Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

ESTIMATIVAS DE AUTOVALOR EM VARIEDADE RIEMANNIANA COMPLETA NÃO COMPACTA E APLICAÇÕES

José Venâncio de Deus Leão

Teresina - 2010

José Venâncio de Deus Leão

Dissertação de Mestrado:

Estimativas de Autovalor em Variedade Riemanniana Completa Não Compacta e Aplicações

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Barnabé Pessoa Lima

Teresina - 2010

Estimativas de Autovalor em Variedade Riemanniana Completa Não Compacta e Aplicações

José Venâncio de Deus Leão

Dissertação submetida à Comissão de Pós-gradução em Matemática da Universidade Federal do Piauí, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

____

Barnabé Pessoa Lima (Orientador).
Professor Adjunto do DM/CCN-UFPI

___________________________-

Dr. Newton Luis Santos
Professor Adjunto do DM/CCN-UFPI

___________________________-

Dr. José Fábio Bezerra Montenegro
Professor Adjunto do DM/UFC

___________________________-

Dr. Paulo Alexandre de Araújo Sousa(Suplente)
Professor Adjunto do DM/CCN-UFPI

Teresina - 2010

Leão, J. V. D.

xxxx Estimativas de Autovalor em uma Variedade Riemanniana Completa Não Compacta e Aplicações .

José Venâncio de Deus Leão – Teresina: 2010.

Orientador: Prof. Barnabé Pessoa Lima.

Geometria Diferencial

CDD 516.36

Dedico este trabalho aos meus pais, Raimundo Nonato Leão e Antonia Maria de Deus Leão, e minha irmã Patrícia.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me proporcionado esse grande momento da minha vida.

Aos meus pais que apesar de todas as dificuldades me proporcianaram o prazer dos estudos. A minha irmã pela amizade e pelo apoio principalmente nesses dois últimos anos.

A tia Zita, por ter mim levado para morar em sua casa, onde vivi mais de 17 anos, onde eu tive o prazer dos estudos e até hoje me tem como um filho. Ao meu padrinho, primo, irmão e amigo, Americo Abreu, pelo apoio e pela a amizade.

Aos minhas tias, Nazaré, Isabel, Graça, por estarem sempre do meu lado, principalmente nas horas que eu mais preciso. Ao meu tio\pai, Elias Leão, pelos conselhos e pelas "lorotas". As minhas primas\tias, Amparo e Ana Alice, por ter me recebido tão bem em suas casas, onde morei um bom tempo.

Ao todos os meus primos, Enoque (Sobrinho), Luan, Eduardo, Verônica, João, Elizabete, Mônica, Lucas, Rafael, Felipe, Victor, Bárbara, Afonso, Luna, Marina, Elias Neto, Nilmar, Emannuel, pela amizade e pelas horas de lazer. Enfim, agradeço a toda minha família que sempre estão ao meu lado.

Ao Prof. Barnabé Pessoa Lima, pela amizade, pela dedicação e principalmente por ter me orientado nesses últimos dois anos. Ao Prof. Dr. Newton pela correções, pelas dicas e por ter aceito participar da minha banca. Ao Prof. Dr. Fábio Montenegro por ter aceito participar da minha banca.

Aos professores, João Xavier, Marcondes, Mário Gomes, Roger, Jurandir, Paulo Alexandre, Juscelino, enfim a todos do departamento de mátematica da UFPI, pelos ensinamentos e pela a amizade.

Aos meus amigos de mestrado, Daniel, Ítalo, Domingos, João Santos, Gilberto, Arimatéa, Pedro Jorge, Cleiton, João Carlos e Renan, pelo companheirismo e pelas horas de estudo. Aos meus amigos de graduação, Wilsom, Raimundo Nonato, Djavam, pelo apoio deste o começo da graduação.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

"*Segura nas mãos de Deus e vai ...*".

Resumo

Neste trabalho apresentaremos estimativas do primeiro autovalor para os operadores laplaciano e p-laplaciano em regiões complementares à compactos em variedades riemanniana aberta.

Abstract

In this paper we present estimates of the first eigenvalue for operators laplacian and p-laplacian complementary regions in the compact varieties in Riemannian open.

Sumário

Agradecimentos **ii**

Resumo **v**

Abstract **vi**

1 Preliminares **4**

1.1 Curvaturas 4

1.2 Gradiente, Divergente, Laplaciano e Hessiano 7

1.3 Espaços Sobolev 13

2 Teorema da Oscilação **14**

3 Estimativas de Autovalor **21**

4 Algumas Aplicações **33**

5 Estimativa do autovalor do p-Laplaciano **37**

Referências Bibliográficas **45**

Introdução

Seja M uma variedade riemanniana n-dimensional e Δ o operador laplaciano em M. Denotamos por $\lambda_1(D)$ o primeiro autovalor de Δ algum domínio limitado aberto em $D \subset M$ com condições de Dirichlet e o definimos como o menor λ que satisfaz

$$\Delta u + \lambda u = 0$$

para alguma função não nula u em D com $u|_{\partial D} = 0$. O primeiro autovalor em M é definido por

$$\lambda_1(M) = \inf\{\lambda_1(D);\ D \subset M; \, D \text{ é um domínio limitado aberto }\}.$$

Estudos envolvendo condições geométrical associadas a esse autovalor vem se desenvolvendo na Geometria Diferencial a bastante tempo. Por exemplo, em 1975, Cheng e Yau (Cheng, S. Y., e Yau, S. T., [7]) mostrou que o primeiro autovalor do laplaciano em M é igual a zero se a variedade possui volume de crescimento polinomial. Esse trabalho tem como objetivo principal o estudo da estimativa do primeiro autovalor do operador laplaciano Δ no complementar de um conjunto compacto em uma variedade riemanniana M.

No capítulo 2 vamos tratar o Teorema da Oscilação e em seguida no capítulo 3 estudaremos o seguinte teorema provado por Do Carmo e Zhou:

Teorema 0.1. *Seja M uma variedade riemanniana completa não compacta com volume infinito e Ω um subconjunto compacto em M. Então*

1. *Se $V(B(r)) \leqslant Cr^{a}$ para qualquer $r \geqslant r_0$ e certas constantes positivas C, r_0 e a, então $\lambda_1(M \backslash \Omega) = 0$.*

2. *Se $V(B(r)) \leqslant Ce^{ar}$ para qualquer $r \geqslant 0$ e certas constantes positivas C e a, então $\lambda_1(M \backslash \Omega) \leqslant \dfrac{a^2}{4}$.*

No capítulo 4 faremos algumas aplicações deste teorema. Como por exemplo, vamos trabalhar com os seguintes teoremas provados por Do Carmo e Zhou:

Teorema 0.2. *Seja* $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ *uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana completa com volume infinito em uma variedade riemanniana completa orientada. Assumimos que* x *tem curvatura média constante H,* $\text{ind}M < +\infty$ *e o volume em* M *tem crescimento sub-exponencial. Então existe uma constante positiva* $r_0 > 0$ *tal que para todo* $r > r_0$*, tem-se*

$$H^2 \leqslant -\frac{1}{n} \inf_{(M \setminus B(r))} \overline{\text{Ric}}(N)$$

Teorema 0.3. *Seja* $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ *uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana completa com volume infinito em uma variedade riemanniana completa orientada. Assumimos que x tem curvatura média constante H,* $\text{ind } M < +\infty$ *e o volume em M satisfaz* $\text{Vol}(B(r)) \leqslant Ce^{ar}$ *com* $r \geqslant 0$ *e certas constantes C e a. Então existe uma constante positiva* $r_0 > 0$ *tal que para todo* $r > r_0$*, tem-se*

$$H^2 \leqslant \frac{a^2}{4n} - \frac{1}{n} \inf_{(M \setminus B(r))} \overline{\text{Ric}}(N) \tag{1}$$

Em particular, se $\overline{\text{Ric}}(N) \geqslant \frac{a^2}{4}$*, então M é mínima. Se* $\text{Ric}_M \geqslant -(n-1)K^2$ *fora de um conjunto compacto, então*

$$H^2 \leqslant \frac{(n-1)^2K^2}{4n} - \frac{1}{n} \inf_{(M \setminus B(r))} \overline{\text{Ric}}(N)$$

No capítulo 5 vamos trabalhar com o operador p-Laplaciano em variedades que é dado por:

$$\Delta_p u = div\ (|\nabla u|^{p-2} \nabla u),\ p \in (1, \infty) \tag{2}$$

onde u é uma função suficientemente regular.

Para $p \neq 2$, o operador Δ_p tem aparecido em vários outras aplicações físico, relacionados a dinâmica do fluídos, a tensão de cisalhamento $\overrightarrow{\tau}$ e o gradiente de velocidade ∇u do fluido são relacionado de modo que $\overrightarrow{\tau} = r(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u$, onde $p = 2$ (respectivamente, $p < 2$, $p > 2$) se o fluido é newtoniano (respectivamente, pseudoplástico, dilatante).

Seja M uma variedade riemanniana aberta (isto é, completa e não compacta) e fixe um ponto $p \in M$. Denotamos por $\nu(r) = \text{Area}(\partial B_r(p))$ a função área da esfera geodésica de raio r e centro p. Colocamos

$$V(r) = \text{Vol}(B_r(p)) = \int_0^r \nu(r) dr \quad \text{e} \quad \Theta(M) = \lim_{t \to \infty} \frac{\log V(t)}{t}.$$

Nesse capítulo iremos trabalhar a estimativa do primeiro autovalor do p-laplaciano em variedades, será tratador o seguinte teorema provado por Lima, B. P. e Santos, N. L., [16]:

Teorema 0.4. *Seja M uma variedade riemanniana completa e não-compacta com volume infinito, $\mathrm{Vol}(M^n) = +\infty$. Se $\Omega \subset M$ é um conjunto compacto arbitrário, denotamos por $\lambda_{1,p}(M - \Omega)$ o primeiro autovalor do p-Laplaciano em $M - \Omega$. Então*

1. *Se M tem crescimento sub-exponencial, isto é, $\Theta(M) = 0$, então $\lambda_{1,p}(M - \Omega) = 0$*

2. *Se $\Theta(M) \leqslant \beta$, para algum $\beta > 0$, então $\lambda_{1,p}(M - \Omega) \leqslant \dfrac{\beta^p}{p^p}$*

Como caso particular do teorema temos:

1. *Se $\mathrm{Vol}(B_R(p)) \leqslant Cr^\beta$ para certas constantes $C, \beta > 0$ e $r \geqslant r_0 > 0$, então $\lambda_{1,p}(M - \Omega) = 0$.*

2. *Se $\mathrm{Vol}(B_r(p)) \leqslant Ce^{\beta t}$, então $\lambda_{1,p}(M - \Omega) \leqslant \dfrac{\beta^p}{p^p}$.*

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo estabeleceremos as notações e resultados básicos que serão usados nessa dissertação. As provas de alguns resultados serão omitidas, mas as referências serão indicadas.

Denotaremos por M^n, ou simplesmente M, uma variedade riemanniana de dimensão n e classe C^∞, ∇ será a conexão riemanniana de M e $\langle\ ,\ \rangle$ sua métrica riemanniana. Indicaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M e por $\mathfrak{D}(M)$ o anel das funções de classe C^∞ definidas em M. Dado $p \in M$, será denotado por T_pM o espaço tangente a M em p e TM o fibrado tangente a M. Os resultados desse capítulo pode ser encontrado em do Carmo, M. P., [10].

1.1 Curvaturas

Relembraremos alguns conceitos básicos sobre curvaturas em uma variedade riemanniana.

Definição 1.1. *O tensor de curvatura* R *de uma variedade riemanniana* M *é uma correspondência que associa a cada par de campos* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *a aplicação*

$$R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

dada por

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z,\ \forall\ Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Proposição 1.1. *Dados* $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$*, o tensor de curvatura,* R*, de uma variedade riemanniana* $(M, \langle\ ,\rangle)$ *satisfaz as seguintes identidades:*

1. $\langle R(X,Y)Z, T\rangle + \langle R(Y,Z)X, T\rangle + \langle R(Z,X)Y, T\rangle = 0$;

2. $\langle R(X,Y)Z,T\rangle = -\langle R(Y,X)Z,T\rangle$;

3. $\langle R(X,Y)Z,T\rangle = -\langle R(X,Y)T,Z\rangle$;

4. $\langle R(X,Y)Z,T\rangle = \langle R(Z,T)X,Y\rangle$.

Definição 1.2. *Dado um ponto* $p \in M$ *e um subespaço bi-dimensional* $\sigma \subset T_pM$ *o número real*

$$K(x,y) = K(\sigma) = \frac{\langle R(x,y)x,y\rangle}{|x\wedge y|^2},$$

onde $\{x,y\}$ *é uma base qualquer de* σ *e* $|\, x\wedge y \,| = \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2$, *é chamado curvatura seccional de* σ *em p.*

Consideremos agora $x \in T_pM$ um vetor unitário. Tomemos $\{z_1,\ldots,z_{n-1},z_n = x\}$ uma base ortonormal de T_pM.

Definição 1.3. *A curvatura de Ricci de* M *na direção de x em p é definida por*

$$\mathrm{Ric}_p(x) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\langle R(x,z_i)x,z_i\rangle.$$

Definição 1.4. *A curvatura escalar de* M *em p é definida por*

$$R(p) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Ric}_p(z_j).$$

Obs 1.1. *As curvaturas de Ricci na direção de x e a curvatura escalar em p não dependem da escolha das correspondentes bases ortonormais.*

Definição 1.5. *Sejam* M^n *e* N^{n+k} *variedades riemannianas. Uma aplicação* $f : M^n \to N^{n+k}$ *é uma imersão se* $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ *é injetiva para todo* $p \in M$. *Se, além de imersão,* f *é um homeomorfismo sobre* $f(M) \subset N$, *onde* $f(M)$ *tem a topologia induzida por* N, *diz-se que* f *é um mergulho. Se* $M \subset N$ *e a inclusão* $i : M \hookrightarrow N$ *é um mergulho, diz-se que* M *é uma subvariedade de* N.

Definição 1.6. *Sejam* M *e* N *variedades riemannianas. Um difeomorfismo* $f : M \to N$ (*isto é,* f *é uma bijeção diferenciável com inversa diferenciável*) *é chamado um isometria se:*

$$\langle u,v\rangle = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle \text{ para todo } p \in M \text{ e } u,v, \in T_pM.$$

Seja $f : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ uma imersão. A conexão riemanniana de $\overline{M}$ será indicada por $\overline{\nabla}$. Identificando-se $f(M)$ com M e T_pM com $T_{f(p)}f(M)$, seja X e Y são campos locais de vetores em M, e $\overline{X}$, $\overline{Y}$ são extensões locais a $\overline{M}$, definamos

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^T.$$

O campo local em $\overline{M}$ normal a M, dado por

$$\alpha(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

não depende das extensões $\overline{X}$, $\overline{Y}$.

