Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

O problema de Cauchy para a equação de Schrödinger não linear com derivadas satisfazendo a condição gauge nula

Domingos dos Santos Ponciano

Teresina - 2011

Domingos dos Santos Ponciano

Dissertação de Mestrado:

O problema de Cauchy para a equação de Schrödinger não linear com derivadas satisfazendo a condição gauge nula.

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Roger Peres de Moura

Teresina - 2011

Ponciano, D. S..
xxxx O problema de Cauchy para a equação de Schrödinger não linear com derivadas satisfazendo a condição gauge nula.

Domingos dos Santos Ponciano – Teresina: 2011.

Orientador: Prof. Dr. Roger Peres de Moura.
1. Análise/Equações Diferenciais Parciais
CDD 516.36

Ao meu amado pai, Manoel Ponciano; Ao meu irmão, Antônio Carlos dos Santos Ponciano. (In memoriam).

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me ter concedido a realização de mais um sonho.

Agradeço aos meus pais, Manoel Ponciano e Ducília Honorato dos Santos Ponciano, por me darem amor incondicional e suporte em todos os momentos da minha vida, principalmente nos momentos mais difíceis.

Agradeço aos meus irmãos, por me proporcionarem boa parte dos melhores momentos de minha vida.

Agradeço ao professor Roger Peres de Moura pela sua parciência e esforço na orientação desse trabalho.

Agradeço aos professores, Marcondes Rodrigues Clark e Ademir Pastor Ferreira pelas críticas e surgestões de aperfeçoamento para este trabalho.

Aos demais professores do departamento de Matemática da UFPI pelo apoio acadêmico que eles me deram.

Aos meus colegas do mestrado: Cleyton Natanael, Daniel, Francisco Reis, Gilberto, Ítalo Dowell, João Santos, João Carlos, José Venâncio, José de Arimatéia, Pedro Jorge e Renan.

Agradeço à CAPES e FAPEPI pelo apoio financeiro.

“ Porque Deus amou o mundo, de tal maneira, que deu o seu filho unigênito, para que todo aquele que nele crê não pereça, mas tenha a vida eterna”.

João 3:16.

Resumo

Neste trabalho estudamos o problema de Cauchy para a equação de Schrödinger unidimensional não linear com derivadas, com a não linearidade satisfazendo a condição gauge nula. Provamos que o problema é localmente bem posto no espaço de Sobolev $\mathsf{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$. O método depende da transformada gauge para eliminar o termo com derivadas da parte não linear e de estimativas de efeito regularizante da equação de Schrödinger linear.

Abstract

In this work we study the Cauchy problem for the unidimensional derivative nonlinear Schrödinger equation with nonlinearity satisfying the null gauge condition. We prove that the problem is locally well-posed in the Sobolev space $\mathsf{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$. The method of proof depends on the gauge transform on the nonlinear part to remove the term with derivative from the nonlinear part and on smoothing estimates associated to the linear Schrödinger equation.

Sumário

Introdução

Em nosso trabalho estudamos a equação de Schrödinger unidimensional não linear com derivadas

$$\partial_t u - i\partial_x^2 u = \lambda u \partial_x(|u|^2) - i f(u), \tag{1}$$

onde $u = u(x,t)$ é uma função complexa, $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f(u) = f(u(x,t))$ é uma perturbação não linear, complexa, continuamente diferenciável (como função de u) no sentido real, $f(0) = 0$ e satisfaz a seguinte estimativa:

$$|f'(z)| \equiv \max\left\{|\frac{\partial f}{\partial z}|, |\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}|\right\} \leqslant C(1+|z|^4), \quad \forall\, z \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

A equação (1) é de grande importância tanto na Física como na Matemática, pois relaciona-se com o problema de auto-modulação não-linear da equação de Benjamin-Ono ([26]), com a instabilidade de Benjamin-Feir das ondas de Stokes próximas ao número crítico de ondas ([8], [9]), teoria de transformada gauge nos sistemas infinitamente integráveis ([2], [16], [17]) e a teoria gauge nula ([10], [15], [28]).

São muitos os trabalhos matemáticos dedicados ao estudo do problema de Cauchy para a equação (1). Entre eles, destacamos os seguintes: 1) Tsutsumi/Fukuda [27], onde foi provado boa colocação para esse problema com dado inicial em $H^s(\mathbb{R})$, $s > \frac{3}{2}$, usando o método de regularização parabólica. 2) Em [28], Tsutsumi prova que o PVI para a equação (1) com $f \equiv 0$ e com dado inicial suficientemente pequeno, é globalmente bem posto em certos espaços de Sobolev com peso. 3) Nos trabalhos [7], [23] e [25] o PVI para (1) foi estudado com dado em $H^s(\mathbb{R})$, $s \geqslant 1$.

O propósito desta dissertação é estudar detalhadamente o resultado de boa coloação local para o problema de Cauchy associado à equação (1) no espaço de Sobolev $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$, provado por T. Ozawa e Y. Tsutsumi em [24]. Em resumo, o método desenvolvido por eles consiste no seguinte: Por meio da mudança gauge

$$v(x,t) = e^{i\theta}u(x,t), \quad \text{com} \quad \theta(x,t) = \frac{-\lambda}{2}\int_{-\infty}^{x} |u(y,t)|^2 dy,$$

a equação (1) é transformada na equação

$$\partial_t v - i\partial_x^2 v = -i\frac{\lambda^2}{4}v|v|^4 - i\lambda v \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{x} f(e^{-i\theta}v)e^{i\theta}\bar{v}dy - ie^{i\theta}f(e^{-i\theta}v). \tag{3}$$

Em seguida escreve-se o PVI para a equação (3) como uma equação integral, e usa-se o Teorema do Ponto Fixo para Contrações junto com estimativas clássicas do tipo Strichartz, do tipo Kato, e para a função maximal, associadas à equação de Schrödinger linear, prova-se a boa colocação local para o PVI associado a (3) com dado inicial em $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$. Para estender esse resultado para a equação original usa-se uma estimativa de efeito regularizante para $\partial_x(|u|^2)$ e um argumento que leva em conta a dependência contínua de solução em relação ao dado inicial, provada para o problema de Cauchy para a equação gauge transformada (3).

Definição 0.1. *Dado um intervalo limitado de tempo* I*, definimos o espaço métrico completo*

$$X(I) = \{u \in C(I; H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})) : u \in L_t^4 L_x^\infty \cap L_x^4 L_t^\infty,\ \partial_x u \in L_x^\infty L_t^2 \text{ e } D_x^{\frac{1}{2}} u \in L_x^6 L_t^6\},$$

com a norma

$$\|u\|_{X(I)} := |||u||| = \|u\|_{L_t^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|u\|_{L_t^4 L_x^\infty} + \|u\|_{L_x^4 L_t^\infty} + \|\partial_x u\|_{L_x^\infty L_t^2} + \|D_x^{\frac{1}{2}} u\|_{L_x^6 L_t^6}.$$

Enunciamos abaixo o principal resultado deste trabalho:

Teorema 0.1. *Seja* f *uma função satisfazendo a condição* (2)*. Então para qualquer* $\rho > 0$ *existe uma constante positiva* $T(\rho)$ *dependendo somente de* f *e* ρ *com as seguintes propriedades: Para qualquer* $u_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$*, com* $\|u_0\|_{H^{\frac{1}{2}}} \leqslant \rho$*, a equação* (1) *tem uma única solução* u *em* $X(I) = X([0, T(\rho)])$ *tal que,* $u \in X(I)$ *e*

$$\partial_x(|u|^2) \in L_x^2(I \times \mathbb{R}). \tag{4}$$

Além disso, para qualquer T *com* $0 < T < T(\rho)$ *existe* $\epsilon > 0$ *tal que a aplicação* $\tilde{u}_0 \mapsto \tilde{u}$ *é Lipschitz de* $\{\tilde{u}_0 \in H^{\frac{1}{2}}; \|\tilde{u}_0 - \tilde{u}\| < \epsilon\}$ *em* $X([0, T])$*.*

É importante frisar que a eliminação da derivada da parte não linear da equação (1) só é possível porque o termo $u\partial_x(|u|^2)$ satisfaz a condição gauge nula, a qual definimos abaixo. Maiores detalhes podem ser encontrados em [28].

Definição 0.2. *Seja* $u, v \in C^1(\mathbb{R}^n)$*. Assuma que* $f_j(u, v, \bar{u}, \bar{v}), 1 \leqslant j \leqslant n$*, são polinômio homogêneos de grau* 2 *em relação a* $u, v, \bar{u}$*, e* $\bar{v}$ *tal que*

$$f_j(u, v, \bar{u}, \bar{v}) = f_j(e^{i\theta}u, e^{i\theta}v, \overline{e^{i\theta}u}, \overline{e^{i\theta}v}), \theta \in \mathbb{R}, 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{5}$$

Sejam $a_j, 1 \leqslant j \leqslant n$, *constantes em* $\mathbb{C}$ *tal que* $\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 > 0$.
Diremos que $F(u, \nabla u, v, \nabla v, \bar{u}, \nabla \bar{u}, \bar{v}, \nabla \bar{v})$ *sastisfaz a condição de medida nula de ordem* 2*, se*

$$F(u, \nabla u, v, \nabla v, \bar{u}, \nabla \bar{u}, \bar{v}, \nabla \bar{v}) = \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial}{\partial x_j}[f_j(u, v, \bar{u}, \bar{v})].$$

Nosso trabalho é dividido em quatro capítulos:

No capítilo 1, começamos enunciando a notação a ser usada e em seguida lembramos de alguns conceitos e propriedades básicas, necessárias ao desenvolvimento das etapas que seguem: os espaços de Banach L^p e suas propriedades básicas; a transformada de Fourier no espaço de Schwarz das funções de decrescimento rápido, em L^p $(1 \leqslant p \leqslant 2)$ e no espaço das distribuições temperadas; os espaços de Sobolev de tipo L^2 e algumas estimativas da regra de Lebniz para derivadas fracionárias em espaços de Banach mistos. Alguns resultados dessse capítulo serão demonstrados de forma bem detalhada, outros de forma resumida e alguns não serão, ou por precisar de teorias que não tivemos tempo de estudar ou por serem bem elementares; mas em todo o texto ficará clara a referência para obter tais justificativas.

No capítulo 2, começamos deduzindo a solução do problema de Cauchy para a equação de Schrödringer linear. Em seguida, estudamos as propriedades de efeito regularizante do tipo Strichartz, do tipo Kato e para a função maximal associadas a ela; inclusive fazemos a demonstração detalhada dessas propriedades, com excessão da estimativa para a função maximal em L^2.

No capítulo 3 começamos fazendo a mudança de variável (transformada gauge) que transforma a equação (1) na equação (3); depois provamos a boa colocação local para o PVI associado à equação (3) com dado inicial em $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ utilizando as estimativas de efeito regularizantes mencionadas acima e o teorema do ponto fixo para contrações.

Finalmente, no capítulo 4 fazemos a demonstração do Teorema 0.1.

Capítulo 1

Noções Preliminares

1.1 Principais Notações

Para $1 \leqslant p, q < \infty$ definimos o espaço de Banach

$$L_x^p L_T^q \equiv \{\, f : \mathbb{R} \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{C} : \ \|f\|_{L_x^p L_T^q} < \infty \}$$

onde

$$\|f\|_{L_x^p L_T^q} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^T |f(x,t)|^q dt \right)^{p/q} dx \right)^{1/p} .$$

Quando a notação for $L_x^p L_t^q$ (t minúsculo) significa que a integral em relação a t é de $-\infty$ a $+\infty$. $\|f\|_{L_T^q L_x^p}$ é definido de maneira similar, e quando $p = \infty$ ou $q = \infty$, $\|f\|_{L_x^p L_T^q}$ é definido da forma natural (usando o $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}}$ ou $\sup\limits_{t \in [0,T]}$).

Denotaremos a transformada de Fourier de uma função u com relação à variável x por $\mathcal{F}(u)$, ou $\mathcal{F}_x(u)$, ou simplismente por $\widehat{u}$; a tansformada de Fourier com relação à variável t será denotada por $\mathcal{F}_t(u)$. A inversa da transformada de Fourier de u será denotada por $\mathcal{F}^{-1}(u)$ ou $\check{u}$.

Dado $z \in \mathbb{C}$, denotamos a parte real e a parte imaginária de z, respectivamente, por $Re(z)$ e $Im(z)$.

Dado $s \in \mathbb{R}$ definimos os espaços de Sobolev (de tipo L^2) $H^s(\mathbb{R}^n)$ por

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^n) : J^s f \in L^2(\mathbb{R}^n), \ onde \ J^s f = ((1+|\xi|^2)^{s/2} \widehat{f})^{\vee} \right\}$$

munido da norma

$$\|f\|_{H^s} = \|J^s f\|_{L^2} = \left(\int (1+|\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} = \|(1+|\xi|^2)^{s/2} \widehat{f}\|_{L^2},$$

onde $S'(\mathbb{R}^n)$ é o espaço das Distribuições temperadas.

Dada $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ definimos $D^s f$ por

$$D^s f = (-\Delta)^{\frac{s}{2}} = (|\xi|^s \widehat{f})^{\vee}.$$

A norma $\|\cdot\|_{X(I)} = |||\cdot|||$ é a norma do espaço de funções:

$$X(I) = \{u \in C(I; H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})) : u \in L_t^4 L_x^\infty \cap L_x^4 L_t^\infty,\ \partial_x u \in L_x^\infty L_t^2 \text{ e } D_x^{\frac{1}{2}} u \in L_x^6 L_t^6\}.$$

Sejam C, K constantes positivas arbitrárias. A notação $C \lesssim K$, significará que existe uma constante $c > 0$ tal que $C \leqslant cK$.

1.2 Os espaços de Lebesgue L^p.

Nesta seção apresentaremos a teoria básica dos espaços L^p essencial para a compreensão dos capítulos seguintes. Os resultados aqui apresentados foram extraidos das referêcias [1], [5] e [18].

1.2.1 Definição e propriedades básicas.

Definição 1.1. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um domínio e seja $0 < p < \infty$. Dada $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) mensurável, definimos $L^p(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{C} : \ \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}$, onde*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.1}$$

Quando não causar confusão, usaremos as notações L^p e $\|\cdot\|_p$ ($\|\cdot\|_{L^p}$) como abreviação de $L^p(\Omega)$ e $\|f\|_{L^p(\Omega)}$, respectivamente.

Abaixo listamos algumas propriedades básicas de $L^p(\Omega)$.

Uma desigualdade importante na teoria dos espaços L^p é a desigualdade de Hölder, a qual apresentaremos a seguir.

Teorema 1.1 (Des. de Hölder)**.** *Suponha $1 < p < \infty$ e $1/p + 1/q = 1$. Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q. \tag{1.2}$$

Vale a igualdade em (1.2) se, e somente se, existe um par de números reais $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, tal que, $\alpha|f|^p = \beta|g|^q$ q.s.

Dem. Veja a referência [5], capítulo 6. ∎

O número q tal que $1/p + 1/q = 1$ é conhecido como conjugado (ou expoente conjugado) de p.

Teorema 1.2 (Des. de Minkowski)**.** *Se* $1 \leqslant p < \infty$ *e* $f, g \in L^p(\Omega)$*, então*

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{1.3}$$

Dem. Obviamente, a desigualdade (1.3) é imediata se $p = 1$ ou se $f + g = 0$ q.s..

Agora, para o caso $1 < p < \infty$, escrevemos

$$|f + g|^p \leqslant (|f| + |g|)|f + g|^{p-1}$$

e aplicamos a desigualdade de Hölder, observando que $(p-1)q = p$ quando $1/p+1/q = 1$, para obtermos:

$$\int_\Omega |f + g|^p dx \leqslant \|f\|_p \||f + g|^{p-1}\|_q + \|g\|_p \||f + g|^{p-1}\|_q \tag{1.4}$$

e daí, a desigualdade (1.3). ∎

Com o teorema 1.2 fica fácil que $\|\cdot\|_p$ é norma em $L^p(\Omega)$, e que portanto, $L^p(\Omega)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ é um espaço vetorial normado.

Teorema 1.3. $L^p(\Omega)$ *é um espaço de Banach, se* $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Dem. Essa demonstração é feita usando o teorema que diz que "um espaço vetorial normado é espaço de Banach se, e somente se, toda série absolutamente convergente desse espaço é convergente". Para maiores detalhes consulte a referência [5]. ∎

Corolário 1.2.1. $L^2(\Omega)$ *é um espaço de Hilbert, munido do produto interno*

$$(f, g) = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}dx.$$

A desigualdade de Hölder para $L^2(\Omega)$ é conhecida como desigualdade de Cauchy-Schwarz: $|(f, g)| \leqslant \|f\|_2\|g\|_2$.

Consideremos agora a teoria básica de $L^\infty(\Omega)$.

Definição 1.2. *Dada* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *(ou* $\mathbb{R}$*) mensurável, definimos*

$$\|f\|_\infty = \inf\{\, c > 0 \,|\, |f(x)| \leqslant c \quad \textit{q.s.}\}. \tag{1.5}$$

Se $\|f\|_\infty < \infty$*, dizemos que* f *é* **essencialmente limitada***. O espaço de tais funções é denotado por*

$$L^\infty(\Omega) = \{\, f : \Omega \to \mathbb{C} \,|\, f \;\; \textit{é essencialmente limitada, i.e.,} \;\; \|f\|_\infty < \infty\}.$$

Às vezes $\|\cdot\|_\infty$ é escrita na forma

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)|$$

ou simplesmente $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|$ (pois $f = g$ q.s. se e só se $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty$).

Observações. 1). Os resultados provados até o momento para o caso $1 \leqslant p < \infty$ se extendem para o caso $p = \infty$. 2). Como deixa claro a Definição 1.2, a norma $\|\cdot\|_\infty$ está intimamente relacionada com a norma $\|\cdot\|_u$, mas não é igual à norma da continuidade uniforme $\|\cdot\|_u$. No caso da medida ser a de Lebesgue (o nosso caso!), $\|f\|_\infty = \|f\|_u$, quando f é contínua, pois o conjunto $\{\, x \,|\, |f(x)| > a \,\}$ é aberto.

A proposição a seguir é um caso particular do importante teorema de interpolação de Riesz-Thorin, o qual demonstraremos na parte final deste capítulo.

Proposição 1.1. *Se* $0 < p < q < r \leqslant \infty$*, então* $L^p \cap L^r \subset L^q$ *e*

$$\|f\|_q \leqslant \|f\|_p^\theta \|f\|_r^{1-\theta},$$

para $f \in L^p \cap L^r$*, onde* $\theta \in (0,1)$ *satistaz a relação:* $1/q = \theta/p + (1-\theta)/r$*, i.e.,* $\theta = \dfrac{1/q - 1/r}{1/p - 1/r}$.

Dem. Veja a Proposição 6.10, na página 185 de [5]. ∎

Encerramos esta seção com o enunciado da desigualdade de Minkowski para integrais, cuja demonstração pode ser encontrada na página 194 de [5]. Quando não especificado, os p's que aparecerem são tais que $1 \leqslant p < \infty$.

Teorema 1.4 (Des. de Minkowski para Integrais)**.** *Seja* $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*) mensurável tal que,* $f(\cdot, y) \in L^p(\mathbb{R}^m)$ *para q.t.p.* $y \in \mathbb{R}^n$*, e que a função* $y \longmapsto \|f(\cdot,y)\|_{L^p(\mathbb{R}^m)}$ *pertença a* $L^1(\mathbb{R}^n)$*. Então, a função* $x \longmapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)dy$ *pertence a* $L^p(\mathbb{R}^m)$ *e*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^m} \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)dy\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x,y)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} dy,$$

ou seja,

$$\left\|\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)dy\right\|_{L^p(\mathbb{R}^m)} \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \|f(\cdot,y)\|_{L^p(\mathbb{R}^m)} dy.$$

1.2.2 Dualidade de L^p.

As demonstrações desta parte podem ser encontradas no capítulo 2 da referência [1].

Proposição 1.2. *Seja* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *e seja* q *o seu conjugado. Então o operador linear* $\varphi : L^q \to (L^p)'$ *que leva cada* $g \in L^q$ *em* $\varphi_g \in (L^p)'$, *onde* $\varphi_g(f) = \displaystyle\int fg\,dx$, *é um isomorfismo isométrico de* L^q *em um subespaço de* $(L^p)'$.

Após esse resultado é natural perguntar se φ é sobrejetiva, ou seja, se todo funcional linear contínuo em L^p é da forma φ_g, com $g \in L^q$. Vamos ver que isto é o caso quando $1 \leqslant p < \infty$. Observemos que, por ser L^2 um espaço de Hilbert, resulta do Teorema de Representação de Riesz, que podemos identificá-lo com seu dual, isto é, $(L^2)' = L^2$. Vamos agora estender o Teorema de Representação de Riesz para L^p, $1 \leqslant p < \infty$.

Lema 1.2.1. *Seja* $1 < p < \infty$. *Se* $\varphi \in (L^p)'$ *e* $\|\varphi\| = 1$, *então existe um único* $h \in L^p$ *tal que* $\|h\|_p = \varphi(h) = 1$. *Reciprocamente, dado* $h \in L^p$ *tal que* $\|h\|_p = 1$, *existe um único* $\varphi \in (L^p)'$ *tal que* $\|\varphi\| = \varphi(h) = 1$.

Dem. Veja a referência [1]. ■

Seja $h \in L^p$ tal que $\|h\|_p = 1$. Pela proposição 1.2, o funcional φ_g definido por

$$\varphi_g(f) = \int f(x)g(x)dx, \quad f \in L^p, \tag{1.6}$$

onde

$$g(x) = \begin{cases} |h(x)|^{p-2}\overline{h(x)}, & \text{se } \ h(x) \neq 0, \\ 0, & \text{se } \ h(x) = 0, \end{cases} \tag{1.7}$$

satisfaz: $\varphi_g(h) = \|h\|_p^p = 1$ e $\|\varphi_g\| = \|g\|_q = \|h\|_p^{\frac{p}{q}} = 1$.

Teorema 1.5 (de Rep. de Riesz para L^p). *Seja* $1 < p < \infty$. *Se* $\varphi \in (L^p)'$, *então existe* $g \in L^q$ *tal que,* $\varphi = \varphi_g$, *onde* $\varphi_g(f) = \int fg dx$. *Além disso,* $\|g\|_q = \|\varphi\|_g$.

Dem. Para $\varphi = 0$, tome $g = 0$.

Suponha $\varphi \neq 0$. Podemos assumir sem perda de generalidade que $\|\varphi\| = 1$. Pelo Lema 1.2.1 existe $h \in L^p$ com $\|h\|_p = 1$ tal que $\varphi(h) = 1$. Seja g a função definida em (1.7). Então φ_g deinida em (1.6) satisfaz, $\|\varphi_g\| = 1$ e $\varphi_g(h) = 1$. Segue então da unicidade no Lema 1.2.1 anterior que $\varphi = \varphi_g$, o que completa a demonstração, pois $\|g\|_q = 1$. ■

Concluimos desse teorema que $(L^p)' \equiv L^q$, i.e., $(L^p)'$ é isometricamente isomorfo a L^q.

Teorema 1.6 (de Rep. de Riesz para L^1). *Dado* $\varphi \in (L^1)'$, *existe* $g \in L^\infty$ *tal que,*

$$\varphi(f) = \varphi_g(f) = \int_\Omega f(x)g(x)dx \quad e \quad \|g\|_\infty = \|\varphi\|.$$

Portanto, $(L^1)' \equiv L^\infty$.

Dem. Veja o Teorema 245, na página 47 de [1]. ∎

1.2.3 Interpolação dos espaços L^p.

Os resultados desta subseção foram extraindos das referências [5] e [18].

Sabemos que se $1 \leqslant p < q < r \leqslant \infty$, então $L^p \cap L^r \subset L^q \subset L^p + L^r$, (cf. a Proposição 1.1), onde a imersão é contínua. É natural então perguntar se um operador linear T definido em $L^p + L^r$, limitado em L^p e em L^r é também limitado em L^q. A resposta é afirmativa. Vamos apresentar aqui dois resultados clássicos nesse sentido: os teoremas de interpolação de Riesz-Thorin e de Marcinkiewikz.

Teorema 1.7 (Riesz-Thorin). *Sejam* (X, Σ_X, μ) *e* (Y, Σ_Y, ν) *espaços de medida e* $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1, \infty]$ *(com* ν σ*-finita se* $q_0 = q_1 = \infty$*). E para* $0 < t < 1$*, sejam* p_t *e* q_t *tais que*

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}, \quad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}.$$

Se $T : L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu) \to L^{q_0}(\nu) + L^{q_1}(\nu)$ *é um operador linear tal que,*

$$\|Tf\|_{q_0} \leqslant M_0 \|f\|_{p_0}, \quad \textit{para} \;\; f \in L^{p_0}(\mu) \;\; \text{e} \;\; \|Tf\|_{q_1} \leqslant M_1 \|f\|_{p_1}, \quad \textit{para} \;\; f \in L^{p_1}(\mu),$$

então

$$\|Tf\|_{q_t} \leqslant M_0^{1-t} M_1^{t} \|f\|_{p_t}, \quad \forall f \in L^{p_t}(\mu) \; \textit{e} \;\; 0 < t < 1;$$

ou seja, designando por M_t *a norma de* $T : L^{p_t} \to L^{q_t}$ *temos:* $M_t \leqslant M_0^{1-t} M_1^{t}$.

Dem. Veja o capítulo 6 de [5] ou o capítulo 2 de [18]. ∎

Para enunciar o teorema de Interpolação de Marcinkievicz, precisamos antes introduzir alguns conceitos.

Definição 1.3. *Seja* (X, Σ_X, μ) *um espaço de medida. Dada* $f : X \to \mathbb{C}$ *mensurável, definimos sua função distribuição (associada a* μ*)* $m_f : (0, \infty) \to [0, \infty)$ *por*

$$m_f(\lambda) = \mu(\{\, x \in X : \; |f(x)| > \lambda \,\}) = \mu(E_f^{\lambda}).$$

Definição 1.4. *Sejam* (X, Σ_X, μ), (Y, Σ_Y, ν) *espaços de medida e* $M(Y, \Sigma_Y) = \{\, f : Y \to \mathbb{C} \; : \; f$ *é mensurável*$\}$. *Dado* $T : L^p(X, \Sigma_X, \mu) \to M(Y, \Sigma_Y)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ *um operador sublinear, isto é,*

$$|T(f+g)| \leqslant |Tf| + |Tg| \quad \textit{e} \quad |T(cf)| = |c||Tf|, \quad \forall\, f, g \in L^p(\mu) \quad \textit{e} \quad c \in \mathbb{C},$$

dizemos que:

1. T *é de tipo forte* (p,q), *onde* $1 \leqslant q \leqslant \infty$, *quando* $T : L^p(\mu) \to L^q(\nu)$ *está bem definido e é limitado, ou seja, existe* $c = c(p,q) > 0$ *tal que,* $\|Tf\|_q \leqslant c\|f\|_p$, $\forall\, f \in L^p(\mu)$.

2. T *é de tipo fraco* (p,q), *onde* $1 \leqslant q < \infty$, *quando existe* $c > 0$ *tal que, para cada* $\lambda > 0$,
$$\nu(E^{\lambda}_{Tf}) \leqslant \left(\frac{c\|f\|_p}{\lambda}\right)^q, \quad \forall f \in L^p(\mu).$$

3. T *é de tipo fraco* (p,∞) *quando, e somente quando,* T *é forte* (p,∞).

Com a definição acima podemos reescrever o teorema de interpolação de Riesz-Thorin da seguinte forma:

Teorema 1.8. *Sejam* $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1,\infty]$ *e* $T : L^{p_0} + L^{p_1} \to L^{q_0} + L^{q_1}$ *de tipo forte* (p_0, q_0) *com norma* M_0 *e tipo forte* (p_1, q_1) *com norma* M_1. *Então* T *é de tipo forte* (p,q), *onde*
$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} \quad e \quad \frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}, \quad t \in (0,1).$$

Provamos abaixo que todo operador de tipo forte é de tipo fraco.

Proposição 1.3. *Se* T *é de tipo forte* (p,q), *então* T *é de tipo fraco* (p,q).

Dem. Veja o capítulo 2 de [18]. ■

Teorema 1.9 (Interpolação de Marcinkiewicz). *Sejam* (X, Σ_X, μ) *e* (Y, Σ_Y, ν) *espaços de medida,* $1 \leqslant p_0 < p_1 \leqslant \infty$ *e seja*
$$T : L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\nu) \to M(Y, \Sigma_Y)$$
um operador sublinear fraco (p_0, p_0) *e fraco* (p_1, p_1). *Então* T *é de tipo forte* (p,p), *para cada* $p_0 < p < p_1$.

Dem. Pode ser encontrada no capítulo 6 de [5] e no capítulo 2 de [18]. ■

Concluimos esta parte com uma importante aplicação do teorema de interpolação de Marcinkiewicz: vamos provar que a função maximal de Hardy-Littlewood e de tipo forte (p,p), para $1 < p < \infty$. Começamos introduzindo a seguinte notação: $B_r(x) = B(x,r) = \{\, y \in \mathbb{R}^n \,:\, \|x-y\| < r\}$ denotará a bola aberta centrada em x de raio r. Lembramos que uma função $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ quando, para qualquer compácto $K \subset \Omega$, tivermos $f\chi_K \in L^p(\Omega)$.

Definição 1.5. *Dada* $f \in L^1_{loc}$*, definimos a função maximal de Hardy-Littlewood associada a* f *por:*

$$Mf(x) = \sup_{r>0} M_r f(x), \quad \textit{onde} \;\; M_r f(x) = \frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} |f(y)|dy,$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n$*.*

Observemos que pode ocorrer de existir $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Mf(x) = \infty$.

Proposição 1.4. $Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r(0)|}\int_{B_r(0)} |f(x-ry)|dy = \sup_{r>0}(|f| * \frac{1}{|B_r(0)|}\chi_{B_r(0)})(x)$.

Dem. Segue imediatamente da definição. ∎

Proposição 1.5. *A função maximal de Hardy-Littlewood* M *satisfaz as seguintes propriedades:*

1. M *é sublinear, ou seja,*
   (a) $|M(f+g)(x)| \leqslant |Mf(x)| + |Mg(x)|$, $\forall\, f, g \in L^p$*, para cada* $x \in \mathbb{R}^n$*;*
   (b) $|M(cf)(x)| = |c||Mf(x)|$*, para cada* $c \in \mathbb{C}$ *e cada* $x \in \mathbb{R}^n$*.*
2. M *é tipo forte (e consequentemente, fraco)* (∞, ∞)*.*

Dem. O ítem 1 é imediato. O ítem 2 também é imediato, pois como $M_r f(x) \leqslant \|f\|_\infty$, segue que $\|Mf\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$. ∎

Lema 1.2.2 (cobertura de Vitali)**.** *Seja* $\{B_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *uma família de bolas abertas em* $\mathbb{R}^n$*. Se* E *é um conjunto mensurável tal que* $E \subset \bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha$ *e* $|E| < \infty$*, então existe uma subfamília* $\{B_{\alpha_j}\}_{j=1}^k$ *disjunta tal que*

$$|E| < 3^n \sum_{j=1}^{k} |B_{\alpha_j}|.$$

Dem. Pode ser encontrada nas referências [5] e [18]. ∎

Teorema 1.10 (de Hardy-Littlewood)**.** M *é um operador de tipo forte* (p, p), $\forall\, 1 < p \leqslant \infty$*, ou seja, existe* $c = c(p) > 0$ *tal que,* $\|Mf\|_p \leqslant c\|f\|_p$, $\forall\, f \in L^p(\mathbb{R}^n)$*.*

Dem. O caso $p = \infty$ está pronto. Seja $1 < p < \infty$. É suficiente provarmos que M é fraco $(1, 1)$.

Pela definição de $Mf(x)$, para cada $x \in E^\lambda_{Mf}$, podemos escolher $r_x > 0$ tal que $M_{r_x} f(x) > \lambda$. Temos que $\{B_x\}_{x\in\mathbb{R}^n}$ (onde $B_x = B_{r_x}(x)$) é uma cobertura de E^λ_{Mf}. Seja

$(E_m)_{m\in\mathbb{N}}$ uma sequência crescente de conjuntos mensuráveis tais que, $|E_m| < \infty$ e $E^{\lambda}_{Mf} = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$. Então, pelo Lema de Vitali, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $x_{1_m}, \ldots, x_{k_m} \in E^{\lambda}_{Mf}$ tal que, as bolas $B_{x_{j_m}}$ são disjuntas e

$$|E_m| < 3^n \sum_{j=1}^{k} |B_{x_{j_m}}| \leqslant \frac{3^n}{\lambda} \sum_{j=1}^{k} \int_{B_{x_{j_m}}} |f(y)|dy \leqslant \frac{3^n}{\lambda} \int_{R^n} |f(y)|dy, \tag{1.8}$$

pois $M_{r_{x_{j_m}}} f(x_{j_m}) > \lambda$, $\forall\ j = 1, \ldots, m$. Fazendo então $m \to \infty$ em (1.8), obtemos: $|E^{\lambda}_{Mf}| \leqslant \dfrac{3^n}{\lambda}\|f\|_1$, ou seja, Mf é fraco $(1,1)$. Portanto, pelo teorema de Marcinkiewicz segue o resultado. ■

1.3 A transformada de Fourier.

A teoria desta seção foi extraida principalmente das referências [5], [6] e [18].

A transformada de Fourier fornece-nos um poderoso instrumento no estudo das equações diferenciais parciais. Primeiramente definiremos a transformada de Fourier para funções de $L^1(\mathbb{R}^n)$, em seguida estenderemos este conceito para o espaço de Schwartz das funções de decrescimento rápido e finalmente para a classe das distribuições temperadas.

1.3.1 A transformada de Fourier no espaço $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.6. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. A transformada de Fourier de f, denotada por $\widehat{f}$, é a função definida sobre o $\mathbb{R}^n$ por:*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x\cdot\xi)} f(x)dx, \tag{1.9}$$

onde $x \cdot \xi = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\xi_i$ é o produto escalar em $\mathbb{R}^n$.

Como $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, é imediato ver que $\widehat{f}(\xi)$ dada em (1.9) está bem definida para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Com efeito,

$$|\widehat{f}(\xi)| = |\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x\cdot\xi)} f(x)dx| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

o que prova a afirmação.

Proposição 1.6. *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então a aplicação $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ definida por $\mathcal{F}(f)(\xi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i(x\cdot\xi)} f(x)dx$ é um operador linear contínuo e $\|\mathcal{F}\| = 1$.*

Dem. Dada $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, e $\alpha \in \mathbb{R}$, segue imediatamente da Definição 1.14 que $\mathcal{F}(f+\alpha g) = \mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(\alpha g)$. Além disso $\|\mathcal{F}(f)\|_{L^\infty} \leqslant \|f\|_{L^1} \quad \forall\ f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e portanto $\|\mathcal{F}\| = 1$. ■

Teorema 1.11. *A transformada de Fourier em* $L^1(\mathbb{R}^n)$*, satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *Dada* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *,* $\widehat{f}$ *é uma função contínua.*
2. $\lim\limits_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$.
3. $(\tau_h f)\widehat{\ }(\xi) = e^{-2i\pi h\cdot\xi}\widehat{f}(\xi)$*, onde* $\tau_h f(x) = f(x-h)$.
4. $\mathcal{F}(e^{2i\pi x\cdot h} f)(\xi) = \tau_h \widehat{f}(\xi)$.
5. *Dada* $a > 0$, $\mathcal{F}(f(ax))(\xi) = a^{-n}\widehat{f}(a^{-1}\xi)$.
6. *Dados* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $(f * g)\widehat{\ }(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$.
7. *Se* $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$*, então* $\displaystyle\int \widehat{f} g d\xi = \int f\widehat{g} d\xi$.
8. *Se* ρ *é uma rotação (isto é, uma transformação ortogonal), então*

$$\mathcal{F}(f(\rho))(\xi) = \widehat{f}(\rho\xi).$$

Dem. Veja, por exemplo, as referências [5] e [18]. ■

1.3.2 A transformada de Fourier no espaço das funções de decrescimento rápido.

Apresentaremos a seguir um espaço de funções no qual a transformada de Fourier tem inversa, e devido sua regularidade e densidade em L^p, $1 \leqslant p < \infty$, poderemos usá-lo para um estudo mais amplo da transformada de Fourier, por exemplo definí-la em L^2.

