Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Imersões em Produtos Torcidos

José Arimatéa Rodrigues Melo Júnior

Teresina - 2011

José Arimatéa Rodrigues Melo Júnior

Dissertação de Mestrado:

Imersões em Produtos Torcidos

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Newton Luis Santos

Teresina - 2011

Aos meus amados pais, José Arimatéa e Maria do Socorro;

Às minhas queridas irmãs, Ana Paula, Nayra, Helane e Ana Patrícia;

À Christiane, minha amada esposa;

Aos meus sobrinhos José Pedro, David, Arthur, Flávio Filho e Hugo;

À minha querida madrinha Ana Soares de Melo (in memorian).

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus por me ter concedido força e luz para a realização de mais um sonho. Por ter nascido em uma família que amo tanto, de pais maravilhosos, ter me dado irmãs-amigas maravilhosas e ter posto em minha vida pessoas de moral elevada e de grandeza espiritual nas quais procuro me espelhar.

Aos meus pais, José Arimatéa e Maria do Socorro, por me darem amor incondicional, por estarem sempre ao meu lado, incentivando, passando valores e princípios que hoje levo em minha vida, pelo exemplo de vida, por sempre acreditarem e confiarem em mim. (amo muito vocês!).

Às minhas irmãs, Ana Paula, Nayra, Helane e Ana Patrícia, por estarmos sempre juntos e unidos em todos os momentos de nossas vidas. Por sempre acreditarem em mim, mais do que eu mesmo. (Também amo vocês. Saudades!)

À Christiane, minha amada esposa, amiga e companheira, por estar sempre ao meu lado em todos esses anos, me apoiando nos momentos em que mais precisei e compartilhando comigo os bons momentos! Por ser forte e perseverante, por me esperar por todo esse tempo. Por querer e trabalhar sempre para prosperarmos. Por aprendermos tanto juntos... (Amo você!)

Aos meus sogros, Oseás e Socorro, pelo apoio e amizade incondicionais, por ter sido tão bem recebido a ponto de me sentir filho dessa família.

Aos professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Piauí pela matemática que aqui aprendi, tanto na graduação quanto no mestrado.

Em especial, aos professores João Benício, Vicente de Paulo e Mário Gomes pelo apoio e incentivo durante a graduação. Ao professor João Xavier pelo trabalho incansável ao crescimento do DEMAT-UFPI e incentivo aos meus estudos. Aos professores Isaías

Pereira, Barnabé Pessoa Lima, Paulo Alexandre, Jurandir Oliveira, Marcos Vinícios e Marcondes Clarck pelo incentivo e por também acreditarem em mim.

Dedico meus sinceros agradecimentos ao professor Newton Luis pela importante ajuda nestes últimos tempos, por acreditar em mim quando eu ainda era graduando e pela sua exemplar orientação, pela tão boa escolha do tema a ser trabalhado e por me ter feito decidir, através de seu exemplo, prosseguir meus estudos em geometria. Aos professores Juscelino Pereira, Antônio Caminha e Barnabé Pessoa Lima por terem aceitado o convite de participar da minha banca de defesa.

Aos meus amigos, de estudo e lazer, Pedro Jorge, João Carlos, Daniel, Ítalo, João Santos, Gilberto, Venâncio, Domingos. Aos meus amigos da matemática: Cleyton Natanael, Renan, Yuri, Kelson, Diego, Maurício, Wilson, Pitágoras e Glayson.

Aos grandes amigos, de longa data, Leandro, João Neto, Jarbas(Jota), Thaís, Davi, Giovanni Telmo, Ribamar Júnior, Fabrícia(Fafá), Hélcio e Márcio Rodrigues.

Agradeço a todos os meus tios e primos em nome da minha madrinha Ana Soares de Melo.

Aos meus cunhados-amigos Herbert, Jailson, Gustavo, Rafael, Flávio e às minhas cunhadas Daniele e Karine pela amizade.

Gostaria de agradecer a tantas pessoas que cruzaram o meu caminho, me dando força, coragem para seguir em frente, mas diante da impossibilidade de fazê-lo, peço desculpas àqueles cujos nomes não aparecem nesta pequena página de agradecimentos...

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Mais uma vez agradeço à minha família pelo incentivo e apoio em todos os momentos de minha vida.

"*Asas da evolução, o conhecimento e o amor constituem a força da sabedoria que liberta a criatura*".

espírito Manoel P. de Miranda.

Resumo

Nesta dissertação estudamos a geometria das imersões de variedades do tipo produto torcido em variedades também produto torcido (veja, Chen [4]). São obtidas as fórmulas da conexão Riemanniana, do tensor de curvatura, do tensor de Ricci de um produto torcido simples (cf. O'Neill [9]) e, no apêndice, é apresentada uma generalização destas fórmulas para o caso de um produto torcido múltiplo (cf. Dobarro [5]). Os resultados contidos neste trabalho foram extraídos dos artigos "On warped product immersions" e "On isometric minimal immersions from warped products into real space forms" de Bang-Yen Chen, e "Curvature of multiply warped products" de Fernando Dobarro e Bülent Ünal.

Abstract

In this report we study the geometry of immersions of manifolds of warped product type into warped product manifolds (see Chen [4]). We obtain formulas for the Riemannian connection, the curvature tensor and the Ricci tensor on a warped product (see O'Neill [9]) and, in the appendix, we present a generalization of these formulas for the case of a multiply warped product (see Dobarro [5]). The results contained in this work were extracted from the papers "On warped product immersions", "On isometric minimal immersions from warped products into real space forms" of Bang-Yen Chen, and "Curvature of multiply warped products" of Fernando Dobarro and Bülent Ünal.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O conceito de produto torcido (warped product) entre duas variedades Riemannianas foi primeiramente introduzido por Bishop e O'Neill, no artigo *Manifolds of negative curvature* [1], onde apresentam a construção de uma deformação do produto direto entre duas variedades Riemannianas – o produto torcido – a fim de obter novos exemplos de variedades Riemannianas com curvatura negativa. Em geometria Riemanniana, variedades produtos torcido e suas formas genéricas tem sido usadas para construir novos exemplos com interessantes propriedades de curvatura desde então.

Em geometria Riemanniana, variedades do tipo produto torcido são frequentemente construídas de modo a satisfazerem certas condições ou restrições geométricas específicas - por exemplo, controle sobre as curvaturas seccional, de Ricci ou escalar, controle sobre o comportamento das geodésicas, etc. Também são importantes na obtenção de contra-exemplos em Geometria Riemanniana e Lorentziana.

Em Geometria Lorentziana algumas soluções bem conhecidas para as equações de campo de Einstein podem ser expressas em termos de produtos torcidos Lorentzianos. Por exemplo, na Teoria Geral da Relatividade os modelos de espaço-tempo de Robertson-Walker – dado por, $\mathsf{M}(\mathsf{k},\mathsf{S})$ é a variedade $I \times_{\mathsf{f}} \mathsf{S}$ com elemento linha $[-\mathsf{d}\mathsf{t}^2 + \mathsf{f}^2(\mathsf{t})\mathsf{d}\sigma^2]$, onde $\mathsf{d}\sigma^2$ é o elemento linha de S, sendo S uma variedade Riemanniana conexa tridimensional de curvatura constante $\mathsf{k} = -1$, 0 ou 1 – e de Schwarzschild – dado por, para $\mathsf{M} > 0$ sejam P_{I} e P_{II} as regiões $\mathsf{r} > 2\mathsf{M}$ e $0 < \mathsf{r} < 2\mathsf{M}$ no 3-semi-plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, cada uma munida com elemento linha $[-h\,\mathsf{d}\mathsf{t}^2 + h^{-1}\mathsf{d}\mathsf{r}^2]$, onde $h(\mathsf{r}) = 1 - (2\mathsf{M}/\mathsf{r})$ e, S^2 é a esfera unitária, então os produtos torcidos $\mathsf{N} = \mathsf{P}_{\mathrm{I}} \times_{\mathsf{r}} S^2$, $\mathsf{B} = \mathsf{P}_{\mathrm{II}} \times_{\mathsf{r}} S^2$ são chamados de espaço-tempo exterior de Schwarzschild e buraco negro de Schwarzschild, ambos de massa

M e elemento linha $[-h\,dt^2 + h^{-1}dr^2 + r^2 d\sigma^2]$ – e suas generalizações são do tipo produto torcido.

Além disso, atualmente, vem sendo bastante estudados resultados da teoria de imersão em espaços produto torcido. Uma noção muito importante é a de *imersão-produto torcida* que aparece naturalmente em vários estudos recentes relacionados a aspectos geométricos diferentes. Por exemplo, ela aparece no estudo de superfícies de multi-rotação, em problemas de decomposição, em desigualdades geométricas e em problemas de imersões mínimas. Portanto, é natural e desejado investigar propriedades fundamentais de imersão-produto torcida entre produtos torcidos.

Recordamos a definição de um produto torcido de duas variedades Riemannianas:

Sejam (B, g_B) e (F, g_F) variedades Riemannianas. Se $f : B \to (0, \infty)$ é uma função suave, então o produto torcido, $B \times_f F$, é a variedade produto $B \times F$ munida com a métrica $g = g_B + f^2 g_F$. Mais precisamente

$$g = \pi^*(g_B) + (f \circ \pi)^2 \sigma^*(g_F),$$

onde $\pi : B \times F \to B$ e $\sigma : B \times F \to F$ são as projeções usuais e $*$ denota o operador pull-back atuando em tensores. Aqui, (B, g_B) é chamada base, (F, g_F) é chamada fibra e f é chamada função torcão.

Se $M_1 \times_\rho M_2$ é um produto torcido, $\phi_1 : N_1 \longrightarrow M_1$ e $\phi_2 : N_2 \longrightarrow M_2$ são imersões isométricas entre variedades Riemannianas. Defina a função positiva $f \in C^\infty(N_1)$ por $f = \rho \circ \phi_1$. Então, a aplicação

$$\phi : N_1 \times_f N_2 \longrightarrow M_1 \times_\rho M_2$$

dada por $\phi\big(p_1, p_2\big) = \big(\phi_1(p_1), \phi_2(p_2)\big)$ é uma imersão isométrica, chamada de *imersão-produto torcida*. Se $\rho \equiv 1$, ϕ é chamada *imersão-produto* (*direta*).

Esta dissertação esta organizada da seguinte maneira:

No 2º capítulo são apresentados os resultados básicos da teoria de variedades Riemannianas que faremos uso ao longo desta dissertação. Demonstraremos apenas os resultados "não tão clássicos" e que utilizaremos de forma recorrente ao longo deste trabalho. Toda a teoria básica pode ser encontrada em textos clássicos de geometria Riemanniana, como por exemplo os livros de do Carmo [6], O'Neill [9], Warner [10], Lee [7], entre outros.

No 3º capítulo definimos produtos torcidos e estabelecemos as relações geométricas (métrica, conexão e curvatura) em um produto torcido, em termos das correspondentes informações em sua base, fibra e função torção, seguindo os mesmos argumentos de O'Neill [9].

No 4º capítulo, depois de definirmos imersão-produto torcida, apresentaremos quatro resultados de Chen [4] envolvendo a segunda forma fundamental e o vetor curvatura média, os quais servem para melhorar o teorema 1.4 de [3], provado em 2001 por B. Y. Chen. Os resultados que apresentaremos são os seguintes:

Teorema 1.1 (Teorema 1 de [4]). *Seja* $\phi = (\phi_1, \phi_2) : N = N_1 \times_f N_2 \longrightarrow M = M_1 \times_\rho M_2$ *uma imersão produto torcido entre duas variedades produto torcido. Então, temos:*

(a) ϕ *é totalmente geodésica mista.*

(b) *O quadrado da norma da segunda forma fundamental* h *de* ϕ *satisfaz*

$$||h||^2 \geqslant n_2 ||D \ln \rho||^2, \;\; n_2 = \dim N_2,$$

com a igualdade ocorrendo se ,e somente se, $\phi_1 : N_1 \longrightarrow M_1$ *e* $\phi_2 : N_2 \longrightarrow M_2$ *são ambas imersões totalmente geodésicas.*

(c) ϕ *é* N_1*-totalmente geodésica se, e somente se,* $\phi_1 : N_1 \longrightarrow M_1$ *é totalmente geodésica.*

(d) ϕ *é* N_2*-totalmente geodésica se, e somente se,* $\phi_2 : N_2 \longrightarrow M_2$ *é totalmente geodésica e* $\big(\nabla \ln \rho\big)|_{N_1} = \nabla \ln f$ *ocorre, isto é, a restrição do gradiente de* $\ln \rho$ *a* N_1 *é o gradiente de* $\ln f$*, ou equivalentemente,* $D \ln \rho = 0$.

(e) ϕ *é uma imersão totalmente geodésica se, e somente se,* ϕ *é* N_1*-totalmente geodésica e* N_2*-totalmente geodésica.*

Teorema 1.2 (Teorema 2 de [4]). *Uma imersão produto torcido* $\phi = (\phi_1, \phi_2) : N = N_1 \times_f N_2 \longrightarrow M = M_1 \times_\rho M_2$ *entre variedades produto torcido é totalmente umbílica se, e somente se, tivermos:*

(a) $\phi_1 : N_1 \longrightarrow M_1$ *é uma imersão totalmente umbílica com vetor curvatura média dado por* $-D \ln \rho$ *e*

(b) $\phi_2 : N_2 \longrightarrow M_2$ *é uma imersão totalmente geodésica.*

Teorema 1.3 (Teorema 3 de [4]). *Seja* $\phi = (\phi_1, \phi_2) : N = N_1 \times_f N_2 \longrightarrow M = M_1 \times_\rho M_2$ *uma imersão produto torcido entre variedades produto torcido. Então, temos:*

(a) *O vetor curvatura média de* $\phi_1 : N_1 \longrightarrow M_1$ *é igual ao vetor curvatura média parcial* $\overrightarrow{H}_1$ *; portanto,* ϕ *é* N_1*-mínima se, e somente se,* $\phi_1 : N_1 \longrightarrow M_1$ *é uma imersão mínima.*

(b) ϕ *é* N_2*-mínima se, e somente se,* $\phi_2 : N_2 \longrightarrow M_2$ *é uma imersão mínima e* $\big(\nabla \ln \rho\big)|_{N_1} = \nabla \ln f$ *ocorre.*

(c) $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ *é uma imersão mínima se, e somente se,* $\phi_2 : N_2 \longrightarrow M_2$ *é uma imersão mínima e o vetor curvatura média de* $\phi_1 : N_1 \longrightarrow M_1$ *é dado por* $\frac{n_2}{n_1} \frac{D\,\rho}{\rho}$

Teorema 1.4 (Teorema 4 de [4]). *Seja* $\phi = (\phi_1, \phi_2) : N = N_1 \times_f N_2 \longrightarrow M = M_1 \times_\rho M_2$ *uma imersão produto torcido de um produto torcido* $N_1 \times_f N_2$ *em uma representação produto torcido* $M_1 \times_\rho M_2$ *de uma forma espacial real* $\mathbb{R}^m(c)$*. Então, temos:*

(a) *O operador forma de* ϕ *em* $\overrightarrow{H}_1$, $A_{\overrightarrow{H}_1}$*, satisfaz*

$$A_{\overrightarrow{H}_1} Z = \left[\frac{\Delta}{n_1 f} - c\right] Z,$$

para Z *em* $\mathfrak{L}(N_2)$*, onde* Δ *é o operador Laplaciano de* N_1*.*

(b) *Para quaisquer* X*,* $Y \in \mathfrak{L}(N_1)$ *e* $Z \in \mathfrak{L}(N_2)$*,* $D_Z h(X, Y) = 0$ *ocorre, onde* D *é a conexão normal de* ϕ*. Em particular, temos* $D_Z \overrightarrow{H}_1 = 0$*.*

(c) *Os vetores curvatura média parciais* $\overrightarrow{H}_1$ *e* $\overrightarrow{H}_2$ *são perpendiculares entre si se, e somente se, a função torção* f *é uma autofunção do operador Laplaciano* Δ *com autovalor* $n_1 c$*.*

(d) *A função torção* f *é uma autofunção de* Δ *com autovalor* $n_1 c$ *se, e somente se, ou* $\phi_1 : N_1 \longrightarrow M_1$ *é uma imersão mínima ou* $\left.\left(\frac{\nabla \rho}{\rho}\right)\right|_{N_1} = \frac{\nabla f}{f}$ *ocorre.*

(e) *Quando* $c = 0$*, os vetores curvatura média parcial* $\overrightarrow{H}_1$ *e* $\overrightarrow{H}_2$ *são perpendiculares se, e somente se, a função torção* f *é uma função harmônica.*

(f) *Se* $\phi_1 : N_1 \longrightarrow M_1$ *é uma imersão não-mínima e os dois vetores curvatura média parcial* $\overrightarrow{H}_1$ *e* $\overrightarrow{H}_2$ *são paralelos em cada ponto, então* ϕ *é* N_2*-pseudo-umbílica e* $\phi_2 : N_2 \longrightarrow M_2$ *é uma imersão mínima.*

Teorema 1.5 (Teorema 5 de [4]). *Seja* $\phi : N = N_1 \times_f N_2 \longrightarrow \mathbb{R}^m(c)$ *uma imersão isométrica de um produto torcido em uma forma espacial real* $\mathbb{R}^m(c)$ *de curvatura constante c. Então o quadrado do vetor curvatura média* H^2 *de* ϕ *satisfaz a desigualdade:*

$$\frac{\Delta f}{f} \leqslant \frac{n^2}{4n_2} H^2 + n_1 c, \tag{1.1}$$

onde $n_i = \dim N_i$*,* $i = 1, 2$*,* $n = n_1 + n_2$ *e* Δ *é o operador Laplaciano de* N_1*.*

A igualdade de (1.1) *ocorre se, e somente se, exatamente um dos dois seguintes casos acontece:*

(a) *A função torção* f *é uma autofunção do operador Laplaciano* Δ *com autovalor* $n_1 c$ *e* ϕ *é uma imersão mínima;*

(b) $\Delta f \neq (n_1 c) f$ *e localmente* $\phi = (\phi_1, \phi_2) : N_1 \times_f N_2 \longrightarrow M_1 \times_\rho M_2$ *é uma imersão produto torcido não-mínima de* $N_1 \times_f N_2$ *em alguma representação produto torcido* $M_1 \times_\rho M_2$ *de* $\mathbb{R}^m(c)$ *tal que* $\phi_2 : N_2 \longrightarrow M_2$ *é uma imersão mínima e o vetor curvatura média de* $\phi_1 : N_1 \longrightarrow M_1$ *é dado por* $-\frac{n_2}{n_1}\left(\frac{D\rho}{\rho}\right)$.

No apêndice usamos um dos modos de generalizar produtos torcidos, no qual consiste em considerar o caso de multifibras e, nesse caso, o produto correspondente é chamado de *produto torcido múltiplo*. Também desenvolvemos as fórmulas gerais para a determinação da conexão, do gradiente, do laplaciano e das curvaturas de um tal produto torcido múltiplo.

Pretendemos que estes resultados possam servir de apoio a futuros projetos de pesquisa em geometria das variedades.

Por fim, gostaríamos de salientar que este trabalho abre espaço para novas e interessantes extensões de resultados da geometria das imersões. Por exemplo, podemos considerar deformações sobre a base a partir de funções definidas sobre as fibras, etc.

Capítulo 2

Noções Preliminares

Neste capítulo iremos estabelecer a notação a ser usada e recordar alguns conceitos e fatos básicos, necessários ao desenvolvimento dos capítulos seguintes. Sendo assim, a prova de alguns resultados não será feita, mas em todo o texto ficará clara a referência para obter tais justificativas.

2.1 Variedades

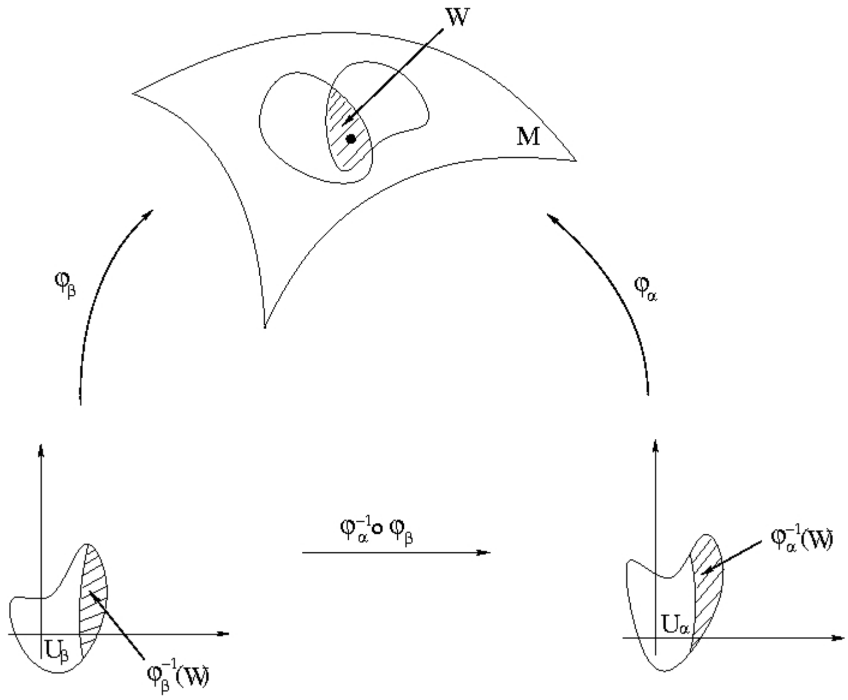
As definições a seguir foram extraídas das referências [6] e [9].

Definição 2.1. (*Variedade Diferenciável*) *Uma variedade diferenciável de dimensão* n *é um conjunto* M *e uma família de aplicações biunívocas* $\varphi_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$, $\alpha \in J$, *de abertos* U_α *de* $\mathbb{R}^n$ *em* M *tais que:*

(V_1) $\displaystyle\bigcup_\alpha \varphi_\alpha(U_\alpha) = M$.

(V_2) *Para todo par* α, β, *com* $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, *os conjuntos* $\varphi_\alpha^{-1}(W)$ *e* $\varphi_\beta^{-1}(W)$ *são abertos em* $\mathbb{R}^n$ *e as aplicações* $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha\Big|_{\varphi_\alpha^{-1}(W)} : \varphi_\alpha^{-1}(W) \longrightarrow \varphi_\beta^{-1}(W)$ *são diferenciáveis.*

(V_3) *A família* $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ *é máxima relativamente às condições* (V_1) *e* (V_2).



Obs 2.1. **(a)** *Uma família* $\mathbb{F} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ *satisfazendo* (V_1), (V_2), (V_3) *é chamada uma* ***estrutura diferenciável*** *em* M.

(b) *Dado* $p \in M$, *o par* $(U, \varphi) \in \mathbb{F}$, (*ou a aplicação* φ), *com* $p \in \varphi(U)$ *é chamado uma parametrização* (*ou sistema local de coordenadas*) *de* M *em* p*;* $\varphi(U)$ *é então chamada uma vizinhança coordenada em* p. *As funções* $x_i : \varphi(U) \subset M \longrightarrow \mathbb{R}$, *dadas por* $x_i = r_i \circ \varphi^{-1}$, *onde* r_i *é i-ésima projeção canônica, são as funções coordenadas da parametrização.*

(c) *Dada uma estrutura diferenciável em* M, *é possível completá-la a uma família máxima, agregando a ela todas as parametrizações que junto com alguma parametrização da estrutura satisfazem a condição* (V_2).

(d) *Uma estrutura diferenciável* $\mathbb{F} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ *em um conjunto* M *induz de maneira natural uma topologia em* M. *Basta definir que* $A \subset M$ *é um aberto de* M *se* $\varphi_\alpha^{-1}(A \cap \varphi_\alpha(U_\alpha))$ *é um aberto de* $\mathbb{R}^n$ *para todo* α. *Observe que a topologia é definida de tal modo que os conjuntos* $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ *são abertos e as aplicações* φ_α *são homeomorfismos* (*na realidade serão difeomorfismos*).

(e) *Por variedade diferenciável ou suave entenderemos sempre diferenciável de classe* C^∞. *Nos referiremos também a variedades diferenciáveis simplesmente como varidades,* *com diferenciabilidade de classe* C^∞ *sempre assumida implicitamente.*

Exemplo 2.1. *A estrutura diferenciável canônica no espaço Euclidiano* $\mathbb{R}^n$ *é obtida tomando* $\mathbb{F}$ *para ser a estrutura diferenciável (máxima em relação a* (V_2)*) contendo* $(\mathbb{R}^n, i)$*, onde:* $i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *é a aplicação identidade.*

Exemplo 2.2. *Seja* $S^n = \left\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\right\}$ *a esfera unitária em* $\mathbb{R}^{n+1}$*,*

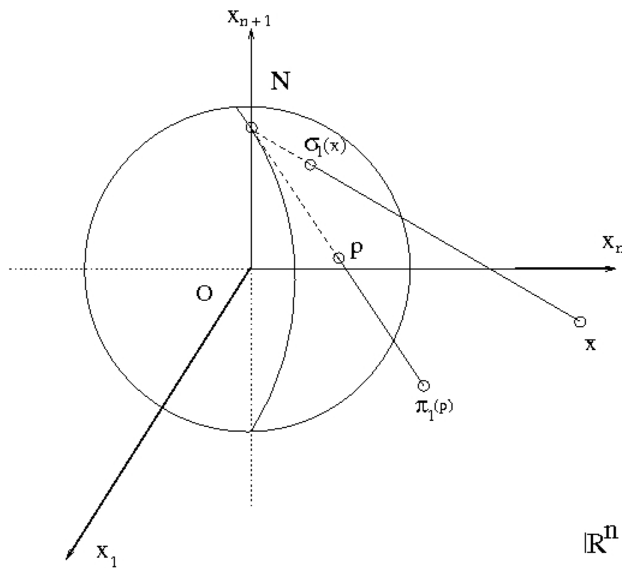
$N = (0, 0, \ldots, 1)$ *o pólo norte e* $S = (0, 0, \ldots, -1)$ *o pólo sul de* S^n*. Sejam* $\pi_1 : S^n - \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *e* $\pi_2 : S^n - \{S\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *as projeções estereográficas em relação aos pólos norte e sul, respectivamente, e sejam* σ_1 *e* σ_2 *as correspondentes inversas, com* $\sigma_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow S^n - \{N\}$ *dada por*

$$\sigma_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\frac{2x_1}{x_1^2 + \cdots + x_n^2 + 1}, \cdots, \frac{2x_n}{x_1^2 + \cdots + x_n^2 + 1}, \frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 1}{x_1^2 + \cdots + x_n^2 + 1}\right)$$

e $\sigma_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow S^n - \{S\}$ *dada por*

$$\sigma_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\frac{2x_1}{x_1^2 + \cdots + x_n^2 + 1}, \ldots, \frac{2x_n}{x_1^2 + \cdots + x_n^2 + 1}, \frac{1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2}{x_1^2 + \cdots + x_n^2 + 1}\right).$$

A família $\{(\mathbb{R}^n, \sigma_1), (\mathbb{R}^n, \sigma_2)\}$ *é uma estrutura diferenciável em* S^n*.*



Exemplo 2.3. *Seja* $f : U \subset \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *de classe* C^∞ *no aberto* U. *Se* $c \in \mathbb{R}^n$ *é valor regular de* f, *então* $f^{-1}(c)$ *é uma superfície de classe* C^∞ *e dimensão* m *em* $\mathbb{R}^{n+m}$.

Definição 2.2. (*Função Suave*) *Seja* M^n *uma variedade* (*suave*) n-*dimensional. Uma função* $f : U \subset M \longrightarrow \mathbb{R}$, U *aberto em* M, *é suave ou diferenciável de classe* C^∞ *se para cada* $\varphi_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$, com $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathbb{F}$ *e* $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap U \neq \emptyset$, *tivermos*

$$f \circ \varphi_\alpha : W \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \circ \varphi_\alpha \text{ de classe } C^\infty,$$

com $W = \varphi_\alpha^{-1}\left(\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap U\right) \neq \emptyset$ *e* $W \subset \mathbb{R}^n$ *aberto. Indicaremos por* $C^\infty(M)$ *o anel das funções suaves de* M *em* $\mathbb{R}$.

Definição 2.3. (*Aplicação Suave*) *Sejam* M^n *e* N^k *variedades. Uma aplicação* f, $f : U \subset M \longrightarrow N$, *com* U *aberto, é uma aplicação suave ou diferenciável de classe* C^∞ *se para toda função* $g : V \subset N \longrightarrow \mathbb{R}$, *com* $f(U) \subset V$ *e* V *aberto,* g *suave, tivermos* $g \circ f$ *suave, com* $g \circ f : U \subset M \longrightarrow \mathbb{R}$.

Equivalentemente, $f : U \subset M \longrightarrow N$ *é suave se dados* $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathbb{F}_M$ *e* $(V_\beta, \psi_\beta) \in \mathbb{F}_N$ *tivermos* $\psi_\beta^{-1} \circ f \circ \varphi_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$.

Exemplo 2.4. (*Variedade Produto*) *Sejam* M *e* N *variedades diferenciáveis, sendo* $\mathbb{F} = \big\{(U_\alpha, \varphi_\alpha); \alpha \in A\big\}$ *e* $\mathbb{G} = \big\{(V_\beta, \psi_\beta); \beta \in B\big\}$ *estruturas diferenciáveis de* M *e* N *respectivamente. Considere o produto cartesiano* $M \times N$ *e as aplicações*

$$\phi_{\alpha\beta}(p, q) = \big(\varphi_\alpha(p), \psi_\beta(q)\big), \ p \in U_\alpha, \ q \in V_\beta.$$

$\mathbb{H} = \big\{(U_\alpha \times V_\beta, \phi_{\alpha\beta}); (\alpha, \beta) \in A \times B\big\}$ *é uma estrutura diferenciável em* $M \times N$, *na qual as projeções* $\pi_1 : M \times N \longrightarrow M$ *e* $\pi_2 : M \times N \longrightarrow N$ *são diferenciáveis. Com esta estrutura diferenciável,* $M \times N$ *é chamada a variedade produto de* M *por* N.

Definição 2.4. (*Curva*) *Seja* M *uma variedade suave. Uma aplicação diferenciável* $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$, $I \subset \mathbb{R}$ *um intervalo aberto, é chamada uma curva em* M. *Se* α *for de classe* C^∞, *então* α *é uma curva suave.*

Sejam $p \in M$, M variedade e $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ uma curva com $\alpha(t_0) = p$. Se $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ é uma parametrização em $p = \varphi(q)$, $q \in U$, então a expressão local de α, em uma vizinhança de $t_0 \in I$, em termos da parametrização φ é dada por

$$\big(\varphi^{-1} \circ \alpha\big)(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)), \text{ ou seja, } \alpha(t) = \varphi(x_1(t), \ldots, x_n(t)),$$

em uma vizinhança de p.

Definição 2.5. (*Vetor Tangente*) *Sejam M uma variedade, $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ uma curva suave em M com $\alpha(0) = p$, $p \in M$. Seja $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções (reais) de M diferenciáveis em uma vizinhança de p. O vetor tangente à curva α em $t = 0$ é o operador linear $\alpha'(0) : \mathcal{D}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\alpha'(0)(f) = \left.\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\right|_{t=0}, \quad f \in C^\infty(M).$$

Um vetor tangente a M em p, υ, é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva suave $\alpha : (-\varepsilon, -\varepsilon) \longrightarrow M$, com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = \upsilon$. Se (U, φ) é uma parametrização em $p = \varphi(q)$, $q \in U$, exprimindo a função f e a curva α nesta parametrização, tem-se

$$\big(f \circ \varphi\big)(x) = f(x_1, \ldots, x_n), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$$

e

$$\big(\varphi^{-1} \circ \alpha\big)(t) = \big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big)$$

respectivamente. Portanto, restringindo f a α, obteremos

$$\upsilon(f) = \alpha'(0)f = \left.\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d(f \circ (\varphi \circ \varphi^{-1}) \circ \alpha)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d((f \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \alpha)}{dt}\right|_{t=0} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i'(0) \frac{\partial f}{\partial x_i}(q) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i'(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_q \right)(f).$$

Em outras palavras, o vetor $\alpha'(0)$ pode ser expresso na parametrização φ por

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^{n} x_i'(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_q. \tag{2.1}$$

Observe que $\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_q$ é o vetor tangente em p à "curva coordenada"dada por

$$\alpha(t) = \varphi(\beta(t)), \ \beta : (-\varepsilon, -\varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^n, \ \beta(t) = q + t.e_i,$$

onde $\{e_i, \ i = 1, \ldots, n\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^n$.

A expressão (2.1) mostra que um vetor υ tangente a M em p — o vetor tangente a uma curva α em p — depende apenas das derivadas de α em um sistema de coordenadas, isto é, υ independe da curva localmente e, além disso, $\upsilon(f)$ não depende da parametrização.

Definição 2.6. (*Espaço Tangente*) *O espaço tangente a $p \in M$ é o conjunto dos vetores tangentes a M em p, denotado por $T_pM = \{\upsilon; \upsilon$ é vetor tangente a M em p$\}$.*

Obs 2.2. *O espaço tangente a M em p, T_pM, para cada $p \in M$, admite estrutura natural de espaço vetorial real.*

Definição 2.7. *Sejam M uma variedade e (U, φ) um sistema local de coordenadas em uma vizinhança $\varphi(U)$ de $p \in M$ com funções coordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, denotamos por $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$ ao vetor tangente a M em p definido por*

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (f) = \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial r_i}(\varphi^{-1}(p)), \tag{2.2}$$

para cada função $f \in C^\infty(V \subset M, \mathbb{R})$ definida em uma vizinhança V de p. Chamamos os $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$ de campos coordenados.

Usamos também a notação $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$. Não é difícil verificar que $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$ é de fato um vetor tangente a M em p.

Obs 2.3. **(a)** *Sejam M uma variedade e (U, φ) uma parametrização de M em p com funções coordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Então, a família $\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p, i = 1, 2, \ldots, n \right\}$ é uma base para T_pM.*

(b) *Todo $\upsilon \in T_pM$ é da forma $\upsilon = \sum \alpha_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$, com $\alpha_i = \upsilon(x_i)$, sendo x_i as funções coordenadas da parametrização.*

Definição 2.8. (*Diferencial de Aplicações*) *Sejam M e N variedades e $f : M \longrightarrow N$ aplicação C^∞. Definimos a diferencial de f em $p \in M$, df_p, como a associação que a cada $\upsilon \in T_pM$ e cada $g \in C^\infty(V \subset N, \mathbb{R})$, V aberto, com $f(p) \in V$, satisfaz*

$$(df_p(\upsilon))g := \upsilon\big(g \circ f\big)(p), \ \text{ ou ainda } \big(df(\upsilon)\big)(g) = \upsilon(g \circ f).$$

Dessa forma, $df_p(v) \in T_{f(p)}N$, *isto é,* $df_p(v)$ *é um vetor tangente a* N *em* $f(p)$. *Além disso, a diferencial de* f *em* $p \in M$ *é uma aplicação linear* $df_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$.

Obs 2.4. **(a)** (*Teorema da aplicação composta*) *Se* $f : M \longrightarrow N$ *e* $g : N \longrightarrow P$ *são aplicações suaves, então para cada* $p \in M$

$$d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p.$$

(b) *Seja agora* M^n *uma variedade,* $p \in M$ *e* (U, φ) *um sistema local de coordenadas em* $p = \varphi(q)$. *Considere* $\mathbb{R}^n$ *com a estrutura diferencável padrão* ($\mathbb{R}^n$ *como variedade*). *Dessa forma,* φ, φ^{-1} *são suaves e* $d\varphi_q(e_i) = \left.\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$ *e* $d\varphi_p^{-1}\left(\left.\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right|_p\right) = e_i$.

Definição 2.9. (*Fibrado Tangente*) *Seja* M^n *uma variedade diferenciável. O fibrado tangente de* M *é o espaço* $TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_pM\} = \bigsqcup_{p \in M} T_pM$, *onde* $\bigsqcup$ *é a união disjunta.* TM *possui estrutura de variedade diferenciável. Seja* $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ *a estrutura diferenciável de* M. *Indicaremos por* $(x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha)$ *as coordenadas de* U_α *e por* $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n^\alpha}\right\}$ *o referencial local associado. Para cada* α, *defina*

$$\Phi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \longrightarrow TM,$$

por

$$\Phi_\alpha(x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha, u_1, \ldots, u_n) = \left(\varphi_\alpha(x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha), \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}\right), \; (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Isto significa que tomamos como coordenadas de um ponto $(p, v) \in TM$ *as coordenadas* $x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha$ *de* p *junto com as coordenadas de* v *na base* $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n^\alpha}\right\}$.

$\{(U_\alpha \times \mathbb{R}^n, \Phi_\alpha)\}$ *é uma estrutura diferenciável em* TM, *portanto* TM *é uma variedade* $2n$-*dimensional.*

Existe uma projeção natural de TM em M, $\pi : TM \longrightarrow M$, dada por $\pi(p, v) = p$ ou $\pi(v) = p$, $\forall v \in T_pM$. Assim $\pi^{-1}(p) = T_pM$, $\forall p \in M$.

Definição 2.10. (*Imersão*) *Sejam* M, N *variedades. Uma aplicação diferenciável* (*suave*) $f : M \longrightarrow N$ *é uma imersão se* $df_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ *é injetiva para todo* $p \in M$.

Definição 2.11. (*Subvariedade*) *Sejam* M*,* N *variedades e uma aplicação suave* $\phi : M \longrightarrow N$*. O par* (M, ϕ) *é uma subvariedade de* N *se* ϕ *for uma imersão injetiva.*

Equivalentemente, uma variedade M *é uma subvariedade de uma variedade* N *desde que:*

(Sv_1) M *é um subespaço topológico de* N*.*

(Sv_2) *A aplicação inclusão* $i : M \longrightarrow N$ *é suave e em cada ponto* $p \in M$ *sua aplicação diferencial* di_p *é injetiva.*

Obs 2.5. *Seja* M *uma subvariedade de* N*.*

(a) *Se* $f : N \longrightarrow P$ *é uma aplicação suave* (P *variedade*)*, então a restrição de* $f\big|_M$ *de* f *em* M *é suave, pois* $f\big|_M$ *é exatamente* $f \circ i$ (ou $f \circ \phi$)*.*

(b) *Se* $i : M \subset N$ *é uma subvariedade de* N*, é usual identificar-se o espaço tangente* T_pM *como um subespaço de* T_pN *para cada* $p \in M$ $\big($*isto é,* $T_pM \approx di_p(T_pM)\big)$*.*

(c) *Se* $\phi : P \longrightarrow N$ *é uma aplicação suave* (P *variedade*)*, tal que* $\phi(P) \subset M$*, então a aplicação induzida* $\overline{\phi} : P \longrightarrow M$*, com* $\overline{\phi}(x) = \phi(x)\ \forall x \in P$*, é suave.*

Definição 2.12. (*Mergulho*) *Sejam* M*,* N *variedades. Uma aplicação suave* $\phi : M \longrightarrow N$ *é um mergulho se* ϕ *for uma imersão e* $\phi : M \longrightarrow \phi(M) \subset N$ *for um homeomorfismo sobre a imagem, munida da topologia subespaço. Portanto,* $\widetilde{\phi} : M \longrightarrow \phi(M)$*, com* $\widetilde{\phi}(p) = \phi(p)$*, é uma aplicação aberta sobre* $\phi(M)$*,munido com a topologia subespaço.*

Subvariedades e mergulhos estão intimamente relacionados: se M é uma subvariedade de N, então a aplicação inclusão $i : M \subset N$ é um mergulho.

Exemplo 2.5. *O exemplo clássico de mergulho é a aplicação* $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *dada por* $f(x_1, ..., x_m) = (x_1, ..., x_m, 0, ..., 0)$*.* $(m \leqslant n)$*.*

Definição 2.13. (*Valor regular*) *Sejam* M*,* N *variedades e* $\psi : M \longrightarrow N$ *uma aplicação suave. Um ponto* $q \in N$ *é chamado um valor regular de* ψ *se* $d\psi_p : T_pM \longrightarrow T_{\psi(p)}N$ *é sobrejetiva* $\forall p \in \psi^{-1}(q)$*.*

Obs 2.6. *Se* $q \in \psi(M)$ *é um valor regular de uma aplicação suave* $\psi : M \longrightarrow N$*, então* $\psi^{-1}(q)$ *é uma subvariedade de* M *e* $\dim(M) = \dim(N) + \dim(\psi^{-1}(q))$.

Definição 2.14. (*Difeomorfismo*) *Uma aplicação* $f : M \longrightarrow N$*, entre as variedades* M *e* N*, é um difeomorfismo se* f *é diferenciável, bijetiva e sua inversa* $f^{-1} : M \longrightarrow N$ *é diferenciável. A aplicação* f *é um difeomorfismo local em* $p \in M$ *se existem vizinhanças* U *de* p *e* V *de* $f(p)$ *tais que* $f : U \longrightarrow V$ *é um difeomorfismo.*

Uma consequência imediata do teorema da função composta é que se $f : M \longrightarrow N$ é um difeomorfismo, então $df_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ é um isomorfismo para todo $p \in M$; em particular as dimensões de M e N são iguais. Além disso, vale o teorema da aplicação inversa:

Teorema 2.1. (*Teorema da Aplicação Inversa*) *Seja* $f : M \longrightarrow N$ *uma aplicação diferenciável e seja* $p \in M$ *tal que* $df_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ *é um isomorfismo. Então* f *é um difeomorfismo local em* p.

Definição 2.15. (*Variedade Orientável*) *Seja* M *uma variedade diferenciável. Diz-se que* M *é orientável se* M *admite uma estrutura diferenciável* $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ *tal que:*

(i) *para todo par* α*,* β*, com* $\varphi_\alpha(U_\alpha) \cap \varphi_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$*, a diferencial da mudança de coordenadas* $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ *tem determinante positivo.*

Caso contrário, diz-se que M *não é orientável. Se* M *é orientável, a escolha de uma estrutura diferenciável satisfazendo* (i) *é chamada uma orientação de* M *e* M *é, então dita estar orientada.*

Duas estruturas diferenciáveis determinam a mesma orientação se a união delas ainda satisfaz (i).

Obs 2.7. (a) *Seja* M *uma variedade. Se* M *é orientável e conexa existem exatamente duas orientações distintas em* M.

(b) *Sejam agora* M *e* N *variedades diferenciáveis e* $f : M \longrightarrow N$ *um difeomorfismo. Verifica-se que* M *é orientável se, e somente se,* N *é orientável. Se, além disso,* M *e* N *são conexas e estão orientadas,* f *induz uma orientação em* N *que pode ou não coincidir com a orientação inicial de* N*. Se coincidir, diz-se que* f *preserva orientação e, caso contrário,* f *reverte a orientação.*

Exemplo 2.6. *Seja* M *uma variedade. Se* M *pode ser coberta por duas vizinhanças coordenadas* V_1 *e* V_2 *de modo que a interseção* $V_1 \cap V_2$ *é conexa, então* M *é orientável.*

Definição 2.16. (*Seção de* TM) *Uma aplicação* $\sigma : M \longrightarrow TM$ *tal que* $\pi \circ \sigma = id_M$ *é chamada uma seção de* TM*.*

Identifica-se M com uma subvariedade de TM (a seção nula de TM). Isto é, $(p, 0) \simeq p$.

Definição 2.17. *Diz-se que* $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ *é uma curva diferenciável na variedade* M *se* α *admite uma extensão* $\widehat{\alpha} : (a - \varepsilon, b + \varepsilon) \longrightarrow M$ *diferenciável tal que* $\widehat{\alpha}\big|_{[a,b]} = \alpha$.

Definição 2.18. *Dada uma curva suave* $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$*, um campo de vetores suave ao longo de* α *é uma aplicação suave*

$$X : [a, b] \longrightarrow TM$$

que é um "levantamento"da curva α*, isto é, se*

$$\begin{array}{rcccl} \pi : & TM & \longrightarrow & M & \\ & v & \longmapsto & \pi(v) & = p, \ v \in T_pM, \end{array}$$

então $(\pi \circ X)(t) = \alpha(t), \ \forall t$*, isto é,* $X(t) \in T_{\alpha(t)}M$*,* $\forall t$.

Definição 2.19. (*Campo Suave*) *Seja* $U \subset M$ *um aberto da variedade* M*. Um campo* (suave) *de vetores sobre* U *é uma aplicação* (suave) $X : U \longrightarrow TM$ *que é uma seção suave de* U *em* TM*, isto é,*

$$\pi \circ X = id\big|_U.$$

Assim, um campo suave de vetores X *em uma variedade diferenciável* M *é uma correspondência suave que a cada ponto* $p \in M$ *associa um vetor* $X(p) = X_p \in T_pM$*. Indicaremos por* $\mathfrak{X}(U)$ *o conjunto dos campos de vetores suaves em* U*.*

O espaço dos campos vetoriais suaves sobre um aberto $U \subset M$, $\mathfrak{X}(U)$, admite de modo natural a estrutura de espaço vetorial real (de dimensão infinita) com as operações naturais de soma e produto por escalar, isto é, $(X+Y)(p) = X_p + Y_p$ e $(cX)(p) = cX_p$, quaisquer que sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ e $c \in \mathbb{R}$. De fato, $\mathfrak{X}(U)$ é um $C^\infty(U)$-módulo sobre anel das funções $f \in C^\infty(U)$, isto é, $\mathfrak{X}(U)$ tem uma estrutura linear quando tomamos como "escalares"as funções $f \in C^\infty(U)$.

Proposição 2.1. (*Caracterização de campos suaves*) *Se* $X : M \longrightarrow TM$ *é um campo de vetores* ($\text{não necessariamente suave}$)*, então são equivalentes as seguintes condições:*

(C_1) $X \in \mathfrak{X}(M)$*, isto é,* X *é um campo suave.*

(C_2) *Dado um sistema local de coordenadas* $(U, (x_1, ..., x_n))$ *arbitrário em* M*, se* $a_1, ..., a_n : U \subset M \longrightarrow \mathbb{R}$ *são funções tais que*

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p, \forall p \in U, \tag{2.3}$$

então $a_i \in C^\infty(U)$.

(C_3) *Sempre que* $V \subset M$*,* V *aberto, e* $f \in C^\infty(V)$*, então* $Xf \in C^\infty(V)$*, onde* $Xf : V \longrightarrow \mathbb{R}$ *é dada por* $(Xf)(p) = X(p)(f) = X_p(f)$.

Demonstração: Vide [10]. ■

Lema 2.1. (*Colchete de Lie*) *Sejam* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$*. Então existe um único campo vetorial* $Z \in \mathfrak{X}(M)$ *tal que,* $\forall f \in C^\infty(M)$*,* $Zf = (XY - YX)f = X(Yf) - Y(Xf)$.

O campo vetorial Z dado pelo lema (2.1) é chamado o colchete de Lie de X e Y, e é denotado por $[X, Y] = XY - YX$.

Proposição 2.2. *Dados* X*,* Y*,* $Z \in \mathfrak{X}(M)$*,* a*,* $b \in \mathbb{R}$*, e* f*,* g *funções diferenciáveis em* M*, tem-se*

(a) $[X, Y] = -[Y, X]$ (*anticomutatividade*),

(b) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$,

(c) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (*identidade de Jacobi*),

(d) $[fX, gY] = fg[X, Y] + (fX(g))Y - (gY(f))X$.

