Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Controlabilidade Nula para um Problema Parabólico Não Linear em Domínios Não Cilíndrico

Israel de Sousa Evangelista

Teresina - 2012

Israel de Sousa Evangelista

Dissertação de Mestrado:

Controlabilidade Nula para um Problema Parabólico Não Linear em Domínios Não Cilíndrico

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Alexandro Marinho Oliveira
Co-Orientador:
Prof. Dr. Marcondes Rodrigues Clark

Teresina - 2012

FICHA CATALOGRÁFICA

Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí

Biblioteca Comunitária Jornalista Carlos Castello Branco

E92c Evangelista, Israel de Sousa.

Controlabilidade Nula para um Problema Parabólico Não Linear em Domínios Não Cilíndrico. / Israel de Sousa Evangelista. - Teresina: 2012.

88fl.

Dissertação (Mestrado em Matemática)- Universidade Federal do Piauí, 2012.

Orientador: Prof. Dr. Alexandro Marinho Oliveira.

Co-Orientador: Prof. Dr. Marcondes Rodrigues Clark.

1. Matemática. 2. Análise - Controle Nulo. I. Título.

CDD 515

Aos meus amados pais Maria Augusta
e Moisés Evangelista, e amados irmãos
Jonathan, Nathália, Moisés Augusto
e Nathannaelly.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom da vida. Agradeço a ele por ter nascido em uma família que sempre me apoiou e deu suporte para conseguir progredir nos estudos, por ter colocado em meu caminho professores e amigos que me apoiaram e ajudaram na dura jornada diária de estudos.

Agradeço aos meus pais Maria Augusta de Sousa Evangelista e Moisés Araújo Evangelista, que desde criança incentivaram, estimularam e deram todo suporte que puderam em meus estudos, sendo os maiores incentivadores e torcedores. O suporte fundamental de proporcionar a oportunidade de estudar antes de trabalhar, que fez uma grande diferença em minha vida.

Agradeço aos meus irmãos Jonathan, Nathália, Moisés Augusto e Nathannaelly pelo apoio e suporte sem o qual não seria possível manter a rotina de estudos exigida pelo mestrado.

Agradeço aos meus amigos do Mestrado que em diversos momentos apoiaram e ajudaram na batalha cotidiana de estudos, provas, trabalhos e seminários. Em especial a Alex Sandro Lopes Santos, Vitaliano de Sousa Amaral, Franciane de Brito Vieira, Ailton Campus, Bernardo Cardoso de Araújo, Mykael de Araújo Cardoso, Valdir Ferreira de Paula Junior, Ítalo Dowell, Felipe Marreiros, Jefferson de Brito Sousa, Diego Prudêncio, Renata Batista, Edvalter Sena, Gilson do Nascimento Silva e Emerson dos Santos Pinheiro de Matos.

Agradeço em especial aos amigos Augusto Tadeu Pimentel e Alex Sandro Lopes Santos pelo apoio nos momentos mais difíceis do mestrado, amigos que quando mais precisei estiveram ao meu lado e ajudaram a superar as adversidades do curso.

Agradeço ao Professor João Xavier da Cruz Neto que foi o primeiro professor da UFPI a incentivar-me a estudar matemática, e que ainda no primeiro período do curso de graduação encorajou-me a estudar visando ingresso no mestrado. Um grande incentivador que teve um papel fundamental na minha escolha pela matemática como área de estudo.

Agradeço ao meu orientador Alexandro Marinho Oliveira, que me acompanha desde a iniciação científica, que incentivou e acreditou na realização deste trabalho, mesmo quando eu muitas vezes não acreditava mais que fosse conseguir concluí-lo. Sua preocupação e empenho no desenvolvimento desse trabalho foram fundamentais para a conclusão do mesmo.

Agradeço ao meu coorientador Marcondes Rodrigues Clark pelos seus valiosos conselhos, pelo grande aprendizado nos seminários de EDP clássica com meu amigo Diego Prudêncio, pelas valiosas sugestões de correção do trabalho e por ter ajudado como fiador no aluguel de um apartamento, ajuda inestimável, haja vista que para o bom desempenho nos estudos é fundamental uma boa moradia. Agradeço também ao professor Jurandir de Oliveira Lopes que colocou o aluguel do apartamento em seu nome.

Agradeço a Maria dos Remédios Brito por ter gentilmente cedido seu data show para realização de ensaio de defesa com meu orientador e pela torcida pelo meu sucesso nos estudos.

Agradeço a Capes pelo auxílio financeiro em forma de bolsa de estudos, que permitiu minha permanência em uma cidade distante da minha família, e que me ajudou na aquisição de livros e materiais didáticos sem os quais meu êxito não seria possível.

"*O homem faz seus projetos, mas a resposta vem de Deus*".

Provérbios 16:1.

Resumo

No presente trabalho investigamos a existência e unicidade de solução fraca, e a controlabilidade nula para o operador de calor semilinear $u' - \triangle u + g(u)$ com domínio cuja fronteira se move com o tempo t, que é estudado em [13]. Entretanto, aqui seguiremos outro caminho para provar a controlabilidade nula do sistema, faremos uma mudança de variáveis a fim de torná-lo um sistema cilíndrico e seguimos os mesmos passos de [9] para provar a controlabilidade nula do sistema.

Palavras-chave: operador de calor, controlabilidade nula, desigualdade de Carleman.

Abstract

In this work we investigate the existence and the uniqueness of weak solutions, and the null controllability for the semilinear heat operator $u' - \triangle u + g(u)$ in a domain which boundary is moving with the time t, which is studied in [13]. However, here we follow another way to prove the null controllability for the system, we change the variables in order to have a cylindrical domain and follow the same steps as in [9] to prove the null controllability for the system.

Keywords: heat operator, null controllability, Carleman's inequality.

Sumário

Resumo **v**

Abstract **vi**

1 Noções Preliminares **4**

1.1 Resultados Clássicos 4

1.2 Noções de Distribuições Escalares 8

1.3 Espaços de Sobolev 9

1.4 Noções de Integração de Funções Vetoriais 10

1.5 Resultados Básico sobre Distribuições Vetoriais 12

2 Existência de Soluções para o Sistema Não Linear **15**

3 Desigualdade de Carleman para o Sistema Linear Adjunto **24**

3.1 Mudança de Variáveis 25

3.2 Análise dos Termos de X 32

3.3 Retornando para as Variáveis Originais 47

3.4 Estimativa de Carleman 49

4 Desigualdade de Observabilidade **59**

5 Controlabilidade Nula para o Sistema Linear **65**

6 Controlabilidade Nula para o Sistema Não Linear **76**

Referências Bibliográficas **87**

Introdução

Considere a equação de estado parabólico não linear em um domínio $\hat{Q}_T$ não cilíndrico

$$\begin{cases} \hat{p}_t(x,t) - \Delta\hat{p}(x,t) + \hat{g}(\hat{p}(x,t)) = & \chi_{\hat{w}}\hat{u}(x,t) \;\text{ em }\; \hat{Q}_T, \\ \hat{p}(x,t) = & 0 \;\text{ em }\; \hat{\Sigma}_T, \\ \hat{p}(x,0) = & \hat{p_0}(x) \;\text{ em }\; \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Representamos por Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ com fronteira C^2. Para $T > 0$, representemos por Q_T o cilindro $\Omega \times (0,T)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ com fronteira lateral Σ_T definida por $\Gamma \times (0,T)$. Vamos considerar uma família de funções $\{\tau_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$, onde para cada t, τ_t é uma deformação de Ω em um aberto limitado Ω_t de $\mathbb{R}^n$ definido por

$$\Omega_t = \{x \in \mathbb{R}^n;\; x = \tau_t(y),\; \text{para } y \in \Omega\}.$$

Para $t = 0$ identificamos Ω_0 com Ω e τ_0 com a aplicação identidade. Por conveniência de notação denotaremos por $y \in \Omega$ os vetores $y = (y_1, ..., y_n)$ e os pontos no domínio deformado Ω_t, $0 < t < T$, serão denotados por $x = (x_1, ..., x_n)$. A fronteira limitada suave de Ω_t é representada por Γ_t. O domínio não cilíndrico $\hat{Q}_T$ e sua fronteira lateral são definidos por

$$\widehat{Q}_T = \bigcup_{0\leqslant t\leqslant T} \{\Omega_t \times \{t\}\} \quad \text{e} \quad \widehat{\Sigma}_T = \bigcup_{0\leqslant t\leqslant T} \{\Gamma_t \times \{t\}\} \;\text{ respectivamente.}$$

Assim, assumimos a seguinte regularidade para as funções τ_t para $0 \leqslant t \leqslant T$

(A1) τ_t *é difeomorfismo* C^2 *de* Ω *em* Ω_t.

(A2) $\tau_t \in C^1\left([0,T]; C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)\right) \cap C^0\left([0,T]; C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)\right)$.

Portanto, temos o difeomorfismo natural de $\hat{Q}_T$ em Q_T definido por

$$(y,t) \in Q_T \to (x,t) \in \hat{Q}_T, \text{onde } x = \tau_t(y)$$

Onde $\hat{\omega}$ é um pequeno conjunto aberto que é a imagem por τ_T de um subconjunto aberto não vazio ω de Ω. As funções reais $\hat{p}(x,t)$ e $\hat{u}(x,t)$ definidas em $\hat{Q}_T$ são chamadas de Estado e o Controle do sistema (1), respectivamente. Todas as derivadas são no sentido das distribuições de Laurent-Schwartz. Por $\hat{p}_t$ representamos a derivada parcial $\dfrac{\partial \hat{p}}{\partial t}$.

A função $\hat{g}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 e globalmente Lipschitz com $\hat{g}(0) = 0$, assim

$$|\hat{g}(x) - \hat{g}(y)| \leqslant M|x - y|; \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Dessa forma em $\hat{Q}_T$ temos

$$\hat{p}(x,t) = p(\varphi_t(x), t) \ \text{ para } \ \text{todo } \ x \in \Omega_t,$$

onde $\varphi_t(y) = \tau_t^{-1}$ que, de acordo com (A1), é um difeomorfismo C^2 de Ω_t em Ω, para todo $0 \leqslant t \leqslant T$, podemos também usar a notação $\varphi_t(y) = \varphi(y,t)$.

