Universidade Federal do Piauí

Centro de Ciências da Natureza

Pós-Graduação em Matemática

Mestrado em Matemática

Folheações Completas de Formas Espaciais por Hipersuperfícies

Daniel da Costa Silva

Teresina - 2011

Daniel da Costa Silva

Dissertação de Mestrado:

Folheações Completas de Formas Espaciais por Hipersuperfícies

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa

Teresina - 2011

Folheações Completas de Formas Espaciais por Hipersuperfícies

Daniel da Costa Silva

Dissertação submetida à Coordenação de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal do Piauí, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa (Orientador-UFPI)
- Prof. Dr. Newton Luís Santos (UFPI)
- Profa. Dra. Fernanda Ester Camargo (UFC)
- Prof. Dr. Juscelino Pereira Silva (Suplente-UFPI)

Teresina - 2011

Silva, Daniel da Costa

C977t Folheações Completas de Formas Espaciais por Hipersuperfícies

Daniel da Costa Silva - Teresina: 2011.

84f.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa.

Área de concentração: Geometria Diferencial

Dissertação (Mestrado)-Universidade Federal do Piauí, Departamento de Matemática, 2011.

1- Geometria Diferencial

CDD 516.36

Ao meu avô Raimundo Rodrigues e à minha madrinha Elisabete (In memoriam).

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a **DEUS** por me permitir chegar até aqui;

Agradeço ao meu santo guardião São Miguel Arcanjo, por estar sempre ao meu lado;

Agradeço à minha família pelo apoio incondicional em todos as etapas desta longa caminhada;

Agradeço a minha avó e mãe Terezinha, pelo apoio, pelos conselhos, por acreditar em mim, por me ajudar nesta difícil caminhada e por sempre está ao meu lado nesses anos;

A minha tia-avó Maria Bezerra, por acreditar em mim, pelos conselhos e por me ajudar nesses anos de estudos;

Agradeço ao meu orientador Prof. Paulo Alexandre, pela ótima orientação, a excelente escolha do tema, pelos conselhos, pela paciência e pela certeza de que fiz uma ótima escolha como orientador;

Agradeço aos amigos que fiz durante a graduação: Marcão, Pequeno, Irmão, Márcio, Diego, Maurício, Felipe, Zé Francisco, Alex, Nairon, Djavan (corinthiano); e aos amigos do mestrado: Renan, Kelson, Leandro, Yuri, Cleiton, Carla, Pedro, Ciane, Alex, Cleidinaldo, Valdinês e Israel;

Agradeço aos meus amigos de longa data Amorim, Ari, João Santos (Jão), Dona Elcilene, Domingão, Gilberto, Venâncio (orelhão), Ítalo (Alma de Flores), Gleison (Cafu), Humberto, André, Prof. Marcolino, Wilson (coração de papel), Dr Ernani (professor da UFC), Kelton. Agradeço também aos amigos que fiz na UFC, Damião, Tiago Veras (buda), Disson, Eraldo;

Aos professores Barnabé, Xavier, Cícero Aquino, Mário Gomes, Gilvan, Jurandir, Humberto, Liane e Juscelino pela dedição nas disciplinas ministradas. Aos professores Marcondes, Alexandro Marinho e Isaias pelos conselhos, pela motivação e pelas longas conversas;

Ao prof. Newton Luís pela paciência, pelas disciplinas ministradas, pelas longas conversas as quais foram um fator determinante para que eu viesse estudar geometria e pelos sábios conselhos;

Um agradecimento especial ao prof. Benício, pelos conselhos, pelas conversas, pelo incentivo para vencer mais essa etapa e pelas disciplinas ministradas ao longo da graduação na UFPI;

Agradeço a Dona Elisa e ao seu Chico por sempre estarem dispostos a me atender;

Agradeço aos amigos Neto, Diniz, Seu Cláudio, Nelson pelas longas conversas que tivemos ao longo desses anos, principalmente por estar certo de que meu time é melhor (Vasco);

Agradeço à CAPES-REUNI pelo apoio financeiro.

"*Conhecereis a verdade e a verdades vos libertarás*".

João 8:32.

Resumo

Estudaremos folheações de formas espaciais por hipersuperfícies completas, com algumas restrições sobre as curvaturas médias de ordem superior. Em particular, no espaço Euclidiano, obteremos um teorema tipo-Bernstein para gráficos cujas curvaturas média e escalar não mudam de sinal, mas por outro lado, não necessariamente são constantes. Estabeleceremos também a não existência de folheações da esfera Euclidiana cujas folhas são completas e possuem curvatura escalar constante, assim estendendo um teorema de Barbosa, Kenmotsu e Oshikiri. Para o caso geral de folheações $\mathfrak{r}$-mínimas do espaço Euclidiano, possivelmente com um conjunto singular, utilizamos um teorema de Ferus para obter condições sob as quais as folhas não-singulares são folheadas por hiperplanos.

Abstract

We study foliations of space forms by complete hypersurfaces, under some mild conditions on its higher curvatures. In particular, in Euclidean space we obtain a Bernstein-type theorem for graphs whose mean and scalar curvature do not change sign but may on the other hand be nonconstant. We also establish the nonexistence of foliations of the standard sphere whose leaves are complete and have constant scalar curvature, thus extending a theorem of Barbosa, Kenmotsu and Oshikiri. For the more general case of r-minimal foliations of the Euclidean space, possibly with a singular set, we are able to invoke a theorem of Ferus to give conditions under which the non-singular leaves are foliated by hyperplanes.

Sumário

Resumo **v**

Abstract **vi**

1 Noções Preliminares **3**

1.1 Gradiente e Hessiano 3

1.2 Curvaturas 6

1.3 Imersões Isométricas 9

2 Folheações e o Teorema de Ferus **13**

2.1 Folheações 13

2.2 Teorema de Ferus 18

3 O operador L_r **23**

4 Gráficos no Espaço Euclidiano **32**

5 Folheações de Formas Espaciais **41**

Referências Bibliográficas **51**

Introdução

Folheações, de codimensão 1, de espaços Riemannianos têm sido estudadas desde o começo do século passado. Em 1915, S. Bernstein [17] provou que os únicos gráficos mínimos inteiros no $\mathbb{R}^3$ são os planos. Este resultado foi extendido por J. Simons [13] para gráficos mínimos inteiros em $\mathbb{R}^{n+1}$, para $n \leqslant 7$. Em 1968, E. Bombieri, E. de Giorgi e E. Giusti [7] mostraram que o resultado não vale para $n \geqslant 8$.

Uma extensão natural para o problema descrito acima, é considerar folheações completas de formas espaciais de codimensão 1 cujas folhas têm curvatura média constante. Neste sentido, J. L. Barbosa, K. Kenmotsu e G. Oshikiri [4] provaram que, se o espaço em questão é flat então uma tal folheação deve ter folhas mínimas, e que a esfera Euclidiana não adimite uma folheação com tais propriedades.

No Capítulo 1, começamos com um breve resumo de conceitos e resultado que serão de fundamental importância para o bom entendimento deste trabalho.

No Capítulo 2, apresentamos na Seção 2.1 o conceito de distribuição tangente (ou simplesmente distribuição) e daremos destaque ao importante Teorema de Frobenius. Na Seção 2.2, apresentamos o conceito de índice de nulidade relativa, algumas propriedades e provamos o Teorema de Ferus, que é de fundamental importância no desenvolvimento deste trabalho.

O Capítulo 3 é dedicado ao operador L_r, onde destacamos algumas de suas propriedades, calcularemos o L_r das funções suporte e apresentamos um resultado relacionando a derivada de uma contração com o divergente de um campo.

No Capítulo 4, destacamos a Proposição 17 por sua importância na demonstração do Teorema 7, feita no Capítulo 5.

Ainda no no Capítulo 5, consideraremos variedades Riemannianas munidas de folheações transversalmente orientáveis, ou seja, tais que é possível escolher um campo vetorial unitário N suave, normal a cada folha da folheação. Quando a variedade ambiente é a esfera Euclidiana provamos o seguinte resultado:

Não existe folheação suave na esfera Euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}$ *transversalmente orientável de codimensão* 1*, cujas folhas são completas e possuem curvatura escalar constante maior que* 1.

Finalmente, no Capítulo 5, calculamos uma expressão para a divergência do campo $P_r(\overline{\nabla}_N N)$. Também consideramos uma generalização do problema de Bernstein, que é o estudo de folheações r-mínimas do espaço Euclidiano. Neste caso, utilizamos o Teorema de Ferus para provarmos o resultado abaixo:

Seja $\mathcal{F}$ *uma folheação suave, transversalmente orientável, singular, de codimensão* 1 *de* $\mathbb{R}^{n+1}$*, cujas folhas são completas,* r*-mínimas e tal que* S_r *não muda de sinal nas folhas. Se* $|X| \in \mathcal{L}^1$ *e* $|A|$ *é limitada em cada folha, então cada folha tem nulidade relativa de no mínimo* $n-r$*. Em particular, se* $S_r \neq 0$ *na folha, então esta folha é admite uma folheação por hiperplanos de dimensão* $n-r$.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Neste capítulo estabeleceremos a notação a ser usada e recordamos alguns conceitos e fatos básicos, necessários ao desenvolvimento dos capítulos seguintes. Sendo assim, a prova de alguns resultados não será feita, mas em todo o texto ficará clara a referência para obter tais justificativas. Para recomendamos detalhes recomendamos ao leitor a referência [6].

1.1 Gradiente e Hessiano

No que se segue M^n denotará uma variedade Riemanniana suave, munida da métrica Riemanniana $\langle , \rangle$ e conexão Riemanniana ∇.

Definição 1 (Gradiente)**.** *Seja* $f : M^n \to \mathbb{R}$ *uma função suave. O* ***gradiente*** *de* f *é o campo vetorial suave* $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)$*, definido em* M *por*

$$\langle \nabla f, X \rangle = X(f), \tag{1.1}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$*.*

No lema abaixo, apresentamos uma forma de escrever o gradiente de uma função em um referencial ortonormal local.

Lema 1. *Sejam* $f : M^n \to \mathbb{R}$ *uma função suave e* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *um referencial ortonormal local em uma vizinhança aberta* $U \subset M$*. Então*

$$\nabla f = \sum_{j=1}^{n} e_j(f) e_j,$$

e o segundo membro da igualdade acima independe do referencial escolhido.

Demonstração. Seja $X = x_i e_i$ em U, então:

$$X(f) = \sum_{i=i}^{n} x_i e_i(f) = \left\langle \sum_{i=i}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} e_j(f) e_j \right\rangle = \left\langle X, \sum_{j=1}^{n} e_j(f) e_j \right\rangle.$$

Daí, por (1.1)

$$\nabla f = \sum_{j=1}^{n} e_j(f) e_j.$$

Se $\{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n\}$ for outro referencial ortonormal em U, com $\overline{e}_j = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} e_i$ em U, então a matriz $(x_{ij}(p))_{n\times n}$ é ortogonal em $p \in U$, e daí

$$\sum_{j}^{n} \overline{e}_j(f)\overline{e}_j = \sum_{j,l,t=1}^{n} x_{tj} x_{lj} e_t(f) e_l = \sum_{l,t=1}^{n} \delta_{tl} e_t(f) e_l = \sum_{t=1}^{n} e_t(f) e_t.$$

□

Como consequência imediata do lema anterior, obtemos algumas propriedades que o operador gradiente satisfaz.

Proposição 1. *Sejam* $f, g : M^n \to \mathbb{R}$ *funções suaves, então*

(a) $\nabla (f + g) = \nabla f + \nabla g$.

(b) $\nabla (fg) = g \cdot \nabla f + f \cdot \nabla g$.

Definição 2 (Divergente)**.** *Seja* X *um campo vetorial suave em* M^n*. O* ***divergente*** *de* X *é a função suave definida em* M *por*

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X \ : \ M &\longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ p &\longmapsto \operatorname{div} X(p) \ = \operatorname{tr}[v \longmapsto (\nabla_v X)(p)], \end{aligned}$$

onde $v \in T_pM$ *e* tr *denota o traço do operador linear entre colchetes.*

No lema a seguir, apresentamos sem demonstração, uma forma de escrever o divergente de um campo vetorial em um referencial ortonormal local.

Proposição 2. *Sejam* X *um campo suave em* M^n *e* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *um referencial ortonormal em uma vizinhança aberta* $U \subset M$*. Se* $X = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ *em U, então*

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{n} \big(e_i(x_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X \rangle\big).$$

Observação 1 (Refencial Geodésico)**.** *Seja* M^n *uma variedade Riemannianna e* $p \in M^n$*. Dizemos que um referencial ortonormal* $\{e_1, \dots, e_n\}$ *em um aberto* $U \subset M$ *é* **geodésico** *em* $p \in U$ *se* $(\nabla_{e_i} e_j)(p) = 0$ *para todos* $1 \leqslant i, j \leqslant n$*. Neste caso, temos que a expressão obtida no lema anterior para o divergente de um campo vetorial pode ser expressa da seguinte forma*

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{n} e_i(x_i).$$

As propriedades, que o divergente de um campo vetorial satisfaz, apresentadas no lema abaixo, seguem como consequência direta do lema acima.

Proposição 3. *Sejam* X, Y *campos vetoriais suaves em* M^n *e* $f : M^n \to R$ *uma função suave, então*

(a) $\operatorname{div}(X + Y) = \operatorname{div} X + \operatorname{div} Y$.

(b) $\operatorname{div}(fX) = f \cdot \operatorname{div} X + \langle \nabla f, X \rangle$.

Definição 3 (Laplaciano)**.** *Sejam* M *uma variedade Riemanniana e* $f : M \to \mathbb{R}$ *uma função suave. O* ***Laplaciano*** *de* f *é a função* $\Delta f : M \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f). \tag{1.2}$$

Temos agora a seguinte:

Proposição 4. *Sejam* $f : M^n \to \mathbb{R}$ *uma função suave e* $\{e_1, \dots, e_n\}$ *um referencial ortonormal em um aberto* $U \subset M$*. Então,*

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \big(e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i)(f)\big).$$

Em particular, se o referencial for geodésico em $p \in U$*, então temos em* p *que*

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} e_i(e_i(f)).$$

Definição 4 (Hessiano)**.** *Seja* $f : M \to \mathbb{R}$ *uma função suave. O* ***Hessiano*** *de* f *em* $p \in M$ *é o operador linear* $\operatorname{Hess} f_p : T_pM \to T_pM$ *definido por*

$$\operatorname{Hess} f_p(v) = \nabla_v \nabla f.$$

Segue das propriedades da conexão Riemanniana que se $X \in \mathfrak{X}(M)$ é uma extensão de v a uma vizinhança de $p \in M$, então

$$\text{Hess}\, f_p(v) = \nabla_{X(p)} \nabla f.$$

Desta forma, podemos considerar o operador hessiano $\text{Hess}\, f : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ definido como

$$\text{Hess}\, f(X) = \nabla_X \nabla f.$$

Proposição 5. *Se* $f : M \to \mathbb{R}$ *é uma função suave, então o hessiano de* f *é um operador linear auto-adjunto.*

Demonstração. Dados $U, V \in \mathfrak{X}(M)$, temos que

$$\begin{aligned}
\langle \text{Hess}\, f(U), V\rangle &= \langle \nabla_U \nabla f, V\rangle \\
&= U\langle \nabla f, V\rangle - \langle \nabla f, \nabla_U V\rangle \\
&= U\langle \nabla f, V\rangle - \langle \nabla f, [U, V] + \nabla_V U\rangle \\
&= U(V(f)) - \langle \nabla f, [U, V] + \nabla_V U\rangle \\
&= V(U(f)) + [U, V]f - \langle \nabla f, \nabla_V U\rangle - \langle \nabla f, [U, V]\rangle \\
&= V(U(f)) + [U, V]f - \langle \nabla f, \nabla_V U\rangle - [U, V]f \\
&= V(U(f)) - \langle \nabla f, \nabla_V U\rangle \\
&= \langle \text{Hess}\, f(V), U\rangle .
\end{aligned}$$

□

Apresentamos a seguir um fato importante, cuja prova segue como consequência da definição de hessiano:

$$\Delta f = \text{tr}\,(\text{Hess}\, f).$$

1.2 Curvaturas

Nesta seção, apresentaremos os conceitos e resultados básicos sobre tensor curvatura.