Definição 2.20. (*Campos ϕ-relacionados*) *Sejam* M*,* N *variedades,* $\phi : M \longrightarrow N$ *uma aplicação suave,* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $Y \in \mathfrak{X}(N)$*. Diz-se que os campos* X *e* Y *são* ϕ*-relacionados, se*

$$d\phi_p(X_p) = \big(Y \circ \phi\big)(p) = Y\big(\phi(p)\big) = Y_{\phi(p)}, \forall p \in M.$$

Se X *e* Y *são* ϕ*-relacionados escrevemos* $X \overset{\phi}{\sim} Y$*.*

O lema seguinte é uma consequência direta da definição.

Lema 2.2. *Sejam* M*,* N *variedades,* $\phi : M \longrightarrow N$ *uma aplicação suave,* $X \in \mathfrak{X}(M)$*,* $Y \in \mathfrak{X}(N)$*.* X *e* Y *são* ϕ*-relacionados se, e somente se,*

$$X(g \circ \phi) = (Yg) \circ \phi, \ \forall g \in C^\infty(N).$$

Demonstração:

De fato, dada $g \in C^\infty(N)$, $X(g \circ \phi)$ e $(Yg) \circ \phi$ são funções (reais) suaves em M. $X(g \circ \phi) = (Yg) \circ \phi$ são iguais se, e somente se, dado $p \in M$, $X\big(g \circ \phi\big)(p) = \big((Yg) \circ \phi\big)(p)$. Daí, dado $p \in M$,

$X\big(g \circ \phi\big)(p) = X_p\big(g \circ \phi\big) = \big(d\phi_p(X_p)\big)(g)$, e por outro lado

$\big((Yg) \circ \phi\big)(p) = Y_{\phi(p)}(g), \ \forall p \in M$, donde segue o resultado, ou seja $X \overset{\phi}{\sim} Y$. ∎

Lema 2.3. *Sejam* $\phi : M \longrightarrow N$ *uma aplicação suave,* M *e* N *variedades,* X_1*,* $X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ *e* Y_1*,* $Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$*. Se* $X_1 \overset{\phi}{\sim} Y_1$ *e* $X_2 \overset{\phi}{\sim} Y_2$*, então* $[X_1, X_2] \overset{\phi}{\sim} [Y_1, Y_2]$*.*

Demonstração:

Basta mostrar que $d\phi_p\big([X_1, X_2]_p\big) = [Y_1, Y_2]_{\phi(p)}, \forall p \in M$, onde $[X_1, X_2](p) = [X_1, X_2]_p$. De fato, dados $p \in M$ e $f \in C^\infty(N, \mathbb{R})$, temos que

$$d\phi_p\big([X_1, X_2]_p\big)(f) = [X_1, X_2]_p(f \circ \phi) = \big([X_1, X_2](f \circ \phi)\big)(p), \ \forall\, p \in M,$$

isto é equivalente a,

$$\begin{aligned}[X_1, X_2](f \circ \phi) &= X_1\big(X_2(f \circ \phi)\big) - X_2\big(X_1(f \circ \phi)\big) \overset{lema 2.2}{=} X_1\big((Y_2 f) \circ \phi\big) - X_2\big((Y_1 f) \circ \phi\big) \\ &= d\phi(X_1)(Y_2 f) - d\phi(X_2)(Y_1 f) = Y_1(Y_2 f) - Y_2(Y_1 f) = [Y_1, Y_2](f).\end{aligned}$$

Portanto, $d\phi_p\big([X_1, X_2]_p\big) = [Y_1, Y_2]_{\phi(p)}, \ \forall p \in M$. ∎

Lema 2.4. *Sejam* M, N *variedades e* $\phi : M \longrightarrow N$ *um difeomorfismo. Para cada* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *há um único campo de vetores* $d\phi(X) \in \mathfrak{X}(N)$ *que é* ϕ*-relacionado a* X.

Demonstração:

De fato, como ϕ é um difeomorfismo, então $d\phi_p$ é um isomorfismo em cada $p \in M$. Defina $Y \in \mathfrak{X}(N)$ por $Y = d\phi(X)$ da seguinte maneira

$$\begin{aligned} Y : N &\longrightarrow TN \\ q &\longmapsto Y(q) := d\phi_p(X_p), \forall q = \phi(p) \in N. \end{aligned}$$

Como ϕ é um difeomorfismo, Y está bem definido.

$Y = d\phi(X)$ é suave, já que se $g \in C^\infty(N)$, para cada $q = \phi(p)$, então $(Yg)(q) = Y(q)(g) = d\phi_p(X_p)(g) = X_p(g \circ \phi)(p) = X_p(g \circ \phi)(\phi^{-1}(q))$, portanto $Yg = X(g \circ \phi) \circ \phi^{-1} \in C^\infty(N, \mathbb{R})$. E por definição, $X \overset{\phi}{\sim} Y$. ∎

O campo vetorial $d\phi(X)$ é chamado campo vetorial transportado de X.

Definição 2.21. *Sejam* M *uma subvariedade de uma variedade* N *e* $X \in \mathfrak{X}(N)$. X *é um* ***campo vetorial tangente*** *a* M *desde que* $X(p) = X_p \in T_pM, \forall p \in M$ (*lembre que* T_pM *é considerado um subespaço de* T_pN).

Proposição 2.3. *Sejam* M *uma subvariedade de uma variedade* N, *e* $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$ *são tangentes a* M . *Então*

(a) *a restrição* $X\big|_M$ *de* X *a* M *é um campo suave em* M, *isto é,* $X\big|_M \in \mathfrak{X}(M)$.

(b) *Além disso,* $[X, Y]$ *é tangente a* M *e* $[X, Y]\big|_M = \left[X\big|_M, Y\big|_M\right]$.

Demonstração: Vide [9]. ∎

Obs 2.8. (***Novamente a variedade produto***) *Sejam* M^n *e* N^k *variedades e considere a variedade produto* $M \times N$.

(a) *As projeções canônicas*

$$\pi : M \times N \longrightarrow M, \quad \pi(p, q) = p;$$

$$\sigma : M \times N \longrightarrow N, \quad \sigma(p, q) = q$$

são aplicações suaves, na realidade submersões.

(b) *Uma aplicação* $\phi : P \longrightarrow M \times N$ *é suave se, e somente se, ambas* $\pi \circ \phi$ *e* $\sigma \circ \phi$ *são suaves.*

(c) *Para cada* $(p, q) \in M \times N$ *os subconjuntos*

$$M \times q = \{(r, q) \in M \times N; r \in M\},$$

$$p \times N = \{(p, s) \in M \times N; s \in N\}$$

são subvariedades mergulhadas de $M \times N$*, difeomorfas a* M *e* N*, respectivamente.*

Com efeito, dados $(p, q) \in M \times N$*,* (U, φ) *e* (V, ψ) *sistemas locais de coordenadas em torno de* $p \in M$ *e* $q \in N$*, respectivamente, tem-se que* $\big(U \times V, \phi\big)$*, com* $\phi(x, y) = \big(\varphi(x), \psi(y)\big)$*,* $x \in U$*,* $y \in V$*, é uma parametrização de* $M \times N$ *em* (p, q)*. Defina*

$$\begin{array}{rcl} {}_q i \ : \ M & \longrightarrow & M \times q \subset M \times N \\ x & \longmapsto & {}_q i(x) = (x, q). \end{array}$$

A aplicação ${}_q i$ *é suave, pois* $\phi^{-1} \circ {}_q i \circ \varphi : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ *é suave, com* $(\phi^{-1} \circ {}_q i \circ \varphi)(U) = U \times \{\psi^{-1}(q)\} \subset \mathbb{R}^{n+k}$*. Assim, a aplicação* ${}_q i$ *é injetiva, e como* $d(\phi^{-1} \circ {}_q i \circ \varphi)$ *é injetiva,* $d_q i$ *é injetiva. De modo análogo, a aplicação inversa* $({}_q i)^{-1} : M \times q \subset M \times N \longrightarrow M$ *é suave. Portanto,* ${}_q i : M \times q \subset M \times N$ *é uma subevariedade mergulhada. Da mesma forma,* $p \times N$ *é uma subvariedade mergulhada de* $M \times N$*.*

E ainda,

$${}_q\pi := \pi\big|_{M \times q} : M \times q \longrightarrow M, \quad {}_p\sigma := \sigma\big|_{p \times N} : p \times N \longrightarrow N$$

são difeomorfismos.

Por **(c)***, os espaços tangentes*

$$T_{(p,q)}M \equiv T_{(p,q)}(M \times q) \qquad \text{e} \qquad T_{(p,q)}N \equiv T_{(p,q)}(p \times N)$$

são subespaços do espaço tangente a $M \times N$ *em* (p, q)*.*

Lema 2.5. $T_{(p,q)}(M \times N)$ *é a soma direta dos seus subespaços* $T_{(p,q)}M$ *e* $T_{(p,q)}N$*; isto é cada elemento* $v \in T_{(p,q)}(M \times N)$ *tem uma única expressão como*

$$v = v_1 + v_2, \quad \textit{onde} \quad v_1 \in T_{(p,q)}M \quad \textit{e} \quad v_2 \in T_{(p,q)}N.$$

Demonstração:

Como $T_{(p,q)}M$ e $T_{(p,q)}N$ são subespaços vetoriais de $T_{(p,q)}(M \times N)$ e, $\dim\big(T_{(p,q)}(M \times N)\big) = \dim(T_{(p,q)}M) + \dim(T_{(p,q)}N) < \infty$, basta mostrar que $T_{(p,q)}M \cap T_{(p,q)}N = \{0\}$, $0 \in T_{(p,q)}(M \times N)$. De fato,

$\pi\big|_{p \times N}$ é constante, logo $d\pi_{(p,q)}(T_{(p,q)}N) = 0$. Mas, $d\pi_{(p,q)}\Big|_{T_{(p,q)}M} = d({}_q\pi)_p$ é um isomorfismo em cada $(p,q) \in M \times q$. Daí, se existe $v \in T_{(p,q)}M \cap T_{(p,q)}N, v \neq 0$, por um lado $d\pi(v) = 0$, pois $v \in T_{(p,q)}N$ e por outro $d\pi(v) \neq 0$, pois $v \in T_{(p,q)}M$, o que é um absurdo. Logo, $T_{(p,q)}M \cap T_{(p,q)}N = \{0\}$, e portanto, $T_{(p,q)}(M \times N) = T_{(p,q)}M \oplus T_{(p,q)}N$. Além disso, poderíamos ter usado σ ao invés de π na demonstração, concluindo que $T_{(p,q)}M \subset \ker(d\sigma)$ e $T_{(p,q)}N \subset \ker(d\pi)$. Assim, dado $v \in T_{(p,q)}(M \times N)$, $v = v_1 + v_2$, com $d\pi(v) = v_1$ e $d\sigma(v) = v_2$. ■

Segue do lema (2.5) e da observação (2.8) que podemos fazer a seguinte identificação: $T_{(p,q)}(M \times N) = T_pM \oplus T_qN$. E ainda, seja $\nu \in T_{(p,q)}(M \times N)$, $\nu_1 = d\pi(\nu) \in T_pM$ e $\nu_2 = d\sigma(\nu) \in T_qN$. Se $f \in C^\infty\big((M \times N), \mathbb{R}\big)$, então

$$\nu(f) = \nu_1(f \circ {}_q\pi^{-1}) + \nu_2(f \circ {}_p\sigma^{-1}). \tag{2.4}$$

Para podermos relacionar propriedades geométricas de $M \times N$ com as correspondentes propriedades das componentes M e N, uma noção fundamental é a de levantamento, que definimos a seguir:

Definição 2.22. (*Levantamento*) *Sejam* M^n *e* N^k *variedades e considere a variedade produto* $M \times N$.

(a) *Seja* $f \in C^\infty(M)$. *O levantamento de* f *a* $M \times N$ *é definido por* $\widetilde{f} = f \circ \pi \in C^\infty(M \times N)$.

(b) *Se* $\nu \in T_pM$ *e* $q \in N$ *então o levantamento de* ν *a* (p,q) *é o único vetor* $\widetilde{\nu} \in T_{(p,q)}M$ *tal que* $d\pi(\widetilde{\nu}) = \nu$. *Como* $\widetilde{\nu} \in T_{(p,q)}M$, $d\sigma(\widetilde{\nu}) = 0$.

(c) *Se* $X \in \mathfrak{X}(M)$, *o levantamento de* X *a* $M \times N$ *é o campo vetorial* $\widetilde{X}$ *em* $M \times N$ *cujo valor em cada ponto* $(p,q) \in M \times N$ *é o levantamento de* X_p *a* (p,q). *Assim,*

$d\pi(\widetilde{X}_{(p,q)}) = (X \circ \pi)(p,q) = X_p$ *e* $d\sigma(\widetilde{X}_{(p,q)}) = 0$. *O sistema de coordenadas produto mostra que* $\widetilde{X}$ *é suave. Portanto, o levantamento de* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *a* $M \times N$ *é o único elemento de* $\mathfrak{X}(M \times N)$ *que é* π*-relacionado a* X *e* σ*-relacionado ao campo vetorial nulo em* N. *E ainda, como* $d\sigma\Big|_{T_{(p,q)}M} = 0$, *o levantamento* $\widetilde{X}$ *de* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *a* $M \times N$ *é constante em cada fibra* $p \times N$.

(d) *O conjunto de todos os levantamentos* $\widetilde{X}$ *de* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *é denotado por* $\mathfrak{L}(M)$ *e tais levantamentos são chamados horizontais.*

(e) *Funções, vetores tangentes, e campos de vetores em* N *são levantados para* $M \times N$ *da mesma forma usando-se a projeção* σ. *O conjunto de todos os levantamentos* $\widetilde{Y}$ *de* $Y \in \mathfrak{X}(N)$ *é denotado por* $\mathfrak{L}(N)$, *tais levantamentos são chamados verticais e,* $\widetilde{Y} \in \mathfrak{X}(M \times N)$.

Obs 2.9. *Sejam* M^n, N^k *variedades e considere a variedade produto* $M \times N$.

(a) $\mathfrak{L}(M)$ *e* $\mathfrak{L}(N)$ *são subespaços de* $\mathfrak{X}(M \times N)$ *mas (exceto nos casos triviais) não são invariantes sob a multiplicação por funções arbitrárias* $f \in C^\infty(M \times N)$. *Por exemplo, em* $\mathbb{R}^2$ *o campo vetorial coordenado* $\partial x = \partial/\partial x$ *é o levantamento horizontal do campo vetorial* d/dx *em* $\mathbb{R}^1$ *(como eixo* x*), mas* $y\partial x$ *não é um levantamento. Contudo, se* $C^\infty(M)_N$ *é o anel das funções* $C^\infty(M \times N)$ *que são levantamento de funções* $C^\infty(M)$, *então* $\mathfrak{L}(M)$ *é* $C^\infty(M)_N$*-módulo.*

(b) *Se* $(U, \varphi) = (U, x_1, \ldots, x_n)$ *e* $(V, \psi) = (V, y_1, \ldots, y_k)$ *são parametrizações de* M *e* N, *respectivamente, então* $(U \times V, \Phi) = (U \times V, z_1, \ldots, z_{n+k})$ *é uma parametrização em* $M \times N$, *com* $\Phi : U \times V \subset \mathbb{R}^{n+k} \longrightarrow M \times N$, $\Phi(x,y) = (\varphi(x), \psi(y))$, $z_i = x_i \circ \pi$, $i = 1, \ldots, n$, $z_{n+j} = y_j \circ \sigma$, $j = 1, \ldots, k$, π *e* σ *são as projeções canônicas de* $M \times N$ *sobre* M *e* N, *respectivamente. Temos que* $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\big|_p, i = 1, \ldots, n\right\}$ *é uma base para* T_pM, *para cada* $p \in \varphi(U)$, $\left\{\frac{\partial}{\partial y_j}\big|_q, j = 1, \ldots, k\right\}$ *é uma base para* T_qN, *para cada* $q \in \psi(V)$. *Assim,* $\left\{\frac{\partial}{\partial z_l}\big|_{(p,q)}, l = 1, \ldots, n+k\right\}$ *é uma base para* $T_{(p,q)}(M \times N)$ *para cada* $(p,q) \in \varphi(U) \times \psi(V)$ *e, o campo coordenado* $\frac{\partial}{\partial z_l}$ *é dado, na parametrização* Φ, *por* $\frac{\partial}{\partial z_i} = \widetilde{\frac{\partial}{\partial x_i}}$, $i = 1, \ldots, n$, $\frac{\partial}{\partial z_{n+j}}\big|_{(p,q)} = \widetilde{\frac{\partial}{\partial y_j}}$, $j = 1, \ldots, k$, *onde* $\widetilde{\frac{\partial}{\partial x_i}} \in \mathfrak{L}(M)$ *é o levantamento do campo* $\frac{\partial}{\partial x_i}$ *e* $\widetilde{\frac{\partial}{\partial y_j}} \in \mathfrak{L}(N)$ *é o levantamento de* $\frac{\partial}{\partial y_j}$.

(c) *Sejam* $\widetilde{X} \in \mathfrak{L}(M)$ *e* $\Phi : U \times V \longrightarrow M^n \times N^k$ *um sistema local de coordenadas dado como acima, então neste sistema,* $\widetilde{X}$ *se escreve como*

$$\widetilde{X}(p,q) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p,q)\widetilde{\frac{\partial}{\partial x_i}} + \sum_{j=1}^{k} b_j(p,q)\widetilde{\frac{\partial}{\partial y_j}}$$

e $X \in \mathfrak{X}(M)$ *é o campo em* M *do qual* $\widetilde{X}$ *é o levantamento, então no sistema coordenado* (U, φ) *tem-se*

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} A_i(p)\frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad d\pi\left(\widetilde{\frac{\partial}{\partial x_i}}\bigg|_{(p,q)}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p .$$

Assim,

$$d\pi(\widetilde{X}) = \sum_{i=1}^{n} a_i d\pi\left(\widetilde{\frac{\partial}{\partial x_i}}\right) + \sum_{j=1}^{k} b_j d\pi\left(\widetilde{\frac{\partial}{\partial y_j}}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p,q)\frac{\partial}{\partial x_i} =$$
$$= X = \sum_{i=1}^{n} A_i(p)\frac{\partial}{\partial x_i},$$

ou seja, $a_i(p,q) = A_i(p) = (A_i \circ \pi)(p,q)$ *e como* $\widetilde{X} \overset{\sigma}{\sim} 0$*, segue que*

$$d\sigma(\widetilde{X}) = \sum_{i=1}^{n} a_i d\sigma\left(\widetilde{\frac{\partial}{\partial x_i}}\right) + \sum_{j=1}^{k} b_j d\sigma\left(\widetilde{\frac{\partial}{\partial y_j}}\right) = \sum_{j=1}^{k} b_j(p,q)\frac{\partial}{\partial y_j} = 0 \Leftrightarrow$$
$$b_j(p,q) \equiv 0,$$

pois a família $\left\{d\sigma\left(\widetilde{\frac{\partial}{\partial y_j}}\right) = \frac{\partial}{\partial y_j}, j = 1, \ldots, k\right\}$ *é uma base para* T_qN *para cada* $q \in N$ *na parametrização* (V, ψ)*. Portanto,* $\widetilde{X} \in \mathfrak{L}(M)$ *é suave, isto é,* $\widetilde{X} \in \mathfrak{X}(M \times N)$*.*

Corolário 2.1. *Sejam* M*,* N *variedades e considere a variedade produto* $M \times N$*. Se* $\widetilde{X}$*,* $\widetilde{Y} \in \mathfrak{L}(M)$ *e* $\widetilde{V} \in \mathfrak{L}(N)$*, então*

(a) $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] = [X, Y]^{\sim} \in \mathfrak{L}(M)$*, e similarmente para* $\mathfrak{L}(N)$*.*

(b) $[\widetilde{X}, \widetilde{V}] = 0$*, onde* $0 \in \mathfrak{X}(M \times N)$ *é o campo nulo.*

Demonstração:

(a) Devemos mostrar que $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] \overset{\pi}{\sim} [X, Y]$ e $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] \overset{\sigma}{\sim} [0, 0]$, onde $0 \in \mathfrak{X}(N)$ é o campo vetorial nulo em N. De fato,

Como $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y} \in \mathfrak{L}(M)$, então existem X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ tais que $\widetilde{X} \overset{\pi}{\sim} X$, $\widetilde{X} \overset{\sigma}{\sim} 0$, $\widetilde{Y} \overset{\pi}{\sim} Y$ e $\widetilde{Y} \overset{\sigma}{\sim} 0$. Daí, pelo lema (2.3), $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] \overset{\pi}{\sim} [X, Y]$ e $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] \overset{\sigma}{\sim} 0$. Portanto, $d\pi([\widetilde{X}, \widetilde{Y}]) = [X, Y]$ e $d\sigma([\widetilde{X}, \widetilde{Y}]) = [0, 0]$.

(b) De modo análogo, como $\widetilde{X} \in \mathfrak{L}(M)$ e $\widetilde{V} \in \mathfrak{L}(N)$, então existem $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $V \in \mathfrak{X}(N)$ tais que $\widetilde{X} \overset{\pi}{\sim} X$, $\widetilde{X} \overset{\sigma}{\sim} 0$ e $\widetilde{V} \overset{\pi}{\sim} 0$, $\widetilde{V} \overset{\sigma}{\sim} V$, onde 0 é o campo nulo em $\mathfrak{X}(M)$ e $\mathfrak{X}(N)$. Pelo lema (2.3), $[\widetilde{X}, \widetilde{V}] \overset{\pi}{\sim} [X, 0] = 0$, $[\widetilde{X}, \widetilde{V}] \overset{\sigma}{\sim} [0, V] = 0$. O campo $[\widetilde{X}, \widetilde{V}] \in \mathfrak{X}(M \times N)$ em cada ponto $(p, q) \in (M \times N)$ tem como componentes o vetor nulo (ou ainda, $[\widetilde{X}, \widetilde{V}]$ é o levantamento de $0 \in \mathfrak{X}(M)$ e também o levantamento de $0 \in \mathfrak{X}(N)$), portanto, pelo lema (2.5) $[\widetilde{X}, \widetilde{V}] = 0 \in \mathfrak{X}(M \times N)$.

■

2.2 Métricas Riemannianas

Definição 2.23. (*Métrica Riemanniana*) *Uma métrica Riemanniana (ou estrutura Riemanniana) em uma variedade diferenciável* M *é uma correspondência que associa a cada ponto* $p \in M$ *um produto interno* $\langle , \rangle_p$ *no espaço tangente* T_pM*, que varia diferencialmente no seguinte sentido: se* $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ *é um sistema local de coordenadas em torno de* $p \in M$*, com* $\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = q \in \varphi(U)$ *onde* $x_i(q) = (r_i \circ \varphi^{-1})(q) = r_i(\varphi^{-1}(q))$ *e* $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_q (f) = \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial r_i}(\varphi^{-1}(q))$*,* $\forall q \in \varphi(U)$*, então* $\left\langle \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_q, \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_q \right\rangle_q = g_{ij}(q)$ *é uma função diferenciável em* $\varphi(U)$*.*

$$g_{ij} : \varphi(U) \subset M \to \mathbb{R}, \text{ com } g_{ij}(q) = \left\langle \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_q, \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_q \right\rangle_q .$$

Proposição 2.4. *Esta definição de métrica não depende da escolha do sistema local de coordenadas, ou seja, a diferenciabilidade das funções* g_{ij} *não depende da escolha do sistema local de coordenadas.*

Obs 2.10. **(a)** *Outra maneira de exprimir a diferenciabilidade da métrica Riemanniana é dizer que para todo par* X, Y *de campos de vetores diferenciáveis em um aberto* V *de* M*, a função* $\langle X, Y \rangle$ *é diferenciável em V.*

(b) *As funções* g_{ij} *são chamadas coeficientes da métrica Riemanniana no sistema local de coordenadas* $\varphi : U \subset M \to V \subset \mathbb{R}^n$*.*

Definição 2.24. (*Variedade Riemanniana*) *Uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana chama-se uma* variedade Riemanniana.

Usando-se partição da unidade é possível provar que

Teorema 2.2. *Toda variedade diferenciável admite uma métrica Riemanniana.*

Definição 2.25. (*Isometria*) *Sejam* (M, g_M) *e* (N, g_n) *variedades Riemannianas. Um difeomorfismo* $f : M \to N$ *é chamado uma isometria se:*

(I_1) $g_M\big(u,v\big)_p = g_N\big(df_p(u), df_p(v)\big)_{f(p)}$, *para todo* $p \in M$, u,$v \in T_pM$.

Definição 2.26. (*Isometria Local*) *Sejam* M *e* N *variedades Riemannianas. Uma aplicação diferenciável* $f : M \to N$ *é uma isometria local em* $p \in M$ *se existe uma vizinhança* $U \subset M$ *de* p *tal que* $f : U \to f(U)$ *é um difeomorfismo satisfazendo* (I_1). *Dizemos que a variedade Riemanniana* M *é localmente isométrica à variedade Riemanninana* N *se para todo* $p \in M$ *existe uma vizinhança* $U_p \subset M$ *de* p *e uma isometria local* $f : U \to f(U) \subset N$.

Exemplo 2.7. *Seja* $M = \mathbb{R}^n$ *com* $\frac{\partial}{\partial x_i}$ *identificado com* $e_i = (0, ..., 1, ..., 0)$. *A métrica é dada por* $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$. $\mathbb{R}^n$ *é chamado espaço Euclidiano de dimensão* n *e a geometria Riemanniana deste espaço é a geometria métrica Euclidiana.*

Exemplo 2.8. (*Variedades Imersas*) *Seja* $f : M^n \longrightarrow N^{n+k}$ *uma imersão. Se* N *tem uma estrutura Riemanniana,* f *induz uma estrutura Riemanniana em* M *por*

$$\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)}, \ \forall u, v \in T_pM.$$

A métrica de M *é chamada então a métrica induzida por* f, *e* f *torna-se, então, uma imersão isométrica.*

Exemplo 2.9. (*Métrica Riemanniana Produto*) *Sejam* M *e* N *variedades Riemannianas e considere* $M \times N$ *com a estrutura diferenciável produto. Sejam* $\pi : M \times N \longrightarrow M$ *e* $\sigma : M \times N \longrightarrow N$ *as projeções canônicas. Definimos a métrica Riemanniana produto em* $M \times N$ *por:*

$$\left\langle u, v \right\rangle_{(p,q)} = \left\langle d\pi(u), d\pi(v) \right\rangle_p + \left\langle d\sigma(u), d\sigma(v) \right\rangle_q, \ \forall (p,q) \in M \times N, \ u, v \in T_{(p,q)}(M \times N).$$

A variedade produto munida com a métrica produto é chamada variedade Riemanniana produto.

Obs 2.11. *Na variedade Riemanniana produto* $M \times N$*, dados* $\widetilde{X} \in \mathfrak{L}(M)$ *e* $\widetilde{Y} \in \mathfrak{L}(N)$, $\widetilde{X}$ *e* $\widetilde{Y}$ *são campos ortogonais em* $(M \times N)$*, ou seja,* $\langle \widetilde{X}, \widetilde{Y} \rangle : M \times N \longrightarrow \mathbb{R}$ *é a função identicamente nula na métrica produto.*

2.3 Conexões

Definição 2.27. (*Conexão Afim*) *Uma connexão afim* ∇ *em uma variedade diferenciável* M *é uma aplicação*

$$\begin{array}{rcl} \nabla \ : \ \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) & \longmapsto & \nabla_X Y \end{array}$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

(C_1) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,

(C_2) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

(C_3) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

onde X, Y, $Z \in \mathfrak{X}(M)$ *e* f, $g \in C^\infty(M)$.

Definição 2.28. (*Conexão Compatível*) *Uma conexão* ∇ *em uma variedade Riemanniana* M *é compatível com a métrica se e só se*

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \ \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Definição 2.29. (*Conexão Simétrica*) *Uma conexão afim* ∇ *em uma variedade diferenciável* M *é dita* simétrica *quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \ \forall \ X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Em um sistema coordenado (U, φ), se $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, o fato de ser ∇ simétrica implica que para todo $i, j = 1, 2, ..., n$,

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0 \tag{2.5}$$

o que justifica o nome adotado (observe que (2.5) é equivalente ao fato que $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}$).

Se ∇ é uma conexão simétrica e compatível, então valem as identidades,

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z\rangle &= \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \\ Y\langle Z, X\rangle &= \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle, \\ Z\langle X, Y\rangle &= \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle \end{aligned}$$

calculando $X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle$, teremos, usando a simetria de ∇, que $X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle = \langle [X, Z], Y\rangle + \langle [Y, Z], X\rangle + \langle [X, Y], Z\rangle + 2\langle Z, \nabla_Y X\rangle$, e portanto

$$2\langle Z, \nabla_Y X\rangle = X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \langle [X, Z], Y\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle - \langle [X, Y], Z\rangle, \tag{2.6}$$

que é conhecida como *fórmula de Koszul*.

Teorema 2.3. (*Levi–Civita*) *Dada uma variedade Riemanniana* M*, com métrica* $g = \langle , \rangle$*, existe uma única conexão afim* ∇ *em* M*, denominada conexão de Levi-Civita, ou conexão Riemanniana, satisfazendo as condições:*

(a) ∇ *é simétrica.*

(b) ∇ *é compatível com a métrica Riemanniana* g.

Demonstração: A demonstração é simples. Faz uso da fórmula de Koszul e pode ser encontrada em [6]. ■

Sejam M uma variedade Riemanniana com métrica $g = \langle , \rangle$, conexão Riemanniana ∇ e, um sistema local de coordenadas (U, φ). Denominamos as funções Γ_{ij}^k definidas em U por

$\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$ de coeficientes da conexão ∇ em U ou os símbolos de Christoffel da conexão. De (2.6) segue-se que

$$\sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}\right\},$$

onde $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$.

Como a matriz (g_{km}) admite uma inversa (g^{km}), teremos que

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2}\sum_k \left\{\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}\right\} g^{km}. \tag{2.7}$$

A equação (2.7) é a expressão clássica dos símbolos de Christoffel da conexão Riemanniana em termos dos g_{ij}. Assim, para o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, teremos $\Gamma_{ij}^k = 0$.

Proposição 2.5. (*Conexão produto*) *Sejam* M *e* N *variedades Riemannianas, e considere a variedade Riemanniana produto* $M \times N$ (*isto é, com a métrica produto*). *Sejam* ${}^M\nabla$ *a conexão Riemanniana de* M, ${}^N\nabla$ *a conexão Riemanniana de* N *e* $\widetilde{\nabla}$ *a conexão Riemanniana de* $M \times N$. *Se* $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y} \in \mathfrak{L}(M)$ *são os levantamentos de* X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $\widetilde{V}$, $\widetilde{W} \in \mathfrak{L}(N)$ *são os levantamentos de* V, $W \in \mathfrak{X}(N)$, *então*

(a) $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}$ *é o levantamento de* ${}^M\nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$.

(b) $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{V}}\widetilde{W}$ *é o levantamento de* ${}^N\nabla_V W \in \mathfrak{X}(N)$.

(c) $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{V} = 0 = \widetilde{\nabla}_{\widetilde{V}}\widetilde{X}$.

(d) *A conexão Riemanniana* $\widetilde{\nabla}$ *de* $M \times N$ *é dada por*

$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}+\widetilde{V}}(\widetilde{Y} + \widetilde{W}) = \widetilde{{}^M\nabla_X Y} + \widetilde{{}^N\nabla_V W}.$$

Demonstração:

Os itens (a), (b) e (c) seguem diretamente de um cálculo direto usando-se a fórmula de Koszul. O item (d) segue de (a), (b) e (c). ∎

Proposição 2.6. *Sejam* M, N *variedades Riemannianas, com* ${}^M\nabla$, ${}^N\nabla$ *suas respectivas conexões Riemannianas. Se* $\phi : M \longrightarrow N$ *é uma isometria, então*

$$d\phi\left({}^M\nabla_X Y\right) = {}^N\nabla_{d\phi(X)} d\phi(Y), \forall\ X,\ Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Demonstração:

Dados X, Y, $Z \in \mathfrak{X}(M)$, pelo lema 2.4, existem e são únicos os campos (transportados) $\widetilde{X} := d\phi(X)$, $\widetilde{Y} := d\phi(Y)$, $\widetilde{Z} := d\phi(Z) \in \mathfrak{X}(N)$ que são ϕ-relacionados a X, Y, Z, respectivamente, tais que $\widetilde{X}(q) = d\phi_p(X_p)$, $\widetilde{Y}(q) = d\phi_p(Y_p)$, $\widetilde{Z}(q) = d\phi_p(Z_p)$, $\forall q \in N$, $q = \phi(p)$. Agora, como ϕ é uma isometria, dado $p \in M$

$$\begin{aligned}\langle X, Z\rangle^M(p) &= \langle X(p), Z(p)\rangle^M = \langle d\phi_p(X_p), d\phi_p(Z_p)\rangle^N = \langle \widetilde{X}(\phi(p)), \widetilde{Z}(\phi(p))\rangle^N = \\ &= \left(\langle \widetilde{X}, \widetilde{Z}\rangle^N \circ \phi\right)(p).\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\left(Y\langle X, Z\rangle^M\right)(p) &= Y_p\left(\langle X, Z\rangle^M\right)(p) = Y_p\left(\langle \widetilde{X}, \widetilde{Z}\rangle^N \circ \phi\right)(p) = \\ &= d\phi_p(Y_p)\left(\langle \widetilde{X}, \widetilde{Z}\rangle^N\right)(\phi(p)) = \widetilde{Y}(\phi(p))\left(\langle \widetilde{X}, \widetilde{Z}\rangle^N\right)(\phi(p)).\end{aligned}$$

Daí, $Y\langle X, Z\rangle^M = \widetilde{Y}\langle \widetilde{X}, \widetilde{Z}\rangle^N$ e, da fórmula de Koszul segue o resultado. ■

2.4 Gradiente, Divergente, Laplaciano e Hessiano

Nesta secção serão provados alguns resultados básicos envolvendo o gradiente, o Laplaciano de funções reais de classe C^∞ definidas em M e, a divergência de campos de vetores em M.

Definição 2.30. (*Referencial Local Móvel*) *Sejam* M^n *uma variedade,* $p \in M$ *e* U *uma vizinhança de* p *onde é possível definir campos* $E_1, ..., E_n \in \mathfrak{X}(M)$*, de modo que em cada* $q \in U$*, os vetores* $\{E_i(q), i = 1, ..., n\}$ *formam uma base de* T_qM*. Diremos, neste caso, que* $\{E_i, i = 1, ..., n\}$ *é um referencial móvel em* U*. Se o conjunto de campos* $E_1, ..., E_n \in \mathfrak{X}(M)$ *são dois a dois ortonormais, isto é, formam uma base ortonormal de* T_qM *para cada* $q \in U$*, então dizemos que* $\{E_i, i = 1, ..., n\}$ *é um referencial local ortonormal.*

Definição 2.31. (*Gradiente*) *Seja* $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função suave. O* ***gradiente*** *de* f *é o campo vetorial suave* $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)$*, defindo sobre* M *por*

$$\langle \nabla f, X\rangle = X(f), \tag{2.8}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

É imediato, a partir da definição acima, que o gradiente de uma função suave é unicamente determinado por (2.8). A existência é assegurada pela proposição a seguir.

Proposição 2.7. *Seja* $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função suave e* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *um referencial ortonormal local em uma vizinhança aberta* $U \subset M$. *Então, em* U *temos:*

$$\nabla f = \sum_{j=1}^{n} e_j(f) e_j, \tag{2.9}$$

e o segundo membro da igualdade acima independe do referencial ortonormal escolhido. Além disso, quando $M^n = \mathbb{R}^n$ *podemos tomar, para* $1 \leqslant i \leqslant n$, $e_i = E_i$, *o* i*-ésimo campo canônico em* $\mathbb{R}^n$. *Desse modo,*

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} E_i(f) E_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} E_i = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Portanto, nossa definição de gradiente de uma função concorda com a dada nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral para funções suaves $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

Demonstração: Vide [6]. ∎

Proposição 2.8. *Se* $f, g : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *são funções diferenciáveis (suaves), então*

(a) $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$.

(b) $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$.

Demonstração: Vide [6]. ∎

Proposição 2.9. *Seja* $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função diferenciável (suave). Dados* $p \in M$ *e* $v \in T_pM$, *seja* $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ *uma curva suave tal que* $\alpha(0) = p$ *e* $\alpha'(0) = v$. *Então*

$$\langle \nabla f, v \rangle_p = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t)\Big|_{t=0} = v(f).$$

Demonstração: Vide [6]. ∎

Em um sistema local de coordenadas o campo gradiente pode ser reescrito da seguinte forma:

Proposição 2.10. *Se* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função suave e* $U \subset M$ *é uma vizinhança coordenada, com campos coordenados* $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$*, então o gradiente de* f *é dado por*

$$\nabla f = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Em particular, quando $M = \mathbb{R}^n$ *tem-se que* $g_{ij} = \delta_{ij}$ *são os coeficientes da métrica euclidiana e*

$$\nabla f = \sum_{i,j=1}^{n} \delta^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Demonstração:

Temos que os campos coordenados $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ formam um referencial local em U. Assim, podemos escrever

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Então,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \left\langle \nabla f, \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle = a_j g_{ji}$$

de maneira que

$$a_j = \sum_{i=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

onde $[g^{ij}]$ é a matriz inversa de $[g_{ij}]$. Portanto,

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \nabla f = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} g^{ji} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

∎

Definição 2.32. (*Divergente*) *Seja* X *um campo vetorial suave em* M^n*. A* ***divergência*** *de* X *é a função suave em* M *dada por*

$$\begin{aligned} \mathrm{div}X : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto (\mathrm{div}X)(p) = \mathrm{tr}\{v \longmapsto (\nabla_v X)(p)\} \end{aligned}$$

onde $v \in T_pM$ *e* tr *denota o traço de operador linear entre chaves.*

Dizemos que um referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ em um aberto $U \subset M$ é **geodésico** em $p \in U$ se $(\nabla_{e_i} e_j)(p) = 0$ para todos $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Proposição 2.11. *Seja* X *um campo suave em* M^n *e* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *um referencial ortonormal em uma vizinhança aberta* $U \subset M$*. Se* $X = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ *em U, então*

$$\mathrm{div} X = \sum_{i=1}^{n} \big(e_i(a_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X \rangle \big). \tag{2.10}$$

Em particular, se o referencial for geodésico em $p \in U$*, então temos em p que*

$$\mathrm{div} X = \sum_{i=1}^{n} e_i(a_i).$$

Demonstração:

Pela definição de divergência de um campo vetorial, temos

$$\begin{aligned} \mathrm{div} X = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle &= \sum_{i=1}^{n} e_i \langle X, e_i \rangle - \langle X, \nabla_{e_i} e_i \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \big(e_i(a_i) - \langle X, \nabla_{e_i} e_i \rangle \big) \end{aligned}$$

O resto segue da definição de referencial geodésico. ■

Obs 2.12. *Para* $M^n = \mathbb{R}^n$ *e* $1 \leqslant i \leqslant n$*, podemos tomar* $e_i = E_i$*, o i-ésimo campo canônico em* R^n*. Como tais campos formam um referencial geodésico em cada ponto de* $\mathbb{R}^n$*, tem-se*

$$\mathrm{div} X = \sum_{i=1}^{n} E_i(a_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_i},$$

a qual concorda com a definição dada usualmente nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral para a divergência de um campo vetorial.

Proposição 2.12. *Se* X*,* Y *são campos vetoriais suaves em* M^n *e* $f : M^n \longrightarrow R$ *é uma função suave, então*

(a) $\mathrm{div}(X + Y) = \mathrm{div} X + \mathrm{div} Y$.

(b) $\mathrm{div}(fX) = f \mathrm{div} X + \langle \nabla f, X \rangle$.

Demonstração: Vide [6]. ■

Para obter a expressão de $\mathrm{div} X$ em um sistema de coordenadas arbitrário, comecemos com o seguinte:

Lema 2.6. *Seja* X *um campo vetorial suave sobre* M^n *e* $U \subset M$ *uma vizinhança coordenada com campos coordenados* $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$. *Se* X *for dado em* U *por* $X = \sum_{i=1}^{n} a_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, *então a divergência de* X *é dado por*

$$\mathrm{div} X = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} a_i \Gamma_{ij}^{j}, \tag{2.11}$$

onde os Γ_{ij}^{k} *são os símbolos de Cristoffel da métrica de* M *em* U *e* $a_i \in C^{\infty}(M)$, $i = 1, \ldots, n$.

Demonstração: Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$. Note primeiro que para cada operador linear, associado a cada $p \in M$, dado por

$$\begin{array}{rcll} S : T_pM & \longrightarrow & T_pM & \\ v & \longmapsto & S(v) & = (\nabla_v X)(p), \end{array}$$

sendo os campos coordenados $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ um referencial local em U, a i-ésima coluna da matriz do operador S é dada por

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X &= \sum_{j=1}^{n} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left(a_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(a_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(a_j \sum_{l=1}^{n} \Gamma_{ij}^{l} \frac{\partial}{\partial x_l} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_{j,l=1}^{n} a_j \Gamma_{ij}^{l} \frac{\partial}{\partial x_l} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} = \\ &= \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \Gamma_{ij}^{l} + \frac{\partial a_l}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_l}. \end{aligned}$$

Portanto, desde que o traço de um operador linear é o traço da matriz que o representa em qualquer base, segue que

$$\mathrm{div} X = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} a_i \Gamma_{ij}^{j}.$$

■

Definição 2.33. (*Laplaciano*) *Sejam* M *uma variedade Riemanniana e* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função suave. O* ***Laplaciano*** *de* f *é a função* $\Delta f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$\Delta f = \mathrm{div}(\nabla f). \tag{2.12}$$

Proposição 2.13. *Seja* $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função suave e* $\{e_1, \dots, e_n\}$ *um referencial ortonormal em um aberto* $U \subset M$. *Então*

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \big(e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i)(f)\big) \tag{2.13}$$

Em particular, se o referencial for geodésico em $p \in U$, *então temos em p que*

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} e_i(e_i(f)).$$

Demonstração:

Pela proposição 2.7, temos que $\nabla f = \sum_{i=1}^{n} e_i(f)e_i$. Agora, segue da definição de laplaciano de uma função e da proposição 2.11 que

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) = \sum_{i=1}^{n} \big(e_i(e_i(f)) - \langle \nabla_{e_i} e_i, \nabla f\rangle\big) \overset{(2.8)}{=} \sum_{i=1}^{n} \big(e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i)(f)\big).$$

■

Obs 2.13. *Quando* $M^n = \mathbb{R}^n$, *a definição dada acima para o laplaciano de uma função suave também concorda com a definição usual do Cálculo Diferencial e Integral para o laplaciano de uma função suave* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. *De fato, neste caso podemos tomar* $e_i = E_i$, *os campos coordenados canônicos de* $\mathbb{R}^n$, *os quais formam um referencial geodésico em cada ponto de* $\mathbb{R}^n$. *Portanto, segue da proposição anterior que*

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} E_i\big(E_i(f)\big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Definição 2.34. (*Função Harmônica*) *Sejam* M *uma variedade e* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função suave. A função* f *é harmônica quando o Laplaciano de* f *é identicamente nulo, isto é,* $\Delta f = 0$.

Definição 2.35. (*Autofunção do Laplaciano*) *Sejam* M *uma variedade e* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função suave. A função* f *é uma autofunção do Laplaciano de* f, *com autovalor* c, *quando existe* $c \in \mathbb{R}, c > 0$, *tal que* $\Delta f = cf$.

Definição 2.36. (*Hessiano*) *Seja* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função suave. O* ***Hessiano*** *de* f *em* $p \in M$ *é o operador linear* $\big(\mathrm{Hess}\ f\big)_p : T_pM \longrightarrow T_pM$, *dado por*

$$\big(\mathrm{Hess}\ f\big)_p(v) = \nabla_v \nabla f.$$

Segue das propriedades da conexão Riemanniana que se $X \in \mathfrak{X}(M)$ é qualquer extensão de v em uma vizinhança de $p \in M$, então

$$\big(\mathrm{Hess}\ f\big)_p(v) = \big(\nabla_X \nabla f\big)(p).$$

Proposição 2.14. *Se* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função suave e* $p \in M$, *então* $\big(\mathrm{Hess}\ f\big)_p : T_pM \longrightarrow T_pM$ *é um operador linear auto-adjunto.*

Demonstração: Vide [6]. ∎

Proposição 2.15. *Se* $f : M \longrightarrow$ *é uma função suave, então*

$$\Delta f = \mathrm{tr}\big(\mathrm{Hess}\ f\big). \tag{2.14}$$

Demonstração: É suficiente provar a igualdade do enunciado em cada $p \in M$, pois o $\Delta f = \mathrm{div}(\nabla f)$ e o $\mathrm{div}(\nabla f)$ é uma função real em M. Para tanto, seja $U \subset M$ uma vizinhança de p onde esteja definido um referencial móvel $\{e_1, ..., e_n\}$. Então,

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\big(\mathrm{Hess}\ f\big)_p &= \langle \big(\mathrm{Hess}\ f\big)_p(e_i), e_i \rangle = \langle \big(\nabla_{e_i} \nabla f\big), e_i \rangle_p = \\ &= \mathrm{div}\big(\nabla f\big)(p) = \Delta f(p). \end{aligned}$$

∎

O resultado acima nos permite estabelecer uma fórmula simples para o Laplaciano de uma função suave $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ em termos dos símbolos de Christoffel associados a um sistema de coordenadas em M, conforme ensina a seguinte

Proposição 2.16. *Se* $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função suave e* $U \subset M$ *é uma vizinhança coordenada, então temos em* U *que*

$$\Delta f = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} \right).$$

Demonstração: Vide [6]. ∎

Obs 2.14. *Quando* $M^n = \mathbb{R}^n$ *e* $\dfrac{\partial}{\partial x_i} = E_i$, *a base canônica do* $\mathbb{R}^n$, *segue da proposição acima que*

$$\big\langle \big(\mathrm{Hess}\ f\big)(E_i), E_j \big\rangle = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

De outro modo, a matriz de $\mathrm{Hess}\ f$ *com respeito à base canônica* $\{E_1, \ldots, E_n\}$ *tem entrada* $\Big[\big(\mathrm{Hess}\ f\big)_{ij}\Big] = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j}$, $i, j = 1, \ldots, n$, *o que concorda com a definição dada nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral da matriz Hessiana de uma função* f.

A observação acima sugere que a forma bilinear simétrica

$$\begin{aligned}\big(X, Y\big) \longmapsto \mathrm{Hess}\ f\big(X, Y\big) &= \langle \mathrm{Hess}\ f(X), Y\rangle = \langle \nabla_X \nabla f, Y\rangle = \\ &= X\langle \nabla f, Y\rangle - \langle \nabla f, \nabla_X Y\rangle = X\big(Y(f)\big) - \big(\nabla_X Y\big)(f),\end{aligned}$$

denominada a **forma Hesiana** de f, seja a generalização correta, em geometria Riemanniana, da definição usual dada no Cálculo Diferencial e Integral para a forma Hessiana de uma função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. E este é de fato o caso.

2.5 Curvaturas

Nesta secção relembraremos as definições e propriedades básicas a respeito das curvaturas seccional, escalar e de Ricci. E ainda, observaremos que tais curvaturas tem comportamento tensorial.

Definição 2.37. (*Tensor em Variedade*) *Um tensor* T (*suave*) *de ordem* (r, s) *em uma variedade Riemanniana* M *é um tensor sobre o* $C^\infty(M)$*-módulo* $\mathfrak{X}(M)$, *ou seja, é uma aplicação multilinear suave*

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}^*(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}^*(M)}_{r\ \text{fatores}} \times \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}(M)}_{s\ \text{fatores}} \longrightarrow C^\infty(M),$$

onde $\mathfrak{X}^*(M)$ é o dual de $\mathfrak{X}(M)$.