O presente trabalho visa mostrar a controlabilidade nula do sistema (1), o mesmo problema estudado em [13]. Contudo, o método aqui utilizado será o de transformar o problema não cilíndrico (1) em um problema cilíndrico, a partir daí, estudar no Capítulo 2 a existência e unicidade de solução fraca para o problema cilíndrico, no Capítulo 3 encontrar uma desigualdade de Carleman para o sistema adjunto de forma análoga ao encontrado em [9], no Capítulo 4 estabelecer a desigualdade de observabilidade para o sistema linear adjunto, no Capítulo 5 provar a controlabilidade nula para o sistema linear por meio do método variacional e utilizando a desigualdade de observabilidade para o sistema adjunto, e no Capítulo 6, a partir dos resultados precedentes estabelecer a controlabilidade nula do sistema não linear com a utilização do Teorema do Ponto fixo de Kakutani, o que provará a controlabilidade nula do sistema (1).

Para provar a controlabilidade do sistema (1) faremos uma mudança de variáveis a fim de transformar o problema não cilíndrico em cilíndrico, pois já existem na literatura muitos resultados sobre existência e unicidade de soluções fracas e de controlabilidade para sistemas em domínios cilíndricos. Seja a mudança de variáveis:

$$\left| \begin{array}{l} -\triangle \hat{p}(x,t) = -\displaystyle\sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{\partial p}{\partial y_k} a_{kj}\right) + \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial p}{\partial y_k}\frac{\partial a_{kj}}{\partial y_k} - \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial p}{\partial y_k}\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_i^2} \\ \hat{p}_t(x,t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial p}{\partial y_k}\frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + p_t \end{array} \right. \tag{3}$$

onde denotamos

$$\left|\begin{array}{l} a_{kj} = \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \\ \overrightarrow{b} = (b_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \\ b_k = \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + \displaystyle\sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial a_{kj}}{\partial y_k} - \triangle_x \varphi_k(\tau_t(y),t) \\ \triangle_x \varphi_k(\tau_t(y),t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_i^2} \\ \nabla_y p = \left(\frac{\partial p}{\partial y_k}\right)_{1\leqslant k\leqslant n} \\ \tilde{A}(t)p = -\displaystyle\sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{\partial p}{\partial y_k} a_{kj}\right) \\ A(t)p = \tilde{A}(t)p + \nabla p \cdot \overrightarrow{b} \end{array}\right. \tag{4}$$

Substituindo os resultados encontrados em (3) e (4) no sistema (1) obtemos o sistema cilíndrico

$$\left\{\begin{array}{rl} p_t(y,t) + A(t)p(y,t) + g(p(y,t)) = & \chi_w u(y,t) \ \text{ em } \ Q_T, \\ p(y,t) = & 0 \ \text{ em } \ \Sigma_T, \\ p(y,0) = & p_0(y) \ \text{ em } \ \Omega. \end{array}\right. \tag{5}$$

Note que o operador $\tilde{A}(t)$ é um operador coercivo, mais precisamente, para $\varphi, w \in H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ e utilizando o Lema de Gauss obtemos a forma bilinear $\alpha(t,\varphi,w)$ definida por

$$\alpha(t,\varphi,w) = \sum_{i,j,k=1}^{n} \int_\Omega a_{kj}(y,t)\frac{\partial \varphi}{\partial y_j}\frac{\partial w}{\partial y_k}dy$$

Esta forma bilinear é contínua devido $\varphi(x,t) = \tau_t^{-1}(x)$ ser difeomorfismo C^2 entre Ω_t e Ω. Então a matriz $M = \left(\dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ é inversível e para todo $\eta \in \mathbb{R}^n$ temos que $||M^{-1}\eta||_{\mathbb{R}^n} \leqslant \frac{1}{\alpha_0}||\eta||_{\mathbb{R}^n}$. Portanto, substituindo $\eta = M\nabla\varphi$, integrando em Ω e notando que $\alpha(t,\varphi,\varphi) = \displaystyle\int_\Omega ||M\nabla\varphi||^2_{\mathbb{R}^n}dy$ temos

$$\alpha(t,\varphi,\varphi) \geqslant \alpha_0^2||\varphi||^2_{H_0^1(\Omega)} \tag{6}$$

A controlabilidade nula para o sistema (5) significa encontrar um controle $u \in L^2(Q_T)$ tal que a solução fraca p do sistema (5) satisfaça

$$p(y,T) = 0 \ \text{ q.t.p.} \quad \text{em } \ \Omega.$$

Assim, mostraremos a controlabilidade nula do sistema (5) o que implicará na controlabilidade nula do sistema original não cilíndrico (1), visto que $\varphi_t(y)$ é um difeomorfismo.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Este capítulo é dedicado a listar alguns resultados e definições importantes e de relevância para o entendimento do presente trabalho. Portanto, não serão feitas demonstrações apenas referências de onde tais demonstrações são encontradas.

1.1 Resultados Clássicos

Teorema 1.1.1. *(Hahn-Banach) Seja X um espaço vetorial e* $p : X \to \mathbb{R}$ *uma função satisfazendo*

$$p(\lambda x) = \lambda p(x) \ \ \forall x \in X \ \ e \ \ \forall \lambda > 0$$
$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) \ \ \forall x, y \in X$$

Seja $G \subset X$ *um subespaço linear e* $g : G \to \mathbb{R}$ *uma função tal que*

$$g(x) \leqslant p(x), \forall x \in G$$

então existe um funcional f *linear definido em todo espaço* X *que é uma extensão de* g*, isto é,* $f(x) = g(x)$ *para todo* $x \in G$ *e tal que*

$$f(x) \leqslant p(x) \ \ \forall x \in X.$$

Demonstração. Vide [3]. □

Definição 1.1.1. *Seja X um espaço de Banach e* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ *uma sequência, então dizemos que* x_n *converge fracamente a* x *e denotamos por* $x_n \rightharpoonup x$*, se para todo* $f \in X'$*, onde* X' *é o dual de* X*, tem-se*

$$\langle f, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle.$$

Teorema 1.1.2. *Seja* X *um espaço de Banach reflexivo e seja* (x_n) *uma sequência limitada em* X*, então existe uma subsequência de* (x_n) *que converge fracamente para algum* $x \in X$.

Definição 1.1.2. *Seja* X *um espaço vetorial topológico e* $E \subset X$*, com* $E \neq \emptyset$*. Considere a aplicação*

$$\begin{aligned} \Phi : E &\longrightarrow P(X) \\ \bar{p} &\longmapsto \Phi(\bar{p}) \end{aligned}$$

onde $\Phi(\bar{p}) \subseteq X$ *é não vazio. Dizemos que* Φ *tem o gráfico fechado se o conjunto* $Graf(\Phi) = \{(\bar{p}, \Phi(\bar{p})) : \bar{p} \in E\} \subseteq E \times P(X)$ *é um conjunto fechado, i.e.,*
se $x_n \to x$, $y_n \to y$ *com* $y_n \in \Phi(x_n) \to y \in \Phi(X)$.

Definição 1.1.3. *Seja* Ω *um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^n$*. Se* $\partial\Omega$ *é* C^1*, então ao longo de* $\partial\Omega$ *está definido um campo unitário de vetores normais*

$$\eta = (\eta^1, \cdots, \eta^n)$$

em cada ponto $x \in \partial\Omega$ *temos* $\eta(x) = \eta = (\eta^1, \cdots, \eta^n)$ *com* $|n(x)| = 1$

Assuma que Ω é um conjunto aberto, limitado de $\mathbb{R}^n$ e $\partial\Omega$ é C^1. Então, temos os três seguintes teoremas:

Teorema 1.1.3. *(Gauss-Green) Suponha que* $u \in C^1(\overline{\Omega})$*, então*

$$\int_\Omega u_{x_i} dx = \int_{\partial\Omega} u\eta^i dS \quad (i = 1, \cdots, n).$$

Demonstração. Vide [7]. □

Teorema 1.1.4. *(Fórmula de Integração por Partes) Sejam* u,$v \in C^1(\overline{\Omega})$*. Então,*

$$\int_\Omega u_{x_i} v dx = -\int_\Omega u v_{x_i} dx + \int_{\partial\Omega} uv\eta^i dS \quad (i = 1, \cdots, n).$$

Demonstração. Vide [7]. □

Teorema 1.1.5. *(Fórmulas de Green) Sejam* $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$*. Então,*

1. $\int_\Omega \triangle u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} dS$;

2. $\int_\Omega Du \cdot Dv dx = -\int_{\partial\Omega} u \triangle v dS + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \eta} dS$;

3. $\int_\Omega u \triangle v dS - \int_\Omega v \triangle u dS = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \eta} dS - \int_{\partial \Omega} v \frac{\partial u}{\partial \eta} dS.$

Demonstração. Vide [7]. □

Seja D um conjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ e $f : D \to \mathbb{R}^n$ então dizemos que f satisfaz as **condições de Carathéodory** sobre D se:

a) $f(t, x)$ é mensurável em t para cada x fixo;

b)$f(t, x)$ é contínua em x para cada t fixo;

c) para cada compacto U em D existe uma função real integrável $m_U(t)$ é tal que

$$|f(t, x)| \leqslant m_U(t), \forall (t, x) \in U.$$

Considere o retângulo $R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : |t - t_0| \leqslant a, |x - a| \leqslant b\}$ com $a, b > 0$.