Definição 5 (Curvatura)**.** *A curvatura* R *de uma variedade Riemanniana* M *é uma correspondência que associa a cada par* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *uma aplicação* $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ *dada por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, \ \forall Z \in \mathfrak{X}(M),$$

onde ∇ *é a conexão Riemanniana de* M.

Um fato básico é: se $M = \mathbb{R}^n$ então $R(X,Y)Z = 0$ para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 6. *A curvatura* R *de uma variedade Riemanniana goza das seguintes propriedades:*

(i) R *é* $C^\infty(M)$*-bilinear em* $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$*, isto é,*

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1),$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2),$$

f, $g \in C^\infty(M)$, X_1, X_2, Y_1, $Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$.

(ii) *Para todo par* X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$*, o operador curvatura* $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ *é* $C^\infty(M)$*-linear, isto é,*

$$R(X,Y)(Z+W) = R(X,Y)Z + R(X,Y)W,$$

$$R(X,Y)(fZ) = fR(X,Y)Z,$$

$f \in C^\infty(M)$, Z, $W \in \mathfrak{X}(M)$.

(iii) *Vale a Primeira Identidade de Bianchi.*

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0. \tag{1.3}$$

(iv) *Para todos* X, Y, Z, $T \in \mathfrak{X}(M)$ *valem as seguintes propriedades de simetria:*

(a) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle + \langle R(Y,Z)X, T\rangle + \langle R(Z,X)Y, T\rangle = 0$

(b) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = -\langle R(Y,X)Z, T\rangle$

(c) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = -\langle R(X,Y)T, Z\rangle$

(d) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = \langle R(Z,T)X, Y\rangle$.

Definição 6 (Curvatura Seccional)**.** *Dado um ponto* $p \in M$ *e um subespaço bi-dimensional* $\sigma \subset T_pM$*, o número real*

$$K(\sigma) = K(x,y) = \frac{\langle R(x,y)x, y\rangle}{|x \wedge y|^2},$$

onde $\{x,y\}$ *é uma base qualquer de* σ *e* $|\ x \wedge y\ |^2 = \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2$*, é chamado de curvatura seccional de* σ *em p. Pode-se mostrar que* $K(\sigma)$ *não depende da escolha dos vetores* $x, y \in \sigma$.

Além do fato de que a curvatura seccional tem interessantes interpretações geométricas, sua importância provém do fato de que o conhecimento de $K(\sigma)$, para todo σ, determina completamente a curvatura R. Isto é um fato puramente algébrico, como mostra o lema abaixo.

Lema 2. *Seja* V *um espaço vetorial de dimensão* $n \geqslant 2$, *munido de um produto interno* $\langle\, ,\, \rangle$. *Sejam* $R : V \times V \times V \to V$ *e* $R' : V \times V \times V \to V$ *aplicações trilineares tais que as condições* (iii), iv-(a), iv-(b), iv-(c) *e* iv-(d) *da Proposição 6 sejam satisfeitas. Se* x, y *são dois vetores linearmente independentes, consideremos*

$$K(\sigma) = \frac{\langle R(x,y)x, y\rangle}{|x \wedge y|^2} \text{ e } K'(\sigma) = \frac{\langle R'(x,y)x, y\rangle}{|x \wedge y|^2},$$

onde σ *é o subespaço bi-dimensional gerado por* x *e* y. *Se para todo* $\sigma \subset V$ *tivermos* $K(\sigma) = K'(\sigma)$, *então* $R = R'$.

As variedades Riemannianas de curvatura seccional constante desempenham um papel fundamental no desenvolvimento da Geometria Riemanniana, por possuirem uma geometria relativamente simples e bem conhecida, servem como espaços modelo para geometria de comparação. Além disso, construções geométricas com tais espaços são menos complicadas de serem feitas do que quando se considera variáveis abstratas quaisquer.

O lema a seguir apresenta uma caracterização da curvatura para as variedades Riemannianas de curvatura seccional constante.

Lema 3. *Sejam* M *uma variedade Riemanniana e* $p \in M$. *Defina uma aplicação trilinear* $R' : T_pM \times T_pM \times T_pM \longrightarrow T_pM$ *por*

$$\langle R'(X,Y)W, Z\rangle = \langle X, W\rangle\langle Y, Z\rangle - \langle Y, W\rangle\langle X, Z\rangle = \big\langle \langle X, W\rangle Y - \langle Y, W\rangle X, Z\big\rangle,$$

para todos X, Y, W, $Z \in T_pM$. *Então* M *tem curvatura seccional constante igual a* K_0 *se, e somente se,* $R = K_0R'$ R *onde denota a curvatura de* M.

Utilizando a curvatura seccional de uma variedade, podemos definir outras curvaturas com importantes propriedades e interpretações geométricas, que serão utilizadas apartir do Capítulo 3 quando tratarmos de formas espaciais.

Definição 7 (Curvatura de Ricci)**.** *Sejam* M *uma variedade Riemanniana,* $p \in M$, x *um vetor unitário em* T_pM *e* $\{z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n = x\}$ *uma base ortonormal de* T_pM. *A curvatura Ricci de* M *na direção* x *em* p *é definida por*

$$\mathrm{Ric}_p(x) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\langle R(x, z_i)x, z_i\rangle.$$

Definição 8 (Curvatura Escalar). *Sejam* M *uma variedade Riemanniana,* $p \in M$ *e* $\{z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n\}$ *uma base ortonormal de* T_pM*. A curvatura escalar de* M *em* p *é definida por*

$$R(p) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Ric}_p(z_j).$$

1.3 Imersões Isométricas

Parte substancial das definições e resultados enunciados nesta seção foram extraídos da referência [6].

Seja $\left(\overline{M}^{n+m=k}, \langle\, , \,\rangle, \overline{\nabla}\right)$ uma variedade Riemanniana com métrica $\langle\, , \,\rangle$ e conexão Riemanniana $\overline{\nabla}$. Sejam M^n uma variedade n-dimensional e $f : M^n \to \overline{M}^k$ uma imersão. Nestas condições, a métrica Riemanniana de $\overline{M}$ induz de maneira natural uma métrica Riemanniana em M através da definição

$$\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)}, \ \forall p \in M, \ \forall u, v \in T_pM.$$

Dessa forma, a aplicação f é uma imersão isométrica.

Dado $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade de $\overline{M}$. Portanto existem uma vizinhança $\overline{U}$ de $f(p)$ e um difeomorfismo $\Phi : \overline{U} \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^k$ em um aberto V do $\mathbb{R}^k$, tais que Φ aplica difeomorficamente $f(U) \cap \overline{U}$ em um aberto do subespaço $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^k$. Identificaremos U com $f(U)$ e cada vetor $v \in T_qM$, $q \in U$, com o vetor $df_q(v) \in T_{f(q)}\overline{M}$. Assim, para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p\overline{M}$ decompõe $T_p\overline{M}$ na soma direta

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp},$$

onde $(T_pM)^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. Se $p \in M$ e $v \in T_p\overline{M}$, podemos escrever

$$v = v^T + v^{\perp}, \ v^T \in T_pM, \ v^{\perp} \in (T_pM)^{\perp}.$$

Denominamos v^T a componente tangencial de v e $v^{\perp}$ a componente normal de v. Além disso, usando o difeomorfismo Φ podemos estender localmente campos de vetores X, Y de M definidos em $f(U) \cap \overline{U}$, a campos de vetores $\overline{X}$, $\overline{Y}$ definidos em $\overline{U}$ de modo tal que

$$\overline{X}|_U = X.$$

Se X e Y são campos locais de vetores em M, denotaremos por $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ suas extensões locais $\overline{M}$.

Lema 4. *A conexão Riemanniana ∇ de M relativa à métrica induzida de $\overline{M}$ por f, definida abaixo, independe das extensõses $\overline{X}$ e $\overline{Y}$:*

$$\nabla_X Y = \left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}\right)^T.$$

Definição 9 (Campo Normal)**.** *Sejam $f : M \to \overline{M}$ uma imersão isométrica, $U \subset M$ uma vizinhança de $p \in M$ tal que $f(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade de $\overline{M}$ e $\overline{X} \in \mathfrak{X}(\overline{U})$ um campo local em $\overline{M}$, com $\overline{U} \subset \overline{M}$ aberto $f(U) \subset \overline{U}$. O campo $\overline{N}$ diz-se normal a M se $\overline{N}(p) = \overline{N}_p \in (T_pM)^\perp$, para todo $p \in f(U) \cap \overline{U}$. Dessa forma, se X e Y são campos locais em M então*

$$h(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

é um campo local em $\overline{M}$ normal a M. Mostra-se que a aplicação $h : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to \mathfrak{X}(U)^\perp$ assim definida é bilinear e simétrica.

Observação 2. *Expressando a aplicação h em um sistema de coordenadas, verifica-se que o valor de $h(X, Y)(p)$ depende apenas de $X(p)$ e de $Y(p)$.*

Agora podemos definir a segunda forma fundamental de uma imersão isométrica. Dados $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$, a aplicação $H_\eta : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(x, y) = \langle h(x, y), \eta\rangle, \ x, y \in T_pM, \tag{1.4}$$

é uma forma bilinear e simétrica.

Definição 10. *Sejam $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$. A forma quadrática II_η definida em T_pM por*

$$II_\eta(x) = H_\eta(x, x) = \langle h(x, x), \eta\rangle \tag{1.5}$$

é chamada a segunda forma fundamental de f em p segundo o vetor normal η.

Observação 3. *:*

(a) *Às vezes se utiliza também a expressão **segunda forma fundamental** para designar a aplicação h.*

(b) *Associada à aplicação* H_η *temos a aplicação linear auto-adjunta* $A_\eta : T_pM \longrightarrow T_pM$, *definida por*

$$\langle A_\eta(x), y\rangle = H_\eta(x, y) = \langle h(x, y), \eta\rangle$$

onde x, $y \in T_pM$.

Proposição 7. *Sejam* $p \in M$, $x \in T_pM$ *e* $\eta \in (T_pM)^\perp$. *Se* N *é uma extensão local de* η *normal a* M, *então*

$$A_\eta(x) = -\left(\overline{\nabla}_x N\right)^\top.$$

Considerando o caso particular em que a codimensão da imersão é 1, a imersão $f : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ é denominada uma hipersuperfície.

Sejam $f(M) \subset \overline{M}$ uma hipersuperfície, $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$ unitário. Como $A_\eta : T_pM \to T_pM$ é auto-adjunta, existe uma base ortonormal $\{e_1, ..., e_n\}$ de T_pM formada por autovetores de A_η com autovalores associados $\lambda_1, ..., \lambda_n$, isto é, $A_\eta(e_i) = \lambda_i \cdot e_i$ e $1 \leqslant i \leqslant n$. Supondo que M e $\overline{M}$ são orientáveis e estão orientadas, então o vetor η fica univocamente determinado. Se exigirmos que $\{e_1, ..., e_n\}$ seja uma base na orientação de M, então $\{e_1, ..., e_n, \eta\}$ é uma base na orientção de $\overline{M}$. Neste caso, denominamos os vetores e_i de direções principais e os autovaloes λ_i de curvaturas principais da imersão f. A aplicação $A = A_\eta$ é chamada de operador de Weingarten associado à segunda forma fundamental. Nesse caso, vale a igualdade $A_\eta(x) = -\left(\overline{\nabla}_x N\right)^\top = -\overline{\nabla}_x N$.

No teorema abaixo, relacionaremos a curvatura seccional de M com a curvatura seccional de $\overline{M}$. Se x, $y \in T_pM \subset T_p\overline{M}$ são linearmente independentes, indicaremos por $K(x, y)$ e $\overline{K}(x, y)$ as curvaturas seccionais de M e $\overline{M}$, respectivamente.

Teorema 1 (Teorema de Gauss)**.** *Sejam* $f : M^n \to \overline{M}^{n+m}$ *uma imersão isométrica,* $p \in M$ *e* x, y *vetores ortonormais de* T_pM. *Então*

$$K(x, y) - \overline{K}(x, y) = \big\langle h(x, x), h(y, y)\big\rangle - |h(x, y)|^2.$$

Corolário 1. *No caso de uma hipersuperfície* $f : M^n \to \overline{M}^{n+1}$, *a fórmula de Gauss dada no teorema anterior admite uma expressão mais simples. Sejam* $p \in M$ *e* $\eta \in (T_pM)^\perp$ *unitário. Se* $\{e_1, ..., e_n\}$ *é uma base ortonormal de* T_pM *que diagonaliza* $A = A_\eta$, *com autovalores* $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$, *então*

$$K(e_i, e_j) - \overline{K}(e_i, e_j) = \lambda_i\lambda_j.$$

Definição 11 (Imersão Geodésica). *Uma imersão* $f : M^n \to \overline{M}^{n+m}$ *é geodésica em* $p \in M$ *se para todo* $\eta \in (T_pM)^{\perp}$*, a segunda forma fundamental* H_η *é identicamente nula em* p*. Este fato equivale a dizer que* h *é nula em* p*. A imersão* f *é totalmente geodésica se é geodésica para todo* $p \in M$*.*

Capítulo 2

Folheações e o Teorema de Ferus

Neste capítulo, apresentaremos alguns conceitos e fatos de fundamental importância para a compreensão dos demais resultados do trabalho. Concentraremo-nos apenas nos fatos mais essenciais. Daremos as definições básicas, alguns exemplos ilustrativos, resultados sem demonstração e em seguida apresentaremos de maneira sucinta o Teorema de Ferus a ser utilizado posteriormente.

2.1 Folheações

As definições e os resultados desta seção forma extraídos substancialmente da referência [14].

Definição 12. *Uma distribuição tangente (ou simplesmente uma distribuição, ou um campo de* k*-planos) numa variedade suave* M*, é uma aplicação* D *que associa a cada ponto* $p \in M$ *um subespaço vetorial de dimensão* k *de* T_pM*.*

Uma distribuição é suave se a união de todos estes subespaços formam um subfibrado tangente $D = \coprod_{p \in M} D_p \subset TM$*.*

No lema a seguir, apresentamos outra forma de verificarmos a suavidade de uma distribuição.

Lema 5. *Seja* M *uma variedade suave e suponha que* $D \subset TM$ *é uma distribuição* k*-dimensional. Então* D *é suave se, e somente se, cada ponto* $p \in M$ *possui uma vizinhança* U *na qual existem campos vetoriais suaves* $Y_1, \ldots, Y_k : U \to TM$ *tais que* $Y_1(q), \ldots, Y_k(q)$ *formam uma base para* D_q *em cada* $q \in U$*.*

Definição 13. *Seja* $D \subset TM$ *uma distribuição suave em* M. *Uma subvariedade imersa* $N \subset M$ *é chamada uma* **variedade integral** *de* D *se* $T_pN = D_p$ *para cada* $p \in N$.