Seja $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. A aplicação $H_\eta : T_pM \times T_pM \to R$ dada por

$$H_\eta(x, y) = \langle \alpha(x, y), \eta \rangle, \;\; x, y \in T_pM,$$

é uma forma bilinear e simétrica.

Definição 1.7. *A forma quadrática* B_η *definida em* T_pM *por*

$$B_\eta(x) = H_\eta(x, x)$$

é chamada a segunda forma fundamental de f *em* p *segundo o vetor normal* η.

Obs 1.2. *A aplicação bilinear* H_η *fica associada a uma aplicação linear auto-adjunta* $S_\eta : T_pM \to T_pM$ *por*

$$\langle S_\eta(x), y \rangle = H_\eta(x, y) = \langle \sigma(x, y), \eta \rangle.$$

Definição 1.8. *Escolhendo um referencial ortonormal* $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ *(isto é, uma família de campos locais,* $e_i \in \mathfrak{X}(U)^{\perp}$ *tal que* $\langle e_i, e_j \rangle_p = \delta_{ij}, \;\forall\; p \in U$ *) de vetores em* $\mathfrak{X}(U)^{\perp}$*, onde* U *é uma vizinhança de* p *na qual* f *é um mergulho,*

$$\alpha(x, y) = \sum_i H_{e_i}(x, y)e_i, \;\; x, y \in T_pM, \;\; i = 1, 2, ..., k.$$

O vetor normal dado por

$$\overrightarrow{H} = \frac{1}{k}\sum_i (\text{traço } S_{e_i})e_i$$

não depende do referencial e_i *escolhido. O vetor* $\overrightarrow{H}$ *é chamado o vetor curvatura média de* f. *Dizemos que* f *é mínima quando* $\overrightarrow{H}(p) = 0$*, para todo* $p \in M$.

1.2 Gradiente, Divergente, Laplaciano e Hessiano

Nesta seção serão provados alguns resultados básicos envolvendo gradiente, laplaciano e hessiano de funções reais de classe C^∞ definidos em M e a divergência de campos de vetores em M. As principais referência dessa seção são [10] e [4].

Dado $p \in M$ e f uma função de classe C^1 definida em uma vizinhança de p, então a cada $v \in T_pM$ a derivada direcional de f em p na direção de v, denotado por $v(f)$, é definida por

$$v(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t)\Big|_{t=0},$$

onde $\alpha(t)$ é uma curva suave em M satisfazendo $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$.

Definição 1.9. *Seja $f \in \mathfrak{D}(M)$. O gradiente de f denotado por $\mathrm{grad}\ f$ é o único campo vetorial em M , que satisfaz*

$$\langle \mathrm{grad}\ f(p), v\rangle = v(f),\ \ p \in M,\ \ \forall\ v \in T_pM. \tag{1.1}$$

Considerando $X \in \mathfrak{X}(M)$ uma extensão local de v, temos:

$$\langle \mathrm{grad}\ f(p), X\rangle = X_p(f)$$

Proposição 1.2. *Seja $f \in \mathfrak{D}(M)$ e $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal em $U \subset M$. Então, em U temos*

$$\mathrm{grad}\ f = \sum_{j=1}^{n} e_j(f)e_j. \tag{1.2}$$

Demonstração: Escrevendo

$$\mathrm{grad}\ f = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i,$$

temos que

$$e_j(f) = \langle \mathrm{grad}\ f, e_j\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} a_i e_i, e_j\rangle = a_j.$$

Logo,

$$\mathrm{grad}\ f = \sum_{j=1}^{n} e_j(f)e_j$$

■

Obs 1.3. *Quando $M = R^n$ munido de seu produto interno canônico podemos tomar, para $1 \leqslant i \leqslant n$, $e_i = E_i$, o i-ésimo campo canônico em R^n. Desse modo,*

$$\mathrm{grad}\ f = \sum_{i=1}^{n} E_i(f)E_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}E_i = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Proposição 1.3. *Se* $f, g : M^n \to \mathbb{R}$ *são funções suaves, então*

1. $\mathrm{grad}\,(f+g) = \mathrm{grad}\, f + \mathrm{grad}\, g$.

2. $\mathrm{grad}\,(fg) = g\,\mathrm{grad}\, f + f\,\mathrm{grad}\, g$.

Demonstração: Seja X um campo diferenciável em M, logo

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{grad}\,(f+g), X\rangle &= X(f+g) = X(f) + X(g)\\ &= \langle \mathrm{grad}\, f, X\rangle + \langle \mathrm{grad}\, g, X\rangle\\ &= \langle \mathrm{grad}\, f + \mathrm{grad}\, g, X\rangle\end{aligned}$$

de modo análogo,

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{grad}\,(fg), X\rangle &= X(fg) = gX(f) + fX(g)\\ &= \langle g\,\mathrm{grad}\, f, X\rangle + \langle f\,\mathrm{grad}\, g, X\rangle\\ &= \langle g\,\mathrm{grad}\, f + f\,\mathrm{grad}\, g, X\rangle.\end{aligned}$$

■

Proposição 1.4. *Sejam* $f \in D(M)$ *e* $(x_1, \dots, x_n)$ *um sistema de coordenadas locais em* M. *Então*

$$\mathrm{grad}\, f = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

onde $g_{ij} = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\rangle$ *e* (g^{ij}) *é a inversa da matriz* (g_{ij}).

Demonstração: Como $\mathrm{grad}\, f \in \mathfrak{X}(M)$ e $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ constitui uma base, podemos escrever

$$\mathrm{grad}\, f = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \langle \mathrm{grad}\, f, \frac{\partial}{\partial x_j}\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\rangle = \sum_{i=1}^{n} g_{ji} a_i. \tag{1.3}$$

Como a matriz $(G)_{ij} = g_{ij}$ é invertível, pois é positiva. Segue que pondo $g^{kj} = (G^{-1})_{kj}$ e multiplicando (1.3) por g^{kj};

$$g^{kj} \frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n} g^{kj} g_{ji} a_i,$$

somando em j, teremos

$$\sum_{j} g^{kj}\frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{j,i=1}^{n} g^{kj}g_{ji}a_i = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} g^{kj}g_{ji})a_i$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i\delta_{ki} = a_k.$$

Portanto,

$$\mathrm{grad}\ f = \sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{j} g^{kj}\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big]\frac{\partial}{\partial x_i}$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}$$

■

Obs 1.4. *No caso particular em que* $M = \mathbb{R}^n$ *e* $g_{ij} = \delta_{ij}$ *é a métrica Euclidiana, temos*

$$\mathrm{grad}\ f = \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Definição 1.10. *Seja X um campo vetorial diferenciável em* M*. A divergência de* X *é a função diferenciável* $\mathrm{div}\ X : M \to \mathbb{R}$*, definida por*

$$(\mathrm{div}\ X)_{(p)} = \mathrm{tr}\{v \in T_pM \mapsto \nabla_v X\},$$

onde tr denota o traço de operador linear $v \in T_pM \mapsto \nabla_v X \in T_pM$.

Dizemos que um referencial ortonormal $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ em um aberto $U \subset M$ é geodésico em $p \in U$ se $(\nabla_{e_i} e_j)_{(p)} = 0$ para todos $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Proposição 1.5. *Seja X um campo diferenciável em* M *e* $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *um referencial ortonormal em uma vizinhança aberta* $U \subset M$*. Se* $X = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ *em U, então*

$$(\mathrm{div}\ X)(p) = \sum_{i=1}^{n}(e_i(a_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X\rangle). \tag{1.4}$$

Em particular, se o referencial for geodésico em $p \in U$*, temos que*

$$\mathrm{div}\ X = \sum_{i=1}^{n} e_i(a_i)$$

Demonstração: Pela definição de divergência de um campo vetorial, obtemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} X &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} (e_i \langle X, e_i \rangle - \langle X, \nabla_{e_i} e_i \rangle) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (e_i \langle \sum_{j=1}^{n} (a_j) e_j, e_i \rangle - \langle \nabla_{e_i} e_i, X \rangle) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (e_i(a_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X \rangle)
\end{aligned}$$

■

Obs 1.5. *Para* $M = R^n$ *e* $1 \leqslant i \leqslant n$, *podemos tomar* $e_i = E_i$, *o i-ésimo campo canônico em* R^n *e como tais campos formam um referencial geodésico ortonormal em cada ponto de* R^n, *tem-se*

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{n} E_i(a_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_i}.$$

Proposição 1.6. *Se* X, Y *são campos vetoriais suaves em* M *e* $f : M \to R$ *é uma função suave, então*

1. $\operatorname{div} (X + Y) = \operatorname{div} X + \operatorname{div} Y$

2. $\operatorname{div} (f\ X) = f \operatorname{div} X + \langle \operatorname{grad} f, X \rangle$.

Lema 1.1. *Seja* X *um campo vetorial suave sobre* M *e* $U \subset M$ *uma vizinhança coordenada com campos coordenados* $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$. *Se* X *for dado em U por* $X = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, *então a divergência de* X *em U é dada por*

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} a_j \Gamma_{ij}^{i}, \tag{1.5}$$

onde $\Gamma_{ij}^{k} = \langle \nabla_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j}, \partial_{x_k} \rangle$ *representa o símbolo de Cristoffel da métrica de M em U.*

Demonstração: Usando propriedades da conexão, obtemos

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X &= \sum_{j=1}^{n} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} (a_j \frac{\partial}{\partial x_j}) = \sum_{j=1}^{n} (a_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (a_j \sum_{l=1}^{n} \Gamma_{ij}^{l} \frac{\partial}{\partial x_l} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}) = \sum_{j,l=1}^{n} a_j \Gamma_{ij}^{l} \frac{\partial}{\partial x_l} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \\
&= \sum_{l=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} a_j \Gamma_{ij}^{l} + \frac{\partial a_l}{\partial x_i}) \frac{\partial}{\partial x_l},
\end{aligned}$$

ou seja, a última expressão entre parêntese é precisamente um elemento genérico da matriz que representa a aplicação $Y \mapsto \nabla_Y X$ no referêncial $\{\partial_{x_i},\ i = 1, \ldots, n\}$. Portanto,

$$\mathrm{div}\ X = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} a_j \Gamma_{ij}^{i}$$

. ■

Definição 1.11. *Seja* $f : M \to R$ *uma função diferenciável. O Laplaciano de* f *é a função* $\Delta f : M^n \to R$ *dado por*

$$\Delta f = \mathrm{div}\ (\mathrm{grad}\ f). \tag{1.6}$$

Proposição 1.7. *Seja* $f : M \to R$ *uma função diferenciável e* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *um referencial ortonormal em um aberto* $U \subset M$*. Então, em* U*, vale que*

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} (e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i)(f)). \tag{1.7}$$

Em particular, o referencial for geodésico em $p \in U$*, então em p o*

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} e_i(e_i(f)).$$

Demonstração: Como $\mathrm{grad}\ f = \sum_{i=1}^{n} e_i(f) e_i$ em U. Daí, pela definição de Laplaciano e pela equação (1.3) temos que

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} (e_i(e_i(f)) - \langle \nabla_{e_i} e_i, \mathrm{grad}\ f \rangle) = \sum_{i=1}^{n} (e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i)(f))$$

■

Obs 1.6. *Quando* $M = R^n$*, tomamos* $e_i = E_i$*, os campos coordenados canônicos de* R^n*, os quais formam um referencial geodésico ortonormal em cada ponto de* R^n*, segue da proposição anterior que*

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} E_i(E_i(f)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Proposição 1.8. *Dadas* $f, g : M \to R$ *funções diferenciáveis, tem-se*

$$\Delta(fg) = g\ \Delta f + f\ \Delta g + 2\langle \mathrm{grad}\ f, \mathrm{grad}\ g \rangle$$

Demonstração: Pela proposições (1.4) e (1.7), temos:

$$\begin{aligned} \Delta(fg) &= \mathrm{div}\ (\mathrm{grad}\ (fg)) = \mathrm{div}\ (g\ \mathrm{grad}\ f + f\ \mathrm{grad}\ g) \\ &= \mathrm{div}\ (g\ \mathrm{grad}\ f) + \mathrm{div}\ (f\ \mathrm{grad}\ g) = g\ \Delta f + f\ \Delta g + 2\langle \mathrm{grad}\ f, \mathrm{grad}\ g \rangle \end{aligned}$$

■

Definição 1.12. *Seja* $f : M \to R$ *uma função diferenciável. Definimos o Hessiano de* f *em* $p \in M$ *como o operador linear* $(\text{Hess } f)_p : T_pM \to T_pM$*, dado por*

$$(\text{Hess} f)_p(v) = \nabla_v \text{grad } f, \ v \in T_pM.$$

Segue das propriedades da conexão Riemanniana que se X *é qualquer extensão de* v *a uma vizinhança de* p *em M, então*

$$(\text{Hess } f)_p(v) = (\nabla_X \text{ grad } f)(p).$$

Proposição 1.9. *Se* $f : M \to R$ *é uma função diferenciável e* $p \in M$*, então* $(\text{Hess } f)_p : T_pM \to T_pM$ *é um operador linear auto-adjunto.*

Proposição 1.10. *Se* $f : M \to R$ *é uma função diferenciável, então*

$$\Delta f = \text{tr } (\text{Hess } f)$$

Demonstração: Seja $p \in M$ e considere $U \subset M$ uma vizinhança de p onde esteja definido um referencial ortonormal local $\{e_1, ..., e_n\}$. Então

$$\begin{aligned} \text{tr } (\text{Hess } f)_p &= \sum_{i=1}^{n} \langle (\text{Hess } f)_p(e_i), e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} \text{ grad } f, e_i \rangle \\ &= \text{div } (\text{grad } f)(p) = \Delta f(p) \end{aligned}$$

■

Podemos considerar $\text{Hess } f$ como um tensor H_f tal que para cada par de campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$(X, Y) \mapsto H_f(X, Y) = \langle \text{Hess } f(X), Y \rangle.$$

Obs 1.7. *Quando* $M = R^n$ *e* $e_i = E_i$*, a base canônica do* R^n*, segue-se que:*

$$H_f(E_i, E_j) = \langle \text{Hess } f(E_i), E_j \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Proposição 1.11. (*Markvorsen, S. e Min-Oo M.*, [17]) *Seja* M^n *uma variedade riemanniana imersa em* R^{n+k}*. Seja* $F : R^{n+k} \to R$ *uma função de classe* C^2 *e* $f = F\Big|_M$ *a restrição de F a* M*, então*

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} H_F(e_i, e_i) + n\langle \vec{H}, \text{grad } F \rangle \tag{1.8}$$

onde $\vec{H}$ *é a curvatura média constante de* M.

