

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

Estudo de um Sistema Termo-Elástico

Yuri Rafael Leite Pereira

Teresina - 2012

Yuri Rafael Leite Pereira

Dissertação de Mestrado:

Estudo de um Sistema Termo-Elástico

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Marcondes Rodrigues Clark

Teresina - 2012

Pereira, Y.R.L.

Título da Dissertação: Estudo de um Sistema Termo-Elástico

Yuri Rafael Leite Pereira – Teresina: 2012.

Orientador: Prof. Dr. Marcondes Rodrigues Clark

1. Área de Concentração: Análise\Equações Diferenciais Parciais

CDD 516.36

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha mãe Francisca Telma Leite, por sua grande dedicação na minha criação e na dos meus irmãos, pro ter sempre me incetivando a seguir aquilo que eu queria.

Ao professor Marcondes Rodrigues Clark pelos ensinamentos e pela paciência que teve comigo durante esse dois anos de orientação. Agradeço ao professor Roger Peres de Moura e ao professor Haroldo Rodrigues Clark por aceitarem participar da banca e pelas correções na dissertação. Também agradeço ao professor Osmundo Lima por ter contribuido com algumas correções.

Ao corpo docente do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Piauí por todo os ensinamentos que tive durante os seis anos em que estive na UFPI; em especial queria agradecer ao professor Newton Luis Santos pelos seus excelentes ensinamentos, ao professor Paulo Sérgio pelas partidas de tenis de mesa e por ser uma ótima pessoa, ao professor Juscelino pelas partidas de PS3 e pelos seus ensinamentos em varios outros ramos além da matemática.

Aos meus "irmãos de guerra" do mestrado Edvaldo Elias, Antonio Kelson, Valdines Junior, Franciane Vieira, Alex Santos, Cledinaldo Aguiar, Leandro Pessoa e Edvalter Sena.

Eu queria agradecer em especial essas seguintes pessoas as quais eu tive a sorte e o prazer de conhecer e conviver durante esses meus seis anos de UFPI: Cleyton Natanael, Emanuel Lima(Manel), Lucas Izidio, Alcilene Soares, Raimundo Alves, Cleomar Cosme, Luciano Cabral, Paulo Douglas, Cícera Carla, Fatima Maria, Sami Kelson, José Ari-matéia, Kim Carlos, Ítalo Dowell, Ailton Campos, Leylanne Martins, Atonio Nascimento, Antonio Edimar e Cleisson Vieira(Seu Creysson).

E agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

“Obvious is the most dangerous word in mathematics.”.

Eric Temple Bell.

Resumo

Neste trabalho provaremos a existência e unicidade de soluções fracas para um sistema do tipo termo-elástico. Este trabalho foi baseado no artigo "On a Nonlinear System" de A.O. Marinho, M.R. Clark, O.A. Lima (Applied Mathematical Sciences, Vol. 2, 2008, no. 60, 2963-2972.).

Abstract

In this work we will prove the existence and uniqueness of weak solutions for a thermo-elastic system. This work was based on the article "On a Nonlinear System" A.O. Marino, M.R. Clark, O.A. Lima (Applied Mathematical Sciences, Vol 2, 2008, no. 60, 2963-2972.).

Sumário

Resumo	4
Abstract	5
1 Preliminares	4
1.1 Alguns resultados de Análise	4
1.2 Introdução ás Distribuições	8
1.2.1 Distribuições escalares	8
1.2.2 Distribuições Vetoriais	11
1.3 Espaços de Sobolev	14
2 Teorema Espectral e Aplicações	17
2.1 Definições e Exemplos	17
2.2 Teorema Espectral	19
2.3 Aplicações: Os Operadores Laplaciano e Biharmônico	23
3 Problema Misto para um Sistema Termo-elástico.	26
3.1 Existência de Soluções para o Problema Aproximado	27
3.2 Estimativas	31
3.3 Verificação das Condições iniciais	42
3.4 Unicidade das soluções	46
Referências Bibliográficas	50

Introdução

Este trabalho tem como objetivo estudar a existência e unicidade de solução fraca para o problema misto associado ao seguinte sistema termo-elástico:

$$\left\{ \begin{array}{l} u'' + \Delta^2 u - M(\|u\|^2)\Delta u + |u|^p u + \theta = f \text{ em } Q \\ \theta' - \Delta\theta + u' = g \text{ em } Q \\ u = \frac{\partial u}{\partial \eta} = \theta = 0 \text{ sobre } \Sigma \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}); \theta(\mathbf{x}, 0) = \theta_0(\mathbf{x}) \text{ e } u'(\mathbf{x}, 0) = u_1(\mathbf{x}) \text{ em } \Omega. \end{array} \right.$$

O sistema acima representa a equação da viga fixa com suas extremidades fixas acoplada com a equação do calor onde não aumento de temperatura nas extremidades da viga. E temos que Ω é um aberto limitado do \mathbb{R}^n com fronteira regular Γ , $Q = \Omega \times (0, T)$, com $T > 0$, denota-se o cilindro cuja fronteira lateral $\Gamma \times (0, T)$ é representado por Σ e M é uma função real contínua.

O trabalho é dividido em três capítulos. No primeiro capítulo são fixadas algumas notações e resultados de grande importância para a compreensão da demonstração do teorema principal deste trabalho. Também faremos uma rápida introdução sobre Teoria da Distribuições e Espaços de Sobolev.

No segundo capítulo, abordaremos o Teorema Espectral para Operadores Compactos Simétricos o qual será utilizado na demonstração do resultado principal.

No terceiro e último capítulo, provaremos a do Resultado Principal desta dissertação que é mostrar a existência e unicidade da solução fraca da equação acima. A demonstração do teorema principal será feita usando o método de Faedo- Galerkin, que consiste em aproximar o problema inicial por sistemas aproximados equivalentes, porém em dimensão finita. Na primeira parte do capítulo 3 mostraremos a existência de soluções para esses tais problemas aproximados. Na segunda parte iremos fazer estimativas sobre os problemas com intuito de prolongar as soluções aproximadas ao intervalo $[0, T]$, bem como provar

sua convergência para solução do sistema inicial. Na terceira parte garantiremos que as soluções encontradas satisfaçam as condições iniciais do problema e na quarta e última parte a partir de algumas hipóteses adicionais provaremos a unicidade da solução.

Notação

Notações necessárias para melhor entendimento desta dissertação:

- Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, um aberto limitado bem regular com fronteira Γ e seja $Q = \Omega \times (0, T)$ $T > 0$ um cilindro em \mathbb{R}^{n+1} , com fronteira lateral $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$;
- Seja $\Delta = \sum_1^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ o operador Laplaciano e $\Delta^2 = \Delta \circ \Delta$ é o operador biharmônico.
- Denotaremos por $|\cdot|$ e (\cdot, \cdot) a Norma e o produto interno respectivamente em $L^2(\Omega)$.
Ocasionalmente $|\cdot|$ denotará também o valor absoluto e o contexto deixará claro a distinção;
- E por $\|\cdot\|$ e $((\cdot, \cdot))$ denotaremos a norma e produto interno respectivamente em $H_0^1(\Omega)$;

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo mencionaremos os principais resultados de Análise Clássica, Análise Funcional, Equações Diferenciais Ordinárias e Teoria das Distribuições necessários para o entendimento do nosso problema em estudo, o qual será objeto de análise nos capítulos seguintes.

1.1 Alguns resultados de Análise

Definição 1. (*Condições de Carathéodory*) Sejam D um subconjunto de \mathbb{R}^{n+1} e $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função. Dizemos que f satisfaz as Condições de Carathéodory sobre D se

- (i) $f(t, x)$ é mensurável em t para cada x fixo;
- (ii) $f(t, x)$ é contínua em x para cada t fixo;
- (iii) para cada compacto U em D existe uma função real integrável $m_U(t)$ tal que

$$|f(t, x)| \leq m_U(t), \quad \forall (t, x) \in U.$$

Teorema 1. (*Carathéodory*) Seja $f: R \rightarrow \mathbb{R}^n$ onde $R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}; |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b, a > 0, b > 0\}$, satisfazendo as condições de Carathéodory sobre R . Então existe uma solução $x(t)$ de

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $(t_0, x_0) \in R$, sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta$ ($\beta > 0$).

Prova: Ver [11], pág. 156.

Corolário 1. *Seja D aberto de \mathbb{R}^{n+1} e f satisfazendo as condições de Carathéodory sobre D , então o problema (1.1) tem solução para qualquer $(t_0, x_0) \in D$*

Prova: Ver [11], pág. 159.

Definição 2. *Seja $\varphi(t)$ uma solução de (1.1) sobre um intervalo I e $I \subset I_1$. Diz-se que $\varphi(t)$ tem um **prolongamento** até I_1 se existe um $\varphi_1(t)$ uma solução de (1.1) sobre I_1 e $\varphi_1(t) = \varphi(t)$ para todo $t \in I$.*

Corolário 2. *Seja $D = [0, T] \times B$, $T > 0$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq b\}$, $b > 0$ e f nas condições do Teorema de Carathéodory. Seja $\varphi(t)$ uma solução de*

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x) \\ x(0) &= x_0, |x_0| \leq b. \end{aligned}$$

Suponhamos que em qualquer intervalo de I , onde $\varphi(t)$ está definida, se tenha $|\varphi(t)| \leq K$ para todo $t \in I$, K independente de I e $K < b$. Então φ tem um prologamento até $[0, T]$.

Prova: Ver [11], pág. 164.

Teorema 2. *(Representação de Riesz): Sejam $1 < p < \infty$ e $\varphi \in (L^p(\Omega))' \equiv L^{p'}(\Omega)$. Então existe uma única $u \in L^p(\Omega)$ tal que,*

$$(\varphi, f) = \int_{\Omega} u f dx, \quad \forall f \in L^p(\Omega),$$

onde $\|u\|_{L^{p'}} = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'}$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Prova: Ver [1], pág. 97.

Definição 3. *Seja X um espaço normado. Uma forma bilinear $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ é dita*

(i) **contínua** *se existe uma constante positiva C tal que*

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_X \|v\|_X \quad \forall u, v \in X;$$

(ii) **coerciva** *se existe uma contante $\alpha > 0$ tal que*

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_X^2 \quad \forall v \in X.$$

Teorema 3. *(Lax-Milgram) Seja $a(u, v)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva em X . Então dado qualquer $\phi \in X'$, onde X' é o espaço dual de X , existe um único elemento $u \in X$ tal que*

$$a(u, v) = \langle \phi, v \rangle_{X' \times X}, \quad \forall v \in X.$$

Prova: Ver [1], pág. 140.

Definição 4. Dizemos que uma sequência $(x_n)_n \subset X$ é fortemente limitada quando é limitada na norma do seu espaço, isto é, quando existe uma constante $C > 0$ real tal que

$$\|x_n\|_X \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 1. Seja X um espaço normado de dimensão finita e seja o subconjunto $B = \{x \in X; \|x\|_X \leq 1\}$. Dado uma sequência $(x_n)_n \in B$ temos que a sequência $(x_n)_n$ é fortemente limitada pois

$$\|x_n\|_X \leq 1.$$

Definição 5. (Convergência forte) Uma sequência $(x_n)_n$ pertencente ao espaço normado X é dita fortemente convergente para o vetor x se

$$\|x_n - x\|_X \rightarrow 0.$$

Representaremos a convergência forte em X por:

$$x_n \rightarrow x \text{ em } X.$$

Definição 6. (Convergência fraca) Seja $(x_n)_n$ uma sequência no espaço normado X . Ela é dita ser fracamente convergente para x em X se

$$f(x_n) \rightarrow f(x) \quad \forall f \in X',$$

onde X' é o espaço dual de X . A notação convencional para convergência fraca é

$$x_n \rightharpoonup x \text{ em } X.$$

Definição 7. (Convergência fraca $*$) Dizemos que uma sequência $(f_n)_n$ de X' é fraco- $*$ convergente a f em X' se

$$f_n(x) \rightarrow f(x), \quad \forall x \in X.$$

Nesse caso escrevemos

$$f_n \xrightarrow{*} f.$$

Definição 8. (Espaço Reflexivo) Seja X espaço vetorial normado, definimos por

$$X'' = (X')',$$

X'' é chamado espaço bidual de X . Podemos definir um operador linear limitado canônico

$$J: X \rightarrow X''$$

da seguinte maneira: para cada $x \in X$, seja o funcional $Jx: X' \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$(Jx)(f) = f(x)$$

para todo $f \in X'$.

Claramente o operador J é linear e é uma isometria, isto é, $\|Jx\|_{X'} = \|x\|_X$. Notemos que em geral J não é sobrejetivo (ver [1]). Quando J for sobrejetivo dizemos que X é reflexivo.

Proposição 1. Se $f_n \rightharpoonup f$ em X' então $f_n \xrightarrow{*} f$ em X' .

Prova: Ver [3], pág.66.

Proposição 2. Seja X um espaço de Banach reflexivo e suponha que $f_n \xrightarrow{*} f$ em X' . Então $f_n \rightharpoonup f$ em X' .

Prova: Ver [3], pág.65.

Teorema 4. (Banach-Alaoglu-Bouabarki): Sejam X um espaço de Banach separável e $(f_n)_n$ uma sequência fortemente limitada em X' . Então $(f_n)_n$ tem uma subsequência $(f_{n_k})_k$ que converge fraco-*, isto é, $f_{n_k} \xrightarrow{*} f$ em X' .

Prova: Ver [1], pág. 66.

Teorema 5. (Kakutani): Seja X um espaço de Banach. X é reflexivo se, e somente se toda sequência $(x_n)_n$ fortemente limitada em X possui uma subsequência $(x_{n_k})_k$ que converge fraco, isto é, $x_{n_k} \rightharpoonup x$ em X .

Prova: Ver [1], pág 67.

Definição 9. (Imersão) Seja $X \subseteq Y$, diz-se que X é imerso continuamente ou apenas imerso em Y se a aplicação inclusão

$$i: X \longrightarrow Y, i(x) = x \forall x \in X,$$

é contínua. Este fato equivale a

$$\|x\|_Y \leq C\|x\|_X \forall x \in X.$$

Simbolizamos este fato por: $X \hookrightarrow Y$.

Se $X \hookrightarrow Y$ e X é denso em Y , diz-se que X é imerso continuamente e densamente em Y .

Se a aplicação $i: X \longrightarrow Y$ é contínua e compacta, diz-se que X é imerso compactamente em Y . A imersão compacta de X em Y é denotada por $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$.

Teorema 6. (Lema de Lions): Sejam Ω um aberto limitado do \mathbb{R}^n , g e g_j funções de $L^q(\Omega)$, onde $1 < q < \infty$ e $j \in \mathbb{N}$ tais que

$$\|g_j\|_{L^q(\Omega)} \leq C, \text{ para todo } j$$

e

$$g_j \longrightarrow g \text{ quase sempre em } \Omega.$$

Então

$$g_j \rightharpoonup g \text{ em } L^q(\Omega).$$

Prova: Ver [3], pág. 72.

Teorema 7. (Lebesgue): *Seja $(u_n)_n$ uma sequência de funções integráveis em (a, b) que converge quase sempre para uma função u . Se existir uma função integrável u_0 tal que $|u_n(t)| \leq u_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então u será integrável e tem-se que*

$$\int_a^b u = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b u_n.$$

Teorema 8. (Desigualdade de Gronwall) *Sejam, $C \geq 0$ uma constante, $u \geq 0$ quase sempre em $(0, T)$, uma função integrável em (s, T) e $\varphi : [s, T] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e não negativa tal que*

$$\varphi(t) \leq C + \int_s^T u(\tau)\varphi(\tau) d\tau, \quad \forall t \in [s, T].$$

Então

$$\varphi(t) \leq Ce^{\int_s^T u(\tau) d\tau}, \quad \forall t \in [s, T].$$

Prova: Ver [3], pág. 55.

1.2 Introdução às Distribuições

1.2.1 Distribuições escalares

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real contínua. O suporte de u é, por definição, o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega; u \neq 0\}$ e, o representamos por $supp(u)$.

Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço das funções infinitamente diferenciáveis cujo suporte é um compacto contido em Ω .

Um multi-índice é uma n -upla $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, n$. Escreveremos $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ e representaremos por D^α como o operador derivação de ordem α :

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Observe que, para $\alpha = (0, \dots, 0)$ temos $D^0 = I$ isto é, $D^0 u = u$.

Introduzimos, a seguir, uma topologia em $C_0^\infty(\Omega)$, denominada topologia limite indutivo, que faz deste espaço um espaço vetorial topológico denotado por $\mathfrak{D}(\Omega)$ e cujos objetos serão denominados funções testes.