Exemplo 1. *Defina uma distribuição em* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *da seguinte forma:* D_p *é o subespaço de* $T_p(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ *ortogonal ao vetor posição* $e_1(p) = p$. *Consideremos um referencial local ortonormal* $\{e_1, \dots, e_n\}$, *então* D *é localmente gerado por* $\{e_2, \dots, e_n\}$. *Assim* D *é uma distribuição* $(n-1)$*-dimensional suave em* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. *Além disso, para cada ponto* $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *a esfera de raio* $|p|$ *centrada na origem é uma variedade integral.*

Dizemos que uma distribuição D em M é **involutiva** se: dados campos suaves X, Y definidos em um aberto $U \subset M$ tais que $X_p, Y_p \in D_p$, para todo $p \in U$, então o colchete de Lie $[X, Y]$ é tal que $[X, Y]_p \in D_p$, para todo $p \in U$. Dizemos que D é **integrável** se cada ponto de M pertence a uma variedade integral de D.

Proposição 8. *Toda distribuição integrável é involutiva.*

Demonstração. Seja $D \subset TM$ uma distribuição integrável. Suponha que X e Y são campos suaves definidos em um aberto $U \subset M$, tais que $X_p, Y_p \in D_p$ para todo $p \in U$. Seja N uma variedade integral, então $X_p, Y_p \in D_p = T_pN$ para todo ponto $p \in N$. Daí, X, Y são tangentes à N. Donde segue que $[X, Y]$ também é tangente à N, assim $[X_p, Y_p] \in D_p$. $\square$

Definição 14. *Sejam* M *uma variedade* n*-dimensional e* D *uma distribuição* k*-dimensional, dizemos que uma carta* (U, φ) *em* M *é* **plana** *se* $\varphi(U)$ *é um produto de conjuntos abertos conexos* $U' \times U'' \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ *e, nos pontos de* U, D *é gerado pelos* k *primeiros campos coordenados. Dizemos que a distribuição* $D \subset TM$ *é* ***completamente integrável*** *se existe uma carta plana na vizinhança de todo ponto de* M.

Observe que toda distribuição completamente integrável é integrável, portanto involutiva. A pergunta que surge naturalmente é: vale a recíproca ?

A resposta é afirmativa, e é dada pelo seguinte

Teorema 2 (Frobenius)**.** *Toda distribuição involutiva é completamente integrável.*

Exemplo 2. *Seja* D *a distribuição gerada pelos campos vetoriais* $V, W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definidos por*

$$V(x, y, z) = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + x(y+1)\frac{\partial}{\partial z} \text{ e } W(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}.$$

Afirmamos que D *é completamente integrável. Para isto, basta mostrarmos que* D *é involutiva. Com efeito,*

$$\begin{aligned}
[V,W]f &= \left[x\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+x(y+1)\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial z}\right]f \\
&= \left(x\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+x(y+1)\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial z}\right) \\
&\quad -\left(\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}+x(y+1)\frac{\partial f}{\partial z}\right) \\
&= x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}+y\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}+x(y+1)\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} \\
&\quad +xy(y+1)\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}-\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial z}-xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} \\
&\quad -\frac{\partial f}{\partial z}-x\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}-xy\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}-y\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}-xy(y+1)\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\
&= -\frac{\partial f}{\partial x}-y\frac{\partial f}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Assim, $[V,W]f=-\left(\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial z}\right)f=-Wf$ *para toda* f *suave. Logo,* $[V,W]=-W\in D$. *Portanto,* D *é involutiva e pelo Teorema de Frobenius* D *é completamente integrável. Veja que a distribuição* D *também é gerada pelos campos* $X=W$ *e* $Y=V-xW$, *ou seja,*

$$X=\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial z}\ \text{e}\ Y=\frac{\partial}{\partial y}+x\frac{\partial}{\partial z}.$$

Não é difícil verificar que o fluxo α_t *de* X *e o fluxo* β_t *de* Y *são, respectivamente*

$$\alpha_t(x,y,z)=(x+t,y,z+yt)\ \text{e}\ \beta_t(x,y,z)=(x,y+t,z+xt).$$

Fazendo uso de um argumento, não trivial da teoria das Equações Diferenciais Parciais, temos que as variedades integrais de D *são as curvas de níveis da função* $w(x,y,z)$ *onde*

$$(u,v,w)=\psi^{-1}(x,y,z)\ \text{e}\ \psi(u,v,w)=\alpha_u\circ\beta_v(0,0,w).$$

Com um cálculo simples obtemos que $\psi(u,v,w)=(u,v,z+uv)$ *e* $w(x,y,z)=z-xy$.

Exemplo 3. *Seja* M *uma variedade Riemanniana, dizemos que um campo* $V\in\mathfrak{X}(M)$ *é conforme se*

$$\mathcal{L}_V\langle\,,\,\rangle=2\psi\langle\,,\,\rangle$$

para alguma função $\psi\in C^\infty(M)$, *onde* $\mathcal{L}_V\langle\,,\,\rangle$ *denota a derivada de Lie da métrica na direção do campo* V. *A função* ψ *é o fator conforme de* V.

Dizemos que um campo conforme $V \in \mathfrak{X}(M)$ *é fechado quando* $\nabla_X V = \psi X$, *para todo* $X \in \mathfrak{X}(M)$. *Esta definição, é uma alusão ao fato de que a sua 1-forma dual é fechada. Considere a distribuição suave* $V^\top$ *em* M *definida, em cada ponto* $p \in M$, *como segue*

$$V^\top := \{w \in T_pM : \langle w, V(p)\rangle = 0\}.$$

Mostraremos que a distribuição $V^\top$ *é involutiva. De fato, dados* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, *tais que* $X_p, Y_p \in V_p^\top$, *temos que* $\langle X, V\rangle = \langle Y, V\rangle = 0$, $\nabla_X V = \psi X$ *e* $\nabla_Y V = \psi Y$. *Daí,*

$$\begin{aligned}
\langle [X,Y], V\rangle &= \langle \nabla_X Y, V\rangle - \langle \nabla_Y X, V\rangle \\
&= X\langle Y, V\rangle - \langle Y, \nabla_X V\rangle \\
&\quad -Y\langle X, V\rangle + \langle X, \nabla_Y V\rangle \\
&= \langle X, \nabla_Y V\rangle - \langle Y, \nabla_X V\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Donde concluímos que $\langle [X,Y], V\rangle = 0$, *ou seja,* $[X,Y]_p \in V_p^\top$. *Isto diz que a distribuição é involutiva, pelo Teorema de Frobenius a mesma é completamente integrável.*

Definição 15. *Seja* $U \subset \mathbb{R}^n$. *Uma* k*-fatia de* U *é um subconjunto da forma*

$$\{(x^1, \ldots, x^k, x^{k+1}, \ldots, x^n) \in U : x^{k+1} = c^{k+1}, \ldots, x^n = c^n\}$$

para constantes $c^{k+1}, \ldots, c^n$.

Sejam M^n uma variedade suave e (U, φ) uma carta local em M. Seja $S \subset U$ tal que $\varphi(S)$ é uma k-fatia de $\varphi(U)$, então dizemos que S é uma k-fatia de U.

Definição 16. *Definimos uma folheação de dimensão* k *em uma variedade* M^n *como a coleção de subvariedades de dimensão* k, *disjuntas, conexas e imersas em* M *(chamadas as* **folhas** *da folheação), cuja união é* M *e tal que numa vizinhança de cada ponto* $p \in M$, *existe uma carta suave* (U, φ) *com a propriedade* $\varphi(U) = U_1 \times U_2$, *onde* $U_1 \subset \mathbb{R}^k, U_2 \subset \mathbb{R}^{n-k}$ *são conjuntos abertos, e cada folha da folheação intersecta* U *ou em um conjunto vazio ou em uma união enumerável de fatias de dimensão* k. *Tal carta é chamada uma carta plana para a folheação.*

Exemplo 4. *Apresentamos quatro exemplos de folheações:*

(i) (Folheações definidas por submersões) Seja $f : M^{n+k} \to N^n$ *uma submersão suave. Pela forma local das submersões, dados* $p \in M$ *e* $q = f(p) \in N$, *existem cartas*

locais (U, φ) *em* M *e* (V, ψ) *em* N *tais que* $p \in U$, $q \in V$, $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$, $\psi(V) = V_2 \supset U_2$ *e tal que* $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : U_1 \times U_2 \to U_2$ *coincide com a projeção* $(x, y) \mapsto y$. *Portanto, as cartas locais* (U, φ) *definem uma estrutura de variedade folheada onde as folhas são as componentes conexas das subvariedades de nível* $f^{-1}(c)$ k*-dimensionais, onde* $c \in N$*;*

(ii) Se M *e* N *são variedades suaves conexas, a coleção de subconjuntos da forma* $\{q\}\times N$*, onde* q *varia sobre* M*, forma uma folheação de* $M \times N$*. Cada folha da folheação é difeomorfa a* N*;*

(iii) A coleção de todas as esferas, centradas na origem, é uma folheação $(n-1)$*-dimensional do* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$*;*

(iv) Sejam $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *uma função suave e* $M^n = \{(x, u(x)) : x \in \mathbb{R}^n\}$ *o gráfico de* u*. A família* $\mathcal{F} = \{M + c : c \in \mathbb{R}\} = \{(x, u(x) + c) : x \in \mathbb{R}^n \text{ e } c \in \mathbb{R}\}$ *é uma folheação de dimensão* n *do espaço Euclidiano* $\mathbb{R}^{n+1}$*.*

O lema seguinte relaciona involutividade com folheação.

Lema 6. *Seja* $\mathcal{F}$ *uma folheação da variedade suave* M^n*. A coleção de todos os espaços tangentes nas folhas de* $\mathcal{F}$ *forma uma distribuição involutiva em* M*.*

Portanto, temos uma generalização do Teorema de Frobenius.

Teorema 3 (Teorema Global de Frobenius)**.** *Seja* D *uma distribuição involutiva em uma variedade suave* M*. A coleção de todas as variedades integrais conexas de* D *formam uma folheação de* M*.*

Definição 17. *Seja* $\mathcal{F}$ *uma folheação de dimensão* k *de uma variedade* n*-dimensional* M*. Então chamaremos de codimensão da folheação* $\mathcal{F}$ *ao número* $n - k$*.*

O seguinte resultado nos será bastante útil e sua demonstração encontra-se em [12].

Proposição 9. *Sejam* $\mathcal{F}$ *uma folheação de codimensão* 1 *de uma variedade Riemanianna conexa* M *e* $f : M \to \mathbb{R}$ *uma função que é constante ao longo das folhas de* $\mathcal{F}$*. Se* f *não é constante em* M*, então o conjunto*

$$A = \{x \in M; f(x) = \max_M(f(x))\}$$

contém pelo menos uma folha compacta.

2.2 Teorema de Ferus

Ao leitor mais curioso, que deseja obter mais informações a cerca das definições e resultados que apresentaremos nesta seção, indicamos a referência [15].

Seja $f : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ uma imersão isométrica. Dado $p \in M$, o subespaço de T_pM definido como

$$\Delta(p) = \{u \in T_pM : h(u, w) = 0, \forall\, w \in T_pM\},$$

onde h é a segunda forma fundamental de f, é o **subespaço de nulidade relativa** de f em p. A dimensão $\nu(p)$ de $\Delta(p)$ é o **índice de nulidade relativa** de f em p.

Considere um variedade Riemanniana M^n, e uma distribuição suave D definida em um aberto $U \subset M$, que é involutiva e possui folhas totalmente geodésicas. Defina a distribuição D^T em U tomando para cada $x \in U$ o complemento ortogonal $(D_x)^\perp$ de D_x em T_xM. Associamos para cada $X \in D$ a aplicação

$$\begin{array}{rccc} C_X & : & D^\perp & \longrightarrow & D^\perp \\ & & Y & \longmapsto & C_XY = -P(\nabla_Y X), \end{array}$$

onde $P : TU \longrightarrow D^\perp$ é a projeção ortogonal. A aplicação

$$\begin{array}{rccc} C & : & D \times D^\perp & \longrightarrow & D^\perp \\ & & (X, Y) & \longmapsto & C(X, Y) = C_Y X, \end{array}$$

com $X \in D$ e $Y \in D^\perp$, é um tensor, pois

$$\begin{aligned} C(fX, Y) = C_{fX}Y &= -P(\nabla_Y fX) \\ &= -P(f\nabla_Y X + Y(f)X) \\ &= -P(f\nabla_Y X) \\ &= fC_XY \\ &= fC(X, Y) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} C(X, fY) = C_X fY &= -P(\nabla_{fY} X) \\ &= -P(f\nabla_Y X) = -fP(\nabla_Y X) \\ &= fC(X, Y) \end{aligned}$$

para toda $f \in C^\infty(U)$. Observe que $D^\perp$ é involutiva se e somente se C_X é simétrica para todo $X \in D$. Neste caso, C_X é precisamente o operador forma na direção de X da inclusão das folhas de $D^\perp$ em M.

Seja $Z \in D$ e $Y \in D^\perp$. Como $\nabla_Z W \in D$, para todo $W \in D$, temos que

$$0 = Z\langle Y, W\rangle = \langle \nabla_Z Y, W\rangle,$$

e além disso,

$$\nabla_Z Y \in D^\perp \tag{2.1}$$

para todo $Z \in D$ e $Y \in D^\perp$. Em particular, definimos a derivada covariante de C_X por

$$(\nabla_Z C_X)Y = \nabla_Z(C_X Y) - C_X \nabla_Z Y. \tag{2.2}$$

Proposição 10. *O operador $C_{\gamma'}$ ao longo de uma geodésica γ contida na folha de D, satisfaz a seguinte equação diferencial:*

$$\frac{D}{dt} C_{\gamma'} = C_{\gamma'}^2 + P(R(\cdot, \gamma')\gamma'). \tag{2.3}$$

Demonstração. Seja $Y \in TM$ e $Z \in D$. Por (2.1) temos que $\nabla_Z P(Y) \in D^\perp$. Assim $\nabla_Z(Y - P(Y)) \in D$. Além disso,

$$P(\nabla_Z X) = P(\nabla_Z(Y - P(Y))) + \nabla_Z P(Y) = \nabla_Z P(Y). \tag{2.4}$$

Sejam $X \in D$ uma extensão local de γ' e $Y \in D^\perp$. Ao longo de γ por (2.4) e por (2.2) temos que

$$\begin{aligned}
(\nabla_X C_X)Y &= \nabla_X(C_X Y) - C_X \nabla_X Y \\
&= \nabla_X(-P(\nabla_Y X)) + P(\nabla_{\nabla_X Y} X) \\
&= -P(\nabla_X \nabla_Y X) + P(\nabla_{\nabla_X Y} X) \\
&= P(R(Y, X)X - \nabla_Y \nabla_X X + \nabla_{[Y,X]} X) + P(\nabla_{\nabla_X Y} X) \\
&= P(R(Y, X)X) + P(\nabla_{\nabla_Y X} X).
\end{aligned}$$

Onde $P(\nabla_Y \nabla_X X) = -C_{\nabla_X X} Y = 0$, pois $\nabla_X X = 0$ ao longo de γ'. Sendo

$$P(\nabla_{\nabla_Y X} X) = -C_{\gamma'} P(\nabla_Y X) = C_{\gamma'}^2 Y,$$

obtemos que

$$\left(\frac{D}{dt} C_{\gamma'}\right) Y = C_{\gamma'}^2 Y + P(R(Y, \gamma')\gamma').$$

$\square$

Definição 18. *Seja* $f : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ *uma imersão isométrica. Denotaremos por* ν_0 *o índice de nulidade relativa mínima de* f*, definido como*

$$\nu_0 = \min_{p \in M} \nu(p),$$

onde $\nu(p)$ *é o índice de nulidade relativa de* f *em* $p \in M$*.*

Na proposição seguinte, apresentamos propriedades satisfeitas pelo índice de nulidade relativa.