Demonstração: Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, assim

$$\begin{aligned} H_f(X,Y) &= \langle \mathrm{Hess} f\ (X), Y\rangle = \langle \nabla_X \mathrm{grad}\ f, Y\rangle \\ &= X\langle \mathrm{grad}\ f, Y\rangle - \langle \mathrm{grad}\ f, \nabla_X Y\rangle \\ &= X\langle \mathrm{grad}\ F, Y\rangle - \langle \mathrm{grad}\ F, \nabla_X Y\rangle \\ &= \langle D_X \mathrm{grad}\ F, Y\rangle + \langle \mathrm{grad}\ F, D_X Y\rangle - \langle \mathrm{grad}\ F, \nabla_X Y\rangle \\ &= \langle D_X \mathrm{grad}\ F, Y\rangle + \langle \mathrm{grad}\ F, D_X Y - \nabla_X Y\rangle \\ &= H_F(X,Y) + \langle \mathrm{grad}\ F, B(X,Y)\rangle \end{aligned}$$

onde, D é a conexão de R^{n+k} e $\mathrm{grad}^{R^{n+k}}\ F = \mathrm{grad}^M\ f + \mathrm{grad}^{\perp}\ F$. Portanto,

$$H^M\ f(X,Y) = H^{R^{n+k}}\ F(X,Y) + \langle \mathrm{grad}\ F, B(X,Y)\rangle$$

Tomando-se o traço no igualdade acima, obteremos a equação (1.8).

■

1.3 Espaços Sobolev

Definição 1.13. *Seja $\Omega \subset M^n$ um domínio aberto e seja $0 < p < \infty$. Dada $f : \Omega \to R$ mensurável, definimos*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

e $L^p(\Omega) = \{\ f : \Omega \to R \mid f$ é mensurável e $\|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty\ \}$.

Denotamos por $C^k(\Omega)$, $k \in N$, o espaço das funções $u : \Omega \to R$ continuamente deriváveis de ordem k.

Definição 1.14. *Denotamos por $W_0^{1,p}(\Omega)$ o espaço dado pelo fecho das funções C^∞ com suporte compacto em Ω.Para cada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ nos definimos a norma de u por:*

$$\|u\|_{1,p}^p = \int_\Omega |u|^p d\Omega + \int_\Omega \|\nabla u\|^p d\Omega \tag{1.9}$$

O espaço nomardo $W_0^{1,p}(\Omega)$ é denominado espaço de Sobolev.

Denotamos por $D(\Omega) = C_0^\infty$ o espaço das funções infinitamente deriváveis e de suporte compacto em Ω. Quando $p = 2$, escreve-se $H_0^1(\Omega)$ em vez de $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Capítulo 2

Teorema da Oscilação

As principais referências usadas nessa capítulo serão: Dosly, O. e Rehak, P., [8] e do Carmo, M. P. e Zhou, D., [9].

Nesta seção vamos trabalhar o comportamento oscilatório das soluções da equação diferencial ordinária de segunda ordem (equação de Liouville):

$$(\nu(t)x'(t))' + \lambda\nu(t)x(t) = 0, t \geqslant T_0 \tag{2.1}$$

onde $\nu(t)$ é uma função positiva contínua em $[T_0, +\infty)$ e λ é uma constante positiva.

Teorema 2.1. *Dados* $t_o \in [T_0, \infty)$ *e* $A,\ B \in R$*, então existe uma única solução de* (2.1) *satisfazendo* $x(t_0) = A$*,* $x'(t_0) = B$ *que depende continuamente do valores iniciais* $A,\ B$.

Chamamos a equação (2.1) oscilatória se todas as soluções de (2.1) tem zeros arbitráriamente grande em $[T_0, +\infty)$, ou seja, dada uma solução de (2.1) para qualquer intervalo limitado I em $[T_0, +\infty)$ sempre vai existir pelo menos um zero dessa solução fora desse intervalo I em $[T_0, +\infty)$. Caso contrário; dizemos que a equação (2.1) é não oscilatória. Exemplos:

1. A equação não oscilatória $(e^{-t}x'(t))' + \frac{1}{4}e^{-t}x(t) = 0$ tem solução positiva $x(t) = e^{\frac{1}{2}t}$ definida em $[1, \infty)$.

2. A equação $x''(t) + x(t) = 0$ é oscilatória, pois $x(t) = \sin(t)$ é solução.

Teorema 2.2. *Se* (2.1) *possui uma solução oscilatória, então toda solução de* (2.1) *será oscilatória. Se* (2.1) *possui uma solução não oscilatória, então todas serão.*

A prova desse resultado pode ser encontrado em Dosly, O. e Rehak, P., [8].

Teorema 2.3. *Suponha* $\nu(t)$ *uma função contínua positiva em* $[T_0, +\infty)$ *e* $\int^{\infty} \nu(\tau)d\tau = +\infty$. *Então a equação* (2.1) *é oscilatório se vale uma das seguintes condições:*

1. $\lambda > 0$ *e* $V(t) = \int_{T_o}^{t} \nu(\tau)d\tau \leqslant Ct^{a}$ *para certas constantes positivas C e a, ou;*

2. $\lambda > \dfrac{a^2}{4}$ *e* $V(t) = \int_{T_o}^{t} \nu(\tau)d\tau \leqslant Ce^{at}$ *para certas constantes positivas C e a.*

Demonstração: Suponhamos que a equação (2.1) não é oscilatório, então existe uma solução $x(t)$ da equação (2.1) de tal modo que a partir de uma certa instante esta solução não possuirá mais zeros. Daí existe uma constante positiva $T > T_o$ tal que $x(t) > 0$ para qualquer $t > T$ (note que se $x(t)$ é solução de (2.1) então $y(t) = -x(t)$ também será solucão). Agora, defina a função

$$y(t) = -\frac{\nu(t)x'(t)}{x(t)} \tag{2.2}$$

Neste caso $y(t)$ está bem definida em $[T, \infty)$ e é uma solução da equação de Ricatti:

$$y'(t) = \lambda\nu(t) + \frac{y^2(t)}{\nu(t)}.$$

De fato, para todo $t > T$, tem-se

$$\begin{aligned}
y'(t) &= -\frac{1}{x^2(t)}[(\nu(t)x'(t))'x(t) - (x'(t)\nu(t))x'(t)] \\
&= \frac{\lambda\nu(t)x^2(t)}{x^2(t)} - \frac{y(t)x(t)x'(t)}{x(t)^2} \\
&= \lambda\nu(t) + \frac{1}{x^2(t)}y(t)x(t)\left(\frac{y(t)x(t)}{\nu(t)}\right) \\
&= \lambda\nu(t) + \frac{y^2(t)}{\nu(t)}
\end{aligned}$$

Portanto, obtemos:

$$y'(t) = \lambda\nu(t) + \frac{y^2(t)}{\nu(t)} \tag{2.3}$$

Assim, $y'(t) > 0$, e consequentemente $y(t)$ é uma função crescente em $[T, \infty)$. Vamos dividir o resto da prova em dois casos:

$$\text{I)} \int_{T}^{\infty} \frac{d\tau}{\nu(\tau)} < \infty \quad \text{e} \quad \text{II)} \int_{T}^{\infty} \frac{d\tau}{\nu(\tau)} = +\infty$$

Considerando o primeiro caso, por (2.3), temos

$$y'(t) \geqslant \lambda\nu(t). \tag{2.4}$$

Integrando a desigualdade (2.4) de T à t, obtemos:

$$y(t) \geqslant \lambda(V(t) - V(T)) + y(T).$$

Daí, $y(t) > 0$, para qualquer $t \geqslant T$.
Como $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0$, segue-se que $ab \leqslant \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2}$. Pondo $a = \dfrac{y(t)}{\sqrt{v(t)}}$ e $b = \sqrt{\lambda v(t)}$ observamos que

$$2\sqrt{\lambda} y(t) = \frac{2y(t)}{\sqrt{v(t)}}(\sqrt{\lambda}\sqrt{v(t)}) \leqslant \frac{y^2(t)}{v(t)} + \lambda v(t) = y'(t)$$

Logo, integrando a desigualdade $\dfrac{y'(t)}{y(t)} \geqslant 2\sqrt{\lambda}$ no intervalo $[T, t]$, obteremos:

$$y(t) \geqslant y(T)e^{2\sqrt{\lambda}(t-T)}. \tag{2.5}$$

Por outro lado, por (2.3)

$$\frac{y'(t)}{y^2(t)} \geqslant \frac{1}{v(t)}$$

daí,

$$\int_{t-1}^{t} \frac{y'(\tau)}{y^2(\tau)} d\tau \geqslant \int_{t-1}^{t} \frac{1}{v(\tau)} d\tau.$$

Consequentemente, na desigualdade acima temos que

$$-\frac{1}{y(\tau)}\Bigg|_{t-1}^{t} \geqslant \int_{t-1}^{t} \frac{d\tau}{v(\tau)},$$

ou seja,

$$-\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{y(t-1)} \geqslant \int_{t-1}^{t} \frac{d\tau}{v(\tau)}.$$

Portanto, multiplicando a desigualdade anterior por -1, encontramos

$$\frac{1}{y(t)} \leqslant \frac{1}{y(t-1)} - \int_{t-1}^{t} \frac{d\tau}{v(\tau)}.$$

Logo, por (2.5) obtemos:

$$\frac{1}{y(t)} \leqslant \frac{1}{y(T)e^{2\sqrt{\lambda}(t-T-1)}} - \int_{t-1}^{t} \frac{d\tau}{v(\tau)}. \tag{2.6}$$

Pela desigualdade de $Schwarz$, temos:

$$1 = \int_{t-1}^{t} d\tau \leqslant \left(\int_{t-1}^{t} \frac{d\tau}{v(\tau)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t-1}^{t} v(\tau) d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_{t-1}^{t} \frac{d\tau}{v(\tau)}\right)^{\frac{1}{2}} (V(t))^{\frac{1}{2}}.$$

Assim,

$$\int_{t-1}^{t} \frac{1}{\nu(\tau)} d\tau \geqslant \frac{1}{V(t)}.$$

Se a **condição 1)** é satisfeita, isto é, $\lambda > 0$ e $V(t) \leqslant Ct^{a}$, temos por (2.6), quando t é suficientemente grande;

$$\begin{aligned} 0 < \frac{1}{y(t)} &\leqslant \frac{1}{y(T)e^{2\sqrt{\lambda}(t-T-1)}} - \frac{1}{V(t)} \\ &\leqslant \frac{1}{y(T)e^{2\sqrt{\lambda}(t-T-1)}} - \frac{1}{Ct^{a}} < 0. \end{aligned}$$

Sendo $\lambda > 0$ e $2\sqrt{\lambda}(t-T-1) > 0$ para t suficientemente grande, temos uma contradição, pois uma exponencial cresce mais rápido que uma equação polinomial.

Se a **condição 2)** é satisfeita, isto é, $\lambda > \dfrac{a^2}{4}$ e $V(t) \leqslant Ce^{at}$, por (2.6), para t suficientemente grande, temos:

$$\begin{aligned} 0 < \frac{1}{y(t)} &\leqslant \frac{1}{y(T)e^{2\sqrt{\lambda}(t-T-1)}} - \frac{1}{Ce^{at}} \\ &= \frac{C}{y(T)Ce^{at}e^{-at}e^{2\sqrt{\lambda}(t-T-1)}} - \frac{1}{Ce^{at}} \\ &= \left[\frac{C}{y(T)e^{2\sqrt{\lambda}(t-T-1)-at}} - 1\right]\frac{1}{Ce^{at}} \\ &= \left[\frac{C}{y(T)e^{(2\sqrt{\lambda}-a)t-2\sqrt{\lambda}(T+1)}} - 1\right]\frac{1}{Ce^{at}} < 0. \end{aligned}$$

Assim, chegamos a uma contradição, pois usando a condição $\lambda > \dfrac{a^2}{4}$, obtemos que $(2\sqrt{\lambda} - a)t - 2\sqrt{\lambda}(T+1) > 0$ para t suficientemente grande.

II) $\displaystyle\int_{T}^{\infty} \frac{d\tau}{\nu\tau} = +\infty.$

Integrado a equação (2.3) de T a t, obtemos

$$y(t) = y(T) + \int_{T}^{t} \lambda\nu(s)ds + \int_{T}^{t} \frac{y^2(s)}{\nu(s)}ds.$$

Logo, pelas condições do teorema, temos que

$$y(T) + \int_{T}^{t} \lambda\nu(s)ds \geqslant 0, \ \forall\ t > T.$$

Daí,

$$y(t) \geqslant \int_{T}^{t} \frac{y^2(s)}{\nu(s)}ds, \ \forall\ t > T \tag{2.7}$$

Tomando $G(t) = \displaystyle\int_T^t \frac{y^2(s)}{\nu(s)} ds$ e derivando, obtemos

$$G'(t) = \frac{1}{\nu(t)} y^2(t),$$

ou seja,

$$y^2(t) = G'(t)\nu(t). \tag{2.8}$$

Sendo $G'(t) > 0$, consequentemente $G(t)$ é crescente e além disso ela é positiva.

