^2 ds$$

Donde concluímos que

$$\|u_m(t)\|^2 \leq C,$$

onde $C > 0$ é constante. Ou seja, $\|u_m(t)\|_{\mathbf{L^2}(\Omega)} \leq \sqrt{C},\ \ \forall t \in [0, T]$. (Note que introduzimos a aderência a $(0, T)$.)

Pelo corolário do teorema de Carathéodory, u_m pode ser estendida até $[0, T]$, como queríamos e o sistema linear de equações diferenciais ordinárias (2.4) tem uma solução definida em $[0, T]$. Busca-se, a seguir, estimativas sobre u_m que permitirão tomar o limite $m \to \infty$.

2.2.2 Estimativas

De $(2.4)_4$, (**??**) e sendo $f \in L^2(0,T;H)$ obtemos a limitação:

$$\left| \; (u_m)_{m\in\mathbb{N}} \;\text{ é limitada em }\; L^\infty(0,T;H); \right. \tag{2.6}$$

e que

$$\left| \; (u_m)_{m\in\mathbb{N}} \;\text{ é limitada em }\; L^2(0,T;V). \right. \tag{2.7}$$

2.2.3 Passagem ao Limite

De (2.7) e (2.8), extrai-se uma subsequência de $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$, ainda denotada por $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$, tal que

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \;\text{ em }\; L^\infty(0,T;H); \tag{2.8}$$

$$u_m \rightharpoonup u \;\text{ em }\; L^2(0,T;V). \tag{2.9}$$

Da convergência (2.9) acima obtém-se

$$\int_0^T (u_m(t),w)dt \longrightarrow \int_0^T (u(t),w)dt, \;\; \forall\; w \in L^2(0,T;H), \tag{2.10}$$

Da convergência (2.10) tem-se em particular

$$\int_0^T ((u_m(t),w))dt \longrightarrow \int_0^T ((u(t),w))dt, \;\; \forall\; w \in L^2(0,T;V). \tag{2.11}$$

Tomando em (2.15), $w = v\theta$ com $v \in V$ e $\theta \in D(0,T)$, tem-se

$$\int_0^T (u_m'(t),w)dt = -\int_0^T (u_m(t),w')dt \longrightarrow -\int_0^T (u(t),w')dt. \tag{2.12}$$

Utilizando-se as convergências $(2.9)-(2.13)$, a densidade da união dos V_m em V, pode-se passar o limite na equação aproximada (2.4) quando $m \to \infty$ e obter

$$\begin{gathered} -\int_0^T (u(t),v)\theta'(t)dt + \mu\int_0^T ((u(t),v))\theta(t)dt = \\ \int_0^T (f(t),v)\theta(t)dt, \;\forall\, v \in V, \;\; \theta \in D(0,T). \end{gathered} \tag{2.13}$$

Dessa igualdade obtém-se

$$\left| \; \frac{d}{dt}(u(t),v) + \mu((u(t),v)) = (f(t),v) \;\forall v \;\in V, \;\text{ no sentido de }\; D'(0,T). \right.$$

Sendo $u \in L^2(0,T;V)$, $V \subset H \subset V'$ e observando que

$$\mu\left((u(t),v)\right) = \langle -\mu\Delta u(t), v\rangle_{V'\times V},$$

obtém-se

$$\frac{d}{dt}\langle u(t),v\rangle = \langle h(t),v\rangle \;\; \forall\, v \in V, \tag{2.14}$$

onde $\langle .,. \rangle$ representa a dualidade entre V' e V e

$$h(t) = \mu\Delta u(t) + f(t).$$

Note que $h \in L^2(0,T;V')$, logo conforme Temam [52] pp. 261, segue-se que $u'(t) = h(t)$ quase sempre em $[0,T]$ e portanto

$$u' \in L^2(0,T;V'). \tag{2.15}$$

e

$$u' - \mu\Delta u = f, \quad \text{no sentido de } \; L^2(0,T;V'), \tag{2.16}$$

Sendo $u \in L^2(0,T;V)$ e $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ segue-se, conforme Temam [52], que

$$u \in C^0([0,T];H).$$

Daí faz sentido calcular $u(0)$ e por cálculos padrões (agora que sabemos ser u contínua) mostra-se que $u(0) = u_0$.

Consideremos uma função escalar ψ continuamente diferenciável em $[0,T]$ tal que $\psi(T) = 0$ e $\psi(0) \neq 0$. Agora, multipliquemos a equação

$$\frac{d}{dt}(u(t),v) + \mu((u(t),v)) = (f(t),v)$$

por ψ e integremos com respeito a t de 0 até T. Primeiro notemos que, por integração por partes,

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(u(t),v)\psi(t)dt = -\int_0^T (u(t),v)\psi'(t)dt + (u(0),v)\psi(0).$$

Obtemos:

$$-\int_0^T (u(t),v)\psi'(t)dt + \mu \int_0^T ((u(t),v))\psi(t)dt = -(u(0),v)\psi(0) + \int_0^T (f(t),v)\psi(t)dt.$$

Se fizermos o mesmo raciocínio para a equação do problema aproximado e tomarmos o limite $m \to +\infty$, ganhamos que

$$-\int_0^T (u(t),v)\psi'(t)dt + \mu \int_0^T ((u(t),v))\psi(t)dt = -(u_0,v)\psi(0) + \int_0^T (f(t),v)\psi(t)dt.$$

Comparando as duas, temos que $-(u_0,v)\psi(0) = -(u(0),v)\psi(0)$, $\forall v \in V$. Logo, $u(0) = u_0$. □

2.2.4 Unicidade

Sejam u, v duas soluções do problema (1.13), logo $w = u - v$ satisfaz

$$w' - \mu\Delta w = 0, \quad w(0) = 0. \tag{2.17}$$

Tomando o produto escalar da primeira igualdade (2.17) com $w(t)$, temos

$$\langle w'(t), w(t)\rangle + \mu||w(t)||^2 = 0.$$

Conforme Temam [52] pp. 261, tem-se que $\langle w'(t), w(t)\rangle = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}|w(t)|^2$ e integrando de 0 a t obtemos

$$|w(t)|^2 + 2\mu\int_0^t ||w(s)||^2\, ds = 0$$

Donde concluímos que $w(t) = 0$ para todo $t \in [0,T]$.

■

Observação 2.2. *Apesar do que já foi feito, devemos precisar em que sentido a função* $\boldsymbol{u}$ *definida pelo* ***Teorema*** 2.1 *é a solução do problema de valor inicial* (1.13). *Note que precisamos recuperar a pressão do fluido, pois os cálculos que fizemos não envolviam tal pressão.*

□

De fato, o resultado a seguir não só vai dizer isto, como encontramos uma função p satisfazendo o problema (1.13) em algum sentido.

Proposição 2.1. *Sobre as hipóteses do Teorema 2.1, existe uma distribuição* $p : Q \to \mathbb{R}$, *tal que a função* $\boldsymbol{u}$ *definida no Teorema* 2.1 *e* p *satisfazem o problema* (1.13) *no sentido das distribuições em* Q, *além disso,* $p \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

Demonstração:

As igualdades $(1.13)_2$ e $(1.13)_4$ do problema (1.13) são uma consequência de $u \in L^2(0,T;V)$ e do Teorema 2.1. A igualdade $(1.13)_3$ é consequência de $u \in L^2(0,T;\mathbf{H}_0^1(\Omega))$.

Para introduzir a pressão, como $u'(t) = h(t)$ em V', $h(t)$ definida anteriormente, tem-se que

$$\langle u'(t) - \mu\Delta u(t) - f(t), v\rangle = 0 \tag{2.18}$$

para todo $v \in V$ quase sempre $[0,T]$.