Teorema 1.1.6. *(Carathéodory) Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *satisfazendo as condições de Carathéodory sobre* R*, e considere o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x' = f(x, t) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Então existe uma solução $x(t)$ *de (1.1) sobre algum intervalo* $|t - t_0| \leqslant \beta$*,* $(\beta > 0)$*.*

Demonstração. Vide [12]. □

Corolário 1.1.1. *Sejam* D *aberto de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *e* f *satisfazendo as condições de Carathéodory sobre* D*, então o problema (1.1) tem solução para qualquer* $(t_0, x_0) \in D$*.*

Corolário 1.1.2. *Seja* $[0, w] \times B$*, com* $0 < w < \infty$ *e* $B = \{x \in \mathbb{R}^n; ||x|| \leqslant b\}$*,* $b > 0$ *e* f *nas condições de Carathéodory. Seja* Φ *uma solução de*

$$\begin{cases} x' = f(x, t) \\ x(0) = x_0, \ \ |x_0| \leqslant b. \end{cases} \tag{1.2}$$

Suponha que em qualquer intervalo I *onde* Φ *está definida se tenha* $|\Phi(t)| \leqslant M$*, para todo* $t \in I$*,* M *independente de* t *e* $M < b$*. Então* Φ *tem um prolongamento até* $[0, w]$*.*

Teorema 1.1.7. ***(Teorema de Hellinger-Toeplitz)*** *Seja* H *um espaço de Hilbert, e* $T : H \to H$ *um operador linear satisfazendo*

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle, \ \ u, v \in H.$$

Então T é contínuo e auto-adjunto.

Demonstração. Vide [6]. □

Lema 1.1.1. *(**Ehrling**) Consideremos X, B e Y espaços de Banach. Suponhamos X reflexivo e imerso compactamente em B, e B imerso continuamente em Y. Nestas condições para cada $\eta > 0$, existe uma constante c_η, tal que,*

$$||u||_B \leqslant \eta ||u||_X + c_\eta ||u||_Y, \ \ \forall u \in X.$$

Demonstração. Vide [5]. □

Teorema 1.1.8. *(**Aubin-Lions**) Consideremos X, B e Y espaços de Banach, como no Lema 1.1.1 (Ehrling). Suponha $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência uniformemente limitada em $L^2(0,T;X)$, tal que $(\frac{du_n}{dt})_{n\in\mathbb{N}} = (u_n')_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^p(0,T;Y)$, para algum $p > 1$. Então, existe uma subsequência, de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que converge fortemente em $L^2(0,T;B)$.*

Demonstração. Vide [5]. □

Lema 1.1.2. *(Lions) Seja Q um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$, g_n e g funções de $L^q(Q)$, $1 < q < \infty$ tal que $||g_n||_{L^q(Q)} \leqslant C$, $g_n \to g$ em quase todo ponto em Q. Então $g_n \rightharpoonup g$ na topologia fraca de $L^q(Q)$.*

Demonstração. Vide [5]. □

Teorema 1.1.9. *(Desigualdade de Gronwall) Seja C uma constante não negativa, $u \geqslant 0$, q.t.p. em $(0,T)$, uma função integrável em $(0,T)$, e $\varphi : [0,T] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e não negativa, tal que*

$$\varphi(t) \leqslant C + \int_0^t u(x)\varphi(x)dx \ , \ \ \forall t \in [0,T]$$

então,

$$\varphi(t) \leqslant Ce^{\int_0^t u(x)dx} \ , \ \ \forall t \in [0,T].$$

Demonstração. Vide [5]. □

Teorema 1.1.10. *(Desigualdade de Gronwall Generalizada) Sejam $f, \nu : [0,T] \to \mathbb{R}$ funções não negativas e integráveis, ν_0 constante não negativa, e $a : [0,T] \to \mathbb{R}$, uma função contínua, não negativa, tais que*

$$\nu(t) \leqslant \nu_0 + \int_0^t f(x)dx + \int_0^t \nu(x)a(x)dx \ , \ \ \forall t \in [0,T]$$

então,

$$v(t) \leqslant \left(v_0 + \int_0^t f(x)dx \right) e^{\int_0^t a(x)dx}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Demonstração. Vide [5]. □

1.2 Noções de Distribuições Escalares

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, denomina-se suporte de uma função real $f : \Omega \to \mathbb{R}$, contínua em Ω ao fecho do conjunto dos pontos de Ω onde f não é nula. Denota-se o suporte de f por supp(f), simbolicamente:

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}}.$$

Representa-se por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções continuamente infinitamente diferenciáveis em Ω com suporte compacto.
Um multi-índice é uma n-upla $\alpha = (a_1, \cdots, \alpha_n)$, $a_i \in \mathbb{N} \quad \forall i = 1, \cdots, n$ e escrevemos $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ e representamos como D^α como o operador derivação:

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} \ldots \partial^{\alpha_n}}.$$

Definiremos uma noção de convergência em $C_0^\infty(\Omega)$ que o tornará um espaço vetorial topológico. Nesse sentido, diz-se que uma sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $u \in C_0^\infty(\Omega)$, quando forem satisfeitas as condições:

1. todas as u_n possuem suportes contidos em um compacto fixo K de Ω;

2. a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para u uniformemente em K juntamente com todas suas derivadas de todas as ordens.

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$, munido dessa noção de convergência será denotado por $D(\Omega)$. Denomina-se distribuições sobre Ω a toda forma linear contínua sobre $D(\Omega)$. Simbolicamente uma distribuição é uma aplicação $T : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ tal que

1. $T(a\phi + b\psi) = aT(\phi) + bT(\psi) \quad \forall \psi, \phi \in D(\Omega)$ e $\forall a, b \in \mathbb{R}$;

2. T é contínua, i.e., se ϕ_n converge para ϕ em $D(\Omega)$, então $T(\phi_n)$ converge para $T(\phi)$ em $\mathbb{R}$.

Notação: O valor da distribuição T em ϕ, representa-se por $\langle T, \phi \rangle$.

Considere o espaço vetorial de todas as distribuições sobre Ω. Neste espaço, diz-se que uma sequência T_n converge para T, quando a sequência $(\langle T_n, \phi \rangle)$ converge para $\langle T, \phi \rangle$ em $\mathbb{R}$, para toda ϕ em $D(\Omega)$. O espaço das distribuições sobre Ω com esta noção de convergência representa-se por $D'(\Omega)$.

Seja $L^1_{loc}(\Omega)$ o espaço das funções de Ω em $\mathbb{R}$ localmente integráveis, isto é, se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ então u é integrável a Lesbesgue sobre todo compacto $K \subset \Omega$. Note que $T_u : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\langle T_u, \phi \rangle = \int_\Omega u(x)\phi(x)dx$$

é uma aplicação linear contínua, logo uma distribuição escalar sobre Ω. Temos ainda a seguinte cadeia de imersões contínuas:

$$D(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega).$$

Dados $T \in D'(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$, definimos a derivada distribucional de ordem α de T como a forma linear $D^\alpha T : D(\Omega) \to \mathbb{R}$, dada por

$$\langle D^\alpha T, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \phi \rangle, \ \ \forall \phi \in D(\Omega).$$

Mostra-se que $D^\alpha T$ é uma distribuição.

1.3 Espaços de Sobolev

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, p um número real tal que $1 \leqslant p < \infty$ e m um número natural. Denota-se por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial das (classes de) funções $u \in L^P(\Omega)$, tais que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo muti-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, tal que $|\alpha| \leqslant m$, simbolicamente

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leqslant m\}.$$

A função $||\cdot|| : W^{m,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por

$$||u||_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} ||D^\alpha u||^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} \ \forall u \in W^{m,p}(\Omega),$$

constitui uma norma sobre $W^{m,p}(\Omega)$. Prova-se que $W^{m,p}(\Omega)$ munido da norma acima definida é um espaço de Banach. Os espaços de Banach $W^{m,p}(\Omega)$, são chamados de espaços de Sobolev de ordem m sobre Ω. Quando $p = 2$ esses espaços recebem uma notação especial:

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega).$$

Os espaços de Sobolev $H^m(\Omega)$, são espaços de Hilbert com o produto interno dado por:

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)},$$

onde $(\,,\,)_{L^2(\Omega)}$ denota o produto interno de $L^2(\Omega)$.

Seja $m \in \mathbb{N}$. Por $W^{m,\infty}(\Omega)$ denotamos o espaço vetorial

$$W^{m,\infty}(\Omega) = \{u \in L^\infty(\Omega); D^\alpha u \in L^\infty(\Omega), \quad \forall |\alpha| \leqslant m\},$$

com a norma

$$||u||_{m,\infty} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} ||D^\alpha u||_{L^\infty(\Omega)} \quad \forall u \in W^{m,p}(\Omega),$$

esse é um espaço de Banach e também é denominado espaço de Sobolev. Embora $C_0^\infty(\Omega)$ seja denso em $L^p(\Omega) = W^{0,m}(\Omega)$, em geral $C_0^\infty(\Omega)$ não é denso em $W^{m,p}(\Omega)$. Nesse sentido, denotaremos por $W_0^{m,p}(\Omega)$ o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ na norma $W^{m,p}(\Omega)$. Este é um espaço de Banach também chamado de espaço de Sobolev. No caso $p = 2$ temos os espaços $W_0^{m,p}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$. O dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$ será denotado por $W^{-m,q}(\Omega)$ onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, que é constituído dos funcionais

$$T : W_0^{m,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

lineares e contínuos.

1.4 Noções de Integração de Funções Vetoriais

Sejam (S, A, m) um espaço de medida abstrato e X um espaço de Banach. Uma aplicação $u : S \to X$ é dita uma função (vetorial) simples, se u assume apenas um número finito de valores distintos.

Uma função simples $u : S \to X$ é dita A-**mensurável**, se

$$u^{-1}\{x\} \in A \quad \forall x \in X$$

Uma função simples, $\mathcal{A}$-**mensurável**, $u : S \to X$ é integrável em relação a medida m, também dita m-integrável, se

$$mu^{-1}\{x\} < \infty,$$

para cada $x \in X$, $x \neq 0$. Nesse caso, a soma finita,

$$\sum_{x \in X \ x \neq 0} mu^{-1}\{x\}x,$$

que representa um vetor em X, é dita a integral de u em relação à medida m, e escreve-se:

$$\int_S u dm = \sum_{x \in X \ x \neq 0} mu^{-1}\{x\}x,$$

Se $x_1, x_2, \cdots, x_r$ são valores vetoriais distintos assumidos por u, em subconjuntos distintos $S_1, \cdots, S_r$, de S, então podemos escrever:

$$u(s) = \sum_{j=1}^{r} x_j \chi_{S_j}(s)$$

onde $\chi_{S_j}(s)$ é a função característica de S_j, então tem-se:

$$\int_S u(s) dm = \sum_{j=1}^{r} x_j m(S_j)$$

a representação $u = \sum_{j=1}^{r} x_j \chi_{S_j}$, quando os x_j's são todos distintos e os S_j's são dois a dois disjuntos, é chamada representação padrão de u.