Isto quer dizer que, dados $\theta_1, \ldots, \theta_r \in \mathfrak{X}^*(M)$ $Y_1, \ldots, Y_s \in \mathfrak{X}(M)$, $T(\theta_1, \ldots, \theta_r, Y_1, \ldots, Y_s)$ é uma função diferenciável em M, e que T é $C^\infty(M)$-linear em cada argumento.

O conjunto $\mathfrak{T}^r_s(M)$ de todos os tensores de ordem (r,s) em uma variedade Riemanniana M é um C^∞-módulo. No caso em que $r = s = 0$, um tensor de ordem $(0,0)$ em M é exatamente uma função $f \in C^\infty(M)$. Tensores do tipo $(0,s)$ são chamados de *covariantes*, enquanto tensores do tipo $(r,0)$, com $r \geqslant 1$, são chamados *contravaiantes*. Além disso, o fato essencial é que quando calculamos T obtendo a função $T(\theta_1,\dots,\theta_r,Y_1,\dots,Y_s)$, o valor dessa função em um ponto $p \in M$ depende apenas dos valores das 1-formas $\theta_1,\dots,\theta_r$ e dos campos $Y_1,\dots,Y_s$ em p e independe do comportamento local de $\theta_1,\dots,\theta_r$ e $Y_1,\dots,Y_s$. Formalmente:

Lema 2.7. *Seja* $p \in M$ *e* $T \in \mathfrak{T}^r_s(M)$. *Se* $\overline{\theta}_1,\dots,\overline{\theta}_r \in \mathfrak{X}^*(M)$, $\theta_1,\dots,\theta_r \in \mathfrak{X}^*(M)$, $\overline{Y}_1,\dots,\overline{Y}_s \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $Y_1,\dots,Y_s \in \mathfrak{X}(M)$ *são tais que* $\overline{\theta}_i(p) = \theta_i(p)$, $\overline{Y}_j(p) = Y_j(p)$, *com* $1 \leqslant i \leqslant r$ *e* $1 \leqslant j \leqslant s$, *então*

$$T(\overline{\theta}_1,\dots,\overline{\theta}_r,\overline{Y}_1,\dots,\overline{Y}_s)(p) = T(\theta_1,\dots,\theta_r,Y_1,\dots,Y_s)(p).$$

Demonstração: Vide [9]. ∎

Obs 2.15. *Se* $T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}(M)}_{s \text{ fatores}} \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ *é* C^∞*-multilinear, defina* $\overline{T}$: $\mathfrak{X}^*(M) \times \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}(M)}_{s \text{ fatores}} \longrightarrow C^\infty(M)$ *por*

$$\overline{T}(\theta, Y_1,\dots,Y_s) = \theta\big(T(Y_1,\dots,Y_s)\big).$$

Evidentemente, $\overline{T}$ *é* C^∞*-multilinear, portanto é um* $(1,s)$ *tensor em* M. *Dessa forma, consideraremos o próprio* T *como um tensor em* M, *pois ele está associado a um tensor de ordem* $(1,s)$, *ou* $(0,s{+}1)$, *no caso de* M *ser uma variedade Riemanniana, pois a métrica Riemanniana faz corresponder a cada* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *um único elemento de* $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ *dado por* $\theta(Y) = \langle X, Y\rangle$, *isto é,* $\theta\big(T(Y_1,\dots,Y_s)\big) = \langle X, T(Y_1,\dots,Y_s)\rangle$.

Definição 2.38. (*Curvatura*) *O tensor de curvatura* R *de uma variedade Riemanniana* M *é uma correspondência que associa a cada par* $X,\ Y \in \mathfrak{X}(M)$ *uma aplicação* $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ *dada por*

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z,\ \forall Z \in \mathfrak{X}(M),$$

onde ∇ *é a conexão Riemanniana de* M.

Observe que se $M = \mathbb{R}^n$, então $R(X,Y)Z = 0$ para todo X, Y, $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$.

Em termos de um sistema de coordenadas $(U, x_1, ..., x_n)$ em torno de $p \in M$. Seja $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Como $[X_i, X_j] = 0$, obteremos

$$R(X_i, X_j)X_k = \nabla_{X_j}\nabla_{X_i}X_k - \nabla_{X_i}\nabla_{X_j}X_k.$$

E ainda, $\nabla_{X_i}X_k = \sum_l \Gamma^l_{ik}X_l$ e $\nabla_{X_j}X_k = \sum_l \Gamma^l_{jk}X_l$. Daí,

$$\begin{aligned}
R(X_i, X_j)X_k = \nabla_{X_j}\nabla_{X_i}X_k - \nabla_{X_i}\nabla_{X_j}X_k &= \sum_l \nabla_{X_j}\Gamma^l_{ik}X_l - \sum_l \nabla_{X_i}\Gamma^l_{jk}X_l = \\
&= \sum_l \left[X_j(\Gamma^l_{ik})X_l + \Gamma^l_{ik}\nabla_{X_j}X_l\right] - \sum_l \left[X_i(\Gamma^l_{jk})X_l + \Gamma^l_{jk}\nabla_{X_i}X_l\right] = \\
&= \sum_l \left[X_j(\Gamma^l_{ik})X_l + \Gamma^l_{ik}\sum_s \Gamma^s_{jl}X_s - X_i(\Gamma^l_{jk})X_l - \Gamma^l_{jk}\sum_s \Gamma^s_{il}X_s\right] = \\
&= \sum_s \left[\frac{\partial}{\partial x_j}(\Gamma^s_{ik}) - \frac{\partial}{\partial x_i}(\Gamma^s_{jk}) + \sum_l \left(\Gamma^l_{ik}\Gamma^s_{jl} - \Gamma^l_{jk}\Gamma^s_{il}\right)\right]X_s.
\end{aligned}$$

Proposição 2.17. *O tensor de curvatura R de uma variedade Riemanniana goza das seguintes propriedades:*

(i) R *é* $C^\infty(M)$*-bilinear em* $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$*, isto é,*

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1),$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2),$$

f, $g \in C^\infty(M)$, X_1, X_2, Y_1, $Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$.

(ii) *Para todo par* X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$*, o operador curvatura* $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ *é* $C^\infty(M)$*-linear, isto é,*

$$R(X,Y)(Z + W) = R(X,Y)Z + R(X,Y)W,$$

$$R(X,Y)(fZ) = fR(X,Y)Z,$$

$f \in C^\infty(M)$, Z, $W \in \mathfrak{X}(M)$.

(iii) *Vale a Primeira Identidade de Bianchi.*

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0. \tag{2.15}$$

(iv) *Para todo* X, Y, Z, $T \in \mathfrak{X}(M)$ *valem as seguintes proppriedades de simetria:*

(a) $\langle R(X, Y)Z, T\rangle + \langle R(Y, Z)X, T\rangle + \langle R(Z, X)Y, T\rangle = 0$

(b) $\langle R(X, Y)Z, T\rangle = -\langle R(Y, X)Z, T\rangle$

(c) $\langle R(X, Y)Z, T\rangle = -\langle R(X, Y)T, Z\rangle$

(d) $\langle R(X, Y)Z, T\rangle = \langle R(Z, T)X, Y\rangle$.

Demonstração: Vide [6]. ■

Consequetemente, obtemos que o tensor de curvatura é, de fato, tensorial (linear em cada entrada e não depende localmente dos campos, mas apenas do valor dos campos no ponto).

Definição 2.39. (*Curvatura Seccional*) *Dado um ponto* $p \in M$ *e um subespaço bi-dimensional* $\sigma \subset T_pM$ *o número real*

$$K(\sigma) = K(x, y) = \frac{\langle R(x, y)x, y\rangle}{|x \wedge y|^2},$$

onde $\{x, y\}$ *é uma base qualquer de* σ *e* $\mid x \wedge y \mid^2 = \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle - \langle x, y\rangle^2$ *é a área do paralelogramo determinado por* x *e* y, *é chamado curvatura seccional de* σ *em p (verifica-se que* $K(\sigma)$ *não depende da escolha dos vetores* $x, y \in \sigma$*). Podemos denotar a curvatura seccional também por* $K(x \wedge y)$.

Além do fato de que a curvatura seccional tem interessantes interpretações geométricas, sua importância provém do fato de que o conhecimento de $K(\sigma)$, para todo σ, determina completamente a curvatura R. Isto é um fato puramente algébrico:

Lema 2.8. *Seja* V *um espaço vetorial de dimensão* $n \geqslant 2$, *munido de um produto interno* $\langle , \rangle$. *Sejam* $R : V \times V \times V \longrightarrow V$ *e* $R' : V \times V \times V \longrightarrow V$ *aplicações tri-lineares tais que as condições* (iii), iv-(a), iv-(b), iv-(c) *e* iv-(d) *da proposição* (2.17) *sejam satisfeitas para*

$$\langle R(x, y)z, t\rangle, \quad \langle R'(x, y)z, t\rangle.$$

Se x, y *são dois vetores linearmente independentes, escrevamos,*

$$K(\sigma) = \frac{\langle R(x, y)x, y\rangle}{|x \wedge y|^2}, \quad K'(\sigma) = \frac{\langle R'(x, y)x, y\rangle}{|x \wedge y|^2},$$

onde σ *é o subespaço bi-dimensional gerado por* x *e* y*. Se para todo* $\sigma \subset V$*,* $K(\sigma) = K'(\sigma)$*, então* $R = R'$*.*

Demonstração: Vide [6]. ∎

As variedades Riemannianas de curvatura seccional constante desempenham um papel fundamental no desenvolvimento da Geometria Riemanniana, por possuirem uma geometria relativamente simples e bem conhecidas, servem como espaços modelo para geometria de comparação e, construções geométricas com tais espaços são menos complicadas de serem feitas do que quando se considera variáveis abstratas quaisquer.

Lema 2.9. *Sejam* M *uma variedade Riemanniana e* $p \in M$*. Defina uma aplicação trilinear* $R' : T_pM \times T_pM \times T_pM \longrightarrow T_pM$ *por*

$$\langle R'(X,Y)W, Z\rangle = \langle X, W\rangle\langle Y, Z\rangle - \langle Y, W\rangle\langle X, Z\rangle = \big\langle \langle X, W\rangle Y - \langle Y, W\rangle X, Z\big\rangle,$$

para todo X*,* Y*,* W*,* $Z \in T_pM$*. Então* M *tem curvatura seccional constante igual a* K_0 *se, e somente se,* $R = K_0R'$*, onde* R *é a curvatura de* M*, e* $R'(X,Y)W = \langle X, W\rangle Y - \langle Y, W\rangle X$*.*

Definição 2.40. (*Curvatura Ricci*) *Sejam* M *uma variedade Riemanniana,* $p \in M$*,* x *um vetor unitário em* T_pM *e* $\{z_1, \dots, z_{n-1}, z_n = x\}$ *uma base ortonormal de* T_pM*. A curvatura Ricci de* M *na direção* x *em* p *é definida por*

$$\mathrm{Ric}_p(x) = \sum_{j=1}^{n-1} \langle R(x, z_j)x, z_j\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle R(x, z_j)x, z_j\rangle. \tag{2.16}$$

Definição 2.41. (*Curvatura Escalar*) *Sejam* M *uma variedade Riemanniana,* $p \in M$ *e* $\{z_1, \dots, z_{n-1}, z_n\}$ *uma base ortonormal de* T_pM*. A curvatura escalar de* M *em* p *é definida por*

$$\tau(p) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ric}_p(z_i) = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} \langle R(e_i, e_j)e_i, e_j\rangle\right] = 2\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \langle R(e_i, e_j)e_i, e_j\rangle = 2\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} K(e_i \wedge e_j). \tag{2.17}$$

A curvatura Ricci e a curvatura escalar não dependem da escolha das correspondentes bases ortonormais.

Exemplo 2.10. (*Tensor Curvatura*) *O tensor curvatura de uma variedade Riemanniana*

$$\mathsf{R} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^{\infty}(M)$$

definido por

$$R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W\rangle$$

é um tensor covariante de ordem 4*.*

Exemplo 2.11. (*Tensor métrico*) *Uma métrica Riemanniana em uma variedade* M*, é um tensor de ordem* 2 $G : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^{\infty}(M)$ *definido por* $G(X, Y) = \langle X, Y\rangle$*,* X*,* $Y \in \mathfrak{X}(M)$*.*

Exemplo 2.12. (*Conexão*) *O operador* T *definido por:*

$$\begin{array}{rcl} T \ : \ \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & C^{\infty}(M) \\ (X, Y, Z) & \longmapsto & T(X, Y, Z) \ = \ \langle \nabla_X Y, Z\rangle, \end{array}$$

não é um tensor, pois ∇ *não é* $C^{\infty}(M)$*-linear em relação ao argumento* Y*.*

Definição 2.42. (*Tensor de Ricci*) *Sejam* M *uma variedade Riemanniana. Dados* X*,* $Y \in \mathfrak{X}(M)$ *o tensor de Ricci é definido por*

$$\mathrm{Ric}(X, Y)(p) = \mathrm{tr}\left\{z \longmapsto \big(R(X, z)Y\big)(p)\right\},$$

ou se $\{E_1, \ldots, E_n\}$ *é um referencial ortonormal local*

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(X, E_i)Y, E_i\rangle.$$

Definição 2.43. (*Derivada covariante de tensor*) *Seja* T *um tensor covariante de ordem* r*. A* ***diferencial covariante*** ∇T *de* T *é um tensor de ordem* $r + 1$ *dada por*

$$\nabla T(Y_1, \ldots, Y_r, Z) = Z(T(Y_1, \ldots, Y_r) - T(\nabla_Z Y_1, Y_2, \ldots, Y_r) - \ldots - T(Y_1, \ldots, Y_{r-1}, \nabla_Z Y_r).$$

Para cada $Z \in \mathfrak{X}(M)$*, a* ***derivada covariante*** $\nabla_Z T$ *de* T *em relação a* Z *é um tensor de ordem* r *dado por*

$$\nabla_Z T = \nabla T(Y_1, \ldots, Y_r, Z).$$

Definição 2.44. (*Pullback de Tensor*) *Seja* $\phi : M \longrightarrow N$ *uma aplicação suave entre as variedades Riemannianas* M *e* N. *Se* T *é um tensor covariante de ordem* r *em* N *com* $r \geqslant 1$ *definimos o tensor* ϕ^*T *em* M *por*

$$(\phi^*T)(v_1, \ldots, v_r) = T_{\phi(p)}(d\phi(v_1), \ldots, d\phi(v_r))$$

para todo $v_i \in T_pM, i = 1, \ldots, r$, $p \in M$. *O tensor* ϕ^*T *é chamado o* ***pullback*** *de* T *por* ϕ.

Exemplo 2.13. (*Variedades Imersas*) *Seja* $f : M^n \longrightarrow N^{n+k}$ *uma imersão. Se* N *tem uma estrutura Riemanniana,* f *induz uma estrutura Riemanniana em* M *por*

$$g_M\big(u, v\big)_p = g_N\big(df_p(u), df_p(v)\big)_{f(p)}, \ \forall \ p \in M, \ \forall u, v \in T_pM.$$

Com a notação de pullback temos:

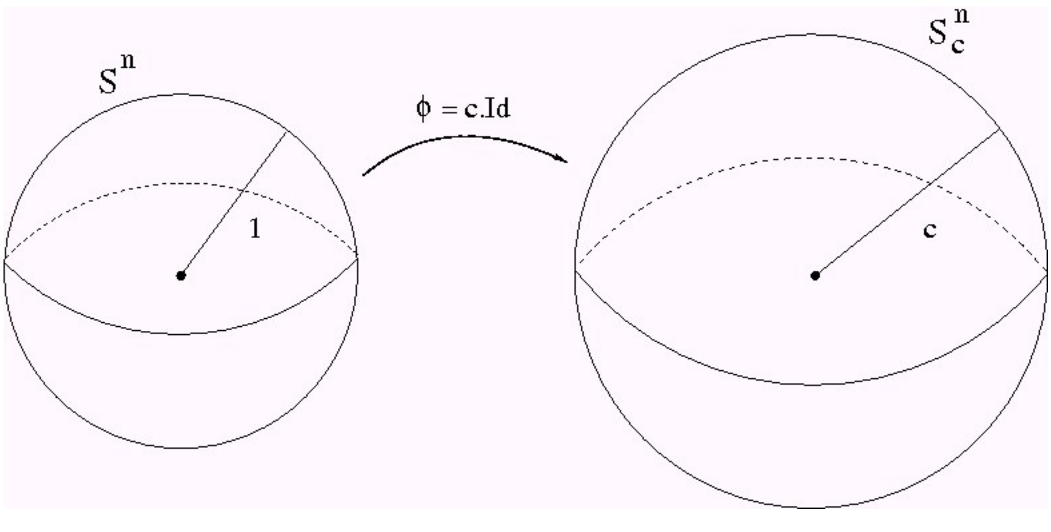
$$g_M\big(u, v\big)_p = g_N\big(df_p(u), df_p(v)\big)_{f(p)} = f^*\big(g_N\big)\big(u, v\big), \ \forall \ u, v \in T_pM,$$

ou ainda, $g_M = f^*(g_N)$.

Definição 2.45. (*Homotetia*) *Sejam* M *e* N *variedades Riemannianas. Um difeomorfismo* $\phi : M \longrightarrow N$ *é chamado de* ***homotetia de coeficiente*** c *se*

$$\phi^*(g_N) = cg_M, \textit{ isto é, } g_M = \frac{1}{c}\ \phi^*(g_N), \textit{ com } c > 0.$$

Portanto, $\langle d\phi_p(u), d\phi_p(v)\rangle^N_{\phi(p)} = c\langle u, v\rangle^M_p$, para todo u, $v \in T_pM$, $p \in M$. Ou ainda, $c\langle u, v\rangle^M_p = \langle d\phi_p(u), d\phi_p(v)\rangle^N_{\phi(p)}$.



Proposição 2.18. *Homotetias preservam conexão de Levi-Civita.*

Demonstração:

Dados $X,\ Y,\ Z \in \mathfrak{X}(M)$, pelo lema 2.4, existem e são únicos os campos (transportados) $\widetilde{X} := d\phi(X),\ \widetilde{Y} := d\phi(Y),\ \widetilde{Z} := d\phi(Z) \in \mathfrak{X}(N)$ que são ϕ-relacionados a $X,\ Y,\ Z$, respectivamente, tais que $\widetilde{X}(q) = d\phi_p(X_p),\ \widetilde{Y}(q) = d\phi_p(Y_p),\ \widetilde{Z}(q) = d\phi_p(Z_p),\ \forall q \in N,\ q = \phi(p)$. Agora, como ϕ é uma homotetia, dado $p \in M$

$$\begin{aligned}\langle X, Z\rangle^M(p) = \langle X(p), Z(p)\rangle^M = \frac{1}{c}\langle d\phi_p(X_p), d\phi_p(Z_p)\rangle^N = \frac{1}{c}\langle \widetilde{X}\big(\phi(p)\big), \widetilde{Z}\big(\phi(p)\big)\rangle^N = \\ = \frac{1}{c}\left(\langle \widetilde{X}, \widetilde{Z}\rangle^N \circ \phi\right)(p).\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\left(Y\langle X, Z\rangle^M\right)(p) &= Y_p\left(\langle X, Z\rangle^M\right)(p) = Y_p\left[\frac{1}{c}\left(\langle \widetilde{X}, \widetilde{Z}\rangle^N \circ \phi\right)\right](p) = \\ &= Y_p\left(\frac{1}{c}\right) + \frac{1}{c}Y_p\left(\langle \widetilde{X}, \widetilde{Z}\rangle^N \circ \phi\right)(p) = \frac{1}{c}d\phi_p(Y_p)\left(\langle \widetilde{X}, \widetilde{Z}\rangle^N\right)\big(\phi(p)\big) = \\ &= \frac{1}{c}\widetilde{Y}\big(\phi(p)\big)\left(\langle \widetilde{X}, \widetilde{Z}\rangle^N\right)\big(\phi(p)\big).\end{aligned}$$

Daí, $Y\langle X, Z\rangle^M = \dfrac{1}{c}\widetilde{Y}\langle \widetilde{X}, \widetilde{Z}\rangle^N$ e, da fórmula de Koszul segue o resultado. ■

Proposição 2.19. (*Curvatura num produto*) *Sejam* M *e* N *variedades Riemannianas, e considere a variedade produto Riemanniana* $M \times N$*. Sejam* $R,\ {}^MR,\ {}^NR$ *as respectivas curvaturas de* $M \times N,\ M$ *e* N*. Se* $\widetilde{X},\ \widetilde{Y},\ \widetilde{Z} \in \mathfrak{L}(M)$ *são os levantamentos de* $X,\ Y,\ Z \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $\widetilde{U},\ \widetilde{V},\ \widetilde{W} \in \mathfrak{L}(N)$ *são os levantamentos de* $U,\ V,\ W \in \mathfrak{X}(N)$*, então*

(a) $R(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\widetilde{Z}$ *é o levantamento de* ${}^MR(X, Y)Z \in \mathfrak{X}(M)$.

(b) $R(\widetilde{U}, \widetilde{V})\widetilde{W}$ *é o levantamento de* ${}^NR(U, V)W \in \mathfrak{X}(N)$.

(c) R *é zero em qualquer outro caso.*

Esta proposição será provada num contexto mais geral e no capítulo de produtos torcido.

2.6 Imersões

2.6.1 A segunda forma fundamental

Seja $\left(\overline{M}^{n+m=k}, \langle,\rangle, \overline{\nabla}\right)$ uma variedade Riemanniana com métrica $\langle,\rangle$ e conexão riemanniana $\overline{\nabla}$. Seja M^n uma variedade n-dimensional e $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^k$ uma imersão. Nestas condições, a métrica Riemanniana de $\overline{M}$ induz de maneira natural uma métrica Riemanniana em M através da definição

$$\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)}, \ \forall p \in M, \ \forall u, v \in T_pM,$$

e dessa forma, a aplicação f é uma imersão isométrica.

Dado $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade de $\overline{M}$. Portanto existem uma vizinhança $\overline{U}$ de $f(p)$ e um difeomorfismo $\Phi : \overline{U} \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^k$ em um aberto V do $\mathbb{R}^k$, tais que Φ aplica difeomorficamente $f(U) \cap \overline{U}$ em um aberto do subespaço $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^k$. Identificaremos U com $f(U)$ e cada vetor $v \in T_qM$, $q \in U$, com o vetor $df_q(v) \in T_{f(q)}\overline{M}$. Assim, para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p\overline{M}$ decompõe $T_p\overline{M}$ na soma direta

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp},$$

onde $(T_pM)^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. Se $v \in T_p\overline{M}$, $p \in M$, podemos escrever

$$v = v^T + v^{\perp}, \ v^T \in T_pM, \ v^{\perp} \in (T_pM)^{\perp}.$$

Denominamos v^T a componente tangencial de v e $v^{\perp}$ a componente normal de v. Além disso, usando o difeomorfismo Φ podemos estender localmente campos de vetores X, Y de M definidos em $f(U) \cap \overline{U}$, a campos de vetores $\overline{X}$, $\overline{Y}$ definidos em $\overline{U}$ tal que

$$\overline{X}|_U = X.$$

A conexão Riemanniana de $\overline{M}$ será indicada por $\overline{\nabla}$. Se X e Y são campos locais de vetores em M e $\overline{X}$, $\overline{Y}$ são extensões locais a $\overline{M}$, definimos:

$$\nabla_X Y = \left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}\right)^T.$$

Lema 2.10. *A conexão Riemanniana em M relativa à métrica induzida de $\overline{M}$ por f, é ∇, definida acima e, independe das extensões $\overline{X}$ e $\overline{Y}$.*

Demonstração: Vide [6]. ∎

Definição 2.46. (*Campo Normal*) *Sejam* $f : M \longrightarrow \overline{M}$ *uma imersão isométrica,* $U \subset M$ *uma vizinhança de* $p \in M$ *tal que* $f(U) \subset \overline{M}$ *é uma subvariedade de* $\overline{M}$ *e* $\overline{X} \in \mathfrak{X}(\overline{U})$ *um campo local em* $\overline{M}$*, com* $\overline{U} \subset \overline{M}$ *aberto e* $f(U) \subset \overline{U}$*. O campo* $\overline{X}$ *diz-se normal a* M *se* $\overline{X}(p) = \overline{X}_p \in (T_pM)^{\perp}$*.*

Dessa forma, se X e Y são campos locais em M

$$h(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y \tag{2.18}$$

é um campo local em $\overline{M}$ normal a M.

Obs 2.16. *Por* [6]*, temos que:*

(a) $h(X, Y)$ *não depende das extensões* $\overline{X}$*,* $\overline{Y}$*. Portanto* $h(X, Y)$ *está bem definida.*

(b) *Indicaremos por* $\mathfrak{X}(U)^{\perp}$ *o espaço dos campos de vetores difrenciáveis em* U *normais a* U*.*

Proposição 2.20. *Se* X*,* $Y \in \mathfrak{X}(U)$*, a aplicação* $h : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \longrightarrow \mathfrak{X}(U)^{\perp}$ *dada por*

$$h(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

é bilinear e simétrica.

Demonstração: Vide [6]. ∎

Exprimindo h em um sistema de coordenadas, verifica-se que o valor de $h(X, Y)(p)$ depende apenas de $X(p)$ e de $Y(p)$ (h é tensorial).

Agora podemos definir a segunda forma fundamental. Sejam $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. A aplicação $H_\eta : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(x, y) = \langle h(x, y), \eta \rangle, \; x, y \in T_pM, \tag{2.19}$$

é, pela proposição (2.20), uma forma bilinear e simétrica.

Definição 2.47. *Seja* $p \in M$ *e* $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. *A forma quadrática* II_η *definida em* T_pM *por*

$$II_\eta(x) = H_\eta(x,x) = \langle h(x,x), \eta\rangle \tag{2.20}$$

é chamada a segunda forma fundamental de f *em* p *segundo o vetor normal* η.

Obs 2.17. (a) *Às vezes se utiliza também a expressão* ***segunda forma fundamental*** *para designar a aplicação* h *que em cada* $p \in M$ *é uma aplicação bilinear, simétrica, tomando valores em* $(T_pM)^{\perp}$.

(b) *Associada à aplicação* H_η *temos a aplicação linear auto-adjunta* $A_\eta : T_pM \longrightarrow T_pM$ *definida por*

$$\langle A_\eta(x), y\rangle = H_\eta(x,y) = \langle h(x,y), \eta\rangle.$$

onde x, $y \in T_pM$. *O operador* $\boldsymbol{A}_\eta$ *é chamado de* ***operador forma***.

Proposição 2.21. *Seja* $p \in M$, $x \in T_pM$ *e* $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. *Seja* N *uma extensão local de* η *normal a* M. *Então*

$$A_\eta(x) = -\left(\overline{\nabla}_x N\right)^{\top}.$$

Demonstração: Vide [6]. ■

Considerando o caso particular em que a codimensão da imersão é 1, ou seja, $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ é uma imersão isométrica; $f(M) \subset \overline{M}$ é então denominada uma hipersuperfície.

Sejam $f(M) \subset \overline{M}$ uma hipersuperfície, $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$, $|\eta| = 1$. Como $A_\eta : T_pM \longrightarrow T_pM$ é auto-ajunta, existe uma base ortonormal de $\{e_1, ..., e_n\}$ de T_pM formada por autovetores com autovalores associados $\lambda_1, ..., \lambda_n$, isto é, $A_\eta(e_i) = \lambda_i e_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Supondo que M e $\overline{M}$ são orientáveis e estão orientadas então o vetor η fica univocamente determinado se exigirmos que sendo $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base na orientação de M, $\{e_1, ..., e_n, \eta\}$ é uma base na orientção de $\overline{M}$. Neste caso, denominamos os e_i direções principais e os $\lambda_i = k_i$ curvaturas principais da imersão f. O operador forma $\mathbf{A} = \mathbf{A}_\eta$ é chamado de **operador de Weingarten** associado à segunda forma fundamental. Nesse caso, vale a igualdade $A_\eta(x) = -\left(\overline{\nabla}_x N\right)^{\top} = -\left(\overline{\nabla}_x N\right)$ (Basta usar o fato de que $|\eta| = \langle N, N\rangle = 1$ e derivar a função $\langle N, N\rangle = 1$ na direção do campo X.

As funções simétricas de $\lambda_1, ..., \lambda_n$ são as invariantes da imersão. Por exemplo: $\det(A_\eta) = \lambda_1 ... \lambda_n$ é denominada a curvatura de Gauss-Kronecker de f e $\frac{1}{n}\mathrm{tr}(A_\eta) = \frac{1}{n}(\lambda_1 + ... + \lambda_n)$ é denominada a curvatura média de f.

Exemplo 2.14. *Um caso importante ocorre quando* $\overline{M} = \mathbb{R}^{n+1}$. *Nesse caso, podemos dar uma interpretação geométrica interessante de* A_η. *Inicialmente, seja* N *uma extensão local de* η, *unitária e normal a* M. *Seja* $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; ||x|| = 1\}$ *a esfera unitária de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *e defina a* aplicação normal de Gauss, $g : M^n \longrightarrow S^n$, *transladando a origem do campo* N *para a origem do* $\mathbb{R}^{n+1}$ *e fazendo*

$$g(q) = \textit{ponto final do transladado de } N(q).$$

Como T_qM *e* $T_{g(q)}\big(S_1^n\big)$ *são paralelos, podemos identificá-los, e* $dg_q : T_qM \longrightarrow T_qM$ *é dada por*

$$dg_q(\upsilon) = \frac{d}{dt}\big(N \circ c(t)\big)_{t=0} = \overline{\nabla}_\upsilon N = \big(\overline{\nabla}_\upsilon N\big)^T = -A_\eta(\upsilon),$$

onde $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ *é uma curva com* $c(0) = q$, $c'(0) = \upsilon$. *Segue-se que* $-A_\eta$ *é a derivada da aplicação normal de Gauss.*

Relacionaremos agora a curvatura de M com a curvatura de $\overline{M}$ e as segundas formas fundamentais. Se x, $y \in T_pM \subset T_p\overline{M}$, são linearmente independentes, indicaremos por $K(x, y)$ e $\overline{K}(x, y)$ as curvaturas seccionais de M e $\overline{M}$, respectivamente, no plano gerado por x e y.

Teorema 2.4. (*Teorema de Gauss*) *Sejam* $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+m}$ *uma imersão isométrica,* $p \in M$ *e* x, y *vetores ortonormais de* T_pM. *Então*

$$K(x, y) - \overline{K}(x, y) = \big\langle h(x, x), h(y, y)\big\rangle - |h(x, y)|^2. \tag{2.21}$$

Obs 2.18. **(a)** *No caso de hipersuperfície* $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$, *a fórmula de Gauss dada em* $\big(2.21\big)$ *admite uma expressão mais simples. Sejam* $p \in M$ *e* $\eta \in (T_pM)^\perp, |\eta| = 1$. *Seja* $\{e_1, ..., e_n, \eta\}$ *é uma base ortonormal de* T_pM *para a qual* $A_\eta = A$ *é diagonal, isto é,* $A(e_i) = \lambda_i e_i$, $i = 1, ..., n$, *onde* $\lambda_1, ..., \lambda_n$ *são os valores próprios de* A. *Então,* $H(e_i, e_i) = \lambda_i$ *e* $H(e_i, e_j) = 0$, *se* $i \neq j$. *Portanto,* $\big(2.21\big)$ *se escreve*

$$K(e_i, e_j) - \overline{K}(e_i, e_j) = \lambda_i \lambda_j. \tag{2.22}$$

(b) *No caso em que* $M = M^2 \subset \mathbb{R}^3$, *o produto* $\lambda_1\lambda_2$ *das curvaturas principais é conhecido como a curvatura Gaussiana da superfície. Neste caso, a observação acima mostra que a curvatura Gaussiana coincide com a curvatura seccional em uma superfície, e implica o famoso Teorema Egregium de Gauss, o qual afirma que a curvatura Gaussiana de* $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ *é invariante por isometrias.*

Exemplo 2.15. (*Curvatura de* S^n) *A curvatura seccional da esfera unitária* $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *é constante e igual a 1,pois orientando* S^n *pelo campo normal unitário* $N(x) = -x \in \mathbb{R}^{n+1}$, $|x| = 1$ *temos que a aplicação normal de Gauss é então igual a* $(-i)$, *onde* i *é a identidade de* S^n. *Decorre daí e do fato da aplicação linear auto-adjunta* A, *associada a* H, *ser* $-A = d(-i)$(*a derivada da aplicação normal de Gauss*) *que* A *tem todos os seus valores próprios iguais a 1. Isto significa que para todo* $p \in S^n$, *todo* $v \in T_pS^n$ *é um vetor próprio de* A. *Por* (2.22), *conclui-se que qualquer curvatura seccional de* S^n *é igual a 1.*

Definição 2.48. (*Imersão Geodésica*) *Uma imersão* $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+m}$ *é geodésica em* $p \in M$ *se para todo* $\eta \in (T_pM)^\perp$, *a segunda forma fundamental* II_η *é identicamente nula em* p, *o que equivale a dizer que* h *é nula em* p. *A imersão* f *é totalmente geodésica se ela é geodésica para todo* $p \in M$.

Proposição 2.22. *Uma imersão* $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+m}$ *é geodésica em* $p \in M$ *se, e somente se, toda geodésica* γ *de* M *partindo de* p *é geodésica em* $\overline{M}$.

Demonstração: Vide [6]. ■

A proposição 2.22 permite obter o que é provavelmente a melhor interpretação da curvatura seccional. Seja M uma varieade Riemanniana e p um ponto de M. Seja $B \subset T_pM$ uma bola aberta de T_pM onde a $\exp_p\big|_B$ é um difeomorfismo, e seja $\sigma \subset T_pM$ um subespaço de dimensão dois. Então $\exp_p\big(\sigma \cap B\big) = S$ é uma subvariedade de dimensão dois em M passando por p (e observe que, toda geodésica de S partindo de p é geodésica de M em p por construção). Intuitivamente, S é uma superfície formada por "pequenas"geodésicas que saem de p e são tangentes a σ em p. Pela proposição 2.22, S é geodésica em p, donde as segundas formas fundamentais da inclusão $i : S \longrightarrow M$

são nulas em p. Como subvariedade de M, S possui métrica Riemanniana induzida, cuja curvatura Gaussiana em p será indicada por K_S. Decorre da fórmula de Gauss que

$$K_S(p) = K(p, \sigma).$$

Em outras palavras, a curvatura seccional $K(p, \sigma)$ é a curvatura Gaussiana em p de uma pequena superfície formada por geodésicas de M que saem de p e são tangentes a σ.

Definição 2.49. (*Imersão Mínima*) *Uma imersão* $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+m}$ *é mínima se para todo* $p \in M$ *e todo* $\eta \in (T_pM)^\perp$ *tem-se que o traço de* A_η *é zero, isto é,* $\mathrm{tr}(A_\eta) = 0$.

Obs 2.19. (a) (*Vetor Curvatura Média*) *Seja* $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+m}$ *uma imersão ,* $p \in M$ *e* $E_1, \ldots, E_m$ *um referencial ortonormal local de vetores em* $\mathfrak{X}(U)^\perp$*, onde* $U \subset M$ *é uma vizinhança de* p *na qual* f *é um mergulho, podemos escrever, em* p,

$$h(x, y) = \sum_{i=1}^{m} H_i(x, y)E_i, \ \ x, y \in T_pM, \ \text{onde } H_i = H_{E_i}, \ \text{isto é},$$

$$h(x, y) = \sum_{i=1}^{m} H_{E_i}(x, y)E_i = \sum_{i=1}^{m} \langle h(x, y), E_i\rangle E_i = \sum_{i=1}^{m} \langle A_{E_i}(x), y\rangle E_i.$$

O vetor normal dado por

$$\overrightarrow{H}(p) = \overrightarrow{H} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} \big(\text{traço } A_i\big)E_i, \tag{2.23}$$

onde $A_i = A_{E_i}$*, é chamado o* **vetor curvatura média** *de* f*. Explicitamente, como o traço de um operador linear independe da base, seja* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *um referencial local em* U*, portanto uma base de* T_pM *para cada* $p \in M$ *, logo o traço de* A_i (*em cada* $p \in M$) *é dado por*

$$\mathrm{tr}(A_i) = \sum_{j=1}^{n} \langle A_i(e_j), e_j\rangle.$$

Assim,

$$\overrightarrow{H}(p) = \overrightarrow{H} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} \big(\text{traço } A_i\big)E_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{n} \langle A_i(e_j), e_j\rangle\right] E_i =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{n} \langle h(e_j, e_j), E_i\rangle\right] E_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \langle h(e_j, e_j), E_i\rangle E_i =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{m} \langle h(e_j, e_j), E_i\rangle E_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{m} H_{E_i}(e_j, e_j)E_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} h(e_j, e_j).$$

(b) *É claro que* f *é mínima se e só se* $H(p) = 0$, *para todo* $p \in M$.

(c) $\overrightarrow{H}$ *não depende do referencial* E_i *escolhido.*

Definição 2.50. (*Imersão Umbílica*) *Sejam* M^n, $\overline{M}^{n+m}$ *variedades Riemannianas,* $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+m}$ *uma imersão isométrica e* $p \in M \subset \overline{M}$. *A imersão* f *é dita ser umbílica em* p *se existe um vetor normal* $z \in \left(T_pM\right)^{\perp}$ *tal que*

$$h(v, w) = \langle v, w \rangle z, \ \forall v, \ w \in T_pM.$$

Então z *é chamado* ***vetor curvatura normal*** *de* M *em* p. *A imersão* f *é* (*totalmente*) *umbílica se* f *é umbílica em todo* $p \in M$.

2.6.2 As equações fundamentais de uma imersão isométrica

Dada uma imersão isométrica $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+m}$ temos em cada $p \in M$ a decomposição

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp},$$

que varia diferenciavelmente com p. Isto significa que o fibrado tangente $T\overline{M}$ retrito a M, $T\overline{M}\big|_M$, se decompõe em um fibrado tangente TM e em um fibrado normal $TM^{\perp}$. No que se segue, usaremos sistematicamente as letras latinas X, Y, Z, etc., para indicar os campos diferenciáveis de vetores tangentes a M e as letras gregas ξ, η, ζ, etc., para indicar os campos diferenciáveis de vetores normais a M.

Dados X e η, já sabemos que a componente tangente a M de $\overline{\nabla}_X\eta$ é dada por $\left(\overline{\nabla}_X\eta\right)^{\top} = -A_\eta(X)$. Passaremos agora a estudar a componente normal a M de $\overline{\nabla}_X\eta$, que será chamada conexão normal da imersão f, denotada por D. Explicitamente,

$$D_X\eta = \left(\overline{\nabla}_X\eta\right)^{N} = \overline{\nabla}_X\eta - \left(\overline{\nabla}_X\eta\right)^{T} = \overline{\nabla}_X\eta + A_\eta(X). \tag{2.24}$$

Proposição 2.23. *A conexão normal* D *da imersão* f *possui as propriedades usuais de uma conexão.*

Demonstração: Vide [6]. ∎

Definição 2.51. (*Curvatura Normal*) *A curvatura normal* $R^{\perp}$ *da imersão é definida por*

$$R^{\perp}(X,Y)\eta = D_Y D_X \eta - D_X D_Y \eta + D_{[X,Y]}\eta. \tag{2.25}$$

Proposição 2.24. *As seguintes equações se verificam:*

(a) *Equação de Gauss*

$$\langle \overline{R}(X,Y)Z,T\rangle = \langle R(X,Y)Z,T\rangle - \langle h(Y,T),h(X,Z)\rangle + \langle h(X,T),h(Y,Z)\rangle. \tag{2.26}$$

(b) *Equação de Ricci*

$$\langle \overline{R}(X,Y)\eta,\zeta\rangle - \langle R^{\perp}(X,Y)\eta,\zeta\rangle = \langle [A_\eta, A_\zeta]X,Y\rangle, \tag{2.27}$$

onde $[A_\eta, A_\zeta]$ *indica o operador* $A_\eta \circ A_\zeta - A_\zeta \circ A_\eta$.

Demonstração: Vide [6]. ■

Definição 2.52. (*Tensor segunda forma fundamental*) *Seja* $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+m}$ *uma imersão isométrica. A segunda forma fundamental da imersão* f *pode ser considerada como um tensor, dada por*

$$\begin{aligned} h \;:\; \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)^{\perp} &\longrightarrow C^{\infty}(M)\\ (X,Y,\eta) &\longmapsto h(X,Y,\eta) = \langle h(X,Y),\eta\rangle. \end{aligned}$$

Derivando covariantemente h, na direção de X, obtemos:

$$\begin{aligned} \big(\overline{\nabla}_X h\big)\big(Y,Z,\eta\big) &= X\big(h(Y,Z,\eta)\big) - h(\nabla_X Y,Z,\eta) - h(Y,\nabla_X Z,\eta) - h(Y,Z,D_X\eta) =\\ &= X\langle h(Y,Z),\eta\rangle - \langle h(\nabla_X Y,Z),\eta\rangle - \langle h(Y,\nabla_X Z),\eta\rangle - \langle h(Y,Z),D_X\eta\rangle, \end{aligned}$$

e como

$$X\langle h(Y,Z),\eta\rangle = \langle \overline{\nabla}_X h(Y,Z),\eta\rangle + \langle h(Y,Z),\overline{\nabla}_X\eta\rangle = \langle D_X h(Y,Z),\eta\rangle + \langle h(Y,Z),D_X\eta\rangle,$$

temos que

$$\begin{aligned} \big(\overline{\nabla}_X h\big)\big(Y,Z,\eta\big) &= \langle D_X h(Y,Z),\eta\rangle - \langle h(\nabla_X Y,Z),\eta\rangle - \langle h(Y,\nabla_X Z),\eta\rangle =\\ &= \langle D_X h(Y,Z) - h(\nabla_X Y,Z) - h(Y,\nabla_X Z),\eta\rangle. \end{aligned}$$

Proposição 2.25. (*Equação de Codazzi*) *Com a notação acima*

$$\langle \overline{R}(X,Y)Z,\eta\rangle = \left(\overline{\nabla}_Y h\right)(X,Z,\eta) - \left(\overline{\nabla}_X h\right)(Y,Z,\eta). \tag{2.28}$$

Obs 2.20. *Se o espaço ambiente $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante, a equação de Codazzi se reduz a:*

$$\left(\overline{\nabla}_Y h\right)(X,Z,\eta) = \left(\overline{\nabla}_X h\right)(Y,Z,\eta).$$

Se além disto, a codimensão da imersão é 1, $D_X\eta = 0$, donde,

$$\begin{aligned}\left(\overline{\nabla}_X h\right)(Y,Z,\eta) &= X\langle A_\eta(Y),Z\rangle - \langle A_\eta(\nabla_X Y),Z\rangle - \langle A_\eta(Y),\nabla_X Z\rangle = \\ &= \langle \nabla_X\big(A_\eta(Y)\big),Z\rangle - \langle A_\eta(\nabla_X Y),Z\rangle.\end{aligned}$$

Portanto, neste caso, a equação de Codazzi se escreve

$$\nabla_X\big(A_\eta(Y)\big) - \nabla_Y\big(A_\eta(X)\big) = A_\eta\big([X,Y]\big).$$

Capítulo 3

Produtos Torcidos

3.1 Variedade produto torcido

Sejam B e F variedades Riemannianas, sendo $g_B = \langle \cdot, \cdot \rangle^B$ e $g_F = \langle \cdot, \cdot \rangle^F$ suas respectivas métricas. Ponha (como variedade produto) $M = B \times F$ e sejam $\pi : M \to B$ e $\sigma : M \to F$ as projeções canônicas de M sobre B e F. A métrica Remanniana produto $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em M é dada por

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \pi^* \langle \cdot, \cdot \rangle^B + \sigma^* \langle \cdot, \cdot \rangle^F.$$

Denote por ${}^B\nabla$, ${}^F\nabla$, ∇ as conexões Riemannianas de B, F e M respectivamente.

Exemplo 3.1. *Sejam* B *e* F *variedades Riemannianas,* $g_B = \langle \cdot, \cdot \rangle^B$ *e* $g_F = \langle \cdot, \cdot \rangle^F$ *suas respectivas métricas e,* $M = B \times F$ *a variedade Riemanniana produto acima. Dados* u, $v \in T_{(p,q)}\big(B \times F\big)$, *tem-se que existem e são únicos* u_1, $v_1 \in \big(d\sigma_{(p,q)}\big)^{-1}\big(\{0\}\big) = T_{(p,q)}B \equiv T_pB$ *e* u_2, $v_2 \in \big(d\pi_{(p,q)}\big)^{-1}\big(\{0\}\big) = T_{(p,q)}F \equiv T_qF$ *tais que* $v = v_1 + v_2$ *e* $u = u_1 + u_2$ *com* $d\pi(u) = u_1$, $d\sigma(u) = u_2$, $d\pi(v) = v_1$, $d\sigma(v) = v_2$. *Assim,*

$$\begin{aligned}\langle u, v \rangle_{(p,q)} &= \langle u_1, v_1 \rangle_p^B + \langle u_2, v_2 \rangle_q^F = \langle d\pi(u), d\pi(v) \rangle_{\pi(p,q)} + \langle d\sigma(u), d\sigma(v) \rangle_{\sigma(p,q)} = \\ &= \big(\pi^* g_B\big)(u, v) + \big(\sigma^* g_F\big)(u, v), \ \forall (p,q) \in B \times F, \ \forall u, v \in T_{(p,q)}\big(B \times F\big).\end{aligned}$$

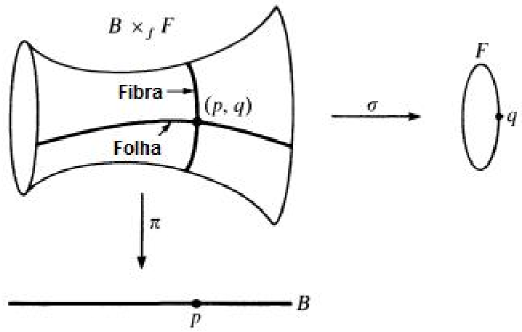
Definição 3.1. (*Produto Torcido*) *Sejam* (B, g_B) *e* (F, g_F) *variedades Riemannianas, e seja* $f \in C^\infty(B)$ *tal que* $f > 0$. ***O produto torcido*** (***warped product***) $M = B \times_f F$ *é a variedade produto* $B \times F$ *munida com a métrica*

$$g_f = \pi^*(g_B) + (f \circ \pi)^2 \sigma^*(g_F),$$

onde chamamos f *de* ***função torção*** *(ou de* ***função* warping***),* F *a* ***variedade fibra*** *e* B *a* ***variedade base*** *de* M.

Explicitamente, se v é tangente a $B \times_f F$ em $(p, q) = x$, com $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in T_pB$, $v_2 \in T_qF$, então

$$g_f(v, v) = \langle v, v\rangle_x^f = \langle d\pi_{(p,q)}(v), d\pi_{(p,q)}(v)\rangle_p + f^2(p)\langle d\sigma_{(p,q)}(v), d\sigma_{(p,q)}(v)\rangle_q =$$
$$= \langle v_1, v_1\rangle_p^B + (f \circ \pi)^2(p, q)\langle v_2, v_2\rangle_q^F.$$



Lema 3.1. *Seja* $M = B \times_f F$ *o produto torcido acima.* g_f *é de fato uma métrica Riemanniana em* M*, chamada de* ***métrica torcida*** *ou* ***métrica warped*** *de* M.