Em particular, pois $\mathcal{V} \subset V$, tem-se

$$\langle u'(t) - \mu\Delta u(t) - f(t), v\rangle = 0, \tag{2.19}$$

para todo $v \in \mathcal{V}$ quase sempre $[0,T]$. Logo, conforme Proposição 4.1 do Apêndice, existe $p(t) \in D'(\Omega)$ tal que

$$-\nabla p(t) = u'(t) - \mu\Delta u(t) - f(t). \tag{2.20}$$

Daí conclui-se que

$$\nabla p(t) \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega). \tag{2.21}$$

Isto diz que cada $\dfrac{\partial p(t)}{\partial x_i} \in H^{-1}(\Omega)$ para cada $i = 1, 2, ..., n$. Logo, da Proposição 4.2 item (ii) do Apêndice, tem-se que

$$p(t) \in L^2(\Omega) \;\; \text{e} \;\; |p(t)|_{L^2(\Omega)} \leq C||\nabla p(t)||_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)}.$$

Sendo, por (2.20), $\nabla p \in L^2(0,T;\left[\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\right]^n)$, obtém-se

$$p \in L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.22}$$

Observação 2.3. *Não se tem em geral alguma informação sobre p além de* (2.22) *e* (2.22). *No entanto, mostra-se-á que p terá mais regularidade quando poe-se mais regularidade nos dados.*

□

2.2.5 Soluções Fortes

Nesta seção mostra-se que, exigindo mais regularidade sobre u_0, obtém-se mais regularidade na solução, o que é natural.

Definição 2.2. *Diz-se que*

$$u : Q \longrightarrow R^n$$

é uma solução forte de (1.13), *quando*

$$u \in L^2(0,T;V \cap \mathbf{H}^2(\Omega)),\ u' \in L^2(0,T;H),\ p \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$$

e satisfaz

$$u' - \mu\Delta u = f - \nabla p \quad em \quad \mathbf{L}^2(Q), \tag{2.23}$$

$$u(0) = u_0.$$

O resultado abaixo garante a existência, unicidade e regularidade de soluções.

Teorema 2.2. *Se $f \in L^2(0,T;H)$ e $u_0 \in V$, o problema misto* (1.13) *tem uma única solução forte u. Além disso,*

$$u \in C^0([0,T];V).$$

Demonstração:

Seja $v = \Delta u_m(t) \in V_m$ em (2.4), logo

$$((u_m'(t), u_m(t))) \ + \ \mu(\Delta u_m(t), \Delta u_m(t)) = -(f(t), \Delta u_m(t)). \tag{2.24}$$

Assim, tem-se que

$$\frac{d}{dt}||u_m(t)||^2 + 2\mu|\Delta u_m(t)|^2 \leq \frac{3\mu}{2}|\Delta u_m(t)|^2 + \frac{1}{\mu}|f(t)|^2, \tag{2.25}$$

Integrando (2.25) tem-se que

$$||u_m(t)||^2 + \frac{\mu}{2}\int_0^t |\Delta u_m(s)|^2\, ds \leq \frac{1}{\mu}\int_0^T |f(t)|^2\, dt + \|u_{0m}\|^2, \tag{2.26}$$

Sendo $u_{0m} \in V_m$ de modo que $u_{0m} \to u_0$ em V, $f \in L^2(0,T;H)$, obtém-se

$$||u_m(t)||^2 + \frac{\mu}{2}\int_0^t |\Delta u_m(s)|^2\, ds \leq C,\ \forall m \in \mathbb{N} \tag{2.27}$$

Daí,

$$||u_m(t)||^2 \leq C. \tag{2.28}$$

Portanto,

$$(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;V), \tag{2.29}$$

$$(\Delta u_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)). \tag{2.30}$$

Da densidade dos V_m em V, pode-se tomar $v \in V$ no problema aproximado (2.4). Portanto,

$$(u'_m(t),v) - \mu\,(\Delta u_m(t),v) \ = (f(t),v),\ \forall\ v \in V.$$

Logo, em particular, tem-se

$$\langle u'_m(t) - \mu\Delta u_m(t) - f(t), v\rangle = 0, \tag{2.31}$$

para todo $v \in \mathcal{V}$ quase sempre em $[0,T]$. Assim, conforme Proposição 4.1 do Apêndice, existe $p_m(t) \in D'(\Omega)$ tal que

$$-\nabla p_m(t) = u'_m(t) - \mu\Delta u_m(t) - f(t). \tag{2.32}$$

Considere o problema de Stokes

$$\left|\begin{array}{l} -\mu\Delta u_m(t) + \nabla p_m(t) = \varphi_m(t) \in \mathbf{L}^2(\Omega) \\ div(u_m(t)) = 0 \ \text{ em } \Omega \\ u_m(t) = 0 \ \text{ sobre } \Gamma, \end{array}\right. \tag{2.33}$$

onde $\varphi_m(t) = -u'_m(t) + f(t)$.

De (2.33) tem-se que $\dfrac{\partial p_m(t)}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$, donde

$$p_m(t) \in H^1(\Omega). \tag{2.34}$$

De (2.31) tem-se

$$\left|\begin{array}{l} \Delta u_m(t) = \xi \in \mathbf{L}^2(\Omega) \\ u_m(t) \in \mathbf{H}^1_0(\Omega), \end{array}\right.$$

logo, da regularidade de problemas elíticos, segue-se que

$$u_m(t) \in \mathbf{H}^2(\Omega). \tag{2.35}$$

De (2.34), (2.35), (2.36) e a Proposição 4.3 do Apêndice obtém-se

$$\|u_m(t)\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)} \le C_0|\varphi_m(t)|^2.$$

Como φ_m é limitada em $L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$, segue-se que

$$(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^2(0,T;\mathbf{H}^2(\Omega)). \tag{2.36}$$

De (2.30) e (2.37), extrai-se uma subsequência de $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$, ainda denotada pelo mesmo nome, tal que

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \ \text{ em } \ L^\infty(0,T;V); \tag{2.37}$$

$$u_m \rightharpoonup u \ \text{ em } \ L^2(0,T;\mathbf{H}^2(\Omega)). \tag{2.38}$$

Por argumentos similares aos do Teorema 2.1, obtém-se:

$$\frac{d}{dt}(u(t),v) - \mu(\Delta u(t),v) = (f(t),v) \ \ \forall v \in V \ \text{ no sentido de } \ D'(0,T). \tag{2.39}$$

Daí, como no Teorema 2.1, tem-se que

$$u' \in L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)) \tag{2.40}$$

$$u' - \mu\Delta u = f, \ \text{ no sentido de } \ L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)). \tag{2.41}$$

De (2.42) tem-se em particular que

$$\langle u'(t) - \mu\Delta u(t) - f(t), v\rangle = 0, \tag{2.42}$$

para todo $v \in \mathcal{V}$. Portanto, a Proposição 4.1 do Apêndice, garante a existência de $p(t) \in D'(\Omega)$ tal que

$$-\nabla p(t) = u'(t) - \mu\Delta u(t) - f(t) \in \mathbf{L}^2(\Omega), \ \text{ q.s. em } \ [0,T]. \tag{2.43}$$

Daí conclui-se que

$$\nabla p(t) \in \mathbf{L}^2(\Omega), \ \text{ q.s. em } [0,T]. \tag{2.44}$$

Isto diz que $\dfrac{\partial p(t)}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$ para cada $i = 1,2,....,n$. Logo, da Proposição 4.2 item (i) do Apêndice, obtém-se

$$p(t) \in L^2(\Omega), \ \text{ q.s.}$$

e portanto

$$p(t) \in H^1(\Omega), \ \text{ quase sempre em } \ [0,T].$$

Tem-se, para quase todo $t \in [0,T]$, que

$$\left|\begin{array}{l} -\mu\Delta u(t) + \nabla p(t) = \beta(t) \in \mathbf{L}^2(\Omega); \\ div(u(t)) = 0 \ \text{ em } \Omega \\ u(t) = 0 \ \text{ sobre } \Gamma, \end{array}\right.$$

onde $\beta(t) = f(t) - u'(t)$.

Portanto, invocando a Proposição 4.3 do Apêndice, com $\alpha = 2$, $m = 0, g = 0, \phi = 0$, tem-se que a aplicação

$$\beta(t) \mapsto \{u(t), p(t)\}$$

é linear contínua do $\mathbf{L}^2(\Omega)$ em $\mathbf{H}^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$. Além disso, tem-se que

$$\|u(t)\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)} + \|p(t)\|_{H^1(\Omega)} \leq c_0\{|\beta(t))|\},$$

donde, por ser $\beta \in L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$, temos

$$p \in L^2(0,T;H^1(\Omega)).$$

Como

$$u \in L^2(0,T;\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega)) \text{ e } u' \in L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)),$$

tem-se que

$$u \in C^0\left([0,T];\left[\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega), \mathbf{L}^2(\Omega)\right]_{\frac{1}{2}}\right).$$

Mas, $\left[\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{H}^2(\Omega), \mathbf{L}^2(\Omega)\right]_{\frac{1}{2}} = \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ e $div(u) = 0$. Assim,

$$u \in C^0([0,T];V).$$

Para mostrar que $u(0) = u_0$ e a unicidade, faz-se exatamente como no Teorema 2.1. Portanto, a prova do Teorema 2.2 está concluída.