Definição 10. Dizemos que uma sequência $(\varphi_n)_n$ de funções teste converge para uma função $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, quando:

(i) Existe um subconjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que

$$\text{supp}(\varphi_n) \subset K \forall n \text{ e } \text{supp}(\varphi) \subset K.$$

(ii) $D^\alpha \varphi_n \rightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente em K , para todo multi-índice α .

Por distribuição escalar sobre Ω entendemos uma forma linear contínua sobre $\mathfrak{D}(\Omega)$, isto é, uma aplicação $T: \mathfrak{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, tal que:

$$T(\alpha\varphi + \psi) = \alpha T(\varphi) + T(\psi), \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \varphi, \psi \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

E, se $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para φ em \mathfrak{D} então $(T(\varphi_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $T(\varphi)$ em \mathbb{R} . O valor da distribuição T em φ será representado por $\langle T, \varphi \rangle$. E denotamos por $\mathfrak{D}'(\Omega)$ a coleção de todas as formas lineares contínuas $T: \mathfrak{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, isto é, de todas as distribuições de Ω .

Dados T e $S \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ definimos:

(i) $\langle T + S, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle + \langle S, \varphi \rangle, \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$;

(ii) $\langle \alpha T, \varphi \rangle = \alpha \langle T, \varphi \rangle, \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega) \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}$.

Munido dessas operações $\mathfrak{D}'(\Omega)$ se torna um espaço vetorial chamado espaço das distribuições escalares sobre Ω .

Definição 11. Dizemos que uma sequência de distribuições $(T_n)_{n \in \mathbb{R}}$ converge para T , em $\mathfrak{D}'(\Omega)$ quando:

$$\langle T_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle \text{ em } \mathbb{R}, \text{ para toda } \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

Com esta noção de convergência, $\mathfrak{D}'(\Omega)$ passa a ser um espaço vetorial topológico.

Exemplo 2. Representamos por $L^1_{Loc}(\Omega)$ o espaço vetorial das classes de funções $u \in L^1(K)$, para todo $K \subset \Omega$ compacto.

Para $u \in L^1_{Loc}(\Omega)$ fixada, considere o funcional

$$T_u: \mathfrak{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x)\varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

Temos que T_u é uma distribuição sobre Ω .

De fato a linearidade de T_u decorre da própria linearidade da integral. Quanto à continuidade, primeiro observe que se $(\varphi_\nu)_\nu$ converge à zero em $\mathfrak{D}(\Omega)$ então,

$$\text{supp}(\varphi_\nu) \subseteq K, \text{ para algum compacto } K \subset \Omega, \forall \nu = 1, 2, \dots$$

e

$$\varphi_{\nu} \longrightarrow 0 \text{ uniformemente } \Omega.$$

Daí,

$$|\langle T_u, \varphi_{\nu} \rangle| = \left| \int_{\Omega} u(x) \varphi_{\nu}(x) dx \right| \leq \max_{x \in K} |\varphi_{\nu}(x)| \int_{\Omega} u(x) dx$$

e o lado direito dessa desigualdade tende a zero quando $\nu \longrightarrow \infty$.

Obs. 1. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto e $p \geq 1$ então, $L^p(\Omega) \subset L^p_{Loc}(\Omega) \subset L^1_{Loc}(\Omega)$. Assim toda função de $L^p(\Omega)$ pode ser vista como uma distribuição sobre Ω . Além disso se (u_{ν}) é uma sequência de $L^p(\Omega)$ e

$$u_{\nu} \longrightarrow u \text{ em } L^p(\Omega)$$

então,

$$u_{\nu} \longrightarrow u \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

A noção da derivada fraca de uma função foi proposta inicialmente por Sobolev motivado pela fórmula de integração por partes do cálculo.

De fato, em dimensão 1, temos a formula de integração por partes

$$\int_a^b u'(x) \varphi(x) dx = u(b) \varphi(b) - u(a) \varphi(a) - \int_a^b u(x) \varphi'(x) dx,$$

e quando $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, temos:

$$\int_a^b u'(x) \varphi(x) dx = - \int_a^b u(x) \varphi'(x) dx.$$

Motivado pela igualdade acima, Sobolev definiu a derivada fraca de uma função $u \in L^1_{Loc}(a, b)$ uma função $v \in L^1_{Loc}(a, b)$, caso exista, como:

$$\int_a^b u'(x) \varphi(x) dx = - \int_a^b v(x) \varphi'(x) dx, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Este conceito foi generalizado para distribuições quaisquer em $\mathcal{D}'(\Omega)$ por L. Schwartz da seguinte maneira:

Definição 12. Dados $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ multiíndice, definimos a derivada distribucional de ordem α de T como a forma linear $D^{\alpha}T: \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\langle D^{\alpha}T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^{\alpha}\varphi \rangle, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Temos que a operação derivada, no sentido distribucional, é uma operação fechada dentro do espaço $\mathcal{D}'(\Omega)$, isto é,

$$D^{\alpha}: \mathcal{D}'(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega).$$

De fato, vamos mostrar que $D^{\alpha}T$ é uma distribuição se T é uma distribuição. Temos para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ que:

$$\langle D^{\alpha}T, \lambda\varphi + \psi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^{\alpha}(\lambda\varphi + \psi) \rangle = (-1)^{|\alpha|} \lambda \langle T, D^{\alpha}\varphi \rangle + (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^{\alpha}\psi \rangle =$$

$$= \lambda \langle D^\alpha T, \varphi \rangle + \langle D^\alpha T, \psi \rangle.$$

A seguir, mostraremos que $D^\alpha T$ é uma aplicação contínua. Seja $(\varphi_n)_n$ uma sequência que converge para φ em $\mathfrak{D}(\Omega)$, isso significa que $D^\alpha \varphi_n \rightarrow D^\alpha \varphi$ para todo multiíndice α . Daí,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle D^\alpha T, \varphi_n \rangle = (-1)^{|\alpha|} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T, D^\alpha \varphi_n \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle = \langle D^\alpha T, \varphi \rangle.$$

Segue daí que $D^\alpha T$ é uma distribuição.

Outro fato muito importante em relação às derivadas no sentido das distribuições é que nem toda derivada de uma função localmente integrável é uma função localmente integrável; para mais informações consulte [10].

1.2.2 Distribuições Vetoriais

Seja X um espaço de Banach. Chamamos de **função simples**, toda função $\varphi : (0, T) \rightarrow X$ que assume apenas um número finito de valores não nulos, onde cada valor não nulo é assumido num conjunto mensurável de medida finita. Toda função simples possui uma representação canônica da forma

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^k \chi_{E_i}(t) \varphi_i,$$

onde $\varphi_i \in X$ e $E_i \subset (0, T)$ é mensurável e $\mu(E_i) < \infty$ para $i = 1, \dots, k$.

Teorema 9. *Seja $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções simples tais que*

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \int_0^T \|\varphi_n(t) - \varphi_m(t)\|_X dt = 0.$$

Então existe uma única função vetorial $u : (0, T) \rightarrow X$ tal que $\|u(t)\|_X$ e $\|\varphi_n(t) - u(t)\|_X$ são mensuráveis em $(0, T)$ para todo n e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \|\varphi_n(t) - u(t)\|_X dt = 0.$$

Prova: Ver [8], pág. 124.

Corolário 3. *Nas condições do Teorema 9 a sequência $\left(\int_0^T \varphi_n(t) dt\right)$ converge em X e seu limite é unicamente determinado por u . Este limite é, por definição, a Integral de Bochner da função u e é denotado por $\int_0^T u(t) dt$.*

Desta forma, a integral de Bochner da função vetorial u é o vetor de X dado por

$$\int_0^T u(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \varphi_n(t) dt,$$

onde o limite é considerado na norma de X .

Dizer que uma função vetorial u é integrável no sentido de Bochner-Lebesgue ou simplesmente \mathfrak{B} -integrável, significa que ela pode ser aproximada em X , quase sempre em

$(0, T)$, por uma sequência de funções simples satisfazendo o Teorema 9 e conseqüentemente o Corolário 3.

Definição 13. Uma função $u : (0, T) \rightarrow X$ é dita ser **fracamente mensurável** (*w-mensurável*) se a função numérica $t \mapsto \langle \phi, u(t) \rangle$ for mensurável para qualquer $\phi \in X'$. Dizemos que a função u é **fortemente mensurável** (*s-mensurável*) quando existir uma sequência de funções simples $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\varphi_n(t) \rightarrow u(t), \text{ em } X \text{ quase sempre em } (0, T).$$

Em particular, quando u é s-mensurável, a função numérica $t \rightarrow \|u(t)\|_X$ é mensurável a Lebesgue.

Denotamos por $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções $u : (0, T) \rightarrow X$ s-mensuráveis e tais que a função numérica $t \rightarrow \|u(t)\|_X$ está em $L^p(0, T)$, sendo um espaço de Banach munido da norma

$$\|u(t)\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}.$$

Quando $p = 2$ e $X = H$ é um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0, T; H)$ é um espaço de Hilbert cujo produto interno é dado por

$$(u, v)_{L^2(0, T; H)} = \int_0^T ((u(t), v(t)))_H dt.$$

Por $L^\infty(0, T; X)$ representaremos o espaço de Banach das (classes de) funções vetoriais $u : (0, T) \rightarrow X$ que são fortemente mensuráveis e $t \rightarrow \|u(t)\|_X \in L^\infty(0, T)$ com norma

$$\|u(t)\|_{L^\infty(0, T; X)} = \sup_{t \in [0, T]} \text{ess} \|u(t)\|_X.$$

Lema 1. *Sejam X e Y dois espaços de Banach e suponhamos que $X \hookrightarrow Y$. Se $1 \leq r \leq s \leq \infty$, então*

$$L^r(0, T; X) \hookrightarrow L^s(0, T; Y).$$

Prova: Ver [8], pág.122.

Obs. 2. *Considerando $X = L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ obtemos o espaço $L^p(0, T; L^p(\Omega))$, o qual se identifica via Teorema de Fubini, com o espaço de Hilbert de funções numéricas $L^p(Q)$. De fato, dada uma função $u \in L^p(0, T; L^p(\Omega))$ então para cada $t \in (0, T)$ temos que $u(t) \in L^p(\Omega)$ e portanto $\|u(t)\|_{L^p(\Omega)}$ é uma função de $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ cujo valor em x será denotado por $\|u(x, t)\|_{L^p(\Omega)}$. Assim,*

$$\int_0^T \|u(t)\|_{L^p(\Omega)}^p dt = \int_0^T \int_\Omega |u(t, x)|^p dx dt = \int_Q |u(t, x)|^p dQ = \|u\|_{L^p(Q)}^p.$$

Com isto, estabelecemos uma isometria entre $L^p(Q)$ e $L^p(0, T; L^p(\Omega))$.

Quando X é reflexivo, separável e $1 < p < \infty$, temos que $L^p(0, T; X)$ é um espaço reflexivo e separável, cujo dual topológico se indentifica o espaço de Banach $L^q(0, T; X')$, onde p e q são expoentes conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. No caso de $p = 1$ o dual topológico do espaço $L^1(0, T; X)$ se indentifica ao espaço $L^\infty(0, T; X')$. Para mais detalhes sobre o dual dos espaços $L^p(0, T; X)$ veja [12].

Por $C^0([0, T]; X)$, $0 < T < \infty$, representaremos o espaço de Banach das funções contínuas $u : [0, T] \rightarrow X$, munido da norma da convergência uniforme

$$\|u\|_{C^0([0, T]; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X.$$

Lema 2. *Sejam V e H espaços de Banach, $V \hookrightarrow H$, $u \in L^p(0, T; V)$ e u' a derivada de u está em $L^p(0, T; H)$, com $1 < p < \infty$. Então*

$$u \in C^0([0, T]; V).$$

Para uma formulação adequada e importância dos espaços $L^p(0, T; X)$ consulte Lions [6] ou Lions-Stampacchia [7].

Vamos mostrar que as funções do tipo $L^p(0, T; X)$ são distribuições. Fixemos uma função $u \in L^p(0, T)$ arbitrária e consideremos o espaço das funções teste $\mathfrak{D}(0, T)$. Associada à função u definimos a aplicação,

$$T_u : \mathfrak{D}(0, T) \rightarrow X, \quad \langle T_u, \phi \rangle = \int_0^T u(s)\phi(s) ds, \quad \forall \phi \in \mathfrak{D}(0, T).$$

Em primeiro lugar notemos que a integral $\int_0^T u(s)\phi(s) ds$ representa um vetor do espaço normado X .

É imediato que T_u é uma aplicação linear. Quanto à continuidade, seja $(\phi_\nu)_\nu$ uma seqüência em $\mathfrak{D}(0, T)$ convergindo a zero em $\mathfrak{D}(0, T)$. Provaremos que $\langle T_u, \phi_\nu \rangle \rightarrow 0$, em X . De fato:

$$\begin{aligned} \|\langle T_u, \phi_\nu \rangle\|_X &= \left\| \int_0^T u(s)\phi_\nu(s) ds \right\|_X \leq \int_0^T \|u(s)\|_X |\phi_\nu(s)| ds \\ &\leq \left(\int_0^T \|u(s)\|_X^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^T |\phi_\nu(s)|^q ds \right)^{\frac{1}{q}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|\langle T_u, \phi_\nu \rangle\|_X \leq \|u\|_{L^p(0, T; X)} \|\phi_\nu\|_{L^q(0, T)}.$$

Como $\phi_\nu \rightarrow 0$ uniformemente em $[0, T]$ deduzimos que $\|\phi_\nu\|_{L^q(0, T)} \rightarrow 0$, quando $\nu \rightarrow \infty$, provando que T_u é contínua. Dizemos então, que T_u , é uma distribuição sobre $(0, T)$, a valores no espaço vetorial X , definida por uma função $u \in L^p(0, T; X)$, e escrevemos:

$$T_u \in \mathfrak{L}(\mathfrak{D}(0, T), X).$$

O espaço $\mathfrak{L}(\mathfrak{D}(0, T), X)$ é dito espaço vetorial de todas as distribuições sobre $(0, T)$, a

valores em X e contém, em particular, as distribuições vetoriais definidas por elementos de $L^p(0, T; X)$.

Por fim, enunciaremos dois importantes Teoremas envolvendo os espaços $L^p(0, T; X)$ que serão usados na demonstração de resultado principal desta dissertação.

Teorema 10. (*Aubin-Lions*): *Sejam X, B, Y espaços de Banach, X é reflexivo e $X \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow Y$. Suponha que $(u_n)_n$ seja uma sequência uniformemente limitada em $L^p(0, T; X)$ tal que $(\frac{d}{dt}u_n)_n = (u'_n)_n$ seja limitada em $L^p(0, T; Y)$ para algum $p > 1$. Então existe uma subsequência de $(u_n)_n$ que converge fortemente em $L^2(0, T; B)$.*

Prova: Ver [3], pág. 70.

Teorema 11. *Seja X um espaço de Banach com dual X' . Suponha $u, v \in L^p(0, T; X)$. São equivalentes:*

(i) $u(t) = \xi + \int_0^T v(s) ds$, onde ξ é uma constante em X .

(ii) $\frac{d}{dt}\langle u(t), w \rangle = \langle v(t), w \rangle \forall w \in X'$, no sentido das distribuições sobre $(0, T)$.

(iii) $\int_0^T u(s)\phi'(s) ds = -\int_0^T v(s)\phi(s) ds \forall \phi \in \mathfrak{D}(0, T)$.

Prova: Ver [3] pág. 33.

1.3 Espaços de Sobolev

Sendo $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{Loc}(\Omega)$, para todo $1 \leq p \leq \infty$, segue que toda função $u \in L^p(\Omega)$ pode ser identificada com a distribuição por ela definida. Assim u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições, que são também distribuições escalares sobre Ω . No entanto, em geral, $D^\alpha u$ não é uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Isto motiva o conceito de um novo espaço de Banach, que será denominado Espaço de Sobolev, o qual definiremos a seguir. Representamos por $W^{m,p}(\Omega)$, o espaço vetorial das funções u de $L^p(\Omega)$ para as quais as derivadas distribucionais $D^\alpha u$ estão em $L^p(\Omega)$, com $|\alpha| < m$. A norma nesse espaço é definida por

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| < m} |D^\alpha u|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ se } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| < m} |D^\alpha u|_{L^\infty(\Omega)}, \text{ se } p = \infty.$$

O espaço normado $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach denominado Espaço de Sobolev. No caso em que $p = 2$ o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, separável continuamente, imerso em $L^2(\Omega)$ e é denotado por $H^m(\Omega)$ com norma

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| < m} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

e produto interno

$$((u, v))_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| < m} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx.$$

Embora o espaço das funções testes $\mathfrak{D}(\Omega)$ seja denso em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, em geral ele não é denso em $W^{m,p}(\Omega)$. Por esta razão definimos o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $\mathfrak{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, isto é,

$$\overline{\mathfrak{D}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega).$$

Quando $p = 2$, o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ será representado por $H_0^m(\Omega)$.