Definição 1.7. *Chamamos de espaço das funções* $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *de decrescimento rápido, também conhecido como espaço de Schwartz, ao espaço*

$$S(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n); \|\varphi\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi| < \infty\},$$

$\forall$ *multi-índices* α, β.

Denotaremos $S(\mathbb{R}^n)$ simplesmente por S.

Definição 1.8. *Dizemos que uma sequência* $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *de funções de* S *converge para uma função* $\varphi \in S$*, quando* $\lim\limits_{j\to\infty} \|\varphi_j - \varphi\|_{\alpha,\beta} = 0$*, para quaisquer multi-índices* α, β*.*

Proposição 1.7. S *com a topologia gerada pelas seminormas* $\|\varphi\|_{\alpha,\beta} = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|, x \in \mathbb{R}^n$ *e* α, β *multi-índices, é completo.*

Dem. Veja [6]. ∎

Teorema 1.12. *O espaço de Schwartz possui as seguintes propriedades:*

1. *Dada* $\varphi \in S, P(x)\varphi \in S$ *e* $P(\partial)\varphi \in S$*, para qualquer polinômio* $P(x)$*. Em particular, dados quaisquer polinômios* $P(x), Q(x)$ *e qualquer* $\varphi \in S$*, temos que,* $P(x)Q(\partial)\varphi \in S$*.*

2. $S \hookrightarrow L^p$ *e é denso em* $L^p, \forall\ 1 \leqslant p < \infty$.

3. *Das* $\varphi, \psi \in S, \varphi * \psi \in S$*, ou seja, o produto de convolução é uma operação em* S*.*

Dem. Veja o capítulo 8 de [6] ∎

Corolário 1.3.1. *Todas as propriedades dadas pelo Teorema 1.11 para transformada de Fourier em* L^1 *são válidas para o espaço de Schwartz* $S(\mathbb{R}^n)$*.*

Dem. Temos pelo item 3 do Teorema 1.12 que $S(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^1$. Daí segue o resultado.
∎

Teorema 1.13. *Seja* $\varphi \in (\mathbb{R}^n)$*. Então:*

1. $(\partial_x^\alpha \varphi)\widehat{\ }(\xi) = (2\pi i\xi)^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)$

2. $((-2\pi i x)^\alpha \varphi(x)\widehat{\ }(\xi)) = \partial_\xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)$

3. $\widehat{\varphi} \in S(\mathbb{R}^n)$*, isto é,* $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S(\mathbb{R}^n)$.

Dem. Veja [6], capítulo 8. ∎

Teorema 1.14 (Fourier)**.** *Dado* $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ *vale:*

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(\xi) e^{2\pi i x\xi} d\xi. \tag{1.10}$$

Dem. Consulte o capítulo 8 de [6]. ∎

O teorema de Fourier nos dá uma fórmula de inversão da transformada, que permite definir a transformada inversa de Fourier de uma função $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$:

$$\mathcal{F}^{-1}(\varphi(x)) = \check{\varphi}(x) = \int \varphi(\xi)e^{2\pi i x\xi}d\xi.$$

Teorema 1.15. *A transformada de Fourier $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S(\mathbb{R}^n)$ é um isomorfismo conntínuo e sua inversa $\mathcal{F}^{-1}$: $S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S(\mathbb{R}^n)$ também é um isomorfismo contínuo.*

Dem. Veja o Teorema 8.2.3, página 96 de [6]. ∎

Teorema 1.16 (Plancherel)**.** *Se $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, então $\|\varphi\|_{L^2} = \|\widehat{\varphi}\|_{L^2}$.*

Dem. Da definição de $\mathcal{F}$ temos que

$$\begin{aligned}\overline{\widehat{\varphi}(\xi)} = \overline{\int \varphi(x)e^{-\pi i x\xi}dx} &= \int \overline{\varphi(x)}e^{2\pi i x\xi}dx \\ &= \int \overline{\varphi(-x)}e^{-2\pi i x\xi}dx \\ &= (\overline{\varphi}(-\cdot))\widehat{\ }(\xi).\end{aligned}$$

Seja $\psi(x) = (\varphi * \overline{\varphi}(-\cdot))(x)$. Então pela propriedade da transformada de Fourier do produto de convolução temos

$$\widehat{\psi}(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)(\overline{\varphi}(-\cdot))\widehat{\ }(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)\overline{\widehat{\varphi}(\xi)} = |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 \text{ e } \psi(0) = \int |\varphi(x)|^2dx. \tag{1.11}$$

Por outro lado temos pelo Teorema 1.14 que

$$\psi(0) = \int \widehat{\psi}(\xi)d\xi = \int |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi. \tag{1.12}$$

Portanto de (1.11) e (1.12) segue o resultado. ∎

Apresentamos no corolário abaixo uma identidade equivalente ao teorema de Plancherel.

Corolário 1.3.2 (Identidade de Parseval)**.** *Sejam φ e $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$,então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi\overline{\varphi} = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi}\overline{\widehat{\varphi}}.$$

1.3.3 A transformada de Fourier no espaço das distribuições temperadas.

Definição 1.9. *Uma distribuição temperada é um funcional linear contínuo $F : S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$. O dual de $S(\mathbb{R}^n)$ será designado pela notação $S'(\mathbb{R}^n)$. Potanto, $F \in S'(\mathbb{R}^n)$ se, e*

somente se,
(i) $F : S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ *é linear;*
(ii) *se* $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência de* $S(\mathbb{R}^n)$ *tal que* $\varphi_j \longrightarrow 0$ *em* $S(\mathbb{R}^n)$, *então* $F(\varphi_j) \longrightarrow 0$ *em* $\mathbb{C}$.

Definição 1.10. *Dizemos que uma função* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ *é de crescimento polinomial quando existem* $C, M \geqslant 0$ *tal que* $|f(x)| \leqslant C(1+|x|)^M, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Proposição 1.8. *Toda função localmente integrável de crescimento polinomial no infinito define uma distribuição temperada.*

Dem. Veja a referência [6]. ■

Observação 1.1. (i) *Em particular, toda função limitada e toda função* $f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leqslant p \leqslant \infty$, *define uma distribuição temperada por meio da definição da* F_f. (ii) *Se* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *então* $\hat{f} \in L^\infty$ *e é contínua , portanto* $\hat{f} \in S'(\mathbb{R}^n)$, *isto é, define uma distribuição temperada, pois se* $f, g \in L^1$, *então* $\displaystyle\int \widehat{f} g d\xi = \int f \widehat{g} d\xi$. *Além disso segue do Teorema* $1.13-$(ii) *que* $((-2\pi i x)^\alpha \varphi(x)\hat{\ }(\xi)) = \partial_\xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi) \qquad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. *Logo* $\displaystyle\int \widehat{f}(\xi)\varphi(\xi)d\xi = \int f(x)\widehat{\varphi}(x)dx, \qquad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.11. *Dada* $F \in S'(\mathbb{R}^n)$, *definimos sua transformada de Fourier por*

$$\langle \widehat{F}, \varphi \rangle = \widehat{F}(\varphi) = \langle F, \widehat{\varphi} \rangle = F(\widehat{\varphi}), \qquad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n). \tag{1.13}$$

Observe que se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então $\widehat{f}$ coincide com sua transformada de Fourier em $S'(\mathbb{R}^n)$. Portanto, a definição 1.11 é consistente com a teoria de transformada de Fourier para funções de L^1.
Assim como em $S(\mathbb{R}^n)$, vale o seguinte resultado para a transformada de Fourier em $S'(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.17. $\mathcal{F} : S'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S'(\mathbb{R}^n)$ *é um isomorfismo e tanto* $\mathcal{F}$ *como* $\mathcal{F}^{-1}$ *são contínuas.*

Dem. Obviamente, $\mathcal{F}$ é linear. Agora, dada $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, segue do fato que $\hat{\hat{\varphi}} = \check{\varphi}$,e da definição 1.11, que

$$\langle \widehat{\widehat{F}}, \varphi \rangle = \langle \widehat{F}, \widehat{\varphi} \rangle = \langle F, \widehat{\widehat{\varphi}} \rangle = \langle F, \varphi^\vee \rangle.$$

Portanto,

$$\langle F, \varphi^\vee \rangle = \langle \widehat{F}, \widehat{\varphi} \rangle, \qquad \varphi \in S(\mathbb{R}^n), \tag{1.14}$$

e isto é o teorema de inversão para transformada de Fourier em $S'(\mathbb{R}^n)$. Portanto, se $\widehat{F} = 0$, então $F = 0$, e $F \in S'(\mathbb{R}^n)$ é a transformada de Fourier de $\mathcal{F}^{-1}(\widehat{F})$. Além disso temos pelo teorema 1.15 que $\mathcal{F}$ é contínuo na topologia de S, logo $\mathcal{F} : S'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S'(\mathbb{R}^n)$ é um isomorfismo, isto é, $\mathcal{F} : S'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S'(\mathbb{R}^n)$ é uma bijeção linear e contínua. ∎

Teorema 1.18. $\mathcal{F} : S'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S'(\mathbb{R}^n)$ *satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $(\partial^\alpha F)\widehat{\ }(\xi) = (2\pi i\xi)^\alpha \widehat{F}(\xi)$.

2. $((-2\pi i x)^\alpha F)\widehat{\ }(\xi) = \partial_\xi^\alpha \widehat{F}(\xi)$.

3. $(\tau_h F)\widehat{\ }(\xi) = e^{-2\pi i h\xi}\widehat{f}(\xi)$.

4. $(e^{2\pi i x h}F)\widehat{\ }(\xi) = \tau_h \widehat{F}(\xi)$.

Dem. Provaremos apenas o primeiro item; para a demonstração dos demais ítens, veja por exemplo, as referências [5] e [18]. Pela Definição 1.11

$$\begin{aligned}\langle \widehat{\partial^\alpha F}, \varphi\rangle &= \langle \partial^\alpha F, \widehat{\varphi}\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle F, \partial^\alpha \hat{\varphi}\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle F, ((-2\pi i x)^\alpha \varphi)\widehat{\ }(\xi)\rangle \\ &= \langle F, ((2\pi i x)^\alpha \varphi)\widehat{\ }(\xi)\rangle = \langle (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{F}, \varphi\rangle. \ \blacksquare\end{aligned}$$

Exemplo 1.1. *Calculemos* $\widehat{\delta}$*, onde* δ *é a função delta de Dirac:*

$$\langle \widehat{\delta}, \phi\rangle = \langle \delta, \widehat{\phi}\rangle = \widehat{\phi}(0) = \int \phi(x)dx = \langle 1, \phi\rangle.$$

Portanto, $\widehat{\delta} = 1$.

Agora, seja $f \equiv 1$. *Calculemos* $\widehat{1}$.

$$\langle \widehat{1}, \phi\rangle = \langle 1, \widehat{\phi}\rangle = \int \widehat{\phi}(\xi)d\xi.$$

como pelo Teorema 1.14,

$$\phi(x) = \int \widehat{\phi}(\xi)e^{2i\pi x\xi}d\xi,$$

segue que $\int \widehat{\phi}(\xi)d\xi = \phi(0)$. *Logo,*

$$\langle \widehat{1}, \phi\rangle = \phi(0) = \delta(\phi) \Longrightarrow \widehat{1} = \delta.$$

Alternativamente, usando a fórmula da inversão (1.14) *chega-se ao mesmo resultado.*

Definição 1.12. *Definimos em* $S'(\mathbb{R})$ *a função valor principal de* $\frac{1}{x}$*, denotada por* $v.p.\frac{1}{x}$*, pela expressão*

$$v.p.\frac{1}{x}(\phi) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|x|<\frac{1}{\epsilon}} \frac{\phi(x)}{x}dx,$$

para qualquer $\phi \in S(\mathbb{R})$*.*

Exemplo 1.2. *Calculemos* $\widehat{v.p.\frac{1}{x}}$*. Dada* $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$*, usando o teorema de Fubini e o Teorema da Convergência Dominada segue que*

$$\begin{aligned}
\widehat{v.p.\frac{1}{x}}(\phi) &= v.p.\frac{1}{x}(\widehat{\phi}) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|x|<\frac{1}{\epsilon}} \frac{\widehat{\phi}(x)}{x}dx \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|x|<\frac{1}{\epsilon}} \frac{1}{x}\left(\int \phi(y)e^{-2i\pi x\cdot y}dx\right)dx \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} \phi(y)\left(\int_{\epsilon<|x|<\frac{1}{\epsilon}} \frac{e^{-2i\pi xy}}{x}dx\right)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi(y)\left(\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|x|<\frac{1}{\epsilon}} \frac{e^{-2i\pi xy}}{x}dx\right)dy. \qquad (1.15)
\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|x|<\frac{1}{\epsilon}} \frac{e^{-2i\pi xy}}{x}dx &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|x|<\frac{1}{\epsilon}} \frac{\cos(2\pi x)}{x} - 2i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{sen(2\pi xy)}{x}dx \\
&= 0 - 2isgn(y)\int_0^{\infty}\frac{senx}{x}dx = -i\pi sgn(y). \qquad (1.16)
\end{aligned}$$

Segue portanto de (1.15) *e* (1.16) *que*

$$\widehat{v.p.\frac{1}{x}}(\xi) = -i\pi sgn(\xi).$$

Definição 1.13. *Uma distribuição* $\mathcal{F} \in S'(\mathbb{R})$ *é homogênea de grau* λ*, quando* $\mathcal{F}\circ S_r = r^\lambda\mathcal{F}, \quad \forall r > 0,$ *onde* $S_r(x) = rx$*.*

Teorema 1.19. *Seja* δ *a medida delta de Dirac. Então* δ *é homogênea de grau* -1*.*

Dem. Observe que sendo $S_r(x) = rx \Longrightarrow S_r^{-1}(x) = \frac{1}{r}x$ e $S_r(x) = rId(x)$. Logo

$$\begin{aligned}
\langle\delta\circ S_r, \phi\rangle &= |detS_r|^{-1}\langle\delta, \phi\circ S_r^{-1}\rangle \\
&= |r|^{-1}\langle\delta, \phi\circ S_r^{-1}\rangle \\
&= |r|^{-1}(\phi\circ S_r^{-1})(0) \\
&= |r|^{-1}\phi(0) = |r|^{-1}\delta(\phi). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Do Teorema 1.19 temos em particular que

$$\langle\delta(2\xi(\frac{\tau+\xi^2}{2\xi}-\eta)), \phi\rangle = \langle\delta\circ S_{2\xi}(\frac{\tau+\xi^2}{2\xi}-\eta), \phi\rangle = |2\xi|^{-1}\delta(\frac{\tau+\xi^2}{2\xi}-\eta). \qquad (1.17)$$

1.3.4 A transformada de Fourier em $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leqslant 2$.

Nesta subseção vamos primeiramente estender a transformada de Fourier, como função, para $L^2(\mathbb{R}^n)$ e então usar o teorema de interpolação de Riesz-Thorin para provar que $\mathcal{F}$ também pode ser definida para funções em L^p, $1 < p < 2$.

Definição 1.14. *Dadas* $F \in S'(\mathbb{R}^n)$ *e* $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$, *definimos a convolução de* F *e* ψ *por:*

$$F * \psi(x) = \langle F, \tau_{-x}\psi(-\cdot)\rangle = \langle F, \psi(x - \cdot)\rangle.$$

Proposição 1.9. *Se* $F \in S'(\mathbb{R}^n)$ *e* $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$, *então* $F * \psi$ *é uma função* C^∞ *de crescimento polinomial, e portanto, define uma distribuição temperada pela fórmula:*

$$\langle F * \psi, \phi\rangle = \int (F * \psi)(x)\phi(x)dx, \quad \forall \phi \in S(\mathbb{R}^n). \tag{1.18}$$

Dem. Veja a referência [5]. ∎

Vale a seguinte caracterização de $F * \psi \in S'(\mathbb{R}^n)$:

Proposição 1.10. *Se* $F \in S'(\mathbb{R}^n)$ *e* $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$, *então*

$$\int (F * \psi)(x)\phi(x)dx = \langle F, \phi * \widetilde{\psi}\rangle,$$

onde $\widetilde{\psi}(x) = \psi(-x)$ *é a reflexão de* ψ.

Dem. Veja a referência [5]. ∎

Com essas ferramentas podemos provar o resultado seguinte:

Teorema 1.20. *Se* $F \in S'(\mathbb{R}^n)$, *então*

$$\widehat{F * \psi} = \widehat{F}\widehat{\psi},$$

onde $\widehat{F}\widehat{\psi} \in S'(\mathbb{R}^n)$ *é definido como*

$$\langle \widehat{F}\widehat{\psi}, \phi\rangle = \langle \widehat{F}, \widehat{\psi}\phi\rangle, \quad \forall\ \phi \in S(\mathbb{R}^n),$$

isto é

$$\widehat{F}\widehat{\psi}(\phi) = \widehat{F}(\widehat{\psi}\phi).$$

Dem. Pelas propriedades anteriores e usando o fato de que $\widetilde{\psi} = \widehat{\widehat{\psi}}$, segue que

$$\langle \widehat{F * \psi}, \phi\rangle = \langle F * \psi, \widehat{\phi}\rangle = \langle F, \widehat{\phi} * \widehat{\widehat{\psi}}\rangle = \langle F, \widehat{\phi\widehat{\psi}}\rangle = \langle \widehat{F}, \phi\widehat{\psi}\rangle,$$

donde segue o resulado. ∎

Teorema 1.21 (Plancherel)**.** *Se* $f \in L^2$, *então,* $\widehat{f} \in L^2$ *e*

$$\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2}.$$

Em outras palavras , $\mathcal{F}$ *é um operador unitário (uma isometria) em* L^2. *Além disso,*

$$\widehat{f} = \lim_{M\to\infty} \int_{|x|<M} f(x)e^{-2i\pi x\cdot\xi}dx$$

e

$$f = \lim_{M\to\infty} \int_{|x|<M} \widehat{f}(\xi)e^{-2i\pi x\cdot\xi}d\xi,$$

onde os limites são tomados em L^2.

Dem. Seja $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e seja $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções de $S(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi_j \to f$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Então, por Cauchy-Schwartz, dada $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$,

$$|\langle \widehat{\phi_j} - \widehat{f}, \phi\rangle| = |\langle \phi_j - f, \widehat{\phi}\rangle| \leqslant \|\phi_j - f\|_{L^2}\|\phi\|_{L^2} \to 0,$$

quando $j \to \infty$, ou seja, $\widehat{\phi_j} \to \widehat{f}$ em $S'(\mathbb{R}^n)$. Do teorema de Plancherel em $S(\mathbb{R}^n)$, sabemos que a sequência $(\phi_j)_{j\in N}$ é de Cauchy em L^2, e portanto, pela unicidade do limite segue que $\widehat{f} \in L^2$. A injetividade segue do fato de $\widehat{f}^{\vee} = f = \widehat{(f^{\vee})}$ em $S'(\mathbb{R}^n)$. Além disso, $\|f\|_{L^2} = \lim\limits_{j\to\infty} \|\phi_j\|_{L^2} = \lim\limits_{j\to\infty} \|\widehat{\phi}_j\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2}$.

Como $\mathcal{F}$ é continua, segue que $f\chi_{B(0,M)} \to \widehat{f}$ e $\widehat{f}\chi_{B(0,M)} \to f$ em L^2 quado $M \to \infty$. ∎

Com a Proposição 1.8 e o Teorema 1.21 provamos que a transformada de Fourier é um operador linear de tipo forte $(1,\infty)$ e $(2,2)$ respectivamente. Então o teorema de Riesz-Thorim nos permite estabelecer o seguite resultado:

Teorema 1.22 (des. de Hausdorff-Young)**.** *Se* $f \in L^p$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, *então* $\widehat{f} \in L^q$, *com* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *e*

$$\|\widehat{f}\|_q \leqslant \|f\|_p.$$

Dem. Como $\mathcal{F}$ é de tipo forte $(1,\infty)$ e $(2,2)$, segue do Teorema de Riesz-Thorim que $\mathcal{F}$ é de tipo forte (p,q), com

$$\frac{1}{p} = \frac{(1-t)}{1} + \frac{t}{2} = 1 - \frac{t}{2} \text{ e } \frac{1}{q} = \frac{1-t}{\infty} + \frac{t}{2} = \frac{t}{2} = 1 - \frac{1}{p}.$$

Portanto

$$\|\widehat{f}\|_q \leqslant \|f\|_p. \quad \blacksquare$$

1.3.5 A transformada de Hilbert

Definição 1.15. *Dada* $f \in S(\mathbb{R})$, *definimos sua transformada de Hilbert pela seguinte expressão* $(\mathcal{H} : S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R})$:

$$\mathcal{H}f(y) = \frac{1}{\pi}(v.p.\frac{1}{x} * f)(y) = \frac{1}{\pi}v.p.\frac{1}{x}(f(y-\cdot)) = v.p.\frac{1}{\pi}\int \frac{f(x)}{y-x}dx. \tag{1.19}$$

Obseve que $\mathcal{H}f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, ou seja, $\mathcal{H}f$ está definida em toda a reta.

Proposição 1.11. *Dada* $f \in S(\mathbb{R})$, $\widehat{\mathcal{H}f}(\xi) = -i\,\mathrm{sgn}(\xi)\widehat{f}(\xi)$.

Dem. Como $v.p.\frac{1}{x} \in S'(\mathbb{R})$, e $\widehat{v.p.\frac{1}{x}}(\xi) = -i\pi\,\mathrm{sgn}(\xi)$, segue que

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{H}f}(\xi) &= \frac{1}{\pi}\widehat{v.p.\frac{1}{x} * f}(\xi)\\ &= \frac{1}{\pi}\widehat{v.p.\frac{1}{2}}(\xi)\widehat{f}(\xi) = -i\,\mathrm{sgn}(\xi)\widehat{f}(\xi). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Lembramos que $\mathcal{H}f$ é uma função C^∞ de crescimento polinomial, se $f \in S(\mathbb{R})$.

A Proposição 1.11 e a densidade de $S(\mathbb{R})$ em L^2 nos permite definir a transformada de Hibert de funções em L^2 como uma isometria:

Teorema 1.23. *Dada* $f \in L^2(\mathbb{R})$, *temos*

1. $\|\mathcal{H}f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$.
2. $\mathcal{H}(\mathcal{H}f) = -f$.
3. $\int \mathcal{H}f \cdot g dx = -\int f\mathcal{H}g ds$.

Dem. (1) Dada $f \in L^2(\mathbb{R})$, segue da Proposição 1.11 e do Teorema de Plancherel que

$$\|\mathcal{H}f\|_{L^2} = \|\widehat{\mathcal{H}f}\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}.$$

(2) Como $\mathcal{H} : L^2 \longrightarrow L^2$ é unitário, segue da fórmula da inversa que

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\mathcal{H}f) &= (\widehat{\mathcal{H}\mathcal{H}f})^\vee = (-i\,\mathrm{sgn}(\xi)\widehat{\mathcal{H}f}(\xi))^\vee\\ &= ((-i)^2(\mathrm{sgn}(\xi))^2\widehat{f}(\xi))^\vee = -(\widehat{f})^\vee = -f.\end{aligned}$$

(3) Segue por Parseval que, dadas $f, g \in L^2$,

$$\begin{aligned}\int \mathcal{H}f \cdot g dx &= \int \widehat{\mathcal{H}f}\overline{\widehat{g}}d\xi = \int -i\,\mathrm{sgn}(\xi)\widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}d\xi\\ &= -\int \widehat{f}(\xi)\overline{(}-i\,\mathrm{sgn}(\xi)\widehat{g}(\xi))d\xi = -\int \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{\mathcal{H}g}(\xi)}d\xi\\ &= -\int f\mathcal{H}g dx. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Além das propriedades acima a transformada de Hilbert satisfaz as seguintes importantes propriedades:

Teorema 1.24. (a) *Dada* $f \in L^p(\mathbb{R})$, $\mathcal{H}(f)$ *existe quase-sempre.*
(b)*(Kolmogorov)* $\mathcal{H}$ *é do tipo fraco* $(1,1)$, *isto é, dado* $\lambda > 0$

$$|\{x \in \mathbb{R} : |\mathcal{H}f(x)| > \lambda\}| \leqslant \frac{c}{\lambda}\|f\|_{L^1}$$

(c)*(M. Riesz)* $\mathcal{H}$ *é do tipo forte* (p,p), *se* $1 < p < \infty$, *isto é,*

$$\|\mathcal{H}f\|_p \leqslant C_p\|f\|_p, \qquad \forall\ f \in L^p(\mathbb{R}).$$

Dem.(a) Segue da densidade de $S(\mathbb{R})$ em $L^p(\mathbb{R})$, para $1 < p < \infty$.

(b) Veja a referência [4], Teorema 3.2, pág. 51.

(c) O Teorema 1.23 item (1) nos diz que $\mathcal{H}$ é tipo forte $(2,2)$. Como por (b) $\mathcal{H}$ é tipo fraco $(1,1)$, segue do Teorema 1.9 (teorema de interpolação de Marcinkiewicz) que $\mathcal{H}$ é de tipo forte (p,p), $\forall 1 < p < 2$.

Agora considere $p > 2$. Seja $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções tal que $\phi_n \longrightarrow f$ em L^p. Então, por dualidade, Teorema 1.23 item (3), e o caso anterior $(p < 2)$, temos

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{H}f\|_p &= \lim_{n\to\infty} \|\mathcal{H}\phi_n\|_p \\
&= \lim_{n\to\infty} \sup\left\{\left|\int \mathcal{H}\phi_n\psi dx\right| :\ \|\psi\|_q \leqslant 1\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sup\left\{\left|\int \phi_n\mathcal{H}\psi dx\right| :\ \|\psi\|_q \leqslant 1\right\} \\
&\leqslant \sup\{\|\mathcal{H}\psi\|_q :\ \|\psi\|_q \leqslant 1\} \lim_{n\to\infty} \|\phi_n\|_p \\
&\leqslant C_q \lim_{n\to\infty} \|\phi_n\|_p = C_q\|f\|_p. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Observação 1.2. *1.* $\mathcal{H}$ *não é forte* (p,p), *se* $p = 1$ *ou* $p = \infty$. *Considere por exemplo* $f = \chi_{[0,1]}$, *então* $\mathcal{H}f$ *não pertence a* L^p, *para* $p = 1$ *e* $p = \infty$, *pois:*

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{\pi}\log\left|\frac{x}{x-1}\right|,$$

que não é nem limitada nem integrável.

2. Observe que, dada $\phi \in S(\mathbb{R})$, $\mathcal{H}\phi \in L^1 \Longleftrightarrow \widehat{\phi}(0) = \int \phi dx = 0$.

1.4 Os Espaços de Sobolev de tipo $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Os espaços de Sobolev de tipo $L^2(\mathbb{R}^n)$ medem a diferenciabilidade de distribuições em $L^2(\mathbb{R}^n)$. A vantagem dos espaços de Sobolev de tipo $L^2(\mathbb{R}^n)$ é que, além de ser um espaço de Hilbert, a transformada de Fourier, que transforma derivação em multiplicação por polinômios em $L^2(\mathbb{R}^n)$, é um operador unitário nesses espaços.

Definição 1.16. *: Dado $s \in \mathbb{R}$, definimos os espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ por:*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^n) : J^s f \in L^2(\mathbb{R}^n), \text{ onde } J^s f = ((1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{f})^{\vee} \right\}$$

munido da norma

$$\|f\|_{H^s} = \|J^s f\|_{L^2} = \left(\int (1+|\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} = \left\| (1+|\xi|^2)^{s/2} \widehat{f} \right\|_{L^2},$$

a qual provém do produto interno:

$$< f, g >_s = \int J^s f \overline{J^s g} dx = \int \widehat{f}(\xi)(1+|\xi|^2)^s \overline{\widehat{g}(\xi)} d\xi.$$

Observemos que $H^s(\mathbb{R}^n)$ está bem definido, pois a função $\xi \mapsto (1+|\xi|^2)^{s/2}$ é C^∞ e de crescimento polinomial, pois $|\partial_\alpha \varphi_s(\xi)| \leqslant C_\alpha (1+|\xi|^2)^{s-\alpha}$.

Proposição 1.12. H^s *satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $f \in H^s \iff (1+|\xi|^2)^s \widehat{f} \in L^2$,*ou seja,* $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n, d\mu_s)$, *onde* $d\mu_s = (1+|\xi|^2)^s d\xi$. ($F : H^s \longmapsto L^2(d\mu_s)$ *é isomorfismo unitário). Em particular* H^s *é um espaço de Hilbert.*

2. $\mathcal{S}$ *é denso em* $H^s, \forall\ s \in \mathbb{R}$.

3. *Se* $t < s$, *então* $H^s \hookrightarrow H^t$ *e é denso em* H^t *na topologia de* H^t.

4. $J^t : H^s \longrightarrow H^{s-t}$ *é um isomorfismo unitário,* $\forall s, t \in \mathbb{R}$.

5. $H^0 = L^2$ *e* $\|.\|_{H^0} = \|.\|_{L^2}$.

6. $\partial^\alpha : H^s \longrightarrow H^{s-|\alpha|}$ *é um operador linear limitado* $\forall s \in \mathbb{R}, \forall$ *multi-indice* α.

Dem. 1 segue da definição de H^s. 2 segue de 1 e da densidade de S em L^2. 3 é imediato. O restante não é difícil de fazer. ■

Observe que por 3 e 5 temos que, se $s \geqslant 0$ então as distribuições em H^s são funções de L^2. Quando $s < 0$, geralmente os elementos de H^s não são funções.

Teorema 1.25 (Interpolação)**.** *Sejam* $s_1 \leqslant s \leqslant s_2$, *e* $\theta \in [0,1]$ *tais que* $s = \theta s_1 + (1-\theta)s_2$. *Se* $f \in H^{s_1} \cap H^{s_2}$, *então* $f \in H^s$ *e* $\|f\| \leqslant \|f\|_{H^{s_1}}^{\theta} \|f\|_{H^{s_2}}^{1-\theta}$.

Dem. Temos que $\theta + 1 - \theta = 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{\theta}} + \frac{1}{\frac{1}{1-\theta}} = 1.$
Daí, aplicando Hölder, obtemos:

$$\begin{aligned}
\|f\|_{H^s} &= \left(\int (1+|\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int (1+|\xi|^2)^{\theta s_1} |\widehat{f}(\xi)|^{2\theta} (1+|\xi|^2)^{(1-\theta)s_2} |\widehat{f}(\xi)|^{2(1-\theta)} d\xi\right)^{1/2}. \\
&\leqslant \left(\int (1+|\xi|^2)^{\frac{\theta s_1}{\theta}} |\widehat{f}(\xi)|^{\frac{2\theta}{\theta}} d\xi\right)^{\frac{\theta}{2}} \left(\int (1+|\xi|^2)^{\frac{(1-\theta)s_2}{(1-\theta)}} |\widehat{f}(\xi)|^{\frac{2(1-\theta)}{(1-\theta)}} d\xi\right)^{\frac{1-\theta}{2}}. \\
&= \left(\int (1+|\xi|^2)^{s_1} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{\theta}{2}} \left(\int (1+|\xi|^2)^{s_2} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1-\theta}{2}}. \\
&= \|f\|_{H^{s_1}}^{\theta} \|f\|_{H^{s_2}}^{1-\theta}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Definição 1.17. *Dizemos que uma função* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *é fortemente diferenciável em* L^p *em relação à j-ésima variável, quando* $\exists g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *tal que:*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left\| \frac{(\tau_{t-\epsilon e_j})f - f}{\epsilon} - g \right\|_{L^p} = 0,$$

isto é,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int \left| \frac{f(x+\epsilon e_j) - f(x)}{\epsilon} - g(x) \right|^p dx = 0.$$

A função g *é chamada de derivada parcial (forte) de* f *em relação à j-ésima variável.*

Analogamente, define-se a derivada de f em L^p. Dizemos que $g \in L^p$ é a derivada em L^p de f quando:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left\| \frac{\tau_{-\epsilon} f - f}{\epsilon} - g \right\|_p = 0,$$

onde $\tau_y f(x) = f(x-y)$.

Observação 1.3. *No caso* $p = 2$, *temos que a definição acima é equivalente às duas seguintes afirmações:*

- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \partial_{x_j} \varphi(x) dx = -\int_{\mathbb{R}^n} g(x) \varphi(x) dx$, $\forall\ \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$.
- $\xi_j \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.26 (Imersão de Sobolev). *Seja* $s > k + \frac{n}{2}$.

1. *Se* $f \in H^s$, *então* $(\partial_x^\alpha f)^\wedge \in L^1$ *e*

$$\left\|(\partial_x^\alpha f)^\wedge\right\|_{L^1} \leqslant C\,\|f\|_{H^s}\,,\ \forall\ |\alpha| \leqslant k,\ \text{onde } C = C(k-s).$$

2. $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^k_\infty(\mathbb{R}^n)$ *(O espaço das funções com* k *derivadas contínuas que se anulam no infinito). Em outras palavas, se* $f \in H^s$, $s > k + \frac{n}{2}$, *então (após uma possível modificação de* f *em um conjunto de medida nula)*

$$f \in C^k_\infty(\mathbb{R}^n) \text{ e } \|f\|_{C^k} \leqslant C\,\|f\|_{H^s}\,.$$

Dem.(1) Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}(2\pi)^{-|\alpha|}\int |(\partial_x^\alpha f)^\wedge(\xi)|d\xi &= \int |\xi^\alpha \widehat{f}(\xi)|d\xi \leqslant \int (1+|\xi|)^{k/2}|\widehat{f}(\xi)|d\xi \\ &\leqslant \int (1+|\xi|)^{\frac{s}{2}}(1+|\xi|)^{\frac{k-s}{2}}|\widehat{f}(\xi)|d\xi \\ &\leqslant \left(\int (1+|\xi|^2)^s|\widehat{f}(\xi)|d\xi\right)\left(\int (1+|\xi|^2)^{k-s}d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= C(k-s)\|f\|_{H^s}.\end{aligned}$$

(2) Consideremos primeiro o caso $k = 0$. Temos que

$$\|f\|_{L^\infty} = \|(\widehat{f})^\vee\|_{L^\infty} \leqslant \|f\|_{L^1} \leqslant C(s)\|f\|_{H^s},$$

onde usamos a formula da inversão e o item (1) com $k = 0$. Agora, se $k \geqslant 1$, então, por (1) $\widehat{\partial_x^\alpha f} \in L^1$ e

$$\|\partial_x^\alpha f\|_{L^\infty} = \|(\widehat{\partial_x^\alpha f})^\vee\|_{L^\infty} \leqslant \|\widehat{\partial_x^\alpha f}\|_{L^1} \leqslant C\|f\|_{H^s}. \quad \blacksquare$$

Segue desse Teorema que se $s > \frac{n}{2}$, então as funções de H^s são contínuas.

Corolário 1.4.1. *Se* $f \in H^s$, $\forall s \in \mathbb{R}$, *então* $f \in C^\infty$.

Dem. Veja a referência [1] ou [18]. $\blacksquare$

Vamos agora caracterizar $(H^s)^*$(o dual de H^s). Dados $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$, a desigualdade de Parseval , (cuja prova é similar à do Teorema de Plancherel) nos diz que

$$< \varphi, \psi >= \int \varphi(x)\psi(x)dx \int \widehat{\varphi}(\xi)\overline{\widehat{\psi}}(\xi)d\xi = \int \widehat{\varphi}(\xi)\widehat{\psi}(-\xi)d\xi,$$

onde estamos olhando φ como uma distribuição temperada e ψ uma função teste. Da desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que:

$$\begin{aligned} |<\varphi,\psi>| &= \left|\int (1+|\xi|^2)^{\frac{-s}{2}}\hat{\varphi}(\xi)(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{\psi}(-\xi)d\xi\right| \\ &\leqslant \left(\int (1+|\xi|^2)^{-s}|\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int (1+|\xi|^2)^{s}|\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi\right) \\ &= \|\varphi\|_{-s}\,\|\psi\|_s\,. \end{aligned}$$

Podemos então estender $<\varphi,\psi>$ a uma forma bilinear em $H^{-s}\times H^s$.

$$<f,g>=\int \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(-\xi)d\xi, \tag{1.20}$$

que é contínuo, pois

$$|<f,g>|\leqslant \|f\|_{-s}\|g\|_s. \tag{1.21}$$

Teorema 1.27. *Se $s\in\mathbb{R}$, então a dualidade entre $\mathcal{S}'$ e $\mathcal{S}$ induz um isomorfismo unitário de H^{-s} a $(H^s)^*$, o dual de H^s. Em outras palavras, se $f\in H^{-s}$, o funcional*

$$\begin{aligned} <f,.>:\mathcal{S} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto <f,\varphi> \end{aligned}$$

estende-se a um funcional linear contínuo em H^s, com norma $\|f\|_{-s}$, e todos os elementos de $(H^s)^*$ são desta forma.