Se u tem representação padrão $u = \sum_{j=1}^{r} x_j \chi_{S_j}$, então

$$||u(s)||_X = ||\sum_{j=1}^{r} x_j \chi_{S_j}(s)|| = \sum_{j=1}^{r} ||x_j|| \chi_{S_j}(s) \quad \forall s \in S$$

Teorema 1.4.1. *Seja* $(u_n)_n$ *uma sequência de funções simples definidas em* S *a valores em X satisfazendo*

$$\lim_{n,m \to \infty} \int ||u_n(t) - u_m(t)||_X dm = 0$$

Então existe uma única função $u : S \to X$*, tal que* $||u(t)||_X$ *e* $||u(t) - u_n(t)||_X$ *são* $\mathcal{A}$-*mensuráveis e*

$$\lim_{n \to \infty} \int ||u(t) - u_n(t)||_X dm = 0$$

Demonstração. Vide [5]. □

Em decorrência do Teorema 1.4.1, emprega-se a notação

$$\int u(t)dm = \lim_{n\to\infty}\int u_n(t)dm$$

e diz-se que $\int u(t)dm$ é a integral de $\mathsf{Bochner}$ de u em relação a m. A coleção de todas as funções $u : S \to X$, que são Bochner integráveis ou integráveis no sentido de Bochner é denotado por

$$B^1(S, A, m; X).$$

Teorema 1.4.2. *A função $\|\cdot\|_{B^1} : B^1 \to \mathbb{R}$, dada por $\|u\|_{B^1} = \int \|u(t)\|dm$, define uma norma sobre espaço das funções Bochner integráveis. O espaço B^1 munido dessa norma é um espaço de Banach.*

Demonstração. Vide [5]. □

Teorema 1.4.3. *Uma função fortemente A-mensurável, $u : S \to X$ é Bochner integrável se, e somente se, $\|u\|$ é integrável.*

Demonstração. Vide [5]. □

1.5 Resultados Básico sobre Distribuições Vetoriais

Vamos considerar o intervalo aberto $(0, T)$, $T > 0$ da reta real $\mathbb{R}$ e o espaço de Banach real X. Representamos por $L^p(0, T; X)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, o espaço vetorial das aplicações $u : (0, T) \to X$ tais que, para cada $s \in (0, T)$, o vetor $u(s) \in X$ é fortemente mensurável em $(0, T)$ e a norma $\|u(s)\|_X$ pertence a $L^P(0, T)$. Em $L^p(0, T; X)$ definimos a norma:

$$\|u\|^p_{L^p(0,T;X)} = \int_0^T \|u(s)\|_X ds$$

para $1 \leqslant p < \infty$ e

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \mathrm{ess}\sup_{0<s<T} \|u(s)\|_X.$$

Com essa norma segue que $L^p(0, T; X)$ é um espaço de Banach.

Seja u em $L^p(0, T; X)$ e $\phi \in D(0, T)$, espaço das funções infinitamente diferenciáveis em $(0, T)$, equipado com a noção de convergência introduzida por Laurent Schwartz. Associamos a cada u a aplicação τ_u de $D(0, T)$ em X, definida por

$$\langle \tau_u, \phi\rangle = \int_0^T u(s)\phi(s)ds.$$

Com a integral calculada em X. A aplicação τ_u, acima definida, é linear e contínua em $D(0,T)$. Portanto, τ_u é uma distribuição em $(0,T)$, chamada distribuição vetorial em (0,T), definida por $u \in L^p(0,T;X)$, com valor em X. Então, τ_u é uma aplicação linear contínua de $D(0,T)$ em X, isto é $\tau_u \in \mathcal{L}(D(0,T),X)$, onde $\mathcal{L}(D(0,T),X)$ é chamado de espaço das distribuições vetoriais de $(0,T)$ com valores em X. Em particular τ_u é uma dessas distribuições. O espaço de todas as distribuições definidas em $(0,T)$ com valores em X é representado por $D'(0,T;X)$.

Lema 1.5.1. *Se* $u \in L^1(0,T;X)$ *e*

$$\int_0^T u(s)\phi(s) = 0 \tag{1.3}$$

para todo $\phi \in D(0,T)$*, então* $u(t) = 0$ *q.t.p. em* $(0,T)$.

Demonstração. Vide [10]. □

Lema 1.5.2. *Se* $u \in L^1(0,T;X)$ *e*

$$\int_0^T u(s)\phi'(s) = 0 \tag{1.4}$$

para todo $\phi \in D(0,T)$*, então* u *é constante.*

Note que o Lema 1.5.2 diz que se $u \in L^1(0,T;X)$ tem derivada no sentido das distribuições nula então u é constante.

Demonstração. Vide [10]. □

Lema 1.5.3. *Seja* X *um espaço de Banach cujo dual é representado por* X'*. Se* u *e* g *pertencem a* $L^1(0,T;X)$*, então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) u *é igual quase sempre a uma primitiva de* g*, isto é*

$$u(t) = \xi + \int_0^t g(s)ds, \quad \xi \in X, \ \textit{indepenente} \ \ \textit{de} \ \ t.$$

(ii) Para cada $\varphi \in D(0,T)$*, tem-se*

$$\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt = -\int_0^T g(t)\varphi(t)dt.$$

(iii) Para cada $x' \in X'$*,*

$$\frac{d}{dt}\langle u(t), x'\rangle = \langle g(t), x'\rangle$$

no sentido das distribuições de $(0,T)$.

Demonstração. Vide [10]. $\square$

Corolário 1.5.1. *Sejam* X, Y *espaços de Banach, tais que* $X \subset Y$ *com injeção contínua. Se*

$$u \in L^1(0,T;X) \;\; e \;\; \frac{du}{dt} \in L^1(0,T;Y) \tag{1.5}$$

então $u \in C^0(0,T;Y)$.

Por $C_s(0,T;Y)$, representemos o espaço das funções fracamente contínuas de $[0,T]$ em Y. Isso significa que a aplicação $t \to \langle u(t), y' \rangle$ é contínua em $[0,T]$ para todo $y' \in Y'$ dual de Y. Note que essas funções são também chamadas de funções escalares contínuas.

Teorema 1.5.1. *Sejam* X, Y *espaços de Banach,* X *reflexivo. Suponha* $X \subset Y$ *densamente e a injeção de* X *em* Y *contínua. Então*

$$L^\infty(0,T;X) \cap C_s([0,T];Y) = C_s([0,T];X). \tag{1.6}$$

Demonstração. Vide [10]. $\square$

Capítulo 2

Existência de Soluções para o Sistema Não Linear

Seja o sistema não linear em um domínio cilíndrico

$$\begin{cases} u_t(x,t) + A(t)u(x,t) + g(u(x,t)) = & f(x,t) \text{ em } Q_T, \\ u(x,t) = & 0 \text{ em } \Sigma_T, \\ u(x,0) = & u_0(x) \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

Devemos encontrar $u : [0,T] \to H_0^1(\Omega)$ tal que satisfaça (2.1) em algum sentido. Onde consideramos $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ e $u_0 \in L^2(\Omega)$. Note que $A(t)u = \tilde{A}(t)u + \nabla_y u \cdot \overrightarrow{b}$ é um operador contínuo.

Teorema 2.0.2. *Dados*

$$u_0 \in L^2(\Omega), \quad f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),$$

existe uma única $u : (0,T) \to H_0^1(\Omega)$ *satisfazendo as condições*

$$u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{2.2}$$

$$\frac{d}{dt}(u(t),v) + (A(t)u(t),v) + (g(u(t)),v) = (f(t),v), \tag{2.3}$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, *no sentido das distribuições de* $(0,T)$.

$$\begin{aligned} & u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \\ & u' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)), \\ & \quad u' + A(t)u(t) + g(u(t)) = f(t) \ \textit{no sentido de} \ L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)), \\ & u(0) = u_0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Demonstração. Como $H_0^1(\Omega)$ é separável, ele tem uma base enumerável $w_1, w_2, \cdots, w_n, \cdots$, que podemos considerar, sem perda de generalidade, ortonormal, isto é,

$$\begin{cases} w_j \in H_0^1(\Omega), \ \ \forall j; \\ \forall m, \ \ w_1, ..., w_m \ \text{ são Linearmente independentes;} \\ (w_i, w_j) = 0, \forall j \neq i, \ \ (w_j, w_j) = 1 \ \ \forall j; \\ V = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} [w_1, \cdots, w_m] \ \text{ é denso em } \ H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.5}$$

Como $H_0^1(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$, tem-se que existe $u_{0m} \in [w_1, \cdots, w_n]$, tal que $u_{0m} \to u_0$ em $L^2(\Omega)$. Provemos que (2.1) tem soluções aproximadas u_m, isto é:

$$\begin{cases} u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j, \ \ u_m \in [w_1, \cdots, w_m], \\ (u'_m, w_j) + (Au_m, w_j) + (g(u_m), w_j) = (f, w_j), \ \ j = 1, \cdots, m, \\ u_m(0) = u_{0m}. \end{cases} \tag{2.6}$$

Se $u_{0m} = \sum_{j=1}^{m} a_{j0m} w_j$, $u_m(0) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(0) w_j$. Desenvolvendo $(2.6)_2$ temos

$$\begin{cases} g'_{jm} = -(Au_m, w_j) - (g(u_m), w_j) + (f, w_j), \\ g_{jm}(0) = a_{j0m}. \end{cases} \tag{2.7}$$