Se $1 \leq p < \infty$ e q é o expoente conjugado de p , representamos por $W^{-m,q}(\Omega)$, o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$ e por $H^{-m}(\Omega)$ o dual topológico de $H_0^m(\Omega)$.

A seguir seguem o enunciado da Desigualdade de Poincaré-Friedricks, um corolário dessa teorema e alguns teoremas de imersões em espaços de Sobolev.

Teorema 12. *(Desigualdade de Poincaré-Friedricks): Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e limitado. Então existe uma constante $C=C(\Omega) > 0$ tal que*

$$|u| \leq C|\nabla u|, \text{ para todo } u \in H_0^1(\Omega).$$

Prova: Ver [10], pág. 91.

Como consequência da desigualdade de Poincaré-Friedricks, pode-se provar facilmente o seguinte resultado:

Corolário 4. *Em $H_0^1(\Omega)$ as normas do $|\nabla u|$ e $\|u\|$ são equivalentes.*

Prova: Ver [10], pág. 91.

Uma outra consequência não menos trivial da desigualdade de Poincaré-Friedricks é:

Corolário 5. *Em $H_0^2(\Omega)$, as normas $\|v\|_{H^2(\Omega)}$ e $|\Delta v|$ são equivalentes.*

Prova:

Temos que,

$$(\Delta v)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \right)^2 + 2 \sum_{i < j} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}, \forall v \in H_0^2(\Omega).$$

Pelo Teorema da Divergência de Gauss para u, v em $\mathfrak{D}(\Omega)$, obtemos:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial^2 v}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} dx.$$

Daí resulta que,

$$|\Delta v|^2 = \int_{\Omega} (\Delta v)^2 dx = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v^2}{\partial x_i^2} \right)^2 dx + 2 \sum_{i < j} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 dx.$$

A norma de $H^2(\Omega)$ é dada por:

$$\|v\|_{H^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} v^2 dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v^2}{\partial x_i^2} \right)^2 dx + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 dx.$$

Conclui-se das desigualdades acima que,

$$|\Delta v| \leq \|v\|_{H^2(\Omega)}.$$

Pela Desigualdade de Poincaré-Friedricks, obtém-se:

$$\int_{\Omega} v^2 dx \leq C \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 dx \leq C_0 \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 dx.$$

Aplicando esse resultado na norma de v em $H^2(\Omega)$ obtemos a outra desigualdade,

$$\|v\|_{H^2(\Omega)} \leq C_1 |\Delta v|,$$

onde $C_1 = \max\{C, C_0\}$. Concluindo-se a equivalência da normas.

Teorema 13. (Rellich-Kondrachov) *Sejam Ω um aberto limitado do \mathbb{R}^n , Ω de classe C^1 e $1 \leq p \leq \infty$. Então as seguintes imersões são compactas:*

- (i) $W^{1,p} \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq \frac{np}{n-p}$ se $p < n$;
- (ii) $W^{1,p} \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$ se $p = n$;
- (iii) $W^{1,p} \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$ se $p > n$.

Prova: Ver [9], pág.79.

Capítulo 2

Teorema Espectral e Aplicações

Devido a importância da Teoria Espectral para investigação de existência e unicidade de solução fraca para sistemas de EDO, iremos, neste capítulo, demonstrar o Teorema Espectral para Operadores Compactos Simétricos e como aplicações, mostraremos que o operador Laplaciano e o operador Biharmônico (Δ^2) estão nas condições do Teorema Espectral, para mais informações veja [13] e [4].

2.1 Definições e Exemplos

Definição 14. *Seja H um espaço com produto interno, isto é, espaço vetorial munido de um produto interno e seja $A : H \rightarrow H$ um operador linear. A é dito simétrico se:*

$$(Au, v) = (u, Av), \forall u, v \in H.$$

Note que, quando A é simétrico, (Ax, x) é um número real. De fato, $(Au, u) = (u, Au) = \overline{(Au, u)}$.

Definição 15. *Sejam X, Y espaços normados e $A : X \rightarrow Y$ uma aplicação linear. A é dito compacto se para qualquer sequência limitada $(x_n)_n \subset X$, a sequência $(Ax_n)_n$ contém uma subsequência que converge em Y .*

Exemplo 3. *Sejam X, Y espaços normados e $A : X \rightarrow Y$ uma aplicação compacta. Então A é limitado. De fato, se A não fosse limitado então para cada $n \in \mathbb{N}$ existiria um $y_n \neq 0$ com $\|Ay_n\|_Y > n\|y_n\|_Y$. Logo $x_n = \frac{y_n}{\|y_n\|_Y}$ é limitada mas $\|Ax_n\|_Y > n$. Portanto (Ax_n) não contém subsequência convergente, donde A não seria compacto, o que contradiz a hipótese.*

Obs. 3. Se A é um operador simétrico e limitado em um espaço com produto interno X , então uma norma seria

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|.$$

Adiante determinaremos o espectro dos operadores compactos simétricos. Provaremos que o espectro de tais operadores é no máximo enumerável, conforme o seguinte teorema.

Teorema 14. *Seja A um operador linear compacto simétrico em um espaço com produto interno H tal que $\|A\| > 0$. Então existe um valor próprio λ_0 de A e existe um vetor próprio correspondente tal que:*

$$Av = \lambda v, \quad \|v\| = 1 \quad \text{e} \quad |\lambda| = \|A\| = |(Av, v)|.$$

Prova: Pela Observação 3 e pela definição de supremo existe uma sequência (u_n) em H , tal que

$$|(Au_n, u_n)| \longrightarrow \|A\|, \quad \text{quando } n \longrightarrow \infty. \quad (2.1)$$

e, já que $\{(Au_n, u_n)\}$ é uma sequência limitada de números reais, temos pelo teorema de Bolzano-Weierstrass ela possui uma subsequência (Au_m, u_m) convergente a qual vamos denotar da mesma forma da sequência (Au_m, u_m) , isto é: $(Au_m, u_m) \longrightarrow \lambda$ quando $m \longrightarrow \infty$. Logo,

$$|(Au_m, u_m)| \longrightarrow |\lambda| \quad \text{quando } m \longrightarrow \infty. \quad (2.2)$$

De (2.1) e (2.2) segue que $|\lambda| = \|A\|$. Agora temos:

$$\begin{aligned} \|Au_m - \lambda u_m\|^2 &= (Au_m - \lambda u_m, Au_m - \lambda u_m) = \|Au_m\|^2 - 2\lambda(Au_m, u_m) + \lambda^2\|u_m\|^2 \leq \\ &\|A\|^2 - 2\lambda(Au_m, u_m) + \lambda^2. \end{aligned}$$

Daí obtemos:

$$\|Au_m - \lambda u_m\|^2 \longrightarrow 0 \quad \text{se } m \longrightarrow \infty.$$

Sendo A um operador compacto e (u_m) uma sequência limitada, temos que a sequência (Au_m) contém uma subsequência convergente digamos,

$$Au_{\nu} \longrightarrow v \quad \text{se } \nu \longrightarrow \infty, \quad \text{para algum } v \in H. \quad (2.3)$$

Desde que $|\lambda| > 0$ temos também o seguinte,

$$u_{\nu} = \lambda^{-1}(\lambda u_{\nu} - Au_{\nu}) + \lambda^{-1}Au_{\nu} \longrightarrow \lambda^{-1}0 + \lambda^{-1}v = \lambda^{-1}v, \quad \text{quando } \nu \longrightarrow \infty. \quad (2.4)$$

Fazendo em (2.4) $u = \lambda^{-1}v$ temos que:

$$Au_v \longrightarrow A(\lambda^{-1}v) = Au, \text{ quando } v \longrightarrow \infty. \quad (2.5)$$

De (2.3) e (2.5) obtemos que $v = Au$ e portanto,

$$Au = \lambda u.$$

Como $u_v \longrightarrow u$ e $\|u_v\| = 1$, temos que $\|u\| = 1$ e portanto, λ é um valor próprio de A .

2.2 Teorema Espectral

Teorema 15. *(Teorema Espectral para Operadores Simétricos Compactos) Seja A um operador linear compacto simétrico em um espaço com produto interno H tal que $\|A\| > 0$. Então:*

- (i) *Existe uma seqüência (λ_n) de valores próprios de A e uma seqüência ortonormal (u_n) de vetores próprios correspondentes. Se (λ_n) não for finita, tem-se que $|\lambda_n| \longrightarrow 0$, se $n \longrightarrow \infty$.*
- (ii) *Para qualquer $u \in H$ temos a expansão:*

$$Au = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m(u, u_m)u_m = \sum_{m=1}^{\infty} (Au, u_m)u_m, \quad (2.6)$$

que se reduz a uma soma finita se (λ_n) for finita.

- (iii) *Cada valor próprio não nulo de A deve estar na seqüência (λ_n) .*
- (iv) *Para cada $i = 1, 2, 3, \dots$ o subespaço $N_{\lambda_i} = \{u \in H; Au = \lambda_i u\}$ é de dimensão finita e a multiplicidade de λ_i é o número de vezes que λ_i aparece na seqüência (λ_n) .*

Prova:

(i) Para obter uma expansão em vetores próprios associada com um operador linear compacto simétrico não nulo, vamos aplicar o Teorema 14 repetidas vezes.

Primeiro escreva $H_1 = H$ e $A_1 = A$ e usando o Teorema 14, sabemos que existe um valor próprio λ_1 e um $u_1 \in H$ tais que:

$$Au_1 = \lambda_1 u_1, \quad \|u_1\| = 1 \quad \text{e} \quad |\lambda_1| = \|A_1\| = |(A_1 u_1, u_1)|.$$

Em seguida, defina:

$$H_2 = \{u \in H_1; (u, u_1) = 0\}.$$

Note que H_2 é um subespaço de H_1 .

Denote por A_2 a restrição $A_1|_{H_2}$, ou seja, $A_2 : H_2 \rightarrow H_2$ é compacto e simétrico em H_2 .

Dois caso podem ocorrer: ou $\|A_2\| = 0$ ou então $\|A_2\| > 0$.

(1°) Se $\|A_2\| = 0$, para todo $u \in H$ definimos:

$$v_2 = u - (u, u_1)u_1,$$

então

$$(v_2, u_1) = (u - (u, u_1)u_1, u_1) = (u, u_1) - (u, u_1)\|u_1\|^2 = 0,$$

donde $v_2 \in H_2$. Logo, $\|A_2 v_2\| \leq \|A_2\| \cdot \|v_2\| = 0 \cdot \|v_2\| = 0$. Sendo $\|A_2\| = 0$ temos a representação:

$$Au = \lambda_1(u, u_1)u_1, \quad \forall u \in H.$$

(2°) Se $\|A_2\| > 0$ podemos aplicar novamente o Teorema 14 para determinar λ_2 e u_2 tais que,

$$A_2 u_2 = \lambda_2 u_2, \quad \|u_2\| = 1 \text{ e } |\lambda_2| = \|A_2\| = |(A_2 u_2, u_2)|.$$

Também já que $A_2 u = A_1 u$, $\forall u \in H_2$, temos que $\|A_2\| \leq \|A_1\|$, ou seja, $|\lambda_2| \leq |\lambda_1|$.

Agora, definimos o subespaço

$$H_3 = \{u \in H_2; (u, u_2) = 0\}$$

e seja $A_3 = A|_{H_3}$. Então A_3 é compacto e simétrico em H_3 . Se $\|A_3\| = 0$, para todo $u \in H$ definimos

$$v_3 = u - (u, u_1)u_1 - (u, u_2)u_2$$

então $(v_3, u_1) = 0$, e $(v_3, u_2) = 0$ donde $v_3 \in H_3$. Como $\|A_3\| = 0$ temos

$$0 = A_3 v_3 = Au - (u, u_1)Au_1 - (u, u_2)Au_2 = Au - (u, u_1)\lambda_1 u_1 - (u, u_2)\lambda_2 u_2.$$

Logo se $\|A_3\| = 0$ temos a representação

$$Au = \lambda_1(u, u_1)u_1 + \lambda_2(u, u_2)u_2, \quad \forall u \in H.$$

Mas se $\|A_3\| > 0$, podemos aplicar o Teorema 14 para determinar a existencia de λ_3 e $u_3 \in H_3$ tais que $A_3 u_3 = \lambda_3 u_3$, $\|u_3\| = 1$ e $|\lambda_3| = \|A_3\| = |(A_3 u_3, u_3)|$. Desde que $A_3 u = A_2 u$ $\forall u \in H_3$, temos que $\|A_3\| \leq \|A_2\|$, ou seja, $|\lambda_3| \leq |\lambda_2|$. Procedendo dessa maneira, temos:

(1) Ou existe um $n \geq 2$ tal que $\|A_n\| = 0$.

(2) Ou $\|A_n\| > 0, \forall n \geq 2$.

No caso (1) vimos que para todo $u \in H$ temos:

$$Au = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k(u, u_k) u_k. \quad (2.7)$$

No caso (2) existe (λ_n) e $(u_n) \in H_n$ tais que $Au_n = \lambda_n u_n$, $\|u_n\| = 1$ e $|\lambda_n| = \|A_n\| = |(Au_n, u_n)|$. Além disso, temos

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n| \geq \dots$$

Mostraremos agora que $|\lambda_n| \rightarrow 0$ se $n \rightarrow \infty$. De fato, como a sequência $(|\lambda_n|)$ é decrescente e limitada inferiormente por 0 ela deve convergir para um $p = \inf_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n| \geq 0$. Suponhamos que $p > 0$, então $|\lambda_n| \geq p \forall n \in \mathbb{N}$, e portanto, $(\lambda_n^{-1} u_n)$ é uma sequência limitada em H . Sendo A compacto, a sequência $(A\lambda_n^{-1} u_n) = (u_n)$ contém uma subsequência convergente mas, (u_n) é ortonormal e portanto $\|u_i - u_j\| = \sqrt{\|u_i\|^2 - 2(u_i, u_j) + \|u_j\|^2} = \sqrt{2}$ para $i \neq j$, o que contraria o fato que (u_n) contém uma subsequência convergente pois, supondo que se (u_{n_k}) , subsequência de (u_n) , convergisse então a sequência $(u_{n_{k+1}} - u_{n_k})$ convergeria para zero, o que não ocorre pois cada elemento da sequência se distancia uma distância constante de $\sqrt{2}$. Portanto, devemos ter $p=0$, ou seja, $|\lambda_n| \rightarrow 0$ se $n \rightarrow \infty$.

(ii) Agora vamos mostrar que para todo $u \in H$ temos a expansão

$$Au = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(u, u_k) u_k.$$

Para todo $u \in H$ e $n \geq 2$, definimos:

$$v_n = u - \sum_{k=1}^{n-1} (u, u_k) u_k. \quad (2.8)$$

Então $v_n \in H_n$ e

$$\|v_n\|^2 = \|u\|^2 - 2 \sum_{k=1}^{n-1} |(u, u_k)|^2 + \sum_{k=1}^{n-1} |(u, u_k)|^2 \leq \|u\|^2 - \sum_{k=1}^{n-1} |(u, u_k)|^2 \leq \|u\|^2.$$

Logo,

$$\|Av_n\| \leq \|A\| \|v_n\| = |\lambda_n| \|v_n\| \leq |\lambda_n| \|u\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

portanto, $Av_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ e por (2.8), temos que

$$Av_n = Au - \sum_{k=1}^{n-1} (u, u_k) Au_k = Au - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k(u, u_k) u_k \rightarrow 0$$

e portanto

$$Au = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(u, u_k) u_k.$$

Pela igualdade abaixo

$$\lambda_k(u, u_k) = (u, \lambda_k u_k) = (u, Au_k) = (Au, u_k)$$

concluimos que

$$Au = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(u, u_k)u_k = \sum_{k=1}^{\infty} (Au, u_k)u_k.$$

(iii) Seja λ um valor próprio não nulo de A e suponha que $\lambda \neq \lambda_k \forall k \in \mathbb{N}$. Correspondente a λ escolhe-se um vetor próprio u_λ com $\|u_\lambda\| = 1$. Então como A é simétrico e $\lambda_k \in \mathbb{R}$ temos

$$\lambda(u_\lambda, u_k) = (\lambda u_\lambda, u_k) = (Au_\lambda, u_k) = (u_\lambda, Au_k) = (u_\lambda, \lambda_k u_k) = \lambda_k(u_\lambda, u_k).$$

Como $\lambda \neq \lambda_k \forall k \in \mathbb{N}$ então $(u_\lambda, u_k) = 0 \forall k \in \mathbb{N}$. Por (2.8) temos que

$$0 = \sum_{k=1}^{\infty} (u_\lambda, u_k)u_k = Au_\lambda \Rightarrow \|Au_\lambda\| = 0 \Rightarrow \|\lambda u_\lambda\| = 0 \Rightarrow |\lambda| \|u_\lambda\| = 0 \Rightarrow |\lambda| = 0 \Rightarrow \lambda = 0,$$

o que contradiz o fato de λ ser não nulo.