Dem. Dados $f\in H^{-s}$, segue de (1.21) que, $<f,.>:\mathcal{S}\longrightarrow\mathbb{R}$ é um funcional linear contínuo em H^s, cuja norma atinge no máximo $\|f\|_{-s}$. Agora, tomando $g\in\mathcal{S}$ tal que $g=\mathcal{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^{-s}\overline{\widehat{f}})$, ou seja, $\widehat{g}=(1+|\xi|^2)^{-s}\overline{\widehat{f}}$, temos que $g\in H^s$ e

$$<f,g>=\int (1+|\xi|^2)^{-s}|\widehat{f}|^2 d\xi=\|f\|_{-s}=\|f\|_{-s}\,\|g\|_s\,.$$

Logo, $\|<f,.>\|=\|f\|_{-s}\,.$

Provemos a sobrejetividade: Dado $G\in(H)^*$, segue que $G.\mathcal{F}^{-1}$ é um funcional linear contínuo em $L^2(\mu_s)$, one $d\mu_s=(1+|\xi|^2)d\xi$. Então, pelo teorema de representação de Riesz, $\exists g\in L^2(\mu_s)$ tal que:

$$G(\varphi)=<G,\varphi>=\int \widehat{\varphi}(\xi)g(\xi)(1+|\xi|^2)^2 d\xi.$$

Mas então $G(\varphi)=<f,\varphi>$, onde $\check{f}(\xi)=(1+|\xi|^2)^s g(\xi)$, e $f\in H^s$, pois

$$\|f\|_{-s}^2=\int |\widehat{f}|^2(1+|\xi|^2)^{-s}d\xi=\int (1+|\xi|^2)^s\,|\widehat{g}|^2\,d\xi. \quad \blacksquare$$

Vamos aplicar as propriedades da função maximal de Hardy-Littlewood para demonstrarmos um importante teorema de imersão de Sobolev.

Proposição 1.13. *Seja* $\varphi = \varphi(r = \|x\|)$, $r \in [0, +\infty)$, *uma função positiva decrescente tal que* $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$. *Então*

$$\sup_{t>0} |\varphi_t * f(x)| = \sup_{t>0} \left| \int \frac{\varphi(t^{-1}(x-y))}{t^n} f(y)dy \right| \leqslant \|\varphi\|_{L^1} Mf(x), \tag{1.22}$$

para cada $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Dem. Primeiro consideremos φ uma função simples positiva, isto é,

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{B_{r_j}(0)}(x), \quad \alpha_j > 0.$$

Então,

$$\varphi * f(x) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \left|B_{r_j}(0)\right| \frac{1}{\left|B_{r_j}(0)\right|} \chi_{B_{r_j}(0)} * f(x) \leqslant \|\varphi\|_{L^1} Mf(x).$$

(Observe que $\|\varphi\|_{L^1} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \left|B_{r_j}(0)\right|$.)

Seja φ uma função arbitrária que satisfaz as hipóteses da proposição, então $\exists$ uma sequência $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ crescente de funções simples positivas mensuráveis tais que $\varphi_j \to \varphi$ pontualmente. Então, pelo teorema da convergência monótona, segue o resultado. ■

Para estabelecer o resultado de imersão de Sobolev que desejamos, precisaremos estudar as propriedades de continuidade do potencial de Riesz.

Definição 1.18. *: A solução fundamental do Laplaciano* Δ *é dada pela seguinte fórmula:*

$$Uf(x) = C_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}} dy, \quad \text{para} \quad n \geqslant 3.$$

O Potencial de Riesz generaliza esta expressão.

Definição 1.19. *: Seja* $0 < \alpha < n$. *O potencial de Riesz de ordem* α, *denotado por* I_α *é definido como*

$$I_\alpha f(x) = C_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy = K_\alpha * f(x), \tag{1.23}$$

onde $C_\alpha = \pi^{\frac{-n}{2}} 2^{-\alpha} \Gamma(\frac{n}{2} - \frac{\alpha}{2}) \Gamma(\frac{\alpha}{2})$.

Estudemos as propriedades de continuidade em $L^p(\mathbb{R}^n)$ do potencial de Riesz.

Teorema 1.28 (Hardy-Littlewood-Sobolev)**.** *Sejam* $0 < \alpha < n$, $1 \leqslant p < q < \infty$, com $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$.

1. *Se* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, *então a integral* (1.23) *é absolutamente convergente, para q.t.p* $x \in \mathbb{R}^n$.

2. *Se* $p > 1$ *então* I_α *é de tipo forte* (p, q), *isto é,*

$$\|I_\alpha(f)\|_q \leqslant C_{p,\alpha,n} \|f\|_p \, . \tag{1.24}$$

Dem. Dividamos $K_\alpha(x) = K_\alpha^0(x) + K_\alpha^\infty$, onde

$$K_\alpha^0(x) = \begin{cases} K_\alpha(x), \ se \ |x| \leqslant \epsilon \\ 0, \ se\,|x| > \epsilon. \end{cases}$$

$$K_\alpha^\infty = K_\alpha(x) - K_\alpha^0,$$

e

onde $\epsilon > 0$ será determinado depois. Então

$$|I_\alpha f(x)| \leqslant \left|K_\alpha^0 * f(x)\right| + |K_\alpha^\infty * f(x)| = I + II. \tag{1.25}$$

As integrais I e II convergem absolutamente, pois I representa a convolução de $K_\infty^0 \in L^1$ com $f \in L^p$ e II representa a convolução de $K_\alpha^\infty \in L^{p'}$ com $f \in L^p$, onde p' é o conjugado de p.

Também, usando

$$\int_{|y|<\epsilon} \frac{dy}{|y|^{n-\alpha}} = C_n \int_0^\epsilon \frac{r^{n-1}}{r^{n-\alpha}} dr = C_{n,\alpha} \epsilon^\alpha$$

junto com (1.22) na proposição 1.13, segue que

$$I \leqslant \epsilon^\alpha \left(\frac{1}{\epsilon^\alpha} \chi_{\{|y/\epsilon|<1\}}(y) \frac{1}{|y|^{n-\alpha}} * |f| \right)(x) \leqslant C_{\alpha,n} \epsilon^\alpha Mf(x). \tag{1.26}$$

Por outro lado, pela desigualdade de Hölder segue que

$$II = C_{\alpha,n} \left| \int_{|y|\geqslant\epsilon} \frac{f(x-y)}{|y|^{n-\alpha}} dy \right| \tag{1.27}$$

$$\leqslant C_{\alpha,n} \|f\|_p \left(\int_{|y|\geqslant\epsilon} \frac{1}{|y|^{(n-\alpha)p'}} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \tag{1.28}$$

$$\leqslant C_{\alpha,n} \|f\|_p \left(\int_\epsilon^{+\infty} \frac{r^{n-1}}{r^{(n-\alpha)p'}} dr \right)^{\frac{1}{p'}} \tag{1.29}$$

$$= C_{\alpha,n} \epsilon^{\frac{n}{p'}-n+\alpha} \|f\|_p \, . \tag{1.30}$$

Tomando $\epsilon = \epsilon(x)$ tal que

$$C_{\alpha,n}\epsilon^{\alpha} Mf(x) = C\epsilon^{\frac{n}{p'}-n+\alpha} \|f\|_p ,$$

e usando o fato de que $\frac{n}{p'} - n = \frac{-n}{p}$, segue que

$$CMf(x) = C\epsilon^{-\frac{n}{p}} \|f\|_p . \tag{1.31}$$

Combinando (1.25)-(1.31), podemos escrever

$$\begin{aligned} |I_\alpha f(x)| &\leqslant C(\|f\|_p (Mf(x))^{-1})^{\alpha \frac{p}{n}} && (1.32)\\ &= C\|f\|_p^{\alpha\frac{p}{n}} (Mf(x))^{1-\alpha\frac{p}{n}} && (1.33)\\ &= C\|f\|_p^{\theta} (Mf(x))^{1-\theta}, \quad \theta = \frac{\alpha p}{n} \in (0,1). && (1.34)\end{aligned}$$

Finalmente, tomando a norma L^p em (1.32) e usando o fato de $\|Mf\|_p \leqslant C\|f\|_p$, segue que

$$\|I_\alpha f\|_p \leqslant C\|f\|_p^{\theta} \left\|(Mf)^{1-\theta}\right\|_q = C\|f\|_p^{\theta} \|Mf\|_{(1-\theta)q}^{1-\theta} \leqslant C\|f\|_p ,$$

pois $(1-\theta)q = (1-\frac{\alpha p}{n})q = p$, isto é, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$. ■

Estamos prontos para provar o teorema de imersão.

Teorema 1.29. (1) *Se* $s \in (0, \frac{n}{2})$, *então* $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p$, *com* $p = \dfrac{2n}{n-2s}$, *isto é,* $s = \frac{n}{2} - \frac{n}{p}$. *Além disso, dado* $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$,
$s \in (0, \frac{n}{2})$, *tem-se que*

$$\|f\|_{L^p} \leqslant C_{n,s} \|D^s f\|_{L^2} \leqslant C\|f\|_{H^s} , \tag{1.35}$$

onde

$$D^s = (-\Delta)^{\frac{s}{2}} f = ((2\pi|\xi|)^s \widehat{f})^{\vee}.$$

(2) *Se* $s > \frac{n}{2}$, *então* $H^s \hookrightarrow L^\infty$. *Além disso, dado* $f \in H^s$,

$$\|f\|_{L^\infty} \leqslant C_s \|f\|_{H^s}.$$

Dem. (1) Temos que

$$\|D^s f\|_{L^2} = C\||\xi|^s \widehat{f}\|_{L^2} \leqslant C\|(1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{f}\|_{L^2} = C\|f\|_{H^s} .$$

Falta mostrar a primeira desigualdade. Usando o Exercício 13 do capítulo 1 de [18] podemos definir

$$D^s f = g, \quad \text{ou} \quad f = D^{-s} g = C_{n,s}(\frac{1}{|\xi|^s}\widehat{g})^{\vee} = \frac{C_{n,s}}{|x|^{n-s}} * g_r. \tag{1.36}$$

Portanto, pela estimativa de Hardy-Littlewood-Sobolev (1.24) segue que

$$\|f\|_p = \|D^{-s}g\|_p = \left\| \frac{\epsilon_{n,s}}{|x|^{n-s}} * g \right\|_p \leqslant C_{n,s} \|D^s f\|_{L^2}. \tag{1.37}$$

(2) Segue das propriedades da transformada de Fourier (Teorema 1.11) que,

$$\|f\|_{L^\infty} = \|(\widehat{f})^\vee\|_{L^\infty} \leqslant \|\widehat{f}\|_{L^1} \leqslant C_s \|f\|_{H^s}. \quad \blacksquare$$

Teorema 1.30. *Seja $s > \frac{n}{2}$. Então $H^s(\mathbb{R}^n)$ é uma álgebra de Banach com relação ao produto de funções, ou seja, se $f, g \in H^s(\mathbb{R}^n)$, então $fg \in H^s$ e*

$$\|fg\|_{H^s} \leqslant C_s \|f\|_{H^s} \|g\|_{H^s}.$$

Dem. Dados, $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$,

$$(1+|\xi|^2)^{s/2} \leqslant 2^s \left\{ (1+|\xi-\eta|^2)^{s/2} + (1+|\eta|^2)^{s/2} \right\}.$$

Usando esta desigualdade deduzimos que

$$\begin{aligned}
|(J^s(fg))\widehat{\ }(\xi)| &= |(1+|\xi|^2)^{s/2}(fg)\widehat{\ }(\xi)| = |(1+|\xi|^2)^{s/2}(\widehat{f} * \widehat{g}(\xi))| \\
&= (1+|\xi|^2)^{s/2} \left| \int \widehat{f}(\xi-\eta)\widehat{g}(\eta)\, d\eta \right| \\
&\leqslant 2^s \int_{\mathbb{R}^n} \Big((1+|\xi-\eta|^2)^{s/2} |\widehat{f}(\xi-\eta)\widehat{g}(\eta)| + (1+|\eta|^2))^{s/2} |\widehat{f}(\xi-\eta)\widehat{g}(\eta)| \Big)\, d\eta \\
&\leqslant 2^s \{ \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{J^s f}(\xi-\eta)||\widehat{g}(\eta)| d\eta + \int |\widehat{f}(\xi-\eta)\widehat{J^s g}(\eta)|) d\eta \} \\
&= 2^s |\widehat{J^s f}| * |\widehat{g}|(\xi) + |\widehat{f}| * |\widehat{J^s g}|(\xi).
\end{aligned}$$

Tomando a norma L^2, usando a desigualdade de Young e o Teorema 1.26 (1), segue que

$$\begin{aligned}
\|fg\|_{H^s} = \|\widehat{J^s(fg)}\|_{L^2} &\leqslant C_s (\|\widehat{J^s f}\|_{L^2} \|\widehat{g}\|_{L^1} + \|\widehat{f}\|_{L^1} \|\widehat{J^s g}\|_{L^2}) \\
&\leqslant C_s (\|f\|_{H^s} \|g\|_{H^r} + \|f\|_{H^r} \|g\|_{H^s}),
\end{aligned}$$

onde $r > \frac{n}{2}$. Tomando $r = s$ segue o resultado. $\blacksquare$

Corolário 1.4.2. *Seja $s > \frac{n}{2}$. Se $f, g \in H^s(\mathbb{R}^n)$, então*

$$\|fg\|_{H^s} \leqslant C(s)(\|f\|_{H^s} \|g\|_{L^\infty} + \|f\|_{L^\infty} \|g\|_{H^s}).$$

Dem. Pela demonstração do Teorema 1.30 e pela desigualdade de Hausdorff-Young (Teorema 1.22), temos que

$$\begin{aligned}\|fg\|_{H^s} &\leqslant C(s)(\|f\|_{H^s}\|\widehat{g}\|_{L^1} + \|\widehat{f}\|_{L^1}\|g\|_{H^s})\\ &\leqslant C(s)(\|f\|_{H^s}\|g\|_{L^\infty} + \|f\|_{L^\infty}\|g\|_{H^s}). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

A seguir apresentamos algumas estimativas da regra de Leibniz vetoriais para derivadas fracionárias a serem usadas nas demonstrações dos nossos principais resultados. Começamos com um Teorema de C. Kenig, G. Ponce e L. Vega, que é uma extensão da Proposição 3.1 de F. M. Christ e M. I. Weinstein [3]:

Lema 1.4.1. *Sejam* $\alpha \in (0,1)$, $1 < p < \infty$, $r > 1$ *e* $h \in L^{pr}_{loc}(\mathbb{R})$. *Se* $f \in C^1(\mathbb{C})$, $f' \in L^\infty$ *e* $D^\alpha u \in L^p(\mathbb{R})$, *então*

$$\|D_x^\alpha f(u)h\|_{L^p} \leqslant c\|f'(u)\|_{L^\infty}\|(M(h^{pr}))^{\frac{1}{pr}} D_x^\alpha u\|_{L^p},$$

onde M *é a função maximal de Hardy-Littlewood.*

Dem. Veja o Teorema A.7 da referência [13]. $\blacksquare$

Lema 1.4.2. *Seja* $\alpha \in (0,1)$. *Se* $D^\alpha f \in L^{p_1}$, $g \in L^{p_2}$, $f \in L^{p_3}$ *e* $D^\alpha g \in L^{p_4}$, *então*

$$\|D_x^\alpha(fg)\|_{L^p_x} \leqslant \|D_x^\alpha f\|_{L^{p_1}_x}\|g\|_{L^{p_2}_x} + \|f\|_{L^{p_3}_x}\|D_x^\alpha g\|_{L^{p_4}_x}$$

onde $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4}$.

Dem. Veja a Proposição 3.3 da referência [3]. $\blacksquare$

Lema 1.4.3. *Se* $1 < p < \infty$ *e* $0 < \alpha < 1$, *então*

$$\|D_x^\alpha(fg) - fD_x^\alpha g - gD_x^\alpha f\|_{L^p_x} \leqslant \|g\|_{L^\infty_x}\|D_x^\alpha f\|_{L^p_x}.$$

Dem. Veja [13], Teorema A.12. $\blacksquare$

Lema 1.4.4. *Sejam* $0 < \alpha \leqslant 1$ *e* $1 < p, q < \infty$. *Então*

$$\|D_x^\alpha(e^{i\theta}g)\|_{L^p_x L^q_t} \leqslant \|v\|^2_{L^{p_1}_x L^{q_1}_t}\|g\|_{L^{p_2}_x L^{q_2}_t} + \|J^\alpha g\|_{L^p_x L^q_t}$$

com $1 < p_i, q_i < \infty$, $\frac{2}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p}$, $\frac{2}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{q}$, *onde* $\theta = \theta(x,t) = -\frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{x} |u(y,t)|^2 dy$.

Dem. Este é o Lema 3.5 da referência [22]. $\blacksquare$

O lema abaixo é conhecido como regra de Leibniz vetorial para derivadas fracionárias e foi demonstrado por C. Kenig, G. Ponce e L. Vega em [13].

Lema 1.4.5. *Sejam* $\alpha \in (0,1)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,\alpha]$, *tal que* $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $1 < p_1, p_2, q_1, q_2 < \infty$, *com* $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ *e* $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$. *Então*

$$\|D_x^\alpha(fg) - gD_x^\alpha f - fD_x^\alpha g\|_{L^p_x L^q_t} \leqslant c\|D_x^{\alpha_1} f\|_{L^{p_1}_x L^{q_1}_t}\|D_x^{\alpha_2} g\|_{L^{p_2}_x L^{q_2}_t}.$$

Capítulo 2

A equação de Schrödinger linear e suas propriedades de efeito regularizante.

Neste capítulo obtemos a solução explícita do problema de Cauchy para a equação de Schrödringer linear com dado inicial em $S(\mathbb{R})$ e estudamos suas propriedades de efeito regularizante de tipo Strichartz, de tipo Kato e para a função maximal. Com excessão de uma estimativa para a função maximal, todas as propriedades enunciadas serão provadas com o máximo de detalhes.

2.1 O problema de Cauchy para a equação de Schrödinger linear.

Consideremos o problema de valor inicial para a equação de Schrödinger linear,

$$\begin{cases} \partial_t u - i\partial_x^2 u = F(x,t), & x,\ t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

Primeiramente vamos estudar o caso homogêneo, ou seja, $F \equiv 0$. Aplicando formalmente a transformada de Fourier a esse problema o transformamos no PVI

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{u}(\xi,t) = -4\pi^2 i\, |\xi|^2\, \widehat{u}(\xi,t) \\ \widehat{u}(\xi,0) = \widehat{u_0}(\xi), \end{cases}$$

cuja solução é

$$\widehat{u}(\xi, t) = e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}\widehat{u}_0(\xi). \tag{2.2}$$

Agora, aplicando a transformada inversa de Fourier em (2.2) obetemos

$$u(x,t) = (e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}\widehat{u}_0(\xi))^\vee = (e^{-4\pi^2 it|\xi|^2})^\vee * u_0(x).$$

Chegamos ao problema de calcular a transformada de Fourier $\widehat{f}(\xi)$ de $f(x) = e^{-4\pi^2 it|x|^2}$. Derivando esta função obtemos:

$$f'(x) - 4\pi t(-2\pi i x f(x)) = 0. \tag{2.3}$$

Aplicando a transformada de Fourier a (2.3) e integrando de 0 a ξ a expressão resultante, chegamos que

$$\ln \frac{\widehat{f}(\xi)}{\widehat{f}(0)} = \frac{i\xi^2}{4t} \Longrightarrow \widehat{f}(\xi) = \widehat{f}(0)e^{\frac{i\xi^2}{4t}}.$$

Recaímos assim no sub-problema de calcular $\widehat{f}(0)$. Utilizando a definição de transformada de Fourier e a teoria de coordenadas polares, obtemos:

$$\begin{aligned}(\widehat{f}(0))^2 &= \left(\int e^{-4\pi^2 it|x|^2}dx\right)\left(\int e^{-4\pi^2 it|y|^2}dy\right) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-4\pi^2 it(x^2+y^2)}dxdy \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-4\pi^2 itr^2} r dr d\theta = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-4\pi^2 itr^2} r dr\right) = \frac{1}{4\pi i t}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi i t}} e^{\frac{i\xi^2}{4t}}. \tag{2.4}$$

Portanto, a solução do PVI (2.1) com $F \equiv 0$ é

$$u(x,t) = C\frac{e^{i|x|^2/4t}}{(4\pi t i)^{1/2}} * u_0(x) = U(t)u_0(x), \tag{2.5}$$

onde $U(t)$ denota o operador definido por $U(t)f = (e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}\widehat{f}(\xi))^\vee$, para cada $t \in \mathbb{R}$ e $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Agora consideremos o PVI (2.1) com F não identicamente nula. Seja $F \in S(\mathbb{R})$. Aplicando a transformada de Fourier ao PVI (2.1) obtemos um novo PVI, com uma EDO linear não homogênea de primeira ordem:

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{u}(\xi,t) + 4\pi^2 i|\xi|^2\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{F}(\xi,t), & (\xi,t) \in \mathbb{R}^2 \\ \widehat{u}(\xi,0) = \widehat{u}_0(\xi). \end{cases} \tag{2.6}$$

O PVI (2.6) acima é facilmente resolvido do seguinte modo: Multiplicamos nossa equação por um fator integrante $\mu(t)$

$$\mu(t)(\partial_t\widehat{u}(\xi,t)+4\pi^2 i|\xi|^2\hat{u}(\xi,t))=\mu(t)\widehat{F}(\xi,t)$$

e buscamos $\mu(t)$ de tal modo que o primeiro membro seja a derivada do produto de $\mu(t)$ por $\widehat{u}(\xi,t)$, isto é,

$$\mu(t)(\partial_t\widehat{u}(\xi,t)+4\pi^2 i|\xi|^2\widehat{u}(\xi,t))=\partial_t(\mu(t)\widehat{u}(\xi,t))=\partial_t\mu(t)\widehat{u}(\xi,t)+\mu(t)\partial_t\widehat{u}(\xi,t).$$

Portanto, temos formalmente que

$$\partial_t\mu(t)=\mu(t)4\pi^2 i|\xi|^2 \Longrightarrow \mu(t)=e^{4\pi^2 it|\xi|^2}:=\widetilde{U}(t). \tag{2.7}$$

Logo

$$\frac{d}{dt}(\widetilde{U}(t)\widehat{u}(\xi,t))=\widetilde{U}(t)\widehat{F}(\xi,t),$$

da qual, integrando de 0 a t, obtemos:

$$\widetilde{U}(t)\widehat{u}(\xi,t)-\widehat{u}(\xi,0)=\int_0^t\widetilde{U}(\tau)\widehat{F}(\xi,\tau)d\tau.$$

Multiplicando ambos os lados por $\widetilde{U}(-t)$, e usando as propriedades da exponencial, chegamos à seguinte solução do PVI (2.6):

$$\widehat{u}(\xi,t)=\widetilde{U}(-t)\widehat{u}_0(\xi)+\int_0^t\widetilde{U}(-t+\tau)\widehat{F}(\xi,\tau)d\tau,$$

ou seja,

$$\widehat{u}(\xi,t)=e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}\widehat{u}_0(\xi)+\int_0^t e^{-4\pi^2 i(t-\tau)|\xi|^2}\widehat{F}(\xi,\tau)d\tau. \tag{2.8}$$

Agora, aplicando a transformada Inversa de Fourier em (2.8) chegamos à solução do PVI (2.6):

$$u(x,t)=U(t)u_0(x)+\int_0^t U(t-\tau)F(x,\tau)d\tau. \tag{2.9}$$

Observe que a condição $u(x,0)=u_0(x)$ é facilmente verificada. A solução acima é conhecida como **fórmula de Duhamel**.

2.2 Propriedades de efeito suavizante para a equação de Schrödinger linear.

Aqui vamos estudar por meio da fórmula (2.9) as propriedades da solução do PVI (2.1) que iremos utilizar na demonstração do nosso resultado principal.

Proposição 2.1. *A familia $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ é um grupo unitário de operadores, ou seja:*

1. *Para cada $t \in \mathbb{R}$, $U(t) : L^2 \to L^2$ é uma isometria, isto é, $\|U(t)f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$.*
2. $U(t+t') = U(t)U(t')$ *e* $U(t)^{-1} = U(-t) = (U(t))^*$.
3. $U(0) = 1$.
4. *Fixando $f \in L^2(\mathbb{R})$, a função $\phi_f : \mathbb{R} \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ definida por $\phi_f(t) = U(t)f$ é uma função contínua, isto é, descreve uma curva contínua em $L^2(\mathbb{R})$.*

Dem. 1. Usando o Teorema de Plancherel, segue que

$$\|U(t)f\|_{L^2} = \|\widehat{U(t)f}\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}.$$

A demonstração dos demais ítens é imediata. ■

No lema abaixo apresentamos uma importante propriedade de $U(t)$ nos espaços L^p.

Lema 2.2.1. *Se $t \neq 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $q \in [1,2]$, então o operador $U(t) : L^q \longrightarrow L^p$ é contínuo e*

$$\|U(t)f\|_{L^p} \leqslant C|t|^{\frac{-1}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}\|f\|_{L^q}.$$

Dem. Pela Proposição 2.1 temos que $U(t) : L^2 \longrightarrow L^2$ é uma isometria, isto é,

$$\|U(t)f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}.$$

Usando a desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned}\|U(t)f\|_{L^\infty} &= \|C\frac{e^{\frac{i|\cdot|^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi i t}} * f\|_{L^\infty} \leqslant \|C\frac{e^{\frac{i|\cdot|^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi i t}}\|_{L^\infty}\|f\|_{L^1}\\ &= \|C(4\pi)^{-\frac{1}{2}}(t)^{-\frac{1}{2}}\|_{L^\infty}\|f\|_{L^1} \leqslant C|t|^{-\frac{1}{2}}\|f\|_{L^1}.\end{aligned}$$

Portanto, segue do Teorema de Riesz-Thorim que $U(t) : L^q \longrightarrow L^p$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, e

$$\|U(t)f\|_{L^p} \leqslant (C|t|^{\frac{-1}{2}})^{1-\theta}\|f\|_{L^q} = c|t|^{\frac{-1}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}\|f\|_{L^q},$$

onde $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{2}$ e $1-\theta = 1 - \frac{2}{p} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$. ■

Lema 2.2.2. *O grupo* $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ *satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *Sejam q e r satisfazendo* $0 \leqslant \frac{2}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{r} \leqslant \frac{1}{2}$ *e seja* $\phi = \phi(x) \in L^2(\mathbb{R})$. *Então* $U(\cdot)\phi$ *satisfaz a estimativa*
$$\|U(\cdot)\phi\|_{L_t^q L_x^r} \leqslant C\|\phi\|_{L_x^2}. \tag{2.10}$$

2. *Sejam* (q_1, r_1) *e* (q_2, r_2) *satisfazendo* $0 \leqslant \frac{2}{q_j} = \frac{1}{2} - \frac{1}{r_j} \leqslant \frac{1}{2}, j = 1, 2$. *Então para cada intervalo* $I \subset \mathbb{R}$ *com* $0 \in \bar{I}$, *vale*
$$\|\int_0^t U(t-\tau)g(\cdot,\tau)d\tau\|_{L_t^{q_1} L_x^{r_1}} \leqslant C\|g\|_{L_t^{q_2'} L_x^{r_2'}}, \tag{2.11}$$
onde a constante C *é independente de* I, *e* p' *é o expoente conjugado de* p.

3. U *satisfaz as estimativas*
$$\|D_x^{\frac{1}{2}} U(\cdot)\phi\|_{L_x^\infty L_t^2} \leqslant C\|\phi\|_{L_x^2}, \tag{2.12}$$
$$\|U(\cdot)\phi\|_{L_x^4 L_t^\infty} \leqslant C\|D^{\frac{1}{4}}\phi\|_{L_x^2}. \tag{2.13}$$

4. *Para cada intervalo* $I \subset \mathbb{R}$ *com* $0 \in \bar{I}$, *valem as seguintes estimativas:*
$$\|D_x^{\frac{1}{2}} \int_0^t U(t-\tau)g(\cdot,\tau)d\tau\|_{L_t^\infty L_x^2} \leqslant C\|g\|_{L_x^1 L_t^2} \tag{2.14}$$
$$\|\int_0^t U(t-\tau)g(\cdot,\tau)d\tau\|_{L_x^4 L_t^\infty} \leqslant C|I|^{\frac{3}{4}}\|D_x^{\frac{1}{4}} g\|_{L_t^4 L_x^2}, \tag{2.15}$$
$$\|\partial_x \int_0^t U(t-\tau)g(\cdot,\tau)d\tau\|_{L_x^\infty L_t^2} \leqslant C\|g\|_{L_x^1 L_t^2} \tag{2.16}$$
$$\|\partial_x \int_0^t U(t-\tau)g(\cdot,\tau)d\tau\|_{L_x^\infty L_t^2} \leqslant C|I|^{\frac{1}{2}}\|D_x^{\frac{1}{4}} g\|_{L_t^2 L_x^2}, \tag{2.17}$$
onde C *é independente de* I, *e* $|I|$ *é o comprimento de* I.

Dem. Para demonstrar os ítens *1.* e *2.*, primeiro provaremos a equivalência entre as três seguintes estimativas:

$$\|U(\cdot)\phi\|_{L_t^q L_x^p} \leqslant C\|\phi\|_{L_x^2}, \tag{2.18}$$
$$\|\int_{-\infty}^{\infty} U(t-t')g(\cdot,t')dt'\|_{L_t^q L_x^p} \leqslant C\|g(\cdot,\cdot)\|_{L_t^{q'} L_x^{p'}}, \tag{2.19}$$
$$\|\int_{-\infty}^{\infty} U(t)g(\cdot,t)dt\|_{L_x^2} \leqslant C\|g(\cdot,\cdot)\|_{L_t^{q'} L_x^{p'}}. \tag{2.20}$$

Em seguida provaremos a estimativa (2.19), o que resultará na prova das estimativas (2.10) e (2.11). Para isso utilizaremos as seguintes identidades:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} U(t)(\phi(x))g(x,t)dxdt = \int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)\left(\int_{-\infty}^{\infty}U(t)g(x,t)dt\right)dx.$

(b) $\displaystyle\|\int_{-\infty}^{\infty}U(t)g(\cdot,t)dt\|_{L_x^2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x,t)\left(\int_{-\infty}^{\infty}U(t-t')g(x,t')dt'\right)dtdx.$

Prova da identidade (a): Usando os teoremas de Fubini e Plancherel temos que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} U(t)(\phi(x))g(x,t)dxdt &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\xi^2}\widehat{\phi}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi,t)}d\xi dt\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{\phi}(\xi)\overline{e^{it\xi^2}\widehat{g}(\xi,t)}d\xi dt\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\widehat{\phi}(\xi)\overline{\left(\int_{-\infty}^{\infty}U(t)g(\cdot,t)dt\right)\widehat{\ }(\xi)}d\xi\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)\left(\int_{-\infty}^{\infty}U(t)g(x,t)dt\right)dx. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Prova da identidade (b): Usando um argumento semelhante ao da obtenção de (2.21), segue que

$$\begin{aligned}\left\|\int_{-\infty}^{\infty}U(t)g(\cdot,t)dt\right\|_{L_x^2}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}U(t)g(\cdot,t)dt\right)\left(\overline{\int_{-\infty}^{\infty}U(t')g(\cdot,t')dt'}\right)dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-it\xi^2}\widehat{g}(\xi,t)dt\right)\overline{\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-it'\xi^2}\widehat{g}(\xi,t')dt'\right)}d\xi\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{g}(\xi,t)\left(\overline{\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(t-t')\xi^2}\widehat{g}(\xi,t')dt'}\right)dt\right)d\xi\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{g}(\xi,t)\overline{\left(\int_{-\infty}^{\infty}U(t-t')g(\cdot,t')dt'\right)\widehat{\ }(\xi)}d\xi dt\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x,t)\left(\int_{-\infty}^{\infty}U(t-t')g(x,t')dt'\right)dtdx, \end{aligned} \tag{2.22}$$

o que prova a identidade (b).

Agora estamos prontos para provar que as equações (2.18), (2.19) e (2.20) são equivalentes. Lembremos que, ao nos referirmos a dualidade, isto significa que

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}\|h(\cdot,t)\|_p^q dt\right)^{\frac{1}{q}} = \sup\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(\cdot,t)w(x,t)dxdt;\|w\|_{L_t^{q'}L_x^{p'}}=1\right\}.$$

Vamos primeiro provar que (2.18) é equivalente a (2.20).

Se vale (2.20), então vale (2.18). De fato, usando dualidade, a identidade (a), a desigualdade de Hölder e (2.20), temos que

$$
\begin{aligned}
\|U(t)\phi\|_{L^q_t L^p_x} &= \sup\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} U(t)\phi(x)g(x,t)dxdt;\quad \|g\|_{L^{q'}_t L^{p'}_x}=1\right\}\\
&= \sup\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)\left(\int_{-\infty}^{\infty} U(t)g(x,t)dt\right)dx;\quad \|g\|_{L^{q'}_t L^{p'}_x}=1\right\}\\
&\leqslant \sup\left\{\|\phi\|_{L^2_x}\cdot\|\int_{-\infty}^{\infty} U(t)g(\cdot,t)\|_{L^2_x};\quad \|g\|_{L^{q'}_t L^{p'}_x}=1\right\}\\
&\leqslant C\left\{\|\phi\|_{L^2_x}\cdot\|g(\cdot,\cdot)\|_{L^{q'}_t L^{p'}_x};\quad \|g\|_{L^{q'}_t L^{p'}_x}=1\right\} = C\|\phi\|_{L^2_x},
\end{aligned}
$$

o que prova que se vale (2.20), então vale (2.18).

Passemos à recíproca, ou seja, se vale (2.18), então vale (2.20). Procedendo de maneira análoga à anterior temos que

$$
\begin{aligned}
&\|\int_{-\infty}^{\infty} U(t)g(\cdot,t)\|_{L^2_x} = \sup\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)\left(\int_{-\infty}^{\infty} U(t)g(\cdot,t)dt\right)dx;\quad \|\phi\|_{L^2_x}=1\right\}\\
&= \sup\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(U(t)\phi(x))g(x,t)dxdt; \|\phi\|_{L^2_x}=1\right\}\\
&\leqslant \sup\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|U(t)\phi(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|g(x,t)|^{p'}dx\right)^{\frac{1}{p'}}dt; \|\phi\|_{L^2_x}=1\right\}\\
&\leqslant C\sup\{\|U(t)\phi\|_{L^q_t L^p_x}\|g\|_{L^{q'}_t L^{p'}_x};\quad \|\phi\|_{L^2_x}=1\}\\
&\leqslant C\sup\{\|\phi\|_{L^2_x}\|g\|_{L^{q'}_t L^{p'}_x};\quad \|\phi\|_{L^2_x}=1\} = C\|g\|_{L^{q'}_t L^{p'}_x}.
\end{aligned}
$$

Portanto, (2.18) e (2.20) são equivalentes.

Provaremos agora que (2.20) é equivalente à (2.19).