Proposição 11. *Para uma imersão isométrica* $f : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ *temos:*

(i) A distribuição de nulidade relativa $p \mapsto \Delta(p)$ *é suave em qualquer subconjunto aberto onde* ν *é constante;*

(ii) O conjunto $\mathcal{O} = \{p \in M; \nu(p) = \nu_0\}$ *é aberto.*

Temos o seguinte

Lema 7. *Seja* $f : M^n \to \overline{M}^{n+k}(c)$ *uma imersão isométrica. Para cada* $W \in \Delta^T(\gamma(0))$*, existe um único campo vetorial* Y *sobre* $\gamma\big|_{[0,b)}$ *tal que:*

(1) $Y(0) = W$*;*

(2) $\dfrac{D}{dt}Y + C_{\gamma'}Y = 0,\ 0 \leqslant t < b$,

e Y *se estende suavemente a* $t = b$*.*

Demonstração. Segue do Teorema de Existência e Unicidade, da Teoria das Equações Diferenciais Ordinárias, que os itens (1) e (2) são válidos. Desta forma, nos resta mostrar que Y se estende suavemente a $t = b$. Calculando a segunda derivada temos que

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{D^2}{dt^2}Y + \frac{D}{dt}C_{\gamma'}Y \\
&= \frac{D^2}{dt^2}Y + \left(\frac{D}{dt}C_{\gamma'}\right)Y + C_{\gamma'}\frac{D}{dt}Y \\
&= \frac{D^2}{dt^2}Y + \left(\frac{D}{dt}C_{\gamma'}\right)Y - C_{\gamma'}^2 Y \\
&= \frac{D^2}{dt^2}Y + P(R(Y,\gamma')\gamma') \\
&= \frac{D^2}{dt^2}Y + cY,
\end{aligned}$$

onde a última equação segue da Proposição (10). Isto nos diz que Y é solução de uma EDO linear de segunda ordem com coeficientes constantes em $[0, b)$, e assim estende-se a $t = b$. □

Finalmente, enunciamos e demonstramos o

Teorema 4 (Ferus). *Sejam $\overline{M}$ uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante c, $f : M^n \to \overline{M}^{n+k}(c)$ uma imersão isométrica e $U \subset M$ um conjunto aberto com índice de nulidade relativa constante igual a m. Então, em U, temos*

(i) A distribuição de nulidade relativa Δ é suave e integrável, e suas folhas são totalmente geodésicas em M^n e $\overline{M}^{n+k}$;

(ii) Se $\gamma : [0, b] \longrightarrow M$ é uma geodésica tal que $\gamma([0, b])$ está contido em uma folha de Δ, então $\nu(\gamma(b)) = m$;

(iii) Se M é completa, então as folhas da distribuição com nulidade relativa mínima são completas.

Demonstração. Dados $X, Y \in \Delta$ e $Z \in TM$, temos que

$$(\nabla^{\perp}_{Z} A)(X, Y) = \nabla^{\perp}_{Z} A(X, Y) - A(\nabla_Z X, Y) - A(X, \nabla_Z Y) = 0 \tag{2.5}$$

Daí, pela equação de Codazzi segue que

$$0 = (\nabla^{\perp}_{X} A)(Z, Y) = -A(Z, \nabla_X Y).$$

Assim $\nabla_X Y \in \Delta$. Analogamente $\nabla_Y X \in \Delta$, donde obtemos que $[X, Y] \in \Delta$ e concluímos que Δ é involutiva. Pelo Teorema 2 segue que Δ é completamente integrável. Além disso

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + A(X, Y) = \nabla_X Y \in \Delta,$$

o que mostra que as folhas são totalmente geodésicas em M^n e $\overline{M}^{n+k}$. E portanto está demonstrado o item (i).

Sejam F uma folha de Δ contendo $\gamma([0, b))$ e Z um campo de vetores, paralelo ao longo de γ, tal que $Z(\gamma(b)) \in \Delta(\gamma(b))$. É suficiente mostrar que $Z(\gamma(0)) \in \Delta(\gamma(0))$. Daí, teremos que $\nu(\gamma(0)) \geqslant \nu(\gamma(b))$ e assim $\nu(\gamma(0)) = \nu(\gamma(b))$.

Sejam X uma extensão de γ' em Δ e Y como no Lema 7. Temos que,

$$\begin{aligned}
\nabla^{\perp}_{\gamma'} h(Y, Z) &= (\nabla^{\perp}_{X} h)(Y, Z) + h\left(\frac{D}{dt} Y, Z\right) \\
&= (\nabla^{\perp}_{Y} h)(X, Z) + h\left(\frac{D}{dt} Y, Z\right) \\
&= -h(\nabla_Y X, Z) + h\left(\frac{D}{dt} Y, Z\right) \\
&= h\left(C_{\gamma'} Y + \frac{D}{dt} Y, Z\right) = 0.
\end{aligned}$$

Em particular, $\|h(Y, Z)\|$ é constante ao longo de γ e se anula em $\gamma(b)$. De fato, como $Z(\gamma(b)) \in \Delta(\gamma(b))$ temos $A(Y(\gamma(0)), Z(\gamma(0))) = 0$ e, portanto, $Z(\gamma(0)) \in \Delta(\gamma(0))$. Isto prova o item (ii). O item (iii) segue imediatamente de (ii). $\square$

Exemplo 5. *Seja* $f : M^2 \to \mathbb{R}^3$ *uma superfície com curvatura gaussiana nula, tal que* $\nu = 1$ *em* M. *Então pelo Teorema de Ferus, a distribuição* Δ *é integrável e possui folhas totalmente geodésicas em* M *e em* $\mathbb{R}^3$, *que são retas.*

Capítulo 3

O operador L_r

Seja $\overline{M}^{n+1}(c)$ uma variedade Riemanniana orientável simplesmente conexa de curvatura seccional constante c. Uma vez que $\overline{M}$ é orientável, podemos considerar um elemento de volume $d\overline{M}$ globalmente definida sobre $\overline{M}$. Considere agora, uma imersão isométrica $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}(c)$ de uma variedade Riemanniana orientável compacta conexa M^n. Sejam A o operador de Weingarten da imersão x, $S_r = \sum_{i_1<\cdots<i_r} \lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_r}$ a r-ésima função simétricas elementar associada a A e $H_r = \frac{S_r}{\binom{n}{r}}$ a r-ésima curvatura média. Lembremos que, as funções simétricas elementares S_r associadas a A podem ser definidas usando o polinômio característico de A, a saber:

$$\det(tI - A) = (t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_n) = \sum_{r}^{n} (-1)^r S_r t^{n-r}.$$

Proposição 12. *Seja $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}(c)$ uma imersão num espaço de curvatura seccional constante c. Então a curvatura escalar R de M é dada por*

$$n(n-1)(R-c) = 2S_2.$$

Em particular, $S_2 \equiv 0$ se, e só se, $R = c$.

Demonstração. Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a base ortonormal de T_pM que diagonaliza A, associada aos autovalores $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Então, por definição temos que

$$R(p) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Ric_p(e_j).$$

Assim,

$$Ric_p(e_j) = \frac{1}{n-1}\sum_{i\neq j} \langle R(e_j, e_i)e_i, e_j\rangle.$$

Daí, obtemos que

$$\begin{aligned} R(p) &= \frac{1}{n(n-1)}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i\neq j}\langle R(e_j,e_i)e_i,e_j\rangle \\ &= \frac{1}{n(n-1)}\sum_{ij}\sum_{j=1}^{n}\langle R(e_j,e_i)e_i,e_j\rangle \\ &= \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i\neq j}\sum_{j=1}^{n}K(e_i,e_j). \end{aligned}$$

Pela Equação de Gauss, segue que $K(e_i,e_j) = c + \lambda_i\lambda_j$. Donde obtemos

$$n(n-1)R(p) = \sum_{i\neq j}\sum_{j=1}^{n}(c+\lambda_i\lambda_j),$$

isto é,

$$n(n-1)R(p) = cn(n-1) + 2\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j.$$

Portanto,

$$n(n-1)(R-c) = 2S_2.$$

□

Na proposição a seguir, estabelecemos uma desigualdade que será de fundamental importância para demonstração de alguns resultados. A demonstração da proposição pode ser encontrada em [2].

Proposição 13. *Dados $n \in \mathbb{N}$ números reais $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, para cada $0 \leqslant r \leqslant n$ defina $S_r = \sum_{i_1<\cdots<i_r}\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_r}$ e $H_r = \frac{S_r}{\binom{n}{r}}$.*

(i) *Para todo $1 \leqslant r < n$, temos que $H_r^2 \geqslant H_{r-1}H_{r+1}$. Além disso, a igualdade ocorre para $r = 1$ ou para algum $1 < r < n$, com $H_{r+1} \neq 0$, se e somente se, $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n$;*

(ii) *Se $H_1, H_2, \dots, H_r > 0$ para algum $1 < r \leqslant n$, então vale a seguinte desigualdade $H_1 \geqslant \sqrt{H_2} \geqslant \sqrt[3]{H_3} \geqslant \ldots \geqslant \sqrt[r]{H_r}$. Além disso, se a igualdade ocorre para algum $1 \leqslant j < r$, então $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n$;*

(iii) *Se para algum $1 \leqslant r < n$ temos que $H_r = H_{r+1} = 0$, então $H_j = 0$ para todo $r \leqslant j \leqslant n$. Em particular, no máximo $r-1$ dos λ_i são diferentes de zero.*

As transformações clássicas de Newton P_r são definidas indutivamente por:

$P_0 = I$

$P_r = S_r I - AP_{r-1}$.

Segue da fórmula de recorrência que $P_r = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j S_{r-j} A^j$, onde $S_0 = 1$. Como A é um operador auto-adjunto, segue que cada A^j também o é. Por outro lado, como a soma de operadores auto-adjuntos é um operador auto-adjunto, segue da expressão obitida que, para cada r, P_r é um operador auto-adjunto.

Sejam $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal de autovetores de A, correspondendo respectivamente aos autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Da expressão obtida para P_r, segue que

$$P_r(e_i) = \left(\sum_{j=0}^{r} (-1)^j S_{r-j} {\lambda_i}^j \right) e_i.$$

Assim, cada P_r possui os mesmos autovetores de A. Representando por A_i a restrição da transformação A ao subespaço normal a e_i, e por $S_r(A_i)$ a r-função simétrica associada a A_i. Considerando $S_{n+1} = 0$, no lema abaixo apresentamos alguns resultados clássicos sobre os autovalores do operador P_r.

Lema 8. *Para cada* $1 \leqslant r \leqslant n-1$, *vale:*

(1) $P_r(e_i) = S_r(A_i) e_i$, *para cada* $1 \leqslant i \leqslant n$;

(2) $\mathrm{tr}(P_r) = \sum_{i=1}^{n} S_r(A_i) = (n-r) S_r$;

(3) $\mathrm{tr}(AP_r) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_r(A_i) = (r+1) S_{r+1}$;

(4) $\mathrm{tr}(A^2 P_r) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 S_r(A_i) = S_1 S_{r+1} - (r+2) S_{r+2}$.

onde tr *denota o traço do operador.*

Demonstração. Para provarmos o item (1), faremos indução sobre r. Para $r = 1$ temos

$$P_1(e_i) = (S_1 I - A) e_i = (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n) e_i - \lambda_i e_i = (\lambda_1 + \cdots + \widehat{\lambda_i} + \cdots + \lambda_n) e_i = S_1(A_i) e_i.$$

Agora suponhamos que o resultado é válido para $r - 1$, isto é,

$$P_{r-1}(e_i) = S_{r-1}(A_i) e_i.$$

Desta forma,

$$P_r(e_i) = S_r I(e_i) - A(P_{r-1}(e_i)) = (S_r - S_{r-1}(A_i)\cdot\lambda_i)\, e_i = S_r(A_i)e_i.$$

Para o item (2), observe que os autovalores de P_r associados a base ortonormal $e_1,\ldots,e_n$ são $S_r(A_1),\ldots,S_r(A_n)$, respectivamente. Assim $tr(P_r) = \sum_{i=1}^{n} S_r(A_i)$, o que prova a primeira igualdade do item (2). Para provar a segunda igualdade, considere S_r e $S_r(A_i)$ como polinômios homogêneos nas variáveis λ_i. Se $i \notin \{j_1,\ldots,j_r\}$, cada monômio $\lambda_{j_1}\cdots\lambda_{j_r}$ de S_r é também um monômio de $S_r(A_i)$. Assim, cada monômio aparece exatamente $n-r$ vezes no somatório $\sum S_r(A_i)$. Reciprocamente, cada monômio de $S_r(A_i)$ é um monômio de S_r. Portanto, $\sum_{i=1}^{n} S_r(A_i) = (n-r)S_r$ o que prova a segunda igualdade do item (2).

Segue do item (1) que os autovalores de AP_r, associados a base ortonormal $\{e_1,\ldots,e_n\}$ são, respectivamente, $\lambda_1 S_r(A_1),\ldots,\lambda_r S_r(A_n)$. Assim $tr(AP_r) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i S_r(A_i)$, o que prova a primeira igualdade do item (3). Da definição do operador P_r segue que

$$tr(AP_r) = tr(S_{r+1}I) - tr(P_{r+1}) = nS_{r+1} - (n+r-1)S_{r+1} = (r+1)S_{r+1}.$$

Concluindo a prova do item (3). Novamente pelo item (1), temos que os autovalores de A^2P_r são, respectivamente, $\lambda_1^2 S_r(A_1),\ldots,\lambda_r^2 S_r(A_n)$. Assim $tr(A^2P_r) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 S_r(A_i)$, o que prova a primeira igualdade do item (4). Da igualdade $P_{r+1} = S_{r+1}I - AP_r$ concluímos que

$$tr(A^2P_r) = tr(S_{r+1}A) - tr(AP_{r+1}) = S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2},$$

finalizando a demonstração do lema. $\square$

Associado a cada transformção de Newton P_r, da imersão $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$, temos o operador diferencial de segunda ordem L_r definido abaixo por:

$$L_r(f) = tr(P_r \mathrm{Hess}\,(f)).$$

Quando $\overline{M}^{n+1}$ é uma variedade Riemanniana orientável simplesmente conexa de curvatura seccional constante c, H. Rosenberg provou em [10], como uma consequência da equação de Codazzi que

$$L_r(f) = \mathrm{div}\,(P_r\nabla f).$$

Uma consequência muito útil deste fato é dada na seguinte proposição.