$\blacksquare$

Capítulo 3

Controlabilidade Aproximada

Este Capítulo é devotado a estudar a controlabilidade aproximada do problema

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \mu \Delta u + \nabla p = v\chi_{\mathcal{O}} \quad \text{em} \quad Q \\ div(u) = 0 \quad \text{em} \quad Q, \\ u = 0 \quad \text{em} \quad \Sigma, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \end{array} \right. \tag{3.1}$$

onde $u(x,t) = (u_1(x,t), \ldots.., u_n(x,t))$ é o vetor velocidade do fluido moderado avaliado no ponto (x,t), $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $p = p(x,t)$ é a pressão do fluido avaliado no ponto (x,t), μ representa uma constante, $u_0(x)$ é a velocidade inicial.

A função $v \in \left(L^2(\mathcal{O} \times (0,T))\right)^n$ que aparece no lado direito de (3.1) é denominado controle. Note que, quando v varia em $\left(L^2(\mathcal{O} \times (0,T))\right)^n$ a solução u de (3.1) depende de $(x,t) \in Q$ e v a qual representa-se por

$$u(x,t,v).$$

Observação 3.1. *Pode-se supor $u_0 = 0$, pois sendo (3.1) linear, considera-se z solução de*

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial z}{\partial t} - \mu \Delta z + \nabla p_0 = 0 \quad em \quad Q \\ div(z) = 0 \quad em \quad Q, \\ z = 0 \quad sobre \quad \Sigma, \\ z(x,0) = u_0 \quad em \quad \Omega. \end{array} \right.$$

Logo, pode-se decompor $u = \xi + z$, onde ξ resolve

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial \xi}{\partial t} - \mu \Delta \xi + \nabla p_1 = v\chi_{\mathcal{O}} \quad em \quad Q \\ div(\xi) = 0 \quad em \quad Q, \\ \xi = 0 \quad sobre \quad \Sigma, \\ \xi(x,0) = 0 \quad em \quad \Omega, \end{array}\right.$$

com $p = p_0 + p_1$.

$\square$

Portanto se $f(x,t) = v(x,t)\chi_{\mathcal{O}}$ tem-se $f \in L^2(0,T;H)$. Sendo $u_0 = 0$, segue-se do Teorema 2.2, que a solução forte $u(.,.,v)$ do problema $(3.1)_1$ pertence a $C^0([0,T];V)$ ou seja $u(.,t,v) \in V \subset H$.

Assim, dado uma função u^T em H não é possível obter $v \in \left(L^2(\mathcal{O} \times (0,T))\right)^n$ tal que a correspondente solução $u(.,t,v) \in V$ satisfaça

$$u(x,T,v) = u^T(x).$$

Por este motivo indaga-se:

> Existe uma sequência $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de objetos de $\left(L^2(\mathcal{O} \times (0,T))\right)^n$
> tal que a correspondente solução $u(.,t,v_j) \in V$ é tal que
> $$u(.,T,v_j) \to u^T(.)$$
> forte em H quando $j \to \infty$?

Na verdade é isso que tem-se de provar. Pois isto é o que caracteriza a controlabilidade aproximada, conforme Lions [29].

Define-se

$$R(T) = \left\{ \begin{array}{l} u(x,T,v),\ v \in \left(L^2(\mathcal{O} \times (0,T))\right)^n \text{ onde } u(x,t,v) \text{ é} \\ \text{uma solução forte de } (3.1) \text{ com } f = v\chi_{\mathcal{O}} \text{ e } u_0 = 0 \end{array} \right\}$$

Teorema 3.1. *O conjunto $R(T)$ é denso em H.*

Demonstração: Para provar tal resultado, utiliza-se o teorema de Hahn-Banach ou o teorema da projeção em um espaço de Hilbert. Deve-se provar que,

$$\text{se } f \in H \text{ e } (u(.,T,v), f)_H = 0 \ \forall\, v \in \left(L^2(\mathcal{O} \times (0,T))\right)^n \text{ então } f \equiv 0.$$

De fato, dado $f \in H$ existe $\psi(x,t) = (\psi_1(x,t), ..., \psi_n(x,t)) \in Q$ e $\widehat{p} \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ solução fraca de

$$\left| \begin{array}{l} -\dfrac{\partial \psi}{\partial t} - \mu\Delta\psi + \nabla\widehat{p} = 0 \quad \text{em} \quad Q \\ div(\psi) = 0 \quad \text{em} \quad Q, \\ \psi = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma, \\ \psi(x,T) = f(x) \quad \text{em} \quad \Omega. \end{array} \right. \tag{3.2}$$

Com efeito, para ver isto, basta que no lugar de t se considere $T-t$, isto é, fazendo a mudança de variáveis $\tau = T - t$ com $\varphi(x,\tau) = \psi(x,t)$, tem-se

$$\varphi'(x,\tau) = -\psi'(x,t).$$

Logo, o sistema (3.2) é equivalente a

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} - \mu\Delta\varphi + \nabla\widehat{p} = 0 \quad \text{em} \quad Q \\ div(\varphi) = 0 \quad \text{em} \quad Q, \\ \varphi = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma, \\ \varphi(x,0) = f(x) \quad \text{em} \quad \Omega. \end{array} \right. \tag{3.3}$$

com φ sendo a incógnita.

Como o lado direito de $(3.3)_1$ é igual a função nula e $f \in H$, segue-se do Teorema 2.1, do Capítulo 2, que (3.3) tem uma única solução fraca. Isto é, ψ é tal que

$$-\frac{\partial \psi}{\partial t} - \mu\Delta\psi + \nabla\widehat{p} = 0$$

no sentido de $L^2(0,T;V')$.

Se $u(x,t,v)$ é solução forte de (3.1) então do Teorema 2.2

$$u(.,.,v) \in C^0([0,T];V) \cap L^2(0,T;V \cap \mathbf{H}^2(\Omega)).$$

Portanto, faz sentido avaliar

$$\mathcal{L}(\psi) = -\frac{\partial \psi}{\partial t} - \mu\Delta\psi + \nabla\widehat{p}$$

em $u(x,t,v)$ na dualidade $L^2(0,T;V')$, $L^2(0,T;V)$.

Observação 3.2. *Daqui em diante, denota-se*

$$(y,z)_{(L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^n} = \int_Q yz\,dxdt \quad e \quad |z|^2_{(L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^n} = \int_{\mathcal{O}\times(0,T)} z^2(x,t)dxdt$$

$\square$

Formalmente, pode-se operar como se segue. Multiplica-se ambos os lados de (3.2) por $u(x,t,v)$ solução forte de (1.13), integra-se em Q e notando que

(i) $u(x,0,v)=0$,

tem-se:

$$-\left(u(.,T,v),f\right)_H+\int_Q\psi\left\{\frac{\partial u}{\partial t}-\mu\Delta u\right\}dxdt+$$
$$\int_0^T\langle\nabla\widehat{p}(t),u(t)\rangle_{H^{-1}\times H_0^1}\,dt=0$$

para todo $v\in\left(L^2(\mathcal{O}\times(0,T))\right)^n$.

De (4.1) tem-se uma solução forte, isto é,

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\mu\Delta u-\nabla p,\ \text{ q.s. em } Q.$$

Logo,

$$\begin{gathered}-\left(u(.,T,v),f\right)_H+\int_Q\psi v\chi_{\mathcal{O}}dxdt-\int_0^T\left(\nabla p(t),\psi(t)\right)dt+\\ \int_0^T\langle\nabla\widehat{p}(t),u(t)\rangle_{(H^{-1})^n\times(H_0^1)^n}\,dt\;=0\end{gathered}\tag{3.4}$$

para todo $v\in\left(L^2(\mathcal{O}\times(0,T))\right)^n$.