Se vale (2.19), então vale (2.20). De fato, procedendo como antes, temos que

$$
\begin{aligned}
&\|\int_{-\infty}^{\infty} U(t)g(\cdot,t)dt\|^2_{L^2_x} = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} U(t)g(\cdot,t)dt\right)\left(\overline{\int_{-\infty}^{\infty} U(t')g(\cdot,t')dt'}\right)dx\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} U(t)g(\cdot,t)dt\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} U(-t')\overline{g(\cdot,t')}dt'\right)dx\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(\cdot,t)\left(\int_{-\infty}^{\infty} U(t-t')\overline{g(\cdot,t')}dt'\right)dxdt\\
&\leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|g(\cdot,t)|^{p'}dx\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty} U(t-t')\overline{g(\cdot,t')}dt'\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}dt\\
&\leqslant \|g(\cdot,\cdot)\|_{L^{q'}_t L^{p'}_x}\|\int_{-\infty}^{\infty} U(\cdot,t')g(\cdot,t')dt'\|_{L^q_t L^p_x} \leqslant C^2\|g(\cdot,\cdot)\|^2_{L^{q'}_t L^{p'}_x},
\end{aligned}
$$

Supanhamos que vale (2.20); mostremos que vale (2.19). Observe que se vale (2.20) então vale (2.18); segue daí que

$$\begin{aligned}\|\int_{-\infty}^{\infty} U(t-t')g(\cdot,t')dt'\|_{L_t^qL_x^p} &= \|U(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty} U(-t')g(\cdot,t')dt'\right)\|_{L_t^qL_x^p}\\ &\leqslant C\|\int_{-\infty}^{\infty} U(t')\overline{g(\cdot,t')}dt'\|_{L_x^2}\\ &\leqslant C\|g(\cdot,\cdot)\|_{L_t^{q'}L_x^{p'}}.\end{aligned}$$

Portanto está provado que as estimativas (2.18), (2.19) e (2.20) são equivalentes. Mostremos então a validade de (2.19). Da desigualdade de Minkowski e do Lema 2.2.1 obtemos

$$\begin{aligned}\|\int_{-\infty}^{\infty} U(t-t')g(\cdot,t')dt'\|_{L^p} &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \|U(t-t')g(\cdot,t')\|_{L^p}dt'\\ &\leqslant C\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|t-t'|^{\alpha}}\|g(\cdot,t')\|_{L^{p'}}dt', \qquad (2.23)\end{aligned}$$

onde $\alpha = \frac{n}{2}(\frac{1}{p'}-\frac{1}{p})$. Ainda usando o Lema 2.2.1, o Teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev e (2.23), obtemos

$$\begin{aligned}\|\int_{-\infty}^{\infty} U(t-t')g(\cdot,t')dt'\|_{L_t^qL_x^p} &\leqslant C\|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|t-t'|^{\alpha}}\|g(\cdot,t')\|_{L^{p'}}dt'\|_{L^q}\\ &\leqslant C\left(\int_{-\infty}^{\infty} \|g(\cdot,t')\|_{L^{p'}}^{q'}dt\right)^{\frac{1}{q'}} = C\|g(\cdot,\cdot)\|_{L_t^{q'}L_x^{p'}},\end{aligned}$$

com $\frac{1}{q'} = \frac{1}{q} + (1-\alpha)$ e $0 < 1-\alpha < 1$, e que $\frac{n}{2} = \frac{2}{q} + \frac{n}{p}$, onde

$$\begin{cases} 2 \leqslant p < \frac{2n}{(n-2)}, & se\ n \geqslant 3,\\ 2 \leqslant p < \infty, & se\ n = 2,\\ 2 \leqslant p \leqslant \infty, & se\ n = 1\ . \end{cases}$$

Oberseve que (2.18) corresponde a desigualdade (2.10) e (2.19) é um caso particular para (2.11). Dai, segue a prova de (2.10) e a prova de um caso particular para (2.11), com pares de índices conjugados.

Demonstração do ítem 3. Para provar a estimativa (2.12), antes observemos que podemos decompor $\widehat{\phi}(\xi)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\widehat{\phi}(\xi) = 1\cdot\widehat{\phi}(\xi) &= \chi_{(-\infty,0)}(\xi)\widehat{\phi}(\xi) + \chi_{[0,\infty)}(\xi)\widehat{\phi}(\xi)\\ &:= \widehat{\phi}_-(\xi) + \widehat{\phi}_+(\xi). \qquad (2.24)\end{aligned}$$

Usando transformada de Fourier, (2.24) e o Teorema de Plancherel, obtemos:

$$\begin{aligned}D_x^{\frac{1}{2}}U(t)\phi(x) &= C(|\xi|^{\frac{1}{2}}e^{-it\xi^2}\widehat{\phi}(\xi))^{\vee}(x)\\ &= C(|\xi|^{\frac{1}{2}}e^{-it\xi^2}\widehat{\phi}_+(\xi))^{\vee}(x) + C(|\xi|^{\frac{1}{2}}e^{-it\xi^2}\widehat{\phi}_-(\xi))^{\vee}(x),\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $\xi^2 = r$ e usando sucessivas vezes o teorema de Plancherel, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\|D_x^{\frac{1}{2}}U(\cdot)\phi_+\|_{L_t^2}^2 &= C\int_{-\infty}^{\infty} |(|\xi|^{\frac{1}{2}}e^{-it|\xi|^2}\widehat{\phi}_+(\xi))^{\vee}(x)|^2 dt \\
&= C\int_{-\infty}^{\infty} |\int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^{\frac{1}{2}}e^{-it\xi^2}\widehat{\phi}_+ e^{ix\xi}d\xi|^2 dt \\
&= C\int_{-\infty}^{\infty} |\int_{0}^{\infty} r^{\frac{1}{4}}e^{-itr}e^{ix\sqrt{r}}\widehat{\phi}_+(\sqrt{r})\frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}dr|^2 dt \\
&= C\int_{-\infty}^{\infty} |\int_{0}^{\infty} e^{-itr}e^{ix\sqrt{r}}\widehat{\phi}_+(\sqrt{r})\frac{1}{r^{\frac{1}{4}}}dr|^2 dt \\
&= C\int_{-\infty}^{\infty} |\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itr}\chi_{\mathbb{R}+}(r)e^{ix\sqrt{r}}\widehat{\phi}_+(\sqrt{r})\frac{1}{r^{\frac{1}{4}}}dr|^2 dt \\
&= C\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f(r)}(t)|^2 dt = C\int_{-\infty}^{\infty} |f(r)|^2 dr,
\end{aligned}
$$

onde $f(r) = e^{ix\sqrt{r}}\widehat{\phi}_+(\sqrt{r})\frac{1}{r^{\frac{1}{4}}}\chi_{\mathbb{R}+}(r))$. Então,

$$
\begin{aligned}
\|D_x^{\frac{1}{2}}U(\cdot)\phi_+\|_{L_t^2}^2 &= C\int_{-\infty}^{\infty} |e^{ix\sqrt{r}}\widehat{\phi}_+(\sqrt{r})\frac{1}{r^{\frac{1}{4}}}\chi_{\mathbb{R}+}(r)|^2 dt \\
&= C\int_{0}^{\infty} |e^{ix\sqrt{r}}\widehat{\phi}_+(\sqrt{r})\frac{1}{r^{\frac{1}{4}}}|^2 dr \\
&= C\int_{0}^{\infty} |\widehat{\phi}_+(\sqrt{r})|^2 \frac{dr}{r^{\frac{1}{2}}} \leqslant C\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\phi}_+(\xi)|^2 d\xi \\
&= C\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_+(x)|^2 dx = C\|\phi_+\|_{L_x^2}^2.
\end{aligned}
$$

Extraindo a raiz quadrada e tomando o máximo em relação a x de ambos os lados da desigualdade acima, chegamos a seguinte desigualdade

$$\|D_x^{\frac{1}{2}}U(\cdot)\phi_+\|_{L_x^\infty L_t^2} \leqslant C\|\phi_+\|_{L_x^2}.$$

De modo análogo obtemos o resultado com (ϕ_-). Portanto segue que

$$
\begin{aligned}
\|D_x^{\frac{1}{2}}U(\cdot)\phi\|_{L_x^\infty L_t^2} &= \|D_x^{\frac{1}{2}}U(\cdot)\phi_+ \ + \ D_x^{\frac{1}{2}}U(\cdot)\phi_-\|_{L_x^\infty L_t^2} \\
&\leqslant \|D_x^{\frac{1}{2}}U(\cdot)\phi_+\|_{L_x^\infty L_t^2} + \| + D_x^{\frac{1}{2}}U(\cdot)\phi_-\|_{L_x^\infty L_t^2} \\
&\leqslant C(\|\phi_-\|_{L_x^2} + \|\phi_+\|_{L_x^2}) = C\|\phi\|_{L_x^2}.
\end{aligned}
$$

Para a demonstração da estimativa (2.13), veja a referência [14].

Demonstrqação do ítem 4. Para provar a estimativa (2.14), usamos dualidade, desigualdade de Hölder e os teoremas de Fubini e Plancherel do seguinte modo:

$$
\begin{aligned}
&\|D_x^{\frac{1}{2}}\int_0^t U(t-\tau)g(\cdot,\tau)d\tau\|_{L_x^2}\\
&\quad= \sup\left\{ \left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(D_x^{\frac{1}{2}}\int_0^t U(t-\tau)g(\cdot,\tau)d\tau\right)\overline{h(x)}dx\right|;\ \ \|h\|_{L_x^2}=1\right\}\\
&\quad= \sup\left\{\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^t U(-\tau)g(\cdot,\tau)d\tau\right)D_x^{\frac{1}{2}}U(t)\overline{h(x)}dx\right|;\ \ \|h\|_{L_x^2}=1\right\}\\
&\quad= \sup\left\{\left|\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\xi^2}\widehat{g}(\xi,\tau)e^{-it\xi^2}|\xi|^{\frac{1}{2}}\widehat{\overline{h}}(\xi)d\xi d\tau\right|;\ \ \|h\|_{L^2}=1\right\}\\
&\quad= \sup\left\{\left|\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{g}(\xi,\tau)e^{-i(t-\tau)\xi^2}|\xi|^{\frac{1}{2}}\widehat{\overline{h}}(\xi)d\xi d\tau\right|;\ \ \|h\|_{L^2}=1\right\}\\
&\quad= \sup\left\{\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t g(x,\tau)D_x^{\frac{1}{2}}U(t-\tau)\overline{h(x)}d\tau dx\right|;\ \ \|h\|_{L_x^2}=1\right\}\\
&\quad\leqslant \sup\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^t|g(x,\tau)|^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t|D_x^{\frac{1}{2}}U(t-\tau)h(x)|^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}dx;\ \ \|h\|_{L^2}=1\right\}\\
&\quad\leqslant \sup\left\{\sup_x\left(\int_I|D_x^{\frac{1}{2}}U(t-\tau)h(x)|^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_I|g(x,\tau)|^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}dx;\ \ \|h\|_{L^2}=1\right\}\\
&\quad= \sup\{\|D_x^{\frac{1}{2}}U(t-\tau)h\|_{L_x^\infty L_t^2}\|g\|_{L_x^1L_t^2};\ \ \|h\|_{L_x^2}=1\}\\
&\quad\leqslant C\sup\{\|g\|_{L_x^1L_t^2}\|h\|_{L_x^2};\ \ \|h\|_{L_x^2}=1\}=C\|g\|_{L_x^1L_T^2}.
\end{aligned}
$$

A última desigualdade acima segue da estimativa (2.12). Portanto os cálculos acima prova a estimativa (2.14).

Para provarmos a estimativa (2.15) fazemos uso da estimativa (2.13) e da desigualdade de Hölder do seguinte modo:

$$
\begin{aligned}
\|\int_0^t U(t-\tau)g(\cdot,\tau)d\tau\|_{L_x^4L_t^\infty} &\leqslant \|\int_I\|U(t-\tau)g(\cdot,\tau)\|_{L_t^\infty}d\tau\|_{L_x^4}\\
&\leqslant \|\left(\int_I 1^{\frac{4}{3}}d\tau\right)^{\frac{3}{4}}\left(\int_I\|U(t-\tau)g(\cdot,\tau)\|_{L_t^\infty}^4d\tau\right)^{\frac{1}{4}}\|_{L_x^4}\\
&\leqslant |I|^{\frac{3}{4}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_I\|U(t-\tau)g(\cdot,\tau)\|_{L_t^\infty}^4d\tau dx\right)^{\frac{1}{4}}\\
&= |I|^{\frac{3}{4}}\left(\int_I\|U(t-\tau)g(\cdot,\tau)\|_{L_x^4L_t^\infty}^4d\tau\right)^{\frac{1}{4}}\\
&\leqslant C|I|^{\frac{3}{4}}\left(\int_I\|D_x^{\frac{1}{4}}U(-\tau)g(\cdot,\tau)\|_{L_x^2}^4d\tau\right)^{\frac{1}{4}}\\
&= C|I|^{\frac{3}{4}}\|D_x^{\frac{1}{4}}g\|_{L_t^4L_x^2}.
\end{aligned}
$$

Provaremos a estimativa (2.16) usando as estimativas (2.12) , (2.14) e a transformada de Hilbert $\mathcal{H}$ como segue:

$$
\begin{aligned}
\|\partial_x \int_0^t U(t-\tau)g(\cdot,\tau)d\tau\|_{L^\infty_x L^2_t} &= \|\mathcal{H}D_x^{\frac{1}{2}}D_x^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t U(t)U(-\tau)g(\cdot,\tau)d\tau\right)\|_{L^\infty_x L^2_t}\\
&= \|D_x^{\frac{1}{2}}U(t)\left(\mathcal{H}D_x^{\frac{1}{2}}\int_0^t U(-\tau)g(\cdot,\tau)d\tau\right)\|_{L^\infty_x L^2_t}\\
&\leqslant C\|\mathcal{H}D_x^{\frac{1}{2}}\int_0^t U(-\tau)g(\cdot,\tau)d\tau\|_{L^2_x}\\
&= C\|D_x^{\frac{1}{2}}\int_0^t U(t)U(-\tau)g(\cdot,\tau)d\tau\|_{L^2_x}\\
&\leqslant C\|g\|_{L^1_x L^2_t}.
\end{aligned}
$$

Os cálculos acima se justificam pelo fato que a transformada de Hilbert $\mathcal{H}$ e o grupo $U(\cdot)$ serem isometrias em L^2, ou seja,

$$
\|\mathcal{H}f\|_{L^2_x} = \|f\|_{L^2}, \quad \forall f \in L^2 \quad e \quad \|U(\cdot)\phi\|_{L^2} = \|\phi\|_{L^2}, \quad \forall\ \phi \in L^2.
$$

Finalmente, para provaremos (2.17) usamos Minkowski, Hölder, (2.12) e um argumento semelhate ao anterior:

$$
\begin{aligned}
\|\partial_x(\int_0^t U(t-\tau)v(\tau)d\tau)\|_{L^\infty_x L^2_t} &= \|D_x^{\frac{1}{2}}U(t)\left(\mathcal{H}D_x^{\frac{1}{2}}\int_0^t U(-\tau)v(\tau)d\tau\right)\|_{L^\infty_x L^2_t}\\
&\leqslant C\|\mathcal{H}D_x^{\frac{1}{2}}\int_0^t U(-\tau)v(\tau)d\tau\|_{L^2_x}\\
&= C\|\int_0^t U(-\tau)D_x^{\frac{1}{2}}v(\tau)d\tau\|_{L^2_x}\\
&\leqslant C\int_0^t \|U(-\tau)D_x^{\frac{1}{2}}v(\tau)\|_{L^2_x}d\tau\\
&\leqslant C|I|^{\frac{1}{2}}\|D_x^{\frac{1}{2}}v\|_{L^2_x L^2_t}.
\end{aligned}
$$

Com isso finalizamos a demonstração do lema. ∎

Teorema 2.1. (1) *Sejam* $u(x,t) = U(t)u_0$ *e* $v(x,t) = U(t)v_0$ *soluções do PVI* (2.1) *com dado inicial* u_0 *e* v_0*, respectivamente. Então*

$$
\|D_x^{\frac{1}{2}}(u\bar{v})\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 2^{-\frac{1}{2}}\|u_0\|_{L^2}\|v_0\|_{L^2}. \tag{2.25}
$$

(2) *Sejam*

$$
u(x,t) = U(t)u_0 - i\int_0^t U(t-\tau)F(\cdot,\tau)d\tau, \quad v(x,t) = U(t)v_0 - i\int_0^t U(t-\tau)G(\cdot,\tau)d\tau,
$$

onde F, $G \in L^1(\mathbb{R}; L^2)$. *Então*

$$\|D_x^{\frac{1}{2}}(u\bar{v})\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant 2^{-\frac{1}{2}}(\|u_0\|_L^2 + \|F\|_{L_t^1 L_x^2})(\|v_0\|_L^2 + \|G\|_{L_t^1 L_x^2}). \tag{2.26}$$

(3) *Sejam* u *e* v *como na parte* (2) *com* $u_0, v_0 \in H^{\frac{1}{2}}$ *e* $F, G \in L_t^1 H^{\frac{1}{2}}$. *Então*

$$\|\partial_x(u\bar{v})\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leqslant 2^{-\frac{1}{2}}(\|u_0\|_{H^{\frac{1}{2}}} + \|F\|_{L_t^1 H^{\frac{1}{2}}})(\|v_0\|_{H^{\frac{1}{2}}} + \|G\|_{L_t^1 H^{\frac{1}{2}}}). \tag{2.27}$$

Dem. (1) Exibiremos duas demonstrações:

(a) **Primeira demonstração**. Tomando a transformada de Fourier de $u\bar{v}$ com relação à variável espacial obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_x(u\bar{v}) &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\widehat{u}(\xi) * \widehat{\bar{v}}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{u}(\xi-\eta)\widehat{\bar{v}}(\eta)d\eta \\
&= (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it(\xi-\eta)^2}\widehat{u}_0(\xi-\eta)e^{it\eta^2}\widehat{\bar{v}}_0(\eta)d\eta \\
&= (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it(\xi^2-2\xi\eta+\eta^2)}\widehat{u}_0(\xi-\eta)e^{it\eta^2}\widehat{\bar{v}}_0(\eta)d\eta \\
&= (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it(\xi^2-2\xi\eta)}\widehat{u}_0(\xi-\eta)\widehat{\bar{v}}_0(\eta)d\eta.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Agora tomando a transformada de Fourier de (2.28) com relação ao tempo e usando o teorema de Fubini, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_t\mathcal{F}_x(u\bar{v}) &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\tau}\mathcal{F}_x(u\bar{v})(\xi,t)dt \\
&= (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\tau}\left((2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it(\xi^2-2\xi\eta)}\widehat{u}_0(\xi-\eta)\widehat{\bar{v}}_0(\eta)d\eta\right)dt \\
&= (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\tau}e^{-it(\xi^2-2\xi\eta)}dt\right)\widehat{u}_0(\xi-\eta)\widehat{\bar{v}}_0(\eta)d\eta \\
&= (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it(\tau+\xi^2-2\xi\eta)}1dt\right)\widehat{u}_0(\xi-\eta)\widehat{\bar{v}}_0(\eta)d\eta \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\widehat{1}(\tau+\xi^2-2\xi\eta)\widehat{u}_0(\xi-\eta)\widehat{\bar{v}}_0(\eta)d\eta \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau+\xi^2-2\xi\eta)\widehat{u}_0(\xi-\eta)\widehat{\bar{v}}_0(\eta)d\eta \\
&= \frac{1}{|2\xi|}\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(\frac{\tau+\xi^2}{2\xi}-\eta\right)\widehat{u}_0(\xi-\eta)\widehat{\bar{v}}_0(\eta)d\eta.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

A última e a penultima das igualdades seguem do Teorema 1.19 e do Exemplo 1.1, respectivamente. Onde δ denota a medida de Dirac que é homogênidadde de grau -1.

Logo pela igualdade (2.29) e Observação 2.1 temos que

$$\mathcal{F}_t\mathcal{F}_x(u\bar{v}) = \frac{1}{2|\xi|}\widehat{u}_0(\frac{1}{2}(\xi-\frac{\tau}{\xi}))\widehat{\bar{v}}_0(\frac{1}{2}(\xi+\frac{\tau}{\xi})). \tag{2.30}$$

Agora aplicando a identidade de Parseval em (2.30) obtemos

$$\begin{aligned}
\|D_x^{\frac{1}{2}}(u\bar{v})\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} &= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|\xi|}|\widehat{u}_0(\frac{1}{2}(\xi-\frac{\tau}{\xi}))\widehat{\bar{v}}_0(\frac{1}{2}(\xi+\frac{\tau}{\xi}))|^2 d\tau d\xi \\
&= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{u}_0(\frac{1}{2}(\xi-s))\widehat{\bar{v}}_0(\frac{1}{2}(\xi+s))|^2 ds d\xi \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{u}_0(p)\widehat{\bar{v}}_0(q)|^2 dp dq \\
&= \frac{1}{2}\|\widehat{u}_0\|^2_{L^2}\|\widehat{\bar{v}}_0\|^2_{L^2} = \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2}\|\bar{v}_0\|^2_{L^2},
\end{aligned} \tag{2.31}$$

onde fizemos as mudanças de variável $\tau \longrightarrow s = \frac{\tau}{\xi}$ e $(s,\xi) \longrightarrow (p,q) = (\frac{\xi-s}{2}, \frac{\xi+s}{2})$, para justificar os cálculos acima.

(b) **Segunda demonstração**. Multiplicando as representações de Fourier de u e $\bar{v}$ e fazendo as mudanças de variáveis $(\xi,\eta) \longrightarrow (p,q) = (\xi+\eta, -\xi+\eta)$ e em seguida $q \longrightarrow \tau = pq$, (observando que

$$u(t,x) = (2\pi)^{\frac{-1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(ix\xi - it\xi^2)}\widehat{u}(\xi)d\xi$$

e $p = \xi+\eta$ e $q = -\xi+\eta \Longrightarrow \xi^2-\eta^2 = (\xi+\eta)(\xi-\eta) = p(-q) = -pq$, $p+q = 2\eta \Longrightarrow \eta = \frac{p+q}{2}$ e $p-q = 2\xi \Longrightarrow \xi = \frac{p-q}{2}$), segue que

$$\begin{aligned}
u\bar{v}(t,x) &= (2\pi)^{-1}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi - it\xi^2}\widehat{u}_0(\xi)d\xi\right)\left(\overline{\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\eta - it\eta^2}\widehat{v}_0(\eta)d\eta}\right) \\
&= (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix(\xi-\eta)}e^{it(-\xi^2+\eta^2)}\widehat{u}_0(\xi)\overline{\widehat{v}_0(\eta)}d\xi d\eta \\
&= (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix(\xi+\eta)-it(\xi^2-\eta^2)}\widehat{u}_0(\xi)\widehat{\bar{v}}_0(\eta)d\xi d\eta \\
&= (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixp+itpq}\widehat{u}_0(\frac{1}{2}(p-q))\widehat{\bar{v}}_0(\frac{1}{2}(p+q))\frac{1}{2}dp dq \\
&= (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixp+it\tau}\widehat{u}_0(\frac{1}{2}(p-\frac{\tau}{p}))\widehat{\bar{v}}_0(\frac{1}{2}(p+\frac{\tau}{p}))\frac{1}{2|p|}d\tau dp.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Uma vez que (2.30) e (2.32) são equivalentes, a demonstração segue de (2.31).

(2) Por (2.25), Um argumento de dualidade, a desigualdade de Cauhy-Schwartz, e a

unitáriedade de $U(t)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\|D_x^{\frac{1}{2}}\left(U(t)u_0\int_0^t \overline{U(t-\tau)G(\tau)d\tau}\right)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\\
&= \sup\left\{\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} D_x^{\frac{1}{2}}\left(U(t)u_0\int_0^t \overline{U(t-\tau)G(\tau)d\tau}\right)\psi(t,x)dtdx\right|;\quad \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}=1\right\}\\
&\leqslant \sup\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty} D_x^{\frac{1}{2}}\left(U(t)u_0\int_0^t \overline{U(t-\tau)G(\tau)d\tau}\right)\psi(t,x)dt\right|dx;\quad \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}=1\right\}\\
&\leqslant \sup\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\|\int_0^t D_x^{\frac{1}{2}}(U(t)u_0\overline{U(t-\tau)G(\tau)d\tau}\|_{L_x^2}\|\psi(t,\cdot)\|_{L_x^2}dt;\quad \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}=1\right\}\\
&\leqslant \sup\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_o^t \|D_x^{\frac{1}{2}}(U(t)u_0\overline{U(t-\tau)G(\tau)}\|_{L_x^2}\|\psi(t,\cdot)\|_{L_x^2}d\tau dt;\quad \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}=1\right\}\\
&\leqslant \sup\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\|D_x^{\frac{1}{2}}(U(\cdot)u_0\overline{U(\cdot)U(-\tau)G(\tau)}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}d\tau;\quad \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}=1\right\}\\
&= 2^{-\frac{1}{2}}\|u_0\|_{L_x^2}\|G\|_{L_t^1L_x^2}
\end{aligned}
$$

A última desigualdade segue de (2.25). Analogamente, temos:

$$
\|D_x^{\frac{1}{2}}(\overline{U(t)v_0}\int_0^t U(t-\tau)F(\tau)d\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leqslant 2^{\frac{-1}{2}}\|v_0\|_{L_x^2}\|F\|_{L_t^1L_x^2},
$$

$$
\begin{aligned}
&\|D_x^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t U(t-\tau)F(\tau)d\tau\cdot\int_0^t \overline{U(t-\tau)G(\tau)}d\tau\right)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\\
&= \|D_x^{\frac{1}{2}}\left(U(t)\int_0^t U(-\tau)F(\tau)d\tau\cdot U(t)\int_0^t U(-\tau)G(\tau)d\tau\right)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\\
&\leqslant 2^{-\frac{1}{2}}\|\int_0^t U(-\tau)F(\tau)d\tau\|_{L_x^2}\|\int_0^t U(-\tau)G(\tau)d\tau\|_{L_x^2}\\
&= 2^{-\frac{1}{2}}\|F\|_{L_t^1L_x^2}\|G\|_{L_t^1L_x^2}.
\end{aligned}
$$

Segue dos cálculos acima que

$$
\begin{aligned}
&\|D_x^{\frac{1}{2}}u\bar{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\\
&\quad\leqslant \|D_x^{\frac{1}{2}}(U(t)u_0\overline{U(t)v_0})\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|D_x^{\frac{1}{2}}\left(U(t)u_0\int_0^t \overline{U(t-\tau)G(\tau)}d\tau\right)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\\
&\quad+ \|D_x^{\frac{1}{2}}\left(\overline{U(t)v_0}\int_0^t U(t-\tau)F(\tau)d\tau\right)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\\
&\quad+ \|D_x^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t U(t-\tau)F(\tau)d\tau\right)\left(\int_0^t \overline{U(t-\tau)G(\tau)}d\tau\right)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\\
&\quad\leqslant 2^{-\frac{1}{2}}\|u_0v_0\|_{L_x^2} + 2^{\frac{-1}{2}}\|u_0\|_{L_x^2}\|G\|_{L_t^1L_x^2} + 2^{\frac{-1}{2}}\|v_0\|_{L_x^2}\|F\|_{L_t^1L_x^2} + 2^{-\frac{1}{2}}\|F\|_{L_t^1L_x^2}\|G\|_{L_t^1L_x^2}\\
&\quad= 2^{-\frac{1}{2}}\left(\|u_0\|_{L_x^2}+\|F\|_{L_t^1L_x^2}\right)\left(\|v_0\|_{L_x^2}+\|G\|_{L_t^1L_x^2}\right).
\end{aligned}
$$

Portanto, está (2) demonstrada.

(3) Da mesma forma como na demonstração do item (1), fazendo as mudanças de variável $\tau \mapsto s = \frac{\tau}{\xi}$, $(s, \xi) \mapsto (p, q) = (\frac{\xi - s}{2}, \frac{\xi + s}{2})$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\partial_x(U(\cdot)u_0\overline{U(\cdot)v_0})\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} &= \|D_x(U(\cdot)u_0\overline{U(\cdot)v_0})\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\
&= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u}_0(\frac{1}{2}(\xi - \frac{\tau}{\xi}))\widehat{v}_0(\frac{1}{2}(\xi + \frac{\tau}{\xi}))|^2 d\tau d\xi \\
&= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\xi||\widehat{u}_0(\frac{1}{2}(\xi - s))\widehat{v}_0(\frac{1}{2}(\xi + s))|^2 ds d\xi \\
&= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} 2|p + q||\widehat{u}_0(p)\widehat{v}_0(q)|^2 dp dq \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |p + q||\widehat{u}_0(p)\widehat{v}_0(q)|^2 dp dq \\
&\leqslant \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (1 + p^2)^{\frac{1}{2}}(1 + q^2)^{\frac{1}{2}}|\widehat{u}_0(p)\widehat{v}_0(q)|^2 dp dq \\
&= \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{H^{\frac{1}{2}}}\|v_0\|^2_{H^{\frac{1}{2}}},
\end{aligned}$$

onde a penúltima desigualdade segue do fato que $\sqrt{t^2} = |t| = (t^2)^{\frac{1}{2}}$ e que vale a seguinte desigualdade

$$\sqrt{(p + q)^2} \leqslant \sqrt{(1 + p^2)(1 + q^2)}. \tag{2.33}$$

a qual pode ser demonstrada da seguinte forma: Observe que
(i) $(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$
(ii) $(1 + p^2)(1 + q^2) = 1 + p^2 + q^2 + p^2q^2$.
Logo provar (2.33) consiste em provar que $p^2q^2 + 1 \geqslant 2pq$, que é trivial. Portanto procedendo de maneira análoga ao item (2) temos o item (3). ∎

Observação 2.1. *Como*

$$\delta * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \eta)g(\eta)d\eta = g(x),$$

definido $g(x) = \widehat{u}_0(\xi - x)\widehat{v}_0(x)$ *e tomando* $x = \frac{\tau + \xi^2}{2\xi}$, *segue que*

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\frac{\tau + \xi^2}{2\xi} - \eta)\widehat{u}_0(\xi - \eta)\widehat{v}_0(\eta)d\eta = g(\frac{\tau + \xi^2}{2\xi}) &= \widehat{u}_0(\xi - \frac{\tau + \xi^2}{2\xi})\widehat{v}_0(\frac{\tau + \xi^2}{2\xi}) \\
&= \widehat{u}_0(\frac{1}{2}(\xi - \frac{\tau}{\xi}))\widehat{v}_0(\frac{1}{2}(\xi + \frac{\tau}{\xi})).
\end{aligned}$$

Capítulo 3

O problema de Cauchy para a equação gauge transformada.

Neste capítulo fazemos a mudança de variável conhecida com **transformada gauge**, com a qual a equação (1) é transformada numa outra em que o termo $u\partial_x(|u|^2)$ dá lugar ao termo sem derivadas $-i\frac{\lambda}{2}|v|^4 v$. Em seguida, utilizando o teorema do ponto fixo para contrações e as estimativas de efeito regularizantes estabelecidas no Capítulo 2, provamos a boa colocação local para o PVI associado a essa equação gauge transformada, com dado inicial em $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$.

3.1 A transformada gauge.

Dada a equação

$$\partial_t u - i\partial_x^2 u = \lambda \partial_x(|u|^2)u - if(u), \tag{3.1}$$

seja u uma solução de (3.1), suficientemente regular no espaço e no tempo, integrável no espaço. Definamos

$$v = v(x,t) = e^{i\theta(u)}u(x,t), \tag{3.2}$$

onde

$$\theta(u)(x,t) = \frac{-\lambda}{2}\int_{-\infty}^{x} |u(y,t)|^2 dy. \tag{3.3}$$

Observemos que

$$\partial_t v = ie^{i\theta}\partial_t \theta u + e^{i\theta}\partial_t u \tag{3.4}$$

e

$$\partial_x^2 v = e^{i\theta}\partial_x^2 u + 2ie^{i\theta}\partial_x u \partial_x \theta - e^{i\theta}u(\partial_x\theta)^2 + ie^{i\theta}u\partial_x^2\theta, \tag{3.5}$$

pois

$$\begin{aligned}\partial_x^2 v = \partial_x\partial_x(e^{i\theta}u) &= \partial_x(ie^{i\theta}\partial_x\theta u + e^{i\theta}\partial_x u)\\ &= -e^{i\theta}(\partial_x\theta)^2 u + ie^{i\theta}\partial_x^2\theta u + ie^{i\theta}\partial_x\theta\partial_x u + ie^{i\theta}\partial_x\theta\partial_x u + e^{i\theta}\partial_x^2 u\\ &= e^{i\theta}\partial_x^2 u + 2ie^{i\theta}\partial_x u\partial_x\theta - e^{i\theta}u(\partial_x\theta)^2 + ie^{i\theta}u\partial_x^2\theta.\end{aligned}$$

Então, de (3.4) e(3.5) obtemos

$$\begin{aligned}\partial_t v - i\partial_x^2 v &= ie^{i\theta}u\partial_t\theta + e^{i\theta}\partial_t u - i(e^{i\theta}\partial_x^2 u + 2ie^{i\theta}\partial_x u\partial_x\theta - e^{i\theta}u(\partial_x\theta)^2 + ie^{i\theta}u\partial_x^2\theta)\\ &= ie^{i\theta}u[\partial_t\theta - i\partial_x^2\theta + (\partial_x\theta)^2] + e^{i\theta}[\partial_t u - i\partial_x^2 u] + 2e^{i\theta}\partial_x u\partial_x\theta. \qquad (3.6)\end{aligned}$$

Agora, de (3.3) e (3.1) temos que

$$\begin{aligned}\partial_t\theta &= -\frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{x}[\partial_t u\bar{u} + u\partial_t\bar{u}]dy\\ &= -\frac{\lambda}{2}\left\{\int_{-\infty}^{x}[i\partial_y^2 u + \lambda\partial_y(|u|^2)u - if(u)]\bar{u}dy + \int_{-\infty}^{x}u[-i\partial_y^2\bar{u} + \lambda\partial_y(|u|^2)\bar{u} + if(\bar{u})]dy\right\}\\ &= -\frac{\lambda}{2}\Bigg\{\int_{-\infty}^{x}i(\partial_y^2 u)\bar{u}dy - i\int_{-\infty}^{x}(\partial_y^2\bar{u})udy + 2\lambda\int_{-\infty}^{x}\partial_y(|u|^2)|u|^2dy\\ &\quad - i\int_{-\infty}^{x}f(u)\bar{u}dy + i\int_{-\infty}^{x}f(\bar{u})udy\Bigg\}\\ &= -\frac{\lambda}{2}\Bigg\{\int_{-\infty}^{x}i(\partial_y^2 u)\bar{u}dy - i\int_{-\infty}^{x}(\partial_y^2\bar{u})udy\\ &\quad + 2\lambda\int_{-\infty}^{x}\partial_y(|u|^2)|u|^2dy + 2\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{x}f(u)\bar{u}dy\Bigg\}. \qquad (3.7)\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}i\Big(\int_{-\infty}^{x}\partial_y^2 u\bar{u}dy - \int_{-\infty}^{x}\partial_y^2\bar{u}udy\Big) &= i\Big(\partial_x u\bar{u} - \int_{-\infty}^{x}|\partial_y u|^2dy - \partial_x\bar{u}u + \int_{-\infty}^{x}|\partial_y u|^2dy\Big)\\ &= i(\partial_x u\bar{u} - \partial_x\bar{u}u) \qquad (3.8)\end{aligned}$$

e

$$2\lambda\int_{-\infty}^{x}\partial_y(|u|^2)|u|^2dy = \lambda|u|^4, \qquad (3.9)$$

segue de (3.7) que

$$\partial_t\theta = \frac{-i\lambda}{2}(\partial_x u\bar{u} - \partial_x\bar{u}u) - \frac{\lambda^2}{2}|u|^4 - \lambda\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{x}f(u)\bar{u}dy. \qquad (3.10)$$

Logo, por (3.10) e (3.3), segue que

$$\begin{aligned}\partial_t\theta - i\partial_x^2\theta + (\partial_x\theta)^2 &= -\frac{i\lambda}{2}(\partial_x u\bar{u} - \partial_x\bar{u}u) - \frac{\lambda^2}{2}|u|^4 + \frac{\lambda i}{2}\partial_x(|u|^2)\\ &\quad + \frac{\lambda^2}{4}|u|^4 - \lambda \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{x} f(u)\bar{u}dy\\ &= -\frac{i\lambda}{2}(\partial_x u\bar{u} - \partial_x\bar{u}u) - \frac{\lambda^2}{4}|u|^4 + \frac{\lambda i}{2}\partial_x(|u|^2) - \lambda \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{x} f(u)\bar{u}dy.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Pela definição de v, obtemos:

$$|u|^2 = u\bar{u} = e^{i\theta}u\overline{e^{i\theta}u} = v\bar{v} = |v|^2,$$

$$e^{i\theta}\partial_x u = \partial_x(e^{i\theta}u) - i\partial_x\theta e^{i\theta}u = \partial_x v - i|v|^2 v,$$

$$\partial_x u\bar{u} = e^{i\theta}\partial_x u\overline{e^{i\theta}u} = (\partial_x v - i|v|^2 v)\bar{v}$$

e

$$\partial_x\bar{u}u = \overline{e^{i\theta}\partial_x u}e^{i\theta}u = (\partial_x\bar{v} + i|v|^2\bar{v})v.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\partial_t v - i\partial_x^2 v &= iv[-\frac{\lambda i}{2}((\partial_x v\bar{v} - i|v|^4) - (\partial_x\bar{v}v + i|v|^4)) - \frac{\lambda^2}{4}|v|^4 + \frac{\lambda i}{2}\partial_x(|v|^2)] + \lambda\partial_x(|v|^2)v\\ &\quad + 2(\partial_x v - i|v|^2 v)(-\frac{\lambda}{2})|v|^2 - i\lambda v\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{x} f(e^{-i\theta}v)e^{i\theta}\bar{v}dy - ie^{i\theta}f(e^{-i\theta}v)\\ &= \frac{\lambda}{2}v\partial_x v|v|^2 - i\frac{\lambda}{2}v|v|^4 - \frac{\lambda}{2}\partial_x\bar{v}v^2 - i\frac{\lambda}{2}|v|^2 v - i\frac{\lambda^4}{4}v|v|^4 - \frac{\lambda}{2}v\partial_x(|v|^2) + \lambda\partial_x(|v|^2)v\\ &\quad - \lambda\partial_x v|v|^2 + \lambda i v|v|^4 - i\lambda v\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{x} f(e^{-i\theta}v)e^{i\theta}\bar{v}dy - ie^{i\theta}f(e^{-i\theta}v)\\ &= -\frac{\lambda}{2}\partial_x v|v|^2 - \frac{\lambda}{2}\partial_x\bar{v}v^2 - \frac{\lambda}{2}v\partial_x(|v|^2) + \lambda v\partial_x(|v|^2) - i\frac{\lambda^2}{4}v|v|^4\\ &\quad - i\lambda v\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{x} f(e^{-i\theta}v)e^{i\theta}\bar{v}dy - ie^{i\theta}f(e^{-i\theta}v)\\ &= -\frac{\lambda}{2}v\partial_x(|v|^2) - \frac{\lambda}{2}v\partial_x(|v|^2) + \lambda v\partial_x(|v|^2) - i\frac{\lambda^2}{4}v|v|^4\\ &\quad - i\lambda v\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{x} f(e^{-i\theta}v)e^{i\theta}\bar{v}dy - ie^{i\theta}f(e^{-i\theta}v)\\ &= -i\frac{\lambda^2}{4}v|v|^4 - i\lambda v\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{x} f(e^{-i\theta}v)e^{i\theta}\bar{v}dy - ie^{i\theta}f(e^{-i\theta}v),\end{aligned}$$

ou seja, v satisfaz a seguinte equação:

$$\partial_t v - i\partial_x^2 v = -i\frac{\lambda^2}{4}v|v|^4 - i\lambda v\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{x} f(e^{-i\theta}v)e^{i\theta}\bar{v}dy - ie^{i\theta}f(e^{-i\theta}v). \tag{3.12}$$

Inversamente, se tomamos

$$u = e^{-i\theta(v)}v(x,t) \tag{3.13}$$

procedendo de maneira análoga a anterior, obtemos (3.1).