Substituindo (2.8) em (2.7), temos:

$$\Big[G'(t)\nu(t)\Big]^{\frac{1}{2}} \geqslant G(t),$$

isto é,

$$\frac{G'(t)}{G^2(t)} \geqslant \frac{1}{\nu(t)}$$

Integrando a equação anterior de T à t a ambos os lados da desigualdade, obtemos

$$\int_T^t \frac{G'(s)}{G^2(s)} ds \geqslant \int_T^t \frac{1}{\nu(s)} ds \tag{2.9}$$

Como

$$\begin{aligned} \int_T^t \frac{G'(s)}{G^2(s)} ds &= -\frac{1}{G(s)}\Big|_T^t \\ &= -\frac{1}{G(t)} + \frac{1}{G(T)}. \end{aligned}$$

Substituindo no equação (2.9), temos que

$$-\frac{1}{G(t)} + \frac{1}{G(T)} \geqslant \int_T^t \frac{ds}{\nu(s)}.$$

Portanto,

$$\frac{1}{G(T)} > -\frac{1}{G(t)} + \frac{1}{G(T)} \geqslant \int_T^t \frac{1}{\nu(s)} ds.$$

ou seja,

$$\frac{1}{G(T)} > \int_T^t \frac{1}{\nu(s)} ds.$$

Fazendo $t \to \infty$, chegamos a uma contradição, pois $\dfrac{1}{G(T)}$ é uma constante ■

Obs 2.1. *A condição* 1) *do terorema* (2.2) *pode ser substituida para* $V(t)$ *crescer subexponencialmente, no sentido que*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\log V(t)}{t} = 0 \tag{2.10}$$

A razão para isto pode ser vista na prova da condição 2)*.*

De fato, a equação (2.10) nos diz que para qualquer $A > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $t > A$ implica que $\left|\dfrac{\log V(t)}{t}\right| < \varepsilon$, ou seja, $V(t) < e^{\varepsilon t}$. Segue por (2.6), para t suficientemente grande;

$$\begin{aligned}
0 < \frac{1}{y(t)} &\leqslant \frac{1}{y(T)e^{2\sqrt{\lambda}(t-T-1)}} - \frac{1}{V(t)} \\
&= \frac{1}{y(T)e^{\varepsilon t}e^{-\varepsilon t}e^{2\sqrt{\lambda}(t-T-1)}} - \frac{1}{e^{\varepsilon t}} \\
&= \left[\frac{1}{y(T)e^{2\sqrt{\lambda}(t-T-1)-\varepsilon t}} - 1\right]\frac{1}{e^{\varepsilon t}} \\
&= \left[\frac{1}{y(T)e^{(2\sqrt{\lambda}-\varepsilon)t-2\sqrt{\lambda}(T+1)}} - 1\right]\frac{1}{e^{\varepsilon t}} < 0.
\end{aligned}$$

Chegamos novamente a um absurdo.

Teorema 2.4. *Se* $\nu(t)$ *é positiva, então qualquer solução local de* (2.1) *com valor inicial*

$$x(T_0) = x_0 \text{ e } x'(T_0) = x_1 \tag{2.11}$$

pode ser estendida a $[T_0, +\infty)$.

Demonstração: Assumimos que exista um intervalo máximo $[T_0, T)$, com T finito, onde uma solução $x(t)$ de (2.1) está definida e satisfaz (2.11). Então $\lim\limits_{t\to T}|x(t)| = +\infty$. Podemos supor que $\lim\limits_{t\to T} x(t) = +\infty$. Portanto existe T_1 tal que $x(t) > 0$, em $[T_1, T)$ e $x'(T_1) > 0$. Assim,

$$(\nu(t)x'(t))' = -\lambda\nu(t)x(t) < 0, \ \forall t \in [T_1, T),$$

pois $\lambda > 0$ e $\nu(t)$, $x(t)$ são positivas em $[T_1, T)$. Consequentemente, $(\nu(t)x'(t))' < 0, \forall t \in [T_1, T)$. Integrando esta equação de T_1 a t, obtemos;

$$\int_{T_1}^{t} (\nu(s)x'(s))'ds \leqslant 0,$$

o que implica,

$$\nu(t)x'(t) - \nu(T_1)x'(T_1) \leqslant 0,$$

ou seja,

$$x'(t) \leqslant \frac{\nu(T_1)x'(T_1)}{\nu(t)}, \ \forall \ t \in [T_1, T).$$

Integrando a desigualdade de T_1 a t, temos

$$\int_{T_1}^{t} x'(s)ds \leqslant \int_{T_1}^{t} \frac{\nu(T_1)x'(T_1)}{\nu(s)}ds,$$

daí,

$$x(t) \leqslant x(T_1) + \nu(T_1)x'(T_1)\int_{T_1}^{t} \frac{1}{\nu(s)}ds, \ \forall \ t \in [T_1, T). \tag{2.12}$$

Fazendo $t \to T$ o primeiro membro da desigualdade (2.12) tendo a $+\infty$. Por outro lado $\nu(t)$ está definida e é contínua em $[T_0, +\infty)$. Além disso $\nu(t) > 0$, $\forall t \in [T_0, +\infty)$. Logo $\dfrac{1}{\nu(t)} : [T_0, +\infty) \to R$ é continua, daí segue que $\dfrac{1}{\nu(t)} : [T_0, T] \to R$ é contínua (em compacto) e portanto limitada. Portanto obtemos que $\dfrac{1}{\nu(t)} < \dfrac{1}{k}$, $\forall t \in [T_0, T]$, ou seja, $\displaystyle\int_{T_1}^{T} \frac{1}{\nu(s)}ds < \infty$. O que nos leva a concluir que o segundo membro da desigualdade (2.12) é limitado quando $t \to T$.

Chegamos a uma contradição. Portanto, $T = +\infty$ ■

Capítulo 3

Estimativas de Autovalor

Seja M uma variedade riemanniana e $\Omega \subset M$ um domínio limitado. A Desigualdade de Paincaré (Hebey, E., [14]), nos garante a existência de uma constante universal $c > 0$ (dependendo apenas de Ω) tal que

$$\int_\Omega u^2 \, d\Omega \leqslant c \int_\Omega \|\nabla u\|^2 \, d\Omega; \ \forall \, u \in H_0^1(\Omega)$$

Logo, as seguintes normas

$$\|u\| = \left(\int_\Omega \|\nabla u\|^2 \, d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \ \text{ e } \ \|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega u^2 \, d\Omega + \int_\Omega \|\nabla u\|^2 \, d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

são equivalentes.

De fato, pela desigualdade de Poincaré, obtemos:

$$\int_\Omega u^2 \, d\Omega \leqslant c \int_\Omega \|\nabla u\|^2 \, d\Omega, \text{ com } c > 0.$$

Somando $\displaystyle\int_\Omega \|\nabla u\|^2 d\Omega$ a ambos os lados da desigualdade, temos:

$$\int_\Omega \|\nabla u\|^2 \, d\Omega + \int_\Omega u^2 \, d\Omega \leqslant (c+1) \int_\Omega \|\nabla u\|^2 \, d\Omega$$

Por outro lado,

$$\int_\Omega \|\nabla u\|^2 \, d\Omega \leqslant \int_\Omega \|\nabla u\|^2 \, d\Omega + \int_\Omega u^2 \, d\Omega.$$

Considere o problema de Dirichlet para o Δ em Ω:

$$(PD) \begin{cases} -\Delta u = f & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

onde $f \in L^2(\Omega)$.

Suponha que $u \in C^2(\Omega)$ seja uma solução do problema (PD) acima. Multiplicado a equação por $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, obtemos

$$-\phi\ \Delta u = \phi\ f.$$

Usando o Teorema da Divergência, temos:

$$\int_\Omega \langle \text{grad } u, \text{grad } \phi\rangle\ d\Omega = \int_\Omega \phi\ f\ d\Omega,\ \forall\ \phi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{3.1}$$

De fato, tomando o campo

$$X = \phi\ \text{grad } u$$

sendo $\{e_i\}_{i=1}^n$ um referencial ortonormal local, tem-se que

$$\begin{aligned} \text{div} X &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i}\phi\ \text{grad } u, e_i\rangle = \sum_{i=1}^n \langle e_i(\phi)\text{grad } u + \phi\nabla_{e_i}\text{grad } u, e_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \text{grad } u, e_i(\phi)e_i\rangle + \sum_{i=1}^n \phi\langle \nabla_{e_i}\text{grad } u, e_i\rangle \\ &= \langle \text{grad } u\ , \text{grad } \phi\rangle + \phi\ \Delta u. \end{aligned}$$

Daí, segue:

$$\int_\Omega \text{div } (\phi\ \text{grad } u)\ d\Omega = \int_\Omega \langle \text{grad } u\ , \text{grad } \phi\rangle\ d\Omega + \int_\Omega \phi\ \Delta u\ d\Omega$$

Usando o Teorema da Divergência, obtemos:

$$0 = \int_{\partial\Omega} \langle \phi\ \text{grad } u\ , \nu\rangle dA = \int_\Omega \langle \text{grad } u\ , \text{grad } \phi\rangle\ d\Omega + \int_\Omega \phi\ \Delta u\ d\Omega.$$

Portanto,

$$\int_\Omega \langle \text{grad } u\ , \text{grad } \phi\rangle\ d\Omega = \int_\Omega \phi\ f\ d\Omega.$$

Se $u \in C^2(\Omega)$ é solução de (PD) ela satisfaz a equação (3.1), no entanto a reciproca nem sempre é verdade, isto é, nem toda solução de (3.1) é de classe C^2.

Definição 3.1. *Dizemos que uma função* $u \in H_0^1(\Omega)$ *é solução fraca do problema* (PD)*, quando esta satisfaz a equação* (3.1).

Usando o mesmo argumento de Figueiredo, D. Guedes, [11], para $\Omega \subset M$, onde Ω é um domínio limitado com $\partial\Omega \in C^1$, se prova o seguinte resultado:

Teorema 3.1. *Para toda* $f \in L^2(\Omega)$, Ω *domínio limitado com fronteira pertencente a* C^1, *existe uma única solução fraca do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & em \quad \Omega \\ u = 0 & em \quad \partial\Omega \end{cases}$$

que é, $u \in H_0^1(\Omega)$ *de tal forma que*

$$\int_\Omega \langle \mathrm{grad}\ u, \mathrm{grad}\ \phi \rangle\ d\Omega = \int_\Omega \phi\ f\ d\Omega,\ \forall\ \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Pelo teorema (3.1) o operador $-\Delta : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é bijetivo, logo existe o operador inverso

$$\begin{aligned} T :& L^2 \to H_0^1 \\ & f \mapsto Tf = u \end{aligned}$$

O operador T obedece as seguintes propriedades:

I) T é linear.

De fato, dados $f, g \in L^2$ e $\alpha \in R$, tem-se que $Tf = u$ se, e só se, $\Delta u = f$ e $Tg = v$ se, e só se, $\Delta v = g$. Daí, se $T(f + \alpha g) = w$, então $\Delta w = f + \alpha g$. Assim, $\Delta w = \Delta u + \alpha \Delta v$, isso implica que $w = u + \alpha v$. Portanto, $T(f + \alpha g) = u + \alpha v = Tf + \alpha Tg$, ou seja, T é linear.

II) T é contínua.

Como $H_0^1(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$, podemos escolher uma sequência ϕ_n em $C_0^\infty(\Omega)$ convergindo para $u \in H_0^1(\Omega)$ na norma do $L^2(\Omega)$, teremos:

$$\int_\Omega \langle \mathrm{grad}\ u, \mathrm{grad}\ \phi_n \rangle\ d\Omega = \int_\Omega u\ \phi_n d\Omega.$$

Logo, pelo teorema (3.1), temos

$$\int_\Omega |\mathrm{grad}\ u|^2\ d\Omega = \int_\Omega fu\ d\Omega$$

Pela desigualdade de Poincaré e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos:

$$c \int_\Omega u^2\ d\Omega \leqslant \int_\Omega |\mathrm{grad}\ u|^2\ d\Omega = \int_\Omega fu\ d\Omega \leqslant \left(\int_\Omega f^2\ d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega u^2\ d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

Daí segue

$$\left(\int_\Omega u^2\ d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant k \left(\int_\Omega f^2\ d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

ou seja,

$$\left(\int_{\Omega} |\mathsf{Tf}|^2 \, d\Omega\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant k\left(\int_{\Omega} f^2 \, d\Omega\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Como todo operador linear limitado é contínuo, temos que T é contínuo. Além disso, a imagem de T está contida em H_0^1 e a teoria do espaço Sobolev nos garante que H_0^1 está contido de forma compacta em $L^2(\Omega)$, portanto T é um operador compacto, isto é, dado um conjunto limitado $D \subset L^2$, $T(D) \subset L^2$ é compacto.

III) T é auto-adjunto em relação ao produto interno de L^2.

Dado $g \in L^2$, existe $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\Delta u_1 = g$ e dado $f \in L^2$ existe $u_2 \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\Delta u_2 = f$. Segue-se que

$$\int_{\Omega} \mathsf{Tf} \, . \, g \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathsf{Tf} \, . \, \Delta u_1 \, d\Omega = \int_{\Omega} u_2 \, . \, \Delta u_1 \, d\Omega = \int_{\Omega} \Delta u_2 \, . \, u_1 \, d\Omega = \int_{\Omega} f \, . \, \mathsf{Tg} \, d\Omega.$$

Teorema 3.2. (*Brezis, H.,* [3]) *O conjunto dos autovalores de um operador linear compacto* $T : X \to X$ *em um espaço vetorial normado* X *é enumerável e o único ponto de acumulação possível é o zero.*

Assim, a teoria espectral de operadores compactos simétricos (Brézis, H., [3], pág. 89) pode ser aplicada ao operador T. Isto é, o conjunto dos autovalores de T é enumerável e tem como zero o único ponto possível de acumulação. Seja η um autovalor de T, logo existe uma autofunção $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$Tu = \eta u. \tag{3.2}$$

Como $-\Delta$ é o inverso de T, temos por (3.2) que $-\Delta \, u = \dfrac{1}{\eta} u$, ou seja, $-\Delta \, u = \lambda u$, onde $\lambda = \dfrac{1}{\eta}$. Pelo teorema (3.1), obtemos

$$\int_{\Omega} \langle \mathrm{grad}\, u, \mathrm{grad}\, \phi \rangle \, d\Omega = \lambda \int_{\Omega} u \, \phi \, d\Omega, \ \forall \, \phi \in C_0^{\infty}(\Omega). \tag{3.3}$$

Como $H_0^1(\Omega) = \overline{C_0^{\infty}(\Omega)}$, podemos escolher uma sequência ϕ_n em $C_0^{\infty}(\Omega)$ convergindo para $u \in H_0^1(\Omega)$ na norma do $L^2(\Omega)$, teremos:

$$\int_{\Omega} \langle \mathrm{grad}\, u, \mathrm{grad}\, \phi_n \rangle \, d\Omega = \int_{\Omega} u \, \phi_n d\Omega.$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} |\mathrm{grad}\, u|^2 \, d\Omega = \lambda \int_{\Omega} u^2 \, d\Omega > 0.$$

Podemos concluir que $-\Delta$ é posititvo definido, e assim T também será positivo definido. Portanto temos um sequência de autovalores $\{\eta_n\}$ de T, todos positivos, tal que $\eta_n \to 0$. Por outro lado, podemos falar do espectro do laplaciano como uma sequência de autovalores $\{\lambda_n\}$ todos positivos, onde

$$0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant .... \leqslant \lambda_n \to \infty.$$

Definição 3.2. (*Brezis, H.,* [3]) *Chama-se Base Hilbertiana toda sucessão* $(v_n)_{n \geqslant 1}$ *de elementos de H (espaço de Hilbert) tais que*