Observação 3.3. *Note que*

$$\langle\nabla p(t),u(t)\rangle_{(H^{-1})^n\times(H_0^1)^n}=\langle\left(D_1p(t),\cdots,D_np(t),\right),\left(u_1(t),\cdots,u_n(t)\right)\rangle_{(H^{-1})^n\times(H_0^1)^n}=$$
$$\sum_{i=1}^n\langle D_ip(t),u_i\rangle_{H^{-1}\times H_0^1}=-\sum_{i=1}^n\left(p(t),D_iu_i\right)_{L^2}=-\left(p(t),\sum_{i=1}^nD_iu_i\right)_{L^2}=$$
$$-\left(p(t),divu(t)\right)_{L^2}=0,$$

pois $u(t)\in V$ e portanto $div(u(t))=0$.

□

Note que, $\forall u,\psi\in L^2(0,T;V)$, da Observação 3.3 e a identidade em (3.4) temos

$$-\left(u(.,T,v),f\right)_H+\int_Q\psi v\chi_{\mathcal{O}}dxdt=0$$

para todo $v\in\left(L^2(\mathcal{O}\times(0,T))\right)^n$.

Por hipótese, $f\in H$ é tal que

$$\left(u(.,T,v),f\right)_H=0 \text{ para todo } v\in\left(L^2(\mathcal{O}\times(0,T))\right)^n.$$

Então,

$$\int_Q \psi v \chi_{\mathcal{O}} dxdt = 0 \text{ para todo } v \in \left(L^2(\mathcal{O}\times(0,T))\right)^n.$$

Isso implica que

$$\psi(x,t) = 0 \ \text{ em } \ \mathcal{O}\times(0,T) \text{ q.s.}$$

Mas $\mathcal{O}\times(0,T)$ é um cilindro contido em Q e , sendo $\mathcal{O}\subset\Omega$. Logo, pelo teorema de Caroline Fabre de continuação única apresentado em [9], segue-se que

$$\psi(x,t) = 0 \ \text{ q.s. em } \ Q.$$

Note que ψ é uma solução fraca de (3.2), então da regularidade, conforme Teorema 2.1 de existência, tem-se

$$\psi \in C^0([0,T];H).$$

Assim, $\psi(x,T) = 0$. Portanto, de $(3.2)_1$ implica que $f = 0$ e o Teorema 3.1 está provado.

■

Observação 3.4. *Dado $T > 0$ seja $u^T \in H$. Como $R(T)$ é denso em H existe uma sequência $v_j \in (L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^n$ tal que as soluções fortes $u(.,T,v_j)$ de* (3.1) *converge para u^T forte em H. Logo, quando $j\to\infty$, temos*

$$u(.,T,v_j) \to u^T(.)$$

forte em H.

Diz-se, portanto, que se tem uma controlabilidade aproximada.

□

O próximo passo é a construção das $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$.

3.1 Construção da sequência $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em $\left(L^2(\mathcal{O}\times(0,T))\right)^n$

Constrói-se uma sequência $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ para cada $u^T \in H$ seguindo as idéias de Lions [29].

De fato, dado $u^T \in H$, deseja-se aproximar u^T por soluções de (3.1), isto é, quando variar $v \in (L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^n$ quer-se obter aproximações de u^T.

Note que, cada $v \in (L^2(\mathcal{O} \times (0,T)))^n$ representa os gastos do problema. Sendo o custo a soma de todos os gastos, tem-se que

$$\text{Custo} \to \frac{1}{2}|v|^2_{(L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^n}.$$

Quer-se obter custo mínimo de forma que o estado, $u(x,T,v)$, do sistema (3.1) fique o mais próximo possível do estado ideal u^T.

Isto motiva definir o funcional custo

$$J_k(v) = \frac{1}{2}|v|^2_{(L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^n} + \frac{k}{2}\left|u(.,T,v) - u^T(.)\right|^2_H, \tag{3.5}$$

onde u^T é dado, v varia em $(L^2(\mathcal{O} \times (0,T)))^n$ e $u(x,T,v)$ é uma solução forte de (3.1) associada a v com $u_0 = 0$.

Considere-se o seguinte problema de minimização:

$$\left|\begin{array}{l} \text{Min } J_k(v) \\ v \in (L^2(\mathcal{O} \times (0,T)))^n. \end{array}\right. \tag{3.6}$$

O $J_k(v)$ deve ter para cada $k \in \mathbb{N}$, as propriedades:

- Semicontínuo inferiormente;
- Coercivo;
- Estritamente convexo,

para que o problema (3.6) tenha uma única solução v_k.

Antes de mostrar que o funcional J_k satisfaz estas propriedades, note-se que

$$\begin{aligned} J_k(v+\lambda\xi) = {} & \frac{1}{2}\left(v+\lambda\xi, v+\lambda\xi\right)_{(L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^n} + \\ & \frac{k}{2}\left(u(.,T,v+\lambda\xi) - u^T(.), u(.,T,v+\lambda\xi) - u^T(.)\right)_H. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Por outro lado, para $v, \hat{v} \in (L^2(\mathcal{O} \times (0,T)))^n$ no lado direito de (3.1) tem-se $u(x,t,v)$ e $\hat{u}(x,t,\hat{v})$ soluções fortes de (3.1) com $u_0 = 0$, isto é,

$$\frac{\partial u(x,t,v)}{\partial t} - \mu\Delta u(x,t,v) + + \nabla p = v\chi_{\mathcal{O}}, \text{ q.s. em } Q$$

e

$$\frac{\partial \hat{u}(x,t,\hat{v})}{\partial t} - \mu\Delta \hat{u}(x,t,\hat{v}) + \nabla p = \hat{v}\chi_{\mathcal{O}}, \text{ q.s. em } Q$$

Somando-se e representando-se por $z = u(x,t,v) + \hat{u}(x,t,\widehat{v})$, tem-se que

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \mu\Delta z + 2\nabla p = [v + \hat{v}]\chi_{\mathcal{O}}, \text{ q.s. em } Q.$$

Assim $L(v + \hat{v}) = L(v) + L(\hat{v})$, e aliás, tem-se que $L(\beta v) = \beta L(v),\ \beta > 0$. Portanto a correspondência

$$L : \left(L^2(\mathcal{O} \times (0,T))\right)^n \to L^2(0,T;V)$$

dada por $Lv = u(.,.,v)$, onde u é a solução forte de (3.1) associada a v com $u_0(x) = 0.$, é linear.

Observação 3.5. *L é contínuo. Com efeito, seja $v_m \to v$ em $(L^2(\mathcal{O} \times (0,T)))^n$ quando $m \to \infty$, deve-se mostrar que $L(v_m) \to L(v)$ em $L^2(0,T;V)$.*

Considere-se as soluções fortes de (3.1) associadas a v_m e v respectivamente. Logo, representando-se por $z_m = u(x,t,v_m) - u(x,t,v)$, obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial t}z - \mu\Delta z + 2\nabla p = [v_m - v]\chi_{\mathcal{O}},\ \ q.s.\ em\ Q.$$

Daí, por uma estimativa, obtém-se

$$|u(.,t,v_m) - u(.,t,v)|_H^2 + \mu \int_0^t \|u(.,s,v_m) - u(.,s,v)\|_V^2 ds \leq$$
$$\int_0^T |v_m - v|_{L^2(\mathcal{O})}^2 ds + \int_0^t |u(.,s,v_m) - u(.,s,v)|_H^2 ds,$$

donde, pela desigualdade de Gronwall, obtém-se

$$|u(.,t,v_m) - u(.,t,v)|_H^2 + \mu \int_0^T \|u(.,s,v_m) - u(.,s,v)\|_V^2 ds \leq |v_m - v|_{(L^2(\mathcal{O})\times(0,T))^n}^2 e^T.$$

Como por hipótese $v_m \to v$ em $(L^2(\mathcal{O} \times (0,T)))^n$ quando $m \to \infty$, tem-se

$$L(v_m) \to L(v),\ \ quando\ \ m \to \infty,$$

forte em $L^2(0,T;V)$.

$\square$

Afirmação 01. J_k é semicontínuo inferiormente.