(iv) Seja um λ_i valor próprio não nulo tomado da parte (i). Como $\lambda_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, o conjunto $\{k \in \mathbb{N}; \lambda_k = \lambda_i\}$ deve ser finito com p elementos distintos, digamos: $i(1), i(2), \dots, i(p)$. Considere os vetores próprios $u_{i(1)}, u_{i(2)}, \dots, u_{i(p)}$ correspondentes a $\lambda_{i(1)}, \lambda_{i(2)}, \dots, \lambda_{i(p)}$. Obtemos que V_p , o subespaço gerado por $u_{i(1)}, u_{i(2)}, \dots, u_{i(p)}$, está contido em N_{λ_i} . De fato, seja $v \in V_p$; então $v = t_1 u_{i(1)} + t_2 u_{i(2)} + \dots + t_p u_{i(p)}$, onde t_1, t_2, \dots, t_p estão em \mathbb{R} . Daí,

$$Av = t_1 Au_{i(1)} + t_2 Au_{i(2)} + \dots + t_p Au_{i(p)} = \lambda_i (t_1 u_{i(1)} + t_2 u_{i(2)} + \dots + t_p u_{i(p)}) = \lambda_i v.$$

Logo $v \in N_{\lambda_i}$, concluindo que $V_p \subset N_{\lambda_i}$.

Agora supomos que V_p não é todo o N_{λ_i} , então existe $u \in N_{\lambda_i}$ com $\|u\|=1$ tal que $\{u_{i(1)}, u_{i(2)}, \dots, u_{i(p)}, u\}$ é um conjunto ortonormal. Mas, se $k \neq i(1), i(2), \dots, i(p)$, obtemos que $\lambda_k \neq \lambda_i$ e portanto $(u, u_k) = 0$. Consequentemente, $(u, u_k) = 0 \forall k \in \mathbb{N}$ e assim por (2.8),

$$Au = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(u, u_k)u_k = 0.$$

Logo,

$$0 = \|Au\| = |\lambda_i| \|u\| = |\lambda_i|,$$

o que contraria o fato que λ_i ser não nulo. Portanto, devemos ter $\dim(N_{\lambda_i}) = p$ e a prova está completa.

2.3 Aplicações: Os Operadores Laplaciano e Biharmônico

Considere o problema de autovalores:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta w = \lambda w \text{ em } \Omega, \\ w = 0 \text{ sobre } \Gamma, \end{array} \right. \quad (2.9)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\lambda > 0$ é um aberto limitado com fronteira Γ .

Teorema 16. *Existe uma base ortonormal (w_m) de $L^2(\Omega)$ e uma seqüência de números reais (λ_m) com $\lambda_m \rightarrow \infty$ se $m \rightarrow \infty$ tais que:*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m \leq \dots \text{ e}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta w_m = \lambda_m w_m \text{ em } \Omega, \\ w_m \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega). \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Prova:

Dado $f \in L^2(\Omega)$, pelo Teorema 3 (Lax-Milgram) existe uma única solução fraca $Gf \in H_0^1(\Omega)$ do problema de Dirichlet

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = \lambda u \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma. \end{array} \right. \quad (2.11)$$

Temos então que

$$(-\Delta(Gf), v) = (f, v) \Rightarrow \int_{\Omega} (-\Delta(Gf))v \, dx = \int_{\Omega} fv \, dx.$$

integrando por partes e observando que $Gf \in H_0^1(\Omega)$ temos:

$$\int_{\Omega} \nabla(Gf) \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} fv \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.12)$$

Como Ω é limitado, a imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ é compacta, de acordo com o Teorema 13 (Rellich-Kondrachoff). Assim G é considerado como um operador compacto de $L^2(\Omega)$ em $H_0^1(\Omega)$.

Temos ainda que:

(I) G é simétrico. De fato,

De fato, de (2.12) obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (Gf)g \, dx &= \int_{\Omega} gGf \, dx = \int_{\Omega} \nabla(Gg) \cdot \nabla(Gf) \, dx = \\ &= \int_{\Omega} \nabla(Gf) \cdot \nabla(Gg) \, dx = \int_{\Omega} fGg \, dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$(Gf, g) = (f, Gg), \quad \forall f, g \in L^2(\Omega)$$

(II) G é positivo definido.

De fato, de (2.12) obtemos

$$\int_{\Omega} (Gf)f \, dx = \int_{\Omega} fGf \, dx = \int_{\Omega} \nabla(Gf) \cdot \nabla Gf \, dx = \|Gf\|_{H_0^1}^2 > 0$$

se $f \neq 0$.

Pelo Teorema Espectral para operadores compactos simétricos e positivos definido, isto é, pelo Teorema 15, existe um sistema ortonormal de funções próprias (w_m) em $L^2(\Omega)$ e uma sequência de valores próprios positivos (μ_m) decrescente para zero tal que

$$Gw_m = \mu_m w_m. \quad (2.13)$$

Se considerarmos $\lambda_m = \mu_m^{-1}$ então:

$$w_m = \frac{1}{\mu_m} Gw_m = G(\mu_m^{-1} w_m) = G(\lambda_m w_m). \quad (2.14)$$

Como a imagem de G está em $H_0^1(\Omega)$, $w_m \in H_0^1(\Omega)$ e por (2.12) e (2.14) temos:

$$\int_{\Omega} \nabla w_m \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} \nabla(G(\lambda_m w_m)) \cdot \nabla v \, dx = \lambda_m \int_{\Omega} w_m v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Em particular,

$$\int_{\Omega} \nabla w_m \cdot \nabla \varphi \, dx = \lambda_m \int_{\Omega} w_m \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega),$$

donde,

$$(-\Delta w_m, \varphi) = (\lambda_m w_m, \varphi), \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega),$$

isto é,

$$-\Delta w_m = \lambda_m w_m \text{ no sentido de } \mathfrak{D}'(\Omega).$$

Para mostrar que $w_m \in C^\infty(\Omega)$, sejam $x \in \Omega$ e $B(x, r)$, a bola de centro x e raio r , com $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset \Omega$.

Agora, como $w_m \in L^2(B(x, r))$ e satisfaz a equação $-\Delta w_m = \lambda_m w_m$, isso implica que $\frac{\partial^2}{\partial x^2} w_m \in H^2(B(x, r))$. Repetindo o mesmo argumento segue-se que $w_m \in H^4(B(x, r))$ e assim por diante, por um resultado de regularidade no interior.

Assim, $w_m \in H^k(B(x, r))$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e pelo Teorema ??, temos que $w_m \in C^\infty(B(x, r))$. Como $x \in \Omega$ é qualquer, segue-se que

$$w_m \in C^\infty(\Omega).$$

Agora mostraremos que o operador biharmônico Δ^2 satisfaz as condições do teorema espectral para operadores compactos, mas antes enunciaremos a seguinte proposição que demonstra diretamente o resultado.

Proposição 3. *Sejam X, Y, Z espaços de Banach e sejam $T: X \rightarrow Y$ e $K: Y \rightarrow Z$ operadores lineares. Se T e K são operadores compactos então $T \circ K: X \rightarrow Z$ é um operador compacto.*

Prova: Ver [1], pág. 159.

Temos obviamente que o operador Δ^2 é positivo. Agora dados os vetores $u, v \in H^2(\Omega)$, temos pela integração por partes que

$$(\Delta^2 u, v) = \int_{\Omega} \Delta^2 u(x) v(x) dx = \int_{\Omega} u(x) \Delta^2 v(x) dx = (u, \Delta^2 v).$$

Logo Δ^2 é simétrico, e segue diretamente da Proposição 3 que Δ^2 é compacto, pois $\Delta^2 = \Delta \circ \Delta$ o que já vimos que é um operador compacto. Portanto o operador biharmônico satisfaz as condições do teorema espectral para operadores compactos.

Capítulo 3

Problema Misto para um Sistema Termo-elástico.

Neste capítulo, provaremos a existência e unicidade da solução fraca para o problema Termo-elástico

$$\left\{ \begin{array}{l} u'' + \Delta^2 u - M(\|u\|^2)\Delta u + |u|^\rho u + \theta = f \text{ em } Q \\ \theta' - \Delta\theta + u' = g \text{ em } Q \\ u = \frac{\partial u}{\partial \eta} = \theta = 0 \text{ sobre } \Sigma \\ u(x, 0) = u_0(x); \theta(x, 0) = \theta_0(x) \text{ e } u'(x, 0) = u_1(x) \text{ em } \Omega, \end{array} \right. \quad (3.1)$$

onde assumiremos as seguintes hipóteses:

- $M(\lambda)$ é uma função real contínua satisfazendo

$$M(\lambda) \geq -\beta, \forall \lambda > 0 \text{ e } 0 < \beta < \lambda_1,$$

onde λ_1 é o primeiro autovalor do problema espectral para o operador biharmônico Δ^2 , isto é,

$$(-\Delta u, -\Delta v) = \lambda((u, v)), \quad \forall v \in H_0^2(\Omega);$$

- $0 < \rho$ se $n = 1, 2$ e $0 < \rho \leq \frac{2}{n-2}$ se $n \geq 3$.

Definição 16. Dizemos que um par de funções $\{u(x, t), \theta(x, t)\}$ é solução fraca do problema (3.1) se:

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega)); \\ u' &\in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)); \\ u'' &\in L^2(0, T; H^{-2}(\Omega)); \\ \theta &\in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)); \end{aligned}$$

$$\theta' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega));$$

$$\frac{d}{dt}(u'(t), \omega) + (\Delta^2 u(t), \omega) + M \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx ((u(t), \omega)) + (|u(t)|^p u(t), \omega) +$$

$$(\theta(t), \omega) = (f(t), \omega);$$

$$\frac{d}{dt}(\theta(t), \omega) + ((\theta(t), \omega)) + (u'(t), \omega) = (g(t), \omega),$$

para todo $\omega \in H_0^2(\Omega)$ no sentido de $\mathfrak{D}'(0, T)$.

Álem disso,

$$u(0) = u_0, u'(0) = u_1, \theta(0) = \theta_0.$$

O seguinte teorema estabelece o resultado principal desta dissertação.

Teorema 17. *Sejam $u_0 \in H_0^2(\Omega)$, $u_1, \theta_0 \in L^2(\Omega)$ e $f, g \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Então existe somente um par de funções $\{u, \theta\}$ solução do problema (3.1) no sentido da Definição 16.*

3.1 Existência de Soluções para o Problema Aproximado

Para resolução do problema proposto acima se empregará o Método de Faedo-Galerkin, que consiste em aproximar o sistema inicial através de um sistema, porém em dimensão finita.

Nesta seção estudaremos a existência de uma solução para o tal problema aproximado.

Seja V_m o subespaço gerado por $\omega_1, \dots, \omega_m$, onde os $\omega_k \in H_0^2(\Omega)$ para $k = 1, \dots, m$ são os vetores próprios do operador biharmônico Δ^2 . Isto significa que:

- todo subconjunto finito de ω_i é Linearmente Independente;
- as combinações lineares finitas dos ω_i são densas em $H_0^2(\Omega)$.

Em V_m , vamos demonstrar que o sistema aproximado a seguir possui uma solução aproximada do problema (3.1):

$$(u_m''(t), \omega_k) + (\Delta^2 u_m(t), \omega_k) + M(\|u_m(t)\|^2)(-\Delta u_m(t), \omega_k) + (|u_m(t)|^p u_m(t), \omega_k) + (\theta_m(t), \omega_k) = (f(t), \omega_k) \quad (3.2)$$

$$(\theta_m'(t), \omega_k) - (\Delta \theta_m(t), \omega_k) + (u_m'(t), \omega_k) = (g(t), \omega_k), \quad k = 1, \dots, m \quad (3.3)$$

$$u_m(0) = u_{0m} \quad (3.4)$$

$$u_m'(0) = u_{1m} \quad (3.5)$$

$$\theta_m(0) = \theta_{0m}, \quad (3.6)$$

onde

$$u_m(0) = u_{0m} \longrightarrow u_0 \text{ forte em } H_0^2(\Omega),$$

$$u_m'(0) = u_{1m} \longrightarrow u_1 \text{ forte em } L^2(\Omega),$$

$$\theta_m(0) = \theta_{0m} \longrightarrow \theta_0 \text{ forte em } L^2(\Omega),$$

quando $m \longrightarrow \infty$ para todo $\omega_k \in V_m$.

Sejam $u_m(t)$ e $\theta_m(t) \in V_m$; isto significa que:

$$\begin{aligned} u_m(t, x) &= \sum_{j=1}^m c_{jm}(t) \omega_j(x), & \theta_m(t, x) &= \sum_{j=1}^m d_{jm}(t) \omega_j(x), \\ u_{0m} &= \sum_{j=1}^m \alpha_{jm} \omega_j(x), & \theta_{0m} &= \sum_{j=1}^m \gamma_{jm} \omega_j(x) \text{ e} \\ u_{1m} &= \sum_{j=1}^m \delta_{jm} \omega_j(x), \end{aligned}$$

onde $c_{jm}(0) = \alpha_{jm}$, $d_{jm}(0) = \gamma_{jm}$, $c'_{jm}(0) = \delta_{jm}$ para todo $j = 1, \dots, m$.

Logo se provarmos que existem $c_{jm}(t)$ e $d_{jm}(t)$ soluções do sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^m c_{jm}''(t) (\omega_i, \omega_j) + \sum_{j=1}^m c_{jm}(t) (\Delta \omega_i, \Delta \omega_j) + \\ M(\|u_m(t)\|^2) \sum_{j=1}^m c_{jm}(t) (\nabla \omega_i, \nabla \omega_j) + \left| \sum_{j=1}^m c_{jm}(t) \omega_i \right|^p \sum_{j=1}^m c_{jm}(t) (\omega_i, \omega_j) + \\ \sum_{j=1}^m d_{jm}(t) (\omega_i, \omega_j) = (f(t), \omega_j); \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{j=1}^m d_{jm}'(t) (\omega_i, \omega_j) + \sum_{j=1}^m d_{jm}(t) (\nabla \omega_i, \nabla \omega_j) + \sum_{j=1}^m c_{jm}'(t) (\omega_i, \omega_j) = (g(t), \omega_j) \\ c_{jm}(0) = \alpha_{jm} \text{ e } c_{jm}'(0) = \delta_{jm}; \quad j = 1, \dots, m \\ d_{jm}(0) = \gamma_{jm}; \quad j = 1, \dots, m, \end{array} \right. \quad (3.7)$$

ficará demonstrado que existem $u_m(t)$ e $\theta_m(t)$ soluções em V_m , para o problema aproximado (3.2)-(3.6). Vamos transformar o sistema (3.7) em sistemas vetoriais equivalentes. Para isso, nós definimos as seguintes matrizes:

- $W = [(\omega_i, \omega_j)]_{m \times m}$,
- $A = [(\Delta\omega_i, \Delta\omega_j)]_{m \times m}$,
- $B = [(\nabla\omega_i, \nabla\omega_j)]_{m \times m}$,
- $C = [c_{1m}(t) \cdots c_{mm}(t)]_{m \times 1}^*$,
- $D = [d_{1m}(t) \cdots d_{mm}(t)]_{m \times 1}^*$,
- $F = [(f(t), \omega_1) \cdots (f(t), \omega_m)]_{m \times 1}^*$,
- $G = [(g(t), \omega_1) \cdots (g(t), \omega_m)]_{m \times 1}^*$,

sendo $[]^*$ a matriz transposta. O sistema (3.7) assume a seguinte forma matricial:

$$\begin{cases} WC'' + WD = F - AC - M(\|u_m(t)\|^2)BC - \left| \sum_{j=1}^m c_{jm}(t)\omega_j \right|^p WC \\ WD' + WC' = G - BD \\ C(0) = C_0 \quad C'(0) = C_1 \\ D(0) = D_0, \end{cases} \quad (3.8)$$

onde $C_0 = [\alpha_{1m} \cdots \alpha_{mm}]^*$, $C_1 = [\delta_{1m} \cdots \delta_{mm}]^*$ e $D_0 = [\gamma_{1m} \cdots \gamma_{mm}]^*$.