Fixando m e chamando $y = (y_1, \cdots, y_m) = (g_{1m}, \cdots, g_{mm})$, $y_0 = (a_{10m}, \cdots, a_{m0m})$, então reescrevendo (2.7) temos

$$\begin{cases} y' = F(t, y), \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{2.8}$$

com $F(t, y) = (F_1(t, y), \cdots, F_m(t, y))$ onde $F_j(t, y) = -(Au_m, w_j) - (g(u_m), w_j) + (f, w_j)$. Mostremos que o sistema (2.8) está nas condições de Carathéodory. Seja $D = [0, T] \times B$; $B = \{y \in \mathbb{R}^n; |y| \leqslant b\}$, $b > 0$, $y_0 \in B$, então

a) fixado y; tem-se (Au_m, w_j) não depende de t, $(g(u_m), w_j)$ também não depende de t e $(f(t), w_j)$ é mensurável em $t \in [0, T]$, pois $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$. Logo, $F_j(t, y)$ é mensurável em t, para cada y fixo e $j = 1, \cdots, m$;

b)Fixado t, $(f(t), w_j)$ não depende de y e

$$(y_1, \cdots, y_m) \in \mathbb{R}^m \to u = \sum_{j=1}^{m} y_j w_j \in [w_1, \cdots, w_m]$$

é contínua, e

$$u \in [w_1, \cdots, w_m] \to (Au, w_j) \in \mathbb{R}$$

é contínua, donde

$$(y_1, \cdots, y_m) \in \mathbb{R}^m \to (Au, w_j) \text{ é } \quad \text{contínua,}$$

também temos que $u \to g(u)$ é C^1, em particular contínua e

$$w \to (w, w_j) \text{ é } \text{ contínua}$$

logo,

$$u \to (g(u), w_j) \text{ é } \text{ contínua.}$$

Portanto, $F_j(t, y)$ $j = 1, \cdots, m$ é contínua para cada t fixo;

c) Como y varia em B, existem $k_B, c_B > 0$ tais que

$(Au_m, w_j) < c_B \;\; j = 1, \cdots, m$

$(g(u_m), w_j) < k_B \;\; j = 1, \cdots, m$

donde $F_j(t, y) \leqslant c_B + k_B + |(f(t), w_j)| = m_j(t)$ sendo $m_j(t)$, $j = 1, \cdots, m$ integrável em $[0, T]$. Assim pelo Corolário 1.1.1 existe uma solução $y(t)$ de (2.8) definida em $[0, t_m]$, $0 < t_m < T$; para qualquer intervalo I onde $y(t)$ está definida temos $(u_m(t), u_m(t))_{L^2} \leqslant M$, $\forall t \in I$, M independente de I e de m. De fato, multiplicando $(2.6)_2$ por $g_{jm}(t)$ e somando de $j = 1, \cdots, m$ temos

$$(u'_m, u_m) + (A(t)u_m, u_m) + (g(u_m), u_m) = (f, u_m)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(u_m, u_m)\right] + (\tilde{A}(t)u_m, u_m) + (\nabla_y u_m \overrightarrow{b}, u_m) = (f, u_m) - (g(u_m), u_m).$$

Pela coercividade de $\tilde{A}$ em (6) e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(u_m, u_m)\right] + \alpha_0^2 ||u_m||^2_{H_0^1} + (\nabla_y u_m \overrightarrow{b}, u_m) \leqslant (f, u_m) + |g(u_m)|_{L^2} |u_m|_{L^2}.$$

Sendo g Lipschtiz por (2) e $g(0) = 0$, tem-se

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(u_m, u_m)\right] + \alpha_0^2 ||u_m||^2_{H_0^1} \leqslant (f, u_m) + M|u_m|^2_{L^2} - (\nabla_y u_m \overrightarrow{b}, u_m).$$

Por Cauchy-Schwarz temos

$$\frac{d}{dt}\left[\tfrac{1}{2}(u_m, u_m)\right] + \alpha_0^2 ||u_m||^2_{H_0^1} \leqslant |f|_{L^2}|u_m|_{L^2} + M|u_m|^2_{L^2} + |\nabla_y u_m \overrightarrow{b}|_{L^2} |u_m|_{L^2}$$
$$\frac{d}{dt}\left[\tfrac{1}{2}(u_m, u_m)\right] + \alpha_0^2 ||u_m||^2_{H_0^1} \leqslant |f|^2_{L^2} + |u_m|^2_{L^2} + M|u_m|^2_{L^2} + |\nabla_y u_m|_{L^2} |\overrightarrow{b}|_\infty |u_m|_{L^2}$$
$$\frac{d}{dt}\left[\tfrac{1}{2}(u_m, u_m)\right] + \alpha_0^2 ||u_m||^2_{H_0^1} \leqslant |f|^2_{L^2} + |u_m|^2_{L^2} + M|u_m|^2_{L^2} + \tfrac{\alpha_0^2}{2} |\nabla_y u_m|^2_{L^2} + \tfrac{1}{2\alpha_0^2} |\overrightarrow{b}|^2_\infty |u_m|^2_{L^2}$$

logo,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(u_m, u_m)\right] + \frac{\alpha_0^2}{2}\|u_m\|^2_{H_0^1} \leqslant |f|^2_{L^2} + c|u_m|^2_{L^2}.$$

Onde $c = 1 + \frac{1}{2\alpha_0^2}|\overrightarrow{b}|^2_\infty + M$. Agora integrando de 0 a $t < T$ temos

$$|u_m|^2_{L^2} + \alpha_0^2\int_0^t \|u_m\|^2_{H_0^1} ds \leqslant 2\int_0^T |f|^2_{L^2} ds + 2c\int_0^t |u_m|^2_{L^2} ds + |u_m(0)|. \tag{2.9}$$

Chamando $2c = K$ e observando que f é dada e que por hipótese $|u_m(0)| \leqslant \delta$, para algum $\delta > 0$, pois $u_m(0) = u_{0m} \to u_0$ em $L^2(\Omega)$, portanto é limitada. Fazendo $C = 2\int_0^T |f|^2_{L^2} ds + \delta$, tem-se

$$|u_m(t)|^2_{L^2} \leqslant C + K\int_0^t |u_m(s)|^2_{L^2} ds. \tag{2.10}$$

Pela desigualdade de Gronwall, tem-se

$$|u_m(t)|^2_{L^2} \leqslant Ce^{KT} = N \quad \text{que não depende de } t \text{ e de } m. \tag{2.11}$$

Desenvolvendo esta desigualdade obtemos

$$\sum_{j=1}^m g_{jm}^2 \leqslant N,$$

isto é,

$$|y|^2 = \sum_{j=1}^m y_j^2 \leqslant N.$$

Portanto, fazendo maior B se for preciso, de tal forma que $\sqrt{N} < b$, segue do Corolário 1.1.2 que $y(t)$ tem prolongamento até $[0, T]$. Assim, para cada m existe uma solução u_m de (2.6) em $[0, T]$. De (2.9) temos que

$$\int_0^t \|u_m\|^2_{H_0^1} ds \leqslant \bar{K} \text{ independente de } t \text{ e de } m, \tag{2.12}$$

onde $\bar{k} = \dfrac{2\int_0^T |f| ds + 2cNT + \delta}{\alpha_0^2}$. De (2.12) segue que

$$u_m \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad \text{e } u_m \text{ é limitada em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)). \tag{2.13}$$

Logo, u_m possui subsequência (u_ν) fracamente convergente, pois $H_0^1(\Omega)$ é um espaço reflexivo,isto é,

$$u_\nu \rightharpoonup u \text{ em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)). \tag{2.14}$$

Identificando $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ com o dual de $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. A convergência (2.14) significa que

$$\int_0^T \langle u_\nu(t), w(t)\rangle dt \to \int_0^T \langle u(t), w(t)\rangle dt \tag{2.15}$$

para todo $w \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Então, $\langle u_\nu, w\rangle = (u_\nu, v\theta(t))$. Escolhendo $w = \theta(t)v$, com $\theta \in D(0,T)$, $v \in H^{-1}(\Omega)$. Então, (2.15) significa que

$$\int_0^T (u_\nu(t), v)\theta(t)dt \to \int_0^T (u(t), v)\theta(t)dt \ \ \forall \theta \in D(0,T) \tag{2.16}$$

De (2.16), tem-se

$$(u_\nu(t), v) \to (u, v),$$

no sentido das distribuições de $[0,T]$. Mas $\dfrac{d}{dt}$ é contínua nesse sentido, logo segue que

$$\frac{d}{dt}(u_\nu(t), v) \to \frac{d}{dt}(u, v) \tag{2.17}$$

no sentido das distribuições de $[0,T]$.

Vamos mostrar que $Au_m \rightharpoonup Au$.