1. $|v_n| = 1, \ \forall n$ *e* $\langle v_n, v_m \rangle = 0, \ \forall m \neq n$;

2. *o espaço vetorial gerado por* (v_n) *é denso em H.*

Teorema 3.3. *Existe uma base Hilbertiana* $(v_n)_{n \geqslant 1}$*, que denominamos autovetores, do* $L^2(\Omega)$*,* Ω *dominio limitado, e existe uma sucessão* $(\lambda_n)_{n \geqslant 1}$*, que denominamos autovalores, de números reais com* $\lambda_n > 0$ *e* $\lambda_n \to +\infty$ *tal que*

$$-\Delta v_n = \lambda_n v_n \text{ em } \Omega$$

onde $v_n \in H_0^1(\Omega) \cap C_0^\infty(\Omega)$*.*

Proposição 3.1. (*Brézis, H.,* [3]) *Seja* $\Omega \subset M$ *um domínio limitado, então*

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \frac{\displaystyle\int_\Omega |\text{grad } u|^2 dM}{\displaystyle\int_\Omega |u|^2 dM}; \ u \in H_0^1 \right\}. \tag{3.4}$$

Demonstração: Seja $(v_n)_{n \geqslant 1}$ uma base Hilbertiana, dado $u_n \in H_0^1(\Omega)$ com $u \neq 0$, podemos escrever

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \tag{3.5}$$

aplicando o Laplaciano e fazendo o produto interno por u em ambos os lados da iguadade (3.5);

$$\langle -\Delta u_n, u_n \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_1, \tag{3.6}$$

ou seja,

$$\frac{\displaystyle\int_\Omega |\text{grad } u_n|^2 \ dM}{\displaystyle\int_\Omega |u_n|^2 \ dM} = \frac{\langle -\Delta u_n, u_n \rangle}{\|u_n\|^2} \leqslant \lambda_1. \tag{3.7}$$

Passando o limite em n na equação (3.7), obtemos

$$\frac{\langle -\Delta u, u\rangle}{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2} \leqslant \lambda_1.$$

Como $\int_\Omega \|u\|^2 \; dM = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2$ e $\langle -\Delta u, u\rangle = \int_\Omega u \; (-\Delta u) \; dM = \int_\Omega \|\nabla u\|^2 \; dM$, teremos

$$\lambda_1 \leqslant \frac{\int_\Omega |\mathrm{grad}\ u|^2 dM}{\int_\Omega |u|^2 dM}$$

para qualquer $u \in H_0^1(\Omega)$. ∎

O primeiro autovalor do laplaciano em M é definido por

$$\lambda_1(M) = \inf \{\lambda_1(D) : \; D \subset M \text{ é um domínio limitado aberto } \}$$

Seja Ω um subconjunto de M. O primeiro autovalor do laplaciano em $M \backslash \Omega$ é dado por

$$\lambda_1(M\backslash\Omega) = \inf \{\lambda_1(D) : \; D \subset M\backslash\Omega \text{ é um domínio limitado aberto } \}$$

Definição 3.3. *Um operador diferencial linear de segunda ordem num aberto* $\Omega \subset M$ *é uma aplicação linear* $L : C^2(\Omega) \to C^0(\Omega)$ *da forma*

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_{ij} u + \sum_{i=1}^{n} b_i D_i u + cu$$

com coeficientes $a_{ij} = a_{ji}, b_i e c \in C^0(\Omega)$. *Diremos que* L *é elíptico em* Ω *quando a matriz* $(a_{ij}(x)_{i,j=1,2,\ldots,n})$ *é positiva definida para todo* $x \in \Omega$.

Teorema 3.4. (*Princípio do Máximo de Hopf*) *Seja* $L = \sum a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c$ *um operador uniformemente elíptico em um domínio* Ω. *Assumimos* $L(u) \geqslant 0$ *para uma função* $u \in C^2(\Omega)$. *Então,*

1. *se* $c = 0$ *e* u *atinge o máximo em* Ω *então* u *é constante.*

2. *se* $c \leqslant 0$ *e* u *atinge o máximo em* Ω, *e este máximo é não negativo, então* u *é constante.*

Pucci, P. e Serrin, J. [18], página: 49, Teorema: 9.1, mostraram que o Principio de Máximo de Hopf pode ser aplicado a variedade riemanniana. Portanto pode-se usar o Principio do Máximo de Hopf para se provar o seguinte lema:

Lema 3.1. (*Cheng, J. Y., e Yau, S. T.*, [7]) *Seja* $u \in C^2(\Omega)$ *uma função positiva em* M *e seja* $r_0 > 0$ *um constante. Então*

$$\lambda_1(M - B(r_0)) \geqslant \inf\left(-\frac{\Delta u}{u}\right).$$

Demonstração: Dados $r > r_0 > 0$, seja $\Omega = B(r) - \overline{B(r_0)} \subset M$ um anel. Considere a autofunção de Δ, $g \in C_0^\infty(\Omega)$, definimos

$$f = \frac{g}{u}$$

onde $f > 0$ e $f|_{\partial\Omega} = 0$. Sendo $g = fu$, calculando o Laplaciano da g, obteremos em Ω

$$\begin{aligned}\Delta g &= \Delta(f.u) = f\Delta u + u\Delta f + 2\langle \text{grad } f, \text{grad } u\rangle \\ &= g\frac{\Delta u}{u} + \frac{g}{f}\Delta f + 2\langle \text{grad } f, \text{grad } u\rangle\end{aligned}$$

Dividindo por g, obtemos

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta u}{u} + \frac{\Delta f}{f} + \frac{2}{g}\langle \text{grad } f, \text{grad } u\rangle$$

Logo,

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta g}{g} - \frac{\Delta u}{u} - \frac{2}{fu}\langle \text{grad } u, \text{grad } f\rangle,$$

ou seja,

$$\Delta f = f\left\{\frac{\Delta g}{g} - \frac{\Delta u}{u}\right\} - \frac{2}{u}\langle \text{grad } u, \text{grad } f\rangle$$

Assim, temos o operador elíptico,

$$Lf = \Delta f + \frac{2}{u}\langle \text{grad } u, \text{grad } f\rangle - f\left\{\frac{\Delta g}{g} - \frac{\Delta u}{u}\right\}$$

onde $Lf = 0$. Suponhamos por absurdo que

$$f\left\{\frac{\Delta g}{g} - \frac{\Delta u}{u}\right\} \geqslant 0.$$

Logo, $c = -f\left\{\frac{\Delta g}{g} - \frac{\Delta u}{u}\right\} \leqslant 0$, assim pelo Princípio do Máximo de Hopf, segue-se que f é constante e portanto $f \equiv 0$. Assim chegamos a uma contradição, logo $f\left\{\frac{\Delta g}{g} - \frac{\Delta u}{u}\right\} < 0$, isto é,

$$\inf\left\{\frac{\Delta g}{g} - \frac{\Delta u}{u}\right\} < 0 \text{ em } \Omega.$$

Então,

$$\inf\left\{-\lambda_1(\Omega)-\frac{\Delta u}{u}\right\}<0.$$

Como $\Omega\subset M\backslash B(r_0)$ e $\lambda_1(M\backslash B(r_0))=\inf\{\lambda_1(\Omega)\}$,tem-se

$$\lambda_1(M\backslash B(r_0))>\inf_{(M\backslash B(r_0))}\left(-\frac{\Delta u}{u}\right)$$

■

Considerando $M^n=R^n$ tem-se que $\lambda_1(R^n)=\lambda_1(R^n\backslash\Omega)=0$ para qualquer domínio compacto $\Omega\subset R^n$. Cheng e Yau, [7], mostraram que $\lambda_1(M)=0$ se a variedade possui volume de crescimento polinomial. Mas esse resultado não se aplica no complementar de um conjunto compacto em uma variedade riemanniana. Isso nos diz que, em geral, $\lambda_1(M)\neq\lambda_1(M\backslash\Omega)$ se $\Omega\neq 0$. Isso pode ser visto através do seguinte exemplo:

Exemplo 3.1. *Seja* $M=(R^2,ds^2)$*, com* $ds^2=dr^2+g(r)^2d\theta^2$*, onde* $g(r)$ *é uma função de classe* C^2 *não-negativa com* $g(r)>0$*,* $\forall\ r>0$*,* $g(r)=0$ *se* $r=o$ *e* $g(r)=e^{-r}$ *se* $r>1$*.*

Afirmamos que o volume de M é finito.

De fato, considerando $\varphi:R^2\to M;\ \varphi(r,\theta)\mapsto(r\cos\theta,r\operatorname{sen}\theta)$ uma parametrização de M, onde $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$. Como

$$\mathrm{Vol}(M)=\int_{\varphi^{-1}}\sqrt{\det g_{ij}}dx_1dx_2\ ;\ 1\leqslant i,j\leqslant 2$$

e sendo $\det g_{ij}=g(r)^2$, temos

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(M-B_1(0))&=\lim_{t\to\infty}\int_1^t\int_0^{2\pi}g(r)drd\theta=\lim_{t\to\infty}\int_1^t\int_0^{2\pi}e^{-r}d\theta dr\\&=\lim_{t\to\infty}\int_1^t e^{-r}2\pi dr=\lim_{t\to\infty}2\pi\Big[-e^{-r}\Big]_1^t\\&=\lim_{t\to\infty}2\pi\Big[-e^{-t}+e^{-1}\Big]=\frac{2\pi}{e}.\end{aligned}$$

Assim, $\lambda_1(M)=0$. Por outro lado, $u(x)=e^{\frac{1}{2}|x|}$ é uma solução positiva de

$$\Delta u+\lambda u=0$$

em $M\backslash B(1)$ onde $B(1)$ é a bola unitária. Daí, segue-se que $\lambda_1(M\backslash B(1))=\dfrac{1}{4}$.

De fato, considere o referencial ortonormal $\left\{e_1=\dfrac{\partial}{\partial r},\ e_2=\dfrac{1}{g(r)}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right\}$. Logo,

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\ u=\sum_{i=1}^2 e_i(u)e_i&=\frac{\partial}{\partial r}(e^{\frac{1}{2}r})\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{g(r)}\frac{\partial}{\partial\theta}(e^{\frac{1}{2}r})\frac{1}{g(r)}\frac{\partial}{\partial\theta}\\&=\frac{\partial}{\partial r}(e^{\frac{1}{2}r})\frac{\partial}{\partial r}=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}r}\frac{\partial}{\partial r}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\Delta u &= \sum_{i=1}^{2}\left\langle \nabla_{e_i}(\operatorname{grad} u), e_i\right\rangle = \sum_{i=1}^{2}\left\langle \nabla_{e_i}(\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}r}), e_i\right\rangle\\
&= \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}(\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}r}\frac{\partial}{\partial r}), \frac{\partial}{\partial r}\right\rangle + \left\langle \nabla_{\frac{1}{g(r)}\frac{\partial}{\partial \theta}}(\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}r}\frac{\partial}{\partial r}), \frac{1}{g(r)}\frac{\partial}{\partial \theta}\right\rangle
\end{aligned}$$

usando algumas propriedades de conexão e métrica, temos

$$\begin{aligned}
\Delta u &= \frac{1}{2}\left\langle \frac{\partial}{\partial r}(e^{\frac{1}{2}r})\frac{\partial}{\partial r} + e^{\frac{1}{2}r}\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right\rangle + \frac{1}{2g^2}\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta}}(e^{\frac{1}{2}r}\frac{\partial}{\partial r}), \frac{\partial}{\partial \theta}\right\rangle\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}r}\left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right\rangle + e^{\frac{1}{2}r}\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right\rangle\right] + \frac{1}{2g^2}\left\langle \frac{\partial}{\partial \theta}(e^{\frac{1}{2}r})\frac{\partial}{\partial r} + e^{\frac{1}{2}r}\nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta}}\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right\rangle\\
&= \frac{e^{\frac{1}{2}r}}{4} + \frac{e^{\frac{1}{2}r}}{2g^2}\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta}}\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right\rangle.
\end{aligned}$$

Como $\nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta}}\frac{\partial}{\partial r} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}\frac{\partial}{\partial \theta}$, temos

$$\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right\rangle = \frac{\partial}{\partial r}\left\langle \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right\rangle - \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right\rangle,$$

ou seja,

$$\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left\langle \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right\rangle.$$

Como $\left\langle \frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial \theta}\right\rangle = 1$, temos $\left\langle \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right\rangle = g^2$. Daí,

$$\begin{aligned}
\Delta u &= \frac{e^{\frac{1}{2}r}}{4} + \frac{e^{\frac{1}{2}r}}{2g^2}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left\langle \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right\rangle\\
&= \frac{e^{\frac{1}{2}r}}{4} + \frac{e^{\frac{1}{2}r}}{2g^2}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}g(r)^2\\
&= \frac{e^{\frac{1}{2}r}}{4} + \frac{e^{\frac{1}{2}r}}{2g^2}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}e^{-2r}\\
&= \frac{e^{\frac{1}{2}r}}{4} + \frac{e^{\frac{1}{2}r}}{2e^{-2r}}\frac{-2e^{-2r}}{2}\\
&= \frac{e^{\frac{1}{2}r}}{4} - \frac{e^{\frac{1}{2}r}}{2} = -\frac{e^{\frac{1}{2}r}}{4}.
\end{aligned}$$

Portanto, $-\frac{e^{\frac{1}{2}r}}{4} + \lambda e^{\frac{1}{2}r} = 0$, isso implica que, $\lambda = \frac{1}{4}$. Sendo $u(x) > 0$, pelo lema anterior obtemos $\lambda_1(M\backslash B(1)) \geqslant \inf(-\frac{\Delta u}{u}) = \frac{1}{4}$.

Vamos usar o Teorema da Oscilação obtido na seção anterior para dar algumas estimativas sobre o primeiro autovalor do laplaciano no complementar de compactos em variedades riemannianas, a principal referência desse resultado é do Carmo, M. P. e Zhou, D., [9]. Fixaremos um ponto $p \in M$ e denotaremos por $B(r) = \{x \in M; \operatorname{dist}(x,p) \leqslant r\}$ e $V(B_r(p))$ o volume da bola $B_r(p)$.

Teorema 3.5. *Seja M uma variedade riemanniana completa, não-compacta com volume infinito e* Ω*, um subconjunto compacto de M. Então*

1. *Se* $V(B_r(p)) \leqslant Cr^a$ *para qualquer* $r \geqslant r_0$ *e certas constantes positivas* C, r_0 *e* a*, então* $\lambda_1(M\backslash\Omega) = 0$.