Temos que a matriz W é invertível. De fato, definimos o operador Λ como sendo

$$\Lambda\alpha = W\alpha = \sum_{i=1}^m (\omega_i, \omega_j)\alpha_i,$$

onde $\alpha = [\alpha_1 \cdots \alpha_m]^*$. Para provar que o operador Λ é inversível basta mostrar que ele é injetivo, ou seja, $Ker(\Lambda) = \{\vec{0}\}$. Seja $\Lambda\alpha = 0$. Então:

$$\sum_{i=1}^m (\omega_i, \omega_j)\alpha_i = 0 \iff \left(\sum_{i=1}^m \omega_i\alpha_i, \omega_j \right) = 0.$$

Multiplicando a última equação por α_j e somando em j , para todo $j = 1, \dots, m$, tem-se

$$\left(\sum_{i=1}^m \omega_i\alpha_i, \sum_{j=1}^m \omega_j\alpha_j \right) = 0 \iff (u_m, u_m) = 0 \iff |u_m|^2 = 0 \iff u_m = 0 \text{ em } V_m.$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i\omega_i = 0,$$

e daí temos que $\alpha_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, m$, pois ω_i são L.I.. Portanto $\alpha = 0$, ou seja,

o operador A é injetivo; segue então que ele possui uma inversa a esquerda. Aplicando o operador $\Lambda^{-1} = W^{-1}$, à equação (3.8), obtemos:

$$\begin{cases} C'' + D = W^{-1}F - W^{-1}AC - M(\|u_m(t)\|^2)W^{-1}BC - \left| \sum_{j=1}^m c_{jm}(t)\omega_j \right|^p C \\ D' + C' = W^{-1}G - W^{-1}BD \\ C(0) = C_0 \quad C'(0) = C_1 \\ D(0) = D_0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Tomando

$$Z = \begin{bmatrix} C' \\ D \\ C \end{bmatrix}_{3m \times 1}, \quad V = \begin{bmatrix} \bar{0} & -I & \bar{P} \\ -I & -W^{-1}B & \bar{0} \\ I & \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}_{3m \times 3m} \quad \text{e} \quad E = \begin{bmatrix} \bar{F} \\ \bar{G} \\ \hat{0} \end{bmatrix}_{3m \times 1},$$

onde

- $\bar{P} = -W^{-1}A - M(\|u_m(t)\|^2)W^{-1}B - \left| \sum_{j=1}^m c_{jm}(t)\omega_j \right|^p,$
- $\bar{F} = W^{-1}F,$
- $\bar{G} = W^{-1}G,$

$\bar{0}$ e I são as matrizes nula e identidade $m \times m$, respectivamente, e $\hat{0}$ é a matriz nula $m \times 1$, temos que o sistema (3.9) assume a seguinte forma equivalente:

$$\begin{cases} Z' = \Phi(t, Z) = VZ + E \\ Z(0) = Z_0, \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\text{onde } Z_0 = \begin{bmatrix} C_1 \\ D_0 \\ C_0 \end{bmatrix}.$$

Vamos mostrar que a função $\Phi(t, Z)$ satisfaz as condições de Carathéodory (ver definição 1, Cap.1). Para isto, seja:

$$R = \{(t, Z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^{3m}; t \leq a, |Z - Z_0| \leq b, \text{ com } a, b > 0\},$$

então:

1. $\Phi(t, Z)$ é mensurável em t , para cada Z fixo. De fato, sendo $f, g \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, temos que $(f(t), \omega_j)$ e $(g(t), \omega_j)$ são mensuráveis e W não dependem de t , segue que $W^{-1}F$ e $W^{-1}G$ são mensuráveis, logo E é mensurável. V também é mensurável, pelo fato de sendo M é uma função contínua e W, A, B não dependerem de t , segue

que \bar{P} e $W^{-1}B$ são mensuráveis; logo V é mensurável, portanto $\Phi(t, Z)$ é mensurável para Z fixo.

2. Agora fixando t a continuidade de $\phi(t, Z)$ decorre de sua linearidade.
3. Dado K um compacto em \mathbb{R} , existe uma função real integrável $h(t)$ tal que $|\Phi(t, Z)| \leq h(t), \forall (t, Z) \in K$. De fato, como $\Phi(t, Z)$ é uniformemente contínua em \mathbb{R} , então Φ é contínua em cada compacto K e, portanto, em cada compacto onde Φ está definida, ela é limitada por uma função constante.

Logo, estão satisfeitas as condições do *Teorema de Carathéodory* e segue por este Teorema que, para cada m o sistema (3.10) possui uma soluções local no intervalo $[0, t_m), t_m < T$, obtendo assim as funções c_{jm} e $d_{jm}, j = 1, 2, \dots, m$ e conseqüentemente, as funções $u_m(t)$ e $\theta_m(t)$ com $t \in [0, t_m), t_m < T$ que satisfaz o problema (3.2)-(3.6).

3.2 Estimativas

Nesta seção iremos obter estimativas que nos permitem estender ao intervalo $[0, T]$ as soluções encontradas na seção anterior.

Estimativas. Multiplicando a equação (3.2) por c'_{km} e somando em k de 1 até m obtemos:

$$\begin{aligned} (u''_m(t), u'_m(t)) + (\Delta^2 u_m(t), u'_m(t)) + M(\|u_m(t)\|^2)(-\Delta u_m(t), u'_m(t)) + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), u'_m(t)) \\ = -(\theta_m(t), u'_m(t)) + (f(t), u'_m(t)) \end{aligned}$$

Note que :

- $(u''_m(t), u'_m(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u'_m(t)|^2$.
- $(\Delta^2 u_m(t), u'_m(t)) = \int_{\Omega} \Delta^2 u_m(x, t) u'_m(x, t) dx = \int_{\Omega} \Delta(\Delta u_m(x, t)) u'_m(x, t) dx$
 $= \int_{\Omega} \Delta u_m(x, t) \Delta u'_m(x, t) dx = (\Delta u_m(x, t), \Delta u'_m(x, t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\Delta u_m(t)|^2$.

Usando a integração por partes e o fato de que $u_m \in V_m \subset H_0^2(\Omega)$, temos:

- $M(\|u_m(t)\|^2)(-\Delta u_m(t), u'_m(t)) = M(\|u_m(t)\|^2) \int_{\Omega} (-\Delta u_m(x, t)) u'_m(x, t) dx =$

$$M(\|u_m(t)\|^2) \left(- \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_m(x, t)}{\partial x_i^2} u'_m(x, t) dx \right) =$$

$$M(\|u_m(t)\|^2) \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u_m(x, t)}{\partial x_i} \frac{\partial u'_m(x, t)}{\partial x_i} dx \right) =$$

$$M(\|u_m(t)\|^2) ((u_m(t), u'_m(t))) = M(\|u_m(t)\|^2) \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \tilde{M}(\|u_m(t)\|^2),$$

onde $\tilde{M}(\lambda) = \int_0^\lambda M(s) ds$.

Da seguinte igualdade:

$$\frac{1}{\rho + 2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_m(x, t)|^{\rho+2} dx = \frac{\rho + 2}{\rho + 2} \int_{\Omega} |u_m(x, t)|^{\rho+1} \frac{d}{dt} |u_m(x, t)| dx = \int_{\Omega} |u_m(x, t)|^{\rho+1} \frac{u_m(x, t)}{|u_m(x, t)|} u'_m(x, t) dx =$$

$$\int_{\Omega} |u_m(x, t)|^\rho u_m(x, t) u'_m(x, t) dx,$$

tem-se:

- $(|u_m(t)|^\rho u_m(t), u'_m(t)) = \int_{\Omega} |u_m(x, t)|^\rho u_m(x, t) u'_m(x, t) dx = \frac{1}{\rho + 2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_m(x, t)|^{\rho+2} dx =$

$$\frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^p(\Omega)}^p,$$

sendo $p = \rho + 2$.

Logo obtemos:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u'_m(t)|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\Delta u_m(t)|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \tilde{M}(\|u_m(t)\|^2) + \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_{L^p(\Omega)}^p =$$

$$= -(u'_m(t), \theta_m(t)) + (f(t), u'_m(t)). \quad (3.11)$$

Agora, multiplicando (3.3) por $d_{km}(t)$ e somando em k obtemos:

$$(\theta'_m(t), \theta_m(t)) - (\Delta \theta_m(t), \theta_m(t)) + (u'_m(t), \theta_m(t)) = (g(t), \theta_m(t)).$$

Note que :

- $(\theta'_m(t), \theta_m(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\theta_m(t)|^2.$
- $(-\Delta \theta_m(t), \theta_m(t)) = \int_{\Omega} -\Delta \theta_m(x, t) \theta_m(x, t) dx = \int_{\Omega} \nabla \theta_m(x, t) \nabla \theta_m(t, x) dx = \|\theta_m(t)\|^2.$

Daí obtemos:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\theta_m(t)|^2 + \|\theta_m(t)\|^2 = -(u'_m(t), \theta_m(t)) + (g(t), \theta_m(t)). \quad (3.12)$$

Somando (3.11) com (3.12) obtemos :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ |u'_m(t)|^2 + |\Delta u_m(t)|^2 + \tilde{M}(\|u_m(t)\|^2) + \frac{2}{p} \|u_m(t)\|_{L^p(\Omega)}^p + |\theta_m(t)|^2 \} + \|\theta_m(t)\|^2 =$$

$-2(\theta_m(t), u'_m(t)) + (f(t), u'_m(t)) + (g(t), \theta_m(t)) \leq |\theta_m(t)|^2 + |u'_m(t)|^2 + \frac{1}{2}|f(t)|^2 +$
 $\frac{1}{2}|u'_m(t)|^2 + \frac{1}{2}|g(t)|^2 + \frac{1}{2}|\theta_m(t)|^2 \leq \frac{3}{2}|u'_m(t)|^2 + \frac{3}{2}|\theta_m(t)|^2 + |f(t)|^2 + |g(t)|^2,$
 onde usamos o fato: $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2, \forall a, b \in \mathbb{R}$. Agora, integrando de 0 a $t \leq t_m$ a desigualdade acima, obtemos:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \{ |u'_m(t)|^2 + |\Delta u_m(t)|^2 + \tilde{M}(\|u_m(t)\|^2) + \frac{2}{p} \|u_m(t)\|_{L^p(\Omega)}^p + |\theta_m(t)|^2 \} + \int_0^t \|\theta_m(s)\|^2 ds \leq \\
 & \frac{1}{2} \{ |u_{1m}|^2 + \frac{1}{p} \|u_{0m}\|_{L^p(\Omega)}^p + |\Delta u_{0m}|^2 + |\theta_{0m}|^2 + \tilde{M}(\|u_{0m}\|^2) \} + \frac{3}{2} \int_0^t \{ |u'_m(s)|^2 + |\theta_m(s)|^2 \} ds \\
 & + \int_0^t \{ |f(s)|^2 + |g(s)|^2 \} ds. \tag{3.13}
 \end{aligned}$$

Como $(u_{0m}), (u_{1m})$ e (θ_{0m}) são sequências convergentes segue que elas são limitadas em suas respectivas normas. Além disso, como $f, g \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, temos que $\int_0^T \{ |f(s)|^2 + |g(s)|^2 \} ds$ é limitada. Assim (3.13) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 & |u'_m(t)|^2 + |\Delta u_m(t)|^2 + \tilde{M}(\|u_m(t)\|^2) + \frac{2}{p} \|u_m(t)\|_{L^p(\Omega)}^p + |\theta_m(t)|^2 + \int_0^t \|\theta_m(s)\|^2 ds \leq \\
 & \leq C + \frac{3}{2} \int_0^t \{ |u'_m(s)|^2 + |\theta_m(s)|^2 \} ds, \tag{3.14}
 \end{aligned}$$

onde C é uma contante positiva dependendo das condições iniciais, de f, g e independente de m e t .

Da hipótese sobre M obtemos:

$$\begin{aligned}
 & \tilde{M}(\|u_m(t)\|^2) = \int_0^{\|u_m(t)\|^2} M(s) ds \geq \int_0^{\|u_m(t)\|^2} (-\beta) ds \geq -\beta \|u_m(t)\|^2 \\
 & \geq -\frac{\beta}{\lambda_1} |\Delta u_m(t)|^2. \tag{3.15}
 \end{aligned}$$

De (3.14) e (3.15) segue que:

$$\begin{aligned}
 & |u'_m(t)|^2 + (1 - \frac{\beta}{\lambda_1}) |\Delta u_m(t)|^2 + \frac{2}{p} \|u_m(t)\|_{L^p(\Omega)}^p + |\theta_m(t)|^2 + \int_0^t \|\theta_m(s)\|^2 ds \leq \\
 & C + \frac{3}{2} \int_0^t \{ |u'_m(s)|^2 + |\theta_m(s)|^2 \} ds.
 \end{aligned}$$

Em particular, temos

$$|u'_m(t)|^2 + |\theta_m(t)|^2 \leq C + \frac{3}{2} \int_0^t \{ |u'_m(s)|^2 + |\theta_m(s)|^2 \} ds.$$

Pela desigualdade de Gronwall, Teorema 8 do Cap. 1, obtemos

$$|u'_m(t)|^2 + |\theta_m(t)|^2 \leq C, \quad \forall m = 1, 2, \dots \text{ e } \forall t \in [0, T], \quad T > 0 \text{ arbitrário e fixo.}$$

Daí,

$$|u'_m(t)|^2 + (1 - \frac{\beta}{\lambda_1}) |\Delta u_m(t)|^2 + \frac{2}{p} \|u_m(t)\|_{L^p(\Omega)}^p + |\theta_m(t)|^2 + \int_0^t \|\theta_m(s)\|^2 ds \leq C, \tag{3.16}$$

onde C é uma contante que independe de m e t .

Pelo Corolário do Teorema 12 (Cap.1) temos que $\|u_m(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq C|\Delta u_m(t)|$, e por (3.16) obtemos então que:

- $\sup_{0 \leq t \leq T} \text{ess}\|u_m(t)\|_{H^2(\Omega)}$ é limitado; daí podemos concluir que:

$$(u_m)_m \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega)); \quad (3.17)$$

- $\sup_{0 \leq t \leq T} \text{ess}|u'_m(t)|$ é limitado:

$$(u'_m)_m \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)); \quad (3.18)$$

- $\sup_{0 \leq t \leq T} \text{ess}|\theta_m(t)|$ é limitado, donde :

$$(\theta_m)_m \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)); \quad (3.19)$$

- $\int_0^t \|\theta_m(s)\|^2 ds$ é limitado, daí:

$$(\theta_m)_m \text{ é limitada em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)); \quad (3.20)$$

- $\|u_m(t)\|_{L^p(\Omega)}^p$ é limitado, onde $p = \rho + 2$; temos então que

$$\begin{aligned} \|u_m(t)\|_{L^p(\Omega)}^p &= \int_0^t |u_m(s)|^p ds = \int_0^t |u_m(s)|^{\rho+2} ds = \int_0^t |u_m(s)|^{\rho+1 \left(\frac{\rho+2}{\rho+1}\right)} ds = \\ &= \int_0^t (|u_m(s)|^\rho |u_m(s)|)^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} ds = \| |u_m(t)|^\rho u_m(t) \|_{L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(Q)}. \end{aligned}$$

Podemos concluir que

$$(|u_m|^\rho u_m)_m \text{ é limitado em } L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(Q). \quad (3.21)$$

Para um dado espaço de Banach X , temos que $L^\infty(0, T; X) = \left(L^1(0, T; X') \right)'$ e $L^2(0, T; X) = \left(L^2(0, T; X') \right)'$, onde usamos o Teorema 2 (*Representação de Riez*). Logo pelas limitações obtidas em (3.17) e (3.18), segue-se do Teorema 4 (*Banach-Alaoglu-Boubaraki*) que existe uma subsequência $(u_\nu)_\nu$ de $(u_m)_m$, tal que

$$u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega)) \quad (3.22)$$

e

$$u'_\nu \xrightarrow{*} \tilde{u} \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \quad (3.23)$$

Provaremos a seguir que $\tilde{u} = u'$.

De fato, por (3.22) e do fato que $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ tem-se que $L^s(0, T; H_0^2(\Omega)) \hookrightarrow L^r(0, T; L^2(\Omega))$, para $1 \leq s \leq r \leq \infty$. Logo obtemos

$$u_\nu \xrightarrow{*} u \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$$

e conseqüentemente,

$$u_\nu \rightharpoonup u \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \equiv L^2(Q). \quad (3.24)$$

Como $L^2(Q) \subset \mathfrak{D}'(Q)$ e a convergência fraca em $L^2(Q)$ implica convergência no sentido das distribuições, resulta que

$$u_\nu \rightharpoonup u \text{ em } \mathfrak{D}'(Q).$$

Sendo a derivação, uma operação contínua em $\mathfrak{D}'(Q)$ tem-se que

$$u'_\nu \rightharpoonup u' \text{ em } \mathfrak{D}'(Q).$$

Analogamente de (3.23) obtemos:

$$u'_\nu \rightharpoonup \bar{u} \text{ em } \mathfrak{D}'(Q).$$

Pela unicidade do limite fraco-* em X' segue que $u' = \bar{u}$.