Proposição 14. *Seja* $x : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$ *uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana compacta sem bordo em um forma espacial. Então,*

$$\int_M L_r(f)dM = 0 \text{ e } \int_M fL_r(f)dM = -\int_M \langle P_r\nabla f, \nabla f\rangle dM.$$

Demonstração. Como podemos escrever L_r na forma divergente $L_r(f) = \mathrm{div}\,(P_r\nabla f)$, segue diretamente do Teorema da Divergência que $\int_M L_r(f)dM = 0$. Para provar a segunda igualdade, observe que, das propriedades do operador divergente, temos

$$\mathrm{div}\,(f \cdot P_r\nabla f) = f \cdot L_r(f) + \langle \nabla f, P_r\nabla f\rangle.$$

Pelo Teorema da Divergência, segue que

$$0 = \int_M \mathrm{div}\,(f \cdot P_r\nabla f)dM = \int_M f \cdot L_r(f)dM + \int_M \langle \nabla f, P_r\nabla f\rangle dM,$$

donde obtemos a igualdade desejada. □

Representaremos por $\overline{M}^{n+1}(c)$ o espaço Euclidiano $(n+1)$-dimensional, no caso onde $c = 0$, ou a esfera Euclidiana $(n+1)$-dimensional, no caso em que $c > 0$, ou o espaço Hiperbólico $(n+1)$-dimensional, no caso em que $c < 0$. O modelo do espaço Hiperbólico considerado é definido a seguir:

A métrica de Lorentz em $\mathbb{R}^{n+2}$ é definida do seguinte modo: consideremos a base canônica $a_1 = (1, 0, \cdots, 0), \cdots, a_{n+2} = (0, \cdots, 0, 1)$ e introduzamos a forma bilinear simétrica $\langle\, ,\, \rangle$ em $\mathbb{R}^{n+2}$ definida por

$$\langle a_i, a_j\rangle = \delta_{ij},\ \langle a_{n+2}, a_i\rangle = 0,\ \langle a_{n+2}, a_{n+2}\rangle = -1,\ \text{onde } 1 \leqslant i, j \leqslant n+1.$$

A forma bilinear $\langle\, ,\, \rangle$ define um produto interno em $\mathbb{R}^{n+2}$ (que não é positivo definido), denominado de métrica de Lorentz. Indicaremos o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+2}$ munido da métrica $\langle\, ,\, \rangle$ por E^{n+2}.

Considere agora, o conjunto dos pontos $x \in E^{n+2}$ tais que $\langle x, x\rangle = -1$. Escrevendo $x = x_1a_1 + \cdots + x_{n+1}a_{n+1} + x_{n+2}a_{n+2}$, temos que

$$\langle x, x\rangle = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 - x_{n+2}^2 = -1.$$

Um tal conjunto é um "hiperbolóide de duas folhas" em E^{n+2}, a componente conexa do hiperbolóide correspondente a $x_{n+2} > 0$ será indicada por $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ e denominada de espaço Hiperbólico. Mostra-se que: a restrição da forma bilinear $\langle\, ,\, \rangle$ a $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ define uma métrica; $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ tem curvatura seccional constante igual a -1; o espaço tangente em cada ponto de $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ é normal a x, na métrica de Lorentz.

Considere um vetor fixo $U \in \mathbb{R}^{n+2}$. Dada um imersão isométrica $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}(c)$, seja N o campo unitário normal à imersão. As funções suporte $f = \langle N, U\rangle$ e $g = \langle x, U\rangle$ têm um importante papel na teoria das imersões. Alguns autores, por exemplo [4] e [10], obtiveram importantes fórmulas envolvendo tais funções suportes. Apresentaremos na proposição abaixo as expressões do gradiente e do Laplaciano das funções suporte definidas. Para isto, apresentamos a definição de derivada covariante de tensores e algumas propriedades básicas.

Definição 19. *Um tensor T de ordem r em uma variedade Riemanniana M é uma aplicação multilinear*

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{r-\text{fatores}} \to C^\infty(M).$$

Definição 20. *Seja T um tensor de ordem r numa variedade Riemanniana, com conexão ∇. A derivada covariante ∇T de T é um tensor de ordem $(r+1)$ dado por*

$$\nabla T(Y_1, \ldots, Y_r, X) = X(T(Y_1, \ldots, Y_r)) - \sum_{i=1}^{n} T(Y_1, \ldots, \nabla_X Y_i, \ldots, Y_r).$$

Para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$, a derivada covariante $\nabla_X T$ de T em relação a X é um tensor de ordem r dado por

$$\nabla_X T(Y_1, \ldots, Y_r) = \nabla T(Y_1, \ldots, Y_r, X).$$

Observação 4. *Nas definições 19 e 20, se considerarmos o caso particular $r = 2$ temos*

$$\nabla T(Y, X) = \nabla_X T(Y) - T(\nabla_X Y).$$

Além disso, mostra-se no caso $r = 1$ que $\operatorname{tr}(\nabla_X T) = X(\operatorname{tr} T)$.

Proposição 15. *Para toda imersão $x : M^n \to M^{n+1}(c)$ onde $M^{n+1}(c)$ representa o $\mathbb{R}^{n+1}$, a esfera Euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ ou o espaço Hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$, as funções suporte $f = \langle N, U\rangle$ e $g = \langle x, U\rangle$ satisfazem:*

$$\begin{aligned}
\nabla g &= U^\top; \\
L_r(g) &= (r+1)S_{r+1}f - c(n-r)S_r g; \\
\nabla f &= -A(U^\top); \\
L_r(f) &= -\left[S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}\right] f + c(r+1)S_{r+1} g - \nabla_{U^\top} S_{r+1}.
\end{aligned}$$

onde $U^\top$ denota a projeção do campo U sobre o fibrado tangente da imersão x.

Demonstração. Denotaremos por ∇ e $\overline{\nabla}$ as conexões de M^n e $M^{n+1}(c)$, respectivamente. Dado $p \in M$, seja $\{e_1(p), \ldots, e_n(p)\}$ uma base de T_pM que diagonaliza o operador de Weingarten A em p. Sejam $\lambda_i, \ldots, \lambda_n$ os autovalores de A associados a $e_1(p), \ldots, e_n(p)$, respectivamente. Denotemos por $\lambda_i^r, \ldots, \lambda_n^r$ os autovalores de P_r associados aos vetores $e_1(p), \ldots, e_n(p)$, respectivamente. Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ o referencial geodésico, em p, que estende a base acima a uma vizinhança de p em $M^{n+1}(c)$.

Veja que, $e_i(g) = \langle e_i, U\rangle = \langle e_i, U^\top\rangle$. Segue que, $\nabla g = U^\top$. Assim, no ponto p, temos que

$$\begin{aligned}
L_r(g) &= \operatorname{tr}(P_r \text{Hess}\, g) = \sum_{i=1}^{n} \langle P_r \text{Hess}\, g(e_i), e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \text{Hess}\, g(e_i), P_r(e_i)\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^r \langle \text{Hess}\, g(e_i), e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^r \langle \nabla_{e_i} \nabla g, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^r \langle \nabla_{e_i} U^\top, e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^r \langle \overline{\nabla}_{e_i}(U - \langle N, U\rangle N - c \cdot \langle x, U\rangle x), e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^r \left(\langle N, U\rangle \langle A(e_i), e_i\rangle - c \cdot \langle x, U\rangle \langle e_i, e_i\rangle\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i^r \cdot \lambda_i \cdot \langle N, U\rangle - c \cdot \lambda_i^r \cdot \langle x, U\rangle \langle e_i, e_i\rangle\right).
\end{aligned}$$

Observe também que

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(AP_r) &= \sum_{i=1}^{n} \langle AP_r(e_i), e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle P_r(e_i), A(e_i)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \lambda_i^r e_i, \lambda_i e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^r \lambda_i \langle e_i, e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^r \lambda_i. \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

Pelo Lema 8 e por (3.1), temos que

$$L_r(g) = (r+1)S_{r+1}f - c(n-r)S_r g.$$

Agora observe que, $e_i(f) = \langle \overline{\nabla}_{e_i} N, U\rangle = -\langle A(e_i), U\rangle = -\langle e_i, A(U^\top)\rangle$. Donde obtemos que $\nabla f = -A(U^\top)$. Para o cálculo do $L_r(f)$, usamos em $(*)$ que o operador P_r é livre de divergência, a demonstração deste fato pode ser encontrada em [10]. Mais precisamente, temos

$$\begin{aligned}
L_r(f) &= \operatorname{tr}(P_r \operatorname{Hess} f) = \sum_{i=1}^{n} \langle P_r \operatorname{Hess} f(e_i), e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle P_r(\nabla_{e_i} \nabla f), e_i\rangle \overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} P_r(\nabla f), e_i\rangle = -\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} P_r A(U^\top), e_i\rangle \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \langle P_r A(\nabla_{e_i} U^\top), e_i\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla(P_r A)(e_i, U^\top), e_i\rangle \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^r \cdot \lambda_i \cdot \langle \nabla_{e_i} U^\top, e_i\rangle - \operatorname{tr}(\nabla_{U^\top}(P_r A)) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^r \cdot \lambda_i \cdot \langle \overline{\nabla}_{e_i}(U - \langle N, U\rangle N - c \cdot \langle x, U\rangle x), e_i\rangle - U^\top(\operatorname{tr}(P_r A)) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^r \cdot \lambda_i \cdot (\langle N, U\rangle \langle A(e_i), e_i\rangle - c \cdot \langle x, U\rangle \langle e_i, e_i\rangle) - (r+1)\nabla_{U^\top} S_{r+1} \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i^r \cdot \lambda_i^2 \cdot \langle N, U\rangle - c \cdot \lambda_i^r \cdot \lambda_i \langle x, U\rangle\right) - (r+1)\nabla_{U^\top} S_{r+1}.
\end{aligned}$$

Do mesmo modo, temos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(A^2 P_r) &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle A^2 P_r(e_i), e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle A P_r(e_i), A(e_i)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle A P_r(e_i), \lambda_i e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle P_r(e_i), \lambda_i A(e_i)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \lambda_i^r e_i, \lambda_i^2 e_i \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^r \lambda_i^2. \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Portanto pelo Lema 8, por (3.1) e por (3.2) temos que

$$L_r(g) = -\left[S_1 S_{r+1} - (r+2) S_{r+2}\right] f + c(r+1) S_{r+1} g - \nabla_{U^\top} S_{r+1}.$$

□

Definição 21. *Seja M^n uma variedade Riemanniana orientada e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Dada $\omega \in \Omega^k(M)$, a contração de ω na direção de X é a $(k-1)$-forma $\iota_X \omega \in \Omega^{k-1}(M)$ dada por*

$$(\iota_X \omega)_p(u_1, \ldots, u_{k-1}) = \omega_p(X_p, u_1, \ldots, u_{k-1})$$

para todo $p \in M$ e quaisquer $u_1, \ldots, u_{k-1} \in T_p M$.

Proposição 16. *Sejam* (M^n, g) *uma variedade Riemanniana orientada e* dM *a forma canônica do elemento de volume. Então para qualquer campo vetorial* X*, vale*

$$d(\iota_X dM) = \operatorname{div} X \cdot dM.$$

Demonstração. Seja $p \in M$. Tome uma base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de T_pM. Como a n-forma dM é paralela, temos

$$(D_{e_1}(\iota_X dM))_p(e_1, \ldots, e_n) = (dM)_p(D_{e_1}X, e_1, \ldots, e_n).$$

Donde concluímos que

$$\begin{aligned}
(d(\iota_X dM))_p &= \sum_{i=1}^{n} dM(e_1, \ldots, D_{e_1}X, \ldots, e_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} g(e_i, D_{e_i}X) \cdot dM(e_1, \ldots, e_n) \\
&= \operatorname{div} X \cdot dM.
\end{aligned}$$

$\square$

Capítulo 4

Gráficos no Espaço Euclidiano

Em [18], S.T. Yau obteve uma versão do Teorema de Stokes para variedades Riemanniana completas não-compactas, a saber:

Lema 9. *Seja* ω *uma* $(n-1)$*-forma suave integrável definida em* M^n*. Então existe uma sequência de domínios* $B_i \subset M^n$ *tal que* $M^n = \bigcup_i B_i$*,* $B_i \subset B_{i+1}$*, e*

$$\lim_{i\to\infty} \int_{B_i} d\omega = 0.$$

A demonstração deste teorema utiliza argumentos da teoria geométrica da medida e a fórmula da Co-área.

Definição 22. *Seja* M^n *uma variedade Riemanniana. Dizemos que uma função suave* $f : M^n \to \mathbb{R}$ *é* **harmônica (subharmônica)** *se* $\Delta f = (\geqslant) 0$*.*

Aplicando o resultado do lema acima para $\omega = \iota_{\nabla f} dM$, onde $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função suave e $\iota_{\nabla f} dM$ é a contração do elemento de volume dM na direção de ∇f, Yau estabeleceu a seguinte extensão do Teorema de Hopf para variedades Riemanniana completas não-compactas.

Corolário 2. *Sejam* M *uma variedade Riemanniana completa não-compacta e* $u : M \to \mathbb{R}$ *uma função subharmônica tal que* $\int_M |du| < \infty$*, então* u *é harmônica.*

Suponhamos que M seja orientada pelo elemento de volume dM, denotaremos por $\mathcal{L}^1(M)$ o espaço das funções Lebesgue integráveis em M.

Proposição 17. *Seja* X *um campo de vetores suave em* M*, variedade* n*-dimensional completa, não-compacta e orientada, tal que* $\operatorname{div} X$ *não muda de sinal em* M*. Se* $|X| \in \mathcal{L}^1(M)$*, então* $\operatorname{div} X = 0$ *em* M*.*

Demonstração. Suponha, sem perda de generalidade, que $\operatorname{div} X \geqslant 0$ em M. Seja ω a $(n-1)$-forma em M dada por $\omega = \iota_X dM$, isto é, a contração de dM na direção do campo X. Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um referencial ortonormal em um aberto $U \subset M$, com coreferencial $\{\omega_1, ..., \omega_n\}$, então

$$\iota_X dM = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \omega_i(X) \omega_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\omega_i} \wedge \ldots \wedge \omega_n.$$

Por outro lado, se escrevermos $X = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$, temos

$$\omega_i(X) = \omega_i\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j \omega_i(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \delta_{ij} = \sum_{j=1}^{n} x_j \langle e_j, e_i \rangle = \langle X, e_i \rangle .$$

Assim,

$$\iota_X dM = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \langle X, e_i \rangle \, \omega_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\omega_i} \wedge \ldots \wedge \omega_n.$$

Como as $(n-1)$-formas $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\omega_i} \wedge \ldots \wedge \omega_n$ são ortonormais em $\Omega^{n-1}(M)$, temos que

$$|\omega|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle X, e_i \rangle^2 = |X|^2.$$

Isto nos diz que $|\omega| \in \mathcal{L}^1(M)$, pois $|X| \in \mathcal{L}^1(M)$. Além disso, pela Proposição 16 temos que $d\omega = d(\iota_X dM) = \operatorname{div} X \cdot dM$. Logo, tomando B_i como no Lema 9 temos

$$\int_{B_i} \operatorname{div} X \cdot dM = \int_{B_i} d\omega \xrightarrow{i} 0.$$

Agora usando nossa hipótese $\operatorname{div} X \geqslant 0$, segue que $\operatorname{div} X = 0$. $\square$

Agora, sejam $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade Riemanniana $(n+1)$-dimensional e M uma hipersuperfície orientável, completa, imersa em $\overline{M}$, orientada pela escolha de um campo de vetores normal unitário suave N. Seja $A : TM \to TM$ o operador de Weingarten, isto é, $A(X) = -\overline{\nabla}_X N$ onde $\overline{\nabla}$ é a conexão de $\overline{M}$.