De fato, temos $Au_m = \tilde{A}u_m + \nabla u_m$. Supondo $u_m \rightharpoonup u$ em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ temos que

$$\nabla u_m \rightharpoonup \nabla u \ \text{ em } \ L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),$$

como $\overrightarrow{b} \in (L^\infty(Q_T))^n$ temos que

$$\nabla u_m \overrightarrow{b} \rightharpoonup \nabla u \overrightarrow{b} \ \text{ em } \ L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),$$

mas como $u_m \rightharpoonup u$ em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, segue que

$$(v, u_m) \to (v, u) \ \ \forall v \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

Em particular para $v = \tilde{A}\varphi$, pois $\widetilde{A} : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$. Portanto para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ temos

$$(\tilde{A}\varphi, u_m) \to (\tilde{A}\varphi, u) \ \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{2.18}$$

Observando que

$$(\tilde{A}u, v) = \sum_{i,j,k=1}^{n} \int_\Omega a_{kj} \frac{\partial u}{\partial y_k}\frac{\partial v}{\partial y_j} dx,$$

onde $a_{kj} = \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} = \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} = a_{jk}$. Logo,

$$(\tilde{A}u, v) = (u, \tilde{A}v) \tag{2.19}$$

Portando, segue de (2.18) e de (2.19), que

$$(\varphi, \tilde{A}u_m) \to (\varphi, \tilde{A}u) \ \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{2.20}$$

Logo, $\tilde{A}u_m \rightharpoonup \tilde{A}u$. Dessa forma temos

$$Au_m \rightharpoonup Au. \tag{2.21}$$

Provemos que $g(u_m) \to g(u)$.
Seja $P_m : H_0^1(\Omega) \to [w_1, \cdots, w_m] \subset H_0^1(\Omega)$ dado por $P_m(u) = \sum_{j=1}^{m}(u, w_j)w_j$ o operador projeção sobre $H_0^1(\Omega)$. Note que $P_m = P_m^*$, e sendo P_m linear temos pelo Teorema de Hellinger-Toeplitz que P_m é contínuo.
Agora, da equação aproximada $(2.6)_2$, temos

$$(u_m', w) + (Au_m, w) + (g(u_m), w) - (f, w) = 0 \ \ \forall w \in [w_1, \cdots, w_m].$$

Da cadeia de imersões

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$$

temos que

$$\langle u_m' + Au_m + g(u_m) - f, w\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} = 0 \ \text{ para } \ \text{ todo } \ w \in [w_1, \cdots, w_m].$$

Desta igualdade e do fato de $P_m w = w$, temos que

$$P_m^*\big(u_m' + Au_m + g(u_m) - f\big) = 0,$$

em $[w_1, \cdots, w_m]$.
Daí, pela linearidade de P_m^* e do fato de $u_m' \in [w_1, \cdots, w_m]$, segue-se, por extensão via teorema de Hahn-Banach, que

$$u_m' = -P_m^* Au_m - P_m^*(g(u_m)) + P_m^* f \ \text{ em } \ H^{-1}(\Omega).$$

Logo,

$$\|u_m'\|_{H^{-1}(\Omega)} \leqslant \|P_m^* Au_m\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|P_m^*(g(u_m))\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|P_m^* f\|_{H^{-1}(\Omega)} \ \text{ em } \ H^{-1}(\Omega),$$

$$\|u_m'\|_{H^{-1}(\Omega)} \leqslant \|P_m^*\|_{H^{-1}(\Omega)}\big(\|Au_m\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|(g(u_m))\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}\big) \ \text{ em } \ H^{-1}(\Omega).$$

Usando o fato de g ser Lipschtiz e $g(0) = 0$, usando a cadeia de imersões $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$, elevando ao quadrado, integrando de 0 a t a última desigualdade e usando a desigualdade de Cauchy para o produto de dois termos distintos, temos para uma constante C adequada que

$$\int_0^t \|u_m'\|^2_{H^{-1}(\Omega)} dt \leqslant C\Big(\int_0^T \|Au_m(t)\|^2_{H^{-1}(\Omega)} dt + \int_0^T \|u_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} dt + \int_0^T \|f(t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt\Big)$$

em $H^{-1}(\Omega)$.

Mas já temos a limitação para cada um dos três termos do lado direito acima, logo

$$\int_0^t \|u_m'\|^2_{H^{-1}(\Omega)} dt \leqslant K \quad \text{em } H^{-1}(\Omega). \tag{2.22}$$

Portanto, $u_m' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ é limitada e $u_m \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ é uniformemente limitada por (2.12). Segue do Teorema 1.1.8 (Aubin-Lions) que u_m admite subsequência fortemente convergente em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, passando a essa subsequência temos

$$g(u_m) \to g(u). \tag{2.23}$$

Multiplicando a equação aproximada $(2.6)_2$ por $\theta \in D(0,T)$ e integrando em $[0,T]$, considerando m fixo, $\nu > m$ e faça $\nu \to \infty$. Por (2.16), (2.17), (2.21) e (2.23) obtemos

$$\langle \frac{d}{dt}(u(t),\nu), \theta(t)\rangle + \int_0^T (A(t)u(t),\nu)\theta(t)dt + \int_0^T (g(u(t)),\nu)\theta(t)dt = \int_0^T (f(t),\nu)\theta(t)dt \tag{2.24}$$

para todo $\nu \in [w_1, \cdots, w_m]$ e $\theta \in D(0,T)$. Pela hipótese de densidade de $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} [w_1, \cdots, w_m]$ em $H_0^1(\Omega)$, implica que (2.24) é verdade para todo $\nu \in H_0^1(\Omega)$ no sentido de $D'(0,T)$. De (2.14) e (2.24) obtemos (2.2) e (2.3) do Teorema 2.0.2. Vamos provar a condição (2.4) do Teorema 2.0.2. De (2.24) temos

$$-\int_0^T (u(t),\nu)\theta'(t)dt + \int_0^T (A(t)u(t),\nu)\theta(t)dt + \int_0^T (g(u(t)),\nu)\theta(t)dt = \int_0^T (f(t),\nu)\theta(t)dt. \tag{2.25}$$

Para todo $\nu \in H_0^1(\Omega)$ e $\theta \in D(0,T)$, então

$$\langle -\int_0^T (u(t),\nu)\theta'(t)dt, \nu\rangle = \langle \int_0^T h(t)\theta(t)dt, \nu\rangle \tag{2.26}$$

onde $h(t) = f(t) - A(t)u(t) - g(u(t)) \in H^{-1}(\Omega)$, logo (2.26) implica

$$-\int_0^T (u(t),\nu)\theta'(t)dt = \int_0^T h(t)\theta(t)dt. \tag{2.27}$$

Observe que devido a cadeia $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ e por (2.2) temos $u, h \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, segue de (2.27) e da condição (ii) do Lema 1.5.3 que

$$u(t) = \xi + \int_0^t h(s)ds \quad \xi \in H^{-1}(\Omega) \text{ é constante}, \tag{2.28}$$

então

$$u \in C^0([0,T];H^{-1}(\Omega)). \tag{2.29}$$

Por (2.28) obtemos

$$\langle u'(t), \theta(t)\rangle = \langle h(t), \theta(t)\rangle \ \ \forall \ \theta \in D(0,T),$$

o que significa

$$u'(t) = h(t) \text{ no sentido vetorial das distribuições.} \tag{2.30}$$

Mas $h \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ implica

$$\begin{aligned} &u' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \\ &\text{e} \\ &u' = h \text{ em } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)), \end{aligned} \tag{2.31}$$

ou seja,

$$u' + Au + g(u) = f \text{ em } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{2.32}$$

Para completar a prova precisamos mostrar que $u(0) = u_0$. Temos de (2.29) que $u(0)$ faz sentido. Provemos que $u(0) = u_0$.
Temos

$$u_m \text{ é limitada em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{2.33}$$

como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$, temos de (2.33) que:

$$u_m \text{ é limitada em } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{2.34}$$

Portanto, existe uma subsequência u_ν de u_m tal que

$$\int_0^T (u_\nu(t), w)\theta'(t)dt \to \int_0^T (u(t), w)\theta'(t)dt. \tag{2.35}$$

para $\theta \in C^1(0,T)$, $\theta(0) = 1$, $\theta(T) = 0$.
Pela estimativa (2.22), existe uma subsequência de u'_ν ainda denotada por u'_ν tal que

$$\int_0^T (u'_\nu(t), w)\theta(t)dt \to \int_0^T (u'(t), w)\theta(t)dt. \tag{2.36}$$

para $\theta \in C^1(0,T)$, $\theta(0)=1$, $\theta(T)=0$. Logo, por (2.35) e (2.36) temos que

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\left[(u_\nu(t),w)\theta(t)\right] dt \to \int_0^T \frac{d}{dt}\left[(u(t),w)\theta(t)\right] dt$$

ou

$$(u_\nu(0),w) \to (u(0),w),$$

mas

$$(u_\nu(0),w) \to (u_0,w).$$

Logo, $u_0 = u(0)$ em $L^2(\Omega)$, pela unicidade do limite.

Unicidade da solução:

Supondo u e ν soluções do problema, então teremos

$$\begin{cases} u-\nu+A(u-\nu)+g(u)-g(\nu)=0 \ \text{ em } \ Q_T, \\ (u-\nu)(x,t)=0 \ \text{ em } \ \Sigma_T, \\ (u-\nu)(x,0)=0 \ \text{ em } \ \Omega. \end{cases} \tag{2.37}$$

Temos por uma estimativa análoga a estimativa (2.10) com $f=0$ e $u_0=0$ e pela desigualdade de Gronwall que

$$|u-\nu|_{L^2(\Omega)} \leqslant 0 \quad \text{e} \quad \|u-\nu\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leqslant 0,$$

donde $u=\nu$ em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ ou $u(t)=\nu(t)$ q.t.p. em $[0,T]$. $\square$

Capítulo 3

Desigualdade de Carleman para o Sistema Linear Adjunto

Seja o sistema

$$\begin{cases} -w_t(y,t) + A^*(t)w(y,t) + a(t)w(y,t) = & f(y,t) \ \text{ em } \ Q_T, \\ w(y,t) = & 0 \ \text{ em } \ \Sigma_T, \\ w(y,T) = & w_T \ \text{ em } \ \Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde A^* é o operador adjunto formal de A. Com

$$A(t)u(y,t) = -\sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j}\left(a_{kj}\frac{\partial u}{\partial y_k}\right) + \vec{b}\cdot\nabla u$$

temos que

$$A^*(t)w(y,t) = -\sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_k}\left(a_{kj}\frac{\partial w}{\partial y_j}\right) - \operatorname{div}(w\vec{b})$$

onde

$$a_{kj} = \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i} = a_{jk} \qquad M = \left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

com $\varphi(\tau(x),t)$ o difeomorfismo C^2 que transforma o domínio não cilíndrico $\hat{Q}_T$ em Q_T cilíndrico.