Demonstração: Vide [9]. ■

Se $f \equiv 1$, então $M = B \times_f F$ reduz-se à variedade Riemanniana produto. Nosso objetivo é expressar a geometria de M em termos da *função torção* f e das geometrias de B e F.

Exemplo 3.2. (*Superfície de Revolução*) *Toda superfície de revolução é um produto torcido, sendo suas folhas as diferentes posições da curva rotacionada e as fibras os círculos de revolução.*

Explicitamente, seja C uma curva regular no plano XZ, em $\mathbb{R}^3$, que não intersecta o eixo OZ. A superfície S obtida girando a curva C em torno do eixo OZ é chamada superfície de revolução com geratriz C e eixo de OZ. Os círculos descritos pelos pontos de C são os paralelos de S e as várias posições de C sobre a superfície S (interseções de S

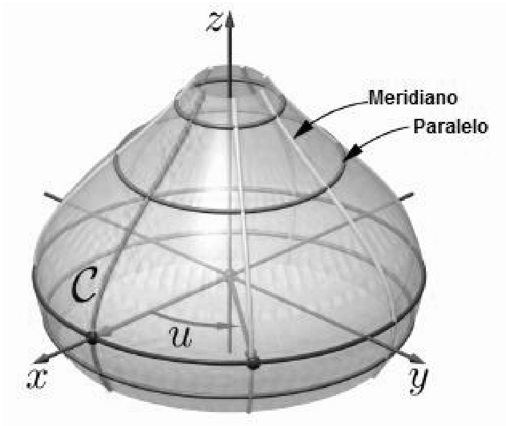
com os planos que contêm o eixo de revolução) são denominadas meridianos de S. Assim, considerando a parametrização $\varphi : (0, 2\pi) \times (a, b) \longrightarrow S$ dada por:

$$X(u, v) = (f(v)\cos u, f(v)\operatorname{sen} u, g(v)),$$

onde $\alpha : (a, b) \longrightarrow \alpha\big((a, b)\big)$, $\alpha(v) = \big(f(v), 0, g(v)\big)$, com $f(v) > 0$, é uma parametrização de C, então, a métrica em S é dada por

$$ds^2 = dv^2 + [f(v)]^2 du^2,$$

onde du^2 é a métrica em $S^1(1)$. Portanto, $S = C \times_f S^1(1)$



Exemplo 3.3. ($\mathbb{R}^3 - \{0\}$ *como Produto Torcido*) *O espaço euclidiano* $\mathbb{R}^3$ *pode ser visto como um produto torcido.*

De fato, considerando o $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ em coordenadas esféricas, isto é, $\big(x, y, z\big) = \big(r\sin(u)\sin(v), \cos(u)\sin(v), r\cos(v)\big)$, o elemento linha do $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ é dado por

$$ds^2 = dr^2 + r^2\big(du^2 + \sin^2(u)dv^2\big).$$

Evidentemente, $\mathbb{R}^3 - 0$ é difeomorfo a $\mathbb{R}_+ \times S^2$ pela aplicação $(t, p) \longmapsto tp$. Portanto, a fórmula de ds^2 mostra que $\mathbb{R}^3 - 0$ pode ser identificado com o produto torcido $\mathbb{R}_+ \times_r S^2$. Em $\mathbb{R}^3 - 0$ as folhas são os raios que partem da origem e as fibras são as esferas $S^2(r)$, $r > 0$.

Proposição 3.1. *Assim como na variedade Riemanniana produto, para cada* $(p, q) \in M$, *as* ***fibras*** $p \times F = \pi^{-1}(p)$ *e as* ***folhas*** $B \times q = \sigma^{-1}(q)$, *com a métrica induzida de* g_f, *são subvariedades Riemannianas de* M, *e a métrica torcida em* M *implica nas seguintes condições geométricas:*

(a) *Para cada* $q \in F$, *a aplicação* ${}_q\pi := \pi\big|_{B \times q}$ *é uma isometria sobre* B.

(b) *Para cada* $p \in B$, *a aplicação* ${}_p\sigma := \sigma\big|_{p \times F}$ *é uma homotetia positiva sobre* F,*com fator escalar* $1/f(p)$.

(c) *Para cada* $(p, q) \in M$, *a folha* $\sigma^{-1}(q)$ *e a fibra* $\pi^{-1}(p)$ *são ortogonais em* (p, q).

Demonstração: De fato,

(a) Para cada $q \in F$, a aplicação ${}_q\pi := \pi\big|_{B\times q} : B \times q \longrightarrow B$ é um difeomorfismo. Assim, para cada $(p, q) \in B \times q$ e para todos $u, v \in T_{(p,q)}B \subset T_{(p,q)}\big(B \times F\big)$ tem-se

$$\langle v, u\rangle_{(p,q)} = \langle d({}_q\pi)_p(u), d({}_q\pi)_p(v)\rangle_p^B + (f \circ \pi)^2(p, q)\underbrace{\langle d\sigma_{(p,q)}(u), d\sigma_{(p,q)}(v)\rangle_q^F}_{0} =$$

$$= \langle d({}_q\pi)_p(u), d({}_q\pi)_p(v)\rangle_p^B,$$

pois, $d({}_q\pi)_p = d\pi_{(p,q)}\Big|_{T_{(p,q)}B}$ e $d\sigma_{(p,q)}(T_{(p,q)}B) = d\sigma_{(p,q)}\Big(\big(d\sigma_{(p,q)}\big)^{-1}(\{0\})\Big) = 0.$

(b) Para cada $p \in B$, a aplicação ${}_p\sigma := \sigma\big|_{p\times F} : p \times F \longrightarrow F$ é um difeomorfismo. Assim, para cada $(p, q) \in p \times F$ e para todos w,$z \in T_{(p,q)}F \subset T_{(p,q)}\big(B \times F\big)$ tem-se

$$\langle w, z\rangle_{(p,q)} = \underbrace{\langle d\pi_{(p,q)}(w), d\pi_{(p,q)}(z)\rangle_p^B}_{0} + (f \circ \pi)^2(p, q)\langle d({}_p\sigma)_q(w), d({}_p\sigma)_q(z)\rangle_q^F =$$

$$= f^2(p)\langle d({}_p\sigma)_q(w), d({}_p\sigma)_q(z)\rangle_q^F,$$

pois, $d\pi_{(p,q)}(T_{(p,q)}F) = d\pi_{(p,q)}\Big(\big(d\pi_{(p,q)}\big)^{-1}(\{0\})\Big) = 0$ e $d({}_p\sigma)_q = d\sigma_{(p,q)}\Big|_{T_{(p,q)}F}$.

(c) Segue diretamente da definição de métrica torcida.

■

Vetores tangentes às folhas são denominados **horizontais**; vetores tangentes as fibras são denominados **verticais**. Denotaremos por $\mathcal{H}$ a projeção ortogonal de $T_{(p,q)}M$ sobre seu subespaço horizontal $T_{(p,q)}B \equiv T_{(p,q)}(B \times q)$, e por $\mathcal{V}$ a projeção ortogonal de $T_{(p,q)}M$ sobre seu subespaço vertical $T_{(p,q)}F = T_{(p,q)}(p \times F)$. Dessa forma, dado $v \in T_{(p,q)}M$, com $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in T_{(p,q)}B$, $v_2 \in T_{(p,q)}F$, então $\mathcal{H}(v) = v_1$ e $\mathcal{V}(v) = v_2$. E ainda, dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\mathcal{H}(X)$ e $\mathcal{V}(X) \in \mathfrak{X}(M)$.

Portanto, para campos vetoriais verticais V, W em M, a fórmula $h(V, W) = \mathcal{H}\big(\nabla_V W\big)$ dá o tensor segunda forma fundamental das fibras.

Ao espaço dos campos de $M = B \times_f F$ que são levantamentos (vide definição 2.22) de campos de B (respectivamente de F) denotaremos por $\mathfrak{L}(B)$ (respectivamente por $\mathfrak{L}(F)$). Veja que $\mathfrak{L}(B)$ é um $C^\infty(M)_B$-módulo, onde $C^\infty(M)_B$ é o anel das funções $C^\infty(M)$ que são levantamento de funções $C^\infty(B)$. Analogamente, $\mathfrak{L}(F)$ é um $C^\infty(M)_F$-módulo, onde $C^\infty(M)_F$ é o anel das funções $C^\infty(M)$ que são levantamento de funções $C^\infty(F)$.

Vamos determinar, agora, a conexão Riemanniana, o tensor de curvatura e o tensor de Ricci de uma variedade produto torcido, como função da função de torção f.

Proposição 3.2. *Sejam* $M = B \times_f F$ *um produto torcido,* $h \in C^\infty(B)$ *e* $\psi \in C^\infty(F)$*, então*

(a) $\nabla \widetilde{h} = \widetilde{{}^B\nabla h}$, *onde* $\widetilde{h} = h \circ \pi$ *e* $\widetilde{{}^B\nabla h}$ *é o levantamento de* ${}^B\nabla h \in \mathfrak{X}(B)$ *para* M.

(b) $\nabla \widetilde{\psi} = \dfrac{\widetilde{{}^F\nabla\psi}}{\widetilde{f}^2}$, *onde* $\widetilde{\psi} = \psi \circ \sigma$, $\widetilde{f} = f \circ \pi$ *e* $\widetilde{{}^F\nabla\psi}$ *é o levantamento de* ${}^F\nabla\psi \in \mathfrak{X}(F)$ *para* M.

Demonstração:

(a) Devemos mostrar que $\nabla\widetilde{h}$ é horizontal (ou seja, σ-relacionado com o campo nulo em F) e $\nabla\widetilde{h}$ é π-relacionado com ${}^B\nabla h$ em B. De fato, em cada $(p,q) \in M$, dado um vetor vertical v, isto é, $v \in T_{(p,q)}F$, então

$$\begin{aligned}\langle \nabla\widetilde{h}, v\rangle = v(\widetilde{h}) = v(h\circ\pi) = \big(d\pi(v)\big)(h) = 0 = \\ = \langle d\pi(\nabla\widetilde{h}), d\pi(v)\rangle^B + \big(f\circ\pi\big)^2\langle d\sigma(\nabla\widetilde{h}), d\sigma(v)\rangle^F = \\ = \big(f\circ\pi\big)^2\langle d\sigma(\nabla\widetilde{h}), d\sigma(v)\rangle^F,\end{aligned}$$

pois $d\pi(v) = 0$. Portanto, $\nabla\widetilde{h}$ é horizontal. Agora, dado um vetor horizontal u, isto é, $u \in T_{(p,q)}B$, então

$$\begin{aligned}\langle \nabla\widetilde{h}, u\rangle = \langle d\pi(\nabla\widetilde{h}), d\pi(u)\rangle^B_p + \big(f\circ\pi\big)^2\langle d\sigma(\nabla\widetilde{h}), \underbrace{d\sigma(u)}_{=0}\rangle^F_q = u(h\circ\pi) = \\ = \big(d\pi(u)(h)\big)\circ\pi = \langle {}^B\nabla h, d\pi(u)\rangle^B \circ \pi,\end{aligned}$$

como $d({}_q\pi)_p : T_{(p,q)}B \longrightarrow T_pB$ é isomorfismo $\forall (p,q) \in M$, então $d\pi(\nabla\widetilde{h}) = {}^B\nabla h$ para todo $(p,q) \in M$.

(b) Primeiro, vamos mostrar que $\nabla\widetilde{\psi}$ é vertical. De fato, em cada $(p,q) \in M$, dado um vetor horizontal u, isto é, $u \in T_{(p,q)}B$, então

$$\begin{aligned}\langle \nabla\widetilde{\psi}, u\rangle &= u(\widetilde{\psi}) = u(\psi\circ\sigma) = \big(d\sigma(u)\big)(\psi) = 0 = \\ &= \langle d\pi(\nabla\widetilde{\psi}), d\pi(u)\rangle^B + \big(f\circ\pi\big)^2\langle d\sigma(\nabla\widetilde{\psi}), d\sigma(u)\rangle^F = \\ &= \langle d\pi(\nabla\widetilde{\psi}), d\pi(u)\rangle^B,\end{aligned}$$

pois $d\sigma(u) = 0$. Portanto, $\nabla\widetilde{\psi}$ é vertical. Agora, dado um vetor vertical v, isto é, $v \in T_{(p,q)}F$, então

$$\begin{aligned}\langle \nabla\widetilde{\psi}, v\rangle &= \langle d\pi(\nabla\widetilde{\psi}), \underbrace{d\pi(v)}_{=\,0}\rangle^B + \big(f\circ\pi\big)^2\langle d\sigma(\nabla\widetilde{\psi}), d\sigma(v)\rangle^F = \\ &= \big(f\circ\pi\big)^2\langle d\sigma(\nabla\widetilde{\psi}), d\sigma(v)\rangle^F = v(\widetilde{\psi}) = v(\psi\circ\sigma) = \big(d\sigma(v)(\psi)\big)\circ\sigma \\ &= \langle {}^F\nabla\psi, d\sigma(v)\rangle^F\circ\sigma,\end{aligned}$$

como $d({}_p\pi)_q : T_{(p,q)}F \longrightarrow T_qF$ é isomorfismo $\forall (p,q)\in M$, então $d\sigma(\nabla\widetilde{\psi}) = \dfrac{{}^F\nabla\psi}{\widetilde{f}^2}$ para todo $(p,q)\in M$, isto é $\nabla\widetilde{\psi} = \dfrac{\widetilde{{}^F\nabla\psi}}{\widetilde{f}^2}$.

■

Proposição 3.3. *Em* $M = B\times_f F$*, se* $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathfrak{L}(B)$ *e* $\widetilde{V}, \widetilde{W} \in \mathfrak{L}(F)$*, então*

(a) $\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}$ *é o levantamento de* ${}^B\nabla_X Y$ *em* B.

(b) $\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{V} = \nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{X} = \left(\dfrac{\widetilde{X}(\widetilde{f})}{\widetilde{f}}\right)\widetilde{V}$.

(c) $\mathcal{H}\big(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}\big) = h(\widetilde{V},\widetilde{W}) = -\left(\dfrac{\langle\widetilde{V},\widetilde{W}\rangle}{\widetilde{f}}\right)\nabla\widetilde{f}$.

(d) $\mathcal{V}\big(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}\big) \in \mathfrak{L}(F)$ *é o levantamento de* ${}^F\nabla_V W$ *em* F.

Na notação acima, $\widetilde{f} = f\circ\pi$.

Demonstração:

(a) Devemos mostrar que $\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}$ é horizontal e π-relacionado com ${}^B\nabla_X Y$ em B. De fato, dado $\widetilde{V}$ um campo vetorial vertical, isto é, $\widetilde{V}\in\mathfrak{L}(F)$, então pela fórmula de Koszul

$$\begin{aligned}2\langle \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}, \widetilde{V}\rangle &= \widetilde{Y}\underbrace{\langle\widetilde{X},\widetilde{V}\rangle}_{=\,0} + \widetilde{X}\underbrace{\langle\widetilde{V},\widetilde{Y}\rangle}_{=\,0} - \widetilde{V}\langle\widetilde{Y},\widetilde{X}\rangle - \langle\underbrace{[\widetilde{Y},\widetilde{V}]}_{=\,0},\widetilde{X}\rangle - \langle\underbrace{[\widetilde{X},\widetilde{V}]}_{=\,0},\widetilde{Y}\rangle - \langle[\widetilde{Y},\widetilde{X}],\widetilde{V}\rangle = \\ &= -\widetilde{V}\langle\widetilde{Y},\widetilde{X}\rangle - \langle[\widetilde{Y},\widetilde{X}],\widetilde{V}\rangle.\end{aligned}$$

Como $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathfrak{L}(B)$, temos que $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] \in \mathfrak{L}(B)$ é o levantamento de $[X, Y]$ em B. Logo, $\langle [\widetilde{Y}, \widetilde{X}], \widetilde{V}\rangle = 0$. Agora, pela métrica torcida, em cada $x = (p, q) \in M$, temos

$$\langle \widetilde{Y}, \widetilde{X}\rangle(p, q) = \langle d\pi_x(\widetilde{Y}), d\pi_x(\widetilde{X})\rangle_p^B + (f \circ \pi(x))^2 \langle \underbrace{d\sigma_x(\widetilde{Y})}_{=\,0}, \underbrace{d\sigma_x(\widetilde{X})}_{=\,0}\rangle_q^F =$$

$$= \langle (Y \circ \pi)(p, q), (X \circ \pi)(p, q)\rangle_p^B = \big(\langle X, Y\rangle^B \circ \pi\big)(p, q),$$

isto é, $\langle \widetilde{Y}, \widetilde{X}\rangle = \langle Y, X\rangle^B \circ \pi$, e daí,

$$\widetilde{V}\langle \widetilde{Y}, \widetilde{X}\rangle = \widetilde{V}\big(\langle Y, X\rangle^B \circ \pi\big) = d\pi(\widetilde{V})\big(\langle Y, X\rangle^B\big) = 0.$$

Assim, $\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}$ é horizontal. Agora, dado $\widetilde{Z} \in \mathfrak{L}(B)$, temos que

$$\widetilde{Y}\langle \widetilde{X}, \widetilde{Z}\rangle = \widetilde{Y}\big(\langle X, Z\rangle^B \circ \pi\big) = \big(d\pi(\widetilde{Y})\langle X, Z\rangle^B\big) \circ \pi = \big(Y\langle X, Z\rangle^B\big) \circ \pi,$$

logo, obtemos que

$$\big(2\langle d\pi(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}), d\pi(\widetilde{Z})\rangle^B\big) \circ \pi = 2\langle \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}, \widetilde{Z}\rangle =$$
$$= \widetilde{Y}\langle \widetilde{X}, \widetilde{Z}\rangle + \widetilde{X}\langle \widetilde{Z}, \widetilde{Y}\rangle - \widetilde{Z}\langle \widetilde{Y}, \widetilde{X}\rangle - \langle [\widetilde{Y}, \widetilde{Z}], \widetilde{X}\rangle - \langle [\widetilde{X}, \widetilde{Z}], \widetilde{Y}\rangle - \langle [\widetilde{Y}, \widetilde{X}], \widetilde{Z}\rangle =$$
$$= \big(Y\langle X, Z\rangle^B + X\langle Z, Y\rangle^B - Z\langle X, Y\rangle^B - \langle [Y, Z], X\rangle^B - \langle [X, Z], Y\rangle^B - \langle [Y, X], Z\rangle^B\big) \circ \pi =$$
$$= \big(2\langle {}^B\nabla_X Y, Z\rangle^B\big) \circ \pi, \forall \widetilde{Z} \in \mathfrak{L}(B).$$

Portanto, segue o resultado. E ainda, como $\pi\big|_{B\times q}$ é uma isometria, em cada folha $B \times q$, ∇ é a conexão Riemanniana em cada folha.

(b) $0 = [\widetilde{X}, \widetilde{V}] = \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{V} - \nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{X}$, logo $\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{V} = \nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{X}$. Esses campos $\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{V}$ e $\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{X}$ são verticais, pois por (a),

$$0 = \widetilde{X}\langle \widetilde{V}, \widetilde{Y}\rangle = \langle \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{V}, \widetilde{Y}\rangle + \langle \widetilde{V}, \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\rangle \Rightarrow \langle \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{V}, \widetilde{Y}\rangle = -\langle \widetilde{V}, \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\rangle = 0.$$

Agora, dado $\widetilde{W} \in \mathfrak{L}(F)$, pela fórmula de Koszul

$$2\langle \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{V}, \widetilde{W}\rangle = \widetilde{V}\underbrace{\langle \widetilde{X}, \widetilde{W}\rangle}_{=\,0} + \widetilde{X}\langle \widetilde{W}, \widetilde{V}\rangle - \widetilde{W}\underbrace{\langle \widetilde{V}, \widetilde{X}\rangle}_{=\,0} - \underbrace{\langle [\widetilde{V}, \widetilde{W}], \widetilde{X}\rangle}_{=\,0} -$$
$$- \langle \underbrace{[\widetilde{X}, \widetilde{W}]}_{=\,0}, \widetilde{V}\rangle - \langle \underbrace{[\widetilde{V}, \widetilde{X}]}_{=\,0}, \widetilde{W}\rangle = \widetilde{X}\langle \widetilde{W}, \widetilde{V}\rangle. \ (*)$$

Pela métrica torcida, em cada $x = (p, q) \in M$ temos

$$\langle \widetilde{V}, \widetilde{W}\rangle(p, q) = \langle \underbrace{d\pi_x(\widetilde{V})}_{=\,0}, \underbrace{d\pi_x(\widetilde{W})}_{=\,0}\rangle_p^B + (f \circ \pi(x))^2 \langle d\sigma_x(\widetilde{V}), d\sigma_x(\widetilde{W})\rangle_q^F =$$
$$= (f \circ \pi(p, q))^2 \langle (V \circ \sigma)(p, q), (W \circ \sigma)(p, q)\rangle_q^F =$$
$$= \widetilde{f}^2(p, q)\Big(\big(\langle V, W\rangle^F \circ \sigma\big)(p, q)\Big),$$

isto é, $\langle \widetilde{V}, \widetilde{W} \rangle = \widetilde{f}^2\big(\langle V, W\rangle^F \circ \sigma\big)$, e daí

$$\begin{aligned}\widetilde{X}\langle \widetilde{V}, \widetilde{W}\rangle &= \widetilde{X}\left[\widetilde{f}^2\big(\langle V, W\rangle^F \circ \sigma\big)\right] = \widetilde{X}(\widetilde{f}^2)\big(\langle V, W\rangle^F \circ \sigma\big) + \widetilde{f}^2\left[\widetilde{X}\big(\langle V, W\rangle^F \circ \sigma\big)\right] = \\ &= 2\widetilde{f}\widetilde{X}(\widetilde{f})\big(\langle V, W\rangle^F \circ \sigma\big) + \widetilde{f}^2\big[\underbrace{d\sigma(\widetilde{X})}_{=\,0}\big(\langle V, W\rangle^F\big)\big] = \\ &= 2\widetilde{f}\widetilde{X}(\widetilde{f})\frac{\langle \widetilde{V}, \widetilde{W}\rangle}{\widetilde{f}^2} = \frac{2\big(\widetilde{X}(\widetilde{f})\big)}{\widetilde{f}}\langle \widetilde{V}, \widetilde{W}\rangle.\ (**)\end{aligned}$$

Comparando $(*)$ e $(**)$

$$2\langle \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{V}, \widetilde{W}\rangle = \frac{2\big(\widetilde{X}(\widetilde{f})\big)}{\widetilde{f}}\langle \widetilde{V}, \widetilde{W}\rangle,\ \forall \widetilde{W} \in \mathfrak{L}(F),$$

portanto, $\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{V} = \left(\dfrac{\widetilde{X}(\widetilde{f})}{\widetilde{f}}\right)\widetilde{V}$.

(c) Temos que $\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W} = \mathcal{H}(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}) + \mathcal{V}(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W})$, em cada $(p, q) \in M$, e $\mathcal{H}(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}) \in \mathfrak{X}(M)$. Assim, $\mathcal{H}(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W})$ é tal que $\langle \nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}, \widetilde{X}\rangle = \langle \mathcal{H}(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}), \widetilde{X}\rangle$, $\forall \widetilde{X} \in \mathfrak{L}(B)$. Daí, e por (b), dado $\widetilde{X} \in \mathfrak{L}(B)$ vem que

$$0 = \widetilde{V}\langle \widetilde{X}, \widetilde{W}\rangle = \langle \nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{X}, \widetilde{W}\rangle + \langle \widetilde{X}, \nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}\rangle,$$

logo, obtemos que

$$\begin{aligned}\langle \widetilde{X}, \nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}\rangle &= -\langle \nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{X}, \widetilde{W}\rangle = -\langle \widetilde{W}, \frac{\big(\widetilde{X}(\widetilde{f})\big)}{\widetilde{f}}\widetilde{V}\rangle = -\frac{\big(\widetilde{X}(\widetilde{f})\big)}{\widetilde{f}}\langle \widetilde{V}, \widetilde{W}\rangle = \\ &= -\frac{\langle \widetilde{X}, \nabla\widetilde{f}\rangle}{\widetilde{f}}\langle \widetilde{V}, \widetilde{W}\rangle = -\big\langle \widetilde{X}, \frac{\langle \widetilde{V}, \widetilde{W}\rangle}{\widetilde{f}}\nabla\widetilde{f}\big\rangle,\end{aligned}$$

ou seja, $\langle \widetilde{X}, \nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}\rangle = \langle \widetilde{X}, \dfrac{\langle \widetilde{V}, \widetilde{W}\rangle}{\widetilde{f}}\nabla\widetilde{f}\rangle$.

Portanto, $\mathcal{H}\big(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}\big) = h(\widetilde{V}, \widetilde{W}) = -\left(\dfrac{\langle \widetilde{V}, \widetilde{W}\rangle}{\widetilde{f}}\right)\nabla\widetilde{f}$.

(d) Novamente, temos que $\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W} = \mathcal{H}(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}) + \mathcal{V}(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W})$, em cada $(p, q) \in M$, $\mathcal{V}\left(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}\right) \in \mathfrak{X}(M)$ e $d\pi\left(\mathcal{V}\big(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}\big)\right) = 0$, $\forall (p, q) \in M$. Logo, $\mathcal{V}(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W})$ é π-relacionado com o $0 \in \mathfrak{X}(B)$ (campo nulo). Agora, dado $\widetilde{U} \in \mathfrak{L}(F)$, como

$\langle\widetilde{V},\widetilde{U}\rangle = \widetilde{f}^2\big(\langle V,U\rangle^F\circ\sigma\big)$, temos que

$$\begin{aligned}\widetilde{W}\langle\widetilde{V},\widetilde{U}\rangle &= \widetilde{W}\left[\widetilde{f}^2\big(\langle V,U\rangle^F\circ\sigma\big)\right] = \widetilde{W}(\widetilde{f}^2)\big(\langle V,U\rangle^F\circ\sigma\big) + \widetilde{f}^2\left[\widetilde{W}\big(\langle V,U\rangle^F\circ\sigma\big)\right] = \\ &= 2\widetilde{f}\big(\widetilde{W}(\widetilde{f})\big)\big(\langle V,U\rangle^F\circ\sigma\big) + \widetilde{f}^2\left[\big(d\sigma(\widetilde{W})\langle V,U\rangle^F\big)\circ\sigma\right] = \\ &= 2\widetilde{f}\big(\widetilde{W}(f\circ\pi)\big)\big(\langle V,U\rangle^F\circ\sigma\big) + \widetilde{f}^2\left[\big(W\langle V,U\rangle^F\big)\circ\sigma\right] = \\ &= 2\widetilde{f}\big(\underbrace{d\pi(\widetilde{W})}_{=\,0}(f)\big)\big(\langle V,U\rangle^F\circ\sigma\big) + \widetilde{f}^2\left[\big(W\langle V,U\rangle^F\big)\circ\sigma\right] = \\ &= \widetilde{f}^2\left[\big(W\langle V,U\rangle^F\big)\circ\sigma\right],\end{aligned}$$

e daí,

$$\begin{aligned}&2\big\langle\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W},\widetilde{U}\big\rangle = 2\big\langle\mathcal{V}(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}),\widetilde{U}\big\rangle = 2(\widetilde{f})^2\left(\left\langle d\sigma\left(\mathcal{V}(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W})\right), d\sigma(\widetilde{U})\right\rangle^F\circ\sigma\right) = \\ &= \widetilde{W}\langle\widetilde{V},\widetilde{U}\rangle + \widetilde{V}\langle\widetilde{U},\widetilde{W}\rangle - \widetilde{U}\langle\widetilde{W},\widetilde{V}\rangle - \langle[\widetilde{W},\widetilde{U}],\widetilde{V}\rangle - \langle[\widetilde{V},\widetilde{U}],\widetilde{W}\rangle - \langle[\widetilde{W},\widetilde{V}],\widetilde{U}\rangle = \\ &= \widetilde{f}^2\Bigg[\Big(W\langle V,U\rangle^F + V\langle U,W\rangle^F - U\langle W,V\rangle^F - \langle[W,U],V\rangle^F - \langle[V,U],W\rangle^F - \\ &- \langle[W,V],U\rangle^F\Big)\circ\sigma\Bigg] = \\ &= (\widetilde{f})^2\big[\big(2\langle{}^F\nabla_V W,U\rangle^F\big)\circ\sigma\big] = 2(\widetilde{f})^2\big(\langle{}^F\nabla_V W,U\rangle^F\circ\sigma\big),\end{aligned}$$

ou seja, $\mathcal{V}\big(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}\big)$ é σ-relacionado com ${}^F\nabla_V W$. Portanto, $\mathcal{V}\big(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}\big) = \widetilde{{}^F\nabla_V W} \in \mathfrak{L}(F)$ é a conexão Riemanniana em cada fibra $p\times F$, pois ${}_p\sigma$ é uma homotetia em cada fibra $p\times F$.

■

Corolário 3.1. *As folhas* $B\times q$ *de um produto torcido são totalmente geodésicas; as fibras* $p\times F$ *são totalmente umbílicas.*

Demonstração:

(i) Cada folha $B\times q$ é uma isometria sobre B. Dessa forma, dados $X,Y\in\mathfrak{X}(B)$ existem e são únicos os levantamentos $\widetilde{X},\widetilde{Y}\in\mathfrak{L}(B)$ de X e Y a M, respectivamente. Assim, em cada $(p,q)\in M$, pela proposição 3.3-(a) temos

$$\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} = \mathcal{H}\left(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\right) + \mathcal{V}\left(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\right) = \mathcal{H}\left(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\right),$$

implicando que

$$h(X,Y) = \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} - {}^B\nabla_X Y = \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} - \mathcal{H}\left(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\right) = 0$$

nos dá a segunda forma fundamental de cada folha $B \times q$. Portanto, cada folha $B \times q$ é totalmente geodésica.

(ii) Cada fibra $p \times F$ é uma homotetia sobre F. Dessa forma, dados $V, W \in \mathfrak{X}(F)$ existem e são únicos os levantamentos $\widetilde{V}, \widetilde{W} \in \mathfrak{L}(F)$ de V e W a M, respectivamente. Assim, como em cada $(p, q) \in M$ temos que $\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W} = \mathcal{H}(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}) + \mathcal{V}(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W})$, e

$$h(V, W) = \nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W} - {}^F\nabla_V W = \nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W} - \mathcal{V}\left(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}\right) = \mathcal{H}\left(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}\right)$$

nos dá a segunda forma fundamental de cada fibra $p \times F$. Daí, e pela proposição 3.3-(c)

$$h(V, W) = \mathcal{H}\left(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}\right) = -\left(\frac{\langle \widetilde{V}, \widetilde{W}\rangle}{\widetilde{f}}\right)\nabla\widetilde{f},$$

logo cada fibra é totalmente umbílica, pois $\nabla\widetilde{f} \in \mathfrak{L}(B)$, isto é, $\nabla\widetilde{f} \in \mathfrak{X}(F)^{\perp}$.

$\blacksquare$

Proposição 3.4. *Sejam* $M = B \times_f F$ *um produto torcido,* $h \in C^\infty(B)$ *e* $\psi \in C^\infty(F)$*, então*

(a) $\Delta\widetilde{h} = \Delta_B h + d\dfrac{\langle {}^B\nabla h, {}^B\nabla f\rangle^B}{f}$, *onde* $\dim F = d$*,* Δ *é o Laplaciano em* M*,* Δ_B *é o Laplaciano em* B *e* $\widetilde{h} = h \circ \pi$.

(b) $\Delta\widetilde{\psi} = \dfrac{\Delta_F \psi}{f^2}$, *onde* Δ_F *é o Laplaciano em* F *e* $\widetilde{\psi} = \psi \circ \sigma$.

Demonstração: Seja um referencial ortonormal local $\{\widetilde{e}_1, \dots, \widetilde{e}_n, \widetilde{e}_{n+1}, \dots, \widetilde{e}_{n+d}\}$ em M, com $\widetilde{e}_i \in \mathfrak{L}(B)$, $\widetilde{e}_j \in \mathfrak{L}(F)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $n + 1 \leqslant j \leqslant n + d$, onde $\dim B = n$ e $\dim F = d$.

(a) O Laplaciano de $\widetilde{h}$ é dado por

$$\Delta\widetilde{h} = \sum_{s=1}^{n+d}\left(\widetilde{e}_s\big(\widetilde{e}_s(\widetilde{h})\big) - \big(\nabla_{\widetilde{e}_s}\widetilde{e}_s\big)(\widetilde{h})\right),$$

mas, para todo $i = 1, \dots, n$, como $\widetilde{e}_i(\widetilde{h}) = \langle \nabla\widetilde{h}, \widetilde{e}_i\rangle = \langle {}^B\nabla h, e_i\rangle^B \circ \pi$, temos que

$$\begin{aligned}\widetilde{e}_i\big(\widetilde{e}_i(\widetilde{h})\big) &= \widetilde{e}_i\big(\langle {}^B\nabla h, e_i\rangle^B \circ \pi\big) = d\pi(\widetilde{e}_i)\big(\langle {}^B\nabla h, e_i\rangle^B\big) = \big[e_i\big(\langle {}^B\nabla h, e_i\rangle^B\big)\big] \circ \pi = \\ &= \big[e_i\big(e_i(h)\big)\big] \circ \pi,\end{aligned}$$

e também que

$$\big(\nabla_{\widetilde{e}_i}\widetilde{e}_i\big)(\widetilde{h}) = \langle \nabla\widetilde{h}, \nabla_{\widetilde{e}_i}\widetilde{e}_i\rangle = \langle {}^B\nabla h, {}^B\nabla_{e_i} e_i\rangle^B \circ \pi = \big[\big({}^B\nabla_{e_i} e_i\big)(h)\big] \circ \pi.$$

E ainda, como $\nabla_{\widetilde{e}_j}\widetilde{e}_j = \widetilde{{}^F\nabla_{e_j}e_j} - \dfrac{\langle \widetilde{e}_j, \widetilde{e}_j\rangle}{\widetilde{f}}\nabla\widetilde{f} = \widetilde{{}^F\nabla_{e_j}e_j} - \dfrac{\nabla\widetilde{f}}{\widetilde{f}}$, $\forall j = n+1, \ldots, n+b$, então

$$\big(\nabla_{\widetilde{e}_j}\widetilde{e}_j\big)(\widetilde{h}) = \langle \nabla\widetilde{h}, \nabla_{\widetilde{e}_j}\widetilde{e}_j\rangle = \langle \nabla\widetilde{h}, -\frac{\nabla\widetilde{f}}{\widetilde{f}}\rangle = -\left(\frac{1}{f}\langle {}^B\nabla h, {}^B\nabla f\rangle^B\right)\circ\pi.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\Delta\widetilde{h} &= \sum_{s=1}^{n+d}\Big(\widetilde{e}_s\big(\widetilde{e}_s(\widetilde{h})\big) - \big(\nabla_{\widetilde{e}_s}\widetilde{e}_s\big)(\widetilde{h})\Big) = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\Big(\widetilde{e}_i\big(\widetilde{e}_i(\widetilde{h})\big) - \big(\nabla_{\widetilde{e}_i}\widetilde{e}_i\big)(\widetilde{h})\Big) + \sum_{j=n+1}^{n+d}\left(\widetilde{e}_j\big(\underbrace{\widetilde{e}_j(\widetilde{h})}_{=\,0}\big) - \big(\nabla_{\widetilde{e}_j}\widetilde{e}_j\big)(\widetilde{h})\right) = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\Big(e_i\big(e_i(h)\big) - \big(\nabla_{e_i}e_i\big)(h)\Big)\circ\pi + \sum_{j=n+1}^{n+d}\left(\frac{1}{f}\langle {}^B\nabla h, {}^B\nabla f\rangle^B\right)\circ\pi = \\
&= \left[\sum_{i=1}^{n}\Big(e_i\big(e_i(h)\big) - \big(\nabla_{e_i}e_i\big)(h)\Big) + \sum_{j=n+1}^{n+d}\left(\frac{1}{f}\langle {}^B\nabla h, {}^B\nabla f\rangle^B\right)\right]\circ\pi = \\
&= \left[\Delta_B h + d\frac{\langle {}^B\nabla h, {}^B\nabla f\rangle^B}{f}\right]\circ\pi.
\end{aligned}$$

(b) O Laplaciano de $\widetilde{\psi}$ é dado por

$$\Delta\widetilde{\psi} = \sum_{s=1}^{n+d}\Big(\widetilde{e}_s\big(\widetilde{e}_s(\widetilde{\psi})\big) - \big(\nabla_{\widetilde{e}_s}\widetilde{e}_s\big)(\widetilde{\psi})\Big),$$

mas, para todo $i = 1, \ldots, n$, como $\widetilde{e}_i(\widetilde{\psi}) = \widetilde{e}_i(\psi\circ\sigma) = d\sigma(\widetilde{e}_i)(\psi) = 0$ temos que $\widetilde{e}_i\big(\widetilde{e}_i(\widetilde{\psi})\big) = 0$, e também temos que

$$\big(\nabla_{\widetilde{e}_i}\widetilde{e}_i\big)(\widetilde{\psi}) = \langle \nabla\widetilde{\psi}, \nabla_{\widetilde{e}_i}\widetilde{e}_i\rangle = \langle \frac{\widetilde{{}^F\nabla\psi}}{\widetilde{f}^2}, \widetilde{{}^B\nabla_{e_i}e_i}\rangle = 0.$$

Agora, para todo $j = n+1, \ldots, n+d$, como

$$\begin{aligned}
\widetilde{e}_j(\widetilde{\psi}) &= \langle \nabla\widetilde{\psi}, \widetilde{e}_j\rangle = \langle \frac{\widetilde{{}^F\nabla\psi}}{\widetilde{f}^2}, \widetilde{e}_j\rangle = \frac{1}{\widetilde{f}^2}\langle \widetilde{{}^F\nabla\psi}, \widetilde{e}_j\rangle = \frac{1}{\widetilde{f}^2}\Big[\widetilde{f}^2\big(\langle {}^F\nabla\psi, e_j\rangle^F\circ\sigma\big)\Big] = \\
&= \langle {}^F\nabla\psi, e_j\rangle^F\circ\sigma = [e_j(\psi)]\circ\sigma,
\end{aligned}$$

temos que

$$\widetilde{e}_j\big(\langle {}^F\nabla\psi, e_j\rangle^F\circ\sigma\big) = d\sigma(\widetilde{e}_j)\big(\langle {}^F\nabla\psi, e_j\rangle^F\big) = \big[e_j\big(\langle {}^F\nabla\psi, e_j\rangle^F\big)\big]\circ\sigma = \big[e_j\big(e_j(\psi)\big)\big]\circ\sigma,$$

e, além disso, temos que

$$\begin{aligned}
\big(\nabla_{\widetilde{e}_j}\widetilde{e}_j\big)(\widetilde{\psi}) &= \langle \nabla\widetilde{\psi}, \nabla_{\widetilde{e}_j}\widetilde{e}_j\rangle = \langle \frac{\widetilde{{}^F\nabla\psi}}{\widetilde{f}^2}, \widetilde{{}^F\nabla_{e_j}e_j}\rangle = \frac{1}{\widetilde{f}^2}\Big[\widetilde{f}^2\big(\langle {}^F\nabla\psi, {}^F\nabla_{e_j}e_j\rangle^F\circ\sigma\big)\Big] = \\
&= \langle {}^F\nabla\psi, {}^F\nabla_{e_j}e_j\rangle^F\circ\sigma = \big[\big({}^F\nabla_{e_j}e_j\big)(\psi)\big]\circ\sigma.
\end{aligned}$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\Delta\widetilde{\psi} &= \sum_{s=1}^{n+d}\Big(\widetilde{e}_s\big(\widetilde{e}_s(\widetilde{\psi})\big) - \big(\nabla_{\widetilde{e}_s}\widetilde{e}_s\big)(\widetilde{\psi})\Big) = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\Big(\widetilde{e}_i\big(\widetilde{e}_i(\widetilde{\psi})\big) - \big(\nabla_{\widetilde{e}_i}\widetilde{e}_i\big)(\widetilde{\psi})\Big) + \sum_{j=n+1}^{n+d}\Big(\widetilde{e}_j\big(\widetilde{e}_j(\widetilde{\psi})\big) - \big(\nabla_{\widetilde{e}_j}\widetilde{e}_j\big)(\widetilde{\psi})\Big) = \\
&= \sum_{j=n+1}^{n+d}\Big(\widetilde{e}_j\big(\widetilde{e}_j(\widetilde{\psi})\big) - \big(\nabla_{\widetilde{e}_j}\widetilde{e}_j\big)(\widetilde{\psi})\Big) = \\
&= \sum_{j=n+1}^{n+d}\bigg(e_j\big(e_j(\psi)\big) - \big({}^F\nabla_{e_j}e_j\big)(\psi)\bigg)\circ\sigma = \Delta_F\psi\circ\sigma.
\end{aligned}
$$

■

3.2 Curvatura do produto porcido

Nesta seção vamos determinar os tensores curvaturas, de Ricci e escalar, em função das correspondentes geometrias de B e F e da função de torção f. Começamos com a

Definição 3.2. *Seja* $M = B\times_f F$ *uma variedade produto torcido. Se* A *é um tensor covariante em* B*, o levantamento* $\widetilde{A}$ *de* A *a* M *é exatamente o pullback de* A *pela projeção* $\pi : M \longrightarrow B$*, isto é,* $\widetilde{A} := \pi^*(A)$*. Agora, se* A *é uma aplicação* $C^\infty(B)$*-multilinear, com* $A : \underbrace{\mathfrak{X}(B)\times\cdots\times\mathfrak{X}(B)}_{\text{s cópias}} \longrightarrow \mathfrak{X}(B)$*, a qual está associada um* $(1,s)$ *tensor em* B*, se* $v_1,\ldots,v_s \in T_{(p,q)}M$*, defina* $\widetilde{A}(v_1,\ldots,v_s)$ *para ser o vetor horizontal em* (p,q) *que se projeta para* $A\big(d\pi(v_1),\ldots,d\pi(v_s)\big)$ *em* T_pB*, isto é,* $\widetilde{A}(v_1,\ldots,v_s) \in T_{(p,q)}B$*,* $d\pi\big(\widetilde{A}(v_1,\ldots,v_s)\big) := A\big(d\pi(v_1),\ldots,d\pi(v_s)\big) \in T_pB$ *e* $d\sigma\big(\widetilde{A}(v_1,\ldots,v_s)\big) = 0$.

Essas definições não envolvem métrica, portanto são correspondentemente válidas para levantamentos de F.

Observe que, se $A : \underbrace{\mathfrak{X}(B)\times\cdots\times\mathfrak{X}(B)}_{\text{s cópias}} \longrightarrow \mathfrak{X}(B)$ é $C^\infty(B)$-multilinear, dados(fixados) $X_1,\ldots,X_s \in \mathfrak{X}(B)$, $A(X_1,\ldots,X_s) \in \mathfrak{X}(B)$, portanto o levantamento $\widetilde{A}$ de A a M é tal que $\widetilde{A} \in \mathfrak{L}(B)$, $\widetilde{A} : \underbrace{\mathfrak{X}(M)\times\cdots\times\mathfrak{X}(M)}_{s\ cópias} \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ é $C^\infty(M)$-multilinear e se $\widetilde{X}_1,\ldots,\widetilde{X}_s \in \mathfrak{L}(B)$ são os levantamentos de $X_1,\ldots,X_s \in \mathfrak{X}(B)$ respectivamente, tem-se $\widetilde{A}(\widetilde{X}_1,\ldots,\widetilde{X}_s)$ é horizontal e $d\pi\big(\widetilde{A}(\widetilde{X}_1,\ldots,\widetilde{X}_s)\big) = A\big(d\pi(\widetilde{X}_1),\ldots,d\pi(\widetilde{X}_s)\big)$.

Lema 3.2. *Se* $f \in C^\infty(B)$*, o levantamento a* M *do Hessiano de* f*,* $\mathrm{Hess}\ f$*, é o Hessiano do levantamento de* f *somente em vetores horizontais. O levantamento de* $\mathrm{Hess}\ f$ *a* M *será denotado por* H^f*.*

Demonstração:

Dados $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y} \in \mathfrak{L}(B)$ levantamentos de $X, Y \in \mathfrak{X}(B)$, podemos considerar o Hessiano como um $(0,2)$-tensor (sua forma bilinear simétrica associada). Assim, temos que

$$\mathrm{Hess}\ f(X,Y) = X\big(Y(f)\big) - \big({}^B\nabla_X Y\big)(f).$$

Agora, seja $\widetilde{f} = f \circ \pi$ o levantamento de f a M. Logo,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hess}\ \widetilde{f}(\widetilde{X},\widetilde{Y}) &= \widetilde{X}\big(\widetilde{Y}(\widetilde{f})\big) - \big(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\big)(\widetilde{f}) = \widetilde{X}\langle \nabla\widetilde{f}, \widetilde{Y}\rangle - \langle \nabla\widetilde{f}, \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\rangle = \\
&= \big(X\langle {}^B\nabla f, Y\rangle^B\big) \circ \pi - \langle {}^B\nabla f, {}^B\nabla_X Y\rangle^B \circ \pi = \\
&= X\big(Y(f)\big) \circ \pi - \big({}^B\nabla_X Y(f)\big) \circ \pi = \big[X\big(Y(f)\big) - \big({}^B\nabla_X Y(f)\big)\big] \circ \pi = \\
&= \mathrm{Hess}\ f(X,Y) \circ \pi = \mathrm{Hess}\ f\big(d\pi(\widetilde{X}), d\pi(\widetilde{Y})\big) \circ \pi = \pi^*\big(\mathrm{Hess}\ f\big)(\widetilde{X},\widetilde{Y}).
\end{aligned}$$

■

Proposição 3.5. *Sejam* $M = B \times_f F$ *um produto torcido,* R*,* ${}^BR$ *e* ${}^FR$ *os tensores curvatura Riemanniana de* M*,* B *e* F*, respectivamente. Se* $\widetilde{X}$*,* $\widetilde{Y}$*,* $\widetilde{Z} \in \mathfrak{L}(B)$ *e* $\widetilde{U}$*,* $\widetilde{V}$*,* $\widetilde{W} \in \mathfrak{L}(F)$*, então*

(a) $R(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{Z} \in \mathfrak{L}(B)$ *é o levantamento de* ${}^BR(X,Y)Z$ *em* B*.*

(b) *Os levantamentos dos tensores curvatura Riemanniana* ${}^BR$*,* ${}^FR$ *a* M *dão os tensores curvatura Riemanniana de cada folha* $M \times q$ *e de cada fibra* $p \times N$*, respectivamente.*

(c) $R(\widetilde{V},\widetilde{X})\widetilde{Y} = \dfrac{H^f(\widetilde{X},\widetilde{Y})}{\widetilde{f}}\widetilde{V}$*, onde* H^f *é o levantamento do Hessiano de* f *a* M*.*

(d) $R(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{V} = R(\widetilde{V},\widetilde{W})\widetilde{X} = 0$*.*

(e) $R(\widetilde{X},\widetilde{V})\widetilde{W} = \dfrac{\langle \widetilde{V},\widetilde{W}\rangle}{\widetilde{f}}\nabla_{\widetilde{X}}\nabla\widetilde{f}$*.*

(f) $R(\widetilde{V},\widetilde{W})\widetilde{U} = \widetilde{{}^FR}(\widetilde{V},\widetilde{W})\widetilde{U} - \dfrac{\langle \nabla\widetilde{f}, \nabla\widetilde{f}\rangle}{\widetilde{f}^2}\Big(\langle \widetilde{V},\widetilde{U}\rangle\widetilde{W} - \langle \widetilde{W},\widetilde{U}\rangle\widetilde{V}\Big)$*.*

Na notação acima, $\widetilde{f} = f \circ \pi$*.*

Demonstração:

(a) Dados $\widetilde{S} \in \mathfrak{L}(B)$, tem-se

$$\begin{aligned}
\langle d\pi(R(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{Z}), d\pi(\widetilde{S})\rangle^B &= \langle R(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{Z},\widetilde{S}\rangle = \langle \nabla_{\widetilde{Y}}\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Z} - \nabla_{\widetilde{X}}\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{Z} + \nabla_{[\widetilde{X},\widetilde{Y}]}\widetilde{Z},\widetilde{S}\rangle = \\
&= \langle {}^B\nabla_Y {}^B\nabla_X Z - {}^B\nabla_X {}^B\nabla_Y Z + {}^B\nabla_{[X,Y]}Z, S\rangle^B \circ \pi = \langle {}^B R(X,Y)Z, S\rangle^B \circ \pi = \\
&= \langle {}^B R\big(d\pi(\widetilde{X}), d\pi(\widetilde{Y})\big) d\pi(\widetilde{Z}), d\pi(\widetilde{S})\rangle^B \circ \pi = \pi^*({}^B R)(\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{Z},\widetilde{S}).
\end{aligned}$$

E ainda, $R(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{Z}$ é horizontal. De fato,

$$\begin{aligned}
\langle R(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{Z},\widetilde{V}\rangle &= (f\circ\pi)^2\langle d\sigma(R(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{Z}), d\sigma(\widetilde{V})\rangle^F = \\
&= \langle \nabla_{\widetilde{Y}}\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Z} - \nabla_{\widetilde{X}}\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{Z} + \nabla_{[\widetilde{X},\widetilde{Y}]}\widetilde{Z},\widetilde{V}\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Logo, $R|_{\mathfrak{L}(B)} = \pi^*({}^B R)$, isto é, $R|_{\mathfrak{L}(B)}$ é o levantamento de ${}^B R$.