3.2 Boa colocação local para o PVI associado à equação gauge transformada.

Nesta seção estabelecemos o resultado de boa colocação local para o PVI associado à equação (3.12). O primeiro passo consiste em escrevê-la da seguinte forma (posteriormente ficará clara a razão disso):

$$\partial_t v - i\partial_x^2 v = \sum_{j=1}^{5} F_j(v), \tag{3.14}$$

onde

$$\begin{aligned}
F_1(v) &= -i\frac{\lambda^2}{4}|v|^4 v,\\
F_2(v) &= -ie^{-i\theta} f_1(e^{i\theta}v),\\
F_3(v) &= -ie^{-i\theta} f_2(e^{i\theta}v),\\
F_4(v) &= -i\lambda v \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{x} e^{-i\theta}\bar{v} f_1(e^{-i\theta}v)dy,\\
F_5(v) &= -i\lambda v \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{x} e^{-i\theta}\bar{v} f_2(e^{-i\theta}v)dy.
\end{aligned}$$

Portanto, consideremos o PVI

$$\begin{cases} \partial_t v - i\partial_x^2 v = \displaystyle\sum_{j=1}^{5} F_j, \quad x,\ t \in \mathbb{R} \\ v(x,0) = v_0(x). \end{cases} \tag{3.15}$$

Para a equação (3.14) a f pode ser um pouco mais geral que em (2): basta satisfazer a seguinte hipótese:

(H) f é continuamente diferenciável no sentido real, $f(0) = 0$, e satisfaz a estimativa

$$|f'(z)| \leqslant c(1 + |z|^{p-1}),\ z \in \mathbb{C},$$

para algum p, com $3 < p < \infty$.

Teorema 3.1. *Seja* f *satisfazendo* (H). *Então dado* $v_0 \in H^{\frac{1}{2}}$, *existe uma constante positiva* T *dependendo somente de* $\|v_0\|_{H^{\frac{1}{2}}}$ *e* f, *tal que, o PVI* (3.15) *tem uma única solução* $v \in X(I)$, *com* $I = [0,T]$. *Além disso para qualquer* $T' \in (0,T)$, *existe* $\varepsilon > 0$ *tal que a aplicação* $\widetilde{v}_0 \longrightarrow \widetilde{v}$ *é Lipschitz de* $\{\widetilde{v}_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}); \|\widetilde{v}_0 - v_0\|_{H^{\frac{1}{2}}} < \varepsilon\}$ *sobre* $\in X([0,T'])$.

Tomando $p > 3$ pela hipótese H e decompondo f em $f = f_1 + f_2$, talque $f_j \in C^1(\mathbb{C},\mathbb{C})$, $f_j(0) = 0$, com

$$|f_1(z)| \leqslant C|z|, |f_1'(z)| \leqslant C,$$

$$|f_2(z)| \leqslant C|z|^p, |f_2'(z)| \leqslant C|z|^{p-1}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Lembremos que, para cada intervalo de tempo limitado I, o espaço de funções $X(I)$ é definido por:

$$X(I) = \{u \in C(I; H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})) : u \in L_t^4 L_x^\infty \cap L_x^4 L_t^\infty,\ \partial_x u \in L_x^\infty L_t^2 \text{ e } D_x^{\frac{1}{2}} u \in L_x^6 L_t^6\}$$

com norma

$$\|u\|_{X(I)} := |||u||| = \|u\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|u\|_{L_T^4 L_x^\infty} + \|u\|_{L_x^4 L_T^\infty} + \|\partial_x u\|_{L_x^\infty L_T^2} + \|D_x^{\frac{1}{2}} u\|_{L_x^6 L_T^6}.$$

Resolver o P.V.I (3.15) é equivalente a encontrar uma solução de

$$v(t) = U(t)v_0 + \sum_{j=1}^{5} \int_0^t U(t-\tau) F_j(v)(\tau) d\tau. \tag{3.16}$$

Seja

$$X_a(I) = \overline{B_a(0)} = \{u \in X(I) : |||u||| \leqslant a\}.$$

Devemos provar que existe um $T = T(\|v_0\|_{H^{\frac{1}{2}}}) > 0$ e um $a = a(\|v_0\|_{H^{\frac{1}{2}}}) > 0$, tal que, a aplicação

$$\Phi(v) = U(t)v_0 + \sum_{j=1}^{5} \int_0^t U(t-\tau) F_j(v)(\tau) d\tau \tag{3.17}$$

é tal que $\Phi : X_a(I) \longrightarrow X_a(I)$ e é uma contração, ou seja, $\exists\ 0 < k = k(T) < 1$, tal que dados $v_1, v_2 \in X_a(I)$,

$$|||\Phi(v_1) - \Phi(v_2)||| \leqslant k|||v_1 - v_2|||.$$

Por ser muito longa, resolvemos divir a demonstração do Teorema 3.1 em vários lemas e no final os juntamos para concluí-la.

Primeiro provaremos que $\Phi(v)$ está bem definida, isto é, $\Phi : X_a(I) \longrightarrow X_a(I)$.

Lema 3.2.1. *Dado* $v_0 \in H^{\frac{1}{2}}$, $U(t)v_0 \in X(I)$.

Dem. De fato, isto segue das estimativas lineares para $U(t)v_0$ estabelecidas no Lema 2.2.2, como veremos abaixo.

Pelo fato de $U(t) : H^{\frac{1}{2}} \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}$ ser um grupo unitário, segue que

$$\|U(t)v_0\|_{L^\infty_x H^{\frac{1}{2}}} \leqslant \|v_0\|_{L^\infty_x H^{\frac{1}{2}}}.$$

Da estimativa (2.12), temos que

$$\|\partial_x U(t)v_0\|_{L^\infty_x L^2_T} \leqslant c\|D_x^{\frac{1}{2}} v_0\|_{L^2_x} \leqslant c\|v_0\|_{H^{\frac{1}{2}}}.$$

Pela estimava (2.13) e por imersão de Sobolev, segue que

$$\|U(t)v_0\|_{L^4_x L^\infty_T} \leqslant c\|D_x^{\frac{1}{4}} v_0\|_{L^2_x} \leqslant c\|v_0\|_{H^{\frac{1}{2}}}.$$

Tomando $q = 4$ e $r = \infty$, segue da estimativa (2.10) que

$$\|U(t)v_0\|_{L^4_T L^\infty_x} \leqslant c\|v_0\|_{L^2_x} \leqslant c\|v_0\|_{H^{\frac{1}{2}}}.$$

Também tomando $p = r = 6$, na estimativa (2.10) segue que

$$\|D_x^{\frac{1}{2}} U(t)v_0\|_{L^6_x L^6_T} \leqslant c\|D_x^{\frac{1}{2}} v_0\|_{L^2_x} \leqslant c\|v_0\|_{H^{\frac{1}{2}}}.$$

Portanto $U(t)v_0 \in X(I)$, com $v_0 \in H^{\frac{1}{2}}$. $\blacksquare$

Lema 3.2.2. *Seja* $E_1(v) = \int_0^t U(t-\tau)F_1(v)(\tau)d\tau$. *Então*
(i) $\|E_1(v)\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} \leqslant c(T\|v\|^5_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + T^{\frac{1}{2}}\|v\|^2_{L^4_x L^\infty_T}\|v\|^3_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}})$;
(ii) $\|E_1(v)\|_{L^4_x L^\infty_T} \leqslant cT\|v\|^5_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}$;
(iii) $\|E_1(v)\|_{L^4_T L^\infty_x} \leqslant T^{\frac{3}{4}}\|v\|^5_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}$;
(iv) $\|\partial_x E_1(v)\|_{L^\infty_x L^2_T} \leqslant T\|v\|^5_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}$.

Dem. (i) Da desigualdade de Minkowski temos que

$$\begin{aligned}
\|E_1(v)\|_{H^{\frac{1}{2}}} &\leqslant \frac{\lambda^2}{4}\int_0^t \|U(t-\tau)|v|^4 v\|_{L^2_x} d\tau + \frac{\lambda^2}{4}\|\int_0^t U(t-\tau)D_x^{\frac{1}{2}}(|v|^4 v)d\tau\|_{L^2_x} \\
&= \frac{\lambda^2}{4}\int_0^t \||v|^4 v\|_{L^2_x} d\tau + \frac{\lambda^2}{4}\|\int_0^t U(t-\tau)D_x^{\frac{1}{2}}(|v|^4 v)d\tau\|_{L^2_x}.
\end{aligned}$$

Agora usando imersão de Sobolev obtemos:

$$\frac{\lambda^2}{4}\int_0^t \||v|^4 v\|_{L^2_x} d\tau = \frac{\lambda^2}{4}\int_0^t \|v\|^5_{L^{10}_x} d\tau \leqslant \frac{\lambda^2}{4}\int_0^t \|v\|^5_{H^{\frac{2}{5}}} d\tau \leqslant \frac{\lambda^2}{4}\int_0^t \|v\|^5_{H^{\frac{1}{2}}} d\tau \leqslant \frac{\lambda^2}{4}T\|v\|^5_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}.$$

Ainda por imersão de Sobolev, desigualdade Hölder e por (2.14) segue que

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda^2}{4}\|\int_0^t U(t-\tau)D_x^{\frac{1}{2}}(|\nu|^4\nu)d\tau\|_{L_x^2} &\leqslant c\||\nu|^4\nu\|_{L_x^1L_T^2} = c\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^t |\nu|^4|\nu|^6 dt\right)^{\frac{1}{2}} dx \\
&\leqslant c\int_{-\infty}^{\infty}\|\nu\|_{L_T^\infty}^2\left(\int_0^t |\nu|^6 dt\right)^{\frac{1}{2}} dx \\
&\leqslant c\left(\int_{-\infty}^{\infty}\|\nu\|_{L_T^\infty}^4 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t |\nu|^6 dt dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant cT^{\frac{1}{2}}\|\nu\|_{L_x^4L_T^\infty}^2\|\nu\|_{L_T^\infty L_x^6}^3 \leqslant cT^{\frac{1}{2}}\|\nu\|_{L_x^4L_T^\infty}^2\|\nu\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{3}}}^3 \\
&\leqslant cT^{\frac{1}{2}}\|\nu\|_{L_x^4L_T^\infty}^2\|\nu\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}^3.
\end{aligned}$$

(ii) Usando (2.15), o Lema 1.4.2 (com $p_1 = \frac{16}{7}$, $p_2 = 16$, $p_3 = \frac{8}{3}$ e $p_4 = 8$) e imersão de Sobolev, segue que

$$\begin{aligned}
\|E_1(\nu)\|_{L_x^4L_T^\infty} &\leqslant T^{\frac{3}{4}}\left(\int_0^T\left(\int_{-\infty}^{\infty}|D_x^{\frac{1}{4}}(|\nu|^4\nu)|^2 dx\right)^2 dt\right)^{\frac{1}{4}} \\
&\leqslant T^{\frac{3}{4}}\sup_{t\in[0,T]}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|D_x^{\frac{1}{4}}(|\nu|^4\nu)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T d\tau\right)^{\frac{1}{4}} = T\|D_x^{\frac{1}{4}}(|\nu|^4\nu)\|_{L_T^\infty L_x^2} \\
&\leqslant T(\|D_x^{\frac{1}{4}}(|\nu|^4)\|_{L_T^\infty L_x^{\frac{16}{7}}}\|\nu\|_{L_T^\infty L_x^{16}} + \||\nu|^4\|_{L_T^\infty L_x^8}\|D_x^{\frac{1}{4}}\nu\|_{L_T^\infty L_x^{\frac{8}{3}}}).
\end{aligned}$$

Novamente pelo Lema 1.4.2, primeiro com $p_1 = \frac{16}{6}$, $p_2 = 16$, $p_3 = \frac{8}{3}$ e $p_4 = 16$, depois com $p_1 = 8$, $p_2 = 4$, $p_3 = 8$ e $p_4 = 4$, segue que

$$\|D_x^{\frac{1}{4}}(|\nu|^4)\|_{L_T^\infty L_x^{\frac{16}{7}}} \leqslant \|D_x^{\frac{1}{4}}(|\nu|^2)\|_{L_T^\infty L_x^{\frac{8}{3}}}\||\nu|^2\|_{L_T^\infty L_x^{16}} = \|D_x^{\frac{1}{4}}(|\nu|^2)\|_{L_T^\infty L_x^{\frac{8}{3}}}\|\nu\|_{L_T^\infty L_x^{32}}^2,$$

$$\|D_x^{\frac{1}{4}}(|\nu|^2)\|_{L_T^\infty L_x^{\frac{8}{3}}} \leqslant \|D_x^{\frac{1}{4}}\nu\|_{L_T^\infty L_x^4}\|\nu\|_{L_T^\infty L_x^8}.$$

Usando imersão de Sobolev, temos que:

$$\|\nu\|_{L_T^\infty L_x^{32}}^2 \leqslant \|\nu\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}^2,$$

$$\|\nu\|_{L_T^\infty L_x^{16}} \lesssim \|\nu\|_{H^{\frac{7}{16}}} \lesssim \|\nu\|_{H^{\frac{1}{2}}},$$

$$\||\nu|^4\|_{L_T^\infty L_x^8} = \|\nu\|_{L_T^\infty L_x^{32}}^4 \leqslant \|\nu\|_{H^{\frac{1}{2}}}^4,$$

$$\|D_x^{\frac{1}{4}}\nu\|_{L_T^\infty L_x^{\frac{8}{3}}} \leqslant \|\nu\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}},$$

$$\|D_x^{\frac{1}{4}}(|v|^4)\|_{L_T^\infty L_x^{\frac{16}{7}}} \leqslant \|D_x^{\frac{1}{4}}v\|_{L_T^\infty L_x^4}\|v\|_{H^{\frac{1}{2}}}\|v\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2 \leqslant \|v\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}^4.$$

Portanto,

$$T\|D_x^{\frac{1}{4}}(|v|^4 v)\|_{L_T^\infty L_x^2} \leqslant T\|v\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}^5,$$

donde segue (ii).

(iii) Usando (2.11) e imersão de Sobolev temos

$$\begin{aligned}
\|E_1(v)\|_{L_T^4 L_x^\infty} &\leqslant \left(\int_0^T \left(\int_{-\infty}^{\infty} |v|^5 dx\right)^{\frac{4}{3}} dt\right)^{\frac{3}{4}} \\
&\leqslant \sup_{t\in[0,T]} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |v|^5 dx\right)\left(\int_0^T d\tau\right)^{\frac{3}{4}} \\
&= T^{\frac{3}{4}}\|v\|_{L_T^\infty L_x^5}^5 \leqslant T^{\frac{3}{4}}\|v\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}^5.
\end{aligned}$$

(iv) Para provar esse ítem, primeiro usaremos o efeito regularizante (2.17):

$$\begin{aligned}
\|\partial_x E_1(v)\|_{L_x^\infty L_T^2} &\leqslant cT^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T \left(\int_{-\infty}^{\infty} |D_x^{\frac{1}{4}}(|v|^4 v)|^2 dx\right) dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant T^{\frac{1}{2}} \sup_{t\in[0,T]} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |D_x^{\frac{1}{4}}(|v|^4 v)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= T\|D_x^{\frac{1}{4}}(|v|^4 v)\|_{L_T^\infty L_X^2}.
\end{aligned}$$

Daí, pela demonstração do item (ii), temos que

$$\|D_x^{\frac{1}{4}}(|v|^4 v)\|_{L_T^\infty L_x^2} \leqslant \|v\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}^5.$$

Com isso o lema está demonstrado. ■

Observação 3.1. *Seguindo os mesmos passos da prova do lema anterior e pelo Lema 3.2.1, vemos que é suficiente estimar a norma* $L_t^\infty H^{\frac{1}{2}}$ *dos demais termos.*

Lema 3.2.3. *Seja* $E_2(v) = \int_0^t U(t-\tau)F_2(v)(\tau)d\tau$. *Então*

$$\|E_2(v)\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \leqslant cT(\|v\|_{L_T^\infty L_x^2} + \|v\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}^3).$$

Dem. Usando a desigualdade de Minkowski, o Lema 1.4.4, o Lema 1.4.1, (com $p = 2$,

$h = 1$ e $\alpha = \frac{1}{2}$) e imersão de Sobolev, segue que

$$
\begin{aligned}
\|E_2(v)\|_{H^{\frac{1}{2}}} &\lesssim T\|e^{i\theta}f_1(e^{i\theta}v)\|_{L^\infty_T L^2_x} + \int_0^T \|D_x^{\frac{1}{2}}(e^{i\theta}f_1(e^{-i\theta}v))\|_{L^2_x}d\tau \\
&\lesssim T\|v\|_{L^\infty_T L^2 x} + T^{\frac{1}{2}}\|D_x^{\frac{1}{2}}(e^{i\theta}f_1(e^{-i\theta}v))\|_{L^2_x L^2_T} \\
&\lesssim T\|v\|_{L^\infty_T L^2 x} + T^{\frac{1}{2}}\|v\|^2_{L^8_x L^8_T}\|f_1(e^{-i\theta}v)\|_{L^4_x L^4_T} + T^{\frac{1}{2}}\|J^{\frac{1}{2}}f_1(e^{-i\theta}v)\|_{L^2_x L^2_T} \\
&\lesssim T\|v\|_{L^\infty_T L^2_x} + T^{\frac{3}{4}}\|v\|^2_{L^\infty_T H^{\frac{3}{8}}}\|v\|_{L^4_x L^4_T} + T^{\frac{1}{2}}\|D_x^{\frac{1}{2}}f_1(e^{-i\theta}v)\|_{L^2_x L^2_T} \\
&\lesssim T\|v\|_{L^\infty_T L^2_x} + T^{\frac{3}{4}}\|v\|^2_{L^\infty_T H^{\frac{3}{8}}}\|v\|_{L^4_x L^4_T} + T^{\frac{1}{2}}\left\|\|f_1'(e^{-i\theta}v)\|_{L^\infty_x}\|D_x^{\frac{1}{2}}(e^{-i\theta}v)(M(1))^{\frac{1}{rp}}\|_{L^2_x}\right\|_{L^2_T} \\
&\lesssim T\|v\|_{L^\infty_T L^2_x} + T^{\frac{3}{4}}\|v\|^2_{L^\infty_T H^{\frac{3}{8}}}\|v\|_{L^4_x L^4_T} + T^{\frac{1}{2}}\left\|\|M(1)\|^{\frac{1}{2rp}}_{L^\infty_x}\|D_x^{\frac{1}{2}}(e^{-i\theta}v)\|_{L^2_x}\right\|_{L^2_T} \\
&\lesssim T\|v\|_{L^\infty_T L^2_x} + T\|v\|^3_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + T^{\frac{1}{2}}\|D_x^{\frac{1}{2}}(e^{-i\theta}v)\|_{L^2_x L^2_T} \\
&\lesssim T\|v\|_{L^\infty_T L^2_x} + T\|v\|^3_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + T^{\frac{1}{2}}\|v\|^2_{L^8_x L^8_t}\|v\|_{L^4_x L^4_t} + T^{\frac{1}{2}}\|J^{\frac{1}{2}}v\|_{L^2_x L^2_T} \\
&\lesssim T\|v\|_{L^\infty_T L^2_x} + T\|v\|^3_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}
$$

Isso demonstra o lema. ■

Lema 3.2.4. *Seja* $E_3(v) = \int_0^t U(t-\tau)F_3(v)(\tau)d\tau$. *Então*

$$\|E_3(v)\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} \leqslant c(T\|v\|^p_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + T^{\frac{1}{2}}\|v\|^2_{L^4_x L^\infty_T}\|v\|^{p-2}_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}).$$

Dem. Usando as desigualdades de Minkowski e Hölder, a estimativa (2.14) e as propriedades de f_2, obtemos

$$
\begin{aligned}
\|E_3(v)\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} &\lesssim T^{\frac{1}{2}}\|f_2(e^{-i\theta}v)\|_{L^2_x L^2_T} + \|f_2(e^{-i\theta}v)\|_{L^1_x L^2_T} \\
&\lesssim T\|v\|^p_{L^\infty_T L^{2p}_x} + \||v|^p\|_{L^1_x L^2_T} \\
&\lesssim T\|v\|^p_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + \int_{-\infty}^{\infty}\|v\|^2_{L^\infty_T}\left(\int_0^T |v|^{2(p-2)}d\tau\right)^{\frac{1}{2}}dx \\
&\lesssim T\|v\|^p_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + \left(\int_{-\infty}^{\infty}\|v\|^4_{L^\infty_T}dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^T |v|^{2(p-2)}d\tau dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim T\|v\|^p_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + T^{\frac{1}{2}}\|v\|^2_{L^4_x L^\infty_T}\|v\|^{p-2}_{L^\infty_T L^{2(p-2)}_x} \\
&\lesssim T\|v\|^p_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + T^{\frac{1}{2}}\|v\|^2_{L^4_x L^\infty_T}\|v\|^{p-2}_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}. \quad ■
\end{aligned}
$$

Lema 3.2.5. *Seja* $E_4(v) = \int_0^t U(t-\tau)F_4(v)(\tau)d\tau$. *Então*

$$\|E_4(v)\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} \leqslant cT\|v\|^3_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}.$$

Dem. Provaremos o lema usando a desigualdade de Minkowski, a unitariedade de $U(t)$, o Lema 1.4.5, as propriedades de f_1 e a imersão de Sobolev. Temos que

$$\|E_4(v)\|_{H^{\frac{1}{2}}} = \| \int_0^t U(t-\tau)\left(v\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{x} e^{i\theta} f_1(e^{-i\theta}v)\ dy\right)\ d\tau\|_{L^2_x}$$
$$+ \| \int_0^t U(t-\tau)D_x^{\frac{1}{2}}\left(v\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{x} e^{i\theta}\bar{v} f_1(e^{-i\theta}v)\ dy\right)\ d\tau\|_{L^2_x}.$$

Por um lado,

$$\begin{aligned}
\| \int_0^t U(t-\tau)\left(v\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{x} e^{i\theta} f_1(e^{-i\theta}v)\ dy\right)d\tau\|_{L^2_x} &\leqslant \int_0^T \|v\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{x} e^{i\theta}\bar{v} f_1(e^{-i\theta}v\ dy)\|_{L^2_x} d\tau\\
&\leqslant T\|v\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{x} \bar{v}e^{-i\theta} f_1(e^{-i\theta}v)dy\|_{L^\infty_T L^2_x}\\
&\lesssim T\|v\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\| \int_{-\infty}^{x} e^{-i\theta}\bar{v} f_1(e^{-i\theta}v)\ dy\|_{L^\infty_T L^4_x}\\
&\lesssim T\|v\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|e^{-i\theta}\bar{v} f_1(e^{-i\theta}v)\|_{L^\infty_T L^2_x}\\
&\lesssim T\|v\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|e^{-i\theta}\bar{v}\|_{L^\infty_T L^4_x}\|f_1(e^{-i\theta}v)\|_{L^\infty_T L^4_x}\\
&\lesssim T\|v\|^3_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, fazendo $h = e^{i\theta}\bar{v} f_1(e^{-i\theta}v)$, segue que

$$\begin{aligned}
&\|U(t-\tau)\int_0^t D_x^{\frac{1}{2}}\left(v\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{x} e^{i\theta}\bar{v} f_1(e^{-i\theta}v)\ dy\right)\ d\tau\|_{L^2_x} \lesssim\ T\|D_x^{\frac{1}{2}}(v\int_{-\infty}^{x} h\ dy)\|_{L^\infty_T L^2_x}\\
&\lesssim T\{\|D_x^{\frac{1}{2}}(v\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{x} h\ dy) - vD_x^{\frac{1}{2}}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{x} h\ dy - D_x^{\frac{1}{2}}(v)\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{x} h\ dy\|_{L^\infty_T L^2_x}\\
&\quad + \|vD_x^{\frac{1}{2}}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{x} h dy\|_{L^\infty_T L^2_x} + \|D_x^{\frac{1}{2}}(v)\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{x} h\ dy\|_{L^\infty_T L^2_x}\}\\
&\lesssim T\left(\|\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{x} h\ dy\|_{L^\infty_T L^\infty_x}\|D_x^{\frac{1}{2}}v\|_{L^\infty_T L^2_x} + \|v\|_{L^\infty_T L^4_x}\|D_x^{\frac{1}{2}}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{x} h\ dy\|_{L^\infty_T L^4_x}\right)\\
&\lesssim T(\|\int_{-\infty}^{x} h\ dy\|_{L^\infty_T L^\infty_x}\|v\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + \|v\|_{L^\infty_T L^4_x}\|D_x^{\frac{1}{2}}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{x} h\ dy\|_{L^\infty_T L^4_x})\\
&\lesssim T\|\int_{-\infty}^{x} h\ dy\|_{L^\infty_T H^1}\|v\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\\
&\lesssim T\|h\|_{L^\infty_T L^2_x}\|v\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} \lesssim T\|v\|^3_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Lema 3.2.6. *Seja* $E_5(v) = \int_0^t U(t-\tau)F_5(v)(\tau)d\tau$. *Então*

$$\|E_5(v)\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} \leqslant cT\|v\|^3_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + cT\|v\|^{p+2}_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}.$$

Dem. Para provamos este lema usaremos a desigualdade de Minkowski, a unitariedade de $U(t)$, o Lema 1.4.5, as propriedades de f_2 e imersão de Sobolev, como segue:

$$\begin{aligned}\|E_5(v)\|_{H^{\frac{1}{2}}} &= \| \int_0^t U(t-\tau)(v\mathrm{Im}\int_{-\infty}^x e^{i\theta}\bar{v}f_2(e^{-i\theta}y)\ dy)\ d\tau\|_{L^2_x} \\ &+ \| \int_0^t U(t-\tau)D_x^{\frac{1}{2}}(v\mathrm{Im}\int_{-\infty}^x e^{i\theta}\bar{v}f_2(e^{-i\theta}v)\ dy)\ d\tau\|_{L^2_x}.\end{aligned}$$

Usando a unitariedade de $U(\cdot)$ em L^2, temos

$$\begin{aligned}&\| \int_0^t U(t-\tau)D_x^{\frac{1}{2}}(v\mathrm{Im}\int_{-\infty}^x e^{i\theta}\bar{v}f_2(e^{-i\theta}v)\ dy)\ d\tau\|_{L^2_x} \\ &\qquad \leqslant \int_0^T \|D_x^{\frac{1}{2}}(v\mathrm{Im}\int_{-\infty}^x e^{i\theta}\bar{v}f_2(e^{-i\theta}v)\ dy)\|_{L^2_x}\ d\tau \\ &\qquad \leqslant T\|D_x^{\frac{1}{2}}(v\mathrm{Im}\int_{-\infty}^x e^{i\theta}\bar{v}f_2(e^{-i\theta}v)\ dy)\|_{L^\infty_T L^2_x}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Chamando $h = e^{i\theta}\bar{v}f_2(e^{-i\theta}v)$ e procedendo como no lema anterior temos que:

$$\begin{aligned}(3.18) &\lesssim T(\|h\|_{L^\infty_T L^2_x}\|v\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + \|v\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|h\|_{L^\infty_T L^2_x}) \\ &\lesssim T(\||v|^{p+1}\|_{L^\infty_T L^2_x}\|v\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + \|v\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\||v|^{p+1}\|_{L^\infty_T L^2_x}) \\ &\lesssim T(\|v\|^{p+1}_{L^\infty_T L^{2(p+1)}_x}\|v\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + \|v\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|v\|^{p+1}_{L^\infty_T L^{2(p+1)}_x}) \\ &\lesssim T\|v\|^{p+2}_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + \|v\|^{p+2}_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} = T\|v\|^{p+2}_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Provaremos agora que a aplicação $\Phi(v) : X(I) \longrightarrow X(I)$ é uma contração, numa bola de $X(I)$.

O lema abaixo será usado na demonstração da dependência contínua da solução em relação ao dado inicial.

Lema 3.2.7. *Sejam* $v_{1,0}, v_{2,0} \in H^{\frac{1}{2}}$, *então*

$$\|U(t)(v_{1,0} - v_{2,0})\|_{H^{\frac{1}{2}}} \leqslant c\|v_{1,0} - v_{2,0}\|_{H^{\frac{1}{2}}}$$

Dem. De fato, isto segue direto das estimativas lineares para $U(t)(v_{1,0} - v_{2,0})$. $\blacksquare$

Observe que, sendo

$$\Phi(v_1) = U(t)v_0 + \sum_{j=1}^{5}\int_0^t U(t-\tau)F_j(v_1)d\tau$$

e

$$\Phi(v_2) = U(t)v_0 + \sum_{j=1}^{5}\int_0^t U(t-\tau)F_j(v_2)d\tau,$$

então temos que

$$\Phi(v_1) - \Phi(v_2) = \sum_{j=1}^{5}\int_0^t U(t-\tau)(F_j(v_1) - F_j(v_2))d\tau.$$

Logo

$$\|\Phi(v_1) - \Phi(v_2)\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \leqslant \sum_{j=1}^{5}\|\int_0^t U(t-\tau)(F_j(v_1) - F_j(v_2))d\tau\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}.$$

Vamos considerar cada $F_j(v_1) - F_j(v_2)$ separadamente. Observe que:

$$\begin{aligned}
F_1(v_1) - F_1(v_2) &= -\frac{i\lambda^2}{4}(|v_1|^4 v_1 - |v_2|^4 v_2) \lesssim |v_1|^4 v_1 - |v_1|^4 v_2 + |v_1|^4 v_2 - |v_2|^4 v_2\\
&= |v_1|^4(v_1 - v_2) + (|v_1|^4 - |v_2|^4)v_2\\
&= |v_1|^4(v_1 - v_2) + (|v_1|^2\bar{v}_1 v_1 - |v_2|^2\bar{v}_2 v_2)v_2\\
&= |v_1|^4(v_1 - v_2) + |v_1|^2\bar{v}_1 v_1 v_2 - |v_1|^2\bar{v}_1 v_2^2 + |v_1|^2\bar{v}_1 v_2^2 - |v_2|^2\bar{v}_2 v_2^2\\
&= |v_1|^4(v_1 - v_2) + |v_1|^2\bar{v}_1 v_2(v_1 - v_2) + (|v_1|^2\bar{v}_1 - |v_2|^2\bar{v}_2)v_2^2\\
&= |v_1|^4(v_1 - v_2) + |v_1|^2\bar{v}_1 v_2(v_1 - v_2) + |v_1|^2\bar{v}_1 v_2^2 - |v_1|^2\bar{v}_2 v_2^2 + |v_1|^2\bar{v}_2 v_2^2 - |v_2|^2\bar{v}_2 v_2^2\\
&= |v_1|^4(v_1 - v_2) + |v_1|^2\bar{v}_1 v_2(v_1 v_2) + |v_1|^2 v_2^2(\bar{v}_1 - \bar{v}_2) + (|v_1|^2 - |v_2|^2)|v_2|^2 v_2\\
&= |v_1|^4(v_1 - v_2) + |v_1|^2\bar{v}_1 v_2(v_1 v_2) + |v_1|^2 v_2^2(\bar{v}_1 - \bar{v}_2) + (v_1\bar{v}_1 - v_2\bar{v}_1 + v_2\bar{v}_1 - v_2\bar{v}_2)|v_2|^2 v_2\\
&= |v_1|^4(v_1 - v_2) + |v_1|^2\bar{v}_1 v_2(v_1 v_2) + |v_1|^2 v_2^2(\bar{v}_1 - \bar{v}_2) + |v_2|^2 v_2\bar{v}_1(v_1 - v_2) + |v_2|^2 v_2^2(\bar{v}_1 - \bar{v}_2).
\end{aligned}$$

Lema 3.2.8. *Seja* $E_1(v) = \int_0^t U(t-\tau)F_1(v)(\tau)d\tau$. *Então*

$$\|E_1(v_1) - E_1(v_2)\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \lesssim T^{\frac{1}{2}}\|v_1 - v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}(A + B),$$

onde

$$\begin{aligned}
A =& \|v_1\|^4_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|v_1\|^2_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\|v_2\|^2_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|v_1\|^3_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\|v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|v_2\|^3_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\\
&+ \|v_2\|^4_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
B =& \|v_1\|^2_{L_x^4 L_T^\infty}(\|v_1\|^2_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\|v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|v_2\|^2_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}) + \|v_2\|^2_{L_x^4 L_T^\infty}\|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\|v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\\
&+ \|v_2\|^2_{L_x^4 L_T^\infty}\|v_2\|^2_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

Dem. Pela desigualdade de Minkowski segue que,

$$
\begin{aligned}
&\|E_1(v_1)-E_1(v_2)\|_{H^{\frac{1}{2}}}\\
&\lesssim \int_0^T \|U(t-\tau)(|v_1|^4(v_1-v_2)+|v_1|^2\bar{v}_1v_2(v_1v_2)+|v_1|^2v_2^2(\bar{v}_1-\bar{v}_2)+|v_2|^2v_2\bar{v}_1(v_1-v_2)\\
&\qquad +|v_2|^2v_2^2(\bar{v}_1-\bar{v}_2))\|_{L^2_x}d\tau\\
&\quad +\|\int_0^t U(t-\tau)D_x^{\frac{1}{2}}(|v_1|^4(v_1-v_2)+|v_1|^2\bar{v}_1v_2(v_1v_2)+|v_1|^2v_2^2(\bar{v}_1-\bar{v}_2)+|v_2|^2v_2\bar{v}_1(v_1-v_2)\\
&\qquad +|v_2|^2v_2^2(\bar{v}_1-\bar{v}_2))d\tau\|_{L^2_x}=\mathrm{I}+\mathrm{II}.
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