Lema 3.0.4. *Existe uma função $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$, $\overline{\Omega}$ fecho de Ω, satisfazendo:*

$\psi(y) > 0$ *para todo* $x \in \Omega$

$\psi(y) = 0$ *para todo* $x \in \Gamma$

$|\nabla\psi(y)| > 0$ *para todo* $x \in \Omega - \omega_0$,

com $\omega_0 \subset \omega \subset \Omega$ *um subconjunto aberto e não vazio.*

A prova desse lema pode ser encontrada em Fursikov-Imanuvilov [8]. Usando a função ψ o Lema 3.0.4, introduzimos as funções

$$\phi(y,t) = \frac{e^{\lambda\psi(y)}}{\beta(t)} \qquad \alpha(y,t) = \frac{e^{\lambda\psi(y)} - e^{2\lambda||\psi||}}{\beta(t)}. \tag{3.2}$$

Com $\beta(t) = t(T-t)$, $0 < t < T$, $\lambda > 0$ em um parâmetro e

$$||\psi|| = \max_{y\in\overline{\Omega}} |\psi(y)|.$$

Verifica-se facilmente que

$$\nabla\phi = \lambda\frac{e^{\lambda\psi}}{\beta(t)}\nabla\psi = \lambda\phi\nabla\psi = \nabla\alpha. \tag{3.3}$$

Teorema 3.0.3. *Sejam ϕ, α e ψ funções como definidas no Lema 3.0.4. Então existe $\lambda_0 \geqslant 1$ tal que para cada $\lambda \geqslant \lambda_0$, existe $s \geqslant s_0(\lambda) > 0$ satisfazendo a desigualdade para a solução $w(x,t)$ do problema adjunto (3.1):*

$$\begin{aligned} &\int_{Q_T} (s^3\lambda^4\phi^3 w^2 + s\lambda^2\phi|M\nabla w|^2)dxdt + \int_{Q_T} (\phi s)^{-1} e^{2s\alpha}(|w_t|^2 + |A^* w|^2)dxdt \\ &\leqslant C\left(\int_{Q_T} e^{2s\alpha}|f|^2 dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} s^3\lambda^4\phi^3 w^2 dxdt\right). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Esta é a desigualdade de Carleman, que é análoga a desigualdade apresentada em [9]. Pelo caráter técnico da demonstração, ela será realizada em etapas.

3.1 Mudança de Variáveis

Consideramos uma mudança de variáveis conveniente no sistema (3.1), pela função regularizante $e^{s\alpha(y,t)}$. Com efeito, definindo

$$w(y,t) = e^{-s\alpha(y,t)}p(y,t) \ \text{ ou } \ p(y,t) = e^{s\alpha(y,t)}w(y,t)$$

obtemos

$$w_t = -s\alpha_t e^{-s\alpha}p + e^{-s\alpha}p_t \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y_j} = -s\frac{\partial \alpha}{\partial y_j}e^{-s\alpha}p + e^{-s\alpha}\frac{\partial p}{\partial y_j} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial y_k \partial y_j} = \ & -s\frac{\partial^2\alpha}{\partial y_k\partial y_j}e^{-s\alpha}p + s^2\frac{\partial\alpha}{\partial y_j}\frac{\partial\alpha}{\partial y_k}e^{-s\alpha}p \\ & -s\frac{\partial\alpha}{\partial y_j}e^{-s\alpha}\frac{\partial p}{\partial y_k} - s\frac{\partial\alpha}{\partial y_k}e^{-s\alpha}\frac{\partial p}{\partial y_j} + e^{-s\alpha}\frac{\partial^2 p}{\partial y_k\partial y_j} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Substituindo (3.6) e (3.7) na expressão de A^* temos

$$\begin{aligned}
A^*w = & -\sum_{i,j,k=1}^{n} a_{kj}\frac{\partial^2 w}{\partial y_k\partial y_j} - \sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial a_{kj}}{\partial y_k}\frac{\partial w}{\partial y_j} - \operatorname{div}(w\vec{b}) \\
= & -\sum_{i,k,j=1}^{n} a_{kj}\Big[-s\frac{\partial^2\alpha}{\partial y_k\partial y_j}e^{-s\alpha}p + s^2\frac{\partial\alpha}{\partial y_j}\frac{\partial\alpha}{\partial y_k}e^{-s\alpha}p \\
& -s\frac{\partial\alpha}{\partial y_j}e^{-s\alpha}\frac{\partial p}{\partial y_k} - s\frac{\partial\alpha}{\partial y_k}e^{-s\alpha}\frac{\partial p}{\partial y_j} + e^{-s\alpha}\frac{\partial^2 p}{\partial y_k\partial y_j}\Big] \\
& -\sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial a_{kj}}{\partial y_k}\Big[-s\frac{\partial\alpha}{\partial y_j}e^{-s\alpha}p + e^{-s\alpha}\frac{\partial p}{\partial y_j}\Big] \\
& -\sum_{j=1}^{n} b_j\Big[-s\frac{\partial\alpha}{\partial y_j}e^{-s\alpha}p + e^{-s\alpha}\frac{\partial p}{\partial y_j}\Big] - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial b_j}{\partial y_j}e^{-s\alpha}p \\
= & -\sum_{i,k,j=1}^{n} a_{kj}\Big[-s\frac{\partial^2\alpha}{\partial y_k\partial y_j}e^{-s\alpha}p\Big] - \sum_{i,k,j=1}^{n}\frac{\partial a_{kj}}{\partial y_k}\Big[-s\frac{\partial\alpha}{\partial y_j}e^{-s\alpha}p\Big] \\
& -\sum_{j=1}^{n} b_j\Big[-s\frac{\partial\alpha}{\partial y_j}e^{-s\alpha}p\Big] \\
& -\sum_{i,k,j=1}^{n} a_{kj}\Big[e^{-s\alpha}\frac{\partial^2 p}{\partial y_k\partial y_j}\Big] - \sum_{i,k,j=1}^{n}\frac{\partial a_{kj}}{\partial y_k}\Big[e^{-s\alpha}\frac{\partial p}{\partial y_j}\Big] \\
& -\sum_{j=1}^{n} b_j\Big[e^{-s\alpha}\frac{\partial p}{\partial y_j}\Big] - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial b_j}{\partial y_j}e^{-s\alpha}p \\
& -\sum_{i,k,j=1}^{n} a_{kj}s^2\frac{\partial\alpha}{\partial y_j}\frac{\partial\alpha}{\partial y_k}e^{-s\alpha}p \\
& +\sum_{i,k,j=1}^{n} a_{kj}s\frac{\partial\alpha}{\partial y_j}e^{-s\alpha}\frac{\partial p}{\partial y_k} + \sum_{i,k,j=1}^{n} a_{kj}s\frac{\partial\alpha}{\partial y_k}e^{-s\alpha}\frac{\partial p}{\partial y_j}
\end{aligned}$$

Portanto, lembrando que $\tilde{A}^*u = -\sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_k}\left(a_{kj}\frac{\partial u}{\partial y_j}\right)$, temos

$$\begin{aligned}
A^*w = & -se^{-s\alpha}p\tilde{A}^*\alpha + se^{-s\alpha}p\nabla\alpha\cdot\vec{b} + e^{-s\alpha}A^*p - s^2e^{-s\alpha}p|M\nabla\alpha|^2 \\
& +2se^{-s\alpha}M\nabla p\cdot M\nabla\alpha
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Onde $\cdot$ representa o produto interno no $\mathbb{R}^n$ e $M = \left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Temos ainda que

$$\frac{\partial\alpha}{\partial y_j} = \lambda\frac{e^{\lambda\psi}}{\beta(t)}\frac{\partial\psi}{\partial y_j} = \lambda\phi\frac{\partial\psi}{\partial y_j} \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial y_k\partial y_j} = \lambda^2\phi\frac{\partial\psi}{\partial y_j}\frac{\partial\psi}{\partial y_k} + \lambda\phi\frac{\partial^2\psi}{\partial y_k\partial y_j} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{A}^*\alpha = & -\sum_{i,j,k=1}^{n} a_{kj}\Big[\lambda^2\phi\frac{\partial\psi}{\partial y_j}\frac{\partial\psi}{\partial y_k} + \lambda\phi\frac{\partial^2\psi}{\partial y_k\partial y_j}\Big] - \sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial a_{kj}}{\partial y_k}\Big[\lambda\phi\frac{\partial\psi}{\partial y_j}\Big] \\
= & \ \lambda\phi\tilde{A}^*\psi - \lambda^2\phi|M\nabla\psi|^2.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Substituindo (3.11) e (3.3) em (3.8) temos

$$\begin{aligned} A^*w = & -se^{-s\alpha}p\lambda\phi\tilde{A}^*\psi + se^{-s\alpha}p\lambda^2\phi|M\nabla\psi|^2 + \lambda\phi se^{-s\alpha}p\nabla\psi\cdot\vec{b}+ \\ & +e^{-s\alpha}A^*p - \lambda^2\phi^2s^2e^{-s\alpha}p|M\nabla\psi|^2 + 2\lambda\phi se^{-s\alpha}M\nabla p\cdot M\nabla\psi. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Substituindo (3.12) e (3.5) em $(3.1)_1$ temos

$$\begin{gathered} s\alpha_t e^{-s\alpha}p - e^{-s\alpha}p_t - se^{-s\alpha}p\lambda\phi\tilde{A}^*\psi + se^{-s\alpha}p\lambda^2\phi|M\nabla\psi|^2 + \lambda\phi se^{-s\alpha}p\nabla\psi\cdot\vec{b}+ \\ +e^{-s\alpha}A^*p - \lambda^2\phi^2s^2e^{-s\alpha}p|M\nabla\psi|^2 + 2\lambda\phi se^{-s\alpha}M\nabla p\cdot M\nabla\psi = f - a(t)e^{-s\alpha}p. \end{gathered} \tag{3.13}$$

Também temos

$$p(y,0) = e^{-s\alpha(y,0)}w(y,0) = 0 \text{ em } \Omega \tag{3.14}$$

pois

$$\alpha(y,t) = \frac{e^{\lambda\psi(y)} - e^{2\lambda||\psi||}}{\beta(t)} < 0 \qquad e^{s\alpha(y,0)} = \lim_{t\to 0^+} e^{s\alpha(y,t)} = 0,$$

por argumento análogo, obtém-se

$$p(y,T) = e^{-s\alpha(y,T)}w(y,T) = 0 \text{ em } \Omega. \tag{3.15}$$

Usando-se (3.13), (3.14) e (3.15) podemos reescrever o sistema (3.1) nas novas variáveis da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} -p_t + s\alpha_t p - sp\lambda\phi\tilde{A}^*\psi + sp\lambda^2\phi|M\nabla\psi|^2 \quad + \\ +\lambda\phi sp\nabla\psi\cdot\vec{b} + A^*p - \lambda^2\phi^2s^2p|M\nabla\psi|^2 + \\ \qquad +2\lambda\phi sM\nabla p\cdot M\nabla\psi = e^{s\alpha}f - a(t)p \quad \text{ em } Q_T, \\ \qquad\qquad p(y,t) = 0 \text{ em } \Sigma_T, \\ \qquad p(y,T) = p(y,0) = 0 \text{ em } \Omega. \end{array} \right. \tag{3.16}$$