(b) Como em cada $(p,q) \in M$ ${}_q\pi$ é uma isometria e ${}_p\sigma$ é uma homotetia, o resultado segue, pela definição de levantamento de um tensor e ambas preservam a conexão de Levi-Civita. Dessa forma, os levantamentos $\widetilde{{}^B R}$ e $\widetilde{{}^F R}$ dos tensores curvaturas ${}^B R$ e ${}^F R$, induzidos pela métrica torcida g_f, de B e F, respectivamente, são tais que, por (a) $\widetilde{{}^B R}$ coincide com o tensor curvatura R de M restrito a campos horizontais e, dados $\widetilde{V}$, $\widetilde{W}$, $\widetilde{U}$, $\widetilde{T} \in \mathfrak{L}(F)$ tem-se que

$$\widetilde{{}^F R}(\widetilde{V},\widetilde{W})\widetilde{U} = {}^F R\widetilde{(V,W)U} = {}^F\nabla_W {}^F\widetilde{\nabla_V U} - {}^F\nabla_V {}^F\widetilde{\nabla_W U} + {}^F\widetilde{\nabla_{[V,W]}U},$$

e

$$\langle \widetilde{{}^F R}(\widetilde{V},\widetilde{W})\widetilde{U},\widetilde{T}\rangle = \widetilde{f}^2\big(\langle {}^F R(V,W)U,T\rangle^F \circ \sigma\big).$$

(c) Como $[\widetilde{X},\widetilde{V}] = 0$, temos que

$$R(\widetilde{V},\widetilde{X})\widetilde{Y} = \nabla_{\widetilde{X}}\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{V} - \nabla_{\widetilde{V}}\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} + \nabla_{[\widetilde{V},\widetilde{X}]}\widetilde{Y} = \nabla_{\widetilde{X}}\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{V} - \nabla_{\widetilde{V}}\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}.$$

Daí e pela proposição 3.3, obtemos que

$$\begin{aligned}
R(\widetilde{V},\widetilde{X})\widetilde{Y} &= \nabla_{\widetilde{X}}\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{V} - \nabla_{\widetilde{V}}\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} = \nabla_{\widetilde{X}}\big((\widetilde{Y}(\widetilde{f})/\widetilde{f})\widetilde{V}\big) - \big((\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})(\widetilde{f})/\widetilde{f}\big)\widetilde{V} = \\
&= \widetilde{X}\left[\frac{\widetilde{Y}(\widetilde{f})}{\widetilde{f}}\right]\widetilde{V} + \frac{\widetilde{Y}(\widetilde{f})}{\widetilde{f}}\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{V} - \frac{(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})(\widetilde{f})}{\widetilde{f}}\widetilde{V} = \\
&= \left[\frac{\widetilde{X}\big(\widetilde{Y}(\widetilde{f})\big)}{\widetilde{f}} + \widetilde{Y}(\widetilde{f})\widetilde{X}\big(\frac{1}{\widetilde{f}}\big)\right]\widetilde{V} + \frac{\widetilde{Y}(\widetilde{f})}{\widetilde{f}}\frac{\widetilde{X}(\widetilde{f})}{\widetilde{f}}\widetilde{V} - \frac{(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})(\widetilde{f})}{\widetilde{f}}\widetilde{V} = \\
&= \left[\frac{\widetilde{X}\big(\widetilde{Y}(\widetilde{f})\big)}{\widetilde{f}} - \frac{\widetilde{Y}(\widetilde{f})\widetilde{X}(\widetilde{f})}{\widetilde{f}^2} + \frac{\widetilde{Y}(\widetilde{f})\widetilde{X}(\widetilde{f})}{\widetilde{f}^2} - \frac{(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})(\widetilde{f})}{\widetilde{f}}\right]\widetilde{V} = \\
&= \left[\frac{\widetilde{X}\big(\widetilde{Y}(\widetilde{f})\big)}{\widetilde{f}} - \frac{(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})(\widetilde{f})}{\widetilde{f}}\right]\widetilde{V} = \frac{H^f(\widetilde{X},\widetilde{Y})}{\widetilde{f}}\widetilde{V}.
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
R(\widetilde{V},\widetilde{W})\widetilde{X} &= \nabla_{\widetilde{W}}\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{X} - \nabla_{\widetilde{V}}\nabla_{\widetilde{W}}\widetilde{X} + \nabla_{[\widetilde{V},\widetilde{W}]}\widetilde{X} = \\
&= \nabla_{\widetilde{W}}\big((\widetilde{X}(\widetilde{f})/\widetilde{f})\widetilde{V}\big) - \nabla_{\widetilde{V}}\big((\widetilde{X}(\widetilde{f})/\widetilde{f})\widetilde{W}\big) + \nabla_{[\widetilde{V},\widetilde{W}]}\widetilde{X} = \\
&= \widetilde{W}\left[\frac{\widetilde{X}(\widetilde{f})}{\widetilde{f}}\right]\widetilde{V} + \frac{\widetilde{X}(\widetilde{f})}{\widetilde{f}}\nabla_{\widetilde{W}}\widetilde{V} - \widetilde{V}\left[\frac{\widetilde{X}(\widetilde{f})}{\widetilde{f}}\right]\widetilde{W} - \frac{\widetilde{X}(\widetilde{f})}{\widetilde{f}}\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W} + \nabla_{[\widetilde{V},\widetilde{W}]}\widetilde{X},
\end{aligned}$$

mas, como

$$\begin{aligned}
&\widetilde{X}(\widetilde{f})(p,q) = \widetilde{X}(f\circ\pi)(p,q) = \widetilde{X}(p,q)(f\circ\pi) = d\pi\big(\widetilde{X}(p,q)\big)(f) = X(p)(f)\circ\pi = \\
&= \big(X(f)\circ\pi\big)(p,q),
\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}
\widetilde{V}\left[\frac{\widetilde{X}(\widetilde{f})}{\widetilde{f}}\right] &= \frac{\widetilde{V}\big(\widetilde{X}(\widetilde{f})\big)}{\widetilde{f}} + \widetilde{X}(\widetilde{f})\widetilde{V}\big(\tfrac{1}{\widetilde{f}}\big) = \frac{\widetilde{V}\big(X(f)\circ\pi\big)}{\widetilde{f}} - \frac{\widetilde{X}(\widetilde{f})\widetilde{V}(f\circ\pi)}{\widetilde{f}^2} = \\
&= \frac{d\pi\big(\widetilde{V}\big)\big(X(f)\big)}{\widetilde{f}} - \frac{\widetilde{X}(\widetilde{f})d\pi\big(\widetilde{V}\big)(f)}{\widetilde{f}^2} = 0,
\end{aligned}$$

e assim,

$$\begin{aligned}
R(\widetilde{V},\widetilde{W})\widetilde{X} &= \frac{\widetilde{X}(\widetilde{f})}{\widetilde{f}}\left[\nabla_{\widetilde{W}}\widetilde{V} - \nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}\right] + \nabla_{[\widetilde{V},\widetilde{W}]}\widetilde{X} = \frac{\widetilde{X}(\widetilde{f})}{\widetilde{f}}[\widetilde{W},\widetilde{V}] + \nabla_{[\widetilde{V},\widetilde{W}]}\widetilde{X} = \\
&= \frac{\widetilde{X}(\widetilde{f})}{\widetilde{f}}[\widetilde{W},\widetilde{V}] + \frac{\widetilde{X}(\widetilde{f})}{\widetilde{f}}[\widetilde{V},\widetilde{W}] = 0,\ \forall \widetilde{X}\in\mathfrak{X}(B),\ \forall \widetilde{V},\widetilde{W}\in\mathfrak{X}(F).
\end{aligned}$$

Portanto, pela simetria da curvatura, $\langle R(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{V},\widetilde{W}\rangle = \langle R(\widetilde{V},\widetilde{W})\widetilde{X},\widetilde{Y}\rangle = 0$. Por (1), $\langle R(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{V},\widetilde{Z}\rangle = -\langle R(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{Z},\widetilde{V}\rangle = 0$. Como $\widetilde{Z}\in\mathfrak{L}(B)$ e $\widetilde{W}\in\mathfrak{L}(F)$ são quaisquer, essas equações valem para todo $\widetilde{Z}\in\mathfrak{L}(B)$ e $\widetilde{W}\in\mathfrak{L}(F)$, logo $R(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{V}=0$, $\forall \widetilde{X},\widetilde{Y}\in\mathfrak{L}(B)$, $\forall\widetilde{V}\in\mathfrak{L}(F)$.

(e) $R(\widetilde{X},\widetilde{V})\widetilde{W}$ é horizontal, pois $\langle R(\widetilde{X},\widetilde{V})\widetilde{W},\widetilde{U}\rangle = \langle R(\widetilde{W},\widetilde{U})\widetilde{X},\widetilde{V}\rangle = 0$, por (d). Como $R(\widetilde{V},\widetilde{W})\widetilde{X}=0$, pela primeira identidade de Bianchi, tem-se que

$R(\widetilde{X},\widetilde{V})\widetilde{W} = -R(\widetilde{W},\widetilde{X})\widetilde{V} = R(\widetilde{X},\widetilde{W})\widetilde{V}$. Assim, usando as simetrias da curvatura e por (c),

$$\begin{aligned}
&\langle R(\widetilde{X},\widetilde{V})\widetilde{W},\widetilde{Y}\rangle = \langle R(\widetilde{V},\widetilde{X})\widetilde{Y},\widetilde{W}\rangle = \big\langle\big(H^f(\widetilde{X},\widetilde{Y})/\widetilde{f}\big)\widetilde{V},\widetilde{W}\big\rangle = \frac{H^f(\widetilde{X},\widetilde{Y})\langle\widetilde{V},\widetilde{W}\rangle}{\widetilde{f}} = \\
&= \frac{\langle\nabla_{\widetilde{X}}\nabla\widetilde{f},\widetilde{Y}\rangle\langle\widetilde{V},\widetilde{W}\rangle}{\widetilde{f}}.
\end{aligned}$$

Como $R(\widetilde{X},\widetilde{V})\widetilde{W}$ é horizontal e $\widetilde{Y}$ é qualquer, então

$$R(\widetilde{X},\widetilde{V})\widetilde{W} = \frac{\big(\langle\widetilde{V},\widetilde{W}\rangle\big)}{\widetilde{f}}\nabla_{\widetilde{X}}\nabla\widetilde{f}.$$

(f) Dado $\widetilde{X} \in \mathfrak{L}(B)$, $R(\widetilde{V},\widetilde{W})\widetilde{U}$ é vertical pois, pela simetria da curvatura e por (d), tem-se que $\langle R(\widetilde{V},\widetilde{W})\widetilde{U},\widetilde{X}\rangle = -\langle R(\widetilde{V},\widetilde{W})\widetilde{X},\widetilde{U}\rangle = 0$. Agora, dado $\widetilde{T} \in \mathfrak{L}(F)$, pela proposição 3.2 tem-se que

$$\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{U} = \mathcal{V}\left(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{U}\right) + \mathcal{H}\left(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{U}\right) = \widetilde{{}^F\nabla_V U} - \frac{\langle\widetilde{V},\widetilde{U}\rangle}{\widetilde{f}}\nabla\widetilde{f},$$

e assim,

$$\begin{aligned}
\nabla_{\widetilde{W}}\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{U} &= \nabla_{\widetilde{W}}\widetilde{{}^F\nabla_V U} - \nabla_{\widetilde{W}}\Big(\frac{\langle\widetilde{U},\widetilde{V}\rangle}{\widetilde{f}}\nabla\widetilde{f}\Big) = \\
&= \widetilde{{}^F\nabla_W{}^F\nabla_V U} - \frac{\langle\widetilde{{}^F\nabla_V U},\widetilde{W}\rangle}{\widetilde{f}}\nabla\widetilde{f} - \frac{\langle\widetilde{U},\widetilde{V}\rangle}{\widetilde{f}}\nabla_{\widetilde{W}}\nabla\widetilde{f} - \widetilde{W}\left[\frac{\langle\widetilde{U},\widetilde{V}\rangle}{\widetilde{f}}\right]\nabla\widetilde{f} = \\
&= \widetilde{{}^F\nabla_W{}^F\nabla_V U} - \frac{\langle\widetilde{{}^F\nabla_V U},\widetilde{W}\rangle}{\widetilde{f}}\nabla\widetilde{f} - \frac{\langle\widetilde{U},\widetilde{V}\rangle}{\widetilde{f}}\frac{\langle\nabla\widetilde{f},\nabla\widetilde{f}\rangle}{\widetilde{f}}\widetilde{W} - \widetilde{W}\left[\frac{\langle\widetilde{U},\widetilde{V}\rangle}{\widetilde{f}}\right]\nabla\widetilde{f}.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\langle\nabla_{\widetilde{W}}\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{U},\widetilde{T}\rangle = \langle\widetilde{{}^F\nabla_W{}^F\nabla_V U},\widetilde{T}\rangle - \frac{\langle\widetilde{U},\widetilde{V}\rangle\langle\nabla\widetilde{f},\nabla\widetilde{f}\rangle}{\widetilde{f}^2}\langle\widetilde{W},\widetilde{T}\rangle.$$

Agora,

$$\langle\nabla_{[\widetilde{V},\widetilde{W}]}\widetilde{U},\widetilde{T}\rangle = \langle\nabla_{[V,W]^\sim}\widetilde{U},\widetilde{T}\rangle = \langle\widetilde{{}^F\nabla_{[V,W]}U} - \frac{\langle\widetilde{U},[V,W]^\sim\rangle}{\widetilde{f}}\nabla\widetilde{f},\widetilde{T}\rangle = \langle\widetilde{{}^F\nabla_{[V,W]}U},\widetilde{T}\rangle.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\langle R(\widetilde{V},\widetilde{W})\widetilde{U},\widetilde{T}\rangle &= \langle\widetilde{{}^F\nabla_W{}^F\nabla_V U},\widetilde{T}\rangle - \frac{\langle\widetilde{U},\widetilde{V}\rangle\langle\nabla\widetilde{f},\nabla\widetilde{f}\rangle}{\widetilde{f}^2}\langle\widetilde{W},\widetilde{T}\rangle - \langle\widetilde{{}^F\nabla_V{}^F\nabla_W U},\widetilde{T}\rangle + \\
&+ \frac{\langle\widetilde{U},\widetilde{W}\rangle\langle\nabla\widetilde{f},\nabla\widetilde{f}\rangle}{\widetilde{f}^2}\langle\widetilde{V},\widetilde{T}\rangle + \langle\widetilde{{}^F\nabla_{[V,W]}U},\widetilde{T}\rangle = \\
&= \langle\widetilde{{}^F\nabla_W{}^F\nabla_V U} - \frac{\langle\widetilde{U},\widetilde{V}\rangle\langle\nabla\widetilde{f},\nabla\widetilde{f}\rangle}{\widetilde{f}^2}\widetilde{W} - \widetilde{{}^F\nabla_V{}^F\nabla_W U} + \\
&+ \frac{\langle\widetilde{U},\widetilde{W}\rangle\langle\nabla\widetilde{f},\nabla\widetilde{f}\rangle}{\widetilde{f}^2}\widetilde{V} + \widetilde{{}^F\nabla_{[V,W]}U},\widetilde{T}\rangle,
\end{aligned}$$

$\forall\widetilde{T} \in \mathfrak{L}(N_2)$. Portanto,

$$R(\widetilde{V},\widetilde{W})\widetilde{U} = \widetilde{{}^F R}(\widetilde{V},\widetilde{W})\widetilde{U} - \frac{(\langle\nabla\widetilde{f},\nabla\widetilde{f}\rangle)}{\widetilde{f}^2}\left[\langle\widetilde{V},\widetilde{U}\rangle\widetilde{W} - \langle\widetilde{W},\widetilde{U}\rangle\widetilde{V}\right].$$

■

Corolário 3.2. *Seja* $M = B\times_f F$ *um produto torcido, com* $\dim F = d > 1$, $\widetilde{X},\widetilde{Y} \in \mathfrak{L}(B)$ *e* $\widetilde{V},\widetilde{W} \in \mathfrak{L}(F)$. *Então,*

(a) $\mathrm{Ric}(\widetilde{X},\widetilde{Y}) = {}^{B}\mathrm{Ric}(X,Y) - \frac{d}{\widetilde{f}}H^{f}(\widetilde{X},\widetilde{Y})$.

(b) $\mathrm{Ric}(\widetilde{X},\widetilde{V}) = 0$.

(c) $\mathrm{Ric}(\widetilde{V},\widetilde{W}) = {}^{F}\mathrm{Ric}(V,W) - \left(\frac{\Delta_B f}{f} + (d-1)\frac{\langle\nabla f,\nabla f\rangle}{f^2}\right)\langle\widetilde{V},\widetilde{W}\rangle$.

Demonstração: Seja um referencial ortonormal local $\{\widetilde{e}_1,\ldots,\widetilde{e}_n,\widetilde{e}_{n+1},\ldots,\widetilde{e}_{n+d}\}$ em M, com $\widetilde{e}_i \in \mathfrak{L}(B)$, $\widetilde{e}_j \in \mathfrak{L}(F)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $n+1 \leqslant j \leqslant n+d$, onde $\dim B = n$ e $\dim F = d$.

(a) O tensor de Ricci em $\widetilde{X},\widetilde{Y}$ é dado por

$$\mathrm{Ric}(\widetilde{X},\widetilde{Y}) = \sum_{s=1}^{n+d}\langle R(\widetilde{X},\widetilde{e}_s)\widetilde{Y},\widetilde{e}_s\rangle.$$

No entanto, para $i = 1,\ldots,n$, pela propsição 3.5-(a) temos que

$$\langle R(\widetilde{X},\widetilde{e}_i)\widetilde{Y},\widetilde{e}_i\rangle = \langle {}^{B}\widetilde{R(X,e_i)Y},\widetilde{e}_i\rangle = \langle {}^{B}R(X,e_i)Y,e_i\rangle^{B}\circ\pi,$$

e para $j = n+1,\ldots,n+d$, pela proposição 3.5-(d) obtemos

$$\langle R(\widetilde{X},\widetilde{e}_j)\widetilde{Y},\widetilde{e}_j\rangle = -\langle R(\widetilde{e}_j,\widetilde{X})\widetilde{Y},\widetilde{e}_j\rangle = -\langle\frac{H^f(\widetilde{X},\widetilde{Y})}{\widetilde{f}}\widetilde{e}_j,\widetilde{e}_j\rangle = -\frac{H^f(\widetilde{X},\widetilde{Y})}{\widetilde{f}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(\widetilde{X},\widetilde{Y}) &= \sum_{s=1}^{n+d}\langle R(\widetilde{X},\widetilde{e}_s)\widetilde{Y},\widetilde{e}_s\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle R(\widetilde{X},\widetilde{e}_i)\widetilde{Y},\widetilde{e}_i\rangle + \sum_{j=n+1}^{n+d}\langle R(\widetilde{X},\widetilde{e}_j)\widetilde{Y},\widetilde{e}_j\rangle = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\langle {}^{B}R(X,e_i)Y,e_i\rangle^{B}\circ\pi + \sum_{j=n+1}^{n+d} -\frac{H^f(\widetilde{X},\widetilde{Y})}{\widetilde{f}} = \\ &= \left[{}^{B}\mathrm{Ric}(X,Y) - \frac{d}{f}\mathrm{Hess}\ f(X,Y)\right]\circ\pi.\end{aligned}$$

(b) Observe agora que, para $i = 1,\ldots,n$, $j = n+1,\ldots,n+d$, e pela proposição 3.5-(d) temos que $R(\widetilde{X},\widetilde{e}_i)\widetilde{V} = 0$ e $\langle R(\widetilde{X},\widetilde{e}_j)\widetilde{V},\widetilde{e}_j\rangle = \langle R(\widetilde{V},\widetilde{e}_j)\widetilde{X},\widetilde{e}_j\rangle = 0$, portanto

$$\mathrm{Ric}(\widetilde{X},\widetilde{V}) = \sum_{s=1}^{n+d}\langle R(\widetilde{X},\widetilde{e}_s)\widetilde{V},\widetilde{e}_s\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle R(\widetilde{X},\widetilde{e}_i)\widetilde{V},\widetilde{e}_i\rangle + \sum_{j=n+1}^{n+d}\langle R(\widetilde{X},\widetilde{e}_j)\widetilde{V},\widetilde{e}_j\rangle = 0.$$

(c) Por último, para $i = 1,\ldots,n$, $j = n+1,\ldots,n+d$, pela proposição 3.5-(e) e pela proposição 3.5-(f) temos que

$$\langle R(\widetilde{V},\widetilde{e}_i)\widetilde{W},\widetilde{e}_i\rangle = \langle -R(\widetilde{e}_i,\widetilde{V})\widetilde{W},\widetilde{e}_i\rangle = \frac{-\langle\widetilde{V},\widetilde{W}\rangle}{\widetilde{f}}\langle\nabla_{\widetilde{e}_i}\nabla\widetilde{f},\widetilde{e}_i\rangle,$$

e também que

$$\langle R(\widetilde{V},\widetilde{e}_j)\widetilde{W},\widetilde{e}_j\rangle = \left\langle \widetilde{{}^F R(V,e_j)W} - \frac{\langle \nabla\widetilde{f},\nabla\widetilde{f}\rangle}{\widetilde{f}^2}\left[\langle\widetilde{V},\widetilde{W}\rangle\widetilde{e}_j - \langle\widetilde{W},\widetilde{e}_j\rangle\widetilde{V}\right],\widetilde{e}_j\right\rangle.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
Ric(\widetilde{V},\widetilde{W}) &= \sum_{s=1}^{n+d}\langle R(\widetilde{V},\widetilde{e}_s)\widetilde{W},\widetilde{e}_s\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle R(\widetilde{V},\widetilde{e}_i)\widetilde{W},\widetilde{e}_i\rangle + \sum_{j=n+1}^{n+d}\langle R(\widetilde{V},\widetilde{e}_j)\widetilde{W},\widetilde{e}_j\rangle = \\
&= \frac{-\langle\widetilde{V},\widetilde{W}\rangle}{\widetilde{f}}\sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{\widetilde{e}_i}\nabla\widetilde{f},\widetilde{e}_i\rangle + \sum_{j=n+1}^{n+d}\langle\widetilde{{}^F R(V,e_j)W},\widetilde{e}_j\rangle - \\
&- \frac{\langle\nabla\widetilde{f},\nabla\widetilde{f}\rangle}{\widetilde{f}^2}\left[\langle\widetilde{V},\widetilde{W}\rangle\sum_{j=n+1}^{n+d}\langle\widetilde{e}_j,\widetilde{e}_j\rangle - \sum_{j=n+1}^{n+d}\langle\widetilde{W},\widetilde{e}_j\rangle\langle\widetilde{V},\widetilde{e}_j\rangle\right] = \\
&= \frac{-\langle\widetilde{V},\widetilde{W}\rangle}{\widetilde{f}}\big(\Delta_B f\circ\pi\big) + \sum_{j=n+1}^{n+d}\widetilde{f}^2\big(\langle{}^F R(V,e_j)W,e_j\rangle^F\circ\sigma\big) - \\
&- \frac{\langle\nabla\widetilde{f},\nabla\widetilde{f}\rangle}{\widetilde{f}^2}\left[d\langle\widetilde{V},\widetilde{W}\rangle - \langle\widetilde{V},\widetilde{W}\rangle\right] = \\
&= \widetilde{f}^2\big({}^F Ric(V,W)\circ\sigma\big) - \left[\left(\frac{\Delta_B f}{f} + (d-1)\frac{\langle\nabla f,\nabla f\rangle}{f^2}\right)\circ\pi\right]\langle\widetilde{V},\widetilde{W}\rangle.
\end{aligned}$$

■

Corolário 3.3. *Seja* $M = B\times_f F$ *um produto torcido, sendo* $B = I\subset\mathbb{R}$ *um intervalo da reta com* $\dim F = d > 1$, $\widetilde{X},\widetilde{Y}\in\mathfrak{L}(I)$ *e* $\widetilde{V},\widetilde{W}\in\mathfrak{L}(F)$. *Então,*

(a) $Ric(\widetilde{X},\widetilde{Y}) = -d\dfrac{f''}{f}$.

(b) $Ric(\widetilde{X},\widetilde{V}) = 0$.

(c) $Ric(\widetilde{V},\widetilde{W}) = {}^F Ric(V,W) - \left(\dfrac{f''}{f} + (d-1)\dfrac{(f')^2}{f^2}\right)\langle\widetilde{V},\widetilde{W}\rangle$.

Capítulo 4

Imersões em Produtos Torcidos

4.1 Introdução

Sejam N_1 e N_2 variedades Riemannianas munidas com métricas Riemannianas g_1 e g_2, respectivamente, e seja f uma função diferenciável positiva em N_1. Considere a variedade produto torcido $N_1 \times_f N_2$. Denotamos a dimensão de N_1 e N_2 por n_1 e n_2, respectivamente. Sabe-se que a noção de produto torcido desempenha funções importantes em geometria diferencial bem como na física (cf. [9]).

Sejam, $\phi : N_1 \times_f N_2 \longrightarrow \widetilde{M}$ uma imersão isométrica de um produto torcido $N_1 \times_f N_2$ em uma variedade Riemanniana $\widetilde{M}^{n+m}$, $\pi_1 : N_1 \times_f N_2 \longrightarrow N_1$ e $\pi_2 : N_1 \times_f N_2 \longrightarrow N_2$ as projeções canônicas e h a segunda forma fundamental da imersão ϕ. Indique por h_1 e h_2 a restrição de h a $\mathfrak{L}(N_1)$ e a $\mathfrak{L}(N_2)$, respectivamente. O vetor curvatura média $\overrightarrow{H}$ de ϕ é dado por

$$\overrightarrow{H}(p) = \overrightarrow{H} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\big(\text{traço } A_i\big)E_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} h(e_j, e_j),$$

onde $\{E_1, \ldots, E_m\}$ um referencial ortonormal local normal a $N_1 \times_f N_2$, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial local em $N_1 \times_f N_2$, $A_i = A_{E_i}$, $n = n_1 + n_2$. Definimos os vetores curvatura média parciais $\overrightarrow{H}_1$ e $\overrightarrow{H}_2$ pelos seguintes traços parciais:

$$\overrightarrow{H}_1 = \frac{1}{n_1}\sum_{r=1}^{n_1} h(e_r, e_r), \ \ \overrightarrow{H}_2 = \frac{1}{n_2}\sum_{s=n_1+1}^{n_1+n_2} h(e_s, e_s) \tag{4.1}$$

onde $e_1, \ldots, e_{n_1}$ e $e_{n_1+1}, \ldots, e_{n_1+n_2}$ são referenciais ortonormais locais de $\mathfrak{L}(N_1)$ e $\mathfrak{L}(N_2)$, respectivamente.

Definição 4.1. *Seja* $\phi : N_1 \times_f N_2 \longrightarrow \widetilde{M}$ *uma imersão isométrica de um produto torcido* $N_1 \times_f N_2$ *em uma variedade Riemanniana* $\widetilde{M}^{n+m}$.

(a) (N_j*-totalmente geodésica*) *A imersão* ϕ *é dita* N_j***-totalmente geodésica****,* $j = 1, 2$, *se a segunda forma fundamental parcial* $h_j = h\big|_{\mathfrak{L}(N_j)}$ *é identicamente nula. E* ϕ *é dita* ***totalmente geodésica mista*** *se a sua segunda forma fundamental* h *satisfaz* $h(\widetilde{X}, \widetilde{Z}) = 0\ \forall \widetilde{X} \in \mathfrak{L}(N_1)$ *e* $\forall \widetilde{Z} \in \mathfrak{L}(N_2)$.

(b) (N_j*-mínima*) *A imersão* ϕ *é dita* N_j***-mínima****,* $j = 1, 2$, *se o vetor curvatura média parcial* $\overrightarrow{H}_j$, $j = 1, 2$, *é identicamente nulo.*

Sejam $\psi : M \longrightarrow \overline{M}$ uma imersão isométrica e f uma função diferenciável em $\overline{M}$. Como em cada $p \in M$ $T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp}$ e o gradiente de f, ∇f, é um campo tangente a $\overline{M}$, então em cada $p \in M$ temos que

$$\big(\nabla f\big)(p) = \big[\big(\nabla f\big)(p)\big]^{T} + \big[\big(\nabla f\big)(p)\big]^{\perp},\ \big[\big(\nabla f\big)(p)\big]^{T} \in T_pM,\ \big[\big(\nabla f\big)(p)\big]^{\perp} \in (T_pM)^{\perp}.$$

Dessa forma, denotaremos a componente normal de ∇f restrita a M, $\big[\big(\nabla f\big)\big]^{\perp}$, por Df.

Proposição 4.1. (*Imersão-Produto Torcida*) *Sejam* $M_1 \times_\rho M_2$ *um produto torcido,* $\phi_1 : N_1 \longrightarrow M_1$ *e* $\phi_2 : N_2 \longrightarrow M_2$ *imersões isométricas entre variedades Riemannianas. Defina a função positiva* $f \in C^\infty(N_1)$ *por* $f = \rho \circ \phi_1$. *Então, a aplicação*

$$\phi : N_1 \times_f N_2 \longrightarrow M_1 \times_\rho M_2$$

dada por $\phi\big(p_1, p_2\big) = \big(\phi_1(p_1), \phi_2(p_2)\big) = \big(\phi_1 \circ \pi_1(p_1, p_2), \phi_2 \circ \pi_2(p_1, p_2)\big)$ *é uma imersão isométrica, chamada* ***imersão-produto torcida****. Se* $\rho \equiv 1$, ϕ *é chamada* ***imersão-produto*** (**direta**).

Demonstração:

(i) Considere o produto torcido $M = M_1 \times_\rho M_2$. Sejam as projeções canônicas

$$\begin{aligned} \sigma_1 :\ & M_1 \times_\rho M_2 \ \longrightarrow\ M_1, \\ \sigma_2 :\ & M_1 \times_\rho M_2 \ \longrightarrow\ M_2. \end{aligned}$$

A métrica torcida $\widetilde{g}$ de M é dada por $\widetilde{g} = \sigma_1^*(g_{M_1}) + (\rho \circ \sigma_1)^2 \sigma_2^*(g_{M_2})$. Explicitamente,

$\widetilde{g}(u,v)_{(r,s)} = \langle u,v\rangle_{(r,s)} = \langle d\sigma_1(u), d\sigma_1(v)\rangle_r^{M_1} + (\rho\circ\sigma_1)^2\langle d\sigma_2(u), d\sigma_2(v)\rangle_s^{M_2}$, em cada $(r,s)\in M$, $\forall\, u,v\in T_{(r,s)}M$.

A métrica produto é dada por

$\widetilde{g}_0(u,v)_{(r,s)} = \langle u,v\rangle_{(r,s)} = \langle d\sigma_1(u), d\sigma_1(v)\rangle_r^{M_1} + \langle d\sigma_2(u), d\sigma_2(v)\rangle_s^{M_2}$, em cada $(r,s)\in M_1\times M_2$, $\forall\, u,v\in T_{(r,s)}(M_1\times M_2)$.

(ii) Sejam as imersões isométricas

$$\begin{aligned} \phi_1 :\ N_1 &\longrightarrow M_1,\\ \phi_2 :\ N_2 &\longrightarrow M_2. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \langle u,v\rangle_p^{N_1} &= \langle d\phi_1(u), d\phi_1(v)\rangle_{\phi_1(p)}^{M_1},\ \forall p\in N_1,\ \forall\, u,v\in T_pN_1;\\ \langle u,v\rangle_q^{N_2} &= \langle d\phi_2(u), d\phi_2(v)\rangle_{\phi_2(q)}^{M_2},\ \forall q\in N_2,\ \forall\, u,v\in T_qN_2. \end{aligned}$$

(iii) Considere o produto torcido $N = N_1\times_f N_2$, com $f=\rho\circ\phi_1$. Sejam as projeções canônicas

$$\begin{aligned} \pi_1 :\ N_1\times_f N_2 &\longrightarrow N_1,\\ \pi_2 :\ N_1\times_f N_2 &\longrightarrow N_2. \end{aligned}$$

A métrica torcida g de N é dada por $g=\pi_1^*(g_{N_1})+(f\circ\pi_1)^2\pi_2^*(g_{N_2})$. Explicitamente,

$g(u,v)_{(p,q)} = \langle u,v\rangle_{(p,q)} = \langle d\pi_1(u), d\pi_1(v)\rangle_p^{N_1} + (f\circ\pi_1)^2\langle d\pi_2(u), d\pi_2(v)\rangle_q^{N_2}$, em cada $(p,q)\in N$, $\forall\, u,v\in T_{(p,q)}N$.

A métrica produto é dada por

$g_0(u,v)_{(p,q)} = \langle u,v\rangle_{(p,q)} = \langle d\pi_1(u), d\pi_1(v)\rangle_p^{N_1} + \langle d\pi_2(u), d\pi_2(v)\rangle_q^{N_2}$, em cada $(p,q)\in N_1\times N_2$, $\forall\, u,v\in T_{(p,q)}N$.

(iv) Agora, a aplicação ϕ é dada por

$$\begin{aligned} \phi=(\phi_1,\phi_2):\ N_1\times_f N_2 &\longrightarrow M_1\times_\rho M_2\\ (p,q) &\longmapsto \phi(p,q) = \big(\phi_1(p),\phi_2(q)\big). \end{aligned}$$

E ainda, $\phi(p,q)=\big((\phi_1\circ\pi_1)(p,q),(\phi_2\circ\pi_2)(p,q)\big)=\big(\phi_1(p),\phi_2(q)\big)$. Observe que $\phi_1\circ\pi_1=\sigma_1\circ\phi$ e $\phi_2\circ\pi_2=\sigma_2\circ\phi$.

(v) Dado um referencial ortonormal local $\{E_1, \ldots, E_{n_1}, E_{n_1+1}, \ldots, E_{n_1+n_2}\}$ em N, com $E_i \in \mathfrak{L}(N_1)$, $1 \leqslant i \leqslant n_1$, e $E_j \in \mathfrak{L}(N_2)$, $n_1 + 1 \leqslant j \leqslant n_1 + n_2$, a diferencial de ϕ, $d\phi_{(p,q)} : T_{(p,q)}N \longrightarrow T_{\phi(p,q)}M$, é dada por

$$d\phi = d(\phi_1 \circ \pi_1) \oplus d(\phi_2 \circ \pi_2) = d\phi_1 \circ d\pi_1 \oplus d\phi_2 \circ d\pi_2,$$

em cada $(p, q) \in N$. Dessa forma, como $T_{(p,q)}N = T_{(p,q)}N_1 \oplus T_{(p,q)}N_2$ e $T_{\phi(p,q)}M = T_{\phi(p,q)}M_1 \oplus T_{\phi(p,q)}M_2$, temos que $d\phi_{(p,q)}\big(T_{(p,q)}N_1\big) \subset T_{\phi(p,q)}M_1$ e $d\phi_{(p,q)}\big(T_{(p,q)}N_2\big) \subset T_{\phi(p,q)}M_2$.

(vi) Mostraremos que $d\phi$ é injetiva em cada $(p, q) \in N$, isto é, $d\phi_{(p,q)}(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$. Seja $v \in T_{(p,q)}N$, com $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in T_{(p,q)}N_1$ e $v_2 \in T_{(p,q)}N_2$. Assim, se

$$\begin{aligned} 0 &= d\phi_{(p,q)}(v) = d\phi_{(p,q)}(v_1 + v_2) = (d\phi_1 \circ d\pi_1)(v_1 + v_2) + (d\phi_2 \circ d\pi_2)(v_1 + v_2) = \\ &= d\phi_1(\widehat{v}_1) + d\phi_2(\widehat{v}_2), \end{aligned}$$

com $d\pi_1(v_1) = \widehat{v}_1$, $d\pi_2(v_2) = \widehat{v}_2$. Como $d\phi_1(\widehat{v}_1) \in T_{\phi(p,q)}M_1$ e $d\phi_2(\widehat{v}_2) \in T_{\phi(p,q)}M_2$, então $d\phi_1(\widehat{v}_1) = 0$, $d\phi_2(\widehat{v}_2) = 0$. E ainda, $d\phi_1$ e $d\phi_2$ são injetivas. Daí, e pelo lema 2.5

$$\begin{cases} d\pi_1(v_1) = \widehat{v}_1 = 0 \Rightarrow v_1 \in T_{(p,q)}N_2 \Rightarrow v_1 = 0 \\ d\pi_2(v_2) = \widehat{v}_2 = 0 \Rightarrow v_2 \in T_{(p,q)}N_1 \Rightarrow v_2 = 0, \end{cases}$$

então, $v = v_1 + v_2 = 0$. A volta é imediata. Portanto, ϕ é uma imersão.

(vii) Vamos mostrar agora que a imersão ϕ é isométrica, isto é, $g = \phi^*(\widetilde{g})$. Em cada $(p, q) \in N$, dados $u, v \in T_{(p,q)}N$, tem-se

$$\begin{aligned} \phi^*(\widetilde{g})(u, v) = \widetilde{g}(d\phi(u), d\phi(v))_{\phi(p,q)} &= \langle d\phi(u), d\phi(v)\rangle_{\phi(p,q)} = \\ &= \langle d\sigma_1(d\phi(u)), d\sigma_1(d\phi(u))\rangle^{M_1}_{\phi_1(p)} + \\ &+ \big(\rho \circ \sigma_1(\phi(p, q))\big)^2 \langle d\sigma_2(d\phi(u)), d\sigma_2(d\phi(u))\rangle^{M_2}_{\phi_2(p)} = \\ &= \langle d(\sigma_1 \circ \phi)(u), d(\sigma_1 \circ \phi)(v)\rangle^{M_1}_{\phi_1(p)} + \\ &+ \big(\rho \circ \phi_1(\pi_1(p, q))\big)^2 \langle d(\sigma_2 \circ \phi)(u), d(\sigma_2 \circ \phi)(v)\rangle^{M_2}_{\phi_2(q)}, \end{aligned}$$

e, por (iv), (ii) e (iii),

$$
\begin{aligned}
\phi^*(\widetilde{g})(u,v) &= \widetilde{g}(d\phi(u), d\phi(v))_{\phi(p,q)} = \\
&= \langle d(\phi_1 \circ \pi_1)(u), d(\phi_1 \circ \pi_1)(v)\rangle^{M_1}_{\phi_1(p)} + \\
&+ \big(f \circ \pi_1(p,q))\big)^2 \langle d(\phi_2 \circ \pi_2)(u), d(\phi_2 \circ \pi_2)(v)\rangle^{M_2}_{\phi_2(q)} = \\
&= \langle d\phi_1(d\pi_1(u)), d\phi_1(d\pi_1(v))\rangle^{M_1}_{\phi_1(p)} + \\
&+ \big(f \circ \pi_1(p,q))\big)^2 \langle d\phi_2(d\pi_2(u)), d\phi_2(d\pi_2(v))\rangle^{M_2}_{\phi_2(q)} = \\
&= \langle d\pi_1(u), d\pi_1(v)\rangle^{N_1}_p + \big(f \circ \pi_1(p,q))\big)^2 \langle d\pi_2(u), d\pi_2(v)\rangle^{N_2}_q = \\
&= g(u,v)_{(p,q)}.
\end{aligned}
$$

Portanto, ϕ é uma imersão isométrica.

■

Lema 4.1. *Seja* M *uma variedade. Se* ${}^1\nabla$ *e* ${}^2\nabla$ *são conexões afim em* M*, então a diferença* ${}^1\nabla - {}^2\nabla = \mathcal{T}$ *definida por* $\mathcal{T}_X Y = {}^1\nabla_X Y - {}^2\nabla_X Y$ *é tensorial, isto é,* $\mathcal{T} \in T^2_1(M)$.

Demonstração:

Basta mostrarmos que $\mathcal{T} = {}^1\nabla - {}^2\nabla$ é C^∞-bilinear, isto é, basta mostrar que $\mathcal{T}$ é C^∞-linear em relação ao argumento Y, pois $\mathcal{T}$ é $\mathbb{R}$-bilinear e C^∞-linear em relação ao argumento X. Então, dada $f \in C^\infty$ temos

$$
{}^1\nabla_X fY - {}^2\nabla_X fY = f^1\nabla_X Y + X(f)Y - f^2\nabla_X Y - X(f)Y = f\left({}^1\nabla_X Y - {}^1\nabla_X Y\right).
$$

Logo, $\mathcal{T} = {}^1\nabla - {}^2\nabla$ é C^∞-bilinear. ■

Agora, temos ferramentas suficientes para demonstrar os teoremas 1.1, 1.2, 1.3 e 1.4.

Demonstração: Teorema 1.1

Considere as identificações usuais nas imersões isométricas mencionadas. Indique por ${}^1\nabla$ e ${}^f\nabla$ as conexões de Levi-Civita da variedade Riemanniana produto $N_1 \times N_2$ e do produto torcido $N_1 \times_f N_2$, respectivamente, sendo $g_0 = g_1 + g_2$ e $g = g_1 + f^2 g_2$ suas respectivas métricas. Analogamente, indique por ${}^1\widetilde{\nabla}$ e ${}^\rho\widetilde{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita da variedade Riemanniana produto $M_1 \times M_2$ e do produto torcido $M_1 \times_\rho M_2$, respectivamente, sendo $\widetilde{g}_0 = \widetilde{g}_1 + \widetilde{g}_2$ e $\widetilde{g} = \widetilde{g}_1 + \rho^2 \widetilde{g}_2$ suas respectivas métricas.