Observe que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}\lesssim{}& \int_0^T \||v_1|^4(v_1-v_2)\|_{L^2_x}d\tau+\int_0^T \||v_1|^2\bar{v}_1v_2(v_1-v_2)\|_{L^2_x}d\tau+\int_0^T \||v_1|^2v_2^2(\bar{v}_1-\bar{v_2})\|_{L^2_x}d\tau\\
&+\int_0^T \||v_2|^2v_2\bar{v}_1(v_1-v_2)\|_{L^2_x}d\tau+\int_0^T \||v_2|^2v_2^2(\bar{v}_1-\bar{v_2})\|_{L^2_x}d\tau.
\end{aligned}
$$

Usando a desigualdade de Hölder e a imersão de Sobolev, segue que:

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \||v_1|^4(v_1-v_2)\|_{L^2_x}d\tau &\leqslant \int_0^T \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty}|v_1|^{16}dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|v_1-v_2|^4\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}d\tau\\
&=\int_0^T \left(\int_{-\infty}^{\infty}|v_1|^{16}dx\right)^{\frac{1}{4}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|v_1-v_2|^4\right)^{\frac{1}{4}}d\tau\\
&\leqslant T\|v_1\|^4_{L^\infty_T L^{16}_x}\|v_1-v_2\|_{L^\infty_T L^4_x}\\
&\leqslant T\|v_1\|^4_{L^\infty_T H^{\frac{7}{16}}}\|v_1-v_2\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\\
&\leqslant T\|v_1\|^4_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|v_1-v_2\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}},
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \||v_1|^2\bar{v}_1v_2(v_1-v_2)\|_{L^2_x}d\tau &\leqslant \int_0^T \left(\int_{-\infty}^{\infty}|v_1|^{12}|v_2|^4dx\right)^{\frac{1}{4}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|v_1-v_2|^4\right)^{\frac{1}{4}}d\tau\\
&\leqslant \int_0^T \|v_1-v_2\|_{L^\infty_T L^4_x}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|v_1|^{24}dx\right)^{\frac{1}{8}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|v_2|^8dx\right)^{\frac{1}{8}}d\tau\\
&\leqslant T\|v_1-v_2\|_{L^\infty_T L^4_x}\|v_1\|^3_{L^\infty_T L^{24}_x}\|v_2\|_{L^\infty_T L^8_x}\\
&\leqslant T\|v_1-v_2\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|v_1\|^3_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|v_2\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}},
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

$$\begin{aligned}\int_0^T \||v_1|^2 v_2^2(\bar{v}_1-\bar{v_2})\|_{L_x^2}d\tau &\leqslant \int_0^T\left(\int_{-\infty}^{\infty}|v_1|^8|v_2|^8dx\right)^{\frac14}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|v_1-v_2|^4\right)^{\frac14}d\tau\\ &\leqslant \int_0^T\left(\int_{-\infty}^{\infty}|v_1|^{16}dx\right)^{\frac18}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|v_2|^{16}dx\right)^{\frac18}d\tau\|v_1-v_2\|_{L_T^\infty L_x^4}\\ &\leqslant T\|v_1\|^2_{L_T^\infty L_x^{16}}\|v_2\|^2_{L_T^\infty L_x^{16}}\|v_1-v_2\|_{L_T^\infty L_x^4}\\ &\leqslant T\|v_1\|^2_{L_T^\infty H^{\frac12}}\|v_2\|^2_{L_T^\infty H^{\frac12}}\|v_1-v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac12}}. \end{aligned}\tag{3.22}$$

Analogamente,

$$\int_0^T \||v_2|^2 v_2\bar{v}_1(v_1-v_2)\|_{L_x^2}d\tau \leqslant T\|v_2\|^3_{L_T^\infty H^{\frac12}}\|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac12}}\|v_1-v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac12}},\tag{3.23}$$

e

$$\int_0^T \||v_2|^2 v_2^2(v_1-v_2)\|_{L_x^2}d\tau \leqslant T\|v_2\|^4_{L_T^\infty H^{\frac12}}\|v_1-v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac12}}.\tag{3.24}$$

Logo, de (3.20)—(3.24), segue que

$$\begin{aligned} I \leqslant T\|v_1-v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac12}}\Big(&\|v_1\|^4_{L_T^\infty H^{\frac12}}+\|v_1\|^2_{L_T^\infty H^{\frac12}}\|v_2\|^2_{L_T^\infty H^{\frac12}}+\|v_1\|^3_{L_T^\infty H^{\frac12}}\|v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac12}}\\ &+\|v_2\|^3_{L_T^\infty H^{\frac12}}\|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac12}}+\|v_2\|^4_{L_T^\infty H^{\frac12}}\Big).\end{aligned}\tag{3.25}$$

Consideramos agora II, segundo termo do lado direito de (3.19). Usando a estimativa (2.14), temos que

$$\begin{aligned} II &\lesssim \|D_x^{\frac12}\int_0^t U(t-\tau)(|v_1|^4(v_1-v_2))d\tau\|_{L_T^\infty L_x^2}+\|D_x^{\frac12}\int_0^t U(t-\tau)(|v_1|^2\bar{v}_1v_2(v_1-v_2))d\tau\|_{L_T^\infty L_x^2}\\ &+\|D_x^{\frac12}\int_0^t U(t-\tau)(|v_1|^2v_2^2(\bar{v}_1-\bar{v_2}))d\tau\|_{L_T^\infty L_x^2}+\|D_x^{\frac12}\int_0^t U(t-\tau)(|v_2|^2v_2\bar{v}_1(v_1-v_2))d\tau\|_{L_T^\infty L_x^2}\\ &+\|D_x^{\frac12}\int_0^t U(t-\tau)(|v_2|^2v_2^2(\bar{v}_1-\bar{v_2}))d\tau\|_{L_T^\infty L_x^2}\\ &\lesssim \||v_1|^4(v_1-v_2)\|_{L_x^1L_T^2}+\||v_1|^2\bar{v}_1v_2(v_1-v_2)\|_{L_x^1L_T^2}+\||v_1|^2v_2^2(\bar{v}_1-\bar{v_2})\|_{L_x^1L_T^2}\\ &+\||v_2|^2v_2\bar{v}_1(v_1-v_2)\|_{L_x^1L_T^2}+\||v_2|^2v_2^2(\bar{v}_1-\bar{v_2})\|_{L_x^1L_T^2}.\end{aligned}$$

Usando desigualdade de Hölder e imersão de Sobolev, segue que:

$$
\begin{aligned}
\||v_1|^4(v_1-v_2)\|_{L^1_xL^2_T} &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\|v_1\|^2_{L^\infty_T}\left(\int_0^T |v_1|^4|v_1-v_2|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} dx\\
&\lesssim \left(\int_{-\infty}^{\infty}\|v_1\|^4_{L^\infty_T}dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^T |v_1|^4|v_1-v_2|^2 d\tau dx\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\lesssim \|v_1\|^2_{L^4_xL^\infty_T}\left(\int_0^T\left(\int_{-\infty}^{\infty}|v_1|^8dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|v_1-v_2|^4dx\right)^{\frac{1}{2}}d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\lesssim T^{\frac{1}{2}}\|v_1\|^2_{L^4_xL^\infty_T}\|v_1\|^2_{L^\infty_TL^8_x}\|v_1-v_2\|_{L^\infty_TL^4_x}\\
&\lesssim T^{\frac{1}{2}}\|v_1\|^2_{L^4_xL^\infty_T}\|v_1\|^2_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}\|v_1-v_2\|_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}, \qquad (3.26)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\||v_1|^2\bar{v}_1v_2(v_1-v_2)\|_{L^1_xL^2_T} &\lesssim \int_{-\infty}^{\infty}\|v_1\|^2_{L^\infty_t}\left(\int_0^T |v_1|^2|v_2|^2|v_1-v_2|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} dx\\
&\lesssim \left(\int_{-\infty}^{\infty}\|v_1\|^4_{L^\infty_T}dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}|v_1|^2|v_2|^2|v_1-v_2|^2 dx d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\lesssim \|v_1\|^2_{L^4_xL^\infty_T}\left(\int_0^T\left(\int_{-\infty}^{\infty}|v_1|^4|v_2|^4dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|v_1-v_2|^4dx\right)^{\frac{1}{2}}d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\lesssim \|v_1\|^2_{L^4_xL^\infty_T}\|v_1-v_2\|_{L^\infty_TL^4_x}\left(\int_0^T\left(\int_{-\infty}^{\infty}|v_1|^8dx\right)^{\frac{1}{4}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|v_2|^8dx\right)^{\frac{1}{4}}d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\lesssim T^{\frac{1}{2}}\|v_1\|^2_{L^4_xL^\infty_T}\|v_1-v_2\|_{L^\infty_TL^4_x}\|v_1\|_{L^\infty_TL^8_x}\|v_2\|_{L^\infty_TL^8_x}\\
&\lesssim T^{\frac{1}{2}}\|v_1\|^2_{L^4_xL^\infty_T}\|v_1\|_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}\|v_2\|_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}\|v_1-v_2\|_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}. \qquad (3.27)
\end{aligned}
$$

Procedendo de modo análogo à obtenção de (3.26) e (3.27), chegamos que:

$$
\||v_1|^2v_2^2(\bar{v}_1-\bar{v}_2)\|_{L^1_xL^2_T} \lesssim T^{\frac{1}{2}}\|v_1\|^2_{L^4_xL^\infty_T}\|v_2\|^2_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}\|v_1-v_2\|_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}, \qquad (3.28)
$$

$$
\||v_2|^2v_2\bar{v}_1(v_1-v_2)\|_{L^1_xL^2_T} \lesssim T^{\frac{1}{2}}\|v_2\|^2_{L^4_xL^\infty_T}\|v_1\|_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}\|v_2\|_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}\|v_1-v_2\|_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}. \qquad (3.29)
$$

$$
\||v_2|^2v_2^2(v_1-v_2)\|_{L^1_xL^2_T} \lesssim T^{\frac{1}{2}}\|v_2\|^2_{L^4_xL^\infty_T}\|v_2\|^2_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}\|v_1-v_2\|_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}. \qquad (3.30)
$$

Logo, por (3.26) $-$ (3.30), obtemos:

$$\begin{aligned}\mathrm{II} \lesssim & T^{\frac{1}{2}}\|v_1-v_2\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\Big(\|v_1\|^2_{L^4_x L^\infty_T}(\|v_1\|^2_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}+\|v_1\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|v_2\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}+\|v_2\|^2_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}})+\\ & +\|v_2\|^2_{L^4_x L^\infty_T}(\|v_1\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|v_2\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}+\|v_2\|^2_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}})\Big). \qquad (3.31)\end{aligned}$$

Portanto de (3.19), (3.25) e (3.31), segue o resultado. ■

Consideramos agora $F_2(v_1)-F_2(v_2)$, observe que

$$\begin{aligned}F_2(v_1)-F_2(v_2) &= e^{i\theta(v_1)}f_1(e^{-i\theta(v_1)}v_1)-e^{i\theta(v_2)}f_1(e^{-i\theta(v_2)}v_2)\\ &= e^{i(\theta(v_1)-\theta(v_2))}e^{i\theta(v_2)}f_1(e^{-i\theta(v_1)}v_1)-e^{i(\theta(v_2)-\theta(v_1))}e^{i\theta(v_1)}f_1(e^{-i\theta(v_2)}v_2)\\ &= \left(\int_{-\infty}^{x}(e^{i(\theta(v_1)-\theta(v_2))})'dy\right)e^{i\theta(v_2)}f_1(e^{-i\theta(v_1)}v_1)\\ &\quad -\left(\int_{-\infty}^{x}(e^{i(\theta(v_2)-\theta(v_1))})'dy\right)e^{i\theta(v_1)}f_1(e^{-i\theta(v_2)}v_2)\\ &= \left(\int_{-\infty}^{x}i(\theta'(v_1)-\theta'(v_2))e^{i(\theta(v_1)-\theta(v_2))}dy\right)e^{i\theta(v_2)}f_1(e^{-i\theta(v_1)}v_1)\\ &\quad -\left(\int_{-\infty}^{x}i(\theta'(v_2)-\theta'(v_1))e^{i(\theta(v_2)-\theta(v_1))}dy\right)e^{i\theta(v_1)}f_1(e^{-i\theta(v_2)}v_2),\end{aligned}$$

onde $\theta'(v_j)=-\frac{\lambda}{2}|v_j|^2$, $j=1,2$.

Lema 3.2.9. *Seja* $E_2(v)=\displaystyle\int_0^t U(t-\tau)F_2(v)(\tau)d\tau$. *Então*

$$\begin{aligned}&\|E_2(v_1)-E_2(v_2)\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\\ &\leqslant CT\|v_1-v_2\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\Big(\|v_1\|^4_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}+\|v_2\|^4_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}+\|v_1\|^3_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|v_2\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\\ &+\|v_2\|^3_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|v_1\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}+\|v_1\|^2_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}+\|v_2\|^2_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}+\|v_1\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|v_2\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\Big).\end{aligned}$$

Dem. Pela desigualdade de Minkowski segue que,

$$\begin{aligned}&\|E_2(v_1)-E_2(v_2)\|_{H^{\frac{1}{2}}}\\ &\leqslant \int_0^T\|(F_2(v_1)-F_2(v_2)\|_{L^2_x}d\tau+\|\int_0^t U(t-\tau)D_x^{\frac{1}{2}}(F_2(v_1)-F_2(v_2))d\tau\|_{L^2_x}=\mathrm{I}+\mathrm{II}. \qquad (3.32)\end{aligned}$$

Usando as desigualdades de Minkowski e Hölder e a imersão de Sobolev, temos

$$
\begin{aligned}
I &\leqslant \int_0^T \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{x} |i(\theta'(v_1) - \theta'(v_2)) e^{i(\theta(v_1)-\theta(v_2))}| dy \right)^2 |e^{i\theta(v_2)} f_1(e^{-i\theta(v_1)} v_1)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} d\tau \\
&\quad + \int_0^T \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{x} |i(\theta'(v_2) - \theta'(v_1)) e^{i(\theta(v_2)-\theta(v_1))}| dy \right)^2 |e^{i\theta(v_1)} f_1(e^{-i\theta(v_2)} v_2)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} d\tau \\
&\leqslant \int_0^T \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (|v_1 - v_2||v_1| + |v_2||v_1 - v_2|) dy \right)^2 |v_1|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} d\tau \\
&\quad + \int_0^T \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (|v_1 - v_2||v_2| + |v_1||v_1 - v_2|) dy \right)^2 |v_2|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} d\tau \\
&\leqslant \int_0^T \left(\int_{-\infty}^{\infty} |v_1 - v_2||v_1| dy + \int_{-\infty}^{\infty} |v_2||v_1 - v_2| dy \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |v_1|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} d\tau \\
&\quad + \int_0^T \left(\int_{-\infty}^{\infty} |v_1 - v_2||v_2| dy + \int_{-\infty}^{\infty} |v_1||v_1 - v_2| dy \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |v_2|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} d\tau \\
&\leqslant T \|v_1 - v_2\|_{L^\infty_T L^2_x} (\|v_1\|_{L^\infty_T L^2_x} + \|v_2\|_{L^\infty_T L^2_x})^2 \\
&\leqslant T \|v_1 - v_2\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} (\|v_1\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + \|v_2\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}})^2.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
I \leqslant T \|v_1 - v_2\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} (\|v_1\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + \|v_2\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}})^2. \tag{3.33}
$$

Observe agora que

$$
\begin{aligned}
II &\leqslant \| \int_0^t U(t-\tau) D_x^{\frac{1}{2}} \left(\left(\int_{-\infty}^{x} i(\theta'(v_1) - \theta'(v_2)) e^{i(\theta(v_1)-\theta(v_2))} dy \right) e^{i\theta(v_2)} f_1(e^{-i\theta(v_1)} v_1) \right) d\tau \|_{L^2_x} \\
&\quad + \| \int_0^t U(t-\tau) D_x^{\frac{1}{2}} \left(\left(\int_{-\infty}^{x} i(\theta'(v_2) - \theta'(v_1)) e^{i(\theta(v_2)-\theta(v_1))} dy \right) e^{i\theta(v_1)} f_1(e^{-i\theta(v_2)} v_2) \right) d\tau \|_{L^2_x} \\
&= II_1 + II_2.
\end{aligned}
$$

Usando as desigualdede de Minkowski, de Hölder e o Lema 1.4.4 (com $p_1 = q_1 = 8$ e $p_2 = q_2 = 4$) temos

$$
\begin{aligned}
II_1 &\leqslant \int_0^T \| D_x^{\frac{1}{2}} \left(\left(\int_{-\infty}^{x} i(\theta'(v_1) - \theta'(v_2)) e^{i(\theta(v_1)-\theta(v_2))} dy \right) e^{i\theta(v_2)} f_1(e^{-i\theta(v_1)} v_1) \right) \|_{L^2_x} d\tau \\
&\leqslant T^{\frac{1}{2}} \| D_x^{\frac{1}{2}} \left(e^{i\theta(v_2)} \left(\int_{-\infty}^{x} i(\theta'(v_1) - \theta'(v_2)) e^{i(\theta(v_1)-\theta(v_2))} dy \right) f_1(e^{-i\theta(v_1)} v_1) \right) \|_{L^2_x L^2_T} \\
&\leqslant T^{\frac{1}{2}} \left[\|v_2\|^2_{L^8_x L^8_T} \| \left(\int_{-\infty}^{x} i(\theta'(v_1) - \theta'(v_2)) e^{i(\theta(v_1)-\theta(v_2))} dy \right) f_1(e^{-i\theta(v_1)} v_1) \|_{L^4_x L^4_T} \right. \\
&\quad \left. + \| J^{\frac{1}{2}} \left(\left(\int_{-\infty}^{x} i(\theta'(v_1) - \theta'(v_2)) e^{i(\theta(v_1)-\theta(v_2))} dy \right) f_1(e^{-i\theta(v_1)} v_1) \right) \|_{L^2_x L^2_T} \right].
\end{aligned}
$$

Assim, fazendo $g \equiv \int_{-\infty}^{x} i(\theta'(v_1) - \theta'(v_2))e^{i(\theta(v_1)-\theta(v_2))}dy$ e $h \equiv f_1(e^{-i\theta(v_1)}v_1)$, segue que

$$II_1 \leqslant T\|v_2\|^2_{L_T^\infty L_x^8}\|gh\|_{L_T^\infty L_x^4} + T^{\frac{1}{2}}(\|gh\|_{L_T^2 L_x^2} + \|D_x^{\frac{1}{2}}(gh)\|_{L_T^2 L_x^2}).$$

Usando a desigualdade de Hölder e a imersão de Sobolev temos que

$$\begin{aligned}
\|gh\|_{L_T^\infty L_x^4} &\leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{x} |i(\theta'(v_1) - \theta'(v_2))e^{i(\theta(v_1)-\theta(v_2))}|dy\right)^4 |f_1(e^{-i\theta(v_1)}v_1)|^4 dx\right)^{\frac{1}{4}} \\
&\leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{x} ||v_1|^2 - |v_2|^2|dy\right)^4 |v_1|^4 dx\right)^{\frac{1}{4}} \\
&\leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} |v_1 - v_2||v_1|dx + \int_{-\infty}^{\infty} |v_2||v_1 - v_2|dx\right)\|v_1\|_{L_T^\infty L_x^4} \\
&\leqslant (\|v_1 - v_2\|_{L_T^\infty L_x^2}\|v_1\|_{L_T^\infty L_x^2} + \|v_1 - v_2\|_{L_T^\infty L_x^2}\|v_2\|_{L_T^\infty L_x^2})\|v_1\|_{L_T^\infty L_x^4} \\
&\leqslant \|v_1 - v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}(\|v_1\|^2_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\|v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}). \qquad (3.34)
\end{aligned}$$

De moda análogo ao item anterior temos

$$\begin{aligned}
\|gh\|_{L_T^2 L_x^2} &\leqslant T^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |v_1 - v_2||v_1|dx + \int_{-\infty}^{\infty} |v_2||v_1 - v_2|dx\right)\|v_1\|_{L_T^\infty L_x^2} \\
&\leqslant T^{\frac{1}{2}}(\|v_1 - v_2\|_{L_T^\infty L_x^2}\|v_1\|_{L_T^\infty L_x^2} + \|v_1 - v_2\|_{L_T^\infty L_x^2}\|v_2\|_{L_T^\infty L_x^2})\|v_1\|_{L_T^\infty L_x^2} \\
&\leqslant T^{\frac{1}{2}}\|v_1 - v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}(\|v_1\|^2_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\|v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}). \qquad (3.35)
\end{aligned}$$

Usando agora o Lema 1.4.2 (com $p_1 = p_2 = 4$, $p_3 = \infty$ e $p_4 = 2$), o Lema 1.4.1 (com $p = 2$, $h \equiv 1$ e $\alpha = \frac{1}{2}$), o Lema 1.4.4 (com $p_1 = q_1 = 8$ e $p_2 = q_2 = 4$) e a imersão de Sobolev, temos

$$\begin{aligned}
&\|D_x^{\frac{1}{2}}(gh)\|_{L_x^2 L_T^2} = \left\|\|D_x^{\frac{1}{2}}(gh)\|_{L_x^2}\right\|_{L_T^2} \leqslant \left\|\|D_x^{\frac{1}{2}}(g)\|_{L_x^4}\|h\|_{L_x^4} + \|g\|_{L_x^\infty}\|D_x^{\frac{1}{2}}(h)\|_{L_x^2}\right\|_{L_T^2} \\
&\leqslant T^{\frac{1}{2}}\|D_x^{\frac{1}{2}}(g)\|_{L_T^\infty L_x^4}\|h\|_{L_T^\infty L_x^4} + \|g\|_{L_T^\infty L_x^\infty}\|D_x^{\frac{1}{2}}(h)\cdot 1\|_{L_T^2 L_x^2} \\
&= T^{\frac{1}{2}}\|D_x^{\frac{1}{2}}(g)\|_{L_T^\infty L_x^4}\|f_1(e^{-i\theta(v_1)}v_1)\|_{L_t^\infty L_x^4} + \|g\|_{L_T^\infty L_x^\infty}\|D_x^{\frac{1}{2}}(f_1(e^{-i\theta(v_1)}v_1))\cdot 1\|_{L_T^2 L_x^2} \\
&\leqslant T^{\frac{1}{2}}\|g\|_{L_T^\infty H^1}\|v_1\|_{L_T^\infty L_x^4} \\
&\quad + \|g\|_{L_T^\infty H^1}\left\|\|f_1'(e^{-i\theta(v_1)}v_1)\|_{L_x^\infty}\|D_x^{\frac{1}{2}}(e^{-i\theta(v_1)}v_1)(M(1))^{\frac{1}{rp}}\|_{L_x^2}\right\|_{L_T^2} \\
&\lesssim T^{\frac{1}{2}}\||v_1|^2 - |v_2|^2\|_{L_T^\infty L_x^2}\|v_1\|_{L_T^\infty L_x^4} + \||v_1|^2 - |v_2|^2\|_{L_T^\infty L_x^2}\|D_x^{\frac{1}{2}}(e^{-i\theta(v_1)}v_1)\|_{L_x^2 L_T^2},
\end{aligned}$$

e portanto,

$$\|D_x^{\frac12}(gh)\|_{L_x^2L_T^2} \lesssim T^{\frac12}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|v_1-v_2|^2|v_1|^2dx\right)^{\frac12}\|v_1\|_{L_T^\infty L_x^4} + T^{\frac12}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|v_1-v_2|^2|v_2|^2dx\right)^{\frac12}\|v_1\|_{L_T^\infty L_x^4}$$
$$+\left(\left(\int_{-\infty}^{\infty}|v_1-v_2|^2|v_1|^2dx\right)^{\frac12}+\left(\int_{-\infty}^{\infty}|v_1-v_2|^2|v_2|^2dx\right)^{\frac12}\right)$$
$$\cdot\left(\|v_1\|^2_{L_x^8L_T^8}\|v_1\|_{L_x^4L_T^4}+\|J^{\frac12}v_1\|_{L_x^2L_T^2}\right)$$
$$\lesssim T^{\frac12}\left(\|v_1-v_2\|_{L_T^\infty L_x^4}\|v_1\|^2_{L_T^\infty L_x^4}+\|v_1-v_2\|_{L_T^\infty L_x^4}\|v_1\|_{L_T^\infty L_x^4}\|v_2\|_{L_T^\infty L_x^4}\right)$$
$$+T^{\frac12}\left(\|v_1-v_2\|_{L_T^\infty L_x^4}\|v_1\|_{L_T^\infty L_x^4}+\|v_1-v_2\|_{L_T^\infty L_x^4}\|v_2\|_{L_T^\infty L_x^4}\right)$$
$$\cdot\left(\|v_1\|^2_{L_T^\infty L_x^8}\|v_1\|_{L_T^\infty L_x^4}+\|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac12}}\right)$$
$$\lesssim T^{\frac12}\|v_1-v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac12}}\left(\|v_1\|^2_{L_T^\infty H^{\frac12}}+\|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac12}}\|v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac12}}+\|v_1\|^4_{L_T^\infty H^{\frac12}}\right.$$
$$\left.+\|v_1\|^3_{L_T^\infty H^{\frac12}}\|v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac12}}\right). \tag{3.36}$$

Logo, por (3.34), (3.35) e (3.36), temos que

$$II_1 \leqslant CT\|v_1-v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac12}}\left(\|v_1\|^2_{L_T^\infty H^{\frac12}}+\|v1\|_{L_T^\infty H^{\frac12}}\|v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac12}}+\|v_1\|^4_{L_T^\infty H^{\frac12}}+\|v_1\|^3_{L_T^\infty H^{\frac12}}\|v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac12}}\right)$$
$$+CT\|v_1-v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac12}}\|v_2\|^2_{L_T^\infty H^{\frac12}}. \tag{3.37}$$

Por um cálculo semelhante, obtemos

$$II_2 \leqslant CT\|v_1-v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac12}}\left(\|v_2\|^2_{L_T^\infty H^{\frac12}}+\|v1\|_{L_T^\infty H^{\frac12}}\|v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac12}}+\|v_2\|^4_{L_T^\infty H^{\frac12}}+\|v_2\|^3_{L_T^\infty H^{\frac12}}\|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac12}}\right)$$
$$+CT\|v_1-v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac12}}\|v_1\|^2_{L_T^\infty H^{\frac12}}. \tag{3.38}$$

Portanto por (3.32), (3.33), (3.37) e (3.38), temos que

$$\|E_2(v_1)-E_2(v_2)\|_{L_T^\infty H^{\frac12}} \leqslant CT\|v_1-v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac12}}\left(\|v_1\|^4_{L_T^\infty H^{\frac12}}+\|v_2\|^4_{L_T^\infty H^{\frac12}}+\|v_1\|^3_{L_T^\infty H^{\frac12}}\|v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac12}}\right.$$
$$\left.+\|v_2\|^3_{L_T^\infty H^{\frac12}}\|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac12}}+\|v_1\|^2_{L_T^\infty H^{\frac12}}+\|v_2\|^2_{L_T^\infty H^{\frac12}}+\|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac12}}\|v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac12}}\right). \quad \blacksquare$$

Por um cálculo semelhante ao que fizemos para $F_2(v_1)-F_2(v_2)$, podemos escrever

$$F_3(v_1)-F_3(v_2) = e^{i\theta(v_1)}f_2(e^{-i\theta(v_1)}v_1)-e^{i\theta(v_2)}f_2(e^{-i\theta(v_2)}v_2)$$
$$= e^{i(\theta(v_1)-\theta(v_2))}e^{i\theta(v_2)}f_2(e^{-i\theta(v_1)}v_1)-e^{i(\theta(v_2)-\theta(v_1))}e^{i\theta(v_1)}f_2(e^{-i\theta(v_2)}v_2)$$
$$= \left(\int_{-\infty}^{x}i(\theta'(v_1)-\theta'(v_2))e^{i(\theta(v_1)-\theta(v_2))}dy\right)e^{i\theta(v_2)}f_2(e^{-i\theta(v_1)}v_1)$$
$$-\left(\int_{-\infty}^{x}i(\theta'(v_2)-\theta'(v_1))e^{i(\theta(v_2)-\theta(v_1))}dy\right)e^{i\theta(v_1)}f_2(e^{-i\theta(v_2)}v_2)$$

e demonstrar o seguinte lema:

Lema 3.2.10. *Seja* $E_3(v) = \int_0^t U(t-\tau)F_3(v)(\tau)d\tau$. *Então*

$$\|E_3(v_1) - E_3(v_2)\|_{L_T^\infty H^{\frac12}}$$
$$\lesssim T\|v_1 - v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac12}} \Big(\|v_1\|^{p+3}_{L_T^\infty H^{\frac12}} + \|v_2\|^{p+3}_{L_T^\infty H^{\frac12}} + \|v_1\|^{p+2}_{L_T^\infty H^{\frac12}} \|v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac12}}$$
$$+ \|v_2\|^{p+2}_{L_T^\infty H^{\frac12}} \|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac12}} + \|v_1\|^{p+1}_{L_T^\infty H^{\frac12}} + \|v_2\|^{p+1}_{L_T^\infty H^{\frac12}} + \|v_1\|^{p}_{L_T^\infty H^{\frac12}} \|v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac12}} + \|v_2\|^{p}_{L_T^\infty H^{\frac12}} \|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac12}} \Big).$$

Dem. Pela desigualdade de Minkowski segue que,

$$\|E_3(v_1) - E_3(v_2)\|_{H^{\frac12}} = \| \int_0^t U(t-\tau)(F_3(v_1) - F_3(v_2))d\tau\|_{L_T^\infty H^{\frac12}}$$
$$\leqslant \int_0^T \|(F_3(v_1) - F_3(v_2)\|_{L_T^\infty L_x^2} d\tau + \| \int_0^t U(t-\tau)D_x^{\frac12}(F_3(v_1) - F_3(v_2))d\tau\|_{L_x^2} = \mathrm{I} + \mathrm{II}. \tag{3.39}$$

Fazendo um cálculo semelhante a demonstração da primeira parte do Lema 3.2.9, segue que

$$\mathrm{I} \lesssim T\|v_1 - v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac12}} (\|v_1\|^{p+1}_{L_T^\infty H^{\frac12}} + \|v_2\|^{p+1}_{L_T^\infty H^{\frac12}} + \|v_1\|^{p}_{L_T^\infty H^{\frac12}} \|v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac12}} + \|v_2\|^{p}_{L_T^\infty H^{\frac12}} \|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac12}}) \tag{3.40}$$

Observe que

$$\mathrm{II} \leqslant \int_0^T \|D_x^{\frac12} \left(\left(\int_{-\infty}^x i(\theta'(v_1) - \theta'(v_2)) e^{i(\theta(v_1) - \theta(v_2))} dy \right) e^{i\theta(v_2)} f_2(e^{-i\theta(v_1)} v_1) \right) \|_{L_x^2} d\tau$$
$$+ \int_0^T \|D_x^{\frac12} \left(\left(\int_{-\infty}^x i(\theta'(v_2) - \theta'(v_1)) e^{i(\theta(v_2) - \theta(v_1))} dy \right) e^{i\theta(v_1)} f_2(e^{-i\theta(v_2)} v_2) \right) \|_{L_x^2} d\tau$$
$$= \mathrm{II}_1 + \mathrm{II}_2.$$

Usando desigualdade de Hölder e o Lema 1.4.4 (com $p_1 = q_1 = 8$ e $p_2 = q_2 = 4$) temos que

$$\mathrm{II}_1 \leqslant T^{\frac12} \|D_x^{\frac12} \left(e^{i\theta(v_2)} \left(\int_{-\infty}^x i(\theta'(v_1) - \theta'(v_2)) e^{i(\theta(v_1) - \theta(v_2))} dy \right) f_2(e^{-i\theta(v_1)} v_1) \right) \|_{L_x^2 L_T^2}$$
$$\leqslant T^{\frac12} \|v_2\|^2_{L_x^8 L_T^8} \| \left(\int_{-\infty}^x i(\theta'(v_1) - \theta'(v_2)) e^{i(\theta(v_1) - \theta(v_2))} dy \right) f_2(e^{-i\theta(v_1)} v_1)\|_{L_x^4 L_T^4}$$
$$+ T^{\frac12} \|J^{\frac12} \left(\left(\int_{-\infty}^x i(\theta'(v_1) - \theta'(v_2)) e^{i(\theta(v_1) - \theta(v_2))} dy \right) f_2(e^{-i\theta(v_1)} v_1) \right) \|_{L_x^2 L_T^2}.$$

Fazendo $g \equiv \int_{-\infty}^x i(\theta'(v_1) - \theta'(v_2)) e^{i(\theta(v_1) - \theta(v_2))} dy$ e $h \equiv f_1(e^{-i\theta(v_1)} v_1)$, segue que

$$\mathrm{II}_1 \leqslant T\|v_2\|^2_{L_T^\infty L_x^8} \|gh\|_{L_T^\infty L_x^4} + T^{\frac12} (\|gh\|_{L_T^2 L_x^2} + \|D_x^{\frac12}(gh)\|_{L_T^2 L_x^2}).$$

Usando desigualdade de Hölder e imersão de Sobolev, segue que:

$$
\begin{aligned}
\|gh\|_{L^\infty_T L^4_x} &\leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{x}|i(\theta'(v_1)-\theta'(v_2))e^{i(\theta(v_1)-\theta(v_2))}|dy\right)^4 |f_2(e^{-i\theta(v_1)}v_1)|^4 dx\right)^{\frac{1}{4}}\\
&\leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{x}||v_1|^2-|v_2|^2|dy\right)^4 |v_1|^{4p} dx\right)^{\frac{1}{4}}\\
&\leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty}|v_1-v_2||v_1|dx+\int_{-\infty}^{\infty}|v_2||v_1-v_2|dx\right)\|v_1\|^p_{L^\infty_T L^{4p}_x}\\
&\leqslant (\|v_1-v_2\|_{L^\infty_T L^2_x}\|v_1\|_{L^\infty_T L^2_x}+\|v_1-v_2\|_{L^\infty_T L^2_x}\|v_2\|_{L^\infty_T L^2_x})\|v_1\|^p_{L^\infty_T L^{4p}_x}\\
&\leqslant \|v_1-v_2\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}(\|v_1\|^{p+1}_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}+\|v_1\|^p_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|v_2\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}).
\end{aligned}
\tag{3.41}
$$

De modo análogo ao item anterior temos

$$
\begin{aligned}
\|gh\|_{L^2_t L^2_x} &\leqslant T^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|v_1-v_2||v_1|dx+\int_{-\infty}^{\infty}|v_2||v_1-v_2|dx\right)\|v_1\|^p_{L^\infty_t L^{2p}_x}\\
&\leqslant T^{\frac{1}{2}}(\|v_1-v_2\|_{L^\infty_T L^2_x}\|v_1\|_{L^\infty_T L^2_x}+\|v_1-v_2\|_{L^\infty_T L^2_x}\|v_2\|_{L^\infty_T L^2_x})\|v_1\|^p_{L^\infty_T L^{2p}_x}\\
&\leqslant T^{\frac{1}{2}}\|v_1-v_2\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}(\|v_1\|^{p+1}_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}+\|v_1\|^p_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|v_2\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}).
\end{aligned}
\tag{3.42}
$$