Logo,

$$u'_\nu \xrightarrow{*} u' \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \quad (3.25)$$

Agora como $H_0^1(\Omega)$ é reflexivo segue que $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ é também reflexivo; então por (3.20) e pelo Teorema 5 (*Kakutani*) existe uma subsequência $(\theta_\nu)_\nu$ de (θ_m) tal que

$$\theta_m \rightharpoonup \theta \text{ em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)). \quad (3.26)$$

De (3.22), (3.25) e pelo Teorema de *Aubin-Lions*, segue que existe uma subsequência de $(u_\nu)_\nu$ tal que

$$u_\nu \longrightarrow u \text{ em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (3.27)$$

donde,

$$u_\nu(t) \longrightarrow u(t) \text{ quase sempre em } (0, T).$$

Daí

$$\|u_\nu(t)\|^2 \longrightarrow \|u(t)\|^2 \text{ em } \mathbb{R}.$$

Como a função M é contínua temos

$$M(\|u_\nu(t)\|^2) \longrightarrow M(\|u(t)\|^2) \text{ em } \mathbb{R}.$$

Da mesma forma temos

$$|M(\|u_\nu(t)\|^2)|^2 \longrightarrow |M(\|u(t)\|^2)|^2 \text{ em } \mathbb{R}. \quad (3.28)$$

Daí, obtemos:

$$|M(\|u_\nu(t)\|^2)|^2 \leq C \text{ quase sempre em } (0, T), \forall \nu = 1, 2, \dots \quad (3.29)$$

Por (3.28), (3.29) e pelo Teorema 7 (*Lebesgue*) obtemos

$$\int_0^T |M(\|u_\nu(t)\|^2)|^2 dt \longrightarrow \int_0^T |M(\|u(t)\|^2)|^2 dt,$$

ou ainda

$$M(\|u_\nu(t)\|^2) \longrightarrow M(\|u(t)\|^2) \text{ em } \mathbb{R}. \quad (3.30)$$

Agora, por (3.22) temos que:

$$\Delta u_\nu \xrightarrow{*} \Delta u \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \quad (3.31)$$

Como $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ é reflexivo logo:

$$\Delta u_\nu \rightharpoonup \Delta u \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \quad (3.32)$$

Temos então por (3.30) e (3.32) que

$$M(\|u_\nu(t)\|^2)\Delta u_\nu \rightharpoonup M(\|u(t)\|^2)\Delta u \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (3.33)$$

Como $H_0^1(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^2(\Omega)$ temos então por (3.17), (3.18) e por *Aubin-Lions* existe uma subsequência $(u_\nu)_\nu$, tal que,

$$u_\nu \longrightarrow u \text{ forte em } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \equiv L^2(Q)$$

e

$$u_\nu \longrightarrow u \text{ quase sempre em } Q.$$

Daí,

$$|u_\nu|^\rho u_\nu \longrightarrow |u|^\rho u \text{ quase sempre em } Q. \quad (3.34)$$

Logo por (3.21) e (3.34) e pelo Teorema 6 (*Lema de Lions*) temos

$$|u_\nu|^\rho u_\nu \rightharpoonup |u|^\rho u \text{ em } L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(Q). \quad (3.35)$$

Consideremos agora as equações aproximadas (3.2) e (3.3) na seguinte forma

$$\begin{cases} (u_\nu''(t), \omega) + (\Delta^2 u_\nu(t), \omega) - M(\|u_\nu\|^2)(\Delta u_\nu, \omega) + (|u_\nu(t)|^p u_\nu(t), \omega) + \\ (\theta_\nu(t), \omega) = (f(t), \omega) \\ (\theta_\nu'(t), \omega) - (\Delta \theta_\nu(t), \omega) + (u_\nu'(t), \omega) = (g(t), \omega), \quad \forall \omega \in V_m, \nu \geq m. \end{cases}$$

Multiplicando as equações acima por $\varphi(t) \in \mathfrak{D}(0, T)$ obtemos:

$$(u_\nu''(t), \omega)\varphi + (\Delta^2 u_\nu(t), \omega)\varphi - M(\|u_\nu\|^2)(\Delta u_\nu, \omega)\varphi + (|u_\nu(t)|^p u_\nu(t), \omega)\varphi + (\theta_\nu(t), \omega)\varphi = (f(t), \omega)\varphi,$$

$$(\theta_\nu'(t), \omega)\varphi - (\Delta \theta_\nu(t), \omega)\varphi + (u_\nu'(t), \omega)\varphi = (g(t), \omega)\varphi, \quad \forall \omega \in V_m, \nu \geq m.$$

Integrando agora de 0 a T temos

$$\begin{aligned} & \int_0^T (u_\nu''(t), \omega)\varphi dt + \int_0^T (\Delta^2 u_\nu(t), \omega)\varphi dt - \int_0^T M(\|u_\nu\|^2)(\Delta u_\nu, \omega)\varphi dt + \\ & \int_0^T (|u_\nu(t)|^p u_\nu(t), \omega)\varphi dt + \int_0^T (\theta_\nu(t), \omega)\varphi dt = \int_0^T (f(t), \omega)\varphi dt, \\ & \int_0^T (\theta_\nu'(t), \omega)\varphi dt - \int_0^T (\Delta \theta_\nu(t), \omega)\varphi dt + \int_0^T (u_\nu'(t), \omega)\varphi dt = \\ & \int_0^T (g(t), \omega)\varphi dt, \quad \forall \omega \in V_m, \nu \geq m. \end{aligned}$$

Daí, integrando por partes a primeira integral da primeira e segunda equações, respectivamente, obtemos:

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (u_\nu'(t), \omega)\varphi' dt + \int_0^T (\Delta u_\nu(t), \Delta \omega)\varphi dt - \int_0^T (M(\|u_\nu(t)\|)\Delta u_\nu(t), \omega)\varphi dt + \\ & \int_0^T (|u_\nu(t)|^p u_\nu(t), \omega)\varphi dt + \int_0^T (\theta_\nu(t), \omega)\varphi dt = \int_0^T (f(t), \omega)\varphi dt, \\ & \int_0^T (\theta_\nu(t), \omega)\varphi' dt - \int_0^T (\theta_\nu(t), \Delta \omega)\varphi dt + \int_0^T (u_\nu'(t), \omega)\varphi dt = \\ & \int_0^T (g(t), \omega)\varphi dt, \quad \forall \omega \in V_m, \nu \geq m. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Como $u_\nu' \xrightarrow{*} u'$ em $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) = \left(L^1(0, T; L^2(\Omega)) \right)'$ então

$$\langle u_\nu'(x, t), \phi(x, t) \rangle \longrightarrow \langle u', \phi \rangle, \quad \forall \phi \in L^1(0, T; L^2(\Omega)).$$

Sendo $\langle u_\nu', \phi \rangle = \int_0^T (u_\nu'(t, x), \phi(x, t)) dt$, temos para $\phi(x, t) = \omega(x)\psi(t)$ que:

$$\int_0^T (u_\nu'(t, x), \phi(x, t)) dt = \int_0^T (u_\nu'(x, t), \omega(x))\psi(t) dt, \quad \forall \omega \in L^2(\Omega), \forall \psi(t) \in L^1(0, T).$$

Segue então que

$$\int_0^T (u_\nu'(x, t), \omega(x))\psi(t) dt \longrightarrow \int_0^T (u'(x, t), \omega(x))\psi(t) dt, \quad \forall \omega \in L^2(\Omega), \forall \psi \in L^1(0, T).$$

Em particular,

$$\int_0^T (u_\nu'(x, t), \omega(x))\varphi'(t) dt \longrightarrow \int_0^T (u'(t, x), \omega(x))\varphi'(t) dt, \tag{3.37}$$

$$\forall \omega \in V_m \subset H_0^2(\Omega) \subset L^2(\Omega), \forall \psi = \varphi', \varphi \in \mathfrak{D}(0, T) \subset L^1(0, T).$$

A convergência (3.22) implica que

$$\Delta u_\nu \xrightarrow{*} \Delta u \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)),$$

o que significa que:

$$\langle \Delta u_\nu(x, t), \phi(x, t) \rangle \longrightarrow \langle \Delta u(t), \phi(x, t) \rangle, \forall \phi \in L^1(0, T; L^2(\Omega)),$$

ou seja,

$$\int_0^T (\Delta u_\nu(x, t), \phi(x, t)) dt \longrightarrow \int_0^T (\Delta u(x, t), \phi(x, t)) dt, \forall \phi \in L^1(0, T; L^2(\Omega)).$$

Tomando, em particular, $\phi(x, t) = \Delta \omega(x) \varphi(t)$, onde $\omega \in V_m \subset H_0^2(\Omega)$ e $\varphi \in \mathfrak{D}(0, T)$,

resulta que

$$\int_0^T (\Delta u_\nu(x, t), \Delta \omega(x)) \varphi(t) dt \longrightarrow \int_0^T (\Delta u(x, t), \Delta \omega(x)) \varphi(t) dt. \quad (3.38)$$

Como convergir fracamente implica convergir fraco-* (Proposição 1, Cap. 1) temos por (3.33) que

$$M(\|u_\nu(t)\|^2) \Delta u_\nu \xrightarrow{*} M(\|u(t)\|^2) \Delta u \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$$

Daí segue-se que

$$\langle M(\|u_\nu(t)\|^2) \Delta u_\nu(x, t), \phi(x, t) \rangle \longrightarrow \langle M(\|u(t)\|^2) \Delta u(t), \phi(x, t) \rangle, \forall \phi \in L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

ou ainda

$$\int_0^T (M(\|u_\nu(t)\|^2) \Delta u_\nu(t), \phi(x, t)) dt \longrightarrow \int_0^T (M(\|u(t)\|^2) \Delta u(t), \phi(x, t)) dt, \forall \phi \in L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Em particular, tomando $\phi(x, t) = \omega(x) \varphi(t)$, onde $\omega \in V_m \subset H_0^2(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ e $\varphi \in \mathfrak{D}(0, T) \subset L^2(0, T)$ temos

$$\int_0^T (M(\|u_\nu(t)\|^2) \Delta u_\nu(t), \omega(x)) \varphi(t) dt \longrightarrow \int_0^T (M(\|u(t)\|^2) \Delta u(t), \omega(x)) \varphi(t) dt, \quad (3.39)$$

$\forall \omega \in V_m \subset H_0^2(\Omega)$ e $\forall \varphi \in \mathfrak{D}(0, T)$.

Da hipótese do Teorema 18 temos que: $0 < \rho \leq \frac{2}{n-2}$ se $n \geq 3$. Somando 2 em cada membro dessa desigualdade tem-se $2 < \rho + 2 \leq \frac{2n-2}{n-2}$ e pelo Teorema 13 parte (i) com $m = 1$ e $p = 2$ temos:

$$H_0^2(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^{\rho+2}(\Omega),$$

pois, $1 \leq \rho + 2 \leq \frac{2n}{n-2}$ e $2 < n$. Para caso $n=2$ temos pela parte (ii) do Teorema 13 que:

$$H_0^2(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega),$$

e para o caso $n=1$ temos pela parte (iii) do Teorema 13 que:

$$H_0^2(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega}) \hookrightarrow L^2(\Omega).$$

Segue por (3.35) que:

$$|u_\nu|^\rho u_\nu \xrightarrow{*} |u|^\rho u \text{ em } L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(Q) \equiv L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(0, T; L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)),$$

ou ainda,

$$\langle |u_\nu|^\rho u_\nu, \phi \rangle \longrightarrow \langle |u|^\rho u, \phi \rangle, \quad \forall \phi \in L^{\rho+2}(0, T; L^{\rho+2}),$$

pois $\rho + 2$ é o conjugado de $\frac{\rho + 2}{\rho + 1}$. Daí podemos escrever

$$\int_0^T (|u_\nu(t)|^\rho u_\nu(t), \omega(x)) \varphi(t) dt \longrightarrow \int_0^T (|u(t)|^\rho u(t), \omega(x)) \varphi(t) dt, \\ \forall \omega \in L^{\rho+2}(\Omega), \quad \forall \varphi \in L^{\rho+2}(0, T).$$

Como foi mostrado acima $H_0^2(\Omega) \xrightarrow{c} L^{\rho+2}(\Omega)$, então em particular temos:

$$\int_0^T (|u_\nu(t)|^\rho u_\nu(t), \omega(x)) \varphi(t) ds \longrightarrow \int_0^T (|u(t)|^\rho u(t), \omega(x)) \varphi(t) dt, \quad (3.40)$$

$$\forall \omega \in H_0^2(\Omega) \subset L^{\rho+2}(\Omega), \quad \forall \varphi \in D(0, T) \subset L^{\rho+2}(0, T).$$

Temos por (3.20) e pelo Teorema 4 (*Alaoglu-Banach-Boubarki*) que $(\theta_m)_m$ possui uma subsequência $(\theta_\nu)_\nu$, tal que,

$$\theta_\nu \xrightarrow{*} \bar{\theta} \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).$$

Já temos o conhecimento que $\theta_m \rightharpoonup \theta$ em $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$. Então como $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T; L^2(\Omega))$, segue que

$$\theta_m \rightharpoonup \theta \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

o que implica

$$\theta_m \xrightarrow{*} \theta \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).$$

Sendo o limite da convergência fraca-* único, segue que $\theta = \bar{\theta}$, daí

$$\langle \theta_\nu(t), \phi(x, t) \rangle \longrightarrow \langle \theta(t), \phi(x, t) \rangle, \quad \forall \phi \in L^1(0, T; L^2(\Omega)),$$

ou ainda podemos escrever,

$$\int_0^T (\theta_\nu(t), \phi(x, t)) dt \longrightarrow \int_0^T (\theta(t), \phi(x, t)) dt, \quad \forall \phi \in L^1(0, T; L^2(\Omega)).$$

Fazendo $\phi(x, t) = \omega(x)\psi(t)$ temos que:

$$\int_0^T (\theta_\nu(t), \omega(x))\psi(t) dt \longrightarrow \int_0^T (\theta(t), \omega(x))\psi(t) dt, \quad \forall \omega \in L^2(0, T), \quad \forall \psi \in L^1(0, T).$$

Em particular,

$$\int_0^T (\theta_\nu(t), \omega(x))\varphi'(t) dt \longrightarrow \int_0^T (\theta(t), \omega(x))\varphi'(t) dt, \quad (3.41)$$

$$\forall \omega \in V_m \subset H_0^2(\Omega) \subset L^2(0, T), \quad \forall \psi = \varphi', \quad \varphi \in \mathfrak{D}(0, T) \subset L^1(0, T).$$

Agora para $\phi(x, t) = \Delta\omega(x)\varphi(t)$, onde $\omega \in H_0^2(\Omega)$ obtemos:

$$\int_0^T (\theta_\nu(t), \Delta\omega(x))\varphi(t) dt \longrightarrow \int_0^T (\theta(t), \Delta\omega(x))\varphi(t) dt, \quad (3.42)$$

$$\forall \omega \in V_m \subset H_0^2(\Omega), \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0, T) \subset L^1(0, T).$$

Finalmente tomando o limite $\nu \rightarrow \infty$ em (3.36) e usando (3.37), (3.38), (3.39), (3.40), (3.41) e (3.42) obtemos:

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^T (u'(t), \omega) \varphi' dt + \int_0^T (\Delta u(t), \Delta \omega) \varphi dt - \int_0^T (M(\|u(t)\|) \Delta u(t), \omega) \varphi dt + \\
 & \int_0^T (|u(t)|^p u(t), \omega) \varphi dt + \int_0^T (\theta(t), \omega) \varphi dt = \int_0^T (f(t), \omega) \varphi dt, \\
 & - \int_0^T (\theta(t), \omega) \varphi' dt - \int_0^T (\theta(t), \Delta \omega) \varphi dt + \int_0^T (u'(t), \omega) \varphi dt = \\
 & \int_0^T (g(t), \omega) \varphi dt, \quad \forall \omega \in V_m, \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0, T).
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

Sendo V_m denso em $H_0^2(\Omega)$ então (3.43) vale para todo $\omega \in H_0^2(\Omega)$. E, por integração por partes temos,

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \frac{d}{dt} (u'(t), \omega) \varphi dt + \int_0^T (\Delta^2 u(t), \omega) \varphi dt - \int_0^T M(\|u(t)\|) (\Delta u(t), \omega) \varphi dt + \\
 & \int_0^T (|u(t)|^p u(t), \omega) \varphi dt + \int_0^T (\theta(t), \omega) \varphi dt = \int_0^T (f(t), \omega) \varphi dt, \\
 & \int_0^T \frac{d}{dt} (\theta(t), \omega) \varphi dt - \int_0^T (\Delta \theta(t), \omega) \varphi dt + \int_0^T (u'(t), \omega) \varphi dt = \\
 & \int_0^T (g(t), \omega) \varphi dt, \quad \forall \omega \in H_0^2(\Omega), \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0, T).
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Como $L^p(0, T; X)$ com X espaço de Banach e $1 \leq p \leq \infty$, está contido no espaço $\mathfrak{D}'(0, T; X)$ das distribuições vetoriais (ver [12]), segue que as funções acima definem uma distribuição sobre $(0, T)$. Assim, podemos afirmar

$$\left\langle \frac{d}{dt} (u'(t), \omega) + (\Delta^2 u(t), \omega) + M(\|u(t)\|) ((u(t), \omega)) + (|u(t)|^p u(t), \omega) + \right. \\
 \left. (\theta(t), \omega), \varphi \right\rangle_{\mathfrak{D}'(0, T) \times \mathfrak{D}(0, T)} = \langle (f(t), \omega), \varphi \rangle_{\mathfrak{D}'(0, T) \times \mathfrak{D}(0, T)}, \tag{3.45}$$

$$\left\langle \frac{d}{dt} (\theta(t), \omega) + ((\theta(t), \omega)) + (u'(t), \omega), \varphi \right\rangle_{\mathfrak{D}'(0, T) \times \mathfrak{D}(0, T)} = \langle (g(t), \omega), \varphi \rangle_{\mathfrak{D}'(0, T) \times \mathfrak{D}(0, T)},$$

para toda φ . De modo equivalente,

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} (u'(t), \omega) + (\Delta^2 u(t), \omega) + M(\|u(t)\|) ((u(t), \omega)) + (|u(t)|^p u(t), \omega) + \\
 & (\theta(t), \omega) = (f(t), \omega), \\
 & \frac{d}{dt} (\theta(t), \omega) + ((\theta(t), \omega)) + (u'(t), \omega) = (g(t), \omega),
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

para todo $\omega \in H_0^2(\Omega)$ no sentido de $\mathfrak{D}'(0, T)$. Com isto conclui-se que o sistema (3.1) possui solução fraca $\{u(t), \theta(t)\}$ no sentido das distribuições.