2. *Se* $V(B_r(p)) \leqslant Ce^{ar}$ *para qualquer* $r \geqslant 0$ *e certas constantes positivas C e a, então* $\lambda_1(M\backslash\Omega) \leqslant \frac{a^2}{4}$.

Demonstração: Vamos denotar por $\nu(r)$ a área da esfera $\partial B_r(p)$. Então

$$V(B_r(p)) = \int_0^r \nu(t)dt$$

Se $V(M) = +\infty$, então

$$\int_T^{+\infty} \nu(t)dt = \lim_{r\to\infty} \int_T^r \nu(t)dt = \lim_{r\to\infty} V(B_r(p)) = +\infty, \ \forall T > 0.$$

Sendo Ω um subconjunto compacto, podemos encontrar uma constante T_0 tal que $\Omega \subset B(T_0)$.

Se a **condição** 1) é satisfeita, então pelo teorema da Oscilação para qualquer $\lambda > 0$ existe uma solução não-trivial $x_\lambda(t)$ da equação oscilatória

$$(\nu(t)x'(t))' + \lambda\nu(t)x(t) = 0 \text{ em } [T_0, +\infty)$$

com $\nu(t)$ uma função positiva contínua em $[T_0, +\infty)$. Portanto, existem dois números T_1^λ e T_2^λ em $[T_0, +\infty)$ de tal forma que $T_1^\lambda < T_2^\lambda$ e $x_\lambda(T_1^\lambda) = x_\lambda(T_2^\lambda) = 0$, e $x_\lambda(t) \neq 0$, $\forall t \in (T_1^\lambda, T_2^\lambda)$.

Seja $\varphi_\lambda(x) = x_\lambda(r(x))$, onde $r(x) = \mathtt{dist}(x, p)$ é a função distancia relativa a algum $p \in M$. Denotamos por Ω_λ o anel

$$\Omega_\lambda = B(T_2^\lambda) - B(T_1^\lambda) \subset M - \Omega.$$

Segue-se que

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant \lambda_1(M\backslash\Omega) &\leqslant \lambda(\Omega_\lambda)\\
&\leqslant \frac{\int_{\Omega_\lambda} |\nabla\varphi_\lambda|^2 dM}{\int_{\Omega_\lambda} |\varphi_\lambda|^2 dM}\\
&= \frac{\displaystyle\int_{T_1^\lambda}^{T_2^\lambda} |x_\lambda'(r)|^2 \nu(r)dr}{\displaystyle\int_{T_1^\lambda}^{T_2^\lambda} (x_\lambda(r))^2 \nu(r)dr}\\
&= \frac{\displaystyle\int_{T_1^\lambda}^{T_2^\lambda} (x_\lambda'(r))(x_\lambda'(r))\nu(r)dr}{\displaystyle\int_{T_1^\lambda}^{T_2^\lambda} (x_\lambda(r))^2 \nu(r)dr}.
\end{aligned}
$$

Utilizando integração por partes no numerador temos

$$\int_{T_1^\lambda}^{T_2^\lambda} (x_\lambda'(r))(x_\lambda'(r)\nu(r))dr = x_\lambda(r)(x_\lambda'(r)\nu(r)\Big|_{T_1^\lambda}^{T_2^\lambda} - \int_{T_1^\lambda}^{T_2^\lambda} x_\lambda(r)(x_\lambda'(r)\nu(r))'dr$$

Como $x_\lambda(T_1^\lambda) = x_\lambda(T_2^\lambda) = 0$, segue que

$$\int_{T_1^\lambda}^{T_2^\lambda} (x_\lambda'(r))(x_\lambda'(r)\nu(r))dr = -\int_{T_1^\lambda}^{T_2^\lambda} x_\lambda(r)(x_\lambda'(r)\nu(r))'dr.$$

Assim,

$$0 \leqslant \lambda_1(M\backslash\Omega) \leqslant \frac{\displaystyle -\int_{T_1^\lambda}^{T_2^\lambda} x_\lambda(r)(x_\lambda'(r)\nu(r))'dr}{\displaystyle\int_{T_1^\lambda}^{T_2^\lambda} (x_\lambda(r))^2 \nu(r)dr} = \lambda$$

Como λ é uma constante positiva arbitrária, temos $\lambda_1(M\backslash\Omega) = 0$. O que prova a primeira condição do teorema.

Se a **condição** 2) for satisfeita, então pelo teorema da Oscilação para qualquer $\lambda > \dfrac{a^2}{4}$ existe uma solução não-trivial $x_\lambda(t)$ da equação

$$(\nu(t)x'(t))' + \lambda\nu(t)x(t) = 0 \text{ em } [T_0, +\infty)$$

com $\nu(t)$ uma função positiva contínua em $[T_0, +\infty)$. Portanto, existem dois números T_1^λ e T_2^λ em $[T_0, +\infty)$ de tal forma que $T_1^\lambda < T_2^\lambda$ e $x_\lambda(T_1^\lambda) = x_\lambda(T_2^\lambda) = 0$, e $x_\lambda(t) \neq 0$ para qualquer $t \in (T_1^\lambda, T_2^\lambda)$.

Seja $\varphi_\lambda(x) = x_\lambda(r(x))$, onde $r(x) = \mathtt{dist}(x, p)$ é a função distância para algum $p \in M$. Denotamos por Ω_λ o anel

$$\Omega_\lambda = B(T_2^\lambda) - B(T_1^\lambda) \subset M - \Omega.$$

Segue-se que

$$\begin{aligned}
\lambda_1(M\backslash\Omega) &\leqslant \lambda(\Omega_\lambda)\\
&\leqslant \frac{\int_{\Omega_\lambda}|\nabla\varphi_\lambda|^2 dM}{\int_{\Omega_\lambda}|\varphi_\lambda|^2 dM}\\
&= \frac{\displaystyle\int_{T_1^\lambda}^{T_2^\lambda}|x_\lambda'(r)|^2\nu(r)dr}{\displaystyle\int_{T_1^\lambda}^{T_2^\lambda}(x_\lambda(r))^2\nu(r)dr}\\
&= \lambda
\end{aligned}$$

Sendo λ uma constante positiva arbitrária maior que $\frac{a^2}{4}$, tem-se que $\lambda_1(M\backslash\Omega) \leqslant \frac{a^2}{4}$. Assim, provamos a segunda condição do teorema. ∎

Teorema 3.6. (*Teorema da Comparação de Volume de Bishop*) *Suponha que a curvatura de Ricci em* M *são todos iguais ou superiores a* $(n-1)k$. *Então, para todo* $x \in M$ *e todo* $r > 0$ *temos*

$$V(x;r) \leqslant V_k(r), \tag{3.8}$$

onde $V_k(r)$ *é o volume da bola no espaço hiperbólico do curvatura constante* K.

Demonstração: *A prova desse resultado pode ser visto em Chavel, I.,* [5]. ∎

Corolário 3.1. *Seja M uma variedade riemanniana não-compacta completa com volume satisfazendo*

$$V(r) \leqslant Ce^{ar}$$

onde $r(x)$ *é a função distancia para um ponto fixo em M e C, a são constantes positivas. Então* $\lambda_1 \leqslant \frac{a^2}{4}$. *Em particular, se a curvatura de Ricci é limitada abaixo por alguma cosntante não positiva* $-(n-1)K^2$ *fora de algum conjunto compacto, então* $\lambda_1(M) \leqslant \dfrac{(n-1)^2k^2}{4}$.

Demonstração: Pelo Teorema da Comparação de Bishop, temos que $V(r) \leqslant Ce^{(n-1)kr}$ para certas constantes positivas C, k e r. Assim, pelo item 2) do teorema (3.5) obtemos o resultado. ∎

Obs 3.1. *No teorema* (3.5) *a condição de volume do item* 1) *pode ser substituído pela seguinte condição de crescimento subexponencial;*

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\log\ vol(B(r))}{r} = 0.$$

Capítulo 4

Algumas Aplicações

Seja $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana aberta M^n em uma variedade riemanniana completa, orientada $\overline{M}^{n+1}$. Considere N um campo unitário normal ao longo de M, $\overline{Ric}(N)$ é o valor da curvatura de Ricci em $\overline{M}$ no vetor N.

Seja L o operador diferencial de segunda ordem em M dado por

$$L = \Delta_M + \|B\|^2 + \overline{Ric}(N),$$

onde Δ_M é o laplaciano em M e $\|B\|^2$ é a segunda forma fundamental de x. Associamos a L a forma quadrática

$$I(f) = -\int_M f\ L\ f\ dM$$

definida no espaço vetorial das funções f em M que têm suporte em um domínio compacto $K \subset M$. Para cada um desses K, definimos o índice ($ind_L K$) de L em K como a dimensão máxima de um subespaço onde I é definida negativa. O índice ($ind\ M$) de L em M é definido por

$$ind\ M = \sup_{K \subset M}\ ind_L K,$$

onde o supremo é tomado sobre todos os domínios compactos $K \subset M$.

Teorema 4.1. (*do Carmo, M. P. e Zhou, D.*, [9]) *Seja* $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ *uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana completa com volume infinito em uma variedade riemanniana completa orientada. Assumimos que* x *tem curvatura média constante H,* $indM < +\infty$ *e o volume em* M *tem crescimento sub-exponencial. Então existe uma constante positiva* $r_0 > 0$ *tal que para todo* $r > r_0$*, tem-se*

$$H^2 \leqslant -\frac{1}{n} \inf_{(M \setminus B(r))} \overline{Ric}(N)$$

Demonstração: Em Elbert, M. F., [13] pode ser visto a prova do seguinte resultado: Se o $\mathrm{ind} < +\infty$, então existem um conjunto compacto $K \subset M$ e uma função positiva u em M tais que

$$0 = Lu = \Delta u + \|B\|^2 u + \overline{\mathrm{Ric}}(N)u \text{ em } M \backslash K.$$

Podemos encontrar um constante positiva r_0 tal que $K \subset B(r_0)$. Como o volume em M tem crescimento sub-exponencial, pelo teorema (3.4) e pela observação (3.1), obtemos $\lambda_1(M \backslash B(r)) = 0$, $\forall r \geqslant r_0$. Pelo lema (3.1), temos

$$\begin{aligned} 0 = \lambda_1(M \backslash B(r)) &\geqslant \inf_{(M \backslash B(r))} \left(-\frac{\Delta u}{u} \right) \\ &\geqslant \inf_{(M \backslash B(r))} (\|B\|^2 + \overline{\mathrm{Ric}}(N)) \\ &\geqslant \inf_{(M \backslash B(r))} (nH^2 + \overline{\mathrm{Ric}}(N)) \end{aligned}$$

Como H é uma constante, tem-se que

$$nH^2 + \inf_{M \backslash B(r)} \overline{\mathrm{Ric}}(N) \leqslant 0$$

Logo,

$$H^2 \leqslant -\frac{1}{n} \inf_{M \backslash B(r)} \overline{\mathrm{Ric}}(N)$$

■

Teorema 4.2. (*do Carmo, M. P. e Zhou, D.,* [9]) *Seja* $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ *uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana completa com volume infinito em uma variedade riemanniana completa orientada. Assumimos que x tem curvatura média constante H,* $\mathrm{ind}\, M < +\infty$ *e o volume em* M *satisfaz* $\mathrm{Vol}(B(r)) \leqslant Ce^{ar}$ *com* $r \geqslant 0$ *e certas constantes C e a. Então existe uma constante positiva* $r_0 > 0$ *tal que para todo* $r > r_0$*, tem-se*

$$H^2 \leqslant \frac{a^2}{4n} - \frac{1}{n} \inf_{(M \backslash B(r))} \overline{\mathrm{Ric}}(N) \tag{4.1}$$

Em particular, se $\overline{\mathrm{Ric}}(N) \geqslant \frac{a^2}{4}$*, então M é mínima. Se* $\mathrm{Ric}_M \geqslant -(n-1)K^2$ *fora de um conjunto compacto, então*

$$H^2 \leqslant \frac{(n-1)^2 K^2}{4n} - \frac{1}{n} \inf_{(M \backslash B(r))} \overline{\mathrm{Ric}}(N)$$

Demonstração: Como $\mathrm{ind} M < +\infty$, existem um compacto $K \subset M$ e uma função u em M tal que

$$0 = Lu = \Delta u + \|B\|^2 u + \overline{\mathrm{Ric}}(N)u \text{ em } M\backslash K$$

Sendo $\mathrm{Vol}(M) = +\infty$, podemos encontrar uma constante r_0 tal que $K \subset B(r_0)$ e segue pelo teorema (3.4), pois $\mathrm{Vol}(B(r)) \leqslant Ce^{ar}$, que

$$\lambda_1(M\backslash B(r)) \leqslant \frac{a^2}{4}, \ \forall r \geqslant r_0$$

Pelo lema (3.1), temos

$$\begin{aligned}
\frac{a^2}{4} &\geqslant \lambda_1(M\backslash B(r)) \geqslant \inf\left(-\frac{\Delta u}{u}\right) \\
&\geqslant \inf_{M\backslash B(r)}(\|B\|^2 + \overline{\mathrm{Ric}}(N)) \\
&\geqslant \inf_{M\backslash B(r)}(nH^2 + \overline{\mathrm{Ric}}(N))
\end{aligned}$$

Assim,

$$nH^2 + \inf_{M\backslash B(r)} \overline{\mathrm{Ric}}(N) \leqslant \frac{a^2}{4}$$

Logo,

$$H^2 \leqslant \frac{a^2}{4} - \frac{1}{n}\inf_{M\backslash B(r)} \overline{\mathrm{Ric}}(N)$$

Em particular, se $\overline{\mathrm{Ric}}(N) \geqslant \dfrac{a^2}{4}$, temos

$$H^2 \leqslant \frac{a^2}{4n} - \frac{a^2}{4n} = 0$$

Ou seja, x é mínima. Se $\mathrm{Ric}_M \geqslant -(n-1)K^2$ fora de um conjunto compacto, então pelo corolário (3.0.1), tem-se que $a = (n-1)K$, substituindo na equação (4.1), obtemos

$$H^2 \leqslant \frac{(n-1)^2K^2}{4n} - \frac{1}{n}\inf_{(M\backslash B(r))} \overline{\mathrm{Ric}}(N)$$

■

Admitimos agora que M tenha crescimento de volume específico e que seja imersa em uma bola de algum espaço euclidiano, então o raio da bola é delimitado abaixo por um número dependendo do crescimento do volume e da curvatura média da imersão. Mais especificamente,