Usando agora o Lema 1.4.2 (com $p_1=p_2=4$, $p_3=\infty$ e $p_4=2$), o Lema 1.4.1 (com $p=2$, $h\equiv 1$ e $\alpha=\frac{1}{2}$), o Lema 1.4.4 (com $p_1=q_1=8$ e $p_2=q_2=4$) e imersão de Sobolev, segue que

$$
\begin{aligned}
&\|D_x^{\frac{1}{2}}(gh)\|_{L^2_x L^2_T} \leqslant \left\|\|D_x^{\frac{1}{2}}(g)\|_{L^4_x}\|h\|_{L^4_x}+\|g\|_{L^\infty_x}\|D_x^{\frac{1}{2}}(h)\|_{L^2_x}\right\|_{L^2_T}\\
&\leqslant T^{\frac{1}{2}}\|D_x^{\frac{1}{2}}(g)\|_{L^\infty_T L^4_x}\|h\|_{L^\infty_T L^4_x}+\|g\|_{L^\infty_T L^\infty_x}\|D_x^{\frac{1}{2}}(h)\cdot 1\|_{L^2_T L^2_x}\\
&= T^{\frac{1}{2}}\|D_x^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{x}i(\theta'(v_1)-\theta'(v_2))e^{i(\theta(v_1)-\theta(v_2))}dy\right)\|_{L^\infty_T L^4_x}\|f_2(e^{-i\theta(v_1)}v_1)\|_{L^\infty_T L^4_x}\\
&\quad +\|\int_{-\infty}^{x}i(\theta'(v_1)-\theta'(v_2))e^{i(\theta(v_1)-\theta(v_2))}dy\|_{L^\infty_T L^\infty_x}\|D_x^{\frac{1}{2}}(f_2(e^{-i\theta(v_1)}v_1))\cdot 1\|_{L^2_T L^2_x}\\
&\leqslant T^{\frac{1}{2}}\|\int_{-\infty}^{x}i(\theta'(v_1)-\theta'(v_2))e^{i(\theta(v_1)-\theta(v_2))}dy\|_{L^\infty_T H^1}\|v_1\|^p_{L^\infty_T L^{4p}_x}\\
&\quad +\|\int_{-\infty}^{x}i(\theta'(v_1)-\theta'(v_2))e^{i(\theta(v_1)-\theta(v_2))}dy\|_{L^\infty_T H^1}\\
&\cdot\left\|\|f_2'(e^{-i\theta(v_1)}v_1)\|_{L^\infty_x}\|D_x^{\frac{1}{2}}(e^{-i\theta(v_1)}v_1)(M(1))^{\frac{1}{rp}}\|_{L^2_x}\right\|_{L^2_T}\\
&\lesssim T^{\frac{1}{2}}\||v_1|^2-|v_2|^2\|_{L^\infty_T L^2_x}\|v_1\|^p_{L^\infty_T L^{4p}_x}+\||v_1|^2-|v_2|^2\|_{L^\infty_T L^2_x}\|v_1\|^{p-1}_{L^\infty_T L^{p-1}_x}\|D_x^{\frac{1}{2}}(e^{-i\theta(v_1)}v_1)\|_{L^2_x L^2_T}
\end{aligned}
$$

e então,

$$
\begin{aligned}
&\|D_x^{\frac{1}{2}}(gh)\|_{L_x^2 L_T^2} \\
&\lesssim T^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|v_1-v_2|^2|v_1|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\|v_1\|_{L_T^\infty L_x^{4p}}^p + T^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|v_1-v_2|^2|v_2|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\|v_1\|_{L_T^\infty L_x^{4p}}^p \\
&\quad+\left(\int_{-\infty}^{\infty}|v_1-v_2|^2|v_1|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\|v_1\|_{L_T^\infty L_x^{p-1}}^{p-1}(\|v_1\|_{L_x^8 L_T^8}^2\|v_1\|_{L_x^4 L_T^4}+\|J^{\frac{1}{2}}v_1\|_{L_x^2 L_T^2}) \\
&\quad+\left(\int_{-\infty}^{\infty}|v_1-v_2|^2|v_2|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\|v_1\|_{L_T^\infty L_x^{p-1}}^{p-1}(\|v_1\|_{L_x^8 L_T^8}^2\|v_1\|_{L_x^4 L_T^4}+\|J^{\frac{1}{2}}v_1\|_{L_x^2 L_T^2}) \\
&\lesssim T^{\frac{1}{2}}(\|v_1-v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}^{p+1}+\|v_1-v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}^{p}\|v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}) \\
&\quad+T^{\frac{1}{2}}(\|v_1-v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}^{p}+\|v_1-v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\|v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}})(\|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}^{3}+\|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}) \\
&\lesssim T^{\frac{1}{2}}\|v_1-v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\left(\|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}^{p+1}+\|v1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}^{p+2}\|v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}+\|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}^{p+3}+\|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}^{p}\|v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\right).
\end{aligned} \tag{3.43}
$$

Logo, por (3.41), (3.42) e (3.43), temos que

$$
II_1 \lesssim T\|v_1-v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\left(\|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}^{p+1}+\|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}^{p+2}\|v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}+\|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}^{p+3}+\|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}^{p}\|v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\right). \tag{3.44}
$$

Por um cálculo semelhante ao de cima, obtemos

$$
II_2 \lesssim T\|v_1-v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\left(\|v_2\|_{L_t^\infty H^{\frac{1}{2}}}^{p+1}+\|v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}^{p+2}\|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}+\|v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}^{p+3}+\|v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}^{p}\|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\right). \tag{3.45}
$$

Portanto por (3.39), (3.40), (3.44) e (3.45), temos que

$$
\begin{aligned}
&\|E_3(v_1)-E_3(v_2)\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \\
&\lesssim T\|v_1-v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\Big(\|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}^{p+3}+\|v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}^{p+3}+\|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}^{p+2}\|v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}+\|v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}^{p+2}\|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \\
&+\|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}^{p+1}+\|v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}^{p+1}+\|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}^{p}\|v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\|v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}^{p}\|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\Big). \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Seja $F_4(v) = \lambda v \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{x} e^{i\theta(v)}\bar{v}f_1(e^{-i\theta(v)}v)dy$. Consideremos a diferença

$$
\begin{aligned}
&F_4(v_1) - F_4(v_2)\\
&= \lambda v_1 \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{x} e^{i\theta(v_1)}\bar{v}_1 f_1(e^{-i\theta(v_1)}v_1)dy - \lambda v_2 \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{x} e^{i\theta(v_2)}\bar{v}_2 f_1(e^{-i\theta(v_2)}v_2)dy\\
&= \lambda v_1 \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{x} \bar{v}_1\left(e^{i\theta(v_1)}f_1(e^{-i\theta(v_1)}v_1) - e^{i\theta(v_2)}f_1(e^{-i\theta(v_2)}v_2)\right)dy\\
&\quad + \lambda v_1 \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{x} \bar{v}_1 e^{i\theta(v_2)} f_1(e^{-i\theta(v_2)}v_2)dy - \lambda v_2 \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{x} e^{i\theta(v_2)}\bar{v}_2 f_1(e^{-i\theta(v_2)}v_2)dy\\
&= A_1 + \lambda v_1 \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{x} (\bar{v}_1 - \bar{v}_2) e^{i\theta(v_2)} f_1(e^{-i\theta(v_2)}v_2)dy + \lambda v_1 \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{x} \bar{v}_2 e^{i\theta(v_2)} f_1(e^{-i\theta(v_2)}v_2)dy\\
&\quad - \lambda v_2 \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{x} e^{i\theta(v_2)}\bar{v}_2 f_1(e^{-i\theta(v_2)}v_2)dy\\
&= A_1 + A_2 + \lambda(v_1 - v_2)\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{x} \bar{v}_2 e^{i\theta(v_2)} f_1(e^{-i\theta(v_2)}v_2)dy\\
&= A_1 + A_2 + A_3,
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \lambda v_1 \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{x} \bar{v}_1\left(e^{i\theta(v_1)}f_1(e^{-i\theta(v_1)}v_1) - e^{i\theta(v_2)}f_1(e^{-i\theta(v_2)}v_2)\right)dy\\
&= \lambda v_1 \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{x}\left\{\left(\int_{-\infty}^{y} i(\theta'(v_1) - \theta'(v_2))e^{i(\theta(v_1)-\theta(v_2))}dz\right)e^{i\theta(v_2)}f_1(e^{-i\theta(v_1)}v_1)\right.\\
&\qquad \left. - \left(\int_{-\infty}^{y} i(\theta'(v_2) - \theta'(v_1))e^{i(\theta(v_2)-\theta(v_1))}dz\right)e^{i\theta(v_1)}f_1(e^{-i\theta(v_2)}v_2)\right\}dy,
\end{aligned}
$$

$$A_2 = \lambda v_1 \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{x} (\bar{v}_1 - \bar{v}_2)e^{i\theta(v_2)}f_1(e^{-i\theta(v_2)}v_2)dy,$$

$$A_3 = \lambda(v_1 - v_2)\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{x} \bar{v}_2 e^{i\theta(v_2)}f_1(e^{-i\theta(v_2)}v_2)dy.$$

Lema 3.2.11. *Seja* $E_4(v) = \int_0^t U(t-\tau)F_4(v)(\tau)d\tau$. *Então*

$$
\begin{aligned}
\|E_4(v_1) - E_4(v_2)\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \leqslant T\|v_1 - v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}&\Big(\|v_1\|^3_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|v_1\|^2_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\|v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\\
&+ \|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\|v_2\|^2_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\|v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|v_2\|^2_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\Big).
\end{aligned}
$$

Dem. Usando a definição da norma $H^{\frac{1}{2}}$, segue que

$$
\begin{aligned}
&\|E_4(v_1) - E_4(v_2)\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} \\
&= \|\int_0^t U(t-\tau)(F_4(v_1) - F_4(v_2))d\tau\|_{L^\infty_T L^2_x} + \|\int_0^t U(t-\tau)D_x^{\frac{1}{2}}(F_4(v_1) - F_4(v_2))d\tau\|_{L^\infty_T L^2_x} \\
&= \mathrm{I} + \mathrm{II}.
\end{aligned} \tag{3.46}
$$

Observe que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I} &\leqslant \int_0^T \|A_1\|_{L^\infty_T L^2_x} d\tau + \int_0^T \|A_2\|_{L^\infty_T L^2_x} d\tau + \int_0^T \|A_3\|_{L^\infty_T L^2_x} d\tau \\
&\leqslant T\left(\|A_1\|_{L^\infty_T L^2_x} + \|A_2\|_{L^\infty_T L^2_x} + \|A_3\|_{L^\infty_T L^2_x}\right).
\end{aligned}
$$

Usando desigualdade de Hölder, imersão de Sobolev, um cálculo semelhante ao da demonstração da primeira parte do Lema 3.2.9 e chamando

$$
g = \left(\int_{-\infty}^{y} i(\theta'(v_1) - \theta'(v_2))e^{i(\theta(v_1)-\theta(v_2))}dz\right) e^{i\theta(v_2)} f_1(e^{-i\theta(v_1)}v_1)
$$

e

$$
h = \left(\int_{-\infty}^{y} i(\theta'(v_2) - \theta'(v_1))e^{i(\theta(v_2)-\theta(v_1))}dz\right) e^{i\theta(v_1)} f_1(e^{-i\theta(v_2)}v_2),
$$

obtemos

$$
\begin{aligned}
&T\|A_1\|_{L^\infty_T L^2_x} d\tau = T\|\lambda v_1 \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{x}(g-h)dy\|_{L^\infty_T L^2_x} \\
&\leqslant T\|\lambda v_1 \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{x} g dy\|_{L^\infty_T L^2_x} + T\|\lambda v_1 \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{x} h dy\|_{L^\infty_T L^2_x} \\
&\lesssim T\|v_1\|_{L^\infty_T L^4_x}\|\int_{-\infty}^{x} g dy\|_{L^\infty_T H^1} + T\|v_1\|_{L^\infty_T L^4_x}\|\int_{-\infty}^{x} h dy\|_{L^\infty_T H^1} \\
&\lesssim T\|v_1\|_{L^\infty_T L^4_x}\|g\|_{L^\infty_T L^2_x} + T\|v_1\|_{L^\infty_T L^4_x}\|h\|_{L^\infty_T L^2_x} \\
&\lesssim T\|v_1\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|v_1 - v_2\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}(\|v_1\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + \|v_2\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}})^2 \\
&\lesssim T\|v_1 - v_2\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}(\|v_1\|^3_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + \|v_1\|^2_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|v_2\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + \|v_1\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|v_2\|^2_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}).
\end{aligned} \tag{3.47}
$$

Usando desigualdade de Hölder e imersão de Sobolev, segue que

$$
\begin{aligned}
T\|A_2\|_{L^\infty_T L^2_x} &\leqslant T\|\lambda v_1 \operatorname{Im}\int_{-\infty}^{x}(\bar{v}_1-\bar{v}_2)e^{i\theta(v_2)}f_1(e^{-i\theta(v_2)}v_2)dy\|_{L^\infty_T L^2_x}\\
&\lesssim T\|v_1\|_{L^\infty_T L^4_x}\|\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{x}(\bar{v}_1-\bar{v}_2)e^{i\theta(v_2)}f_1(e^{-i\theta(v_2)}v_2)dy\|_{L^\infty_T L^4_x}\\
&\lesssim T\|v_1\|_{L^\infty_T L^4_x}\|\int_{-\infty}^{x}(\bar{v}_1-\bar{v}_2)e^{i\theta(v_2)}f_1(e^{-i\theta(v_2)}v_2)dy\|_{L^\infty_T \dot{H}^1}\\
&\lesssim T\|v_1\|_{L^\infty_T L^4_x}\|(\bar{v}_1-\bar{v}_2)e^{i\theta(v_2)}f_1(e^{-i\theta(v_2)}v_2)dy\|_{L^\infty_T L^2_x}\\
&\lesssim \|v_1\|_{L^\infty_T L^4_x}\|\bar{v}_1-\bar{v}_2\|_{L^\infty_T L^4_x}\|e^{i\theta(v_2)}f_1(e^{-i\theta(v_2)}v_2)\|_{L^\infty_T L^4_x}\\
&\lesssim T\|v_1\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|v_1-v_2\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|v_2\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}},
\end{aligned}
\tag{3.48}
$$

$$
\begin{aligned}
T\|A_3\|_{L^\infty_T L^2_x} &\leqslant T\|\lambda(v_1-v_2)\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{x}\bar{v}_2 e^{i\theta(v_2)}f_1(e^{-i\theta(v_2)}v_2)dy\|_{L^\infty_T L^2_x}\\
&\lesssim T\|v_1-v_2\|_{L^\infty_T L^4_x}\|\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{x}\bar{v}_2 e^{i\theta(v_2)}f_1(e^{-i\theta(v_2)}v_2)dy\|_{L^\infty_T L^4_x}\\
&\lesssim T\|v_1-v_2\|_{L^\infty_T L^4_x}\|\bar{v}_2 e^{i\theta(v_2)}f_1(e^{-i\theta(v_2)}v_2)dy\|_{L^\infty_T L^2_x}\\
&\lesssim T\|v_1-v_2\|_{L^\infty_T L^4_x}\|v_2\|^2_{L^\infty_T L^4_x} \lesssim T\|v_1-v_2\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|v_2\|^2_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}
\tag{3.49}
$$

Logo, por (3.47),(3.48) e (3.49), segue que

$$
\begin{aligned}
I &\lesssim T\|v_1-v_2\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}(\|v_1\|^3_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}+\|v_1\|^2_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|v_2\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}+\|v_1\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|v_2\|^2_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\\
&\quad+\|v_2\|^2_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}).
\end{aligned}
\tag{3.50}
$$

Observe que

$$
\begin{aligned}
II \leqslant{}& \|\int_0^t U(t-\tau)D_x^{\frac{1}{2}}(A_1)d\tau\|_{L^\infty_T L^2_x}+\|\int_0^t U(t-\tau)D_x^{\frac{1}{2}}(A_2)d\tau\|_{L^\infty_T L^2_x}\\
&+\|\int_0^t U(t-\tau)D_x^{\frac{1}{2}}(A_3)d\tau\|_{L^\infty_T L^2_x}.
\end{aligned}
$$

Façamos a notação

$$f \equiv \lambda v_1$$

e

$$
\begin{aligned}
g \equiv \int_{-\infty}^{x}\Bigg\{&\left(\left(\int_{-\infty}^{y} i(\theta'(v_1)-\theta'(v_2))e^{i(\theta(v_1)-\theta(v_2))}dz\right)e^{i\theta(v_2)}f_1(e^{-i\theta(v_1)}v_1)\right.\\
&\left.-\left(\int_{-\infty}^{y} i(\theta'(v_2)-\theta'(v_1))e^{i(\theta(v_2)-\theta(v_1))}dz\right)e^{i\theta(v_1)}f_1(e^{-i\theta(v_2)}v_2)\right\}dy.
\end{aligned}
$$

Usando o Lema 1.4.2 (com $p_1 = 2$, $p_2 = \infty$, $p_3 = p_4 = 4$), desigualdade de Hölder, imersão de Sobolev e um cálculo semelhante a demonstração da primeira parte do Lema 3.2.9, segue que

$$\begin{aligned}
&\|\int_0^t U(t-\tau)D_x^{\frac{1}{2}}(A_1)d\tau\|_{L_T^\infty L_x^2} \leqslant T\|D_x^{\frac{1}{2}}(f\operatorname{Im}(g))\|_{L_T^\infty L_x^2} \\
&\leqslant T(\|D_x^{\frac{1}{2}}(f)\|_{L_T^\infty L_x^2}\|g\|_{L_T^\infty L_x^\infty} + \|f\|_{L_T^\infty L_x^4}\|D_x^{\frac{1}{2}}(g)\|_{L_T^\infty L_x^4}) \\
&\lesssim T\left(\|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\|g\|_{L_T^\infty \dot{H}^1} + \|v_1\|_{L_T^\infty L_x^4}\|g\|_{L_T^\infty \dot{H}^1}\right) \\
&\lesssim T\left\{\|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\|\left(\int_{-\infty}^y i(\theta'(v_1)-\theta'(v_2))e^{i(\theta(v_1)-\theta(v_2))}dz\right)e^{i\theta(v_2)}f_1(e^{-i\theta(v_1)}v_1)\right. \\
&\quad \left. -\left(\int_{-\infty}^y i(\theta'(v_2)-\theta'(v_1))e^{i(\theta(v_2)-\theta(v_1))}dz\right)e^{i\theta(v_1)}f_1(e^{-i\theta(v_2)}v_2)\|_{L_T^\infty L_x^2}\right\} \\
&\lesssim T\|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\|v_1-v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}(\|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}})^2.
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Usando o Lema 1.4.2 (com $p_1 = 2$, $p_2 = \infty$, $p_3 = p_4 = 4$) , desigualdade de Hölder e imersão de Sobolev, temos que

$$\begin{aligned}
&\|\int_0^t U(t-\tau)D_x^{\frac{1}{2}}(A_2)d\tau\|_{L_T^\infty L_x^2} \\
&\lesssim \int_0^t T\|D_x^{\frac{1}{2}}\left(\lambda v_1 \operatorname{Im}\int_{-\infty}^x(\bar{v}_1-\bar{v}_2)e^{i\theta(v_2)}f_1(e^{-i\theta(v_2)}v_2)dy\right)\|_{L_T^\infty L_x^2}d\tau \\
&\leqslant T\|D_x^{\frac{1}{2}}(\lambda v_1)\|_{L_T^\infty L_x^2}\|\operatorname{Im}\int_{-\infty}^x(\bar{v}_1-\bar{v}_2)e^{i\theta(v_2)}f_1(e^{-i\theta(v_2)}v_2)dy\|_{L_T^\infty L_x^\infty} \\
&\quad + T\|v_1\|_{L_T^\infty L_x^4}\|D_x^{\frac{1}{2}}\left(\operatorname{Im}\int_{-\infty}^x(\bar{v}_1-\bar{v}_2)e^{i\theta(v_2)}f_1(e^{-i\theta(v_2)}v_2)dy\right)\|_{L_T^\infty L_x^4} \\
&\lesssim T\|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\|\operatorname{Im}\int_{-\infty}^x(\bar{v}_1-\bar{v}_2)e^{i\theta(v_2)}f_1(e^{-i\theta(v_2)}v_2)dy\|_{L_T^\infty \dot{H}^1} \\
&\lesssim T\|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\|(\bar{v}_1-\bar{v}_2)e^{i\theta(v_2)}f_1(e^{-i\theta(v_2)}v_2)dy\|_{L_T^\infty L_x^2} \\
&\lesssim T\|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\|\bar{v}_1-\bar{v}_2\|_{L_T^\infty L_x^4}\|e^{i\theta(v_2)}f_1(e^{-i\theta(v_2)}v_2)dy\|_{L_T^\infty L_x^4} \\
&\lesssim T\|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\|v_1-v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\|v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Usando novamente o Lema 1.4.2 (com $p_1 = 2$, $p_2 = \infty$, $p_3 = p_4 = 4$), desigualdade de Hölder e imersão de Sobolev, e procedendo como no item anterior, chegamos que

$$\begin{aligned}
\|\int_0^t U(t-\tau)D_x^{\frac{1}{2}}(A_3)d\tau\|_{L_T^\infty L_x^2} &\lesssim T\|(v_1-v_2)\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\|v_2\|^2_{L_T^\infty L_x^4} \\
&\lesssim T\|(v_1-v_2)\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\|v_2\|^2_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Logo, por (3.51),(3.52) e (3.53), segue que

$$
\begin{aligned}
II &= \| \int_0^t U(t-\tau) D_x^{\frac{1}{2}} (F_4(v_1) - F_4(v_2)) \|_{L_T^\infty L_x^2} \\
&\lesssim T \|v_1 - v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \left(\|v_1\|^3_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|v_1\|^2_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \|v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \|v_2\|^2_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|v_2\|^2_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \right).
\end{aligned} \tag{3.54}
$$

Portanto pelas estimativas (3.46), (3.50) e (3.54) temos que

$$
\begin{aligned}
\|E_4(v_1) - E_4(v_2)\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \leqslant T \|v_1 - v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \Big(& \|v_1\|^3_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|v_1\|^2_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \|v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \\
& + \|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \|v_2\|^2_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \|v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|v_2\|^2_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \Big). \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Consideremos agora $F_5(v) = \lambda v \mathrm{Im} \int_{-\infty}^x e^{i\theta(v)} \bar{v} f_2(e^{-i\theta(v)} v) dy$. Um cálculo semelhante ao feito para diferença $F_4(v_1) - F_4(v_2)$, temos que

$$
F_5(v_1) - F_5(v_2) = \lambda v_1 \mathrm{Im}(B_1 - B_2 + B_3) + \lambda(v_1 - v_2) \mathrm{Im} B_4,
$$

onde

$$
B_1 = \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^y i(\theta'(v_1) - \theta'(v_2)) e^{i(\theta(v_1) - \theta(v_2))} dz \right) e^{i\theta(v_2)} f_2(e^{-i\theta(v_1)} v_1) dy,
$$

$$
B_2 = \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^y i(\theta'(v_2) - \theta'(v_1)) e^{i(\theta(v_2) - \theta(v_1))} dz \right) e^{i\theta(v_1)} f_2(e^{-i\theta(v_2)} v_2) dy,
$$

$$
B_3 = \int_{-\infty}^x (\bar{v}_1 - \bar{v}_2) e^{i\theta(v_2)} f_2(e^{-i\theta(v_2)} v_2) dy,
$$

$$
B_4 = \int_{-\infty}^x \bar{v}_2 e^{i\theta(v_2)} f_2(e^{-i\theta(v_2)} v_2) dy.
$$

Lema 3.2.12. *Seja* $E_5(v) = \int_0^T U(t-\tau) F_5(v)(\tau) d\tau$. *Então*

$$
\begin{aligned}
& \|E_5(v_1) - E_5(v_2)\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \\
& \leqslant T \|v_1 - v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \Big(\|v_1\|^{p+2}_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|v_1\|^{p+1}_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \|v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \\
& \quad + \|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \|v_2\|^{p+1}_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|v_1\|^2_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \|v_2\|^p_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \|v_2\|^p_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|v_2\|^{p+1}_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \Big).
\end{aligned}
$$

Dem. Usando a definição da norma $H^{\frac{1}{2}}$, segue que

$$\begin{aligned}
&\|E_5(\nu_1)-E_5(\nu_2)\|_{H^{\frac{1}{2}}}\\
&=\|\int_0^t U(t-\tau)(F_5(\nu_1)-F_5(\nu_2))d\tau\|_{L^2_x}+\|\int_0^t U(t-\tau)D_x^{\frac{1}{2}}(F_5(\nu_1)-F_5(\nu_2))d\tau\|_{L^2_x}\\
&=\mathrm{I}+\mathrm{II}.
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Observe que

$$\mathrm{I}\leqslant T\|\lambda\nu_1 \operatorname{Im}(B_1-B_2)\|_{L^\infty_T L^2_x}+T\|\lambda\nu_1 \operatorname{Im}B_3\|_{L^\infty_T L^2_x}+T\|\lambda(\nu_1-\nu_2)\operatorname{Im}B_4\|_{L^\infty_T L^2_x}.$$

Usando desigualdade de Hölder, imersão de Sobolev e um cálculo semelhante a demonstração da primeira parte do Lema 3.2.10, segue que

$$\begin{aligned}
&T\|\lambda\nu_1 \operatorname{Im}(B_1-B_2)\|_{L^\infty_T L^2_x}\leqslant T\|\lambda\nu_1 \operatorname{Im}B_1\|_{L^\infty_T L^2_x}+T\|\lambda\nu_1 \operatorname{Im}B_2 dy\|_{L^\infty_T L^2_x}\\
&\lesssim T\|\nu_1\|_{L^\infty_T L^4_x}\|B_1\|_{L^\infty_T L^4_x}+T\|\nu_1\|_{L^\infty_T L^4_x}\|B_2\|_{L^\infty_T L^4_x}\\
&\lesssim T\|\nu_1\|_{L^\infty_T L^4_x}\|B_1\|_{L^\infty_T H^1}+T\|\nu_1\|_{L^\infty_T L^4_x}\|B_2\|_{L^\infty_T H^1}\\
&\lesssim T\|\nu_1\|_{L^\infty_T L^4_x}\|\left(\int_{-\infty}^{y} i(\theta'(\nu_1)-\theta'(\nu_2))e^{i(\theta(\nu_1)-\theta(\nu_2))}dz\right)e^{i\theta(\nu_2)}f_2(e^{-i\theta(\nu_1)}\nu_1)dy\|_{L^\infty_T L^2_x}\\
&\quad+T\|\nu_1\|_{L^\infty_T L^4_x}\|\left(\int_{-\infty}^{y} i(\theta'(\nu_2)-\theta'(\nu_1))e^{i(\theta(\nu_2)-\theta(\nu_1))}dz\right)e^{i\theta(\nu_1)}f_2(e^{-i\theta(\nu_2)}\nu_2)dy\|_{L^\infty_T L^2_x}\\
&\lesssim T\|\nu_1\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|\nu_1-\nu_2\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}(\|\nu_1\|^{p+1}_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}+\|\nu_2\|^{p+1}_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}+\|\nu_1\|^{p}_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|\nu_2\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\\
&\quad+\|\nu_2\|^{p}_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|\nu_1\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}})\\
&=T\|\nu_1-\nu_2\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}(\|\nu_1\|^{p+2}_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}+\|\nu_2\|^{p+1}_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|\nu_1\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}+\|\nu_1\|^{p+1}_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|\nu_2\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\\
&\quad+\|\nu_2\|^{p}_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|\nu_1\|^{2}_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}).
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Usando desigualdade de Hölder e imersão de Sobolev, segue que

$$\begin{aligned}
T\|\lambda\nu_1 \operatorname{Im}B_3\|_{L^\infty_T L^2_x}&\lesssim T\|\nu_1\|_{L^\infty_T L^4_x}\|B_3\|_{L^\infty_T L^4_x}\lesssim T\|\nu_1\|_{L^\infty_T L^4_x}\|B_3\|_{L^\infty_T H^1}\\
&\lesssim T\|\nu_1\|_{L^\infty_T L^4_x}\|(\bar\nu_1-\bar\nu_2)e^{i\theta(\nu_2)}f_2(e^{-i\theta(\nu_2)}\nu_2)dy\|_{L^\infty_T L^2_x}\\
&\lesssim \|\nu_1\|_{L^\infty_T L^4_x}\|\bar\nu_1-\bar\nu_2\|_{L^\infty_T L^4_x}\|e^{i\theta(\nu_2)}f_2(e^{-i\theta(\nu_2)}\nu_2)\|_{L^\infty_T L^4_x}\\
&\lesssim T\|\nu_1\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|\nu_1-\nu_2\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|\nu_2\|^{p}_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}},
\end{aligned} \tag{3.57}$$

e

$$
\begin{aligned}
T\|\lambda(v_1-v_2)\mathrm{Im}B_4\|_{L^\infty_T L^2_x} &\lesssim T\|v_1-v_2\|_{L^\infty_T L^4_x}\|B_4\|_{L^\infty_T L^4_x}\\
&\lesssim T\|v_1-v_2\|_{L^\infty_T L^4_x}\|B_4\|_{L^\infty_T H^1}\\
&\lesssim T\|v_1-v_2\|_{L^\infty_T L^4_x}\|\bar{v}_2 e^{i\theta(v_2)}f_2(e^{-i\theta(v_2)}v_2)dy\|_{L^\infty_T L^2_x}\\
&\lesssim T\|v_1-v_2\|_{L^\infty_T L^4_x}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\bar{v}_2|^2|v_2|^{2p}dx\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= T\|v_1-v_2\|_{L^\infty_T L^4_x}\|v_2\|^{p+1}_{L^\infty_T L^{2(p+1)}_x} \lesssim T\|v_1-v_2\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|v_2\|^{p+1}_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}
\tag{3.58}
$$

Logo, por (3.56), (3.57) e (3.58), segue que

$$
\begin{aligned}
I \lesssim T\|v_1-v_2\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\Big(&\|v_1\|^{p+2}_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + \|v_1\|^{p+1}_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|v_2\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + \|v_1\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|v_2\|^{p+1}_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\\
&+ \|v_2\|^{p}_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|v_1\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + \|v_2\|^{p}_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|v_1\|^{2}_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + \|v_2\|^{p+1}_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\Big).
\end{aligned}
\tag{3.59}
$$

Observe agora que

$$
\begin{aligned}
II \leqslant &\Big\|\int_0^t U(t-\tau)D_x^{\frac{1}{2}}(\lambda v_1 \mathrm{Im}(B_1-B_2))d\tau\Big\|_{L^\infty_T L^2_x} + \Big\|\int_0^T U(t-\tau)D^{\frac{1}{2}}(\lambda v_1 \mathrm{Im}B_3)d\tau\Big\|_{L^\infty_T L^2_x}\\
&+ \Big\|\int_0^T U(t-\tau)D_x^{\frac{1}{2}}(\lambda(v_1-v_2)\mathrm{Im}B_4)d\tau\Big\|_{L^\infty_T L^2_x}.
\end{aligned}
$$

Assim como no lema anterior, façamos a notação

$$
f \equiv \lambda v_1
$$

e

$$
\begin{aligned}
g \equiv \int_{-\infty}^{x}\Big\{&\left(\int_{-\infty}^{y} i(\theta'(v_1)-\theta'(v_2))e^{i(\theta(v_1)-\theta(v_2))}dz\right)e^{i\theta(v_2)}f_2(e^{-i\theta(v_1)}v_1)\\
&-\left(\int_{-\infty}^{y} i(\theta'(v_2)-\theta'(v_1))e^{i(\theta(v_2)-\theta(v_1))}dz\right)e^{i\theta(v_1)}f_2(e^{-i\theta(v_2)}v_2)\Big\}dy.
\end{aligned}
$$

Usando o Lema 1.4.2 (com $p_1 = 2$, $p_2 = \infty$, $p_3 = p_4 = 4$), desigualdades de Hölder e Sobolev e um cálculo semelhante à demonstração da primeira parte do Lema 3.2.10, temos que

$$
\begin{aligned}
&\| \int_0^t U(t-\tau) D_x^{\frac{1}{2}}(\lambda v_1 \mathrm{Im}(B_1 - B_2)) d\tau \|_{L_T^\infty L_x^2} \leqslant T \| D_x^{\frac{1}{2}}(f \mathrm{Im}(g)) \|_{L_T^\infty L_x^2} \\
&\leqslant T(\| D_x^{\frac{1}{2}}(f) \|_{L_T^\infty L_x^2} \|g\|_{L_T^\infty L_x^\infty} + \|f\|_{L_T^\infty L_x^4} \| D_x^{\frac{1}{2}}(g) \|_{L_T^\infty L_x^4}) \\
&\lesssim T \left(\|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \|g\|_{L_T^\infty H^1} + \|v_1\|_{L_T^\infty L_x^4} \|g\|_{L_T^\infty H^1} \right) \\
&\lesssim T \Bigg(\|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \Bigg\| \left(\int_{-\infty}^y i(\theta'(v_1) - \theta'(v_2)) e^{i(\theta(v_1) - \theta(v_2))} dz \right) e^{i\theta(v_2)} f_2(e^{-i\theta(v_1)} v_1) \\
&\quad - \left(\int_{-\infty}^y i(\theta'(v_2) - \theta'(v_1)) e^{i(\theta(v_2) - \theta(v_1))} dz \right) e^{i\theta(v_1)} f_2(e^{-i\theta(v_2)} v_2) \Bigg\|_{L_T^\infty L_x^2} \Bigg) \\
&\lesssim T \|v_1 - v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \Big(\|v_1\|^{p+2}_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|v_2\|^{p+1}_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|v_1\|^{p+1}_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \|v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \\
&\quad + \|v_1\|^2_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \|v_2\|^p_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \Big).
\end{aligned}
\tag{3.60}
$$

Usando o Lema 1.4.2 (com $p_1 = 2$, $p_2 = \infty$, $p_3 = p_4 = 4$), desigualdade de Hölder e imersão de Sobolev, segue que

$$
\begin{aligned}
&\| \int_0^t U(t-\tau) D_x^{\frac{1}{2}}(\lambda v_1 \mathrm{Im} B_3) d\tau \|_{L_t^\infty L_x^2} \\
&\leqslant \int_0^T \| D_x^{\frac{1}{2}} \left(\lambda v_1 \mathrm{Im} \int_{-\infty}^x (\bar{v}_1 - \bar{v}_2) e^{i\theta(v_2)} f_2(e^{-i\theta(v_2)} v_2) dy \right) \|_{L_T^\infty L_x^2} d\tau \\
&\leqslant T \| D_x^{\frac{1}{2}}(\lambda v_1) \|_{L_T^\infty L_x^2} \| \mathrm{Im} \int_{-\infty}^x (\bar{v}_1 - \bar{v}_2) e^{i\theta(v_2)} f_2(e^{-i\theta(v_2)} v_2) dy \|_{L_T^\infty L_x^\infty} \\
&\quad + T \|\lambda v_1\|_{L_T^\infty L_x^4} \| D_x^{\frac{1}{2}} \left(\mathrm{Im} \int_{-\infty}^x (\bar{v}_1 - \bar{v}_2) e^{i\theta(v_2)} f_2(e^{-i\theta(v_2)} v_2) dy \right) \|_{L_T^\infty L_x^4} \\
&\lesssim T \|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \| \mathrm{Im} \int_{-\infty}^x (\bar{v}_1 - \bar{v}_2) e^{i\theta(v_2)} f_2(e^{-i\theta(v_2)} v_2) dy \|_{L_T^\infty \dot{H}^1} \\
&\lesssim T \|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \| (\bar{v}_1 - \bar{v}_2) e^{i\theta(v_2)} f_2(e^{-i\theta(v_2)} v_2) dy \|_{L_T^\infty L_x^2} \\
&\lesssim T \|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \| \bar{v}_1 - \bar{v}_2 \|_{L_T^\infty L_x^4} \| e^{i\theta(v_2)} f_2(e^{-i\theta(v_2)} v_2) dy \|_{L_T^\infty L_x^4} \\
&\lesssim T \|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \| v_1 - v_2 \|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \|v_2\|^p_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}
\tag{3.61}
$$

e, analogamente, usando novamente o Lema 1.4.2 (com $p_1 = 2$, $p_2 = \infty$, $p_3 = p_4 = 4$), desigualdade de Hölder e imersão de Sobolev, segue que

$$
\begin{aligned}
&\|\int_0^t U(t-\tau)D_x^{\frac{1}{2}}(\lambda(v_1-v_2)\mathrm{Im}B_4)d\tau\|_{L_T^\infty L_x^2}\\
&\leqslant \int_0^T \|D_x^{\frac{1}{2}}\left(\lambda(v_1-v_2)\mathrm{Im}\int_{-\infty}^x \bar{v}_2 e^{i\theta(v_2)}f_2(e^{-i\theta(v_2)}v_2)dy\right)\|_{L_T^\infty L_x^2}d\tau\\
&\leqslant T\|D_x^{\frac{1}{2}}(\lambda(v_1-v_2))\|_{L_T^\infty L_x^2}\|\mathrm{Im}\int_{-\infty}^x \bar{v}_2 e^{i\theta(v_2)}f_2(e^{-i\theta(v_2)}v_2)dy\|_{L_T^\infty L_x^\infty}\\
&\quad + T\|\lambda(v_1-v_2)\|_{L_T^\infty L_x^4}\|D_x^{\frac{1}{2}}\left(\mathrm{Im}\int_{-\infty}^x \bar{v}_2 e^{i\theta(v_2)}f_2(e^{-i\theta(v_2)}v_2)dy\right)\|_{L_T^\infty L_x^4}\\
&\lesssim T\|(v_1-v_2)\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\|\mathrm{Im}\int_{-\infty}^x \bar{v}_2 e^{i\theta(v_2)}f_2(e^{-i\theta(v_2)}v_2)dy\|_{L_T^\infty H^1}\\
&\lesssim T\|(v_1-v_2)\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\|\bar{v}_2 e^{i\theta(v_2)}f_1(e^{-i\theta(v_2)}v_2)dy\|_{L_T^\infty L_x^2}\\
&\lesssim T\|(v_1-v_2)\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\|v_2\|_{L_T^\infty L_x^4}\|v_2\|^p_{L_T^\infty L_x^{4p}} \lesssim T\|(v_1-v_2)\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\|v_2\|^{p+1}_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}
\tag{3.62}
$$

Logo, por (3.60), (3.61) e (3.62), segue que

$$
\begin{aligned}
II &= \|\int_0^t U(t-\tau)D_x^{\frac{1}{2}}(F_5(v_1)-F_5(v_2))\|_{L_T^\infty L_x^2}\\
&\lesssim T\|v_1-v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\Big(\|v_1\|^{p+2}_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|v_1\|^{p+1}_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\|v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\|v_2\|^{p+1}_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\\
&\quad + \|v_2\|^p_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|v_2\|^p_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\|v_1\|^2_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|v_2\|^{p+1}_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\Big).
\end{aligned}
\tag{3.63}
$$

Portanto pelas estimativas (3.55), (3.59) e (3.63) temos que

$$
\begin{aligned}
\|E_5(v_1)-E_5(v_2)\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} &\leqslant T\|v_1-v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\Big(\|v_1\|^{p+2}_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|v_1\|^{p+1}_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\|v_2\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\\
&+ \|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\|v_2\|^{p+1}_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|v_2\|^p_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|v_2\|^p_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\|v_1\|^2_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|v_2\|^{p+1}_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\Big). \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Demonstração do Teorema 3.1. Seja $v_0 \in H^{\frac{1}{2}}$. Pelos lemas 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4, 3.2.5, 3.2.6, temos que

$$\|\!|E_1(v)|\!\| \leqslant c(T + T^{\frac{3}{4}} + T^{\frac{1}{2}})\|\!|v|\!\|^5, \tag{3.64}$$

$$\|\!|E_2(v)|\!\| \leqslant cT(\|\!|v|\!\| + \|\!|v|\!\|^3), \tag{3.65}$$

$$\|\!|E_3(v)|\!\| \leqslant c(T + T^{\frac{1}{2}})\|\!|v|\!\|^p, \tag{3.66}$$

$$\|\!|E_4(v)|\!\| \leqslant cT\|\!|v|\!\|^3, \tag{3.67}$$

$$\|\!|E_5(v)|\!\| \leqslant cT(\|\!|v|\!\|^3 + \|\!|v|\!\|^{p+2}). \tag{3.68}$$

Assim, para $T < 1$, temos que

$$\begin{aligned}
|||\Phi(v)||| &\leqslant c\|v_0\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + c(T + T^{\frac{3}{4}} + T^{\frac{1}{2}})|||v|||^5 + cT|||v||| + cT|||v|||^3 + c(T + T^{\frac{1}{2}})|||v|||^p \\
&\quad + cT|||v|||^{p+2} \\
&\leqslant c\|v_0\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + cT^{\frac{1}{2}}(|||v||| + |||v|||^3 + |||v|||^p + |||v|||^5 + |||v|||^{p+2}).
\end{aligned} \tag{3.69}$$

Logo, fazendo $a = 2c\|v_0\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}$, como $v \in X_a(I)$, segue de (3.69) que

$$|||\Phi(v)||| \leqslant \frac{a}{2} + acT^{\frac{1}{2}}(1 + a^2 + a^4 + a^{p-1} + a^{p+1}). \tag{3.70}$$

Tomando então

$$T \leqslant \frac{1}{4c^2(1 + a^2 + a^4 + a^{p-1} + a^{p+1} + a^{p+2} + a^{p+3})^2}, \tag{3.71}$$

segue que $|||\Phi(v)||| \leqslant a$. Portanto, se $v \in X_a(I)$, então $\Phi(v) \in X_a(I)$. Logo podemos concluir que $\Phi(v) : X_a(I) \to X_a(I)$.