Sabemos que a diferença de conexões, $\mathcal{T} = {}^{\rho}\widetilde{\nabla} - {}^{1}\widetilde{\nabla}$, é tensorial, isto é, em cada ponto $m \in M$, $\big(\mathcal{T}_X Y\big)(m)$ depende apenas dos valores dos campos X e Y em m e independe do comportamento local de X e Y. Dados $U, V \in \mathfrak{X}(M)$, $m \in M$, então $U_m, V_m \in T_m M$. Escolha campos $U_1, V_1 \in \mathfrak{L}(M_1)$ e $U_2, V_2 \in \mathfrak{L}(M_2)$ de modo que $U_m = U_1(m) + U_2(m)$ e $V_m = V_1(m) + V_2(m)$. Como $\big(\mathcal{T}_U V\big)(m)$ depende apenas dos valores U_m e V_m segue que

$$\big(\mathcal{T}_U V\big)_m = \big(\mathcal{T}_{U_1+U_2}(V_1+V_2)\big)_m = \mathcal{T}_{U_1}V_1 + \mathcal{T}_{U_1}V_2 + \mathcal{T}_{U_2}V_1 + \mathcal{T}_{U_2}V_2,$$

ou seja, em $m \in M_1 \times {}_{\rho}M_2$, temos

$$\begin{aligned}
{}^{\rho}\widetilde{\nabla}_U V - {}^{1}\widetilde{\nabla}_U V &= {}^{\rho}\widetilde{\nabla}_{(U_1+U_2)}(V_1+V_2) - {}^{1}\widetilde{\nabla}_{(U_1+U_2)}(V_1+V_2) = \\
&= {}^{\rho}\widetilde{\nabla}_{U_1}V_1 + {}^{\rho}\widetilde{\nabla}_{U_2}V_1 + {}^{\rho}\widetilde{\nabla}_{U_1}V_2 + {}^{\rho}\widetilde{\nabla}_{U_2}V_2 - {}^{1}\widetilde{\nabla}_{U_1}V_1 - {}^{1}\widetilde{\nabla}_{U_2}V_2 = \\
&= {}^{\rho}\widetilde{\nabla}_{U_2}V_1 + {}^{\rho}\widetilde{\nabla}_{U_1}V_2 + {}^{\rho}\widetilde{\nabla}_{U_2}V_2 - {}^{1}\widetilde{\nabla}_{U_2}V_2 = \\
&= {}^{\rho}\widetilde{\nabla}_{U_2}V_1 + {}^{\rho}\widetilde{\nabla}_{U_1}V_2 - \langle U_2, V_2\rangle \frac{\nabla\rho}{\rho} = \\
&= \frac{\langle \nabla\rho, V_1\rangle}{\rho}U_2 + \frac{\langle \nabla\rho, U_1\rangle}{\rho}V_2 - \langle U_2, V_2\rangle \frac{\nabla\rho}{\rho} = \\
&= \frac{\langle \nabla\rho, V\rangle}{\rho}U_2 + \frac{\langle \nabla\rho, U\rangle}{\rho}V_2 - \langle U_2, V_2\rangle \frac{\nabla\rho}{\rho},
\end{aligned}$$

o que deixa explicita a tensorialidade em U e V. Portanto, usando a decomposição natural de cada $T_m M$ e pondo $U = U_1 + U_2$, $V = V_1 + V_2$

$${}^{\rho}\widetilde{\nabla}_U V - {}^{1}\widetilde{\nabla}_U V = \frac{\langle \nabla\rho, V\rangle}{\rho}U_2 + \frac{\langle \nabla\rho, U\rangle}{\rho}V_2 - \langle U_2, V_2\rangle \frac{\nabla\rho}{\rho}. \tag{4.2}$$

Da mesma forma, dados U, $V \in \mathfrak{X}(N)$, as conexões ${}^{f}\nabla$ e ${}^{1}\nabla$ estão relacionadas por

$${}^{f}\nabla_U V - {}^{1}\nabla_U V = \frac{\langle \nabla f, V\rangle}{f}U_2 + \frac{\langle \nabla f, U\rangle}{\rho}V_2 - \langle U_2, V_2\rangle \frac{\nabla f}{f}, \tag{4.3}$$

onde $U = U_1 + U_2$ e $V = V_1 + V_2$. Da equação (4.2), para X, $Y \in \mathfrak{L}(M_1)$ e Z, $W \in \mathfrak{L}(M_2)$, obtemos

$${}^{\rho}\widetilde{\nabla}_X Y = {}^{1}\widetilde{\nabla}_X Y, \tag{4.4}$$

$${}^{\rho}\widetilde{\nabla}_Z W = {}^{1}\widetilde{\nabla}_Z W - \langle Z, W\rangle \frac{\nabla\rho}{\rho}, \tag{4.5}$$

$${}^{\rho}\widetilde{\nabla}_X Z = {}^{\rho}\widetilde{\nabla}_Z X = \frac{X(\rho)}{\rho} Z \tag{4.6}$$

Assim, dados X, $Y \in \mathfrak{L}(N_1)$, Z, $W \in \mathfrak{L}(N_2)$, sendo $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$, $\overline{W} \in \mathfrak{X}(M)$ suas respectivas extensões, h a segunda forma fundamental da imersão produto torcido ϕ e h^0 a segunda forma fundamental da imersão produto direto $(\phi_1, \phi_2) : N_1 \times {}_1N_2 \longrightarrow M_1 \times {}_1M_2$ vem que

$$h(X,Y) - h^0(X,Y) = \left({}^{\rho}\widetilde{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - {}^{f}\nabla_X Y\right) - \left({}^{1}\widetilde{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - {}^{1}\nabla_X Y\right) = {}^{\rho}\widetilde{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - {}^{1}\widetilde{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y},$$

mas como h é tensorial, $\overline{X}\big|_N = X$, $\overline{Y}\big|_N = Y$ e $X(p,q)$, $Y(p,q) \in T_{(p,q)}N_1 \subset T_{(p,q)}M_1$, $\forall (p,q) \in N \subset M$, logo $\overline{X}_2\big|_N = 0$ e $\overline{Y}_2\big|_N = 0$. Daí, e por (4.2) e (4.4),

$$h(X,Y) - h^0(X,Y) = {}^{\rho}\widetilde{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - {}^{1}\widetilde{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} = 0,$$

ou seja,

$$h(X,Y) = h^0(X,Y). \tag{4.7}$$

Agora,

$$\begin{aligned} h(Z,W) - h^0(Z,W) &= \left({}^{\rho}\widetilde{\nabla}_{\overline{Z}}\overline{W} - {}^{f}\nabla_Z W\right) - \left({}^{1}\widetilde{\nabla}_{\overline{Z}}\overline{W} - {}^{1}\nabla_Z W\right) = \\ &= \left({}^{\rho}\widetilde{\nabla}_{\overline{Z}}\overline{W} - {}^{1}\widetilde{\nabla}_{\overline{Z}}\overline{W}\right) - \left({}^{f}\nabla_Z W - {}^{1}\nabla_Z W\right), \end{aligned}$$

novamente, h é tensorial, $\overline{Z}\big|_N = Z$, $\overline{W}\big|_N = W$ e $Z(p,q)$, $W(p,q) \in T_{(p,q)}N_2 \subset T_{(p,q)}M_2$, $\forall (p,q) \in N$, logo $\overline{Z}_2\big|_N = Z$ e $\overline{W}_2\big|_N = W$. Daí, e por (4.2) e (4.4),

$$h(Z,W) - h^0(Z,W) = -\langle Z, W\rangle \frac{\nabla\rho}{\rho} + \langle Z, W\rangle \frac{\nabla f}{f}.$$

Como $\langle \nabla f, v\rangle = df(v) = d(\rho \circ \phi_1)(v) = d\rho\big(d\phi_1(v)\big) = \langle \nabla\rho, d\phi_1(v)\rangle$, então $\nabla f = (\nabla\rho)^{\top}$, $\forall v \in T_pN_1$, isto é, $\nabla\rho = \nabla f \oplus (\nabla\rho)^{\perp} = \nabla f \oplus D\rho$, em cada $p \in N_1 \subset M_1$. Assim,

$$h(Z,W) - h^0(Z,W) = -\langle Z, W\rangle \frac{D\rho}{\rho}. \tag{4.8}$$

A restrição de h^0 a $\mathfrak{L}(N_1)$ e a $\mathfrak{L}(N_2)$ são a segunda forma fundamental de $\phi_1 : N_1 \longrightarrow M_1$ e $\phi_2 : N_2 \longrightarrow M_2$, respectivamente, pois como h é tensorial, independe das extensões, $\overline{X}\big|_N = X$, $\overline{Y}\big|_N = Y$, $\overline{Z}\big|_N = Z$, $\overline{W}\big|_N = W$, com $X(p,q)$, $Y(p,q) \in T_{(p,q)}N_1 \subset T_{(p,q)}M_1$ e $Z(p,q)$, $W(p,q) \in T_{(p,q)}N_2 \subset T_{(p,q)}M_2$, em cada $(p,q) \in N$, logo podemos tomar $\overline{X}$, $\overline{Y} \in \mathfrak{L}(M_1)$ e $\overline{Z}$, $\overline{W} \in \mathfrak{L}(M_2)$. Assim,

$${}^{1}\widetilde{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - {}^{1}\nabla_X Y = h^0(X,Y) \in (T_{(p,q)}N_1)^{\perp_{M_1}}, \ \forall (p,q) \in N,$$

pois ${}^{1}\widetilde{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} \in \mathfrak{L}(M_1)$, ${}^{1}\nabla_X Y \in \mathfrak{L}(N_1)$, $T_{(p,q)}N_1 \subset T_{(p,q)}M_1$ e $T_{(p,q)}M_1 = T_{(p,q)}N_1 \oplus (T_{(p,q)}N_1)^{\perp_{M_1}}$, $\forall (p,q) \in N$, onde $(T_{(p,q)}N_1)^{\perp_{M_1}} = (T_{(p,q)}N_1)^{\perp} \cap T_{(p,q)}M_1$. No entanto, $T_pN_1 \equiv T_{(p,q)}N_1$ e $T_pM_1 \equiv T_{(p,q)}M_1$. Da mesma maneira,

$${}^{1}\widetilde{\nabla}_{\overline{Z}}\overline{W} - {}^{1}\nabla_Z W = h^0(Z,W) \in (T_{(p,q)}N_2)^{\perp_{M_2}}, \ \forall (p,q) \in N,$$

pois ${}^{1}\widetilde{\nabla}_{\overline{Z}}\overline{W} \in \mathfrak{L}(M_2)$, ${}^{1}\nabla_Z W \in \mathfrak{L}(N_2)$, $T_{(p,q)}N_2 \subset T_{(p,q)}M_2$ e $T_{(p,q)}M_2 = T_{(p,q)}N_2 \oplus (T_{(p,q)}N_2)^{\perp_{M_2}}$, $\forall (p,q) \in N$, onde $(T_{(p,q)}N_2)^{\perp_{M_2}} = (T_{(p,q)}N_2)^{\perp} \cap T_{(p,q)}M_2$. No entanto, $T_p N_2 \equiv T_{(p,q)}N_2$ e $T_p M_2 \equiv T_{(p,q)}M_2$.

Daí, $h^0(X,Y)$ e $h^0(Z,W)$ são ortogonais para $X, Y \in \mathfrak{L}(N_1)$ e $Z, W \in \mathfrak{L}(N_2)$.

(a) Dados $X \in \mathfrak{L}(N_1)$ e $Z \in \mathfrak{L}(N_2)$, sendo $\overline{X}, \overline{Z} \in \mathfrak{X}(M)$ suas respectivas extensões, como h é tensorial, independe das extensões, podemos tomar $\overline{X} \in \mathfrak{L}(M_1)$ e $\overline{Z} \in \mathfrak{L}(M_2)$. Assim, por (4.6)

$$h(X,Z) = {}^{\rho}\widetilde{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z} - {}^{f}\nabla_X Z = \frac{\overline{X}(\rho)}{\rho}\overline{Z} - \frac{X(f)}{f}Z = 0, \ \forall (p,q) \in N.$$

Portanto, ϕ é totalmente geodésica mista.

(b) Dado um referencial ortonormal local $\{e_1, \ldots, e_{n_1}, e_{n_1+1}, \ldots, e_{n_1+n_2}\}$ em N, com $e_1, \ldots, e_{n_1} \in \mathfrak{L}(N_1)$ e $e_{n_1+1}, \ldots, e_{n_1+n_2} \in \mathfrak{L}(N_2)$, de 4.7, 4.8 e do fato que $D\rho$ e $h^0(Z,W)$ são ortogonais em N, como

$$\begin{aligned}\sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} \big\langle h(e_j,e_j), h(e_j,e_j)\big\rangle &= \sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} \left[\big\langle h^0(e_j,e_j) - D\ln\rho, h^0(e_j,e_j) - D\ln\rho\big\rangle\right] = \\ &= \sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} \big\langle h^0(e_j,e_j), h^0(e_j,e_j)\big\rangle + n_2\|D\ln\rho\|^2,\end{aligned}$$

obtemos

$$\|h\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n_1+n_2} \big\langle h(e_i,e_j), h(e_i,e_j)\big\rangle \geqslant \sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} \big\langle h(e_j,e_j), h(e_j,e_j)\big\rangle \geqslant n_2\|D\ln\rho\|^2,$$

pois $\big\langle h(e_i,e_j), h(e_i,e_j)\big\rangle \geqslant 0$ e $\big\langle h^0(e_j,e_j), h^0(e_j,e_j)\big\rangle \geqslant 0$, $\forall i,j$, $1 \leqslant i \leqslant n_1+n_2$, $1 \leqslant j \leqslant n_1+n_2$, com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $\phi_1 : N_1 \longrightarrow M_1$ e $\phi_2 : N_2 \longrightarrow M_2$ são ambas imersões totalmente geodésicas.

(c) Se ϕ é N_1-totalmente geodésica, então $h_1 = h\big|_{\mathfrak{L}(N_1)} = 0$. Daí, e por (4.7), $h_1 = h^0\big|_{\mathfrak{L}(N_1)} = 0$, logo ϕ_1 é totalmente geodésica. Agora, se ϕ_1 é totalmente geodésica, $h^0\big|_{\mathfrak{L}(N_1)} = 0$ e, por (4.7), $h_1 = h^0\big|_{\mathfrak{L}(N_1)} = 0$, logo ϕ é N_1-totalmente geodésica.

(d) Se ϕ é N_2-totalmente geodésica, então $h_2 = h\big|_{\mathfrak{L}N_2} = 0$. Segue-se de (4.8) que, dados $Z, W \in \mathfrak{L}(N_2)$, $h^0(Z,W) = \langle Z,W\rangle \dfrac{D\rho}{\rho}$. $D\rho \in T_{(p,q)}M_1$ e $h^0(Z,W) \in T_{(p,q)}M_2$, $\forall (p,q) \in N$, isto é, $D\rho$ e $h^0(Z,W)$ são ortogonais em N, temos que $h^0(Z,W) = 0$ e $D\rho = 0$. Assim, $h^0\big|_{\mathfrak{L}(N_2)} = 0$, ou seja, ϕ_2 é totalmente geodésica. E $D\rho = 0$

implica que $(\nabla\rho)\big|_{N_1} = \nabla f$, pois como $\nabla f = (\nabla\rho)^\top$, $\nabla\rho = \nabla f \oplus D\rho = \nabla f$, em cada $p \in N_1$, então, $\left(\dfrac{\nabla\rho}{\rho}\right)\Bigg|_{N_1} = \dfrac{\nabla f}{f}$.

Reciprocamente, se ϕ_2 é totalmente geodésica e $\left(\dfrac{\nabla\rho}{\rho}\right)\Bigg|_{N_1} = \dfrac{\nabla f}{f}$ ocorre, então de (4.8) temos que $h(Z, W) = 0$, $\forall Z, W \in \mathfrak{L}(N_2)$. Daí, ϕ é N_2-totalmente geodésica.

(e) Se ϕ é totalmente geodésica, então $h(U, V) = 0$, $\forall U, V \in \mathfrak{X}(N)$. Em particular, se X, $Y \in \mathfrak{L}N_1$, Z, $W \in \mathfrak{L}N_2$, então ϕ é N_1-totalmente geodésica e N_2-totalmente geodésica.

Agora, se ϕ é N_1-totalmente geodésica e N_2-totalmente geodésica, como h é tensorial, dados U, $V \in \mathfrak{X}(N)$, temos que existem U_1, $V_1 \in \mathfrak{L}(N_1)$, U_2, $V_2 \in \mathfrak{L}(N_2)$, tal que, $h(U, V) = h(U_1 + U_2, V_1 + V_2)$, em cada $(p, q) \in N$, logo, por (a), (c) e (d) $h(U, V) = 0$. Portanto, ϕ é totalmente geodésica.

■

Demonstração: Teorema 1.2

Suponha que ϕ é uma imersão totalmente umbílica. Então, temos

$$h(X, Y) = \langle X, Y\rangle \vec{H}, \quad h(Z, W) = \langle Z, W\rangle \vec{H}, \tag{4.9}$$

$\forall X$, $Y \in \mathfrak{L}(N_1)$ e $\forall Z$, $W \in \mathfrak{L}(N_2)$. Por outro lado, de (4.7) e (4.9)

$$h(X, Y) = h^0(X, Y) = \langle X, Y\rangle \vec{H} \in (T_{(p,q)}N_1)^\perp \subset T_{(p,q)}M_1, \ \forall (p, q) \in N,$$

isto é, $\vec{H}$ é tangente a M_1. Daí, segue-se de (4.8) e (4.9) que

$$h(Z, W) = h^0(Z, W) - \langle Z, W\rangle \frac{D\rho}{\rho} = \langle Z, W\rangle \vec{H},$$

e como $h^0(Z, W) \in (T_{(p,q)}N_2)^{\perp_{M_2}} \subset T_{(p,q)}M_2$, $h^0(Z, W) = 0$, $\forall Z, W \in \mathfrak{L}(N_2)$. Portanto, ϕ_2 é totalmente geodésica. Consequentemente, obtemos **(b)**.

E também de (4.7), de (4.8) e de (4.9), encontramos

$$h^0(X, Y) = \langle X, Y\rangle \vec{H}, \ -\langle Z, W\rangle \frac{D\rho}{\rho} = \langle Z, W\rangle \vec{H} \Rightarrow \vec{H} = -\frac{D\rho}{\rho},$$

$\forall X$, $Y \in \mathfrak{L}(N_1)$. Isso nos dá **(a)**.

Reciprocamente, se ϕ satisfaz **(a)** e **(b)**, como h é tensorial, dados U, $V \in \mathfrak{X}(N)$, temos que existem U_1, $V_1 \in \mathfrak{L}(N_1)$, U_2, $V_2 \in \mathfrak{L}(N_2)$, em cada $(p, q) \in N$, tal que,

$h(U,V) = h(U_1 + U_2, V_1 + V_2)$, então

$$h(U,V) = h(U_1 + U_2, V_1 + V_2) = h(U_1, V_1) + h(U_1, V_2) + h(U_2, V_1) + h(U_2, V_2) =$$
$$= h(U_1, V_1) + h(U_2, V_2) = \langle U_1, V_1\rangle\left(-\frac{D\rho}{\rho}\right) + \langle U_2, V_2\rangle\left(-\frac{D\rho}{\rho}\right) =$$
$$= \left(\langle U_1, V_1\rangle + \langle U_2, V_2\rangle\right)\left(-\frac{D\rho}{\rho}\right) = \langle U, V\rangle\left(-\frac{D\rho}{\rho}\right), \ \forall (p,q) \in N.$$

Portanto, ϕ é totalmente umbílica. ■

Demonstração: Teorema 1.3

(a) Uma vez que cada folha $N_1 \times q$ é uma subvariedade totalmente geodésica da variedade produto torcido $N_1 \times_f N_2$ (cf corolário 3.1), a equação (4.7) implica que $\overrightarrow{H}_1$ é o vetor curvatura média de ϕ_1, pois $h^0\big|_{\mathfrak{L}(N_1)}$ é a segunda forma fundamental de ϕ_1.

(b) Se ϕ é N_2-mínima, então $\overrightarrow{H}_2 = 0$. Daí e por (4.8), dado um referencial ortonormal local $\{e_1, \dots, e_{n_1}, e_{n_1+1}, \dots, e_{n_1+n_2}\}$ em N, com $e_1, \dots, e_{n_1} \in \mathfrak{L}(N_1)$ e $e_{n_1+1}, \dots, e_{n_1+n_2} \in \mathfrak{L}(N_2)$ temos

$$0 = \overrightarrow{H}_2 = \frac{1}{n_2}\sum_{s=n_1+1}^{n_1+n_2} h(e_s, e_s) \Rightarrow h(e_s, e_s) = 0, \ n_1 + 1 \leqslant s \leqslant n_1 + n_2 \Rightarrow$$

$$0 = h^0(e_s, e_s) - \langle e_s, e_s\rangle\left(\frac{D\rho}{\rho}\right) \Rightarrow \frac{1}{n_2}\sum_{s=n_1+1}^{n_1+n_2}\left(h^0(e_s, e_s) - \langle e_s, e_s\rangle\left(\frac{D\rho}{\rho}\right)\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\mathrm{traço}\ h_2^0 = n_2\left(\frac{D\rho}{\rho}\right),$$

pois $h^0\big|_{\mathfrak{L}(N_2)}$ é a segunada forma fundamental de ϕ_2. Como $D\rho$ e $\mathrm{traço}\ h_2^0$ são ortogonais, temos que $D\rho = 0$, $\mathrm{traço}\ h_2^0 = 0$, logo ϕ_2 é mínima e $\left.\left(\frac{\nabla\rho}{\rho}\right)\right|_{N_1} = \frac{\nabla f}{f}$.

Reciprocamente, se ϕ_2 é uma imersão mínima e $\left.\left(\frac{\nabla\rho}{\rho}\right)\right|_{N_1} = \frac{\nabla f}{f}$ ocorre, então segue-se da equação (4.8) que $\mathrm{traço}\ h_2 = 0$.

(c) Suponha que ϕ é uma imersão mínima. Logo, temos que $\overrightarrow{H} = 0$, o que implica $\mathrm{traço}\ h = 0$. Como $\overrightarrow{H} = \frac{n_1}{n}\overrightarrow{H}_1 + \frac{n_2}{n}\overrightarrow{H}_2$, aplicando (4.7) e (4.8),

$$0 = n_1\overrightarrow{H}_1 + n_2\overrightarrow{H}_2 \Rightarrow \mathrm{traço}\ h_1^0 + f^2\ \mathrm{traço}\ h_2^0 - n_2\left(\frac{D\rho}{\rho}\right) = 0. \tag{4.10}$$

Como $\mathrm{traço}\ h_1^0$ e $D\rho$ são tangentes a M_1 e $\mathrm{traço}\ h_2^0$ é tangente a M_2, de (4.10) obtemos que

$$\mathrm{traço}\ h_1^0 - n_2\left(\frac{D\rho}{\rho}\right) = 0, \quad \mathrm{traço}\ h_2^0 = 0, \tag{4.11}$$

isto implica que, ϕ_2 é uma imersão mínima e o vetor curvatura média de ϕ_1 é dado por $\overrightarrow{H}_1 = \frac{n_2}{n_1}\frac{D\rho}{\rho}$.

Reciprocamente, se ϕ_2 é uma imersão mínima e o vetor curvatura média de ϕ_1 é dado por $\overrightarrow{H}_1 = \frac{n_2}{n_1}\frac{D\rho}{\rho}$, então

$$\overrightarrow{H} = \frac{n_1}{n}\overrightarrow{H}_1 + \frac{n_2}{n}\overrightarrow{H}_2 = \frac{n_1}{n}\frac{n_2}{n_1}\frac{D\rho}{\rho} + \frac{1}{n}\left(f^2 \underbrace{\text{traço } h_2^0}_{=0} - n_2\frac{D\rho}{\rho}\right) = 0,$$

portanto, ϕ é mínima.

■

Definição 4.2. (*Imersão Pseudo-Umbílica*) *Uma imersão isométrica* $\psi : N \longrightarrow M$ *entre variedades Riemannianas é chamada* ***pseudo-umbílica*** *se seu operador forma* $A_{\overrightarrow{H}}$ *sobre o vetor curvatura média* $\overrightarrow{H}$ *satisfaz*

$$A_{\overrightarrow{H}}(x) = \lambda x$$

para todo vetor x *tangente a* N*, onde* λ *é uma função sobre* N.

Similarmente, uma imersão $\phi : N_1 \times_f N_2 \longrightarrow M$ *é chamada* N_2***-pseudo-umbílica*** *se seu operador de Weingarten* $A_{\overrightarrow{H}}$ *satisfaz*

$$A_{\overrightarrow{H}}(z) = \lambda z$$

para todo vetor tangente z *em* $\mathfrak{L}(N_2)$.

Definição 4.3. (*Representação Produto Torcido*) *Uma variedade produto torcido* $M_1 \times_\rho M_2$ *é chamada uma* ***representação produto torcido*** *de um esapço forma* $\mathbb{R}^m(c)$ *de curvatura seccional constante* c *se o produto torcido* $M_1 \times_\rho M_2$ *é um subconjunto aberto denso de* $\mathbb{R}^m(c)$.

Exemplo 4.1. *Em* $\mathbb{R}^n(c)$*, temos a representação produto torcido* $(0, a) \times_f S^{n-1}$*. Tomamos* $f : (0, a) \longrightarrow (0, \infty)$ *dada por*

$$f_c(r) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}\left(\sqrt{c}r\right)}{c}, & \textit{se } c > 0 \ \textit{ e } \ a = \frac{\pi}{\sqrt{c}} \quad \left(\mathbb{R}^n(c) = S^n\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)\right) \\ r, & \textit{se } c = 0 \ \textit{ e } \ a = +\infty \quad \left(\mathbb{R}^n(0) = \mathbb{R}^n\right) \\ \dfrac{\text{senh}\left(\sqrt{|c|}r\right)}{|c|}, & \textit{se } c < 0 \ \textit{ e} a = \infty \quad \left(\mathbb{R}^n(c) = \mathbb{H}^n(c)\right) \end{cases}.$$

Assim,

$$\mathbb{S}^n\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right) - \{N, S\} \approx \left(0, \frac{\pi}{\sqrt{c}}\right) \times_{f_c} \mathbb{S}^{n-1},$$

$$\mathbb{R}^n - \{0\} \approx \left(0, \infty\right) \times_{f_0} \mathbb{S}^{n-1},$$

$$\mathbb{H}^n - \{0\} \approx \left(0, \infty\right) \times_{f_c} \mathbb{S}^{n-1}.$$

Demonstração: Teorema 1.4

Sejam ${}^f\nabla$ e ${}^\rho\widetilde{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita, R e $\widetilde{R}$ os tensores de curvatura, K e $\widetilde{K}$ as curvaturas seccionais de N e M, respectivamente. Do teorema 1.1-(a), temos que

$$h(X, Z) = 0, \ \forall X \in \mathfrak{L}(N_1), \ \forall Z \in \mathfrak{L}(N_2). \tag{4.12}$$

Como $N_1 \times {}_fN_2$ é um produto torcido, da proposição (3.3) temos

$${}^F\nabla_X Z = {}^F\nabla_Z X = \frac{X(f)}{f} Z, \quad \langle {}^F\nabla_X Y, Z\rangle = 0, \tag{4.13}$$

para campos vetoriais unitários X, $Y \in \mathfrak{L}(N_1)$ e $Z \in \mathfrak{L}(N_2)$. E ainda, para os mesmos X e Z, alicando (4.13) e a proposição 3.5-(c),

$$K(X \wedge Z) = \langle R(X, Z)X, Z\rangle = \langle -\frac{\left(H^f(X, X)\right)}{f} Z, Z\rangle = \frac{\left({}^f\nabla_X X\right)(f) - X^2(f)}{f}. \tag{4.14}$$

Dado um referencial ortonormal local $\{e_1, \dots, e_{n_1}, e_{n_1+1}, \dots, e_{n_1+n_2}\}$ em N, com $e_r \in \mathfrak{L}(N_1)$ e $e_s \in L(N_2)$, para $1 \leqslant r \leqslant n_1$, $n_1 + 1 \leqslant s \leqslant n_1 + n_2$, usando (4.14) obtemos

$$K(e_r \wedge e_s) = \frac{\left({}^f\nabla_{e_r} e_r\right)(f) - e_r(e_r(f))}{f},$$

e isso implica que

$$\frac{\Delta f}{f} = \sum_{r=1}^{n_1} K(e_r \wedge e_s), \quad n_1 + 1 \leqslant s \leqslant n_1 + n_2. \tag{4.15}$$

Por outro lado, da equação de Gauss, sabemos que o tensor curvatura R de N satisfaz

$$\langle \widetilde{R}(X, Y)Z, W\rangle - \langle R(X, Y)Z, W\rangle = -\langle h(Y, W), h(X, Z)\rangle + \langle h(X, W), h(Y, Z)\rangle,$$

o que equivale a dizer que

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Z, W\rangle = &\langle h(Y, W), h(X, Z)\rangle - \langle h(X, W), h(Y, Z)\rangle + \\ &+ c[\langle X, Z\rangle\langle Y, W\rangle - \langle X, W\rangle\langle Y, Z\rangle], \end{aligned} \tag{4.16}$$

para campos vetoriais X, Y, $Z \in \mathfrak{X}(N)$. Assim, para $1 \leqslant r \leqslant n_1$ e $Z \in \mathfrak{L}(N_2)$ unitário, de (4.12), (4.15) e (4.16), temos

$$\begin{aligned} K(e_r \wedge Z) &= \langle R(e_r, Z)e_r, Z\rangle = \langle h(Z,Z), h(e_r, e_r)\rangle - \langle \underbrace{h(e_r, Z)}_{=0}, h(Z, e_r)\rangle + \\ &\quad + c[\underbrace{\langle e_r, e_r\rangle}_{=1}\underbrace{\langle Z, Z\rangle}_{=1} - \underbrace{\langle e_r, Z\rangle}_{=0}\langle Z, e_r\rangle] \Leftrightarrow \\ K(e_r \wedge Z) &= c + \langle h(Z,Z), h(e_r, e_r)\rangle. \end{aligned}$$

Daí,

$$\frac{\Delta f}{f} = \sum_{r=1}^{n_1} K(e_r \wedge Z) = cn_1 + \langle h(Z,Z), \sum_{r=1}^{n_1} h(e_r, e_r)\rangle = cn_1 + \langle h(Z,Z), n_1\overrightarrow{H}_1\rangle,$$

o que nos dá,

$$\langle h(Z,Z), \overrightarrow{H}_1\rangle = \frac{\Delta f}{n_1 f} - c. \tag{4.17}$$

Agora, sejam $X \in \mathfrak{L}(N_1)$ unitário e Z, $W \in \mathfrak{L}(N_2)$ ortonormais. Usando a proposição 3.3-(c), temos

$$\begin{aligned} K\big(X \wedge (Z+W)\big) &= \langle R(X, Z+W)X, Z+W\rangle = \\ &= \langle R(X,Z)X, Z\rangle + \underbrace{\langle R(X,Z)X, W\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle R(X,W)X, Z\rangle}_{=0} + \langle R(X,W)X, W\rangle = \\ &= K(X \wedge Z) + K(X \wedge W). \end{aligned}$$

Daí, de (4.17) e aplicando a polarização $2h(Z,W) = h(Z+W, Z+W) - h(Z,Z) - h(W,W)$

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{H}_1, 2h(Z,W)\rangle &= \langle \overrightarrow{H}_1, h(Z+W, Z+W) - h(Z,Z) - h(W,W)\rangle = \\ &= \langle \overrightarrow{H}_1, h(Z+W, Z+W)\rangle - \langle \overrightarrow{H}_1, h(Z,Z)\rangle - \langle \overrightarrow{H}_1, h(W,W)\rangle = 0, \end{aligned}$$

logo,

$$\langle \overrightarrow{H}_1, h(Z,W)\rangle = 0, \tag{4.18}$$

$\forall$ Z, $W \in \mathfrak{L}(N_2)$ ortonormais. Portanto,

(a) Considerando o referencial ortonormal local $\{e_1, \ldots, e_{n_1}, e_{n_1+1}, \ldots, e_{n_1+n_2}\}$ em N, para $1 \leqslant r \leqslant n_1$, $n_1 + 1 \leqslant s, t \leqslant n_1 + n_2$, de (4.17) e (4.18) obtemos

$$\begin{aligned} \langle A_{\overrightarrow{H}_1} e_s, e_r\rangle &= \langle \overrightarrow{H}_1, h(e_s, e_r)\rangle = 0, \\ \langle A_{\overrightarrow{H}_1} e_s, e_t\rangle &= \langle \overrightarrow{H}_1, h(e_s, e_t)\rangle = 0, \ s \neq t, \\ \langle A_{\overrightarrow{H}_1} e_s, e_s\rangle &= \langle \overrightarrow{H}_1, h(e_s, e_s)\rangle = \frac{\Delta f}{n_1 f} - c. \end{aligned}$$

Daí, para $n_1 + 1 \leqslant s \leqslant n_1 + n_2$

$$A_{\overrightarrow{H}_1} e_s = \sum_{i=1}^{n_1+n_2} \langle A_{\overrightarrow{H}_1} e_s, e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^{n_1+n_2} \langle \overrightarrow{H_1}, h(e_s, e_i) \rangle e_i = \left(\frac{\Delta f}{n_1 f} - c \right) e_s.$$

portanto, dado $Z \in \mathfrak{L}(N_2)$, temos

$$A_{\overrightarrow{H}_1} Z = \left(\frac{\Delta f}{n_1 f} - c \right) Z. \tag{4.19}$$

(b) Dados X, $Y \in \mathfrak{L}(N_1)$ e, $Z \in \mathfrak{L}(N_2)$, segue de (4.12) e de (4.13) que a derivada covariante da segunda forma fundamental h, de ϕ, satisfaz

$$\begin{aligned} \big({}^{\rho}\widetilde{\nabla}_X h\big)\big(Y, Z, \eta\big) &= \langle D_X h(Y, Z) - h({}^{F}\nabla_X Y, Z) - h(Y, {}^{F}\nabla_X Z), \eta \rangle \\ &= \langle -h({}^{F}\nabla_X Y, Z), \eta \rangle = 0, \ \forall \eta \in \mathfrak{X}(N)^{\perp}, \end{aligned} \tag{4.20}$$

pois N_1 é totalmente geodésica em N. Logo

$$-h({}^{F}\nabla_X Y, Z) = 0.$$

Por outro lado, aplicando (4.12) e (4.13), também encontramos

$$\big({}^{\rho}\widetilde{\nabla}_Z h\big)\big(X, Y, \eta\big) = \langle D_Z h(X, Y) - h({}^{F}\nabla_Z X, Y) - h(X, {}^{F}\nabla_Z Y), \eta \rangle = \langle D_Z h(X, Y), \eta \rangle. \tag{4.21}$$

No entanto, aplicando (4.20), (4.21), e a equação de Codazzi obtemos que

$$\big({}^{\rho}\widetilde{\nabla}_X h\big)\big(Y, Z, \eta\big) = \big({}^{\rho}\widetilde{\nabla}_Z h\big)\big(X, Y, \eta\big),$$

isto é,

$$0 = \langle D_Z h(X, Y), \eta \rangle, \ \forall \eta \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}.$$

Portanto, $D_Z h(X, Y) = 0$ e, em particular, $D_Z \overrightarrow{H}_1 = 0$.

(c) Novamente, considerando o referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_{n_1}, e_{n_1+1}, \ldots, e_{n_1+n_2}\}$, de (4.17) temos

$$\langle \overrightarrow{H_1}, n_2 \overrightarrow{H_2} \rangle = \langle \overrightarrow{H_1}, \sum_{s=n_1+1}^{n_1+n_2} h(e_s, e_s) \rangle = \sum_{s=n_1+1}^{n_1+n_2} \left(\frac{\Delta f}{n_1 f} - c \right) = n_2 \left(\frac{\Delta f}{n_1 f} - c \right),$$

consequentemente

$$\langle \overrightarrow{H_1}, \overrightarrow{H_2} \rangle = \frac{\Delta f}{n_1 f} - c. \tag{4.22}$$

Portanto, $\overrightarrow{H}_1$ e $\overrightarrow{H}_2$ são perpendiculares se, e somente se, f é uma autofunção do operador Laplaciano Δ com autovalor $n_1 c$.

(d) Como f é uma autofunção do operador Laplaciano Δ com autovalor n_1c se, e somente se, $\overrightarrow{H}_1$ e $\overrightarrow{H}_2$ são perpendiculares, segue-se das equações (4.7) e (4.8) que $\overrightarrow{H}_1$ e $\overrightarrow{H}_2$ são perpendiculares quando tivermos

(i) $\overrightarrow{H}_1 = 0$, ou

(ii) $\left(\dfrac{\nabla\rho}{\rho}\right)\Big|_{N_1} = \dfrac{\nabla f}{f}$,

pois, $h^0(X,Y) \in (T_{(p,q)}N_1)^{\perp_{M_1}}$ e $D\rho \in (T_{(p,q)}N_1)^{\perp_{M_1}}$. Assim, do teorema 1.3-(a), (i) ocorre quando, e somente quando, ϕ_1 é mínima.

(e) Segue diretamente de (c) e da definição de função harmônica.

(f) Se ϕ_1 é uma imersão não-mínima (isto é, $\overrightarrow{H}_1 \neq 0$) e se os dois vetores curvatura média parciais $\overrightarrow{H}_1$ e $\overrightarrow{H}_2$ são paralelos, então existe uma função μ em N tal que $\overrightarrow{H}_2 = \mu\overrightarrow{H}_1$. Dessa forma, como $\overrightarrow{H} = \dfrac{n_1}{n}\overrightarrow{H}_1 + \dfrac{n_2}{n}\overrightarrow{H}_2$, então

$$\overrightarrow{H} = \frac{n_1}{n}\overrightarrow{H}_1 + \frac{n_2}{n}\mu\overrightarrow{H}_1 = \left(\frac{n_1 + n_2\mu}{n}\right)\overrightarrow{H}_1.$$

Assim, dado $Z \in \mathfrak{L}(N_2)$, de (4.19), temos

$$A_{\overrightarrow{H}}Z = \left(\frac{n_1 + n_2\mu}{n}\right)A_{\overrightarrow{H}_1}Z = \left(\frac{n_1 + n_2\mu}{n}\right)\left(\frac{\Delta f}{n_1 f} - c\right)Z,$$

portanto, ϕ é N_2-pseudo-umbílica.

Como, por hipótese, ϕ_1 é uma imersão não-mínima, temos que $\overrightarrow{H}_1 \neq 0$ pelo teorema 1.3-(a). Com isso, usando o fato que $\overrightarrow{H}_1$, $\overrightarrow{H}_2$ são paralelos, que $h^0(X,Y)$, $h^0(Z,W)$ são ortogonais e $h^0(Z,W)$, $\dfrac{D\rho}{\rho}$ também são ortogonais para $X, Y \in \mathfrak{L}(N_1)$, $Z, W \in \mathfrak{L}(N_2)$, de (4.7) e (4.8) obtemos

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{H}_2 = \mu\overrightarrow{H}_1 \Leftrightarrow & \frac{1}{n_2}\sum_{s=n_1+1}^{n_1+n_2} h(e_s,e_s) = \mu\frac{1}{n_1}\sum_{r=1}^{n_1} h(e_r,e_r) \Leftrightarrow \\
& \frac{1}{n_2}\sum_{s=n_1+1}^{n_1+n_2}\left[h^0(e_s,e_s) - \frac{D\rho}{\rho}\right] = \mu\frac{1}{n_1}\sum_{r=1}^{n_1} h^0(e_r,e_r) \Rightarrow \\
& \frac{1}{n_2}\sum_{s=n_1+1}^{n_1+n_2} h^0(e_s,e_s) = 0,
\end{aligned}$$

portanto, ϕ_2 é uma imersão mínima.

■

Lema 4.2. *Seja* $\phi : N = N_1 \times_f N_2 \longrightarrow \mathbb{R}^m(c)$ *uma imersão isométrica de um produto torcido em uma forma espacial real* $\mathbb{R}^m(c)$ *de curvatura constante c. Então o quadrado do vetor curvatura média* H^2 *de* ϕ *satisfaz a desigualdade:*

$$\frac{\Delta f}{f} \leqslant \frac{n^2}{4n_2} H^2 + n_1 c, \tag{4.23}$$

onde $n_i = \dim N_i$, $i = 1, 2$, $n = n_1 + n_2$ *e* Δ *é o operador Laplaciano de* N_1.

A igualdade ocorre se, e somente se, $\phi = (\phi_1, \phi_2) : N_1 \times_f N_2 \longrightarrow \mathbb{R}^m(c)$ *é uma imersão totalmente geodésica mista com* $\mathrm{tr}h_1 = \mathrm{tr}h_2$, *onde* $\mathrm{tr}h_1$, $\mathrm{tr}h_2$ *denotam os traços de* h *restritos a* $\mathfrak{L}(N_1)$ *e* $\mathfrak{L}(N_2)$, *respectivamente.*

Demonstração:

Sejam n_1, n_2, $n = n_1 + n_2$ as respectivas dimensões de N_1, N_2, $N_1 \times_f N_2$, e $\{e_1, \ldots, e_{n_1}, e_{n_1+1}, \ldots, e_{n_1+n_2}\}$ um referencial ortonormal local em N, com $e_r \in \mathfrak{L}(N_1)$, $1 \leqslant r \leqslant n_1$, e $e_s \in \mathfrak{L}(N_2)$, $n_1 + 1 \leqslant s \leqslant n_1 + n_2$. Vamos considerar (para efeito de cálculo) a curvatura escalar de N dada por

$$2\tau = 2\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \langle R(e_i, e_j)e_i, e_j \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \langle R(e_i, e_j)e_i, e_j \rangle.$$

Da equação de Gauss, temos

$$\langle R(e_i, e_j)e_i, e_j \rangle = \langle h(e_i, e_i), h(e_j, e_j) \rangle - \langle h(e_i, e_j), h(e_j, e_i) \rangle + c - c\langle e_i, e_j \rangle \langle e_j, e_i \rangle.$$

Daí e de (4.7) e de (4.8), obtemos

$$\begin{aligned} 2\tau &= \sum_{i,j=1}^{n} \left[\langle h(e_i, e_i), h(e_j, e_j) \rangle - \langle h(e_i, e_j), h(e_j, e_i) \rangle + c - c\langle e_i, e_j \rangle \langle e_j, e_i \rangle \right] = \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle h(e_i, e_i), h(e_j, e_j) \rangle - \sum_{i,j=1}^{n} \langle h(e_i, e_j), h(e_j, e_i) \rangle + n^2 c - \sum_{i,j=1}^{n} c\langle e_i, e_j \rangle \langle e_j, e_i \rangle = \\ &= \Big\langle \sum_{i=1}^{n} h(e_i, e_i), \sum_{j=1}^{n} h(e_j, e_j) \Big\rangle - ||h||^2 + n^2 c - nc = \left\langle n\vec{H}, n\vec{H} \right\rangle - ||h||^2 + n^2 c - nc = \\ &= n^2 H^2 - ||h||^2 + n^2 c - nc, \end{aligned} \tag{4.24}$$

onde H^2 é o quadrado do vetor curvatura média de N e $||h||^2$ é o quadrado da norma da segunda forma fundamental h de N em $\mathbb{R}^m(c)$. Ponhamos

$$\delta = 2\tau - n(n-1)c - \frac{1}{2} n^2 H^2. \tag{4.25}$$

Então, (4.24) torna-se

$$n^2H^2 = 2\delta + 2\|h\|^2. \tag{4.26}$$

Se escolhermos um referencial ortonormal local $\{e_{n+1}, \ldots, e_m\}$ do fibrado normal tal que e_{n+1} está na direção do vetor curvatura média, então (4.26) tornar-se

$$\left(\sum_{i=1}^{n} h_{ii}^{n+1}\right)^2 = 2\left[\delta + \sum_{i=1}^{n}(h_{ii}^{n+1})^2 + \sum_{i\leqslant j}(h_{ij}^{n+1})^2 + \sum_{r=n+2}^{m}\sum_{i,j=1}^{n}(h_{ij}^r)^2\right]. \tag{4.27}$$

A equação (4.27) é equivalente a

$$\begin{aligned}(\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3)^2 =& 2\Bigg[\delta + \bar{a}_1^2 + \bar{a}_1^2 + \bar{a}_3^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(h_{ij}^{n+1})^2 + \sum_{r=n+2}^{m}\sum_{i,j=1}^{n}(h_{ij}^r)^2 \\ & - 2\sum_{2\leqslant j<k\leqslant n_1} h_{jj}^{n+1}h_{kk}^{n+1} - 2\sum_{n_1+1\leqslant s<t\leqslant n} h_{ss}^{n+1}h_{tt}^{n+1}\Bigg],\end{aligned} \tag{4.28}$$

onde

$$\bar{a}_1 = h_{n+1}^{11}, \quad \bar{a}_2 = h_{22}^{n+1} + \ldots + h_{n+1}^{n_1n_1}, \quad \bar{a}_3 = h_{n+1}^{n_1+1n_1+1} + \ldots + h_{nn}^{n+1}. \tag{4.29}$$

Aplicando o 4.2 de [2] ou [3] para (4.28) produz

$$\begin{aligned}&\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n_1} h_{jj}^{n+1}h_{kk}^{n+1} + \sum_{n_1+1\leqslant <t\leqslant n} h_{ss}^{n+1}h_{tt}^{n+1} \\ &\qquad \geqslant \frac{1}{2}\delta + \sum_{1\leqslant \alpha<\beta\leqslant n}(h_{\alpha\beta}^{n+1})^2 + \frac{1}{2}\sum_{r=n+2}^{m}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}(h_{\alpha\beta}^r)^2\end{aligned} \tag{4.30}$$

com o a igualdade assegurada se, e somente se nos tivermos

$$h_{11}^{n+1} + \ldots + h_{n_1n_1}^{n+1} = h_{n_1+1n_1+1}^{n+1} + \ldots + h_{nn}^{n+1}. \tag{4.31}$$

Da equação de Gauss e (4.15), nó temos

$$\begin{aligned}\frac{n_2\Delta f}{f} &= \tau - \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n_1} K(e_j\wedge e_k) - \sum_{n_1+1\leqslant s<t\leqslant n} K(e_s\wedge e_t) \\ &= \tau - \frac{1}{2}(n_1(n_1-1))c - \sum_{r=n+1}^{m}\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n_1}(h_{jj}^r h_{kk}^r - (h_{jk}^r)^2) \\ &\quad - \frac{1}{2}(n_2(n_2-1))c - \sum_{r=n+2}^{m}\sum_{n_1+1\leqslant s<t<n}(h_{ss}^r k_{tt}^r - (h_{st}^r)^2).\end{aligned} \tag{4.32}$$

Portanto, por (4.25),(4.30) e (4.32), nós obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{n_2\Delta f}{f} &\leqslant \tau - \frac{1}{2}(n(n-1))c + n_1n_2c - \frac{1}{2}\delta - \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n-1\\ n_1+1\leqslant t\leqslant n}}(h_{jt}^{n+1})^2 \\
&\quad -\frac{1}{2}\sum_{r=n+2}^{m}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}(h_{\alpha\beta}^r)^2 + \sum_{r=n+2}^{m}\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n_1}((h_{jk}^r)^2 - h_{jj}^r h_{kk}^r) \\
&\quad + \sum_{r=n+2}^{m}\sum_{n_1+1\leqslant s<t<n}((h_{st}^r)^2 - h_{ss}^r h_{tt}^r) \\
&= \tau - \frac{1}{2}(n(n-1))c + n_1n_2c - \frac{1}{2}\delta - \sum_{r=n+1}^{m}\sum_{1\leqslant j\leqslant n_1}\sum_{n_1+1\leqslant t\leqslant n}(h_{jt}^r)^2 \\
&\quad -\frac{1}{2}\sum_{r=n+2}^{m}\left(\sum_{1\leqslant j\leqslant n_1}h_{jj}^r\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{r=n+2}^{m}\left(\sum_{n_1+1\leqslant t\leqslant n}h_{tt}^r\right)^2 \\
&\leqslant \tau - \frac{1}{2}(n(n-1))c + n_1n_2c - \frac{1}{2}\delta \\
&= \frac{1}{4}n^2H^2 + n_1n_2c, \qquad (4.33)
\end{aligned}$$

o que prova a desigualdade (4.23). De (4.31) e (4.33) temos que a igualdade de (4.23) ocorre se, e somente se,

$$h_{jt}^r = 0 \quad \text{para} \quad n+1 \leqslant r \leqslant m, \qquad (4.34)$$

e

$$h_{11}^r + \cdots + h_{n_1n_1}^r = h_{n_1+1n_1+1}^r + \cdots + h_{nn}^r = 0, \qquad (4.35)$$

para $1 \leqslant j \leqslant n_1$, $n_1+1 \leqslant t \leqslant n$, $n+2 \leqslant r \leqslant m$. ■ A condição (4.34) implica que a segunda forma fundamental de $N_1 \times_f N_2$ em $\mathbb{R}^m(c)$ é totalmente geodésica mista, isto é, $h(X,Z) = 0$, $\forall X \in \mathfrak{L}(N_1)$ e $\forall Z \in \mathfrak{L}(N_2)$. Portanto, aplicando um resultado de Nölker [8], sabemos que, localmente, existe uma representação produto torcido $M_1 \times_\rho M_2$ de $\mathbb{R}^m(c)$ tal que $\phi : N_1 \times_f N_2 \longrightarrow M_1 \times_\rho M_2 = \mathbb{R}^m(c)$ é uma imersão-produto torcida de $\phi_1 : N_1 \longrightarrow M_1$ e $\phi_2 : N_2 \longrightarrow M_2$, tal que $\phi\big(p,q\big) = \big(\phi_1(p), \phi_2(q)\big)$, $\forall p \in N_1$, $q \in N_2$. Além disso, de (4.31) e (4.35), obtemos

$$\sum_{r=1}^{n_1} h(e_r, e_r) = \sum_{s=n_1+1}^{n_1+n_2} h(e_s, e_s). \qquad (4.36)$$

Portanto, temos $\operatorname{tr} h_1 = \operatorname{tr} h_2$.

Reciprocamente, se $\phi : N_1 \times_f N_2 \longrightarrow M_1 \times_\rho M_2 = \mathbb{R}^m(c)$ é uma imersão totalmente geodésica mista com $\operatorname{tr} h_1 = \operatorname{tr} h_2$, então as desigualdades em (4.30) e (4.33) tornam-se igualdades. Portanto, de (4.33) obtemos a igualdade de (4.23).

Usando os teoremas 1.1, 1.2, 1.3 e 1.4, agora podemos demonstrar o teorema 1.5 que é o refinamento do lema 4.2.

Demonstração: Teorema 1.5

Segue do lema 4.2 que toda imersão isométrica $\phi : N_1 \times_f N_2 \longrightarrow \mathbb{R}^m(c)$ de um produto torcido $N_1 \times_f N_2$ em um espaço forma real $\mathbb{R}^m(c)$ satisfaz a desigualdade (4.23), com igualdade ocorrendo se, e somente se, temos

- ϕ é uma imersão totalmente geodésica mista e
- $n_1 \overrightarrow{H}_1 = n_2 \overrightarrow{H}_2$ ocorrem.

(i) Primeiro, assumiremos que a imersão ϕ satisfaz a igualdade de (4.23), isto é,

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{n^2}{4n_2} H^2 + n_1 c \Leftrightarrow \Delta f = \left(\frac{n^2}{4n_2} H^2 + n_1 c \right) f.$$

Se $\Delta f = (n_1 c) f$, então a igualdade de (4.23) implica que

$$\frac{n^2}{4n_2} H^2 = 0 \Leftrightarrow H^2 = 0,$$

ou seja, ϕ é uma imersão mínima. Logo, a igualdade de (4.23) implica (a).