Teorema 4.3. (*do Carmo, M. P. e Zhou, D.,* [9]) *Se* M *possui crescimento de volume sub-exponencial e* $f(M) \subset B(o,\rho) \subset R^{n+k}$ *para algum* $o \in M$ *e* $\rho > 0$ *onde* $f : M \to R^{n+k}$ *é uma imersão, então*

$$\sup_{x\in M} \|H(x)\| > \frac{1}{\rho}.$$

Se $\mathsf{Vol}(B(r)) \leqslant Ce^{ar}$ *e* $\rho < \dfrac{2\sqrt{n}}{a}$, *então*

$$\sup_{x\in M} \|H(x)\| > \frac{1}{\rho}$$

onde $\overrightarrow{H}$ *é o vetor de curvatura média.*

Demonstração: Pela proposição (1.12) para qualquer função $F : R^{n+k} \to R$ de classe C^2, o Laplaciano da restrição de F a M, $f = F\Big|_M$, é dado por

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{Hess}\ F(e_i, e_i) + n\langle \vec{H}, grad\ F\rangle$$

onde $\overrightarrow{H}$ é a curvatura média. Suponhamos que $\sup_{x\in M} \|H(x)\| \leqslant \dfrac{1}{\rho}$. Defina a função positiva por $u(x) = \rho^2 - r^2(x)$, onde $r(x)$ é a função distância entre x e o do R^{n+k} restrito a imagem de M. Então

$$\Delta_M u(x) = -2n + n\langle H, -2r(x) grad\ r(x)\rangle$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\Delta_M u(x) \leqslant -2n + 2n\|H(x)\|.r(x)$$

Como estamos supondo $\sup_{x\in M} \|H(x)\| \leqslant \dfrac{1}{\rho}$, temos

$$\Delta_M u(x) \leqslant -\frac{2n}{\rho}[\rho - r(x)]$$

Sendo $(\rho - r(x))^2 = \rho^2 - 2\rho r(x) + r^2(x) \geqslant 0$, somando $-2\rho^2$ a ambos os lados da desigualdade anterior, obtemos

$$\rho^2 - r^2(x) \leqslant 2\rho^2 - 2\rho r(x)$$

Logo, usando a desigualdade anterior, obtemos

$$\Delta_M u(x) \leqslant -\frac{2n}{\rho}.\frac{1}{2\rho}[\rho^2 - r^2(x)] \leqslant -\frac{n}{\rho^2}u.$$

Como $u > 0$, dividindo por u e mutiplicando por -1, temos:

$$\frac{\Delta_M u(x)}{u(x)} \geqslant \frac{n}{\rho^2}.$$

Pelo lema (4.1), obtemos que $\lambda_1(M\backslash\Omega) \geqslant \dfrac{n}{\rho^2}$. Assim chegamos a uma contradição, pois o teorema (3.4) nos garante que $\lambda_1(M\backslash\Omega) = 0$. ■

Capítulo 5

Estimativa do autovalor do p-Laplaciano

As principais referências para esse capítulo são: Dosly, O. e Rehak, P., [8] e Lima, B. P. e Santos, N. L., [16].

Seja M uma variedade riemanniana suave e $\Omega \subset M$ um domínio. Para qualquer $p \in (1, \infty)$, p-laplaciano em Ω é dado por

$$\Delta_p u = -div\ (\|grad\ u\|^{p-2} grad\ u) \tag{5.1}$$

onde $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Estamos interessados no problema de autovalor não-linear

$$\Delta_p u + \lambda |u|^{p-2} u = 0 \tag{5.2}$$

As soluções para este problema, para $p \in (1, \infty)$ são apenas local $C^{1,\alpha}$(exceto no caso $p = 2$), elas devem ser descritas no sentido de distribuição, isto é, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, não identicamente nula é uma auto-função, associada ao autovalor λ, se

$$\int_\Omega \|grad\ u\|^{p-2} \langle grad\ u, grad\ \phi\rangle\ d\Omega = \lambda \int_\Omega |u|^{p-2} u\ \phi\ d\Omega \tag{5.3}$$

para qualquer função $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Seja $p > 1$, denotamos $\Phi(s) = |s|^{p-2}s$, $s \in \mathbb{R}$. No que segue, $p, q > 0$ representarão expoente conjugados, isto é, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Considere a equação do tipo Liouville

$$(\nu(t)\Phi(x'(t)))' + \lambda \nu(t)\Phi(x(t)) = 0 \tag{5.4}$$

Esta equação está intimamente ligada à equação de Ricatti:

$$y(t)' = \lambda\nu(t) + (p-1)\nu(t)^{1-q}y(t)^q \tag{5.5}$$

De fato, se $x(t)$ é uma solução positiva de (5.4), então

$$y(t) = -\frac{\nu(t)\Phi(x'(t))}{\Phi(x(t))} \tag{5.6}$$

é solução de (5.5), pois

$$\begin{aligned}
y'(t) &= -(\frac{(\nu(t)\Phi(x'(t)))'}{\Phi(x(t))} + \frac{\nu(t)\Phi(x'(t))\Phi'(x(t))}{\Phi^2(x(t))} \\
&= \lambda\nu(t) + \frac{\nu(t)\Phi(x'(t))(p-1)x(t)^{p-2}x'(t)}{\Phi^2(x(t))} \\
&= \lambda\nu(t) + (p-1)\nu(t)\frac{|x'(t)|^{p-2}x'(t)x(t)x'(t)}{|x(t)|^{2(p-2)}x^2(t)} \\
&= \lambda\nu(t) + (p-1)\nu(t)\frac{|x'(t)|^p}{|x(t)|} \\
&= \lambda\nu(t) + (p-1)\nu(t)\frac{(|x'(t)|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}}}{(|x(t)|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}}} \\
&= \lambda\nu(t) + (p-1)\nu(t)\frac{\Phi(x'(t))^q}{\Phi(x(t))^q} \\
&= \lambda\nu(t) + (p-1)\left(\nu(t)\frac{\Phi(x'(t))}{\Phi(x(t))}\right)^q\frac{1}{\nu(t)^{q-1}} \\
&= \lambda\nu(t) + (p-1)y(t)^p\frac{1}{\nu(t)^{q-1}}
\end{aligned}$$

Teorema 5.1. (*Dosly, O. e Rehak, P.,* [8]) *Dados* $t_o \in [T_0, \infty)$ *e* $A,\ B \in R$*, então existe uma única solução de* (5.4) *satisfazendo* $x(t_0) = A,\ x'(t_0) = B$ *a qual é extensível ao longo de todo intervalo* $[T_0, \infty)$*. Esta solução depende continuamente dos valores iniciais* $A,\ B$*.*

Chamamos a equação (5.4) oscilatória se uma solução dessa equação possuem zeros em $(T_1, +\infty)$, $T_1 > T_0$ em $[T_0, +\infty)$. Caso contrário; dizemos que a equação (5.4) é não oscilatória.

Teorema 5.2. (*Lima, B. P. e Santos, N. L.,* [16]) *Seja* $\nu(t)$ *uma função positiva contínua em* $[T_0, \infty)$*, e definimos*

$$V(t) = \int_{T_0}^{t}\nu(s)ds \qquad e \qquad \theta_V = \lim_{t\to\infty}\frac{\log V(t)}{t}$$

Se o limite

$$\lim_{t\to\infty}V(t) = \int_{T_0}^{\infty}\nu(s)ds = +\infty,$$

então, a equação (5.4) *é oscilatoria se vale uma das seguintes alternativas:*

1. $\lambda > 0$ *e* $\theta_V = 0$*, ou*

2. $\lambda > \dfrac{c^p}{p^p}$ *e* $\theta_V \leqslant c$

Como caso particular do item 1)*, se* $\lambda > 0$ *e* $V(t) \leqslant At^c$*, para A e c constantes positivas, então*

$$\theta_V = \lim_{t\to\infty} \frac{\log V(t)}{t} \leqslant \lim_{t\to\infty} \frac{\log At^c}{t} = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{\log A}{t} + c\frac{\log t}{t} \right) = 0$$

Como caso particular de 2)*, se* $\lambda > \dfrac{c^p}{p^p}$ *e* $V(t) \leqslant Ae^{ct}$*, então*

$$\theta_V = \lim_{t\to\infty} \frac{\log V(t)}{t} \leqslant \lim_{t\to\infty} \frac{\log Ae^{ct}}{t} = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{\log A}{t} + c\frac{t}{t} \right) = c$$

Demonstração: Suponhamos que a equação (5.4) não seja oscilatória e seja $x(t)$ uma solução qualquer dessa equação. Então $+x(t)$ ou $-x(t)$ é solução de (5.4), podemos supor que existe um certo $T \geqslant T_0$ tal que $x(t) > 0$, $\forall t \in [T, \infty)$ e seja $y(t)$ a solução associada à equação de Ricatti, dada pela substituição de Ricatti definida em (5.5). Assim é imediato que $y(T) > 0$, $y'(t) > 0$, $\forall t \in [T, +\infty)$. Consequentemente $y(t)$ é crescente em $[T, +\infty)$. Temos dois casos a considerar

$$\text{(I)} \int_T^{+\infty} \frac{dr}{v(r)^{q-1}} < +\infty \quad \text{e} \quad \text{(II)} \int_T^{+\infty} \frac{dr}{v(r)^{q-1}} = +\infty$$

Por (5.6), temos $y'(t) \geqslant \lambda v(t)$, assim $y(t) \geqslant y(T) + \lambda(V(t) - V(T))$ é positivo para t suficientemente grande, pois $\lim_{t\to\infty} V(t) = \infty$. Consequentemente podemos supor que $y(t) > 0$, $\forall t \geqslant T$. Aplicando a desigualdade de Young, $AB \leqslant \dfrac{A^p}{p} + \dfrac{B^q}{q}$, se $A, B \geqslant 0$, ao par $A = (p\lambda)^{\frac{1}{p}} v(t)^{q-1}$ e $B = (p-1)^{\frac{1}{q}} q^{\frac{1}{q}} y(t)$, temos

$$[(p\lambda)^{\frac{1}{p}} v(t)^{q-1}][(p-1)^{\frac{1}{q}} q^{\frac{1}{q}} y(t)] \leqslant \frac{(p\lambda)v(t)^{p(q-1)}}{p} + \frac{(p-1)qy(t)^q}{q}, \tag{5.7}$$

como

$$\begin{aligned}
(p\lambda)^{\frac{1}{p}} (p-1)^{\frac{1}{q}} q^{\frac{1}{q}} &= \lambda^{\frac{1}{p}} p^{\frac{1}{p}} (p-1)^{\frac{1}{q}} q^{\frac{1}{q}} \\
&= \lambda^{\frac{1}{p}} p^{\frac{1}{p}} (\frac{p}{q})^{\frac{1}{q}} q^{\frac{1}{q}} \\
&= \lambda^{\frac{1}{p}} p^{(\frac{1}{q}+\frac{1}{p})} \\
&= \lambda^{\frac{1}{p}} p.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Substituindo (5.8) em (5.7):

$$p\lambda^{\frac{1}{p}} v(t)^{q-1} y(t) \leqslant \lambda v(t)^q + (p-1)y(t)^q. \tag{5.9}$$

Dividindo a equação (5.9) por $v(t)^{q-1}$, teremos

$$p\lambda^{\frac{1}{p}}y(t) \leqslant \lambda v(t) + (p-1)v(t)^{1-q}y(t)^q \tag{5.10}$$

Comparando (5.10) com a equação de Ricatti (5.5), obtemos

$$y'(t) \geqslant p\lambda^{\frac{1}{p}}y(t) \tag{5.11}$$

Integrando (5.11) em $[T,t]$, temos

$$y(t) \geqslant y(T)e^{(p\lambda^{\frac{1}{p}}(t-T))} \tag{5.12}$$

Por outro lado, a equação de Ricatti (5.5) também implica a desigualdade:

$$y'(t) \geqslant (p-1)v(t)^{1-q}y(t)^q$$

ou seja,

$$\frac{y'(t)}{y(t)^q} \geqslant \frac{p-1}{v(t)^{q-1}}$$

Mas como, $\dfrac{1}{1-q}\dfrac{d}{dt}y(t)^{1-q} = \dfrac{y'(t)}{y(t)^q}$ e $q > 1$, segue que

$$(1-q)\frac{y'(t)}{y(t)^q} = \frac{d}{dt}(y(t)^{1-q}) \leqslant (1-q)(p-1)v(t)^{1-q} = (-\frac{q}{p})(\frac{p}{q})v(t)^{1-q} = -v(t)^{1-q}$$

Integrando a desigualdade no intervalo $[t-1,t]$, obtemos

$$y(t)^{(1-q)} \leqslant y(t-1)^{(1-q)} - \int_{t-1}^{t}\frac{ds}{v(s)^{q-1}} \tag{5.13}$$

De (5.12), em (5.13):

$$\frac{1}{y(t)^{q-1}} \leqslant \frac{1}{y(t)e^{(q\lambda^{\frac{1}{p}}(t-T))}} \tag{5.14}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder:

$$\begin{aligned} 1 = \int_{t-1}^{t}\frac{v(s)^{\frac{1}{p}}}{v(s)^{\frac{1}{p}}}ds &\leqslant \left(\int_{t-1}^{t}(v(s)^{\frac{1}{p}})^p ds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{t-1}^{t}\frac{1}{v(s)^{\frac{q}{p}}}ds\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_{t-1}^{t}(v(s)^{\frac{1}{p}})^p ds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{t-1}^{t}\frac{1}{v(s)^{q-1}}ds\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant V(t)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{t-1}^{t}\frac{1}{v(s)^{q-1}}ds\right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Consequentemente

$$\left(\int_{t-1}^{t}\frac{1}{v(s)^{q-1}}ds\right)^{\frac{1}{q}} \geqslant \frac{1}{V(t)^{\frac{1}{p}}}. \tag{5.15}$$

Observando que $\dfrac{q}{p} = q-1$, obtemos de (5.15)

$$\int_{t-1}^{t}\frac{1}{v(s)^{q-1}}ds \geqslant \frac{1}{V(t)^{q-1}} \tag{5.16}$$

Se a condição 1) e o caso (I) são satisfeito, por (5.13), (5.14) e (5.16), quando t é suficientemente grande, temos:

$$
\begin{aligned}
0 < \frac{1}{y(t)^{(q-1)}} &\leqslant \frac{1}{y(T)e^{(q\lambda^{\frac{1}{p}}(t-T-1))}} - \frac{1}{V(t)^{q-1}} \\
&\leqslant \left(\frac{V(t)^{q-1}}{y(T)e^{(q\lambda^{\frac{1}{p}}(t-T-1))}} - 1\right)\frac{1}{V(t)^{q-1}} \\
&\leqslant \left(\frac{\Lambda}{e^{[q\lambda^{\frac{1}{p}}-(q-1)t^{-1}\log V(t)]}} - 1\right)\frac{1}{V(t)^{q-1}} < 0
\end{aligned}
$$

uma contradição, onde $\Lambda = \Lambda(q,\lambda,T) = \dfrac{e^{[q\lambda^{\frac{1}{p}}(T+1)]}}{y(T)}$. Se a condição 2) e o caso (I) são satisfeitos, de modo análogo ao caso anterior, tem-se:

$$
\begin{aligned}
0 < \frac{1}{y(t)^{(q-1)}} &\leqslant \frac{1}{y(T)e^{(q\lambda^{\frac{1}{p}}(t-T-1))}} - \frac{1}{(Ae^{(ct)})^{q-1}} \\
&\leqslant \left(\frac{A^{q-1}\Lambda}{e^{[(q\lambda^{\frac{1}{p}}-(q-1)c)t]}} - 1\right)\frac{1}{A^{q-1}e^{(q-1)ct}} < 0
\end{aligned}
$$

outra contradição, pois devido a $\lambda > \dfrac{c^p}{p^p}$, tem-se que $q\lambda^{\frac{1}{p}} - (q-1)c = q(\lambda^{\frac{1}{p}} - \frac{c}{p}) > 0$.