Corolário 3. *Seja $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}(c)$ uma hipersuperfície completa, orientada de uma forma espacial $\overline{M}^{n+1}(c)$, com segunda forma fundamental limitada. Se $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função suave tal que $|\nabla f| \in \mathcal{L}^1(M)$ e $L_r(f)$ não muda de sinal em M, então $L_r(f) = 0$.*

Demonstração. Os autovalores de A são funções contínuas em M. Pela expressão $P_r = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j S_{r-j} A^j$, segue-se que $\|P_r\|$ é limitada em M. Daí, existe uma contante

$k > 0$ tal que $\|P_r\| \leqslant k$. Logo,

$$|P_r(\nabla f)| \leqslant \|P_r\||\nabla f| \leqslant k|\nabla f| \in \mathfrak{L}^1(M).$$

Como $L_r(f) = \operatorname{div}(P_r \nabla f)$ não muda de sinal em M, pela proposição anterior segue que $L_r(f) = 0$ em M. □

Estamos interessados em analisar o caso $\overline{M}^{n+1}(0) = \mathbb{R}^{n+1}$. Seja U um vetor fixo de $\mathbb{R}^{n+1}$ e considere $f, g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por:

$$f = \langle N, U \rangle \ \text{ e } \ g = \langle x, U \rangle \,,$$

onde N é o campo vetorial unitário normal a M. Denotemos por U^T a projeção de U sobre T_pM para qualquer $p \in M$.

Consideremos o caso que M é o gráfico de uma função suave $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, isto é,

$$M^n = \{(x_1, \ldots, x_n, u(x_1, \ldots, x_n)) : (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}.$$

Suponha ainda que $U = (-V, 1)$, onde V é um vetor fixo de $\mathbb{R}^n$. Consideremos agora a parametrização $\varphi : \mathbb{R}^n \to M^n$ dada naturalmente por

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, u(x_1, \ldots, x_n)).$$

Com um cálculo direto, obtemos as expressões abaixo para os campos coordenados $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$:

$$\varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = e_i + u_i \cdot e_{n+1},$$

onde $\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}\}$ é base canônica do $\mathbb{R}^{n+1}$. Encontraremos a expressão do campo normal unitário a M. Para isto, suponha que

$$N = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i e_i.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
0 &= \langle N, \varphi_k \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i e_i, e_k + u_k e_{n+1} \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i + \alpha_{n+1} e_{n+1}, e_k + u_k e_{n+1} \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, e_k \right\rangle + \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, u_k e_{n+1} \right\rangle \\
&\quad + \langle \alpha_{n+1} e_{n+1}, e_k \rangle + \langle \alpha_{n+1} e_{n+1}, u_k e_{n+1} \rangle \\
&= \alpha_k + \alpha_{n+1} u_k,
\end{aligned}$$

donde obtemos

$$\alpha_k = -\alpha_{n+1} u_k.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
1 &= |\,N\,|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i + \alpha_{n+1} e_{n+1}, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i + \alpha_{n+1} e_{n+1} \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\rangle + 2 \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \alpha_{n+1} e_{n+1} \right\rangle \\
&\quad + \langle \alpha_{n+1} e_{n+1}, \alpha_{n+1} e_{n+1} \rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\rangle + \alpha_{n+1}^2.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
1 &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} (-\alpha_{n+1} u_i e_i), \sum_{i=1}^{n} (-\alpha_{n+1} u_i e_i) \right\rangle \\
&= \alpha_{n+1}^2 \left\langle \sum_{i=1}^{n} u_i e_i, \sum_{i=1}^{n} u_i e_i \right\rangle + \alpha_{n+1}^2 \\
&= \alpha_{n+1}^2 \left(\|\nabla u\|^2 + 1 \right),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{\|\nabla u\|^2 + 1}}.$$

Com isto, obtemos a seguinte expressão para o campo normal unitário

$$N = \frac{1}{W}(-\nabla u, 1),$$

onde $W = \sqrt{|\nabla u|^2 + 1}$ e $\nabla\, u$ denota o gradiente da função u.

Agora calculemos a expressão para a componente tangente de U. Sendo $U = (-V, 1)$ e $U^T = U - \langle U, N \rangle\, N$, temos

$$\begin{aligned}
U^T &= U - \langle U, N \rangle N \\
&= (-V, 1) - \frac{1}{W^2} \langle (-V, 1), (-\nabla\, u, 1) \rangle \cdot (-\nabla\, u, 1) \\
&= \frac{1}{W^2} \left[\big(-(|\nabla\, u|^2 + 1)V, (|\nabla\, u|^2 + 1)) \big) - (\langle V, \nabla\, u \rangle + 1) \cdot (-\nabla\, u, 1) \right] \\
&= \frac{1}{W^2} \left[(-|\nabla\, u|^2 V - V + \langle V, \nabla\, u \rangle \cdot \nabla\, u + \nabla\, u, (|\nabla\, u|^2 + 1) - \langle V, \nabla\, u \rangle - 1) \right].
\end{aligned}$$

Portanto,

$$U^T = \frac{1}{W^2} (\nabla u - V + \langle \nabla u, V \rangle\, \nabla u - |\nabla u|^2 V, \langle \nabla u, \nabla u - V \rangle).$$

Obteremos uma estimativa para $|U^T|$. Para isto, veja que

$$
\begin{aligned}
|U^T|^2 = \left\langle U^T, U^T \right\rangle &= \frac{1}{W^4}\left[|\nabla u - V + \langle \nabla u, V\rangle \nabla u - |\nabla u|^2 V|^2 \right] \\
&+ \frac{1}{W^4}\left[|\left\langle \nabla u, \nabla u - V \right\rangle|^2 \right].
\end{aligned}
$$

Agora observe que,

$$
\begin{aligned}
|\nabla u - V + \langle \nabla u, V\rangle \nabla u - |\nabla u|^2 V|^2 &= |\nabla u - V|^2 + 2\left\langle \nabla u - V, \langle \nabla u, V\rangle \nabla u - |\nabla u|^2 V \right\rangle \\
&+ |\langle \nabla u, V\rangle \nabla u - |\nabla u|^2 V|^2.
\end{aligned}
$$

Mais ainda,

$$
\begin{aligned}
\langle \nabla u, V\rangle \nabla u - |\nabla u|^2 V &= \langle \nabla u, V\rangle \nabla u - \langle \nabla u, \nabla u\rangle V \\
&= \langle \nabla u, V\rangle \nabla u - \langle \nabla u, V\rangle V \\
&\quad + \langle \nabla u, V\rangle V - V \langle \nabla u, \nabla u\rangle V \\
&= \langle \nabla u, V\rangle (\nabla u - V) + \langle \nabla u, V - \nabla u\rangle V.
\end{aligned}
$$

Com isto, obtemos

$$
\begin{aligned}
|\langle \nabla u, V\rangle \nabla u - |\nabla u|^2 V| &= |\langle \nabla u, V\rangle (\nabla u - V) + \langle \nabla u, V - \nabla u\rangle V| \\
&\leqslant |\langle \nabla u, V\rangle||\nabla u - V| + |\langle \nabla u, V - \nabla u\rangle||V| \\
&\leqslant |\nabla u||V||\nabla u - V| + |\nabla u||\nabla u - V||V| \\
&= 2|\nabla u| \cdot |V| \cdot |\nabla u - V|.
\end{aligned}
$$

Daí concluímos também que

$$
\begin{aligned}
\left\langle \nabla u - V, \langle \nabla u, V\rangle \nabla u - |\nabla u|^2 V \right\rangle &\leqslant |\nabla u - V| \cdot |\langle \nabla u, V\rangle \nabla u - |\nabla u|^2 V| \\
&\leqslant 2|\nabla u - V|^2 \cdot |\nabla u| \cdot |V|.
\end{aligned}
$$

Utilizando que $|\langle \nabla u, \nabla u - V\rangle|^2 \leqslant |\nabla u|^2 \cdot |\nabla u - V|^2$, obtemos a estimativa abaixo:

$$
\begin{aligned}
|\nabla u - V + \langle \nabla u, V\rangle \nabla u - |\nabla u|^2 V|^2 &= |\nabla u - V|^2 + 2\left\langle \nabla u - V, \langle \nabla u, V\rangle \nabla u - |\nabla u|^2 V \right\rangle \\
&+ |\langle \nabla u, V\rangle \nabla u - |\nabla u|^2 V|^2 \\
&\leqslant |\nabla u - V|^2 + 4|\nabla u - V|^2 |V| \cdot |\nabla u| \\
&+ 4|\nabla u|^2 |V|^2 |\nabla u - V|^2.
\end{aligned}
$$

Finalmente, obtemos a estimativa a seguir para $|U^{\top}|$

$$\begin{aligned}
|U^{T}|^2 &= \frac{1}{W^4}\left[|\nabla u - V + \langle \nabla u, V\rangle \nabla u - |\nabla u|^2 V|^2 + |\langle \nabla u, \nabla u - V\rangle|^2\right]\\
&\leqslant \frac{1}{W^4}\left[|\nabla u - V|^2 + 4|\nabla u - V|^2|V|\cdot|\nabla u| + 4|\nabla u|^2|V|^2|\nabla u - V|^2\right]\\
&\quad + \frac{1}{W^4}|\nabla u|^2|\nabla u - V|^2\\
&\leqslant \frac{|\nabla u - V|^2}{W^4}\left[1 + 4|\nabla u|\cdot|V| + 4|\nabla u|^2\cdot|V|^2 + |\nabla u|^2\right]\\
&\leqslant \frac{|\nabla u - V|^2}{W^4}\left[1 + 2|\nabla u|^2 + 2|V|^2 + 4|V|^2|\nabla u|^2 + |\nabla u|^2\right]\\
&= \frac{|\nabla u - V|^2}{W^4}\left[1 + 3|\nabla u|^2 + 2|V|^2 + 4|V|^2|\nabla u|^2\right]\\
&\leqslant \frac{|\nabla u - V|^2}{W^4}\left[3 + 3|\nabla u|^2 + 6|V|^2 + 6|V|^2|\nabla u|^2\right]\\
&= \frac{3|\nabla u - V|^2}{W^4}\left[1 + |\nabla u|^2 + 2|V|^2 + 2|V|^2|\nabla u|^2\right]\\
&= \frac{3|\nabla u - V|^2}{W^4}\left[(1 + 2|V|^2) + (1 + 2|V|^2)|\nabla u|^2\right]\\
&= \frac{3|\nabla u - V|^2}{W^4}\left[(1 + 2|V|^2)(1 + |\nabla u|^2)\right]\\
&= \frac{3|\nabla u - V|^2}{W^2}(1 + 2|V|^2).
\end{aligned}$$

Então

$$|U^{T}| \leqslant \frac{C}{W}|\nabla u - V|,$$

onde $C = \sqrt{3(1 + 2|V|^2)}$. Portanto,

$$\int_M |U^{T}|dM = \int_{\mathbb{R}^n} |U^{T}|W dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \frac{C}{W}|\nabla u - V|W dx = C\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u - V|dx.$$

Suponha que existam constantes positivas R, c e α tais que

$$|p| > R \Rightarrow |\nabla u(p) - V| \leqslant \frac{c}{|p|^{n+\alpha}}.$$

Seja $B = B(0,1)$ a bola unitária do $\mathbb{R}^n$ de centro na origem. Mostraremos que a função $p \mapsto \dfrac{c}{|p|^{n+\alpha}}$ é integrável. Para tal, basta mostrarmos que a função é integrável sobre $B^C = \mathbb{R}^n \setminus B$. De fato, utilizando coordenadas polares temos

$$\begin{aligned}
\int_{B^C} \frac{1}{|x|^{n+\alpha}}\, dx &= \int_1^{\infty}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{1}{|rx'|^{n+\alpha}} r^{n-1}\, dx' dr\\
&= vol(\mathbb{S}^{n-1})\int_1^{\infty} r^{-1-\alpha}\, dr\\
&= vol(\mathbb{S}^{n-1})\left.\frac{r^{-\alpha}}{-\alpha}\right|_1^{\infty}\\
&= vol(\mathbb{S}^{n-1})\frac{1}{\alpha} < \infty.
\end{aligned}$$

Isto implica que $|\nabla u - V| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Donde obtemos que $|U^\top| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

Outra questão que agora trataremos é: relacionar a segunda forma fundamental do gráfico de u como a hessiana de u. Seja h a segunda forma fundamental de M^n com relação ao vetor normal N calculado anteriormente, ou seja,

$$N = \frac{1}{W}(-\nabla u, 1).$$

Sejam $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ os campos coordenados associados à parametrização canônica de M. Então, em coordenadas, temos que

$$h(\varphi_i, \varphi_j) = -\left\langle \overline{\nabla}_{\varphi_i} N, \varphi_j \right\rangle.$$

Entretanto

$$0 = \varphi_i \left\langle N, \varphi_j \right\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_{\varphi_i} N, \varphi_j \right\rangle + \left\langle N, \overline{\nabla}_{\varphi_i} \varphi_j \right\rangle,$$

assim

$$-\left\langle \overline{\nabla}_{\varphi_i} N, \varphi_j \right\rangle = \left\langle N, \overline{\nabla}_{\varphi_i} \varphi_j \right\rangle.$$

Logo,

$$h(\varphi_i, \varphi_j) = \left\langle N, \overline{\nabla}_{\varphi_i} \varphi_j \right\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_{(e_i + u_i e_{n+1})}(e_j + u_j e_{n+1}), N \right\rangle.$$

Calculemos $\overline{\nabla}_{(e_i + u_i e_{n+1})}(e_j + u_j e_{n+1})$.

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{(e_i + u_i e_{n+1})}(e_j + u_j e_{n+1}) &= \overline{\nabla}_{e_i}(e_j + u_j e_{n+1}) + \overline{\nabla}_{u_i e_{n+1}}(e_j + u_j e_{n+1}) \\
&= \overline{\nabla}_{e_i} e_j + \overline{\nabla}_{e_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j} e_{n+1}\right) + u_i \overline{\nabla}_{e_{n+1}} e_j \\
&\quad + u_i \overline{\nabla}_{e_{n+1}}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j} e_{n+1}\right) \\
&= \overline{\nabla}_{e_i} e_j + u_j \overline{\nabla}_{e_i} e_{n+1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} e_{n+1} \\
&\quad + u_i \overline{\nabla}_{e_{n+1}} e_j + u_i u_j \overline{\nabla}_{e_{n+1}} e_{n+1}.
\end{aligned}$$

Utilizando que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é a base canônica e $\overline{\nabla}$ é a derivada usual do $\mathbb{R}^n$, podemos inferir que

$$\overline{\nabla}_{(e_i + u_i e_{n+1})}(e_j + u_j e_{n+1}) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} e_{n+1}.$$

Portanto,

$$h(\varphi_i, \varphi_j) = \left\langle \overline{\nabla}_{\varphi_i} \varphi_j, N \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} e_{n+1}, N \right\rangle.$$

Agora, fazendo uso da expressão de N temos

$$h(e_i, e_j) = h(\varphi_i, \varphi_j) = \frac{1}{W} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{W} \mathrm{Hess}\, u(e_i, e_j).$$

Logo a segunda forma fundamental h do gráfico da função u, com relação ao vetor normal unitário $N = \frac{1}{W}(-\nabla u, 1)$, é

$$h = \frac{1}{W}\mathrm{Hess}\, u.$$

Desta forma, dizer que a segunda forma fundamental é limitada é equivalente a existir uma constante $c > 0$ para qual

$$|h|^2 \leqslant c \Leftrightarrow \frac{1}{|W|^2}||\mathrm{Hess}\, u||^2 \leqslant c \Leftrightarrow ||\mathrm{Hess}\ u||^2 \leqslant c(1 + |\nabla\ u|^2).$$

Agora podemos provar o seguinte:

Teorema 5. *Seja $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ o gráfico de uma função suave $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $|\nabla u - V| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ para algum $V \in \mathbb{R}^n$ e $||\mathrm{Hess}\, u||^2 \leqslant c(1 + |\nabla u|^2)$ para algum $c > 0$. Se existe um inteiro $0 \leqslant r \leqslant n - 2$ tal que as funções simétricas elementares S_{r+1} e S_{r+2} não mudam de sinal em M, então M tem índice de nulidade relativa $\nu \geqslant n - r$. Em particular, se $S_r \neq 0$ então o gráfico é folheado por hiperplanos de dimensão $n - r$.*

Demonstração. Sejam f e g as funções suporte definidas anteriormente. Afirmamos, que f e g são integráveis. De fato, sendo

$$|\nabla f| = |-A(U^T)| \leqslant ||A|| \cdot |U^T| \ \text{ e } \ |\nabla g| = |U^T|$$

como a condição $||\mathrm{Hess}\, u||^2 \leqslant c(1 + |\nabla u|^2)$ nos diz que segunda forma fundamental é limitada e $|U^\top| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ temos que $|\nabla f|, |\nabla g| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Por outro lado, como M é um gráfico então f é positiva ou é negativa em M.