Agora, se $\Delta f \neq (n_1 c) f$, então ϕ é uma imersão não mínima. Como a imersão ϕ é totalmente geodésica mista – pois satisfaz a igualdade de (4.23) – o Teorema 16 de [8] implica que localmente existe uma representação produto torcido $M_1 \times_\rho M_2$ de $\mathbb{R}^m(c)$ tal que ϕ é uma imersão produto torcido:

$$\phi : N_1 \times_f N_2 \longrightarrow M_1 \times_\rho M_2$$

de $N_1 \times_f N_2$ em $M_1 \times_\rho M_2$. Visto que $\Delta f \neq (n_1 c) f$, segue do teorema 1.4-(a) que $\overrightarrow{H}_1 \neq 0$. Portanto, pelo teorema 1.3-(a), $\phi_1 : N_1 \longrightarrow M_1$ é uma imersão não-mínima.

Continuando, como $n_1 \overrightarrow{H}_1 = n_2 \overrightarrow{H}_2$, isto é, $\overrightarrow{H}_1$ e $\overrightarrow{H}_2$ são paralelos, pelo teorema 1.4-(f), $\phi_2 : N_2 \longrightarrow M_2$ é uma imersão mínima. Portanto, usando (4.8), obtemos que $\overrightarrow{H}_2 = -\dfrac{D\rho}{\rho}$, o que implica que $\overrightarrow{H}_1 = -\left(\dfrac{n_2}{n_1}\right) \dfrac{D\rho}{\rho}$, onde $\overrightarrow{H}_1$ é o vetor curvatura média de $\phi_1 : N_1 \longrightarrow M_1$ pelo teorema 1.3-(a). Assim, a igualdade de (4.23) implica (b).

(ii) Obviamente, quando a função torção é uma autofunção do operador Laplaciano com autovalor n_1c e ϕ é uma imersão mínima, então a igualdade de (4.23) ocorre, pois

$$n_1c = \frac{\Delta f}{f} \leqslant \frac{n^2}{4n_2}\underbrace{H^2}_{=0} + n_1c = n_1c.$$

(iii) Pro último, suponhamos que f não é uma autofunção com autovalor n_1c, isto é, $\Delta f \neq n_1cf$, e $\phi : N_1 \times_f N_2 \longrightarrow M_1 \times_f M_2$ é uma imersão produto torcido não-mínima de $N_1 \times_f N_2$ em uma representação produto torcido $M_1 \times_f M_2$ de $\mathbb{R}^m(c)$ a qual satisfaz as duas condições:

(b-1) ϕ_2 é uma imersão mínima e

(b-2) o vetor curvatura média de $\phi_1 : N_1 \longrightarrow M_1$ é dado por $-\frac{n_1}{n_2}\left(\frac{D\rho}{\rho}\right)$.

Então, pelo teorema 1.1-(a), sabemos que ϕ é totalmente geodésica mista.

Também, sendo $\{e_1, \ldots, e_{n_1}, e_{n_1+1}, \ldots, e_{n_1+n_2}\}$ um referencial local em N, com $e_1, \ldots, e_{n_1}, \in \mathfrak{L}(N_1)$ e $e_{n_1+1}, \ldots, e_{n_1+n_2} \in \mathfrak{L}(N_2)$, de (b-1) e (4.8) temos

$$\overrightarrow{H}_2 = \frac{1}{n_2}\sum_{s=n_1+1}^{n_1+n_2} h(e_s, e_s) = \frac{1}{n_2}\sum_{s=n_1+1}^{n_1+n_2}\left(h^0(e_s, e_s) - \frac{D\rho}{\rho}\right) = -\frac{D\rho}{\rho}. \tag{4.37}$$

Por outro lado, usando (b-2) e o teorema 1.3-(a), também temos,

$$\overrightarrow{H}_1 = -\frac{n_2}{n_1}\left(\frac{D\rho}{\rho}\right). \tag{4.38}$$

Usando (4.37) e (4.38) obtemos

$$n_1\overrightarrow{H}_1 = n_2\overrightarrow{H}_2.$$

Portanto, aplicando o lema 4.2, obtemos a igualdade de (4.23).

■

Exemplo 4.2. *Sejam* (r, θ, z) *as coordenadas cilíndricas do espaço euclidiano* $\mathbb{E}^3$. *Então o tensor métrico* $\widetilde{g}$ *de* $\mathbb{E}^3$ *é dado por*

$$\widetilde{g} = dr^2 + dz^2 + r^2 d\theta^2$$

Seja $\mathbb{E}^2_+ = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ *denotando o semiplano definido por* $\mathbb{R}^2_+ = \{(r, z) : r > 0\}$ *munido da métrica euclidiana padrão* $\widetilde{g}_1 = dr^2 + dz^2$ *e seja* S^1 *o círculo unitário com a métrica* $\widetilde{g}_2 = d\theta^2$. *Então* $E^2_+ \times_r S^1$ *munido da métrica* $\widetilde{g} = \widetilde{g}_1 + r^2\widetilde{g}_2$ *é um produto torcido representado por* E^3.

Seja s uma coordenada natural do intervalo aberto $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. *Considere o produto torcido* $N_1 \times_f N_2 =: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times_{\cos s} S^1$ *e também considere a imersão:*

$$\phi = (\phi_1, \phi_2) : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times_{\cos s} S^1 \longrightarrow E^2_+ \times_r S^1.$$

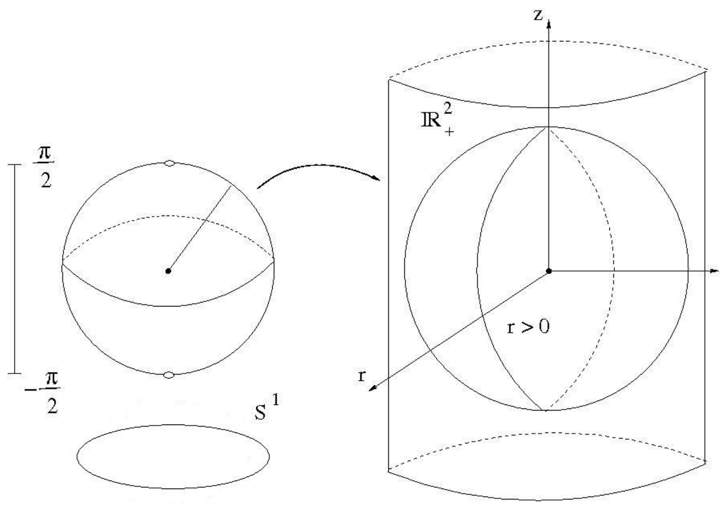
onde ϕ_1 *é definido por* $\phi_1 = (\cos s, \sin s)$ *para* $s \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *e* $\phi_2 : S^1 \longrightarrow S^1$ *é a aplicação identidade.*

Verifica-se que ϕ *é uma imersão produto torcido isométrica cuja imagem é um subconjunto aberto denso da esfera unitária padrão* S^2 *em* $\mathbb{E}^3$. *O quadrado da curvatura média* H^2 *de* ϕ *é igual a 1. Uma vez que a função torção* f *de* $N_1 \times_f N_2$ *é* $\cos s$ *e* s *é o comprimento de arco de* ϕ_1, *o Laplaciano* Δf *de* f *é dado por* $-f''(s)$. *Assim encontramos* $\Delta f = f$ *o que mostra que a igualdade (4.21) ocorre.*

Por outro lado, verifica-se que $\nabla \ln r = r^{-1}\frac{\partial}{\partial r}$. *Daí temos*

$$D \ln \rho = \cos s \frac{\partial}{\partial r} + \sin s \frac{\partial}{\partial z}$$

Da equação acima segue que $\vec{H}_1 = -D \ln \rho$. *Desta forma a condição* $\big($***b-2***$\big)$ *do teorema* 1.5-$\big($b$\big)$ *é satisfeita. Isto nos dá um exemplo do item* $\big($b$\big)$ *do teorema 1.5.*



Apêndice A

Produto Torcido Múltiplo

Sejam B^n e $F_i^{n_i}$ variedades diferenciáveis, $i = 1, \ldots, m$, e considere a variedade produto $M = B \times F_1 \times \cdots \times F_m$, então de forma análoga ao que foi feito anteriormente, temos:

(a) As projeções canônicas

$$\pi : M \longrightarrow B, \;\; \pi(p, q_1, \ldots, q_m) = p,$$

$$\sigma_i : M \longrightarrow F_i, \;\; \sigma_i(p, q_1, \ldots, q_m) = q_i$$

são aplicações suaves, na realidade submersões, $i = 1, \ldots, m$.

(b) Uma aplicação $\phi : P \longrightarrow M$ é suave se, e somente se, as aplicações $\pi \circ \phi$ e $\sigma_i \circ \phi$ são suaves, $i = 1, \ldots, m$.

(c) Para cada $(p, q) = (p, q_1, \ldots, q_m) \in M$ os subconjuntos

$$B \times q = B \times q_1 \times \cdots \times q_m = \{(r, q_1, \ldots, q_m) \in M; r \in B\},$$

$$p \times F_i = p \times q_1 \times \cdots \times F_i \times \cdots \times q_m = \{(p, q_1, \ldots, s_i, \ldots, q_m) \in M; s_i \in F_i\},$$

são subvariedades mergulhadas de M, difeomorfas a B e F_i, respectivamente, com $i = 1, \ldots, m$.

Com efeito, dados $(p, q) = (p, q_1, \ldots, q_m) \in M$, (U, φ) e (V_i, ψ_i) parametrizações em torno de $p \in B$ e $q_i \in F_i$, respectivamente, $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ abertos, tem-se que $\big(U\times V_1\times\cdots\times V_m,\phi\big)$, com $\phi(x,y_1,\ldots,y_m)=\big(\varphi(x),\psi_1(y_1),\ldots,\psi_m(y_m)\big)$, $x\in U$, $y_i\in V_i$, é uma parametrização de M em $(p,q_1,\ldots,q_m)$. Defina

$$\begin{array}{rcl} {}_qJ\ :\ B & \longrightarrow & B\times q\subset M\\ x & \longmapsto & {}_qJ(x)=\quad (x,q_1,\ldots,q_m). \end{array}$$

A aplicação ${}_qJ$ é suave, pois $\phi^{-1}\circ {}_qJ\circ\varphi:U\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^{n+N}$ é suave, com $N=\sum\dim F_i=\sum n_i$ e $(\phi^{-1}\circ {}_qJ\circ\varphi)(U)=U\times\{\psi_1^{-1}(q_1)\}\times\cdots\times\{\psi_m^{-1}(q_m)\}\subset\mathbb{R}^{n+N}$. Assim, a aplicação ${}_qJ$ é injetiva, e como $d(\phi^{-1}\circ {}_qJ\circ\varphi)$ é injetiva, $d({}_qJ)$ é injetiva. Da mesma forma, a aplicação inversa de ${}_qJ$ dada por $({}_qJ)^{-1}:(B\times q)\subset M\longrightarrow B$ é suave. Portanto, ${}_qJ:B\times q\subset M$ é uma subvariedade mergulhada. Da mesma forma, $p\times F_i$ é uma subvariedade mergulhada de M, $i=1,\ldots,m$.

E ainda,

$${}_q\pi:=\pi\big|_{B\times q}:B\times q\longrightarrow B,\quad {}_p\sigma_i:=\sigma_i\big|_{p\times F_i}:p\times F_i\longrightarrow F_i$$

são difeomorfismos.

Por (c), os espaços tangentes

$$T_{(p,q)}B\equiv T_{(p,q_1,\ldots,q_m)}(B\times q)\quad e\quad T_{(p,q)}F_i\equiv T_{(p,q_1,\ldots,q_m)}(p\times F_i)$$

são subespaços do espaço tangente a M em $(p,q_1,\ldots,q_m)$, que denotaremos por $T_{(p,q)}M\equiv T_{(p,q_1,\ldots,q_m)}M$.

Lema A.1. *$T_{(p,q)}M$ é a soma direta dos seus subespaços $T_{(p,q)}B$, $T_{(p,q)}F_1$, $\ldots$, $T_{(p,q)}F_m$, isto é, cada elemento $v\in T_{(p,q)}M$ tem uma única expressão como*

$$v=u+v_1+\cdots+v_m,\ \text{onde}\ u\in T_{(p,q)}B\quad e\quad v_i\in T_{(p,q)}F_i.$$

Demonstração:

Dado $(p,q)=(p,q_1,\ldots,q_m)\in M$, como $T_{(p,q)}B$, $T_{(p,q)}F_i$ são subespaços vetoriais de $T_{(p,q)}M$, $\forall i$ e, $\dim\big(T_{(p,q)}M\big)=\dim(T_{(p,q)}B)+\dim(T_{(p,q)}F_1)+\cdots+\dim(T_{(p,q)}F_m)$, devemos mostrar que $T_{(p,q)}B\cap T_{(p,q)}F_i=\{0\}$, $i=1\ldots,m$, $T_{(p,q)}F_j\cap T_{(p,q)}F_i=\{0\}$, $i,j=1,\ldots,m$, $i\neq j$, $0\in T_{(p,q)}M$. De fato,

$\pi\big|_{p\times F_i}$ é constante $\forall i$, logo $d\pi_{(p,q)}(T_{(p,q)}F_i) = 0$. Mas, $d\pi_{(p,q)}\Big|_{T_{(p,q)}B} = d({}_q\pi)_p$ é um isomorfismo em cada $(p,q) \in B \times q$. Daí, se existe $v \in T_{(p,q)}B \cap T_{(p,q)}F_i, v \neq 0$, por um lado $d\pi(v) = 0$, pois $v \in T_{(p,q)}F_i$ e por outro $d\pi(v) \neq 0$, pois $v \in T_{(p,q)}B$, o que é um absurdo. Logo, $T_{(p,q)}M \cap T_{(p,q)}F_i = \{0\}$. Analogamente, usando-se σ_i, $T_{(p,q)}F_j \cap T_{(p,q)}F_i = \{0\}$, $\forall i \neq j$, $i,j = 1,\ldots,m$. Assim, $T_{(p,q)}B \cap \big(\sum_{i=1}^{m} T_{(p,q)}F_i\big) = \{0\}$ e $T_{(p,q)}F_i \cap \big(T_{(p,q)}B + T_{(p,q)}F_1 + \cdots + T_{(p,q)}F_{i-1} + T_{(p,q)}F_{i+1} + \cdots T_{(p,q)}M\big) = \{0\}$, portanto, $T_{(p,q)}M = T_{(p,q)}B \oplus T_{(p,q)}F_1 \oplus \cdots \oplus T_{(p,q)}F_m$. E ainda, concluímos que $T_{(p,q)}B \subset \ker(d\sigma_i)$, $T_{(p,q)}F_i \subset \ker(d\pi)$, $\forall i$, e $T_{(p,q)}F_j \subset \ker(d\sigma_i)$, $i \neq j$, $i,j = 1,\ldots,m$. Assim, dado $v \in T_{(p,q)}M$, $v = u + v_1 + \cdots + v_m$, com $d\pi(v) = u$ e $d\sigma_i(v) = v_i$. ■

Segue do lema A.1 e das considerações (a) até (e) feitas no começo deste apêndice, que podemos fazer a seguinte identificação: $T_{(p,q)}M = T_pB \oplus T_{q_1}F_1 \oplus \cdots \oplus T_{q_m}F_m$. E ainda, seja $v \in T_{(p,q)}M$, $u = d\pi(v) \in T_pB$ e $v_i = d\sigma_i(v) \in T_{q_i}F_i$. Se $f \in C^\infty\big(M,\mathbb{R}\big)$, então

$$v(f) = u(f \circ {}_q\pi^{-1}) + v_1(f \circ {}_p{\sigma_1}^{-1}) + \cdots + v_m(f \circ {}_p{\sigma_m}^{-1}). \tag{A.1}$$

Para podermos relacionar propriedades geométricas de $M = B \times F_1 \times \ldots \times F_m$ com as correspondentes propriedades das componentes B e F_i, uma noção fundamental é a de levantamento, que definimos a seguir:

Definição A.1. (*Levantamento*) *Sejam* B *e* F_i *variedades,* $i = 1,\ldots,m$*, e considere a variedade produto* $M = B \times F_1 \times \cdots \times F_m$.

(a) *Seja* $f \in C^\infty(B)$. *O levantamento de* f *a* M *é definido por* $\widetilde{f} = f \circ \pi \in C^\infty(M)$.

(b) *Se* $v \in T_pB$ *e* $q_i \in F_i$ *então o levantamento de* v *a* (p,q) *é o único vetor* $\widetilde{v} \in T_{(p,q)}B$ *tal que* $d\pi(\widetilde{v}) = v$. *Como* $\widetilde{v} \in T_{(p,q)}B$*,* $d\sigma_i(\widetilde{v}) = 0$*,* $\forall i$.

(c) *Se* $X \in \mathfrak{X}(B)$*, o levantamento de* X *a* M *é o campo vetorial* $\widetilde{X}$ *cujo valor em cada ponto* (p,q) *é o levantamento de* X_p *a* (p,q). *Assim,* $d\pi(\widetilde{X}_{(p,q)}) = X_p$ *e* $d\sigma_i(\widetilde{X}_{(p,q)}) = 0$*,* $\forall i$. *O sistema de coordenadas produto mostra que* $\widetilde{X}$ *é suave. Portanto, o levantamento de* $X \in \mathfrak{X}(B)$ *a* M *é o único elemento de* $\mathfrak{X}(M)$ *que é* π*-relacionado a* X *e* σ_i*-relacionado ao campo vetorial nulo em* F_i*,* $\forall i$. *E ainda, como* $d\sigma_i\Big|_{T_{(p,q)}B} = 0$*, o levantamento* $\widetilde{X}$ *de* $X \in \mathfrak{X}(B)$ *a* M *é constante em cada subvariedade* $p \times F_i$.

(d) *O conjunto de todos os levantamentos* $\widetilde{X}$ *de* $X \in \mathfrak{X}(B)$ *é denotado por* $\mathfrak{L}(B)$.

(e) *Funções, vetores tangentes, e campos de vetores em* F_i *são levantados para* M *da mesma forma usando-se a projeção* σ_i, $\forall i$. *Dessa forma, o levantamento de* $V \in \mathfrak{X}(F_i)$ *a* M *é o único elemento de* $\mathfrak{X}(M)$ *que é* σ_i*-relacionado a* V, σ_j*-relacionado ao campo vetorial nulo em* F_j, $\forall j \neq i$ *e* π*-relacionado ao campo vetorial nulo em* B. *O conjunto de todos os levantamentos* $\widetilde{V}$ *de* $V \in \mathfrak{X}(F_i)$ *é denotado por* $\mathfrak{L}(F_i)$.

Obs A.1. *Considere a variedade produto* $M = B \times F_1 \times \cdots \times F_m$.

(a) $\mathfrak{L}(B)$ *e* $\mathfrak{L}(F_i)$ *são subespaços de* $\mathfrak{X}(M)$, *mas (exceto nos casos triviais) não são invariantes sob a multiplicação por funções arbitrárias* $f \in C^\infty(M)$. *Contudo, se* $C^\infty(M)_B$ *é o anel das funções* $C^\infty(M)$ *que são levantamento de funções* $C^\infty(B)$, *então* $\mathfrak{L}(B)$ *é* $C^\infty(M)_B$*-módulo.*

(b) *Se* $(U, \varphi) = (U, x_1, \dots, x_d)$ *e* $(V_i, \psi_i) = (V_i, y_1^i, \dots, y_{n_i}^i)$ *são sistemas locais de coordenadas de* B *em* p *e de* F_i *em* q_i, *respectivamente, então temos que* $(U \times V_1 \times \cdots \times V_m, \Phi) = (U \times V_1 \times \cdots \times V_m, z_1, \dots, z_{d+n})$ *é uma parametrização de* M *em* (p, q), $n = \displaystyle\sum_i^m n_i$, $z_r = x_r \circ \pi$, $1 \leqslant r \leqslant d$, $z_{d+j} = y_{N^j}^{P_j}$, $j = N_j - N^j$, $1 \leqslant N^j \leqslant n_{P_j}$, $P_j = \max\{p \in \mathbb{N}; \displaystyle\sum_{i=0}^{P-1} n_i < j\}$, $N_j = \displaystyle\sum_{i=0}^{P_j - 1} n_i$, π *e* σ_i *são as projeções canônicas de* M *sobre* B *e* F_i, *respectivamente. Temos que* $\left\{ \left.\dfrac{\partial}{\partial x_r}\right|_p, r = 1, \dots, d \right\}$ *é uma base para* T_pB, *para cada* $p \in \varphi(U)$ *e* $\left\{ \left.\dfrac{\partial}{\partial y_k^i}\right|_{q_i}, k = 1, \dots, n_i \right\}$ *é uma base para* $T_{q_i}F_i$, *para cada* $q_i \in \psi_i(V_i)$. *Assim,* $\left\{ \left.\dfrac{\partial}{\partial z_s}\right|_{(p,q)}, s = 1, \dots, d+n \right\}$ *é uma base para* $T_{(p,q)}M$ *para cada* $(p, q) \in \varphi(U) \times \psi_1(V_1) \times \cdots \times \psi_m(V_m)$ *e, o campo coordenado* $\dfrac{\partial}{\partial z_s}$ *é dado, na parametrização* Φ, *por* $\dfrac{\partial}{\partial z_r} = \widetilde{\dfrac{\partial}{\partial x_r}}$, $r = 1, \dots, d$, $\left.\dfrac{\partial}{\partial z_{d+j}}\right|_{(p,q)} = \widetilde{\dfrac{\partial}{\partial y_{N^j}^{P_j}}}$, $1 \leqslant P_j \leqslant m$, $1 \leqslant N^j \leqslant n_{P_j}$, *onde* $\widetilde{\dfrac{\partial}{\partial x_r}} \in \mathfrak{L}(M)$ *é o levantamento do campo* $\dfrac{\partial}{\partial x_r}$ *e* $\widetilde{\dfrac{\partial}{\partial y_k^i}} \in \mathfrak{L}(N)$ *é o levantamento de* $\dfrac{\partial}{\partial y_k^i}$.

(c) *Seja a variedade produto* $M = B \times F_1 \times \cdots \times F_m$. *Se* $(U \times V_1 \times \cdots \times V_m, \Phi)$ *é uma parametrização local de* M *em* (p, q) *dada como acima e* $\widetilde{X} \in \mathfrak{L}(B)$, *então nesta* *parametrização* $\widetilde{X}$ *se escreve como*

$$\widetilde{X}(p,q) = \sum_{r=1}^{n} a_r(p,q)\widetilde{\frac{\partial}{\partial x_r}} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{s_i} b_k^i(p,q)\widetilde{\frac{\partial}{\partial y_k^i}}$$

e $X \in \mathfrak{X}(M)$ *é o campo em* M *do qual* $\widetilde{X}$ *é o levantamento, então no sistema coordenado* (U,φ) *tem-se*

$$X(p) = \sum_{r=1}^{n} A_r(p)\frac{\partial}{\partial x_r} \quad e \quad d\pi\left(\widetilde{\frac{\partial}{\partial x_r}}\bigg|_{(p,q)}\right) = \frac{\partial}{\partial x_r}\bigg|_p .$$

Assim,

$$\begin{aligned} d\pi(\widetilde{X}) &= \sum_{r=1}^{n} a_r d\pi\left(\widetilde{\frac{\partial}{\partial x_r}}\right) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{s_i} b_k^i d\pi\left(\widetilde{\frac{\partial}{\partial y_k^i}}\right) = \sum_{r=1}^{n} a_r(p,q)\frac{\partial}{\partial x_r} = \\ &= X = \sum_{r=1}^{n} A_r(p)\frac{\partial}{\partial x_r}, \end{aligned}$$

ou seja, $a_r(p,q) = A_r(p) = (A_r \circ \pi)(p,q)$ *e como* $\widetilde{X} \overset{\sigma_j}{\sim} 0$, $1 \leqslant j \leqslant m$, *segue que*

$$\begin{aligned} d\sigma_j(\widetilde{X}) = &\sum_{r=1}^{n} a_r d\sigma_j\left(\widetilde{\frac{\partial}{\partial x_r}}\right) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{s_i} b_k^i d\sigma_j\left(\widetilde{\frac{\partial}{\partial y_k^i}}\right) = \sum_{k=1}^{s_j} b_k^j(p,q)\frac{\partial}{\partial y_k^j} = 0 \Leftrightarrow \\ &b_k^j(p,q) \equiv 0, \ \forall j, \ \forall k, \end{aligned}$$

pois a família $\left\{d\sigma_j\left(\widetilde{\frac{\partial}{\partial y_k^j}}\right) = \frac{\partial}{\partial y_k^j}, k = 1,\dots,s_j\right\}$ *é uma base para* $T_{q_j}F_j$ *para cada* $q_j \in V_j$ *na parametrização* (V_j,ψ_j). *Portanto,* $\widetilde{X} \in \mathfrak{L}(B)$ *é suave, isto é,* $\widetilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$.

Corolário A.1. *Seja a variedade produto* $M = B \times F_1 \times \cdots \times F_m$. *Se* $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y} \in \mathfrak{L}(B)$ *e* $\widetilde{V} \in \mathfrak{L}(F_i)$, $\widetilde{W} \in \mathfrak{L}(F_j)$, *então*

(a) $[\widetilde{X},\widetilde{Y}] = [X,Y]^{\sim} \in \mathfrak{L}(B)$, *e similarmente para* $\mathfrak{L}(F_i)$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

(b) $[\widetilde{X},\widetilde{V}] = 0$, *onde* $0 \in \mathfrak{X}(M)$ *é o campo nulo.*

(c) $[\widetilde{V},\widetilde{W}] = 0$, *se* $i \neq j$, *onde* $0 \in \mathfrak{X}(M)$ *é o campo nulo.*

Demonstração:

(a) Devemos mostrar que $[\widetilde{X},\widetilde{Y}] \overset{\pi}{\sim} [X,Y]$ e $[\widetilde{X},\widetilde{Y}] \overset{\sigma_i}{\sim} [0,0]$, onde $0 \in \mathfrak{X}(F_i)$ é o campo vetorial nulo em F_i, $1 \leqslant i \leqslant m$. De fato,

Como $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y} \in \mathfrak{L}(B)$, então existem X, $Y \in \mathfrak{X}(B)$ tais que $\widetilde{X} \overset{\pi}{\sim} X$, $\widetilde{X} \overset{\sigma_i}{\sim} 0$, $\widetilde{Y} \overset{\pi}{\sim} Y$ e $\widetilde{Y} \overset{\sigma_i}{\sim} 0$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Daí, pelo lema (2.3), $[\widetilde{X},\widetilde{Y}] \overset{\pi}{\sim} [X,Y]$ e $[\widetilde{X},\widetilde{Y}] \overset{\sigma_i}{\sim} 0$. Portanto, $d\pi([\widetilde{X},\widetilde{Y}]) = [X,Y]$ e $d\sigma_i([\widetilde{X},\widetilde{Y}]) = [0,0]$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

(b) De modo análogo, como $\widetilde{X} \in \mathfrak{L}(B)$ e $\widetilde{V} \in \mathfrak{L}(F_i)$, então existem $X \in \mathfrak{X}(B)$ e $V \in \mathfrak{X}(F_i)$ tais que $\widetilde{X} \overset{\pi}{\sim} X$, $\widetilde{X} \overset{\sigma_i}{\sim} 0$ e $\widetilde{V} \overset{\pi}{\sim} 0$, $\widetilde{V} \overset{\sigma_i}{\sim} V$, $1 \leqslant i \leqslant m$, onde 0 é o campo nulo em $\mathfrak{X}(B)$ e $\mathfrak{X}(F_i)$. Pelo lema 2.3, $[\widetilde{X}, \widetilde{V}] \overset{\pi}{\sim} [X, 0] = 0$, $[\widetilde{X}, \widetilde{V}] \overset{\sigma_i}{\sim} [0, V] = 0$. Assim, o campo $[\widetilde{X}, \widetilde{V}] \in \mathfrak{X}(M)$ em cada ponto $(p, q) \in (M)$ tem como componentes o vetor nulo (ou ainda, $[\widetilde{X}, \widetilde{V}]$ é o levantamento de $0 \in \mathfrak{X}(B)$ e também o levantamento de $0 \in \mathfrak{X}(F_i)$, $1 \leqslant i \leqslant m$), portanto, pelo lema A.1 $[\widetilde{X}, \widetilde{V}] = 0 \in \mathfrak{X}(M)$.

(c) Se $i \neq j$, como $\widetilde{V} \in \mathfrak{L}(F_i)$ e $\widetilde{W} \in \mathfrak{L}(F_j)$, então existem $V \in \mathfrak{X}(F_i)$ e $W \in \mathfrak{X}(F_j)$ tais que $\widetilde{V} \overset{\sigma_i}{\sim} V$, $\widetilde{V} \overset{\sigma_j}{\sim} 0$, $\widetilde{V} \overset{\pi}{\sim} 0$ e $\widetilde{W} \overset{\sigma_i}{\sim} 0$, $\widetilde{W} \overset{\sigma_j}{\sim} W$, $\widetilde{W} \overset{\pi}{\sim} 0$, onde 0 é o campo nulo em $\mathfrak{X}(F_i)$, $\mathfrak{X}(F_j)$, $\mathfrak{X}(B)$. Pelo lema 2.3, $[\widetilde{V}, \widetilde{W}] \overset{\sigma_i}{\sim} [V, 0] = 0$, $[\widetilde{V}, \widetilde{W}] \overset{\sigma_j}{\sim} [0, V] = 0$ e $[\widetilde{V}, \widetilde{W}] \overset{\pi}{\sim} [0, 0] = 0$. Assim, o campo $[\widetilde{V}, \widetilde{W}] \in \mathfrak{X}(M)$ em cada ponto $(p, q) \in (M)$ tem como componentes o vetor nulo, portanto, pelo lema A.1 $[\widetilde{V}, \widetilde{W}] = 0 \in \mathfrak{X}(M)$.

■

Exemplo A.1. (*Métrica Riemanniana Produto*) *Sejam* $(B, g_B), (F_i, g_{F_i})$ *variedades Riemannianas com* $g_B = \langle \cdot, \cdot \rangle^B$ *e* $g_{F_i} = \langle \cdot, \cdot \rangle^{F_i}$, $1 \leqslant i \leqslant m$. *Considere a variedade produto* $M = B \times F_1 \times \cdots \times F_m$ *e sejam* $\pi : M \to B$ *e* $\sigma_i : M \to F_i$ *as projeções canônicas de* M *sobre* B *e* F_i, *respectivamente. A métrica Remanniana produto* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *em* M *é dada por*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \pi^* \langle \cdot, \cdot \rangle^B + \sum_{i=1}^{m} \sigma_i^* \langle \cdot, \cdot \rangle^{F_i}$$

e M *é chamada de variedade Riemanniana produto entre* $B, F_1, \ldots, F_m$.

Obs A.2. *Na variedade Riemanniana produto* $M = B \times F_1 \times \cdots \times F_m$, *dados* $\widetilde{X} \in \mathfrak{L}(B)$, $\widetilde{V} \in \mathfrak{L}(F_i)$ *e* $\widetilde{W} \in \mathfrak{L}(F_j)$, $i \neq j$, $\widetilde{X}$, $\widetilde{V}$ *e* $\widetilde{W}$ *são campos dois a dois ortogonais em* M, *ou seja,* $\langle \widetilde{X}, \widetilde{V} \rangle : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *é a função identicamente nula na métrica produto assim como* $\langle \widetilde{X}, \widetilde{W} \rangle : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $\langle \widetilde{V}, \widetilde{W} \rangle : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *também o são.*

Denote por ${}^B\nabla$, ${}^{F_i}\nabla$, ∇ as conexões Riemannianas de B, F_i e M respectivamente.

Definição A.2. (*Produto Torcido Múltiplo*) *Sejam* (B, g_B), (F_i, g_{F_i}) *variedades Riemannianas,* $b_i : B \longrightarrow (0, \infty)$ *funções suaves,* $1 \leqslant i \leqslant m$. *O* ***produto torcido***

múltiplo $M = B \times_{b_1} F_1 \times \cdots \times_{b_m} F_m$ *é a variedade produto* $M = B \times_{b_1} F_1 \times \cdots \times_{b_m} F_m$ *munida com a métrica*

$$g = \pi^*(g_B) + (b_1 \circ \pi)^2 \sigma_1^*(g_{F_1}) + \cdots + (b_m \circ \pi)^2 \sigma_m^*(g_{F_m}).$$

Cada função $b_i : B \longrightarrow (0, \infty)$ é chamada uma função torção e cada variedade (F_i, g_{F_i}) é chamada uma variedade fibra, $\forall\ i = 1, \ldots, m$. A variedade (B, g_B) é a variedade base do produto torcido múltiplo:

- Se $m = 1$, então obtemos um produto torcido (simples).
- Se $b_i \equiv 1$, $1 \leqslant i \leqslant m$, então temos uma variedade Riemanniana produto.
- Se $b_i = b_j$, $1 \leqslant i, j \leqslant m$, então temos um produto torcido (simples).

Lema A.2. *Seja* $M = B \times_{b_1} F_1 \times \cdots \times_{b_m} F_m$ *um produto torcido múltiplo.* g *é de fato uma métrica Riemanniana em* M*, chamada de* ***métrica torcida*** *ou* ***métrica warped*** *de* M*.*

Demonstração: Análoga a do lema 3.1. ∎

Nosso objetivo é expressar a geometria de M em termos das *funções torção* b_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, e das geometrias de $B, F_1, \ldots, F_m$.

Exemplo A.2 (Teorema 7 [2]). . *Seja* $M = I \times_{f_1} F_1 \times \cdots \times_{f_m} F_m$ *um produto torcido múltiplo, onde* $I \subset \mathbb{R}$ *é um intervalo aberto. Então,* M *tem curvatura seccional constante* K *se, e somente se,* $m \leqslant 2$ *e, além disso, uma das seguintes condições ocorre:*

(i) *Se* $K = 0$*, então* $M = I \times_{f_1} F_1$ *ou* $M = I \times_{f_1} F_1 \times_{f_2} F_2$*, com funções de torção dadas por* $f_i(t) = a_i t + b_i$*,* $i = 1, 2$*. Além disso, as fibras* (F_i, g_i) *tem curvatura seccional constante, a saber* $K^{F_i} = a_i^2$*, desde que* $\dim F_i \geqslant 2$ $\big(i = 1, 2\big)$*, e as funções de torção satisfazem a condição de compatibilidade* $a_1 a_2 = 0$ *no caso de duas fibras.*

(ii) *Se* $K = c^2$*, então* $M = I \times_{f_1} F_1$ *ou* $M = I \times_{f_1} F_1 \times_{f_2} F_2$*, com funções de torção dadas por* $f_i(t) = a_i \operatorname{sen}(ct) + b_i \cos(ct)$*,* $i = 1, 2$*. Além disso, as fibras* (F_i, g_i) *tem curvatura seccional constante, a saber* $K^{F_i} = c^2 (a_i^2 + b_i^2)$*, desde que* $\dim F_i \geqslant 2$ $\big(i = 1, 2\big)$*, e as funções de torção satisfazem a condição de compatibilidade* $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$ *no caso de duas fibras.*

(iii) *Se* $K = -c^2$, *então* $M = I \times_{f_1} F_1$ *ou* $M = I \times_{f_1} F_1 \times_{f_2} F_2$, *com funções de torção dadas por* $f_i(t) = a_i \operatorname{senh}(ct) + b_i \cosh(ct)$, $i = 1, 2$. *Além disso, as fibras* (F_i, g_i) *tem curvatura seccional constante, a saber* $K^{F_i} = c^2\,(a_i^2 - b_i^2)$, *desde que* $\dim F_i \geqslant 2$ $\big(i = 1, 2\big)$, *e as funções de torção satisfazem a condição de compatibilidade* $a_1 a_2 - b_1 b_2 = 0$ *no caso de duas fibras.*

Proposição A.1. *No produto torcido múltiplo* $M = B \times_{b_1} F_1 \times \cdots \times_{b_m} F_m$, *as* ***fibras*** $p \times F_i$ *e as* ***folhas*** $B \times q$, *com a métrica induzida de* g, *são subvariedades Riemannianas de* M, *e a métrica torcida em* M *implica nas seguintes condições geométricas:*

(a) *Para cada* $(p, q) \in M$, *a aplicação* ${}_q\pi := \pi\big|_{B \times q}$ *é uma isometria sobre* B.

(b) *Para cada* $(p, q) \in M$, *a aplicação* ${}_p\sigma_i := \sigma\big|_{p \times F_i}$ *é uma homotetia positiva sobre* F_i, *com fator escalar* $1/b_i(p)$.

(c) *Para cada* $(p, q) \in M$, *a folha* $B \times q$, *a fibra* $p \times F_i$ *e a fibra* $p \times F_j$ *são dois a dois ortogonais em* (p, q), *com* $i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant m$.

Demonstração: De fato,

(a) Para cada $(p, q) \in M$, a aplicação ${}_q\pi := \pi\big|_{B\times q} : B \times q \longrightarrow B$ é um difeomorfismo. Assim, para cada $(p, q) \in B \times q$ e para todos $u, v \in T_{(p,q)}B \subset T_{(p,q)}M$ tem-se

$$\begin{aligned}
\langle v, u\rangle_{(p,q)} &= \langle d({}_q\pi)_p(u), d({}_q\pi)_p(v)\rangle_p^B + \\
&+ \sum_{i=1}^{m} (b_i \circ \pi)^2(p, q)\, \underbrace{\langle d\sigma_{i(p,q)}(u), d\sigma_{i(p,q)}(v)\rangle_{q_i}^{F_i}}_{0} = \\
&= \langle d({}_q\pi)_p(u), d({}_q\pi)_p(v)\rangle_p^B,
\end{aligned}$$

pois, $d({}_q\pi)_p = d\pi_{(p,q)}\Big|_{T_{(p,q)}B}$ e $T_{(p,q)}B \subset \big(d\sigma_{i(p,q)}\big)^{-1}\big(\{0\}\big)$.

(b) Para cada $(p, q) \in M$, a aplicação ${}_p\sigma_i := \sigma_i\big|_{p\times F_i} : p \times F_i \longrightarrow F$ é um difeomorfismo. Assim, para cada $(p, q) \in p \times F_i$ e para todos $w, z \in T_{(p,q)}F_i \subset T_{(p,q)}M$ tem-se

$$\begin{aligned}
\langle w, z\rangle_{(p,q)} &= \underbrace{\langle d\pi_{(p,q)}(w), d\pi_{(p,q)}(z)\rangle_p^B}_{0} + \\
&+ \sum_{j=1}^{m} (b_j \circ \pi)^2(p, q)\langle d({}_p\sigma_j)_{q_j}(w), d({}_p\sigma_j)_{q_j}(z)\rangle_{q_j}^{F_j} = \\
&= (b_i \circ \pi)^2(p, q)\langle d({}_p\sigma_i)_{q_i}(w), d({}_p\sigma_i)_{q_i}(z)\rangle_{q_i}^{F_i},
\end{aligned}$$

pois, $T_{(p,q)}F_i = \left(d\pi_{(p,q)}\right)^{-1}(\{0\})$, $T_{(p,q)}F_i = \left(d\sigma_{j\,(p,q)}\right)^{-1}(\{0\})$, $i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant m$, e $d({}_p\sigma_i)_{q_i} = d\sigma_{i\,(p,q)}\Big|_{T_{(p,q)}F_i}$.

(c) Segue diretamente da definição de métrica torcida.

∎

Vetores tangentes às folhas são denominados *horizontais*; vetores tangentes as fibras são denominados *verticais*. Assim, se $v \in T_{(p,q)}F_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, v é denominado i-vertical. Denotaremos por $\mathcal{H}$ a projeção ortogonal de $T_{(p,q)}M$ sobre seu subespaço horizontal $T_{(p,q)}B \equiv T_{(p,q)}(B \times q)$, e por ${}^i\mathcal{V}$ a projeção ortogonal de $T_{(p,q)}M$ sobre seu subespaço vertical $T_{(p,q)}F_i = T_{(p,q)}(p \times F_i)$. Dessa forma, dado $v \in T_{(p,q)}M$, com $v = u + v_1 + \cdots v_m$, $u \in T_{(p,q)}B$, $v_i \in T_{(p,q)}F_i$, então $\mathcal{H}(v) = u$ e ${}^i\mathcal{V}(v) = v_i$. E ainda, dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\mathcal{H}(X)$ e ${}^i\mathcal{V}(X) \in \mathfrak{X}(M)$.

Observaremos que para campos vetoriais verticais $V, W \in \mathfrak{L}(F_i)$ em M, $1 \leqslant i \leqslant m$, a fórmula $h(V, W) = \mathcal{H}(\nabla_V W)$ dá o tensor segunda forma fundamental de todas as fibras.

As relações geométricas (métrica, conexão e curvatura) entre um produto torcido múltiplo e a sua base B é quase tão simples como no caso espacial da variedade Riemanniana produto; entretanto, as relações geométricas entre o produto torcido múltiplo e as sua fibras F_i frequentemente envolvem as funções torção b_i.

Proposição A.2. *Sejam* $M = B \times_{b_1} F_1 \times \cdots \times_{b_m} F_m$ *um produto torcido múltiplo,* $h \in C^\infty(B)$ *e* $\psi_i \in C^\infty(F_i)$*, para qualquer* $i = 1, \ldots, m$*. Então,*

(a) $\nabla\widetilde{h} = \widetilde{{}^B\nabla h}$*, onde* $\widetilde{{}^B\nabla h}$ *é o levantamento de* ${}^B\nabla h \in \mathfrak{X}(B)$ *a* M *e* $\widetilde{h} = h \circ \pi$

(b) $\nabla\widetilde{\psi}_i = \dfrac{\widetilde{{}^{F_i}\nabla\psi_i}}{(\widetilde{b}_i)^2}$*, onde* $\widetilde{{}^{F_i}\nabla\psi_i}$ *é o levantamento de* ${}^{F_i}\nabla\psi_i \in \mathfrak{X}(F_i)$ *a* M*,* $\widetilde{\psi}_i = \psi_i \circ \sigma_i$ *e* $\widetilde{b}_i = b_i \circ \pi$.

Demonstração:

(a) Devemos mostrar que $\nabla\widetilde{h}$ é σ_i-relacionado com o campo nulo em F_i, $1 \leqslant i \leqslant m$ e $\nabla\widetilde{h}$ é π-relacionado com ${}^B\nabla h$ em B. De fato, em cada $(p, q) \in M$, dado um vetor

$v \in T_{(p,q)}F_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, então

$$\begin{aligned}\langle \nabla \widetilde{h}, v\rangle &= v(\widetilde{h}) = v(h \circ \pi) = \big(d\pi(v)\big)(h) = 0 = \\ &= \langle d\pi(\nabla \widetilde{h}), d\pi(v)\rangle^B + \sum_{j=1}^{m}(b_j \circ \pi)^2 \langle d\sigma_j(\nabla \widetilde{h}), d\sigma_j(v)\rangle^{F_j} = \\ &= (b_i \circ \pi)^2 \langle d\sigma_i(\nabla \widetilde{h}), d\sigma_i(v)\rangle^{F_i}\end{aligned}$$

pois $d\pi(v) = 0$. Logo, $\nabla \widetilde{h}$ é σ_i-relacionado com o campo nulo em F_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, isto é, $\nabla \widetilde{h}$ é horizontal. Agora, dado um vetor $u \in T_{(p,q)}B$, então

$$\begin{aligned}\langle \nabla \widetilde{h}, u\rangle &= \langle d\pi(\nabla \widetilde{h}), d\pi(u)\rangle^B + \sum_{j=1}^{m}(b_j \circ \pi)^2 \langle d\sigma_j(\nabla \widetilde{h}), d\sigma_j(u)\rangle^{F_j} = u(h \circ \pi) = \\ &= \big(d\pi(u)(h)\big) \circ \pi = \langle {}^B\nabla h, d\pi(u)\rangle^B \circ \pi,\end{aligned}$$

pois $d\sigma_j(u) = 0$, $1 \leqslant j \leqslant m$, e, como $d({}_q\pi)_p : T_{(p,q)}B \longrightarrow T_pB$ é um isomorfismo $\forall (p,q) \in M$, segue que $d\pi(\nabla \widetilde{h}) = {}^B\nabla h$ para todo $(p,q) \in M$, ou seja, $\nabla \widetilde{h}$ é π-relacionado com ${}^B\nabla h$.

(b) Primeiro, vamos mostrar que $\nabla \widetilde{\psi}_i$ é i-vertical. De fato, em cada $(p,q) \in M$, dado um vetor horizontal u, isto é, $u \in T_{(p,q)}B$, então

$$\begin{aligned}\langle \nabla \widetilde{\psi}_i, u\rangle &= u(\widetilde{\psi}_i) = u(\psi_i \circ \sigma_i) = \big(d\sigma_i(u)\big)(\psi_i) = 0 = \\ &= \langle d\pi(\nabla \widetilde{\psi}_i), d\pi(u)\rangle^B + \sum_{j=1}^{m} \big(b_j \circ \pi\big)^2 \langle d\sigma_j(\nabla \widetilde{\psi}_j), d\sigma_j(u)\rangle^{F_j} \\ &= \langle d\pi(\nabla \widetilde{\psi}_i), d\pi(u)\rangle^B,\end{aligned}$$

pois $d\sigma_j(u) = 0$, para $j = 1, \ldots, m$, em particular para $j = i$. Dessa forma, $\nabla \widetilde{\psi}_i$ é π-relacionado com o campo nulo em B. Agora, dado um vetor l-vertical v, isto é, $v \in T_{(p,q)}F_l$, $l \neq i$, então

$$\begin{aligned}\langle \nabla \widetilde{\psi}_i, v\rangle &= v(\widetilde{\psi}_i) = v(\psi_i \circ \sigma_i) = \big(d\sigma_i(v)\big)(\psi_i) = 0 = \\ &= \langle d\pi(\nabla \widetilde{\psi}_i), d\pi(v)\rangle^B + \sum_{j=1}^{m} \big(b_j \circ \pi\big)^2 \langle d\sigma_j(\nabla \widetilde{\psi}_j), d\sigma_j(v)\rangle^{F_j} = \\ &= \big(b_l \circ \pi\big)^2 \langle d\sigma_l(\nabla \widetilde{\psi}_l), d\sigma_l(v)\rangle^{F},\end{aligned}$$

pois $d\pi(v) = 0$, $d\sigma_j(v) = 0$, para $j = 1, \ldots, m$ e $j \neq l$. Assim, $\nabla \widetilde{\psi}_i$ é σ_l-relacionado com o campo nulo em F_l, para $l = 1, \ldots, m$ e $l \neq i$. Por último, dado um vetor

i-vertical w, isto é, $w \in T_{(p,q)}F_i$, então

$$\begin{aligned}\langle \nabla\widetilde{\psi}_i, w\rangle &= \langle d\pi(\nabla\widetilde{\psi}_i), d\pi(w)\rangle^B + \sum_{j=1}^{m}\big(b_j\circ\pi\big)^2\langle d\sigma_j(\nabla\widetilde{\psi}_j), d\sigma_j(w)\rangle^{F_j} =\\ &= \big(b_i\circ\pi\big)^2\langle d\sigma_i(\nabla\widetilde{\psi}_i), d\sigma_i(w)\rangle^{F_i} = w(\widetilde{\psi}_i) = w(\psi_i\circ\sigma_i) =\\ &= \big(d\sigma_i(w)(\psi_i)\big)\circ\sigma_i = \langle {}^{F_i}\nabla\psi_i, d\sigma_i(w)\rangle^{F_i}\circ\sigma_i,\end{aligned}$$

pois $d\pi(w)=0$, $d\sigma_j(w)=0$, $1\leqslant j\leqslant m$, $j\neq i$, e como $d({}_p\sigma_i)_q : T_{(p,q)}F_i \longrightarrow T_qF$ é isomorfismo $\forall (p,q)\in M$, então $d\sigma_i(\nabla\widetilde{\psi}_i) = \dfrac{{}^{F_i}\nabla\psi_i}{(\widetilde{b}_i)^2}$ para todo $(p,q)\in M$, isto é, $\nabla\widetilde{\psi} = \dfrac{\widetilde{{}^{F_i}\nabla\psi_i}}{(\widetilde{b}_i)^2}$.