Demonstração: De fato, seja $v_m \to v$ forte em $(L^2(\mathcal{O} \times (0,T)))^n$. Então

$$v_m \rightharpoonup v \text{ fraco em } \left(L^2(\mathcal{O} \times (0,T))\right)^n. \tag{3.8}$$

Da Observação 3.5 segue-se que

$$u(.,T,v_m) \to u(.,T,v) \text{ forte em } V.$$

Como $V \subset H$ com imersão contínua, tem-se

$$u(.,T,v_m) \to u(.,T,v) \text{ forte em } H.$$

Em particular,

$$u(.,T,v_m) \rightharpoonup u(.,T,v) \text{ fraco em } H.$$

Logo,

$$u(.,T,v_m) - u^T(.) \rightharpoonup u(.,T,v) - u^T(.) \text{ fraco em } H. \tag{3.9}$$

De (3.8) e (3.9), tem-se que

$$\liminf_{m\to\infty} J_k(v_m) = \liminf_{m\to\infty} \left\{ \frac{1}{2}|v_m|^2_{(L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^n} + \frac{k}{2}\left|u(.,T,v_m) - u^T(.)\right|^2_H, \right\} \geq$$

$$\liminf_{m\to\infty} \left\{ \frac{1}{2}|v_m|^2_{(L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^n} \right\} + \liminf_{m\to\infty} \left\{ \frac{k}{2}\left|u(.,T,v_m) - u^T(.)\right|^2_H, \right\} \geq$$

$$\frac{1}{2}|v|^2_{(L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^n} + \frac{k}{2}\left|u(.,T,v) - u^T(.)\right|^2_H = J_k(v).$$

Então

$$\liminf_{m\to\infty} J_k(v_m) \geq J_k(v),$$

o que caracteriza a semicontinuidade inferior de J_k.

■

Afirmação 02. J_k é coercivo.

Demonstração: De fato, deve-se mostrar que

$$\liminf_{|v|^2_{H_\mathcal{O}}\to\infty} \frac{J_k(v)}{|v|_{H_\mathcal{O}}} = \infty,$$

onde $H_\mathcal{O} = (L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^n$.

De (3.5), tem-se

$$\frac{J_k(v)}{|v|_{H_\mathcal{O}}} = \frac{1}{2}|v|_{H_\mathcal{O}} + \frac{k}{2}\frac{|u(.,T,v) - u^T(.)|^2_H}{|v|_{H_\mathcal{O}}},$$

logo

$$\liminf_{|v|^2_{H_\mathcal{O}}\to\infty} \frac{J_k(v)}{|v|_{H_\mathcal{O}}} \geq \frac{1}{2}\liminf_{|v|^2_{H_\mathcal{O}}\to\infty} |v|_{H_\mathcal{O}} + \frac{k}{2}\liminf_{|v|_{H_\mathcal{O}}\to\infty} \frac{|u(.,T,v) - u^T(.)|^2_H}{|v|_{H_\mathcal{O}}}. \tag{3.10}$$

Como L é linear contínuo e $u^T \in H$ é dado, segue-se que

$$|L(v) - u^T(.)|_H = |u(.,T,v) - u^T(.)|_H$$

é limitado. Logo,

$$\frac{k}{2} \liminf_{|v|_{H_{\mathcal{O}}} \to \infty} \frac{|u(.,T,v) - u^T(.)|_H^2}{|v|_{H_{\mathcal{O}}}} = 0$$

para cada $k \in \mathbb{N}$.

Portanto, para cada $k \in \mathbb{N}$, segue-se, de (3.10), que

$$\liminf_{|v|^2_{H_{\mathcal{O}}} \to \infty} \frac{J_k(v)}{|v|_{H_{\mathcal{O}}}} = \infty.$$

Observação 3.6. *Derivada de Gateaux segundo o vetor $\xi \in (L^2(\mathcal{O} \times (0,T)))^n$.*

Por definição, a derivada de Gateaux é dada por

$$\langle J_k'(v), \xi \rangle = J_k'(v).\xi = \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} \left[J_k(v + \lambda\xi) - J_k(v) \right] = \frac{d}{d\lambda} J_k(v + \lambda\xi) \mid_{\lambda=0},$$

para $\lambda \neq 0$.

De (3.7), tem-se

$$\begin{aligned} J_k(v + \lambda\xi) = & \frac{1}{2} \left(v + \lambda\xi, v + \lambda\xi \right)_{(L^2(\mathcal{O} \times (0,T)))^n} + \\ & \frac{k}{2} \left(L(v + \lambda\xi) - u^T(.), L(v + \lambda\xi) - u^T(.) \right)_H . \end{aligned} \tag{3.11}$$

Tomando a derivada de $J_k(v + \lambda\xi)$ com respeito a λ, em (3.11), obtém-se para $\lambda = 0$:

$$\frac{d}{d\lambda} J_k(v + \lambda\xi) \mid_{\lambda=0} = (v, \xi)_{(L^2(\mathcal{O} \times (0,T)))^n} + k(Lv - u^T(.), L\xi)_H$$

<u>Cálculo</u>

Observe que $\dfrac{d}{d\lambda} L = L \dfrac{d}{d\lambda}$ pela linearidade de L. Então

$$\frac{d}{d\lambda} \left[\frac{k}{2} \left(L(v + \lambda\xi) - u^T(.), L(v + \lambda\xi) - u^T(.) \right)_H \right]_{\lambda=0} =$$

$$\left[\frac{k}{2} \left(L\xi, L(v + \lambda\xi) - u^T(.) \right)_H + \frac{k}{2} \left(L(v + \lambda\xi) - u^T(.), L\xi \right)_H \right]_{\lambda=0} =$$

$$\frac{k}{2} \left[\left(L(v + \lambda\xi) - u^T(.), L\xi \right)_H + \left(L\xi, L(v + \lambda\xi) - u^T(.) \right)_H \right]_{\lambda=0} =$$

$$k \left(L(v) - u^T(.), L\xi \right)_H .$$

$\square$

Da Observação 3.6, tem-se

$$J_k'(v).\xi = (v,\xi)_{(L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^n} + k(Lv - u^T(.), L\xi)_H, \tag{3.12}$$

para todo $\xi \in (L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^n$.

■

Afirmação 03. Para cada $k \in \mathbb{N}$, J_k é estritamente convexo.

Demonstração: Deve-se mostrar, para cada $0 \leq \lambda \leq 1$, que

$$J_k(\lambda v + (1-\lambda)\xi) < \lambda J(v) + (1-\lambda)J_k(\xi),$$

para $\xi \neq v$.

De fato, como $|v|_{(L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^n}$ é uma norma em $(L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^n$, tem-se que

$$\frac{1}{2}|\lambda v + (1-\lambda)\xi|^2_{(L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^n} < \frac{\lambda}{2}|v|^2_{(L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^n} + \frac{(1-\lambda)}{2}|\xi|^2_{(L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^n}.$$

Portanto, se $\mathcal{T}_k$ é o funcional dado por $\mathcal{T}_k(v) = \dfrac{1}{2}|v|^2_{L^2(\mathcal{O}\times(0,T))}$, segue-se que

$$\mathcal{T}_k(\lambda v + (1-\lambda)\xi) < \lambda \mathcal{T}_k(v) + (1-\lambda)\mathcal{T}_k(\xi). \tag{3.13}$$

Por outro lado, considere o funcional $\tilde{J}_k(v)$ definido por $\tilde{J}_k(v) = \frac{k}{2}|u(.,T,v) - u^T(.)|^2_H$. Logo, de (3.12) tem-se

$$\frac{d}{d\rho}\tilde{J}_k(v+\rho\xi)\mid_{\rho=0} = k\left(Lv - u^T(.), L\xi\right)_H. \tag{3.14}$$

Como

$$\tilde{J}_k(v) = \frac{k}{2}\left(Lv - u^T(.), Lv - u^T(.)\right)_H$$

, temos

$$\tilde{J}_k(v+\xi) = \frac{k}{2}(L(v+\xi) - u^T(.), L(v+\xi) - u^T(.))_H = \frac{k}{2}\left(Lv + L\xi - u^T(.), Lv + L\xi - u^T(.)\right)_H,$$

segue-se que

$$\tilde{J}_k(v+\xi) - \tilde{J}_k(v) = \frac{k}{2}\left(Lv - u^T + L\xi, Lv - u^T + L\xi\right)_H - \frac{k}{2}(Lv - u^T(.), Lv - u^T(.))_H =$$

$$\frac{k}{2}|L\xi|^2_H + k\left(Lv - u^T, L\xi\right)_H \geq k\left(Lv - u^T, L\xi\right)_H = \frac{d}{d\rho}\tilde{J}_k(v+\rho\xi)\mid_{\rho=0}.$$