A seguir será demonstrado que

$$u'' \in L^2(0, T; H^{-2}(\Omega)) \text{ e } \theta' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

Observando que

$$\begin{aligned} (u'(t), \omega) &= \langle u'(t), \omega \rangle_{H^{-2}(\Omega) \times H_0^2(\Omega)}, \quad (\Delta^2 u(t), \omega) = \langle \Delta^2 u(t), \omega \rangle_{H^{-2}(\Omega) \times H_0^2(\Omega)}, \\ (M(\|u(t)\|)\Delta u(t), \omega) &= \langle M(\|u(t)\|)\Delta u(t), \omega \rangle_{H^{-2}(\Omega) \times H_0^2(\Omega)}, \\ (|u(t)|^p u(t), \omega) &= \langle |u(t)|^p u(t), \omega \rangle_{H^{-2}(\Omega) \times H_0^2(\Omega)}, \quad (\theta(t), \omega) = \langle \theta(t), \omega \rangle_{H^{-2}(\Omega) \times H_0^2(\Omega)} \text{ e} \\ (f(t)\omega) &= \langle f(t), \omega \rangle_{H^{-2}(\Omega) \times H_0^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

substituindo essas igualdades em (3.43) e pela integração por partes, temos

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \langle u'(t), \omega \rangle_{H^{-2}(\Omega) \times H_0^2(\Omega)} \varphi' dt = \\ & - \int_0^T \left\langle \Delta^2 u(t) - M(\|u(t)\|)\Delta u(t) + |u(t)|^p u(t) + \theta(t) - f(t), \omega \right\rangle_{H^{-2}(\Omega) \times H_0^2(\Omega)} \varphi dt, \\ \forall \omega & \in H_0^2(\Omega), \text{ ou ainda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\langle - \int_0^T u'(t) \varphi' dt, \omega \right\rangle_{H^{-2}(\Omega) \times H_0^2(\Omega)} = \\ & \left\langle \int_0^T -(\Delta^2 u(t) - M(\|u(t)\|)\Delta u(t) + |u(t)|^p u(t) + \theta(t) - f(t)) \varphi dt, \omega \right\rangle_{H^{-2}(\Omega) \times H_0^2(\Omega)}, \\ \forall \omega & \in H_0^2(\Omega). \end{aligned}$$

Logo temos

$$- \int_0^T u'(t) \varphi' dt = \int_0^T h(t) \varphi dt \text{ em } H^{-2}(\Omega), \quad (3.47)$$

onde $h(t) = -(\Delta^2 u(t) - M(\|u(t)\|)\Delta u(t) + |u(t)|^p u(t) + \theta(t) - f(t))$.

Como $u', h \in L^2(0, T; H^{-2}(\Omega))$, pelo Teorema 11 segue que (3.47) é equivalente a

$$u'(t) = \xi + \int_0^t h(s) ds,$$

sendo ξ uma constante. Portanto,

$$u''(t) = h(t) \in L^2(0, T; H^{-2}(\Omega)). \quad (3.48)$$

Agora só resta mostrar que $\theta' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$. A demonstração é análoga ao caso acima. De fato, como $H_0^2(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, temos as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} (\theta(t), \omega) &= \langle \theta(t), \omega \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}, \quad (\Delta \theta(t), \omega) = \langle \Delta \theta(t), \omega \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} \\ (u'(t), \omega) &= \langle u'(t), \omega \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}, \quad (g(t), \omega) = \langle g(t), \omega \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Substituindo essas igualdades em (3.43) temos:

$$- \int_0^T \langle \theta(t), \omega \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} \varphi' dt = - \int_0^T \langle (-\Delta \theta(t) + u'(t) - g(t)), \omega \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} \varphi dt,$$

$\forall \omega \in H_0^1$, que ainda pode ser escrito como

$$\left\langle - \int_0^T \theta(t) \varphi' dt, \omega \right\rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} = \left\langle \int_0^T (\Delta \theta(t) - u'(t) + g(t)) \varphi dt, \omega \right\rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}$$

$\forall \omega \in H_0^1$. Consequentemente,

$$- \int_0^T \theta(t) \varphi' dt = \int_0^T k(t) \varphi dt \text{ em } H^{-1}(\Omega), \quad (3.49)$$

onde $k(t) = \Delta \theta(t) - u'(t) + g(t)$.

Visto que $\theta, k \in L^2(0, T; H^{-1})$ e satisfazem a condição (iii) do Teorema 11, segue que a igualdade acima é equivalente a

$$\theta(t) = \xi + \int_0^t k(s) ds,$$

sendo ξ constante. Portanto,

$$\theta'(t) = k(t) \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \quad (3.50)$$

como queríamos demonstrar.

3.3 Verificação das Condições iniciais

Mostraremos que a solução (u, θ) satisfaz as condições iniciais.

i) $u(0) = u_0$.

De (3.22) e (3.25) temos que $u \in L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega))$ e $u' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$. Logo pelo Lema 2 temos que $u \in C^\infty([0, T]; L^2(\Omega))$ e portanto faz sentido calcular $u(0)$. Note que $u_\nu \xrightarrow{*} u$ em $L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega))$. Assim temos:

$$\int_0^T (u_\nu(t), \omega(x)) \psi(t) dt \longrightarrow \int_0^T (u(t), \omega(x)) \psi(t) dt, \\ \forall \omega \in H^{-2}(\Omega), \forall \psi \in L^1(0, T).$$

Como $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-2}(\Omega)$, tomando em particular $\omega \in L^2(\Omega)$ e fazendo $\psi = \varphi'$, onde $\varphi \in C^1([0, T])$ ($\varphi' \in C^0([0, T]) \subset L^1(0, T)$) com $\varphi(T) = 0$ e $\varphi(0) = 1$, temos então

$$\int_0^T (u_\nu(t), \omega(x)) \varphi'(t) dt \longrightarrow \int_0^T (u(t), \omega(x)) \varphi'(t) dt, \quad (3.51)$$

$$\forall \omega \in L^2(\Omega), \forall \varphi \in C^1([0, T]), \text{ com } \varphi(T) = 0, \varphi(0) = 1.$$

Como, $u'_\nu \xrightarrow{*} u'$ em $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, segue que

$$\int_0^T (u'_\nu(t), \omega(x)) \psi(t) dt \longrightarrow \int_0^T (u'(t), \omega(x)) \psi(t) dt, \\ \forall \omega \in L^2(\Omega), \forall \psi \in L^1(0, T).$$

Em particular, para toda $\psi = \varphi \in C^1([0, T]) \subset L^1(0, T)$ com $\varphi(0) = 1$ e $\varphi(T) = 0$, obtemos

$$\int_0^T (u'_\nu(t), \omega(x)) \varphi(t) dt \longrightarrow \int_0^T (u'(t), \omega(x)) \varphi(t) dt, \quad (3.52)$$

$$\forall \omega \in L^2(\Omega), \forall \varphi \in C^1([0, T]), \text{ com } \varphi(T) = 0, \varphi(0) = 1.$$

Somando (3.51) e (3.52) obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^T (u_\nu(t), \omega(x)) \varphi'(t) dt + \int_0^T (u'_\nu(t), \omega(x)) \varphi(t) dt \longrightarrow \\ & \int_0^T (u(t), \omega(x)) \varphi'(t) dt + \int_0^T (u'(t), \omega(x)) \varphi(t) dt, \\ & \forall \omega \in L^2(\Omega), \forall \varphi \in C^1([0, T]), \text{ com } \varphi(T) = 0, \varphi(0) = 1. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \frac{d}{dt} ((u_\nu(t), \omega(x)) \varphi(t)) dt \longrightarrow \int_0^T \frac{d}{dt} ((u(t), \omega(x)) \varphi(t)) dt, \\ & \forall \omega \in L^2(\Omega), \forall \varphi \in C^1([0, T]), \text{ com } \varphi(T) = 0, \varphi(0) = 1. \end{aligned}$$

Logo temos

$$(u_\nu(T), \omega) \varphi(T) - (u(0), \omega) \varphi(0) \longrightarrow (u(T), \omega) \varphi(T) - (u(0), \omega) \varphi(0), \forall \omega \in L^2(\Omega),$$

donde,

$$(u_\nu(0), \omega) \longrightarrow (u(0), \omega), \forall \omega \in L^2(\Omega).$$

Assim,

$$u_\nu(0) \rightharpoonup u(0) \text{ em } L^2(\Omega). \quad (3.53)$$

Por outro lado, temos por (3.4) que $u_\nu(0) \longrightarrow u_0$ em $H_0^2(\Omega)$. Como $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ temos $u(0) \longrightarrow u_0$ em $L^2(\Omega)$, implicando que

$$u_\nu(0) \rightharpoonup u_0 \text{ em } L^2(\Omega). \quad (3.54)$$

De (3.53), (3.54) e da unicidade da convergência fraca obtemos:

$$u(0) = u_0.$$

ii) $u'(0) = u_1$

De (3.27) e (3.48), temos $u' \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ e $u'' \in L^2(0, T; H^{-2}(\Omega))$. Logo $u' \in C([0, T]; H^{-2}(\Omega))$ de acordo com o Lema 2, portanto faz sentido calcular $u'(0)$. Note que, $u''_\nu \xrightarrow{*} u''$ em $L^2(0, T; H^{-2}(\Omega))$, ou seja:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle u''_\nu(t), \omega(x) \rangle \psi(t) dt \longrightarrow \int_0^T \langle u''(t), \omega(x) \rangle \psi(t) dt, \\ & \forall \omega \in H_0^2(\Omega), \forall \psi \in L^2(0, T). \end{aligned}$$

Em particular,

$$\int_0^T \langle u_v''(t), \omega(x) \rangle \varphi(t) dt \longrightarrow \int_0^T \langle u''(t), \omega(x) \rangle \varphi(t) dt, \quad (3.55)$$

$$\forall \omega \in H_0^2(\Omega), \forall \varphi \in C^1([0, T]) \subset L^2(0, T), \text{ com } \varphi(T) = 0, \varphi(0) = 1.$$

Como $u_v' \xrightarrow{*} u'$ em $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, temos por (3.52) que

$$\int_0^T \langle u_v'(t), \omega(x) \rangle \varphi'(t) dt \longrightarrow \int_0^T \langle u'(t), \omega(x) \rangle \varphi'(t) dt, \\ \forall \omega \in L^2(\Omega), \forall \varphi \in C^1([0, T]), \text{ com } \varphi(T) = 0, \varphi(0) = 1.$$

Em particular,

$$\int_0^T \langle u_v'(t), \omega(x) \rangle \varphi'(t) dt \longrightarrow \int_0^T \langle u'(t), \omega(x) \rangle \varphi'(t) dt, \quad (3.56)$$

$$\forall \omega \in H_0^2(\Omega) \subset L^2(\Omega), \forall \varphi \in C^1([0, T]), \text{ com } \varphi(T) = 0, \varphi(0) = 1.$$

Somando (3.55) e (3.56) obtemos

$$\int_0^T \langle u_v''(t), \omega(x) \rangle \varphi(t) dt + \int_0^T \langle u_v'(t), \omega(x) \rangle \varphi'(t) dt \longrightarrow \\ \int_0^T \langle u''(t), \omega(x) \rangle \varphi(t) dt + \int_0^T \langle u'(t), \omega(x) \rangle \varphi'(t) dt, \\ \forall \omega \in H_0^2(\Omega) \subset L^2(\Omega), \forall \varphi \in C^1([0, T]), \text{ com } \varphi(T) = 0, \varphi(0) = 1.$$

Donde

$$\int_0^T \frac{d}{dt} (\langle u_v'(t), \omega(x) \rangle \varphi(t)) dt \longrightarrow \int_0^T \frac{d}{dt} (\langle u'(t), \omega(x) \rangle \varphi(t)) dt, \\ \forall \omega \in H_0^2(\Omega), \forall \varphi \in C^1([0, T]), \text{ com } \varphi(T) = 0, \varphi(0) = 1.$$

Logo,

$$\langle u_v'(T), \omega(x) \rangle \varphi(T) - \langle u_v'(0), \omega(x) \rangle \varphi(0) \longrightarrow \langle u'(T), \omega(x) \rangle \varphi(T) - \langle u'(0), \omega(x) \rangle \varphi(0),$$

$$\forall \omega \in H_0^2(\Omega).$$

Assim, como $\varphi(T) = 0$ e $\varphi(0) = 1$, obtemos

$$\langle u_v'(0), \omega(x) \rangle \longrightarrow \langle u'(0), \omega(x) \rangle.$$

Daí,

$$u_v'(0) \rightharpoonup u'(0), \text{ em } H^{-2}(\Omega). \quad (3.57)$$

Mas por (3.5) temos $u_v'(0) \rightarrow u_1$ em $L^2(\Omega)$. Como $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-2}(\Omega)$ segue que

$u_v'(0) \rightarrow u_1$ em $H^{-2}(\Omega)$, donde

$$u_v'(0) \rightharpoonup u_1 \text{ em } H^{-2}(\Omega). \quad (3.58)$$

Logo de (3.57), (3.58) e pela unicidade do limite fraco, temos que

$$u'(0) = u_1.$$

iii) $\theta(0) = \theta_0$

De (3.25) e (3.50) temos que $\theta \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ e $\theta' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$. Portanto faz sentido então calcular $\theta(0)$. Note que como $\theta'_v \xrightarrow{*} \theta'$ em $L^2(0, T; H^{-1})$ temos que

$$\int_0^T \langle \theta'_v(t), \omega(x) \rangle \psi(t) dt \longrightarrow \int_0^T \langle \theta'(t), \omega(x) \rangle \psi(t) dt, \\ \forall \omega \in H_0^1(\Omega), \forall \psi \in L^2(0, T).$$

Em particular, para $\psi|_{C^1([0, T])} = \varphi$ tem-se

$$\int_0^T \langle \theta'_v(t), \omega(x) \rangle \varphi(t) dt \longrightarrow \int_0^T \langle \theta'(t), \omega(x) \rangle \varphi(t) dt, \quad (3.59)$$

$$\forall \omega \in H_0^1(\Omega), \forall \varphi \in C^1([0, T]) \subset L^2(0, T), \text{ com } \varphi(T) = 0, \varphi(0) = 1.$$

Como convergência fraca implica convergência fraca-*, temos que $\theta_v \xrightarrow{*} \theta$ em $L^2(0, T; H^1(\Omega))$; daí segue

$$\int_0^T \langle \theta_v(t), \omega(x) \rangle \psi(t) dt \longrightarrow \int_0^T \langle \theta(t), \omega(x) \rangle \psi(t) dt, \\ \forall \omega \in H^{-1}(\Omega), \forall \psi \in L^2(0, T).$$