Consideramos agora, o segundo caso II), isto é, $\displaystyle\int_T^{+\infty} \frac{dr}{\nu(r)^{q-1}} = +\infty$.

Integrando a equação (5.5) de T a t, em ambos os lados, temos:

$$\int_T^t y'(s)ds = \int_T^t \lambda\nu(s)ds + (p-1)\int_T^t \nu(s)^{1-q}y(s)^q ds.$$

Logo,

$$y(t) = y(T) + \int_T^t \lambda\nu(s)ds + (p-1)\int_T^t \nu(s)^{1-q}y(s)^q ds$$

Como $y(T) + \displaystyle\int_T^t \lambda\nu(s)ds \geqslant 0$, $\forall t > T$, observamos que

$$y(t) \geqslant (p-1)\int_T^t \nu(s)^{1-q}y(s)^q ds. \tag{5.17}$$

Ponhamos $G(t) = \displaystyle\int_T^t \nu(s)^{1-q}y(s)^q ds$, então $G'(t) = y(t)^q\nu(t)^{1-q}$, substituindo na equação (5.17), obteremos:

$$\left[G'(t)\nu(t)^{q-1}\right]^{\frac{1}{q}} \geqslant (p-1)\int_T^t G'(s)ds$$

Ou seja,

$$G'(t)\nu(t)^{q-1} \geqslant (p-1)^q G(t)^q$$

Divindo a iqualdade anterior por $G(t)^q$ e integrando ambos os lados de T a t, tem-se:

$$\int_T^t \frac{G'(s)}{G^q(s)}ds \geqslant (p-1)^q \int_T^t \nu(s)^{1-q}ds.$$

Ora,

$$\begin{aligned}\int_T^t \frac{G'(s)}{G^q(s)}ds &= \frac{1}{(1-q)G^{q-1}(s)}\Big|_T^t = \frac{1}{(1-q)G^{q-1}(t)} - \frac{1}{(1-q)G^{q-1}(T)}\\ &= \frac{G^{1-q}(T)}{q-1} - \frac{G^{1-q}(t)}{q-1}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{q-1}\Big[G(T)^{1-q} - G(t)^{1-q}\Big] \geqslant (p-1)^q \int_T^t \nu(s)^{1-q}ds.$$

Sendo

$$\frac{1}{q-1}G^{1-q}(T) > \frac{1}{q-1}\Big[G(T)^{1-q} - G(t)^{1-q}\Big], \ \forall\, t > T.$$

Consequentemente temos que

$$\frac{1}{q-1}G^{1-q}(T) > (p-1)^q \int_T^t \nu(s)^{1-q}ds, \ \forall\, t > T.$$

Fazendo $t \to \infty$, temos uma contradição, pois $\dfrac{1}{q-1}G^{1-q}(T)$ é uma constante. ■

Seja M uma variedade riemanniana completa e não-compacta e fixe um ponto $p \in M$. Denotamos por $\nu(r) = Area(\partial B_r(p))$ a área da esfera geodésica de raio r e centro p. Colocamos

$$V(r) = Vol(B_r(p)) = \int_0^r \nu(r)dr \quad \text{e} \quad \Theta(M) = \lim_{t\to\infty} \frac{\log V(t)}{t}.$$

O número $\Theta(M)$ não depende do ponto p, por isso é um invariante de M que descreve o comportamento de crescimento fora de um compacto. Como para qualquer $R > 0$ vale

$$\Theta(M) = \lim_{t\to\infty} \frac{\log(V(R) + A(R,t))}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\log A(R,t)}{t}$$

onde $A(R,t) = V(t) - V(R)$. Se M é uma variedade com $Vol(M) = +\infty$ então, para qualquer $T_0 > 0$, tem-se que $\displaystyle\int_{T_0}^{+\infty} \nu(r)dr = +\infty$. Assim, podemos enuciar o seguinte teorema:

Teorema 5.3. (*Lima, B. P. e Santos, N. L.*, [16]) *Seja M uma variedade riemanniana completa e não-compacta com volume infinito, $Vol(M) = +\infty$. Se $\Omega \subset M$ é um conjunto compacto arbitrário, denotamos por $\lambda_{1,p}(M - \Omega)$ o primeiro autovalor do p-Laplaciano em $M - \Omega$. Então*

1. *Se M tem crescimento sub-exponencial, isto é,* $\Theta(M) = 0$, *então* $\lambda_{1,p}(M - \Omega) = 0$

2. *Se* $\Theta(M) \leqslant \beta$, *para algum* $\beta > 0$, *então* $\lambda_{1,p}(M - \Omega) \leqslant \dfrac{\beta^p}{p^p}$

Como casos particulares do teorema temos:

1. *Se* $\mathsf{Vol}(B_R(p)) \leqslant Cr^{\beta}$ *para certas constantes* $C, \beta > 0$ *e* $r \geqslant r_0 > 0$, *então* $\lambda_{1,p}(M - \Omega) = 0$.

2. *Se* $\mathsf{Vol}(B_r(p)) \leqslant Ce^{\beta r}$, *então* $\lambda_{1,p}(M - \Omega) \leqslant \dfrac{\beta^p}{p^p}$.

Demonstração: Seja $\nu(r) = \mathsf{Area}(\partial B_r(p))$ e denote $B(r) = B_r(p)$. Logo, $V(B(r)) = \int_0^r \nu(t)dt$. Se o volume $V(M) = +\infty$, então

$$\int_T^{+\infty} \nu(t)dt = \lim_{r\to+\infty} \int_T^r \nu(t)dt = \lim_{r\to+\infty} V(B(r)) = +\infty, \forall T > 0$$

Como Ω é um conjunto compacto, existe uma constante T_0 tal que $\Omega \subset B(T_0)$.

Se a **condição** 1) é satisfeita então pelo teorema (5.2), para qualquer $\lambda > 0$ existe uma solução não-trivial $x_\lambda(t)$ da equação $(\nu(t)\phi(x'(t))) + \lambda\nu(t)x(t) = 0$ em $[T_0, +\infty)$. Assim, existem dois números T_1^λ e T_2^λ em $[T_0, +\infty)$ com $T_1^\lambda < T_2^\lambda$ e $x_\lambda(T_1^\lambda) = x_\lambda(T_2^\lambda) = 0$, e $x_\lambda \neq 0$, $\forall t \in (T_1^\lambda, T_2^\lambda)$.

Sendo $\phi_\lambda(x) = x_\lambda(r(x))$, onde $r(x) = \mathsf{dist}_M(p, x)$ é a função distância para algum ponto $p \in M$. Denote por Ω_λ, o anel

$$\Omega_\lambda = B(T_2^\lambda) - B(T_2^\lambda) \subset M - \Omega.$$

Assim,

$$0 \leqslant \lambda_1(M - \Omega) \leqslant \lambda_{1,p}(\Omega_\lambda) \leqslant \frac{\displaystyle\int_{\Omega_\lambda} \|\nabla\phi_\lambda\|^p dM}{\displaystyle\int_{\Omega_\lambda} \|\phi_\lambda\|^p dM}$$

Como $\nabla\phi_\lambda = x'_\lambda(r)\nabla r$ segue-se que $\|\nabla\phi_\lambda\|^p = \|x'_\lambda(r)\|^p = \|x'_\lambda(r)\|^{p-2}x'_\lambda(r)x'_\lambda(r)$. Assim, $\|\nabla\phi_\lambda\|^p = \Phi(x'_\lambda(r))x'_\lambda(r)$, consequentemente

$$\lambda_{1,p}(M - \Omega) \leqslant \frac{\displaystyle\int_{T_1^\lambda}^{T_2^\lambda} \Big[\nu(r)\Phi(x'_\lambda(r))\Big] x'_\lambda(r)dr}{\displaystyle\int_{T_1^\lambda}^{T_2^\lambda} \|\phi(r)\|^p \nu(r)dr}$$

Observe que

$$\begin{aligned}\int_{T_1^\lambda}^{T_2^\lambda}\left[\nu(r)\Phi(x_\lambda'(r))\right]x_\lambda'(r)dr &= \left[\nu(r)\Phi(x_\lambda'(r))\right]x_\lambda(r)\Big|_{T_1^\lambda}^{T_2^\lambda} - \int_{T_1^\lambda}^{T_2^\lambda}\left[\nu(r)\Phi(x_\lambda'(r))\right]' x_\lambda(r)dr\\ &= -\int_{T_1^\lambda}^{T_2^\lambda}\left[\nu(r)\Phi(x_\lambda'(r))\right]' x_\lambda(r)dr\end{aligned}$$

Daí,

$$0 \leqslant \lambda_{1,p}(M-\Omega) \leqslant \frac{-\displaystyle\int_{T_1^\lambda}^{T_2^\lambda}\left[\nu(r)\Phi(x_\lambda'(r))\right]x_\lambda'(r)dr}{\|x_\lambda(r)\|^p\nu(r)dr} = \lambda$$

Como λ é uma constante positiva arbitrária, segue-se que $\lambda_{1,p}(M-\Omega) = 0$.
Se a **condição** 2) é satisfeita então pelo teorema (5.2), para qualquer $\lambda > \dfrac{\beta^p}{p^p}$ existe uma solução não-trivial $x_\lambda(t)$ da equação $(\nu(t)\phi(x'(t))) + \lambda\nu(t)x(t) = 0$ em $[T_0, +\infty)$. Assim, existem dois números T_1^λ e T_2^λ em $[T_0, +\infty)$ com $T_1^\lambda < T_2^\lambda$ e $x_\lambda(T_1^\lambda) = x_\lambda(T_2^\lambda) = 0$, e $x_\lambda \neq 0$, $\forall t \in (T_1^\lambda, T_2^\lambda)$.
De modo análogo a **condição** 1), temos:

$$\begin{aligned}\lambda_1(M-\Omega) \leqslant \lambda_{1,p}(\Omega_\lambda) &\leqslant \frac{\displaystyle\int_{\Omega_\lambda}\|\nabla\phi_\lambda\|^p dM}{\displaystyle\int_{\Omega_\lambda}\|\phi_\lambda\|^p dM}\\ &\leqslant \frac{\displaystyle\int_{T_1^\lambda}^{T_2^\lambda}\left[\nu(r)\Phi(x_\lambda'(r))\right]x_\lambda'(r)dr}{\displaystyle\int_{T_1^\lambda}^{T_2^\lambda}\|\phi(r)\|^p\nu(r)dr} = \lambda\end{aligned}$$

Como λ é uma constante arbitrária maior que $\dfrac{\beta^p}{p^p}$, segue-se $\lambda_{1,p}(M-\Omega) \leqslant \dfrac{\beta^p}{p^p}$. O que prova a parte 2) do teorema.

■

Referências Bibliográficas

[1] Alencar, H. and do Carmo, M. P., *Hypersurfaces of constant mean curvature with finite index and volume of polynomial growth*, Arch. Math. 60 (1993), 489-493. MR 94a:53087; MR 96e:53071.

[2] Barbosa, J. L. e Earp, R. S., *Geometric Methods and Nonlinear Analys in Hyperbolic Space*, X Escola de Geometria Diferencial, UFMG, 1998

[3] Brézis, H., *Análisis Funcional Teoría y Aplicaciones*, Editora Alianza, 1984.

[4] Chavel, I., *Eigenvalue in Remannian Geometry*, New York, Academic Press, 1984.

[5] Chavel, I., *Riemannian Geometry, A Modern Introduction*, New York: Cambridge University Press,1995.

[6] Cheeger, J. and Yau, S. T., *A Lower Bound for the Heat Kernel*, Comm. Pure Appl. Math. 34 (1981), 465-480. MR 82i:58065.

[7] Cheng, S. Y., and Yau, S. T., *Differential Equations on Riemannian Manifolds and Geometric Applications*, Comm. Pure Appl. Math. 28 (1975), 333-354. MR 52:6608.

[8] Dosly, O. and Rehak, P., *Half-Linear Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies 202, Elsevier, 2005.

[9] do Carmo, M. P. and Zhou, D., *Eigenvalue Estimate on Complete Noncompact Riemannian Manifolds and Applications*, American Mathematical Society, Vol. 351, Number 4, April 1999, Pages 1391-1401.

[10] do Carmo, M. P. *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides - IMPA, 2005.

[11] de Figueiredo, D. Guedes, *An Invitation to Semilinear Elliptic Equations*, 2001.

[12] Fischer-Colbrie, D., *On Complete Minimal Surfaces with Finite Morse Index in Three-Manifolds*, Invent. Math. 82 (1985), 121-132. MR 87b:53090.

[13] Elbert, M. F., *Sobre Hipersuperfícies com r-Curvatura Média Constante*, IMPA, janeiro 1998.

[14] Hebey, E., *Nonlinear Analysis on Manifolds: Sobolev Spaces and Inequalities*, American Mathematical Society, 1964.

[15] Kavian, O., *Introduction à la Théorie des Points Critiques*, Paris: Springer-Verlag, 1993

[16] Lima, B. P. and Santos, N. L., *A Theorem of do Carmo-Zhou type: Oscillations and Estimativas for the first Eigenvalue of the p-Laplacian* ,arXiv:1008.2214v1 [math.DG] August, 2010.

[17] Markvorsen, S. and Min-Oo M., *Global Riemannian Geometry: Curvature and Topology*, Centre de Recerca Matemática, Birkhäuser Verlag, 2003.

[18] Pucci, P. and Serrin, J., *The Strong Maximum Principle Revisited*, Journal of Differential Equantions 196 (2004) 1-66.