Portanto,

$$\tilde{J}_k(v+\xi) - \tilde{J}_k(v) \geq \frac{d}{d\rho}\tilde{J}_k(v+\rho\xi)\mid_{\rho=0}. \tag{3.15}$$

Observação 3.7. *A desigualdade* (3.15) *garante que* $\tilde{J}_k$ *é convexo. De fato, para todo* $v, \xi \in \left(L^2(\mathcal{O} \times (0,T))\right)^n$ *e* $\lambda \in [0,1]$ *seja* $w = \lambda v + (1-\lambda)\xi$*. Portanto*

$$\frac{d}{d\rho}\tilde{J}_k(v + \rho h_1) \mid_{\rho=0} \leq \tilde{J}_k(\xi) - \tilde{J}_k(w)$$

e

$$\frac{d}{d\rho}\tilde{J}_k(v + \rho h_2) \mid_{\rho=0} \leq \tilde{J}_k(v) - \tilde{J}_k(w),$$

onde $h_1 = \lambda(\xi - v)$ *e* $h_2 = (1-\lambda)(v - \xi)$.

Assim,

$$\frac{1}{\lambda}\left[\tilde{J}_k(\xi) - \tilde{J}_k(w)\right] \geq \frac{d}{d\rho}\tilde{J}_k(w + \rho(\xi - v)) \mid_{\rho=0} \geq \frac{1}{1-\lambda}\left[\tilde{J}_k(w) - \tilde{J}_k(v)\right],$$

donde

$$\tilde{J}_k(w) \leq \lambda\tilde{J}_k(v) + (1-\lambda)\tilde{J}_k(\xi).$$

□

Como, $J_k(v) = \mathcal{T}_k(v) + \tilde{J}_k(v)$, tem-se de (3.13) e da Observação 3.7 que, para todo $v, \xi \in \left(L^2(\mathcal{O} \times (0,T))\right)^n$ e $\lambda \in [0,1]$

$$J_k(\lambda v + (1-\lambda)\xi) < \lambda J_k(v) + (1-\lambda)J_k(\xi).$$

O que prova a afirmação.

■

Assim, do que foi provado acima, segue-se, para cada $k \in \mathbb{N}$, que existe uma solução v_k de (3.6).

Portanto, conclui-se que, se v_k é a única solução do problema de minimização (3.6), ela é uma solução da equação de Euler-Lagrange $J'_k(v_k).\xi = 0$ para todo $\xi \in \left(L^2(\mathcal{O} \times (0,T))\right)^n$. Isto é,

$$(v_k, \xi)_{(L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^n} + k\left(u(.,T,v_k) - u^T, u(.,T,\xi)\right)_H = 0 \tag{3.16}$$

para todo $\xi \in \left(L^2(\mathcal{O} \times (0,T))\right)^n$, conforme (3.12).

O próximo passo agora é mostrar que a sequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $u_k(x,T) = u(x,T,v_k)$ pertencente a $V \subset H$ é tal que

$$u_k \longrightarrow u^T \text{ forte em } H.$$

Como v_k é mínimo, tem-se que

$$J_k(v_k) \leq J_k(0) = \frac{k}{2}|u^T(.)|_H,$$

pois (3.1) tem uma única solução para v_k, $k \in \mathbb{N}$, e $v = 0$ no lado direito de (3.1) com $u_0 = 0$ tem uma única solução $u = 0$. Como

$$J_k(v_k) = \frac{1}{2}|v_k|^2_{(L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^n} + \frac{k}{2}|u(.,T,v_k) - u^T(.)|^2_H,$$

tem-se que

$$\frac{1}{k}|v_k|^2_{(L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^n} + |u(.,T,v_k) - u^T(.)|^2_H \leq |u^T(.)|^2_H. \tag{3.17}$$

Logo de (3.17) tem-se:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{k}}v_k\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } \left(L^2(\mathcal{O}\times(0,T))\right)^n \tag{3.18}$$

$$\left(u(.,T,v_k) - u^T(.)\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } H. \tag{3.19}$$

Portanto, existe uma subsequência, ainda denotada por $u(.,T,v_k)$, tal que

$$u(.,T,v_k) - u^T(.) \rightharpoonup \phi \quad \text{fraco em } H. \tag{3.20}$$

Da equação de Euler (3.16) obtém-se:

$$\frac{1}{k}(v_k,\xi)_{(L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^n} + \left(u_k(.,T) - u^T(.), u(.,T,\xi)\right)_H = 0 \tag{3.21}$$

para todo $\xi \in (L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^n$ e $k \in \mathbb{N}$.

Note-se, de (3.18), que

$$\frac{1}{k}|(v_k,\xi)_{(L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^n}| \leq \frac{1}{\sqrt{k}}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}|v_k|_{(L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^n}\right)|\xi|_{(L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^n} \leq$$
$$\frac{C}{\sqrt{k}}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}|\xi|_{(L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^n}\right),$$

converge para zero, quando $k \to \infty$, para todo $\xi \in (L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^n$.

Além disso, como

$$\left(u(.,T,v_k) - u^T(.), u(.,T,\xi)\right)_H \longrightarrow (\phi, u(.,T,\xi))_H$$

quando $k \to \infty$, tem-se que

$$(\phi, u(.,T,\xi))_H = 0$$

para todo $\xi \in (L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^n$.

Por outro lado, da densidade de $R(T)$ em H, segue-se que

$$(\phi, h)_H = 0$$

para todo $h \in H$. Logo,

$$\phi = 0,$$

donde, de (3.20), segue-se

$$u(.,T,v_k) \rightharpoonup u^T(.) \text{ fraco em } H.$$

Prova-se agora, que esta convergência é de fato, forte em H.

Com efeito, quando v varia em $(L^2(\mathcal{O} \times (0,T)))^n$ a família $u(x,T,v)$ de soluções fortes de (3.1) com $u_0 = 0$ é denso em H. Portanto, para todo $\varepsilon > 0$, seja $\hat{v} \in (L^2(\mathcal{O} \times (0,T)))^n$ a correspondente solução $u(x,T,\hat{v})$ que satisfaz

$$|u(.,T,\hat{v}) - u^T(.)|_H < \varepsilon. \tag{3.22}$$

Do problema (3.6), tem-se

$$J_k(v_k) \leq J_k(\hat{v}),$$

donde segue-se que

$$\frac{1}{2}|v_k|^2_{(L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^n} + \frac{k}{2}|u(.,T,v_k) - u^T(.)|^2_H \leq \frac{1}{2}|\hat{v}|^2_{(L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^n} + \frac{k}{2}|u(.,T,\widehat{v}) - u^T(.)|^2_H.$$

Dividindo por $\frac{k}{2}$ segue-se

$$0 < |u(.,T,v_k) - u^T(.)|^2_H \leq \frac{1}{k}|v_k|^2_{(L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^n} + |u(.,T,v_k) - u^T(.)|^2_H \leq$$
$$\frac{1}{k}|\hat{v}|^2_{(L^2(\mathcal{O}\times(0,T)))^n} + |u(.,T,\hat{v}) - u^T(.)|^2_H,$$

logo, de (3.22) tem-se que

$$\lim_{k\to\infty} |u(.,T,v_k) - u^T(.)|^2_H = 0,$$

quando $k \to \infty$. Provando que

$$u(.,T,v_k) \to u^T(.) \text{ forte em } H.$$

$\square$

Capítulo 4

Apêndice

Neste apêndice apresentaremos alguns resultados básicos que achamos pertinentes para seguimento deste trabalho. Para alguns não apresentaremos a demonstração, apenas citaremos a referência de onde se encontra.