Por hipótese, S_{r+1} não muda de sinal M, então $L_r(g) = (r + 1)S_{r+1}f$ não muda de sinal. Daí, temos como consequência que $L_r(g) = 0$. Com isto, teremos que S_{r+1} se anula em M. Pela expressão $L_r(f) = -(S_1S_{r+1} - (r + 2)S_{r+2})f - U^T(S_{r+1})$, inferimos

$$L_r(f) = (r + 2)S_{r+2}f.$$

Como por hipótese, S_{r+2} não muda de sinal em M, concluímos que $L_r(f) = 0$. Assim, $S_{r+2} = 0$ em M. Portanto, $S_{r+1} = S_{r+2} = 0$. Pela Proposição 13, temos que $S_r = 0$ para todo $j \geqslant r + 1$, e assim $\nu \geqslant n - r$.

Em particular, se $S_r \neq 0$ temos que $\nu = n - r$. Portanto, pelo Teorema de Ferus a distribuição de nulidade relativa determina uma folheação de M cujas folhas são totalmente geodésicas em M e em $\mathbb{R}^{n+1}$, logo são hiperplanos. □

Corolário 4. *Seja* $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *o gráfico de uma função suave* $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *tal que* $|\nabla u - V| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ *para algum* $V \in \mathbb{R}^n$ *e* $\|\mathrm{Hess}\, u\|^2 \leqslant c(1 + |\nabla u|^2)$ *para algum* $c > 0$. *Se a curvatura média e a curvatura escalar de* M *não mudam de sinal, então* M *é um hiperplano de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *ortogonal a* $(-V, 1)$.

Demonstração. Denotemos por H e R, respectivamente, a curvatura média e escalar de M. Por definição, temos $S_1 = nH$. Pela Proposição 12 segue que

$$n(n-1)R = 2S_2.$$

Então, as curvaturas S_1 e S_2 não mudam de sinal em M. Procedendo de modo análogo ao que foi feito no Teorema 5, concluímos que M possui nulidade relativa igual a n. Como M é completa, segue pelo Teorema de Ferus que M é um hiperplano. O resto segue de nossas discussões anteriores. □

Observação 5. *Observe que as condições sobre a função* u *não são supérfluas. Para vermos isto, considere os dois exemplos:*

(1) *Se* $u(x_1, \ldots, x_n) = (x_1^2 + \ldots + x_r^2)(\alpha_{r+1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_n x_n)$, *onde* $\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n$ *são constantes reais todas não nulas. Se* M *é o gráfico de* u, *então, fora do hiperplano* $\alpha_{r+1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_n x_n = 0$, M *possui índice de nulidade relativa exatamente igual a* $n - r$. *Em particular,* $S_{r+1} = S_{r+2} = 0$. *Por outro lado, existe um vetor* V *tal que* $|\nabla u - V| \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. *Além disso, não existe* $c > 0$ *tal que* $\|\mathrm{Hess}\, u\|^2 \leqslant c(1 + |\nabla u|^2)$.

(2) *Se* $u(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ *e* M *é gráfico de* u, *então as curvaturas* S_1 *e* $S_2 > 0$ *são positivas em* M *e* $\|\mathrm{Hess}\, u\|^2 \leqslant 4n(1 + |\nabla u|^2)$. *Contudo, existe* $V \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $|\nabla u - V| \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

Capítulo 5

Folheações de Formas Espaciais

Durante todo o capítulo, $\overline{M}^{n+1}$ denotará uma variedade Riemanniana orientável e $\mathcal{F}$ uma folheação suave de codimensão 1 em $\overline{M}$. Diremos que $\mathcal{F}$ é transversalmente orientável se podemos escolher um campo vetorial unitário suave $N \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ que é normal em cada folha de $\mathcal{F}$. Neste caso, para cada $p \in \overline{M}$ consideremos o operador linear $A : T_p\overline{M} \to T_p\overline{M}$ definido por

$$A(Y(p)) = -\overline{\nabla}_{Y(p)}N,$$

onde $\overline{\nabla}$ denota a conexão de Levi-Civita de $\overline{M}$. É claro que se Y é um campo de vetores suave em $\overline{M}$, então $A(Y)$ também o é. Além disso, se A_F denota a segunda forma fundamental de uma folha F de $\mathcal{F}$, então $A\big|_F = A_F$. Neste sentido, o operador linear $P_r : T_p\overline{M} \longrightarrow T_p\overline{M}$ coincide com o r-ésimo tensor de Newton em cada folha da folheação.

Seguindo [12], tomemos $X = \overline{\nabla}_N N$ que é tangente as folhas da folheação e independe da escolha do campo N. No que se segue, calcularemos o divergente de $P_r(X)$ em $\overline{M}$ e em uma folha F de $\mathcal{F}$.

Proposição 18. *Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação suave transversalmente orientável de codimensão 1 da variedade Riemanniana $\overline{M}^{n+1}$, $N \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ um campo vetorial normal nas folhas de $\mathcal{F}$ e $X = \overline{\nabla}_N N$. Se F é uma folha de $\mathcal{F}$, então*

$$\begin{aligned} \mathrm{div}_F(P_r(X)) &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{R}(N, e_i)N, P_r(e_i)\right\rangle + \langle X, \mathrm{div}_F P_r\rangle \\ &\quad + \mathrm{tr}\,(A^2P_r) + \langle X, P_r(X)\rangle - N(S_{r+1}), \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde $\overline{R}$ é o tensor curvatura de $\overline{M}$, $\{e_i\}$ é referencial ortonormal em F e $\mathrm{tr}\,(\cdot)$ é o traço *do operador entre parênteses em* F*. Além disso,*

$$\mathrm{div}_{\overline{M}} P_r(X) = \mathrm{div}_F P_r(X) - \langle P_r(X), X \rangle \,. \tag{5.2}$$

Demonstração. Dado $p \in F$, escolha um referencial adaptado $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, e_{n+1}\}$ definido numa vizinhança de p em M, isto é, um conjunto ortonormal de campos vetoriais tal que $e_1, \ldots, e_n$ são tangentes em cada folha e $e_{n+1} = N$. Além disso, o referencial pode ser escolhido de tal forma que $A(e_i(p)) = \lambda_i e_i(p)$, para todo $1 \leqslant i \leqslant n$. Denotando por ∇ a conexão Levi-Civita de F, temos

$$\mathrm{div}_F P_r(X) = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} P_r(X), e_i \rangle \,. \tag{5.3}$$

Mas,

$$e_i \langle P_r(X), e_i \rangle = \langle \nabla_{e_i} P_r(X), e_i \rangle + \langle P_r(X), \nabla_{e_i} e_i \rangle \,. \tag{5.4}$$

Sustituindo (5.4) em (5.3), temos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}_F P_r(X) &= \sum_{i=1}^{n} e_i \langle P_r(X), e_i \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle P_r(X), \nabla_{e_i} e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} e_i \langle X, P_r(e_i) \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle X, P_r(\nabla_{e_i} e_i) \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} e_i \left\langle \overline{\nabla}_N N, P_r(e_i) \right\rangle - \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_N N, P_r(\nabla_{e_i} e_i) \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_N N, P_r(e_i) \right\rangle + \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_N N, \overline{\nabla}_{e_i} P_r(e_i) \right\rangle \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_N N, P_r(\nabla_{e_i} e_i) \right\rangle .
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Agora, observe que

$$\overline{R}(N, e_i)N = \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_N N - \overline{\nabla}_N \overline{\nabla}_{e_i} N + \overline{\nabla}_{[N, e_i]} N. \tag{5.6}$$

Substituindo (5.6) em (5.5), temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}_F P_r(X) &= \sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{R}(N,e_i)N, P_r(e_i)\right\rangle + \sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{\nabla}_N\overline{\nabla}_{e_i}N, P_r(e_i)\right\rangle \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{\nabla}_{[N,e_i]}N, P_r(e_i)\right\rangle + \sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{\nabla}_N N, \overline{\nabla}_{e_i}P_r(e_i)\right\rangle \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{\nabla}_N N, P_r(\nabla_{e_i}e_i)\right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{R}(N,e_i)N, P_r(e_i)\right\rangle - \sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{\nabla}_N A(e_i), P_r(e_i)\right\rangle \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{\nabla}_{[N,e_i]}N, P_r(e_i)\right\rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{\nabla}_N N, \overline{\nabla}_{e_i}P_r(e_i) - P_r(\nabla_{e_i}e_i)\right\rangle . \qquad (5.7)
\end{aligned}$$

Como

$$[N,e_i] = \sum_{j=1}^{n}\langle [N,e_i], e_j\rangle\, e_j + \langle [N,e_i], N\rangle\, N,$$

então

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{[N,e_i]}N &= \overline{\nabla}_{\sum_{j=1}^{n}\left\langle [N,e_i],e_j\right\rangle e_j + \langle [N,e_i],N\rangle N}N \\
&= \sum_{j=1}^{n}\langle [N,e_i], e_j\rangle\, \overline{\nabla}_{e_j}N + \langle [N,e_i], N\rangle\, \overline{\nabla}_N N.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{\nabla}_{[N,e_i]}N, P_r(e_i)\right\rangle &= \sum_{i,j=1}^{n}\langle [N,e_i], e_j\rangle \left\langle \overline{\nabla}_{e_j}N, P_r(e_i)\right\rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\langle [N,e_i], N\rangle \left\langle \overline{\nabla}_N N, P_r(e_i)\right\rangle . \qquad (5.8)
\end{aligned}$$

Também temos que,

$$N\,\langle A(e_i), P_r(e_i)\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_N A(e_i), P_r(e_i)\right\rangle + \left\langle A(e_i), \overline{\nabla}_N P_r(e_i)\right\rangle . \qquad (5.9)$$

Logo, substituindo (5.9) e (5.8) em (5.7), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}_F P_r(X) &= \sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{R}(N,e_i)N, P_r(e_i)\right\rangle - N\left(\sum_{i=1}^{n}\langle A(e_i), P_r(e_i)\rangle\right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\left\langle A(e_i), \overline{\nabla}_N P_r(e_i)\right\rangle - \sum_{i,j=1}^{n}\langle [N,e_i], e_j\rangle \left\langle \overline{\nabla}_{e_j}N, P_r(e_i)\right\rangle \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n}\langle [N,e_i]\rangle \left\langle \overline{\nabla}_N N, P_r(e_i)\right\rangle + \langle X, \mathrm{div}_F P_r\rangle . \qquad (5.10)
\end{aligned}$$

Sendo $[N, e_i] = \overline{\nabla}_N e_i - \overline{\nabla}_{e_i} N$, segue que $\langle [N, e_i], e_j \rangle = \left\langle \overline{\nabla}_N e_i, e_j \right\rangle - \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, e_j \right\rangle$. Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{n} \langle [N, e_i], e_j \rangle \left\langle \overline{\nabla}_{e_j} N, P_r(e_i) \right\rangle &= \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_N e_i, e_j \right\rangle \left\langle \overline{\nabla}_{e_j} N, P_r(e_i) \right\rangle \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, e_j \right\rangle \left\langle \overline{\nabla}_{e_j} N, P_r(e_i) \right\rangle . \end{aligned} \tag{5.11}$$

Procedendo de modo análogo, obtemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \langle [N, e_i], N \rangle \left\langle \overline{\nabla}_N N, P_r(e_i) \right\rangle &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_N e_i, N \right\rangle \left\langle \overline{\nabla}_N N, P_r(e_i) \right\rangle \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, N \right\rangle \left\langle \overline{\nabla}_N N, P_r(e_i) \right\rangle . \end{aligned} \tag{5.12}$$

Agora por (5.12), (5.11) e (5.10), temos

$$\begin{aligned} \mathrm{div}_F P_r(X) &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{R}(N, e_i)N, P_r(e_i) \right\rangle - N\left(\sum_{i=1}^{n} \langle e_i, AP_r(e_i) \rangle \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} \left\langle A(e_i), \overline{\nabla}_N P_r(e_i) \right\rangle - \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_N e_i, e_j \right\rangle \left\langle \overline{\nabla}_{e_j} N, P_r(e_i) \right\rangle \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, e_j \right\rangle \left\langle \overline{\nabla}_{e_j} N, P_r(e_i) \right\rangle \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_N e_i, N \right\rangle \left\langle \overline{\nabla}_N N, P_r(e_i) \right\rangle \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, N \right\rangle \left\langle \overline{\nabla}_N N, P_r(e_i) \right\rangle + \langle X, \mathrm{div}_F P_r \rangle . \end{aligned} \tag{5.13}$$

Agora, usando que $\overline{\nabla}_{e_j} N = -A(e_j)$ e as demais igualdades obtidas, temos que (5.13) pode expresso da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}_F P_r(X) &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{R}(N, e_i)N, P_r(e_i) \right\rangle - N\left(\sum_{i=1}^{n} \langle e_i, AP_r(e_i) \rangle \right) \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \left\langle A(e_i), \overline{\nabla}_N P_r(e_i) \right\rangle + \langle X, \operatorname{div}_F P_r \rangle \\
&+ \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_N e_i, e_j \right\rangle \langle A(e_j), P_r(e_i) \rangle \\
&- \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, e_j \right\rangle \langle A(e_j), P_r(e_i) \rangle \\
&- \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_N e_i, N \right\rangle \langle X, P_r(e_i) \rangle \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, N \right\rangle \langle X, P_r(e_i) \rangle . \qquad (5.14)
\end{aligned}
$$

Como $\sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, N \right\rangle \langle X, P_r(e_i) \rangle = 0$, então por (5.14) temos que

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}_F P_r(X) &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{R}(N, e_i)N, P_r(e_i) \right\rangle - N(\operatorname{tr} AP_r) \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \left\langle A(e_i), \overline{\nabla}_N P_r(e_i) \right\rangle + \langle X, \operatorname{div}_F P_r \rangle \\
&+ \sum_{i,j=1}^{n} \langle A(e_i), e_j \rangle \langle A(e_j), P_r(e_i) \rangle \\
&+ \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_N e_i, e_j \right\rangle \langle A(e_j), P_r(e_i) \rangle \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \left\langle e_i, \overline{\nabla}_N N \right\rangle \langle X, P_r(e_i) \rangle
\end{aligned}
$$

onde usamos que $0 = N \langle e_i, N \rangle = \left\langle \overline{\nabla}_N e_i, N \right\rangle + \left\langle e_i, \overline{\nabla}_N N \right\rangle$.