■

Proposição A.3. *Seja* $M = B\times_{b_1}F_1\times\cdots\times_{b_m}F_m$ *um produto torcido múltiplo com métrica torcida* g*. Se* $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}\in\mathfrak{L}(B)$ *e* $\widetilde{V}\in\mathfrak{L}(F_i)$, $\widetilde{W}\in\mathfrak{L}(F_j)$, *então*

(a) $\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}$ *é o levantamento de* ${}^B\nabla_XY$ *em* B.

(b) $\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{V} = \nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{X} = \left(\dfrac{\widetilde{X}(\widetilde{b}_i)}{\widetilde{b}_i}\right)\widetilde{V}$.

(c) ${}^i\mathcal{V}\big(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}\big)\in\mathfrak{L}(F_i)$ *é o levantamento de* ${}^{F_i}\nabla_VW$ *em* F_i*, se* $i=j$.

(d) $\mathcal{H}\big(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}\big) = h(\widetilde{V},\widetilde{W}) = -\left(\dfrac{\langle\widetilde{V},\widetilde{W}\rangle}{\widetilde{b}_i}\right)\nabla\widetilde{b}_i$*, se* $i=j$.

(e) $\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}=0$*, se* $i\neq j$.

Na notação acima, $\widetilde{b}_i = b_i\circ\pi$.

Demonstração:

(a) Devemos mostrar que $\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}$ é horizontal e π-relacionado com ${}^B\nabla_XY$ em B. De fato, dado $\widetilde{V}$ um campo vetorial i-vertical, isto é, $\widetilde{V}\in\mathfrak{L}(F_i)$, $1\leqslant i\leqslant m$, então pela fórmula de Koszul

$$\begin{aligned}2\langle\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y},\widetilde{V}\rangle &= \widetilde{Y}\underbrace{\langle\widetilde{X},\widetilde{V}\rangle}_{=\,0}+\widetilde{X}\underbrace{\langle\widetilde{V},\widetilde{Y}\rangle}_{=\,0}-\widetilde{V}\langle\widetilde{Y},\widetilde{X}\rangle-\langle\underbrace{[\widetilde{Y},\widetilde{V}]}_{=\,0},\widetilde{X}\rangle-\langle\underbrace{[\widetilde{X},\widetilde{V}]}_{=\,0},\widetilde{Y}\rangle-\langle[\widetilde{Y},\widetilde{X}],\widetilde{V}\rangle =\\ &= -\widetilde{V}\langle\widetilde{Y},\widetilde{X}\rangle-\langle[\widetilde{Y},\widetilde{X}],\widetilde{V}\rangle.\end{aligned}$$

Como $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y} \in \mathfrak{L}(B)$, temos que $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] \in \mathfrak{L}(B)$ é o levantamento de $[X, Y]$ em B. Logo, $\langle [\widetilde{Y}, \widetilde{X}], \widetilde{V}\rangle = 0$. Agora, pela métrica torcida, em cada $x = (p, q) \in M$ temos

$$\langle \widetilde{Y}, \widetilde{X}\rangle(p,q) = \langle d\pi_x(\widetilde{Y}), d\pi_x(\widetilde{X})\rangle^B + \sum_{j=1}^{m} \Big((b_j \circ \pi)^2(x)\langle \underbrace{(d\sigma_j)_x(\widetilde{Y})}_{=0}, \underbrace{(d\sigma_j)_x(\widetilde{X})}_{=0}\rangle^{F_j}\Big) =$$

$$= \langle (Y\circ\pi)(p,q), (X\circ\pi)(p,q)\rangle_p^B = \big(\langle X, Y\rangle^B \circ \pi\big)(p,q),$$

daí,

$$\widetilde{V}\langle \widetilde{Y}, \widetilde{X}\rangle = \widetilde{V}\big(\langle Y, X\rangle^B \circ \pi\big) = d\pi(\widetilde{V})\big(\langle Y, X\rangle^B\big) = 0.$$

Assim, $\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}$ é horizontal. Dado $\widetilde{Z} \in \mathfrak{L}(B)$, temos que

$$\widetilde{Y}\langle \widetilde{X}, \widetilde{Z}\rangle = \widetilde{Y}\big(\langle X, Z\rangle^B \circ \pi\big) = \big(d\pi(\widetilde{Y})\langle X, Z\rangle^B\big)\circ\pi = \big(Y\langle X, Z\rangle^B\big)\circ\pi$$

logo, obtemos que

$$2\langle d\pi(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}), d\pi(\widetilde{Z})\rangle^B = 2\langle \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}, \widetilde{Z}\rangle =$$
$$= \widetilde{Y}\langle \widetilde{X}, \widetilde{Z}\rangle + \widetilde{X}\langle \widetilde{Z}, \widetilde{Y}\rangle - \widetilde{Z}\langle \widetilde{Y}, \widetilde{X}\rangle - \langle [\widetilde{Y}, \widetilde{Z}], \widetilde{X}\rangle - \langle [\widetilde{X}, \widetilde{Z}], \widetilde{Y}\rangle - \langle [\widetilde{Y}, \widetilde{X}], \widetilde{Z}\rangle =$$
$$= \big(Y\langle X, Z\rangle^B + X\langle Z, Y\rangle^B - Z\langle X, Y\rangle^B - \langle [Y, Z], X\rangle^B - \langle [X, Z], Y\rangle^B - \langle [Y, X], Z\rangle^B\big)\circ\pi =$$
$$= 2\langle {}^B\nabla_X Y, Z\rangle^B \circ \pi, \forall \widetilde{Z} \in \mathfrak{L}(B).$$

Portanto, segue o resultado. E ainda, como $\pi\big|_{B\times q}$ é uma isometria, em cada folha $B \times q$, ∇ é a conexão Riemanniana em cada folha.

(b) Para cada i fixo, $i = 1, \ldots, m$, $0 = [\widetilde{X}, \widetilde{V}] = \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{V} - \nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{X}$, logo $\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{V} = \nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{X}$. Esses campos $\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{V}$ e $\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{X}$ são i-verticais, pois por (a), dado $\widetilde{Y} \in \mathfrak{L}(B)$ temos que

$$0 = \widetilde{X}\langle \widetilde{V}, \widetilde{Y}\rangle = \langle \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{V}, \widetilde{Y}\rangle + \langle \widetilde{V}, \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\rangle \Rightarrow \langle \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{V}, \widetilde{Y}\rangle = -\langle \widetilde{V}, \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\rangle = 0,$$

e dado $\widetilde{W} \in \mathfrak{L}(F_j)$, $j \neq i$, obtemos que

$$2\langle \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{V}, \widetilde{W}\rangle = \widetilde{V}\langle \widetilde{X}, \widetilde{W}\rangle + \widetilde{X}\langle \widetilde{V}, \widetilde{W}\rangle - \widetilde{W}\langle \widetilde{V}, \widetilde{X}\rangle - \langle [\widetilde{V}, \widetilde{W}], \widetilde{X}\rangle - \langle [\widetilde{X}, \widetilde{W}], \widetilde{V}\rangle -$$
$$- \langle [\widetilde{V}, \widetilde{X}], \widetilde{W}\rangle = 0.$$

Agora, dado $\widetilde{U} \in \mathfrak{L}(F_i)$, pela fórmula de Koszul

$$2\langle \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{V}, \widetilde{U}\rangle = \widetilde{V}\underbrace{\langle \widetilde{X}, \widetilde{U}\rangle}_{=0} + \widetilde{X}\langle \widetilde{U}, \widetilde{V}\rangle - \widetilde{U}\underbrace{\langle \widetilde{V}, \widetilde{X}\rangle}_{=0} - \underbrace{\langle [\widetilde{V}, \widetilde{U}], \widetilde{X}\rangle}_{=0} -$$
$$- \langle \underbrace{[\widetilde{X}, \widetilde{U}]}_{=0}, \widetilde{V}\rangle - \langle \underbrace{[\widetilde{V}, \widetilde{X}]}_{=0}, \widetilde{U}\rangle = \widetilde{X}\langle \widetilde{U}, \widetilde{V}\rangle. \ (*)$$

Pela métrica torcida, em cada $(p,q) \in M$ temos

$$\begin{aligned}\langle \widetilde{V}, \widetilde{U}\rangle(p,q) &= \langle \underbrace{d\pi(\widetilde{V})}_{=\,0}, \underbrace{d\pi(\widetilde{U})}_{=\,0}\rangle + \sum_{j=1}^{m}(b_j\circ\pi)^2(p,q)\langle d\sigma_j(\widetilde{V}), d\sigma_j(\widetilde{U})\rangle_q^{F_j} =\\ &= (b_i\circ\pi)^2(p,q)\langle d\sigma_i(\widetilde{V}), d\sigma_i(\widetilde{U})\rangle_q^{F_i} =\\ &= (b_i\circ\pi)^2(p,q)\langle (V\circ\sigma_i)(p,q), (U\circ\sigma_i)(p,q)\rangle_q^{F_i} =\\ &= \widetilde{b}_i^2(p,q)\Big(\big(\langle V,U\rangle^{F_i}\circ\sigma_i\big)(p,q)\Big),\end{aligned}$$

isto é, $\langle \widetilde{V}, \widetilde{U}\rangle = \widetilde{b}_i^2\big(\langle V,U\rangle^{F_i}\circ\sigma_i\big)$, e daí

$$\begin{aligned}\widetilde{X}\langle \widetilde{V}, \widetilde{U}\rangle &= \widetilde{X}\left[\widetilde{b}_i^2\big(\langle V,U\rangle^{F_i}\circ\sigma_i\big)\right] = \widetilde{X}(\widetilde{b}_i^2)\big(\langle V,U\rangle^{F_i}\circ\sigma_i\big) + \widetilde{b}_i^2\left[\widetilde{X}\big(\langle V,U\rangle^{F_i}\circ\sigma_i\big)\right] =\\ &= 2\widetilde{b}_i\widetilde{X}(\widetilde{b}_i)\big(\langle V,U\rangle^{F_i}\circ\sigma_i\big) + \widetilde{b}_i^2\big[\underbrace{d\sigma_i(\widetilde{X})}_{0}\big(\langle V,U\rangle^{F_i}\big)\big] =\\ &= 2\widetilde{b}_i\widetilde{X}(\widetilde{b}_i)\frac{\langle \widetilde{V}, \widetilde{U}\rangle}{\widetilde{b}_i^2} = \frac{2\big(\widetilde{X}(\widetilde{b}_i)\big)}{\widetilde{b}_i}\langle \widetilde{V}, \widetilde{U}\rangle.\ (**)\end{aligned}$$

Comparando $(*)$ e $(**)$

$$2\langle \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{V}, \widetilde{U}\rangle = \frac{2\big(\widetilde{X}(\widetilde{b}_i)\big)}{\widetilde{b}_i}\langle \widetilde{V}, \widetilde{U}\rangle,\ \forall \widetilde{U} \in \mathfrak{L}(F_i),$$

portanto, $\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{V} = \left(\dfrac{\widetilde{X}(\widetilde{b}_i)}{\widetilde{b}_i}\right)\widetilde{V}$.

(c) Sejam $\widetilde{V}$, $\widetilde{W} \in \mathfrak{L}(F_i)$. Temos que $\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W} = \mathcal{H}\big(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}\big) + \sum_{j=1}^{m} {}^{j}\mathcal{V}\big(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}\big)$ em cada $(p,q) \in M$. Assim, ${}^{i}\mathcal{V}\big(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}\big)$ é tal que $\langle \nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}, \widetilde{U}\rangle = \langle {}^{i}\mathcal{V}\big(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}\big), \widetilde{U}\rangle$, $\forall \widetilde{U} \in \mathfrak{L}(F_i)$. E ainda, ${}^{i}\mathcal{V}(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}) \in \mathfrak{X}(M)$, $d\pi\big({}^{i}\mathcal{V}(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W})\big) = 0$ e $d\sigma_j\big({}^{i}\mathcal{V}(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W})\big) = 0$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $j \neq i$, isto é, ${}^{i}\mathcal{V}\big(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}\big)$ é π-relacionado com o campo nulo $0 \in \mathfrak{X}(B)$ e ${}^{i}\mathcal{V}\big(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}\big)$ é σ_j-relacionado com o campo nulo $0 \in \mathfrak{X}(F_j)$. Agora, dado $\widetilde{U} \in \mathfrak{L}(F_i)$, como $\langle \widetilde{V}, \widetilde{U}\rangle = (\widetilde{b}_i)^2\big(\langle V,U\rangle^{F_i}\circ\sigma_i\big)$, temos que

$$\begin{aligned}\widetilde{W}\langle \widetilde{V}, \widetilde{U}\rangle &= \widetilde{W}\left[\widetilde{b}_i^2\big(\langle V,U\rangle^{F_i}\circ\sigma_i\big)\right] = \widetilde{W}(\widetilde{b}_i^2)\big(\langle V,U\rangle^{F_i}\circ\sigma_i\big) + \widetilde{b}_i^2\left[\widetilde{W}\big(\langle V,U\rangle^{F_i}\circ\sigma_i\big)\right] =\\ &= 2\widetilde{b}_i\big(\widetilde{W}(\widetilde{b}_i)\big)\big(\langle V,U\rangle^{F_i}\circ\sigma_i\big) + \widetilde{b}_i^2\left[\big(d\sigma_i(\widetilde{W})\langle V,U\rangle^{F_i}\big)\circ\sigma_i\right] =\\ &= 2\widetilde{b}_i\big(\widetilde{W}(b_i\circ\pi)\big)\big(\langle V,U\rangle^{F_i}\circ\sigma_i\big) + \widetilde{b}_i^2\left[\big(W\langle V,U\rangle^{F_i}\big)\circ\sigma_i\right] =\\ &= 2\widetilde{b}_i\big(\underbrace{d\pi(\widetilde{W})}_{=\,0}(b_i)\big)\big(\langle V,U\rangle^{F_i}\circ\sigma_i\big) + \widetilde{b}_i^2\left[\big(W\langle V,U\rangle^{F_i}\big)\circ\sigma_i\right] =\\ &= \widetilde{b}_i^2\left[\big(W\langle V,U\rangle^{F_i}\big)\circ\sigma_i\right],\end{aligned}$$

e daí,

$$2\big\langle \nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}, \widetilde{U}\big\rangle = 2\big\langle {}^{i}\mathcal{V}\big(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}\big), \widetilde{U}\big\rangle = 2(\widetilde{b}_i)^2\Big(\Big\langle d\sigma_i\left({}^{i}\mathcal{V}\big(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}\big)\right), d\sigma_i(\widetilde{U})\Big\rangle^{F_i}\circ\sigma_i\Big) =$$
$$= \widetilde{W}\langle\widetilde{V},\widetilde{U}\rangle + \widetilde{V}\langle\widetilde{U},\widetilde{W}\rangle - \widetilde{U}\langle\widetilde{W},\widetilde{V}\rangle - \langle[\widetilde{W},\widetilde{U}],\widetilde{V}\rangle - \langle[\widetilde{V},\widetilde{U}],\widetilde{W}\rangle - \langle[\widetilde{W},\widetilde{V}],\widetilde{U}\rangle =$$
$$= \widetilde{b}_i^2\Big[\Big(W\langle V,U\rangle^{F_i} + V\langle U,W\rangle^{F_i} - U\langle W,V\rangle^{F_i} - \langle[W,U],V\rangle^{F_i} - \langle[V,U],W\rangle^{F_i} -$$
$$- \langle[W,V],U\rangle^{F_i}\Big)\circ\sigma\Big] =$$
$$= 2(\widetilde{b}_i)^2\big(\langle{}^{F_i}\nabla_V W, U\rangle^{F_i}\circ\sigma_i\big),$$

ou seja, ${}^{i}\mathcal{V}\big(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}\big)$ é σ_i-relacionado com ${}^{F_i}\nabla_V W$. Portanto, ${}^{i}\mathcal{V}\big(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}\big) = \widetilde{{}^{F_i}\nabla_V W} \in \mathfrak{L}(F_i)$ é a conexão Riemanniana em cada fibra $p\times F_i$, pois ${}_p\sigma_i$ é uma homotetia em cada fibra $p\times F_i$.

(d) Novamente, para $\widetilde{V}$, $\widetilde{W}\in\mathfrak{L}(F_i)$, temos que $\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W} = \mathcal{H}\big(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}\big) + \sum_{j=1}^{m}{}^{j}\mathcal{V}\big(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}\big)$ em cada $(p,q)\in M$. Assim, $h(\widetilde{V},\widetilde{W}) = \mathcal{H}\big(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}\big) + \sum_{j=1,j\neq i}^{m}{}^{j}\mathcal{V}\big(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}\big)$, em cada $(p,q)\in M$. Mas, ${}^{j}\mathcal{V}\big(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}\big) = 0$, $\forall j = 1,\dots,m$, $j\neq i$, pois ${}^{j}\mathcal{V}\big(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}\big)$ é tal que, $\langle\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W},\widetilde{U}\rangle = \langle{}^{j}\mathcal{V}\big(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}\big),\widetilde{U}\rangle$, $\forall\widetilde{U}\in\mathfrak{L}(F_j)$. Assim, dado $\widetilde{U}\in\mathfrak{L}(F_j)$, $j\neq i$, temos que

$$\langle\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W},\widetilde{U}\rangle = \langle{}^{j}\mathcal{V}\big(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}\big),\widetilde{U}\rangle =$$
$$= \widetilde{W}\underbrace{\langle\widetilde{V},\widetilde{U}\rangle}_{=0} + \widetilde{V}\underbrace{\langle\widetilde{U},\widetilde{W}\rangle}_{=0} - \widetilde{U}\langle\widetilde{W},\widetilde{V}\rangle - \langle\underbrace{[\widetilde{W},\widetilde{U}]}_{=0},\widetilde{V}\rangle - \langle\underbrace{[\widetilde{V},\widetilde{U}]}_{=0},\widetilde{W}\rangle - \langle[\widetilde{W},\widetilde{V}],\widetilde{U}\rangle =$$
$$= \widetilde{U}\langle\widetilde{W},\widetilde{V}\rangle - \underbrace{\langle[W,V]^{\sim},\widetilde{U}\rangle}_{=0} = \widetilde{U}\langle\widetilde{W},\widetilde{V}\rangle.$$

Mas, como $\langle\widetilde{W},\widetilde{V}\rangle = (\widetilde{b}_i)^2\big(\langle W,V\rangle^{F_i}\circ\sigma_i\big)$

$$\widetilde{U}\langle\widetilde{W},\widetilde{V}\rangle = \widetilde{U}\Big[(\widetilde{b}_i)^2\big(\langle W,V\rangle^{F_i}\circ\sigma_i\big)\Big] =$$
$$= \widetilde{U}(\widetilde{b}_i^2)\big(\langle W,V\rangle^{F_i}\circ\sigma_i\big) + \widetilde{b}_i^2\Big[\widetilde{U}\big(\langle W,V\rangle^{F_i}\circ\sigma_i\big)\Big] =$$
$$= 2\widetilde{b}_i\big(\widetilde{U}(\widetilde{b}_i)\big)\big(\langle W,V\rangle^{F_i}\circ\sigma_i\big) + \widetilde{b}_i^2\Big[\big(\underbrace{d\sigma_i(\widetilde{U})}_{=0}\langle W,V\rangle^{F_i}\big)\circ\sigma_i\Big] =$$
$$= 2\widetilde{b}_i\big(\underbrace{\widetilde{U}(b_i\circ\pi)}_{=0}\big)\big(\langle W,V\rangle^{F_i}\circ\sigma_i\big) = 0.$$

Logo, $h(\widetilde{V},\widetilde{W}) = \mathcal{H}\big(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}\big)$ e $\mathcal{H}\big(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}\big)$ é tal que $\langle\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W},\widetilde{X}\rangle = \langle\mathcal{H}\big(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}\big),\widetilde{X}\rangle$, $\forall\,\widetilde{X}\in\mathfrak{L}(B)$. Daí e por (b), dado $\widetilde{X}\in\mathfrak{L}(B)$ vem que

$$0 = \widetilde{V}\langle\widetilde{X},\widetilde{W}\rangle = \langle\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{X},\widetilde{W}\rangle + \langle\widetilde{X},\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}\rangle,$$

logo, obtemos que

$$\langle \widetilde{X}, \nabla_{\widetilde{V}} \widetilde{W} \rangle = -\langle \nabla_{\widetilde{V}} \widetilde{X}, \widetilde{W} \rangle = -\langle \widetilde{W}, \frac{\big(\widetilde{X}(\widetilde{b}_i)\big)}{\widetilde{b}_i} \widetilde{V} \rangle = -\frac{\big(\widetilde{X}(\widetilde{b}_i)\big)}{\widetilde{b}_i} \langle \widetilde{V}, \widetilde{W} \rangle =$$
$$= -\frac{\langle \widetilde{X}, \nabla \widetilde{b}_i \rangle}{\widetilde{b}_i} \langle \widetilde{V}, \widetilde{W} \rangle = -\Big\langle \widetilde{X}, \frac{\langle \widetilde{V}, \widetilde{W} \rangle}{\widetilde{b}_i} \nabla \widetilde{b}_i \Big\rangle,$$

ou seja, $\langle \widetilde{X}, \nabla_{\widetilde{V}} \widetilde{W} \rangle = \langle \widetilde{X}, \frac{\langle \widetilde{V}, \widetilde{W} \rangle}{\widetilde{b}_i} \nabla \widetilde{b}_i \rangle$.

Portanto, $\mathcal{H}\big(\nabla_{\widetilde{V}} \widetilde{W}\big) = h(\widetilde{V}, \widetilde{W}) = -\left(\frac{\langle \widetilde{V}, \widetilde{W} \rangle}{\widetilde{b}_i}\right) \nabla \widetilde{b}_i$.

(e) Dados $\widetilde{X} \in \mathfrak{L}(B)$, $\widetilde{U} \in \mathfrak{L}(F_i)$, $\widetilde{Z} \in \mathfrak{L}(F_j)$, $\widetilde{T} \in \mathfrak{L}(F_k)$, $1 \leqslant i, j \leqslant m$, $i \neq j$, pela fórmula de Koszul, obtemos que

$$2\langle \nabla_{\widetilde{V}} \widetilde{W}, \widetilde{X} \rangle = \widetilde{W}\langle \widetilde{V}, \widetilde{X} \rangle + \widetilde{V}\langle \widetilde{W}, \widetilde{X} \rangle - \widetilde{X}\langle \widetilde{W}, \widetilde{V} \rangle - \langle [\widetilde{W}, \widetilde{X}], \widetilde{V} \rangle - \langle [\widetilde{V}, \widetilde{X}], \widetilde{W} \rangle -$$
$$- \langle [\widetilde{W}, \widetilde{V}], \widetilde{X} \rangle = 0,$$

também que

$$2\langle \nabla_{\widetilde{V}} \widetilde{W}, \widetilde{U} \rangle = \widetilde{W}\langle \widetilde{V}, \widetilde{U} \rangle + \widetilde{V}\langle \widetilde{W}, \widetilde{U} \rangle - \widetilde{U}\langle \widetilde{W}, \widetilde{V} \rangle - \langle [\widetilde{W}, \widetilde{U}], \widetilde{V} \rangle - \langle [\widetilde{V}, \widetilde{U}], \widetilde{W} \rangle -$$
$$- \langle [\widetilde{W}, \widetilde{V}], \widetilde{U} \rangle = 0,$$

e ainda que

$$2\langle \nabla_{\widetilde{V}} \widetilde{W}, \widetilde{Z} \rangle = \widetilde{W}\langle \widetilde{V}, \widetilde{Z} \rangle + \widetilde{V}\langle \widetilde{W}, \widetilde{Z} \rangle - \widetilde{Z}\langle \widetilde{W}, \widetilde{V} \rangle - \langle [\widetilde{W}, \widetilde{Z}], \widetilde{V} \rangle - \langle [\widetilde{V}, \widetilde{Z}], \widetilde{W} \rangle -$$
$$- \langle [\widetilde{W}, \widetilde{V}], \widetilde{Z} \rangle = 0,$$

por último

$$2\langle \nabla_{\widetilde{V}} \widetilde{W}, \widetilde{T} \rangle = \widetilde{W}\langle \widetilde{V}, \widetilde{T} \rangle + \widetilde{V}\langle \widetilde{W}, \widetilde{T} \rangle - \widetilde{T}\langle \widetilde{W}, \widetilde{V} \rangle - \langle [\widetilde{W}, \widetilde{T}], \widetilde{V} \rangle - \langle [\widetilde{V}, \widetilde{T}], \widetilde{W} \rangle -$$
$$- \langle [\widetilde{W}, \widetilde{V}], \widetilde{T} \rangle = 0.$$

Portanto, $\nabla_{\widetilde{V}} \widetilde{W} = 0$.

■

Corolário A.2. *As folhas* $B \times q$ *de um produto torcido múltiplo são totalmente geodésicas; as fibras* $p \times F$ *são totalmente umbílicas.*

Demonstração:

(i) Cada folha $B \times q$ é uma isometria sobre B. Dessa forma, dados $X, Y \in \mathfrak{X}(B)$ existem e são únicos os levantamentos $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathfrak{L}(B)$ de X e Y a M, respectivamente. Assim, em cada $(p, q) \in M$, pela proposição A.3-(a) temos

$$\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} = \mathcal{H}\left(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\right) + \sum_{j=1}^{m} {}^{j}\mathcal{V}\left(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\right) = \mathcal{H}\left(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\right),$$

implicando que

$$h(X, Y) = \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} - {}^{B}\nabla_{X}Y = \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} - \mathcal{H}\left(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\right) = 0$$

nos dá a segunda forma fundamental de cada folha $B \times q$. Portanto, cada folha $B \times q$ é totalmente geodésica.

(ii) Cada fibra $p \times F_i$ é uma homotetia sobre F_i, para cada $i = 1, \ldots, m$. Dessa forma, dados $V, W \in \mathfrak{X}(F_i)$ existem e são únicos os levantamentos $\widetilde{V}, \widetilde{W} \in \mathfrak{L}(F_i)$ de V e W a M, respectivamente. Assim, como em cada $(p, q) \in M$ temos que $\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W} = \mathcal{H}(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}) + {}^{i}\mathcal{V}(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W})$, e

$$h(V, W) = \nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W} - {}^{F_i}\nabla_{V}W = \nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W} - {}^{i}\mathcal{V}\left(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}\right) = \mathcal{H}\left(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}\right)$$

nos dá a segunda forma fundamental de cada fibra $p \times F$. Daí, e pela proposição A.3-(d)

$$h(V, W) = \mathcal{H}\left(\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W}\right) = -\left(\frac{\langle \widetilde{V}, \widetilde{W}\rangle}{\widetilde{b}_i}\right)\nabla\widetilde{b}_i,$$

logo cada fibra é totalmente umbílica, pois $\nabla\widetilde{b}_i \in \mathfrak{L}(B)$, isto é, $\nabla\widetilde{b}_i \in \mathfrak{X}(F_i)^{\perp}$.

■

Proposição A.4. *Sejam* $M = B \times_{b_1} F_1 \times \cdots \times_{b_m} F_m$ *um produto torcido múltiplo,* $f \in C^{\infty}(B)$ *e* $\psi_i \in C^{\infty}(F_i)$*, para qualquer* $i = 1, \ldots, m$*. Então,*

(a) $\Delta\widetilde{f} = \Delta f + \sum_{i=1}^{m} n_i \dfrac{\langle \nabla\widetilde{f}, \nabla\widetilde{b}_i\rangle}{b_i}$, *onde* $n_i = \dim F_i$.

(b) $\Delta\widetilde{\psi_i} = \dfrac{\Delta\psi_i}{(b_i)^2}$.

Demonstração:

A demonstração é análoga a demonstração da proposição 3.4. ■

A.1 Curvatura do Produto Torcido Múltiplo

Nesta seção vamos determinar os tensores curvaturas, de Ricci e escalar, em função das correspondentes geometrias de $B, F_1, \ldots, F_m$ e das funções de torção b_i, $1 \leqslant i \leqslant m$. Começamos com a

Definição A.3. *Seja* $M = B \times_{b_1} F_1 \times \cdots \times_{b_m} F_m$ *um produto torcido múltiplo. Se* A *é um tensor covariante em* B*, o levantamento* $\widetilde{A}$ *de* A *a* M *é exatamente o pullback de* A *pela projeção* $\pi : M \longrightarrow B$*, isto é,* $\widetilde{A} := \pi^*(A)$*. Agora, se* A *é uma aplicação* $C^\infty(B)$*-multilinear, com* $A : \underbrace{\mathfrak{X}(B) \times \cdots \times \mathfrak{X}(B)}_{s \text{ cópias}} \longrightarrow \mathfrak{X}(B)$*, a qual está associada um* $(1, s)$ *campo tensorial em* B*, se* $v_1, \ldots, v_s \in T_{(p,q)}M$*, defina* $\widetilde{A}(v_1, \ldots, v_s)$ *para ser o vetor horizontal em* (p, q) *que se projeta para* $A\big(d\pi(v_1), \ldots, d\pi(v_s)\big)$ *em* T_pB*, isto é,* $\widetilde{A}(v_1, \ldots, v_s) \in T_{(p,q)}B$*,* $d\pi\big(\widetilde{A}(v_1, \ldots, v_s)\big) := A\big(d\pi(v_1), \ldots, d\pi(v_s)\big) \in T_pB$ *e* $d\sigma_i\big(\widetilde{A}(v_1, \ldots, v_s)\big) = 0$*,* $\forall\ i$.

Essas definições não envolvem geometria, portanto são correspondentemente válidas para levantamentos de F_i, $\forall\ i$.

Observe que, se $A : \underbrace{\mathfrak{X}(B) \times \cdots \times \mathfrak{X}(B)}_{s \text{ cópias}} \longrightarrow \mathfrak{X}(B)$ é $C^\infty(B)$-multilinear, dados(fixados) $X_1, \ldots, X_s \in \mathfrak{X}(B)$, $A(X_1, \ldots, X_s) \in \mathfrak{X}(B)$, portanto o levantamento $\widetilde{A}$ de A a M é tal que $\widetilde{A} \in \mathfrak{L}(B)$, $\widetilde{A} : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{s \text{ cópias}} \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ é $C^\infty(M)$-multilinear e se $\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_s \in \mathfrak{L}(B)$ são os levantamentos de $X_1, \ldots, X_s \in \mathfrak{X}(B)$ respectivamente, tem-se $\widetilde{A}(\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_s)$ é horizontal e $d\pi\big(\widetilde{A}(\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_s)\big) = A\big(d\pi(\widetilde{X}_1), \ldots, d\pi(\widetilde{X}_s)\big)$.

Lema A.3. *Se* $f \in C^\infty(B)$*, o levantamento a* M *do Hessiano de* f*,* $\mathrm{Hess}\ f$*, é o Hessiano do levantamento de* f *somente em vetores horizontais. O levantamento de* $\mathrm{Hess}\ f$ *a* M *será denotado por* H^f.

Demonstração:

Dados $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y} \in \mathfrak{L}(B)$ levantamentos de X, $Y \in \mathfrak{X}(B)$, podemos considerar o Hessiano como um $(0, 2)$-tensor (sua forma bilinear simétrica associada). Assim, temos que

$$\mathrm{Hess}\ f(X, Y) = X\big(Y(f)\big) - \big({}^B\nabla_X Y\big)(f).$$

Agora, seja $\widetilde{f} = f \circ \pi$ o levantamento de f a M. Logo,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hess}\ \widetilde{f}(\widetilde{X},\widetilde{Y}) &= \widetilde{X}\big(\widetilde{Y}(\widetilde{f})\big) - \big(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\big)(\widetilde{f}) = \widetilde{X}\langle \nabla\widetilde{f},\widetilde{Y}\rangle - \langle \nabla\widetilde{f}, \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\rangle = \\
&= \big(X\langle {}^B\nabla f, Y\rangle^B\big)\circ\pi - \langle {}^B\nabla f, {}^B\nabla_X Y\rangle^B \circ \pi = \\
&= X\big(Y(f)\big)\circ\pi - \big({}^B\nabla_X Y(f)\big)\circ\pi = \big[X\big(Y(f)\big) - \big({}^B\nabla_X Y(f)\big)\big]\circ\pi = \\
&= \big(\mathrm{Hess}\ f(X,Y)\big)\circ\pi = \mathrm{Hess}\ f\big(d\pi(\widetilde{X}), d\pi(\widetilde{Y})\big) = \pi^*\big(\mathrm{Hess}\ f\big)(\widetilde{X},\widetilde{Y})
\end{aligned}$$

■

Proposição A.5. *Sejam* $M = B\times_{b_1} F_1 \times \cdots \times_{b_m} F_m$ *um produto torcido múltiplo,* R, ${}^BR$ *e* ${}^{F_i}R$ *os tensores curvatura Riemanniana de* M, B *e* F_i, *respectivamente. Se* $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$, $\widetilde{Z} \in \mathfrak{L}(B)$ *e* $\widetilde{V} \in \mathfrak{L}(F_i)$, $\widetilde{W} \in \mathfrak{L}(F_j)$, $\widetilde{U} \in \mathfrak{L}(F_k)$, *com* $\dim B = n$ *e* $\dim F_i = d_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, *então*

(a) $R(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{Z} \in \mathfrak{L}(B)$ *é o levantamento de* ${}^BR(X,Y)Z$ *em* B.

(b) *Os levantamentos dos tensores curvatura Riemanniana* ${}^BR$, ${}^{F_i}R$ *a* M *dão os tensores curvatura Riemanniana de cada folha* $B\times q$ *e de cada fibra* $p\times F_i$, *respectivamente.*

(c) $R(\widetilde{V},\widetilde{X})\widetilde{Y} = \dfrac{\big(H^{b_i}(\widetilde{X},\widetilde{Y})\big)}{\widetilde{b}_i}\widetilde{V}.$

(d) $R(\widetilde{X},\widetilde{V})\widetilde{W} = R(\widetilde{V},\widetilde{W})\widetilde{X} = R(\widetilde{V},\widetilde{X})\widetilde{W} = 0$, *se* $i \neq j$.

(e) $R(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{V} = 0$ *e* $R(\widetilde{V},\widetilde{W})\widetilde{X} = 0$, *se* $i = j$.

(f) $R(\widetilde{V},\widetilde{W})\widetilde{U} = 0$, *se* $i = j$, *e* $i, j \neq k$.

(g) $R(\widetilde{U},\widetilde{V})\widetilde{W} = \langle \widetilde{V},\widetilde{W}\rangle \dfrac{\langle \nabla\widetilde{b}_i, \nabla\widetilde{b}_k\rangle}{\widetilde{b}_i\widetilde{b}_k}\widetilde{U}$, *se* $i = j$, *e* $i, j \neq k$.

(h) $R(\widetilde{X},\widetilde{V})\widetilde{W} = \dfrac{\big(\langle\widetilde{V},\widetilde{W}\rangle\big)}{\widetilde{b}_i}\nabla_{\widetilde{X}}\nabla\widetilde{b}_i$, *se* $i = j$.

(i) $R(\widetilde{V},\widetilde{W})\widetilde{U} = \widetilde{{}^{F_i}R}(\widetilde{V},\widetilde{W})\widetilde{U} - \dfrac{\big(\langle\nabla\widetilde{b}_i, \nabla\widetilde{b}_i\rangle\big)}{(\widetilde{b}_i)^2}\big[\langle\widetilde{V},\widetilde{U}\rangle\widetilde{W} - \langle\widetilde{W},\widetilde{U}\rangle\widetilde{V}\big]$, *se* $i = j = k$.

Demonstração:

(a) Dados $\widetilde{S} \in \mathfrak{L}(B)$, tem-se

$$\begin{aligned}
\langle d\pi(R(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{Z}), d\pi(\widetilde{S})\rangle^B &= \langle R(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{Z},\widetilde{S}\rangle = \langle \nabla_{\widetilde{Y}}\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Z} - \nabla_{\widetilde{X}}\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{Z} + \nabla_{[\widetilde{X},\widetilde{Y}]}\widetilde{Z},\widetilde{S}\rangle = \\
&= \langle {}^B\nabla_Y {}^B\nabla_X Z - {}^B\nabla_X {}^B\nabla_Y Z + {}^B\nabla_{[X,Y]}Z, S\rangle^B \circ\pi = \langle {}^BR(X,Y)Z, S\rangle^B\circ\pi = \\
&= \langle {}^BR\big(d\pi(\widetilde{X}), d\pi(\widetilde{Y})\big)d\pi(\widetilde{Z}), d\pi(\widetilde{S})\rangle^B \circ\pi = \pi^*({}^BR)(\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{Z},\widetilde{S}).
\end{aligned}$$

E ainda, $R(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{Z}$ é horizontal. De fato, dado $\widetilde{V}\in\mathfrak{L}(F_i)$, $i=1,\dots,m$

$$\begin{aligned}\langle R(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{Z},\widetilde{V}\rangle &= (b_i\circ\pi)^2\langle d\sigma_i(R(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{Z}), d\sigma_i(\widetilde{V})\rangle^{F_i} = \\ &= \langle \nabla_{\widetilde{Y}}\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Z} - \nabla_{\widetilde{X}}\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{Z} + \nabla_{[\widetilde{X},\widetilde{Y}]}\widetilde{Z},\widetilde{V}\rangle = 0.\end{aligned}$$

Logo, $R|_{\mathfrak{L}(B)} = \pi^*({}^BR)$, isto é, $R|_{\mathfrak{L}(B)}$ é o levantamento de ${}^BR$.

(b) Como em cada $(p,q)\in M$ ${}_q\pi$ é uma isometria e ${}_p\sigma_i$ é uma homotetia, o resultado segue, pela definição de levantamento de um tensor e ambas preservam a conexão de Levi-Civita. Dessa forma, os levantamentos $\widetilde{{}^BR}$ e $\widetilde{{}^{F_i}R}$ dos tensores curvaturas ${}^BR$ e ${}^{F_i}R$, induzidos pela métrica torcida g_f, de B e F_i, respectivamente, são tais que, por (a) $\widetilde{{}^BR}$ coincide com o tensor curvatura R de M restrito a campos horizontais e, dados $\widetilde{V}$, $\widetilde{W}$, $\widetilde{U}$, $\widetilde{T}\in\mathfrak{L}(F_i)$ tem-se que

$$\widetilde{{}^{F_i}R}(\widetilde{V},\widetilde{W})\widetilde{U} = {}^{F_i}R\widetilde{(V,W)U} = {}^{F_i}\widetilde{\nabla_W{}^{F_i}\nabla_V U} - {}^{F_i}\widetilde{\nabla_V{}^{F_i}\nabla_W U} + {}^{F_i}\widetilde{\nabla_{[V,W]}U},$$

e

$$\langle\widetilde{{}^{F_i}R}(\widetilde{V},\widetilde{W})\widetilde{U},\widetilde{T}\rangle = \widetilde{b}_i^2\big(\langle {}^{F_i}R(V,W)U,T\rangle^{F_i}\circ\sigma_i\big).$$

(c) Como $[\widetilde{X},\widetilde{V}]=0$, temos que

$$R(\widetilde{V},\widetilde{X})\widetilde{Y} = \nabla_{\widetilde{X}}\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{V} - \nabla_{\widetilde{V}}\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} + \nabla_{[\widetilde{V},\widetilde{X}]}\widetilde{Y} = \nabla_{\widetilde{X}}\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{V} - \nabla_{\widetilde{V}}\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}.$$

Daí e pela proposição A.3, obtemos que

$$\begin{aligned}R(\widetilde{V},\widetilde{X})\widetilde{Y} &= \nabla_{\widetilde{X}}\nabla_{\widetilde{Y}}\widetilde{V} - \nabla_{\widetilde{V}}\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} = \nabla_{\widetilde{X}}\big((\widetilde{Y}(\widetilde{b}_i)/\widetilde{b}_i)\widetilde{V}\big) - \big((\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})(\widetilde{b}_i)/\widetilde{b}_i\big)\widetilde{V} = \\ &= \widetilde{X}\left[\frac{\widetilde{Y}(\widetilde{b}_i)}{\widetilde{b}_i}\right]\widetilde{V} + \frac{\widetilde{Y}(\widetilde{f})}{\widetilde{b}_i}\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{V} - \frac{\big(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\big)(\widetilde{b}_i)}{\widetilde{b}_i}\widetilde{V} = \\ &= \left[\frac{\widetilde{X}\big(\widetilde{Y}(\widetilde{b}_i)\big)}{\widetilde{b}_i} + \widetilde{Y}(\widetilde{b}_i)\widetilde{X}\Big(\frac{1}{\widetilde{b}_i}\Big)\right]\widetilde{V} + \frac{\widetilde{Y}(\widetilde{b}_i)}{\widetilde{b}_i}\frac{\widetilde{X}(\widetilde{b}_i)}{\widetilde{b}_i}\widetilde{V} - \frac{\big(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\big)(\widetilde{b}_i)}{\widetilde{b}_i}\widetilde{V} = \\ &= \left[\frac{\widetilde{X}\big(\widetilde{Y}(\widetilde{b}_i)\big)}{\widetilde{b}_i} - \frac{\widetilde{Y}(\widetilde{b}_i)\widetilde{X}(\widetilde{b}_i)}{\widetilde{b}_i^2} + \frac{\widetilde{Y}(\widetilde{b}_i)\widetilde{X}(\widetilde{b}_i)}{\widetilde{b}_i^2} - \frac{\big(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\big)(\widetilde{b}_i)}{\widetilde{b}_i}\right]\widetilde{V} = \\ &= \left[\frac{\widetilde{X}\big(\widetilde{Y}(\widetilde{b}_i)\big)}{\widetilde{b}_i} - \frac{\big(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\big)(\widetilde{b}_i)}{\widetilde{b}_i}\right]\widetilde{V} = \frac{H^f(\widetilde{X},\widetilde{Y})}{\widetilde{b}_i}\widetilde{V}.\end{aligned}$$

(d) Segue diretamente da definição de curvatura e da proposição A.3.

(e) Análogo a demonstração da proposição 3.5-(d).

(f) Segue diretamente da definição de curvatura e da proposição A.3-(e).

(g) Para $\widetilde{V} \in \mathfrak{L}(F_i)$, $\widetilde{W} \in \mathfrak{L}(F_j)$, $\widetilde{U} \in \mathfrak{L}(F_k)$, $i = j$, $i, j \neq k$

$$\begin{aligned}
R(\widetilde{U}, \widetilde{V})\widetilde{W} &= \nabla_{\widetilde{V}}\nabla_{\widetilde{U}}\widetilde{W} - \nabla_{\widetilde{U}}\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W} + \nabla_{[\widetilde{U},\widetilde{V}]}\widetilde{W} = -\nabla_{\widetilde{U}}\nabla_{\widetilde{V}}\widetilde{W} = \\
&= -\nabla_{\widetilde{U}}\big(\widetilde{{}^{F_i}\nabla_V W}\big) + \nabla_{\widetilde{U}}\big(\frac{\langle \widetilde{V}, \widetilde{W}\rangle}{\widetilde{b}_i}\nabla \widetilde{b}_i\big) = \nabla_{\widetilde{U}}\big(\frac{\langle \widetilde{V}, \widetilde{W}\rangle}{\widetilde{b}_i}\nabla \widetilde{b}_i\big) = \\
&= \widetilde{U}\big(\frac{\langle \widetilde{V}, \widetilde{W}\rangle}{\widetilde{b}_i}\big)\nabla \widetilde{b}_i + \frac{\langle \widetilde{V}, \widetilde{W}\rangle}{\widetilde{b}_i}\nabla_{\widetilde{U}}(\nabla \widetilde{b}_i) = \\
&= \frac{\langle \widetilde{V}, \widetilde{W}\rangle}{\widetilde{b}_i}\frac{\nabla \widetilde{b}_i(\widetilde{b}_k)}{\widetilde{b}_k}\widetilde{U} = \langle \widetilde{V}, \widetilde{W}\rangle \frac{\langle \nabla \widetilde{b}_i, \nabla \widetilde{b}_k\rangle}{\widetilde{b}_i \widetilde{b}_k}\widetilde{U}.
\end{aligned}$$

(h) Análogo a demonstração da proposição 3.5-(e).

(i) Análogo a demonstração da proposição 3.5-(f).

■

Corolário A.3. *Sejam* $M = B \times_{b_1} F_1 \times \cdots \times_{b_m} F_m$ *um produto torcido múltiplo,* $\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Z} \in \mathfrak{L}(B)$, $\widetilde{V} \in \mathfrak{L}(F_i)$ *e* $\widetilde{W} \in \mathfrak{L}(F_j)$. *Então,*

(a) $\mathrm{Ric}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = {}^{B}\mathrm{Ric}(X, Y) - \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{s_i}{b_i} H^{b_i}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$.

(b) $\mathrm{Ric}(\widetilde{X}, \widetilde{V}) = 0$.

(c) $\mathrm{Ric}(\widetilde{V}, \widetilde{W}) = 0$, *se* $i \neq j$.

(d) $\mathrm{Ric}(\widetilde{V}, \widetilde{W}) = {}^{F_i}\mathrm{Ric}(V, W) - \left(\frac{\Delta b_i}{b_i} + (s_i - 1)\frac{||\nabla b_i||^2}{(b_i)^2} + \displaystyle\sum_{k=1, k\neq i}^{m} s_k \frac{\langle \nabla b_i, \nabla b_k\rangle}{b_i b_k} \right) \langle \widetilde{V}, \widetilde{W}\rangle$,

se $i = j$.

Referências Bibliográficas

[1] Bishop, R. L. e O'Neill, B. - *Manifolds of Negative Curvature*. Transactions of the American Mathematical Society, 145 (1969), 1–49.

[2] Brozos-Vázquez, M., García-Río, E., Vázquez-Lorenzo, R. - *Warped Product Metrics and Locally Conformally Flat Structures*. Matemática Contemporânea. Volume 28, 91–110. Sociedade Brasileira de Matemática. 2005.

[3] Chen, B.Y. - *On Isometric Minimal Immersions From Warped Products Into Real Space Forms*. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 45 (2002), 579–587.

[4] Chen, B.Y. - *On Warped Product Immersions*. Journal of Geometry, 82 (2005), 36–49.

[5] Dobarro, F. e Ünal, B. - *Curvature of Multiply Warped Products*. Journal of Geometry and Physics, 55 (2005), 75–106.

[6] do Carmo, M. P. - *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides - IMPA, 2005.

[7] Lee, J. M. - *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*. Graduate Texts in Mathmatics. Springer-Verlag. Nova York(1997).

[8] Nölker, S. - *Isometric Immersions of Warped Products*. Differential Geometry and its Applications, 6 (1996), 1–30.

[9] O'Neill, B. - *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*. Academic Press, London (1983).

[10] Warner, F. W. - *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Graduate Texts in Mathmatics, U.S.A (1983).