Com efeito, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \{u \in \mathbf{D}(\Omega), div(u) = 0\}, \\ H &= \text{o fecho de } \mathcal{V} \text{ em } \mathbf{L}^2(\Omega), \\ V &= \text{o fecho de } \mathcal{V} \text{ em } \mathbf{H}_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Considera-se Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ e p uma distribuição sobre Ω, $p \in D'(\Omega)$. Logo, para algum $\nu \in \mathcal{V}$, temos

$$< grad(p), \nu >= \sum_{i=1}^{n} < D_i p, \nu_i >= - \sum_{i=1}^{n} < p, D_i \nu_i >= - < p, div(\nu) >= 0, \tag{4.1}$$

porque, $\nu \in \mathcal{V}$.

Nota-se também que a recíproca desse resultado é verdadeira, isto é,

Proposição 4.1. *Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ e $f = \{f_1, \cdots, f_n\}$, $f_i \in D'(\Omega)$, $i = 1, 2, \cdots, n$. Uma condição necessária e suficiente para*

$$f = grad(p), \; p \in D'(\Omega)$$

é que

$$< f, \nu >= 0, \quad \forall \; \nu \in \mathcal{V}.$$

Este resultado foi provado por De Rham em [52]. Em situações práticas ele é muito importante, pois, graças a este, pode-se recuperar a pressão nas equações de Navier-Stokes.

Apesar da Proposição 4.1 ser uma boa forma de caracterizar a gradiente da pressão, deve-se obter mais propriedades para fins práticos. De fato, seja

$$L_0^2(\Omega) := \left\{ p \in L^2(\Omega), \quad \int_\Omega p(x)dx = 0 \right\},$$

as seguintes proposição dão características melhores para a pressão.

Proposição 4.2. *Seja Ω uma aberto limitado Lipschitziano do $\mathbb{R}^n$.*

(i) Se a distribuição p tem todas as derivadas de primeira ordem $D_i p$, $1 \leq i \leq n$, em $L^2(\Omega)$, então $p \in L^2(\Omega)$ e

$$||p||_{L_0^2(\Omega)} \leq c(\Omega)||grad(p)||_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}. \tag{4.2}$$

(ii) Se a distribuição p tem todas as derivadas de primeira ordem $D_i p$, $1 \leq i \leq n$, em $H^{-1}(\Omega)$, então $p \in L^2(\Omega)$ e

$$||p||_{L_0^2(\Omega)} \leq c(\Omega)||grad(p)||_{\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)}. \tag{4.3}$$

(iii) Em ambos os casos, se Ω é apenas um aberto do $\mathbb{R}^n$, $p \in L^2_{loc}(\Omega)$.

Demonstração: Veja Temam [52]. ■

Observação 4.1. *Seja Ω apenas um aberto do $\mathbb{R}^n$, então, combinando as proposições* 4.1 *e* 4.2*, vemos que, se $f \in \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)$ (ou $f \in \boldsymbol{L}^2_{loc}(\Omega)$) e $(f, \nu) = 0, \quad \forall\, \nu \in \mathcal{V}$, então $f = grad(p)$ com $p \in L^2_{loc}(\Omega)$. Entretanto, se Ω for um aberto limitado Lipschitziano, então $p \in L^2(\Omega)$ (ou $p \in H^1(\Omega)$).*

Observação 4.2. *A parte (ii) da proposição* 4.2 *implica que o operador gradiente é um isomorfismo de $L_0^2(\Omega)$ em $H^{-1}(\Omega)$; portanto a imagem desse operador linear é fechada.*

Denotaremos o expoente de Sobolev por α para que não haja confusão com a pressão p.

Proposição 4.3. *Sejam Ω um aberto limitado de classe C^r, $\quad r = max(m+2, 2)$, m inteiro positivo. Vamos supor que*

$$u \in \boldsymbol{W}^{2,\alpha}(\Omega), \quad p \in W^{1,\alpha}(\Omega), \quad 1 < \alpha < \infty,$$

são soluções do problema de Stokes:

$$\left| \begin{array}{l} -\eta\Delta(u) + grad(p) = f \quad em \quad \Omega \\ div(u) = g \quad em \quad \Omega \\ \gamma_0 u = \phi \quad isto\ é \quad u = \phi \quad sobre \quad \Gamma. \end{array} \right.$$

Se $f \in \boldsymbol{W}^{m,\alpha}(\Omega),\ g \in \boldsymbol{W}^{m+1,\alpha}(\Omega)$ *e* $\phi \in \boldsymbol{W}^{m+2-\frac{1}{\alpha},\alpha}(\Gamma)$, *então*

$$u \in \boldsymbol{W}^{m+2,\alpha}(\Omega),\ p \in \boldsymbol{W}^{m+1,\alpha}(\Omega)$$

e existe uma constante $c_0(\alpha, \nu, m, \Omega)$ *tal que*

$$\begin{aligned} &||u||_{\boldsymbol{W}^{m+2,\alpha}(\Omega)} + ||p||_{\boldsymbol{W}^{m+1,\alpha}(\Omega)\backslash\mathbb{R}} \leq \\ &\leq c_0\big\{||f||_{\boldsymbol{W}^{m,\alpha}(\Omega)} + ||g||_{\boldsymbol{W}^{m+1,\alpha}(\Omega)} + \\ &+||\phi||_{\boldsymbol{W}^{m+2-\frac{1}{\alpha},\alpha}(\Gamma)} + d_\alpha ||u||_{\boldsymbol{L}^{\alpha}(\Omega)}\big\}, \end{aligned}$$

onde $d_\alpha = 0$ *para* $\alpha \geq 2$, $d_\alpha = 1$ *para* $1 < \alpha < 2$ *e* $\boldsymbol{W}^{m+2-\frac{1}{\alpha},\alpha}(\Gamma) = \gamma_0 \boldsymbol{W}^{m+2,\alpha}(\Omega)$ *está equipado com a norma*

$$||\psi||_{\boldsymbol{W}^{m+2-\frac{1}{\alpha},\alpha}(\Gamma)} = \inf_{\gamma_0 u = \psi} ||u||_{\boldsymbol{W}^{m+2,\alpha}(\Omega)}.$$

Observação 4.3. *Faz-se notar que a Proposição* 4.3 *não é um teorema de existência para uma solução regular* (u, p) *do problema de Stokes, ela dar somente um resultado sobre a regularidade de uma eventual solução.*

Bibliografia

[1] Astarita, G. and Marruci, G. Principles of non-Newtonian fluid mechanics. McGraw-Hill, 1974.

[2] Batchelor, G.K. An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press, ISBN 0521663962

[3] Bland, D.R. The theory of linear viscoelasticity. Pergamon Press,Oxford, 1960.

[4] Brezis, H. Analisis funcional Teoria y aplicaciones. Alianza editorial, 1983.

[5] Cavalluci, A. Sulle proprieta differenziali delle soluzioni delle equazioni quasi-ellitiche, Ann. Mat. Pura Appl. 4(1965) 143-168.

[6] Clifford Ambrose Truesdell- A first course in rational continuum mechanics, Vol. I(Part 1), Academic Press, 1977; Vols. II(Parts 2,3), III(Parts 4-6)(to appear); French transl. of Parts 1-4, Masson, Paris, 1973; Russian transl. of Parts 1-5, "Mir", Moscow, 1975.

[7] Duvaut, G. and Lions, J.L. Les inequations en mechanique et en physique. Dunod, Paris 1972; English transl., Springer-Verlag, 1976.

[8] Ebehard Hopf. Uber die Anfangswertaufgabe fur die hydrodynamischen Grundgleichungen. Math. 4(1951), 213-251.

[9] Ebehard Hopf. Statical hydromechanics and functional calculus. J.Rational Mech. Anal. 1(1952), 87-123.

[10] Fabre, C. Uniqueness results for Stokes equations and their consequences in linear and nonlinear control problems. ESAIM:COCV, 1(1996), 267-302.

[11] Fabre, C. and Lebeau, G. Prolongemente unique des solutions de l'equation de stokes. Communications in Partial Differential Equations, 21(3&4), 573-596(1996).

[12] Fabre,C. and Puel, J.P. and Zuazua, E. Approximated controllability of the semilinear heat equations, Proc. Roy. Soc. Edimburg, Set. A., 125, 31-61, 1995.

[13] Fernández, L.A. and Zuazua, E. Approximate controllabillity for the semilinear heat equation involving gradiente terms. Prepint 2-1997, Departament of Mathematics, University of Cantabria, Spain.