Sejam $v_1, v_2 \in X_a(I)$. Pelos lemas 3.2.7, 3.2.8, 3.2.9, 3.2.10, 3.2.11 e 3.2.12, temos

$$\begin{aligned}
|||\Phi(v_1) - \Phi(v_2)||| &\leqslant c(T^{\frac{1}{2}} + T)|||v_1 - v_2|||\,(A + B) + cT|||v_1 - v_2|||C \\
&\leqslant cT^{\frac{1}{2}}|||v_1 - v_2|||\,(A + B + C)\,,
\end{aligned} \tag{3.72}$$

onde

$$\begin{aligned}
A =& \|v_1\|^4_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + \|v_1\|^2_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|v_2\|^2_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + \|v_1\|^3_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|v_2\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + \|v_2\|^3_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|v_1\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} \\
&+ \|v_2\|^4_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B =& \|v_1\|^2_{L^4_x L^\infty_T}(\|v_1\|^2_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + \|v_1\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|v_1\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + \|v_2\|^2_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}) + \|v_2\|^2_{L^4_x L^\infty_T}\|v_1\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|v_2\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} \\
&+ \|v_2\|^2_{L^4_x L^\infty_T}\|v_2\|^2_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C =& \|v_1\|^{p+3}_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + \|v_2\|^{p+3}_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + \|v_1\|^{p+2}_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|v_2\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + \|v_2\|^{p+2}_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|v_1\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + \|v_1\|^{p+2}_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} \\
&+ \|v_1\|^{p+1}_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + \|v_2\|^{p+1}_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + \|v_1\|^{p}_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|v_2\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + \|v_2\|^{p}_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|v_1\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

Então, tomando T como em (3.71), segue de (3.72) que,

$$|||\Phi(v_1) - \Phi(v_2)||| \leqslant cT^{\frac{1}{2}}|||v_1 - v_2|||(a^4 + a^{p+1} + a^{p+2} + a^{p+3}) \leqslant k|||v_1 - v_2|||, \tag{3.73}$$

onde

$$k = k(a) = \frac{a^4 + a^{p+1} + a^{p+2} + a^{p+3}}{2(1 + a^2 + a^4 + a^{p-1} + a^{p+1} + a^{p+2} + a^{p+3})} < 1. \tag{3.74}$$

Isto prova que Φ é uma contração em $X_a(I)$.

Logo pelas estimativas (3.70) e (3.73), o argumento de contração prova a existência de um único ponto fixo $v \in X_a(I)$ com $T > 0$ suficientemente pequeno. Portanto (3.16) tem uma única solução $v = \Phi(v) \in X_a(I)$.

Além disso, (3.73), juntamente com o Lema 3.2.7 mostra que para cada $T' \in (0, T)$ a aplicação $\widetilde{v}_0 \longrightarrow \widetilde{v}$ $(X_a(I) \to X_a(I))$ é Lipschitz. De fato, observe que

$$\begin{aligned} |||\Phi(v_1) - \Phi(v_2)||| &\leqslant c|||v_{0,1} - v_{0,2}||| + |||\int_0^t U(t-\tau)(F(v_1) - F(v_2))(\tau)d\tau||| \\ &\leqslant c|||v_{0,1} - v_{0,2}||| + k|||v_1 - v_2|||, \end{aligned}$$

com $0 < k < 1$ definido em (3.74). Dí,

$$(1-k)|||v_1 - v_2||| \leqslant c|||v_{0,1} - v_{0,2}|||.$$

Logo

$$|||v_1 - v_2||| \leqslant \widetilde{k}|||v_{0,1} - v_{0,2}|||,$$

onde $\widetilde{k} = \frac{c}{1-k}$ é a constante de Lipschitz e $v_{0,1}$ e $v_{0,2}$ são os respectivos dados iniciais das soluções v_1 e v_2. Portanto nossa solução $v \in X_a(I)$ para a equação equação integral (3.16) é uma solução forte para o PVI (3.15). Em particular, v satisfaz a equação (3.15) no sentido das distribuições.

Agora estendemos nosso resultado de unicidade para a classe $X(I)$. Suponha que exista $w \in X(T')$ para algum $T' \in (0, T)$ uma solução forte para o PVI (3.15). O argumento utilizado em (3.69) mostra que para algum $T'' \in (0, T')$, $w \in X_a(I)$. Portanto temos que $w \equiv v \in \mathbb{R} \times [0, T'']$. Reaplicando o argumento o resultado pode ser estendido para todo o intervalo $[0, T]$. Isto garante o resultado de unicidade em $X(I)$. $\blacksquare$

Capítulo 4

Demonstração do Teorema 0.1.

Lema 4.0.13. *Seja* f *satisfazendo* (H)*. Dados* $v_0, \widetilde{v}_0 \in H^{\frac{1}{2}}$ *com* $\max(\|v_0\|_H^{\frac{1}{2}}, \|\widetilde{v}_0\|_H^{\frac{1}{2}}) \leqslant \rho$ *e sejam* $v, \widetilde{v} \in X(I)$ *soluções de* (3.12) *com* $v(0), \widetilde{v}(0) = v_0, \widetilde{v}_0$ *dadas pelo Teorema 3.1. Sejam* $u, \widetilde{u}$ *dadas por*

$$u = e^{i\theta} v \tag{4.1}$$

$$\widetilde{u} = e^{i\widetilde{\theta}} \widetilde{v}, \tag{4.2}$$

onde

$$\theta(x,t) = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{x} |v(y,t)|^2 dy,$$
$$\widetilde{\theta}(x,t) = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{x} |\widetilde{v}(y,t)|^2 dy.$$

Então $u, \widetilde{u} \in X(I)$ *e* $\partial_x(|u|^2), \partial_x(|\widetilde{u}|^2) \in L^2(\mathbb{R} \times I)$*. Além disso*

$$\begin{aligned} |||u||| \leqslant c\rho + cT^{\frac{1}{2}} (\|v\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|v\|^2_{L_x^4 L_T^\infty} \|v\|^3_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|v\|^2_{L_x^4 L_T^\infty} \|v\|^{p-2}_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}) \\ + cT(\|v\|^3_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|v\|^5_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|v\|^{p+2}_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}), \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} |||u - \widetilde{u}||| \leqslant CT\|v - \widetilde{v}\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \Big(\|v\|^4_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|\widetilde{v}\|^4_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|v\|^3_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \|\widetilde{v}\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \\ + \|\widetilde{v}\|^3_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \|v_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|v\|^2_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|\widetilde{v}\|^2_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|v\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \|\widetilde{v}\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \Big), \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned} \|\partial_x(|u|^2)\|_{L_T^2 L_x^2} \leqslant c\rho^2 + cT^2 \Big(\|v\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|v\|^2_{L_x^6 L_T^\infty} \|v\|^4_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|v\|^3_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|v\|^5_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \\ + \|v\|^p_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|v\|^{p+2}_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \Big)^2, \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\|\partial_x(|u|^2)-\partial_x(|\widetilde{u}|^2)\|_{L^2_TL^2_x} \leqslant \left(\|v_0-\widetilde{v}_0\|_{H^{\frac{1}{2}}}+T\|v-\widetilde{v}\|_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}(A+B+C)\right)(\rho+Tg(v)+Th(\widetilde{v}))\,. \tag{4.6}$$

Sendo,

$$\begin{aligned} A =&\|v\|^4_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}+\|v\|^2_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}\|\widetilde{v}\|^2_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}+\|v\|^3_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}\|\widetilde{v}\|_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}+\|\widetilde{v}\|^3_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}\|v\|_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}\\ &+\|\widetilde{v}\|^4_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B =&\|v\|^2_{L^4_xL^\infty_T}(\|v\|^2_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}+\|v\|_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}\|\widetilde{v}\|_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}+\|\widetilde{v}\|^2_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}})+\|\widetilde{v}\|^2_{L^4_xL^\infty_T}\|v\|_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}\|\widetilde{v}\|_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}\\ &+\|\widetilde{v}\|^2_{L^4_xL^\infty_T}\|\widetilde{v}\|^2_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C =&\|v\|^{p+3}_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}+\|\widetilde{v}\|^{p+3}_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}+\|v\|^{p+2}_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}\|\widetilde{v}\|_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}+\|\widetilde{v}\|^{p+2}_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}\|v\|_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}\\ &+\|v\|^{p+1}_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}+\|\widetilde{v}\|^{p+1}_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}+\|v\|^{p}_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}\|\widetilde{v}\|_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}\|\widetilde{v}\|^{p}_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}\|v\|_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

$$g(v)=\left(\|v\|_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}+\|v\|^2_{L^6_xL^6_T}\|v\|^4_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}+\|v\|^3_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}+\|v\|^5_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}+\|v\|^p_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}+\|v\|^{p+2}_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}\right),$$

$$h(\widetilde{v})=\left(\|\widetilde{v}\|_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}+\|\widetilde{v}\|^2_{L^6_xL^6_T}\|\widetilde{v}\|^4_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}+\|\widetilde{v}\|^3_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}+\|\widetilde{v}\|^5_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}+\|\widetilde{v}\|^p_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}+\|\widetilde{v}\|^{p+2}_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}\right).$$

Dem. Tomando v como no Teorema 2.1 e utilizando os Lemas 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4, 3.2.5 e 3.2.6, segue que

$$\begin{aligned} |||u||| \equiv \|u\|_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}} =&\|e^{i\theta}v\|_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}} \leqslant \|U(t)v_0\|_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}+\|\int_0^t U(t-\tau)F(v)d\tau\|_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}\\ &\leqslant \|U(t)v_0\|_{L^2_x}+\|U(t)D^{\frac{1}{2}}_xv_0\|_{L^2_x}+\sum_{j=1}^5\|\int_0^t U(t-\tau)F_j(v)d\tau\|_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}\\ &\leqslant \|v_0\|_{H^{\frac{1}{2}}}+\sum_{j=1}^5\|\int_0^t U(t-\tau)F_j(v)d\tau\|_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}\\ &\leqslant \rho+T^{\frac{1}{2}}\left(\|v\|_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}+\|v\|^2_{L^4_xL^\infty_T}\|v\|^3_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}+\|v\|^2_{L^4_xL^\infty_T}\|v\|^{p-2}_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}\right)\\ &\quad+T\left(\|v\|^3_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}+\|v\|^5_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}+\|v\|^{p+2}_{L^\infty_TH^{\frac{1}{2}}}\right). \end{aligned}$$

O que provar o item (4.3).

Observe que

$$
\begin{aligned}
u-\widetilde{u} =& e^{i\theta(\nu)}\nu - e^{\theta(\widetilde{\nu})}\widetilde{\nu} = e^{i(\theta(\nu)-\theta(\widetilde{\nu}))}e^{i\theta(\widetilde{\nu})}\nu - e^{i(\theta(\widetilde{\nu})-\theta(\nu))}e^{i\theta(\nu)}\widetilde{\nu} \\
=& \left(\int_{-\infty}^{x}(e^{i(\theta(\nu)-\theta(\widetilde{\nu}))})'dy\right)e^{i\theta(\widetilde{\nu})}\nu - \left(\int_{-\infty}^{x}(e^{i(\theta(\widetilde{\nu})-\theta(\nu))})'dy\right)e^{i\theta(\nu)} \\
=& \left(\int_{-\infty}^{x} i(\theta'(\nu)-\theta'(\widetilde{\nu}))(e^{i(\theta(\nu)-\theta(\widetilde{\nu}))})dy\right)e^{i\theta(\widetilde{\nu})}\nu \\
&- \left(\int_{-\infty}^{x} i(\theta'(\widetilde{\nu})-\theta'(\nu))(e^{i(\theta(\widetilde{\nu})-\theta(\nu))})dy\right)e^{i\theta(\nu)}.
\end{aligned}
$$

Por um cálculo semelhante a demonstração do Lema 3.2.9, segue que

$$
\begin{aligned}
|||u-\widetilde{u}||| \equiv \|u-\widetilde{u}\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \leqslant& \left\| \left(\int_{-\infty}^{x} i(\theta'(\nu)-\theta'(\widetilde{\nu}))(e^{i(\theta(\nu)-\theta(\widetilde{\nu}))})dy\right)e^{i\theta(\widetilde{\nu})}\nu\right\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \\
&+ \left\| \left(\int_{-\infty}^{x} i(\theta'(\widetilde{\nu})-\theta'(\nu))(e^{i(\theta(\widetilde{\nu})-\theta(\nu))})dy\right)e^{i\theta(\nu)}\right\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \\
&\lesssim T\|\nu-\widetilde{\nu}\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\left(\|\nu\|^4_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|\widetilde{\nu}\|^4_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|\nu\|^3_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\|\widetilde{\nu}\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\right. \\
&\left. + \|\widetilde{\nu}\|^3_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\|\nu_1\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|\nu\|^2_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|\widetilde{\nu}\|^2_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|\nu\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\|\widetilde{\nu}\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\right).
\end{aligned}
$$

Utilizando agora o item (3) do Teorema 2.1, chegamos que

$$
\begin{aligned}
\|\partial_x(|u|^2)\|_{L_T^2L_x^2} &= \|\partial_x(|e^{i\theta(\nu)}\nu|^2)\|_{L_T^2L_x^2} \\
&= \|\partial_x(|\nu|^2)\|_{L_T^2L_x^2} = \|\partial_x(\nu\bar{\nu})\|_{L_T^2L_x^2} \\
&\leqslant 2^{-\frac{1}{2}}(\|\nu_0\|_{H^{\frac{1}{2}}} + \|F(\nu)\|_{L_T^1H^{\frac{1}{2}}})(\|\nu_0\|_{H^{\frac{1}{2}}} + \|F(\nu)\|_{L_T^1H^{\frac{1}{2}}}) \\
&\leqslant c\|\nu_0\|^2_{H^{\frac{1}{2}}} + \|F(\nu)\|^2_{L_T^1H^{\frac{1}{2}}} \\
&\leqslant c\rho^2 + c\|F(\nu)\|^2_{L_T^1L_x^2} + c\|D_x^{\frac{1}{2}}F(\nu)\|^2_{L_T^1L_x^2} \\
&= c\rho^2 + c\left(\sum_{j=1}^{5}\|F_j(\nu)\|_{L_T^1L_x^2}\right)^2 + c\left(\sum_{j=1}^{5}\|D_x^{\frac{1}{2}}F_j(\nu)\|_{L_T^1L_x^2}\right)^2. \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

Então, pela demonstração dos Lemas 3.2.2 a 3.2.6, temos que

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{j=1}^{5}\|F_j(\nu)\|_{L_T^1L_x^2}\right)^2 \leqslant T^2\left(\sum_{j=1}^{5}\|F_j(\nu)\|_{L_T^\infty L_x^2}\right)^2 \\
&\leqslant T^2\left(\|\nu\|^5_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|\nu\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|\nu\|^p_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|\nu\|^3_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|\nu\|^{p+2}_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\right)^2 \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

e

$$\left(\sum_{j=1}^{5}\|D_x^{\frac{1}{2}}F_j(v)\|_{L_T^1L_x^2}\right)^2 \leqslant T^2\left(\sum_{j=2}^{5}\|D_x^{\frac{1}{2}}F_j(v)\|_{L_T^\infty L_x^2}\right)^2 + T^2\left(\|D_x^{\frac{1}{2}}F_1(v)\|_{L_T^\infty L_x^2}\right)^2$$

$$\leqslant T^2\left(\|v\|^3_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|v\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + \|v\|^{p+2}_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\right)^2 + \left(\|D_x^{\frac{1}{2}}F_1(v)\|_{L_T^1L_x^2}\right)^2. \tag{4.9}$$

Usando o Lema 1.4.5 com $\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ e $\alpha_2 = 0$ e imersão de Sobolev, segue que

$$\begin{aligned}
&\left(\|D_x^{\frac{1}{2}}F_1(v)\|_{L_T^1L_x^2}\right)^2 \leqslant T^{\frac{1}{2}}\|D_x^{\frac{1}{2}}(|v|^4v)\|_{L_x^2L_T^2}\\
&\leqslant T^{\frac{1}{2}}\left(\|D_x^{\frac{1}{2}}(|v|^4v) - D_x^{\frac{1}{2}}(|v|^2)|v|^2v - |v|^2D_x^{\frac{1}{2}}(|v|^2v)\|_{L_x^2L_T^2} + \|D_x^{\frac{1}{2}}(|v|^2)|v|^2v\|_{L_x^2L_T^2}\right.\\
&\quad\left. + \||v|^2D_x^{\frac{1}{2}}(|v|^2v)\|_{L_x^2L_T^2}\right)\\
&\leqslant T^{\frac{1}{2}}\left(\|D_x^{\frac{1}{2}}(|v|^2)\|_{L_x^4L_T^4}\||v|^2v\|_{L_x^4L_T^4} + \|D_x^{\frac{1}{2}}(|v|^2v)\|_{L_x^3L_T^3}\||v|^2\|_{L_x^6L_T^6}\right)\\
&\leqslant T^{\frac{1}{2}}\left(\|D_x^{\frac{1}{2}}|v|\|_{L_x^6L_T^6}\|v\|_{L_x^{12}L_T^{12}}\|v\|^3_{L_x^{12}L_T^{12}}\right)\\
&\quad + T^{\frac{1}{2}}\|v\|^2_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\left(\|D_x^{\frac{1}{2}}(|v|^2)\|_{L_x^4L_T^4}\|v\|_{L_x^{12}L_T^{12}} + \||v|^2\|_{L_x^6L_T^6}\|D_x^{\frac{1}{2}}v\|_{L_x^6L_T^6}\right)\\
&\leqslant T^{\frac{1}{3}}\|D_x^{\frac{1}{2}}v\|_{L_x^6L_T^6}\|v\|^4_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} + T^{\frac{1}{4}}\|v\|^3_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\|D_x^{\frac{1}{2}}(|v|^2)\|_{L_x^4L_T^4}\\
&\leqslant T^{\frac{1}{3}}\|v\|^4_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\|D_x^{\frac{1}{2}}v\|_{L_x^6L_T^6} + T^{\frac{1}{4}}\|v\|^3_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\|D_x^{\frac{1}{2}}v\|_{L_x^6L_T^6}\|v\|_{L_x^{12}L_T^{12}}\\
&\leqslant T^{\frac{1}{3}}\|v\|^4_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}\|D_x^{\frac{1}{2}}v\|_{L_x^6L_T^6}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Portanto por (4.7), (4.8), (4.9) e (4.10), prova-se (4.5).

Utilizando navamente o Teorema 2.1, as identidades (4.1) e (4.2) e a identidade

$$|u|^2 - |\widetilde{u}|^2 = |v|^2 - |\widetilde{v}|^2 = v\bar{v} - \widetilde{v}\bar{\widetilde{v}} = (v-\widetilde{v})\bar{v} + \widetilde{v}\overline{(v-\widetilde{v})},$$

temos que

$$\begin{aligned}
&\|\partial_x(|u|^2) - \partial_x(|\widetilde{u}|^2)\|_{L_T^2L_x^2} = \|\partial_x(|v|^2) - \partial_x(|\widetilde{v}|^2)\|_{L_T^2L_x^2} \leqslant \|\partial_x((v-\widetilde{v})\bar{v})\|_{L_T^2L_x^2}\\
&\quad + \|\partial_x(\widetilde{v}\overline{(v-\widetilde{v})})\|_{L_T^2L_x^2} \leqslant 2^{\frac{1}{2}}\left(\|v_0-\widetilde{v}_0\|_{H^{\frac{1}{2}}} + \|F(v-\widetilde{v})\|_{L_T^1H^{\frac{1}{2}}}\right)\left(\|v_0\|_{H^{\frac{1}{2}}} + \|F(v)\|_{L_T^1H^{\frac{1}{2}}}\right)\\
&\quad + 2^{\frac{1}{2}}\left(\|\widetilde{v}_0\|_{H^{\frac{1}{2}}} + \|F(\widetilde{v})\|_{L_T^1H^{\frac{1}{2}}}\right)\left(\|v_0-\widetilde{v}_0\|_{H^{\frac{1}{2}}} + \|F(v-\widetilde{v})\|_{L_T^1H^{\frac{1}{2}}}\right)\\
&\lesssim \left(\|v_0-\widetilde{v}_0\|_{H^{\frac{1}{2}}} + \|F(v-\widetilde{v})\|_{L_T^1H^{\frac{1}{2}}}\right)\left(\rho + \|F(v)\|_{L_T^1H^{\frac{1}{2}}} + \|F(\widetilde{v})\|_{L_T^1H^{\frac{1}{2}}}\right).
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Pelos Lemas de 3.2.8 a 3.2.12, segue que

$$\|F(v-\widetilde{v})\|_{L_T^1H^{\frac{1}{2}}} \leqslant T\sum_{j=1}^{5}\|F(v-\widetilde{v})\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}} \leqslant T\|v-\widetilde{v}\|_{L_T^\infty H^{\frac{1}{2}}}(A+B+C), \tag{4.12}$$

onde,

$$
\begin{aligned}
A = & \|v\|^4_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + \|v\|^2_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|\widetilde{v}\|^2_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + \|v\|^3_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|\widetilde{v}\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + \|\widetilde{v}\|^3_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|v\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} \\
& + \|\widetilde{v}\|^4_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B = & \|v\|^2_{L^4_x L^\infty_T}(\|v\|^2_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + \|v\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|\widetilde{v}\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + \|\widetilde{v}\|^2_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}) + \|\widetilde{v}\|^2_{L^4_x L^\infty_T}\|v\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|\widetilde{v}\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} \\
& + \|\widetilde{v}\|^2_{L^4_x L^\infty_T}\|\widetilde{v}\|^2_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
C = & \|v\|^{p+3}_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + \|\widetilde{v}\|^{p+3}_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + \|v\|^{p+2}_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|\widetilde{v}\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + \|\widetilde{v}\|^{p+2}_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|v\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} \\
& + \|v\|^{p+1}_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + \|\widetilde{v}\|^{p+1}_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + \|v\|^{p}_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|\widetilde{v}\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|\widetilde{v}\|^{p}_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\|v\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}
$$

Pela demonstração de (4.5), temos que:

$$
\begin{aligned}
\|F(v)\|_{L^1_T H^{\frac{1}{2}}} = T\Bigg(& \|v\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + \|v\|^2_{L^6_x L^\infty_T}\|v\|^4_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + \|v\|^3_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + \|v\|^5_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + \|v\|^p_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} \\
& + \|v\|^{p+2}_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\Bigg), \qquad (4.13)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|F(\widetilde{v})\|_{L^1_T H^{\frac{1}{2}}} = T\Bigg(& \|\widetilde{v}\|_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + \|\widetilde{v}\|^2_{L^6_x L^\infty_T}\|\widetilde{v}\|^4_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + \|\widetilde{v}\|^3_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + \|\widetilde{v}\|^5_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} + \|\widetilde{v}\|^p_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}} \\
& + \|\widetilde{v}\|^{p+2}_{L^\infty_T H^{\frac{1}{2}}}\Bigg). \qquad (4.14)
\end{aligned}
$$

Portanto por (4.11), (4.12), (4.13) e (4.14), obtemos (4.6). ■

Agora estamos completamente pronto para demonstrar o Teorema 0.1. Para facilitar a leitura iremos reescrevê-lo aqui:

Teorema 4.1. *Seja* f *uma função satisfazendo a condição* (2)*. Então para qualquer* $\rho > 0$ *existe uma constante positiva* $T(\rho)$ *dependendo somente de* f *e* ρ *com as seguintes propriedades: Para qualquer* $u_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$*, com* $\|u_0\|_{H^{\frac{1}{2}}} \leqslant \rho$*, a equação* (3) *tem uma única solução* u *em* $X(I) = X([0, T(\rho)])$ *tal que,* $u \in X(I)$ *e*

$$\partial_x(|u|^2) \in L^2_x(I \times \mathbb{R}). \qquad (4.15)$$

Além disso, para qualquer T *com* $0 < T < T(\rho)$ *existe* $\epsilon > 0$ *tal que a aplicação* $\tilde{u}_0 \mapsto \tilde{u}$ *é Lipschitz de* $\{\tilde{u}_0 \in H^{\frac{1}{2}}; \|\tilde{u}_0 - \tilde{u}\| < \epsilon\}$ *em* $X([0, T])$*.*

Dem. Seja $u_0 \in H^{\frac{1}{2}}$ e seja $\{u_0^{(n)}\}$ uma sequência em H^2 tal que $u_0^{(u)} \to u_0$ em H^2 com $n \to \infty$. Defina v_0 e $v_0^{(n)}$ por:

$$v_0 = e^{i\theta_0} u_0,$$
$$v_0^{(n)} = e^{i\theta_0^{(n)}} u_0^{(n)},$$

onde

$$\theta_0 = \int_{-\infty}^{x} \frac{\lambda}{2} |u_0(y)|^2 \, dy,$$
$$\theta_0^{(n)} = \int_{-\infty}^{x} \frac{\lambda}{2} |u_0^{(n)}(y)|^2 \, dy.$$

Como na demonstração do Teorema 3.1 vemos que $v_0 \in H^{\frac{1}{2}}$, $v_0^{(n)} \in H^2$ e $v_0^{(n)} \to v_0$ em $H^{\frac{1}{2}}$ quando $n \to \infty$. Seja $\rho = \sup\limits_n \|v_0^{(n)}\|_{H^{\frac{1}{2}}}$. Seja $v, v^{(n)} \in X(I)$ solução de (3.16) com $(v(0), v^{(n)}(0)) = (v_0, v_0^{(n)})$ dado pelo Teorema 3.1. Pela demonstração do Teorema 3.1, vemos que $v^{(n)} \to v$ em $X(I)$, quando $n \to \infty$. Com v e $v^{(n)}$, definimos respectivamente u e $u^{(n)}$ como em (4.1). Então pelo Lema 4.0.13 temos que $u, u^{(n)} \in X(I)$ com $\partial_x(|u|^2), \partial_x(|u^{(n)}|^2) \in L^2(I \times \mathbb{R})$ e que $u^{(n)} \to u$ e $\partial_x(|u^{(n)}|^2) \to \partial_x(|u|^2)$ em $L^2(I \times \mathbb{R})$ quando $n \to \infty$. Da mesma forma como na equação (3.1), $u^{(n)}$ satisfaz

$$\partial_t u^{(n)} - i\partial_x^2 u^{(n)} = \lambda \partial_x(|u^{(n)}|^2) u^{(n)} - i f(u^{(n)})$$

com $u^{(n)}(0) = u_0$ e portanto

$$u^{(n)} = U(\cdot) u_0^{(n)} + \int_0^t U(t-\tau)(\lambda \partial_x(|u^{(n)}|) u^{(n)} + f(u^{(n)}))(\tau) d\tau. \tag{4.16}$$

Pela convergência de $v^{(n)} \to v$, usando as hipóteses sobre $|f_j(z)|$, $j = 1, 2$ e a definição de $u^{(n)}$ e sua convergência, $u^{(n)} \to u$, segue que $f(u^{(n)}) \to f(u)$ em $L_t^1 L_x^2$.

Como $\partial_x(|u^{(n)}|^2) u^{(n)} \to \partial_x(|u|^2) u$ e $f(u^{(n)}) \to f(u)$ em $L_t^1 L_x^2$ quando $n \to \infty$, o lado direito da equação (4.16) tende para

$$U(\cdot) u_0 + \int_0^t U(t-\tau)(\lambda \partial_x(|u|) u + f(u))(\tau) d\tau$$

em $L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^4 L_x^\infty$ quando $n \to \infty$. Fazendo $n \to \infty$ em (4.16), obtemos

$$u = U(\cdot) u_0 + \int_0^t U(t-\tau)(\lambda \partial_x(|u|) u + f(u))(\tau) d\tau, \tag{4.17}$$

onde o lado direito da equação (4.17) faz sentido em $L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^4 L_x^\infty$ e portanto em $X(I)$ desde que $u - U(\cdot) u_0 \in X(I)$. Isso prova a parte essencial do Teorema e a outra parte segue da mesma forma como no argumento anterior. ■

Referências Bibliográficas

[1] R. Adams and J. Fournier, *Sobolev Spaces.* (2nd ed.), Pure and applied Mathematics, (2003).

[2] F. Calogero, *Why are certain nonlinear PDEs both widely applicable and integrable?, "What Is Integrability"?* V. E. Zakharov, ed., Springer, (1990), $1 - 62$.

[3] M. Christ, and M. Weinstein, *dispersion of small amplitude solutions of the generalized Korteweg-de Vries equation*, J. Funct. Anal. **100** (1991), $87 - 4109$.

[4] J. Duoandikoetxea, *Fourier Analysis*, Graduate Studies in Math. Vol. 19, AMS, (2001).

[5] G. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications* (2nd ed.), John Wiley e Sons, (1999).

[6] G. Friedlander, M. Joshi, *Introduction to the Theory of Distributions* (2nd ed.), Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[7] G. Boling, T. Shaobin, *On smooth solutions to the initial valve problem for the mixed nonlinear Schrödinger equations*, Proc. Royal Soc. Edinburgh, **119** (1991), $31 - 45$.

[8] R. S. Johnson, *On the modulation of water waves in the neighbourhood of* $\mathsf{kh} \approx 1363$, Proc. Royl Soc. London, A **357**(1977), $131 - 141$.

[9] T. Kakutani and K. Michihiro, *Marginal state of modulational instability note on Benjamin-Fier instability*, J. Phys. Soc. Japan **52** (1983), $4129 - 4137$.

[10] S. Katayama and Y. Tsutsumi, *Global existence of solutions for nonlinear Schrödinger equations in one dimension*, Commun. Partial Differential Equations, **19** (1994), $1971 - 1997$.

[11] C. E. Kenig, G. Ponce, and L. Vega, *Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations,* Indiana Univ. Math. J., **40** (1991), $33-69$.

[12] C. E. Kenig, G. Ponce, and L. Vega, *Small solutions to nonlinear Schrodinger equation*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse nonlinéaire, **10** (1993) $255-288$.

[13] C.E.Kenig, G.Ponce, and L.Vega, *Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the the contraction mapping principle*, Commun. Pure Appl. Math., **46** (1993), $527-620$.

[14] C.E. Kenig, A. Ruiz, *A strong* $(2,2)$ *estimative for the maximal function associated to the Schrödinger equation*, Trans. Amer. Math. Soc., **230** (1983), $422-443$.

[15] S. Klainerman, *The null condition and global existence to nonlinear wave equations*, Lect. in Appl. Math., **36** 1986, $293-326$.

[16] A. Kundu, *Landau-Lifshitz and higher nonlinear Schrödinger type equations,* J. Math. Phys., **25** (1984) $3433-3438$.

[17] A. Kundu, *Exact solutions to higher-order nonlinear equations through gauge tnasformation,* Physica D, **25** (1987) $399-406$.

[18] F. Linares, G. Ponce, *Introduction to nonlinear dispersive equations*, Publicações Matemáticas, IMPA, 2006.

[19] E. Mjölhus, *On the modulational instability of hydromagnetic waves parallel to the magnetic field,* J. Plasma Phys. **16** (1976), $321-334$.

[20] E. Mjölhus and J. Wyller, *Nonlinear Alfvén waves in a finite-beta plasma,* J. Plasma Phys. **40** (1988), $299-318$.

[21] E. Mjölhus and J. Wyller, *Alfvén solitions,* Phys. Scr. **33** (1986), $442-451$.

[22] E. Molinet and F. Ribaud, *Well-posedness results for the generalized Benjamin-Ono equation with arbitrary initial data,* Int. Math. Res. Notices **70** (2004), $3757-3795$.

[23] T. Ozawa, *On the nonlinear Schrödinger equations of derivative type*, preprint.

[24] T. Ozawa, Y. Tsutsumi, *Space-time estimatives for null gauge forms and nonlinear Schrodinger equations*, Differential Integral Equations, **11** (1998), $201-222$.

[25] T. Shaobin, Z. Linghai, *On a weak solution of the mixed nonlinear Schrödinger equations*, J. Math. Anal. Appl., **182** (1982), $409-421$.

[26] M. Tanaka, *Nonlinear self-modulation problem of the Bejamin-Ono equation*, J. Phys. Soc. Japan **51** (1982) $2686-2692$.

[27] M. Tsutsumi and I. Fukuda,*On solutions of the derivative nonlinear Schrödinger equation. Existence and uniqueness theorem* Funkcialaj Ekvacioj, **23** (1980), $259-277$.

[28] Y. Tsutsumi, *The null gauge condition and the one dimensional nonlinear Schrodinger equation with cubic nonlinearity*, Indiana Univ. Math. J., **43** (1994), $241-254$.