Em particular,

$$\int_0^T \langle \theta_v(t), \omega(x) \rangle \varphi'(t) dt \longrightarrow \int_0^T \langle \theta(t), \omega(x) \rangle \varphi'(t) dt, \quad (3.60)$$

$$\forall \omega \in H_0^1(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega), \forall \varphi \in C^1([0, T]) \subset L^2(0, T), \text{ com } \varphi(T) = 0, \varphi(0) = 1.$$

Somando (3.59) e (3.60) obtemos

$$\int_0^T \langle \theta'_v(t), \omega(x) \rangle \varphi(t) dt + \int_0^T \langle \theta_v(t), \omega(x) \rangle \varphi'(t) dt \longrightarrow \\ \int_0^T \langle \theta'(t), \omega(x) \rangle \varphi(t) dt + \int_0^T \langle \theta(t), \omega(x) \rangle \varphi'(t) dt, \\ \forall \omega \in H_0^1(\Omega), \forall \varphi \in C^1([0, T]), \text{ com } \varphi(T) = 0, \varphi(0) = 1.$$

Donde

$$\int_0^T \frac{d}{dt} (\langle \theta_v(t), \omega(x) \rangle \varphi(t)) dt \longrightarrow \int_0^T \frac{d}{dt} (\langle \theta(t), \omega(x) \rangle \varphi(t)) dt, \\ \forall \omega \in H_0^1(\Omega), \forall \varphi \in C^1([0, T]), \text{ com } \varphi(T) = 0, \varphi(0) = 1.$$

Logo,

$$\langle \theta_v(T), \omega(x) \rangle \varphi(T) - \langle \theta_v(0), \omega(x) \rangle \varphi(0) \longrightarrow \langle \theta(T), \omega(x) \rangle \varphi(T) - \langle \theta(0), \omega(x) \rangle \varphi(0),$$

$$\forall \omega \in H_0^1(\Omega).$$

Sendo $\varphi(T) = 0$ e $\varphi(0) = 1$, temos

$$\langle \theta_v(0), \omega(x) \rangle \varphi(0) \longrightarrow \langle \theta(0), \omega(x) \rangle \varphi(0), \forall \omega \in H_0^1(\Omega).$$

Daí,

$$\theta_v(0) \rightharpoonup \theta(0) \text{ em } H^{-1}(\Omega). \quad (3.61)$$

Por outro lado, temos por (3.6) que $\theta(0) \rightarrow \theta_0$ em $L^2(\Omega)$. Como $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$, temos $\theta(0) \rightarrow \theta_0$ em $H^{-1}(\Omega)$. Portanto segue-se que

$$\theta(0) \rightharpoonup \theta_0 \text{ em } H^{-1}(\Omega). \quad (3.62)$$

De (3.61), (3.62) e pela unicidade do limite fraco temos

$$\theta(0) = \theta_0.$$

3.4 Unicidade das soluções

Para a prova da unicidade, nós acrescentamos a hipótese de

$$M \text{ ser uma função de derivada limitada e } M(\lambda) \geq 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sejam $[u, \theta]$ e $[\hat{u}, \hat{\theta}]$ duas soluções de (3.1) nas condições do Teorema 18. Considere $w = u - \hat{u}$ e $v = \theta - \hat{\theta}$. Então $[w, v]$ satisfazem:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(w', z) + (\Delta^2 w, z) + M\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right)((u, z)) - M\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right)((\hat{u}, z)) + \\ & M\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right)((\hat{u}, z)) - M\left(\int_{\Omega} |\nabla \hat{u}|^2 dx\right)((\hat{u}, z)) + (|u|^\rho u - |\hat{u}|^\rho \hat{u}, z) + (v, z) = 0, \\ & \frac{d}{dt}(v, z) + ((v, z)) + (w', z) = 0. \end{aligned}$$

Ou ainda:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(w', z) + (\Delta^2 w, z) + M\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right)(\nabla w, \nabla z) + (|u|^\rho u - |\hat{u}|^\rho \hat{u}, z) \\ & + (v, z) = M\left(\int_{\Omega} |\nabla \hat{u}|^2 dx\right)(\nabla \hat{u}, \nabla z) - M\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right)(\nabla \hat{u}, \nabla z), \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\frac{d}{dt}(v, z) + (\nabla v, \nabla z) + (w', z) = 0. \quad (3.64)$$

Fazendo $z = w'$ em (3.63) e $z = v$ em (3.64) respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(w', w') + (\Delta^2 w, w') + M\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right)(\nabla w, \nabla w') + (|u(t)|^\rho u - |\hat{u}|^\rho \hat{u}, w') + \\ & (v, w') = M\left(\int_{\Omega} |\nabla \hat{u}|^2 dx\right)(\nabla \hat{u}, \nabla w') - M\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right)(\nabla \hat{u}, \nabla w'), \\ & \frac{d}{dt}(v, v) + (\nabla v, \nabla v) + (w', v) = 0. \end{aligned}$$

De onde obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\left(|w'|^2 + \frac{1}{2}|\Delta w|^2\right) + M\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right) \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|^2 + \int_{\Omega} (|u(t)|^\rho u - |\hat{u}|^\rho \hat{u}) w' dx + \\ & (v, w') = M\left(\int_{\Omega} |\nabla \hat{u}|^2 dx\right)(\nabla \hat{u}, \nabla w') - M\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right)(\nabla \hat{u}, \nabla w'), \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\frac{d}{dt}|v|^2 + \|v\|^2 + (w', v) = 0, \quad (3.66)$$

no sentido de $\mathfrak{D}'(0, T)$. Adicionando (3.65) com (3.66) temos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(|w'|^2 + |v|^2 + \frac{1}{2} |\Delta w|^2 \right) + \frac{1}{2} M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \frac{d}{dt} \|w\|^2 + \|v\|^2 \\ &= \int_{\Omega} (|\hat{u}|^\rho \hat{u} - |u|^\rho u) w' dx - 2(w', v) + M \left(\int_{\Omega} |\nabla \hat{u}|^2 dx \right) (\nabla \hat{u}, \nabla w') \\ & \quad - M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) (\nabla \hat{u}, \nabla w'). \end{aligned} \quad (3.67)$$

A seguir, iremos estimar cada termo do lado direito de (3.67). Usando o fato que $\sup(a, b) \leq (a + b)$ temos que o primeiro termo se estima como segue:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (|\hat{u}|^\rho \hat{u} - |u|^\rho u) w' dx \right| &\leq \int_{\Omega} |\hat{u}|^\rho \hat{u} - |u|^\rho u| |w'| dx \leq \int_{\Omega} \sup_t (|\hat{u}|^\rho, |u|^\rho) |\hat{u} - u| |w'| dx = \\ & \int_{\Omega} \sup_t (|\hat{u}|^\rho, |u|^\rho) |w| |w'| dx \leq \int_{\Omega} (|\hat{u}|^\rho + |u|^\rho) |w| |w'| dx. \end{aligned}$$

Agora usando a Desigualdade de Holder Generalizada com $\frac{1}{q} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2} = 1$, temos:

$$\int_{\Omega} (|\hat{u}|^\rho + |u|^\rho) |w| |w'| dx \leq (\|\hat{u}\|_{L^n(\Omega)}^\rho + \|u\|_{L^n(\Omega)}^\rho) \|w\|_{L^q(\Omega)} \|w'\|_{L^2(\Omega)}.$$

Obs. 4. A partir de agora, para não carregar o texto com muitas constantes, representaremos todas elas por C .

Pela hipótese do Teorema 18 temos que $0 < \rho \leq \frac{2}{n-2}$ para $n \geq 3$, e, como foi dito anteriormente: $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} = \frac{n-2}{2n} \Rightarrow q = \frac{2n}{n-2} \geq \rho n > 0$. Logo pelo teorema de imersão (Teorema ?? parte (i)) temos

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega).$$

Temos então que :

$$\left| \int_{\Omega} (|\hat{u}|^\rho \hat{u} - |u|^\rho u) w' \right| \leq C(\|\hat{u}\|^\rho + \|u\|^\rho) \|w\| \|w'|.$$

Como $u, \hat{u} \in L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega))$, podemos escrever:

$$\left| \int_{\Omega} (|\hat{u}|^\rho \hat{u} - |u|^\rho u) w' \right| \leq C \|w\| \|w'|. \quad (3.68)$$

O segundo termo estima-se pela Desigualdade de Schwartz:

$$2|(v, w')| \leq 2\|v\| \|w'|. \quad (3.69)$$

Vamos agora estimar os dois últimos termos de (3.67). Sendo $M \in C^1$, pelo Teorema do Valor Médio de Lagrange e pela Desigualdade de Schawrz temos

$$\left| M \left(\int_{\Omega} |\nabla \hat{u}|^2 dx \right) - M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \right| (\nabla \hat{u}, \nabla w') \leq |M'(\xi)| \left| |\nabla \hat{u}|^2 - |\nabla u|^2 \right| |(-\Delta) \hat{u}| |w'|,$$

onde ξ esta entre $|\nabla \hat{u}|^2$ e $|\nabla u|^2$. Como $M \in C^1$, temos que $|M'(\xi)|$ é limitado. Daí,

$$\left| M\left(\int_{\Omega} |\nabla \hat{u}|^2 dx\right) - M\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right) \right| (|\nabla \hat{u}, \nabla w'|) \leq C \left(|\nabla \hat{u}| + |\nabla u| \right) \left| |\nabla \hat{u}| - |\nabla u| \right| |(-\Delta) \hat{u}| |w'|.$$

Como $\hat{u}, u \in L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega))$ temos que $|\nabla \hat{u}| + |\nabla u|$ e $|(-\Delta) \hat{u}|$ são limitados por uma constante C . E, usando a desigualdade, $||x| - |y|| \leq |x - y|$, podemos estimar:

$$|\nabla \hat{u}| - |\nabla u| \leq |\nabla(\hat{u} - u)| = |\nabla w| \leq C \|w\|.$$

Assim,

$$\left| M\left(\int_{\Omega} |\nabla \hat{u}|^2 dx\right) - M\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right) \right| (|\nabla \hat{u}, \nabla w'|) \leq C |w'| \|w\|. \quad (3.70)$$

Substituindo (3.68), (3.69), (3.70) em (3.21) e notando que

$$M\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right) \frac{d}{dt} |\nabla w|^2 = \frac{d}{dt} \left(M\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right) |\nabla w|^2 \right) - \left[\frac{d}{dt} M\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right) \right] |\nabla w|^2,$$

obtemos:

$$\frac{d}{dt} \{ |w'|^2 + |v|^2 + \frac{1}{2} |\Delta w|^2 \} + \frac{d}{dt} \left(M\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right) |\nabla w|^2 \right) - \left[\frac{d}{dt} M\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right) \right] |\nabla w|^2 + \|v\|^2 \leq C \|w\| |w'| + 2|v| |w'| + C \|w'\| \|w\|.$$

Usando a desigualdade elementar $2|a||b| \leq |a|^2 + |b|^2$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ e passando um dos termos do primeiro membro para o segundo, obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \{ |w'|^2 + |v|^2 + \frac{1}{2} |\Delta w|^2 + M\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right) |\nabla w|^2 \} + \|v\|^2 \leq \\ & C \frac{1}{2} \{ \|w\|^2 + |w'|^2 \} + |v|^2 + |w'|^2 + C \frac{1}{2} \{ |w'|^2 + \|w\|^2 \} + \left| \frac{d}{dt} M\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right) \right| |\nabla w|^2. \end{aligned}$$

Somando e majorando os escalares por C temos o seguinte:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \{ |w'|^2 + |v|^2 + \frac{1}{2} |\Delta w|^2 + M\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right) |\nabla w|^2 \} + \|v\|^2 \\ & \leq |v|^2 + C |w'|^2 + C \|w\|^2 + \left| \frac{d}{dt} M\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right) \right| |\nabla w|^2. \end{aligned}$$

Como já foi dito, $M \in C^1$ logo $\left| \frac{d}{dt} M\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right) \right| \leq C$ segue então

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \{ |w'|^2 + |v|^2 + \frac{1}{2} |\Delta w|^2 + M\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right) |\nabla w|^2 \} + \|v\|^2 \\ & \leq |v|^2 + C |w'|^2 + C \|w\|^2 \leq C \{ |v|^2 + |w'|^2 + \|w\|^2 \}. \end{aligned}$$

Como $\|w\| \leq C |\Delta w|$ segue então que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \{ |w'|^2 + |v|^2 + \frac{1}{2} |\Delta w|^2 + M\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right) |\nabla w|^2 \} + \|v\|^2 \\ & \leq C \{ |v|^2 + |w'|^2 + |\Delta w|^2 \}. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Integrando (3.71) de 0 a $t \leq T$, usando o fato de $M(\lambda) \geq 0$ e lembrando que como $w = u - \hat{u}$ e $v = \theta - \hat{\theta}$, obviamente temos $w(0) = v(0) = 0$, daí

$$|w'(t)|^2 + |v(t)|^2 + \frac{1}{2} |\Delta w(t)|^2 + \int_0^t \|v(s)\|^2 ds \leq |w'(t)|^2 + |v(t)|^2 + \frac{1}{2} |\Delta w(t)|^2 +$$

$$M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) |\nabla w|^2 + \int_0^t \|v(s)\|^2 ds \leq C \int_0^t \{|v(s)|^2 + |w'(s)|^2 + |\Delta w(s)|^2\} ds.$$

Segue-se que,

$$\begin{aligned} |w'(t)| + |v(t)|^2 + |\Delta w(t)|^2 &\leq 2|w'(t)|^2 + 2|v(t)|^2 + |\Delta w(t)|^2 + 2 \int_0^t \|v(s)\|^2 ds \leq \\ &2C \int_0^t \{|v(s)|^2 + |w'(s)|^2 + |\Delta w(s)|^2\} ds, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$|w'(t)| + |v(t)|^2 + |\Delta w(t)|^2 \leq C \int_0^t \{|v(s)|^2 + |w'(s)|^2 + |\Delta w(s)|^2\} ds.$$

Pelo Lema de Gronwall segue da desigualdade acima que:

$$|w'(t)| + |v(t)|^2 + |\Delta w(t)|^2 \leq 0,$$

pelo Corolário 5 temos que $v(t) = w(t) = 0 \forall t \in [0, T]$. Portanto $u(t) = \hat{u}(t)$ e $\theta(t) = \hat{\theta}(t)$, concluindo a prova da unicidade do sistema Termo-elástico.

Referências Bibliográficas

- [1] Brezis, H.; *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer Verlag, 2011.
- [2] Clark, M.R., Marinho, A.O., Lima, O.A.; *On a Nonlinear System*, Applied Mathematical Sciences, Vol.2, 2008.
- [3] Castro, N.N. de O.: *Soluções Fracas para um Sistema Hiperbólico Envolvendo o Operador p -Laplaciano*. João Pessoa: Universidade Federal da Paraíba. Notas de um Curso de Verão, 2005.
- [4] Medeiros, L.A., de La Penha, G.M., *Teoria Espectral em Espaços de Hilbert, Textos de Métodos Matemáticos N° 4*, Rio de Janeiro, 1973.
- [5] Lions, J.L.: *Problèmes aux Limites dans les Équations aux Dérivées Partielles*, Presses de l'Université de Montréal, Montreal, 1962.
- [6] Lions, J.L.: *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires*, Dunod, Paris, 1969.
- [7] Lions, J.L., Stampacchia: *Variational inequalities*, Bollettino della Unione Matematica Italiana, 15(1978), 715-756.
- [8] Matos, M.P.: *Integral de Bochner e os espaços $L^p(0, T; X)$* . Notas de Aulas do Curso de Verão, UFPB, João Pessoa, 1998.
- [9] Medeiros, L.A., Miranda, M.M.: *Espaços de Sobolev (Iniciação ao Problemas Elípticos não Homogêneos)*. Rio de Janeiro: Editora da UFRJ, 2000.
- [10] Medeiros, L.A., Miranda, M.M.: *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*. Rio de Janeiro: Editora da UFRJ, 1989.

-
- [11] Medeiros, L.A., Rivera, P.H.: *Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais, Textos de Métodos Matemáticos*. Rio de Janeiro: Editora da UFRJ, 1975.
- [12] Ribeiro, N.F.M.: *Dual de espaços $L^p(p > 1)$ de Funções vetoriais*. *Gazeta de Matemática* N° 133-136, Lisboa, 1976.
- [13] Taylor, A. and Lay, D., *Introduction to Functional Analysis*, Wiley, 1980.