Donde obtemos,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}_F P_r(X) &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{R}(N, e_i)N, P_r(e_i) \right\rangle - N(\mathrm{tr}\, AP_r) \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \left\langle A(e_i), \overline{\nabla}_N P_r(e_i) \right\rangle + \langle X, \mathrm{div}_F P_r \rangle \\
&+ \sum_{i,j=1}^{n} \langle A(e_i), e_j \rangle \langle A(e_j), P_r(e_i) \rangle \\
&+ \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_N e_i, e_j \right\rangle \langle A(e_j), P_r(e_i) \rangle \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \left\langle e_i, \overline{\nabla}_N N \right\rangle \langle P_r(X), e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{R}(N, e_i)N, P_r(e_i) \right\rangle - N(\mathrm{tr}\, AP_r) \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \left\langle A(e_i), \overline{\nabla}_N P_r(e_i) \right\rangle + \langle X, \mathrm{div}_F P_r \rangle \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \langle A(e_i), AP_r(e_i) \rangle + \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i}, e_j \right\rangle \langle A(e_j), P_r(e_i) \rangle \\
&+ \left\langle \overline{\nabla}_N N, P_r(X) \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{R}(N, e_i)N, P_r(e_i) \right\rangle - N(\mathrm{tr}\, AP_r) \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \left\langle A(e_i), \overline{\nabla}_N P_r(e_i) \right\rangle + \langle X, \mathrm{div}_F P_r \rangle + \mathrm{tr}\ A^2 P_r \\
&+ \langle X, P_r(X) \rangle + \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_N e_i, e_j \right\rangle \langle A(e_j), P_r(e_i) \rangle . \qquad (5.15)
\end{aligned}
$$

A fim de simplificar os últimos dois somatórios na expressão acima, consideremos a notação $l_{ij} = \left\langle \overline{\nabla}_N e_i, e_j \right\rangle$ e $m_{ji} = \langle A(e_j), P_r(e_i) \rangle$. Pode-se verificar sem dificuldades que $l_{ij} = -l_{ji}$ e $m_{ji} = m_{ij}$. Assim,

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_N e_i, e_j \right\rangle \langle A(e_j), P_r(e_i) \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} l_{ij} m_{ji} = 0.$$

Por outro lado, usando a propriedade de compatibilidade da conexão com a métrica, temos que

$$N \langle P_r(e_i), e_j \rangle = \left\langle \overline{\nabla}_N P_r(e_i), e_j \right\rangle + \left\langle P_r(e_i), \overline{\nabla}_N e_j \right\rangle ,$$

donde inferimos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\left\langle A(e_i),\overline{\nabla}_N P_r(e_i)\right\rangle &= \sum_{i,j=1}^{n}\langle A(e_i),e_j\rangle\left\langle\overline{\nabla}_N P_r(e_i),e_j\right\rangle\\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\langle A(e_i),e_j\rangle N\left(\langle P_r(e_i),e_j\rangle\right)\\
&\quad -\sum_{i,j=1}^{n}\langle A(e_i),e_j\rangle\left\langle P_r(e_i),\overline{\nabla}_N e_j\right\rangle\\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\langle A(e_i),e_j\rangle N\left(\langle P_r(e_i),e_j\rangle\right)\\
&\quad -\sum_{i,j,k=1}^{n}\langle A(e_i),e_j\rangle\langle P_r(e_i),e_k\rangle\left\langle\overline{\nabla}_N e_j,e_k\right\rangle.
\end{aligned}$$

Fazendo $h_{ij}=\langle A(e_i),e_j\rangle$ e $t_{ik}=\langle P_r(e_i),e_k\rangle$, obtemos que $h_{ij}=h_{ji}$ e $t_{ik}=t_{ki}$. Daí,

$$\sum_{i,j,k=1}^{n}\langle A(e_i),e_j\rangle\langle P_r(e_i),e_k\rangle\left\langle\overline{\nabla}_N e_j,e_k\right\rangle=\sum_{i,j,k=1}^{n}h_{ij}t_{ik}l_{jk}=0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\left\langle A(e_i),\overline{\nabla}_N P_r(e_i)\right\rangle &= \sum_{i,j=1}^{n}\langle A(e_i),e_j\rangle N\left(\langle P_r(e_i),e_j\rangle\right)\\
&= \sum_{i,j=1}^{n}h_{ij}N(t_{ij})\\
&= N\left(\sum_{i,j=1}^{n}h_{ij}t_{ij}\right)-\sum_{i,j=1}^{n}N(h_{ij})t_{ij}\\
&= N(\operatorname{tr}AP_r)-\sum_{i,j=1}^{n}N(h_{ij})t_{ij}.
\end{aligned}$$

Procedendo como em [2], mostramos que no ponto p vale $\sum_{i,j=1}^{n}N(h_{ij})t_{ij}=N(S_{r+1})$, donde obtemos (5.1). Além disso,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}_{\overline{M}}P_r(X) &= \sum_{i=1}^{n}\left\langle\overline{\nabla}_{e_i}P_r(X),e_i\right\rangle+\left\langle\overline{\nabla}_N P_r(X),N\right\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left\langle\overline{\nabla}_{e_i}P_r(X),e_i\right\rangle-\left\langle P_r(X),\overline{\nabla}_N N\right\rangle\\
&= \operatorname{div}_F P_r(X)-\langle P_r(X),X\rangle.
\end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração da proposição. □

Observação 6. *Com relação aos cálculos acima, se* $\overline{M}$ *possui curvatura seccional constante, então H. Rosenberg provou em [10] que* $\operatorname{div}_F P_r = 0$*, assim simplificando (5.1). Usaremos este fato no que segue.*

Agora estudaremos folheações de codimensão 1 de $\mathbb{S}^{n+1}$ cujas folhas possuem curvatura escalar constante, assim estendendo o Corolário 3.5 de [12].

Teorema 6. *Não existe folheação suave, transversalmente orientável de codimensão* 1 *da esfera Euclidiana* $\mathbb{S}^{n+1}$*, cujas folhas são completas e possuem curvatura escalar constante maior do que* 1*.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que existe uma folheação $\mathcal{F}$ de $\mathbb{S}^{n+1}$ com as propriedades acima. Por hipótese, como $\mathcal{F}$ é transversalmente orientável, podemos escolher um campo de vetores suave N unitário que é normal às folhas de $\mathcal{F}$. Agora considere $A_F(\cdot) = -\overline{\nabla}_{(\cdot)}N$ o operador de Weingarten de uma folha com respeito a N. Considere também R_F, a curvatura escalar da folha $F \in \mathcal{F}$. Como foi provado anteriormente,

$$2S_2 = n(n-1)(R_F - 1).$$

Donde obtemos que S_2 é uma constante positiva. Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ os autovalores de A_F. Como a norma de A é dada por $\|A\|^2 = \operatorname{tr} A^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$, segue que

$$\begin{aligned} S_1^2 &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 + 2\sum_{i<j} \lambda_i\lambda_j \\ &= \|A\|^2 + 2S_2(A) \\ &> \|A\|^2 \geqslant \lambda_i^2. \end{aligned}$$

Escolhendo a orientação de F de tal forma que $S_1 > 0$, então segue da desigualdade acima que $S_1 - \lambda_i > 0$. Isto nos diz que P_1 é positivo definido em F.

Considere a função curvatura escalar $R : \mathbb{S}^{n+1} \to \mathbb{R}$, que associa a cada ponto o valor da curvatura escalar na folha no ponto dado. Como estamos supondo que R é constante nas folhas, pela Proposição 9 temos que ou R é constante em $\mathbb{S}^{n+1}$ ou existe uma folha compacta F de $\mathcal{F}$ com a seguinte propriedade

$$R_F = \max_{p \in \mathbb{S}^{n+1}} R(p).$$

Suponhamos que R não é constante em $\mathbb{S}^{n+1}$, e seja F uma folha compacta de $\mathcal{F}$ com curvatura escalar maximal, assim $N(S_2) = 0$ sobre F. Pela Proposição 18, temos

$$\text{div}_F P_1(X) = \text{tr}\ (P_1) + \text{tr}\,(A^2 P_1) + \langle X, P_1(X)\rangle > 0.$$

Por outro lado, como F é compacta, segue pelo Teorema da Divergência que

$$\int_F \text{div}_F P_1(X) dF = 0,$$

o que é absurdo. Agora, suponha que R é constante em $\mathbb{S}^{n+1}$. Então $N(S_2) = 0$, e com isto obtemos a seguinte igualdade

$$\text{div}\, P_1(X) = \text{tr}\ (P_1) + \text{tr}\ (A^2 P_1) > 0.$$

Além disso, integrando sobre $\mathbb{S}^{n+1}$ temos que $\text{tr}\,(P_1) = \text{tr}\,(A^2 P_1) = 0$, que contradiz o fato de P_1 ser positivo definido. □

Observação 7. *Existem famílias, que não são folheações, de toros compactos em $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura escalar maior que 1. Construiremos uma família de toros com curvatura escalar constante igual a $\frac{3}{2}$.*

Consideremos o toro de Clifford $\mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2) \hookrightarrow \mathbb{S}^n(1)$, fazendo $\beta = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$ e usando a relação $n(n-1)(R-1) = 2S_2$ temos que

$$n(n-1)(R-1)\beta = n_1(n_1-1)\beta^2 - 2n_1n_2\beta + n_2(n_2-1).$$

Vamos analisar o caso $\beta = 1$ e $R = \frac{3}{2}$. Substituindo estes valores na relação encontrada, obtemos

$$(n_1 + n_2)(n_1 + n_2 - 1) = 8n_1n_2.$$

Toda solução $n_1 = a_1$, $n_2 = a_2$ para a equação obtida, gera uma família $n_1 = a_k$, $n_2 = a_{k+1}$ de soluções, onde a sequencia $(a_k)_{k\geqslant 1}$ satisfaz a seguinte relação de recorrência: $a_{k+2} = 6a_{k+1} - a_k + 1$. Assim, a solução $n_1 = 1$, $n_2 = 7$ gera uma família de toros de Clifford tendo curvatura escalar $\frac{3}{2}$.

Teorema 7. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação suave, transversalmente orientável, singular, de codimensão 1 de $\mathbb{R}^{n+1}$, cujas folhas são completas, r-mínimas e tal que S_r não muda de sinal em $\mathbb{R}^{n+1}$. Se $|X| \in \mathcal{L}^1$ e $||A||$ é limitada sobre cada folha, então cada folha tem índice de nulidade relativa no mínimo $n - r$. Em particular, se $S_r \neq 0$ numa folha então esta folha é folheada por hiperplanos de dimensão $n - r$.*

Demonstração. Seja F uma folha de $\mathcal{F}$. Como S_r não muda de sinal em F, temos que P_r é semi-definida, assim temos que $\operatorname{tr}(A^2P_r)$ e $\langle X, P_r(X)\rangle$ são ambos não negativos ou ambos não positivos em F. Daí, aplicando (5.1) e a Observação 6 temos que

$$\operatorname{div}_F(P_r(X)) = \operatorname{tr}(A^2P_r) + \langle X, P_r(X)\rangle$$

é não negativo ou não positivo em F. Assim, segue pela Proposição 17 que $\operatorname{div}_F(P_r(X)) = 0$. Logo, $S_{r+1} = 0$ em F e

$$\operatorname{tr}(A^2P_r) = -(r+2)S_{r+2} = 0.$$

Portanto, temos que $S_k = 0$ para todo $k \geqslant r+1$. Com isto concluímos que $\nu \geqslant n-r$. Em particular, pelo Teorema de Ferus temos que se $S_r \neq 0$ na folha F, então a folha F é folheada por $(n-r)$-hiperplanos. $\square$

Observação 8. *Como um exemplo da situação descrita pelo teorema acima, temos que* $\mathcal{F} := \{\mathbb{S}^r_\rho \times \mathbb{R}^{n-r} \subset \mathbb{R}^{r+1} \times \mathbb{R}^{n-r} | \rho \in \mathbb{R} \text{ e } 2r \geqslant n\}$ *é uma folheação singular de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *por cilindros concêntricos. O conjunto singular da folheação é o* $(n-r)$*-plano* $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-r}$. *De fato, dado* $(x, y) \in \mathbb{S}^r_\rho \times \mathbb{R}^{n-r}$ *temos que o campo normal unitário, no ponto* (x, y), *é* $N(x, y) = (-\frac{x}{|x|}, 0)$. *Com isto, obtemos que os autovalores do operador de Weingarten são* $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = \frac{1}{\rho}$ *e* $\lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0$. *Donde concluímos que* $S_{r+1} = 0$, $S_r > 0$ *e* $||A||$ *é constante sobre cada folha. Seja* $\alpha(t) = (x, y) + tN(x, y)$ *a reta que passa no ponto* (x, y) *na direção de* $N(x, y)$, *então*

$$N(\alpha(t)) = \left(-\frac{x}{|x|}, 0\right)$$

e concluímos que $X(x, y) = \overline{\nabla}_{N(x,y)}N = 0$, *implicando que* $|X| \in \mathcal{L}^1$.

Referências Bibliográficas

[1] A. Caminha. - *On hypersurfaces into Riemannian spaces of constant sectional curvature.* Kodai Mathematical Journal, 29(2006), 185-210.

[2] A. Caminha. - *On spacelike hypersurfaces of constant sectional curvature Lorentz manifolds.* J. of Geom. and Physics, 56(2006), 1144-1174.

[3] A. Lins and C. Camacho. - *Teoria Geométrica das Folheações* . Projeto Euclides - IMPA, 1979.

[4] Barbosa, J.L. and Colares, A. - *Stability of hipersurfaces with constant r-mean curvature.* Annals of Global Analysis of Geometry, 15(1997), 277-297.

[5] Camargo, F.; Caminha, A.; Sousa, P. - *Complete foliations of space forms by hypersurfaces.* Bull. Braz. Math. Soc., 41(3)(2010), 339-353.

[6] Do Carmo, M.P. - *Geometria Riemanniana.* Projeto Euclides - IMPA, (2005).

[7] E. Bombieri, E. de Giorgi and E. Giusti. *Minimal Cones and of the Bernstein Problem.* Inv. Math., 82(1968), 243-269.

[8] Folland, G.B. - *Real Analysis: modern techniques and their application.* Jonh Wiley, New York, 1999.

[9] H. Federer. *Geometric Measure Theory.* Springer-Verlag, New York, 1969.

[10] H. Rosenberg. *Hypersurfaces of Constant Curvature in Spaces Forms.* Bull. Sc. Math., 117(1993), 217-239.

[11] J. Hounie and M.L. Leite. *Two-Ended Hypersurfaces with Zero Scalar Curvature.* Indiana Univ. Math. J.,48(1999), 867-882.

[12] J.L.M. Barbosa, K. Kenmotsu and G. Oshikiri. *Foliations by hypersurfaces with constant mean curvature*. Math. Zeit.,207(1991), 97-108.

[13] J. Simons. *Minimal varieties of Riemannian Manifolds*. Ann. of Math., 88(1968), 62-105.

[14] Lee, J.M.. - *Introduction to Smooth Manifolds*. New York: Springer, (1950).

[15] M. Dajczer et al. - *Submanifolds and Isometric Immersions*. Publish or Perish, Huoston (1990).

[16] R. Reilly. *On the Hessian of a Function and the Curvature of its Graph. Michigan Math. J.*,20(1973),373-383.

[17] S. Bernstein. *Sur un théorème de geométrie et ses applications aux équations aux dérivées partielles du type elliptique*. Comm. de la Soc. Math. de Khakov (2éme sér), 15(1915), 38-45.

[18] S.T. Yau - *Some Function-Theoretic Properties of Complete Riemannian Manifolds and their Applications to Geometry* . Indiana Univ. Math. J., 25 (1976), 659-670.