[14] James Clerk Maxwell. On the dynamical theory of gases. Philos. Trans. Roy. Soc. London 157(1868), 35(1867), 49-88.

[15] James Clerk Maxwell. On the dynamical theory of gases.Philos. Magazine 129-145[Reprint of the first half of [14]].

[16] James Serrin. Mathematical principles of classical fluid mechanics. Handbuch der Physik, Vol. 8/1, Springer-Verlag, 1959, pp. 125-263.

[17] Jean Leray. Étude sur les diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problémes quipose l'hydrodynamique. J. Math. Pures Appl. (9)12(1933), 1-82.

[18] Jean Leray. Essay sur les mouvements plans d'un liquide visceux que limitent des parois. J. Math. Pures Appl. (9)13(1934), 331-418.

[19] Jean Leray. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'space. Acta Math. 63(1934), 193-248.

[20] Jean Leray and Jules schauder. Topologie et équations fonctionnelles. Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) 51 (1934), 45-78.

[21] Kelvin(Thomson) W. On the theory viscoelastic fluids. Math. a. Phys. Pap. 1875. Vol. 3. P. 27-84.

[22] Kim, J. Uhm. Control of Second-Order integro-differential equation. Siam J. Control and Optimization, Vol. 31, No. 1, pp. 101-110, January 1993.

[23] Ladyzhenskaya, O.A. Mathematical problems inthe dynamics of a viscous incompressible mathematical theory of viscous incompressible flow. Gordon and Breach, New York, 1963; rev. 1969.

[24] Ladyzhenskaya, O.A. Matthematical Analysis of the Navier-Stokes equations for incompressible liquids. Ann. Rev. Fluid Mech. vol. 7(M. van Dyke et al., editors), Ann. Rev., Inc., Palo Alto, Calif., 1975, pp. 249-272.

[25] Lions, J.L. Equations Differenhelles Operationelles dans des Espaces de Hilbert. CIME, Verena 1963.

[26] Lions, J.L. Hierarchic Control. Proc. Indian Acad. Sci.(Math. Sci.), Vol 104 No. 1, February 1994, pp. 295-304.

[27] Lions,J.L. and Díaz, J.I. On the approximate controllability of Stackelberg-Nash strategies. Ocean Circulation and Pollution Control- A Mathematical and Numerical Investigation, A Diderot Mathematical Forum, August 2005, pp. 17-27.

[28] Lions, J.L. Quelques Méthodes de Résolution des Problémes aux Limites Non Linéaires. Dunod, Paris, 1969(Nouvelle Présentation Dunod 2002).

[29] Lions, J.L. Remarques sur la controlabilite approchee. Jornadas Hispnao-Francesas sobre Control de Sistemas Distribuidos, Octubre 1990.

[30] Lions, J.L. Some Methods in the Mathematical Analysis of System and their Control. Science Press and Gordon and Breach, 1981.

[31] Lions, J.L. Some Remarks on Stackelberg's Optimization. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Vol 4, No. 4(1994), pp. 477-487.

[32] Límaco, J. and Medeiros, L.A. Remarks on approximate controllability in noncylindrical domains. Eletronic Journal of qualitative Theory of Differential Equations, 2003. n. 16. pp. 1-32

[33] Luc Tartar. Partial Diferential Equations. Models in Oceanography. Carnegie Mellon University, 1999.

[34] Mizohata, S. Unicité du prolongement des solutions pour quelques opérateurs différentiels paraboliques. Mem. Coll. Sc. Univ. Kyoto Ser. A31(1958) 219-239.

[35] Oldroyd, J.G. Non-Newtonian flow of liquids and solids, Rheology: Theory and Applications. Vol. 1(F.R. Eirich Editor), Academic Press, 1959, pp. 653-682.

[36] Oldroyd, J.G. On the formulation of rheological equations of state. Proc. Roy. Soc. London Ser. A200(1950), 253-541.

[37] Oldroyd, J.G. The elastic and viscous proprieties of emulsions and suspensions. Proc. Roy. Soc. London Ser. A218(1953), 122-132.

[38] Oldroyd, J.G. Non-linear stress, rate of strain relations at finite rates of shear in so-called linear elastico-viscous liquids, Second-order Effects in Elasticity, Plasticity and Fluid Dynamics (Internat. Sympos., Haifa, 1962; M. Reiner and D. Abir Editors). Jerusalem Academic Press, Jerusalem, and Pergamon Press, Oxford, 1964, pp. 520-529.

[39] Oskolkov, A.P. initial boundary value problems for the equations of motion of Kelvin-Voigt fluids and Oldroyd fluids. Proc. of the Steklov, Institute of Mathematics, 1989, Issue 2.

[40] Oskolkov, A.P. Initial boundary value problems for the equations of motion of Kelvin-Voigt fluids and Oldroyd fluids. Proc. of the Steklov, Institute of Mathematics, 1989, Issue 2.

[41] Oskolkov, A.P. and Akhmatov, M.M. Convergent difference schemes for equations of motion of oldroyd fluids. J. Sov. Math. 2, No. 4 (1974).

[42] Oskolkov, A.P. and Kotsiolis, A.A. Solvability of the basic initial boundary problem for the equations of motion of an Oldroyd fluid on $(0, \infty)$ and the behavior of its solutions as $t \to \infty$. Inst. V. A. Steklova AN SSSR, Vol. 150, pp. 48-52, 1986.

[43] Oskolkov, A.P., Karazeeva, N.A and Kotsiolis, A.A. Dynamical system generated by the equations of motion of an Oldroyd fluid of order L. Inst. V. A. Steklova AN SSSR, Vol. 164, pp. 47-53, 1987.

[44] Pani, A.K., Jin Yun Yuan and Pedro D. Damazio. On a linearized backward euler method for the equations of motion of Oldroyd fluids of order one. Siam J. Numer. Anal. Vol. 44, No. 2, pp. 804-825.

[45] Raymond, X. S. Elemntary Introduction to the Theory of Pseudodifferential Operators. CRC Press, London 1991.

[46] Rockafellar, R. Tyrrell. Duality and stability in extremum problems involving convex functions. Pacific Journal Mathematic, 21(1967), 167-187.

[47] Saut, J.C. and Scheurer, B. Unique continuation for some Evolution Equations. J. Differential Equations 66(1987) 118-139.

[48] Silvano Bezerra de Menezes- Approximate controllability for the semilinear heat equation in $\mathbb{R}^n$ involving gradiente terms. Comp. and Applied Mathematics, Vol. 22, N.1, pp. 123-148, 2003.

[49] Solimá Gomes Pimentel- Controlabilidade aproximada para um sistema acoplado de equações semilineares do calor, Tese de Doutorado em Matemática, IM-UFRJ, T1101, P6445c, 2002.

[50] Sobolev, S.L. Applications of functional analysis in mathematical physiscs. Izdat. Leningrad. Gos. Univ. Leningrad, 1950; English translate.

[51] Stackelberg, H. Von. Markform und Gleichgewicht. Springer, 1934.

[52] Temam, R. Navier-Stokes Equations vol 2. North-Holland 1979.

[53] Temam, R. and Ekeland, I. Analyse convexe et problémes variationnelles. Dunod, Gautier Villars 1974.

[54] Vinogradov, G.V. and Malkin, A. Yah. Rheology of Polimers. Khimiya, Moscow, 1977; English Transl., Springer-Verlag, 1981.

[55] Voigt, W. Uber die innere Reinbung der festen Korper, insbessondere der Krystalle. Abh. Konigl. Ges. Wiss. Gottingen 36(1889), no. 1.

[56] Voigt, W. Uber innere fester Korper, insbessondere der Metalle. Ann. Phys. und Chen. 283(Neue Folge 47)(1892), 671-693.

[57] Walters, K. Non-Newtonian effects in some general elastico-viscous, Second order Eefects in elasticity, plasticity and fluid dynamics(Internat. Sympos. Haifa, 1962; M. Reider and D. Abir, editors), Jerusalem Academic Press, Jerusalem, and Pergamon Press, Oxford, 1964, pp. 507-519.

[58] Wilkinson, W.L. Non-Newtonian fluids. Pergamon Press, Oxford, 1960.

[59] Zuazua, E. Finite Dimensional Null Controllability for the Semilinear heat Equation. J. Math. Pures Appl., 76, 1997, pp. 237-264.