Vamos considerar a notação

$$\begin{aligned} U(t)p &= 2\lambda\phi sM\nabla p\cdot M\nabla\psi + 2s\lambda^2\phi|M\nabla\psi|^2p \\ V(t)p &= -\tilde{A}^*p + \lambda^2\phi^2s^2|M\nabla\psi|^2p + s\lambda^2\phi|M\nabla\psi|^2p - s\alpha_t p \\ Z(t)p &= s\lambda\phi\big(\tilde{A}^*\psi\big)p - a(t)p - \lambda\phi s\big(\nabla\psi\cdot\vec{b}\big)p + \operatorname{div}(p\vec{b}). \end{aligned}$$

Dessa forma, com essa notação podemos escrever a equação $(3.16)_1$ como

$$-p_t + U(t)p - V(t)p = e^{s\alpha}f + Z(t)p. \tag{3.17}$$

Veja que

$$\frac{d}{dt}\left[(V(t)p)\,p\right] = \frac{d}{dt}\left(V(t)p\right)p + \left(V(t)p\right)p_t.$$

Considerando a notação

$$\begin{aligned}
\tilde{A}^*p &= -\sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_k}\left(a_{kj}\frac{\partial p}{\partial y_j}\right) = \nabla \cdot B\nabla p \\
B &= \sum_{i=1}^{n} B_i \\
B_i &= (-a_{kj}(i))_{1\leqslant k,j\leqslant n} = (-a_{kj})_{1\leqslant k,j\leqslant n} \\
a_{kj} &= \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \\
B_t &= \frac{\partial}{\partial t}(B).
\end{aligned}$$

Temos ainda que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\big(V(t)p\big)p = {}& \Big(-(\tilde{A}^*p)_t + \lambda^2 s^2 |M\nabla\psi|^2 (p\phi^2)_t + s\lambda^2 |M\nabla\psi|^2 (p\phi)_t - s(\alpha_t p)_t\Big)\, p \\
= {}& \big[-\tilde{A}^*p_t + \lambda^2 s^2 |M\nabla\psi|^2 p_t\phi^2 + s\lambda^2|M\nabla\psi|^2 p_t\phi - s\alpha_t p_t\big]p + \\
& \big[-\nabla\cdot B_t\nabla p + \lambda^2 s^2|M\nabla\psi|^2 2p\phi\phi_t + s\lambda^2|M\nabla\psi|^2 p\phi_t - s\alpha_{tt}p\big]p \\
= {}& \big(V(t)p_t\big)p + \big(V_t(t)p\big)p,
\end{aligned}$$

onde

$$\big(V_t(t)p\big)p = \big[-\nabla\cdot B_t\nabla p + \lambda^2 s^2|M\nabla\psi|^2 2p\phi\phi_t + s\lambda^2|M\nabla\psi|^2 p\phi_t - s\alpha_{tt}p\big]p,$$

dessa forma temos

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \big[\big(V(t)p\big)p\big]dx = \int_\Omega \big(V(t)p_t\big)p\,dx + \int_\Omega \big(V(t)p\big)p_t\,dx + \int_\Omega \big(V_t(t)p\big)p\,dx.$$

Observe que

$$p = 0 \quad \text{em} \qquad \partial\Omega \times (0,T)$$

e que

$$p_t(y,t) = \lim_{h\to 0^+}\frac{p(y,t+h) - p(y,t)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{0-0}{h} = 0 \quad \forall (y,t)\in \Sigma_T.$$

Considerando $\eta = (\eta^j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ o vetor unitário normal exterior a Γ, temos que:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_k}\left(a_{kj}\frac{\partial p_t}{\partial y_j}\right)p\,dx &= -\sum_{i,j,k=1}^{n}\int_\Omega a_{kj}\frac{\partial p_t}{\partial y_j}\frac{\partial p}{\partial y_k}dx + \sum_{i,j,k=1}^{n}\int_\Gamma a_{kj}\frac{\partial p_t}{\partial y_j}p\eta^k d\Gamma \\
&= -\sum_{i,j,k=1}^{n}\int_\Omega \left(a_{kj}\frac{\partial p}{\partial y_k}\right)\frac{\partial p_t}{\partial y_j}dx \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial y_j}\left(a_{kj}\frac{\partial p}{\partial y_k}\right)p_t\,dx - \sum_{i,j,k=1}^{n}\int_\Gamma a_{kj}\frac{\partial p}{\partial y_k}p_t\eta^j d\Gamma \\
&= \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_j}\left(a_{jk}\frac{\partial p}{\partial y_k}\right)p_t\,dx.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_\Omega (\tilde{A}^* p_t) p\, dx = \int_\Omega (\tilde{A}^* p) p_t\, dx.$$

Dessa forma temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (V(t)p_t)p\,dx = & \int_\Omega \left[-\tilde{A}^* p_t + \lambda^2 s^2 |M\nabla\psi|^2 p_t \phi^2 + s\lambda^2 |M\nabla\psi|^2 p_t \phi - s\alpha_t p_t\right] p\,dx \\
= & \int_\Omega (-\tilde{A}^* p_t) p\,dx + \int_\Omega \left[\lambda^2 s^2 |M\nabla\psi|^2 p_t \phi^2 + s\lambda^2 |M\nabla\psi|^2 p_t \phi - s\alpha_t p_t\right] p\,dx \\
= & \int_\Omega (-\tilde{A}^* p) p_t\,dx + \int_\Omega \left[\lambda^2 s^2 |M\nabla\psi|^2 p \phi^2 + s\lambda^2 |M\nabla\psi|^2 p \phi - s\alpha_t p\right] p_t\,dx \\
= & \int_\Omega (V(t)p)p_t\,dx.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \left[\big(V(t)p\big)p\right] dx = 2\int_\Omega \big(V(t)p\big)p_t\,dx + \int_\Omega \big(V_t(t)p\big)p\,dx. \tag{3.18}$$

Ao substituirmos p_t de (3.17) em (3.18) obtemos

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \left[\big(V(t)p\big)p\right] dx = 2\int_\Omega \big(V(t)p\big)[U(t)p - V(t)p - e^{s\alpha} f - Z(t)p]\,dx + \int_\Omega \big(V_t(t)p\big)p\,dx.$$

Notando que $p(0) = p(x,0) = 0$ e $p(T) = p(x,T) = 0$ em Ω, e integrando de 0 a T a última igualdade temos:

$$\begin{aligned}
0 = & \; 2\int_{Q_T} \big(V(t)p\big)[U(t)p - V(t)p - e^{s\alpha} f - Z(t)p]\,dxdt + \int_{Q_T} \big(V_t(t)p\big)p\,dxdt \\
0 = & \; 2\int_{Q_T} \big(V(t)p\big)^2 dxdt - 2\int_{Q_T} \big(V(t)p\big)\big(U(t)p\big)\,dxdt - \int_{Q_T} \big(V_t(t)p\big)p\,dxdt + \\
& +2\int_{Q_T} (V(t)p)(e^{s\alpha} f + Z(t)p)\,dxdt
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Obs 3.1.1. *Note que*

$$|\phi_t| = \left|\frac{\beta'(t)}{\beta(t)^2} e^{\lambda\psi(y)}\right| = \frac{|T-2t|}{e^{\lambda\psi(y)}}|\phi|^2 \leqslant |T-2t||\phi|^2 \leqslant C|\phi|^2 \tag{3.20}$$

Temos ainda que

$$\begin{aligned}
|\alpha_t| = & \left|\frac{-\beta'(t)}{\beta(t)^2}(e^{\lambda\psi(y)} - e^{2\lambda||\psi||})\right| \\
= & \frac{|T-2t|}{\beta(t)^2}|e^{\lambda\psi(y)} - e^{2\lambda||\psi||}| \\
= & |T-2t|\left|\frac{e^{\lambda\psi(y)} - e^{2\lambda||\psi||}}{e^{2\lambda\psi(y)}}\right|\left(\frac{e^{\lambda\psi(y)}}{\beta(t)}\right)^2 \\
\leqslant & |T-2t|\left|\frac{1}{e^{\lambda\psi(y)}} + e^{2\lambda||\psi|| - 2\psi(y)}\right|\phi^2 \\
\leqslant & |T-2t||1 + e^{2\lambda||\psi||}|\phi^2 \\
\leqslant & C\phi^2.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Sendo $C = C(T, \lambda, ||\psi||, \Omega)$. *Note que* $\psi(y) > 0$ *implica* $||\psi|| - \psi(y) \leqslant ||\psi||$. *Por outro lado, temos*

$$
\begin{aligned}
|\alpha_{tt}| &= \left|\frac{-\beta''(t)\beta^2 + 2\beta|T-2t|^2}{\beta^4}\right| \left|e^{\lambda\psi(y)} - e^{2\lambda||\psi||}\right| \\
&\leqslant \left|\frac{2\beta^2 + 2\beta|T-2t|^2}{\beta e^{3\lambda\psi(y)}}\right| \left(\frac{e^{3\lambda\psi(y)}}{\beta^3}\right) \left|e^{\lambda\psi(y)} - e^{2\lambda||\psi||}\right| \\
&= \frac{|2\beta + |T-2t|^2|}{e^{2\lambda\psi(y)}} \left|\frac{e^{\lambda\psi(y)} - e^{2\lambda||\psi||}}{e^{\lambda\psi(y)}}\right| \phi^3 \\
&\leqslant C\phi^3.
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

Análise dos Termos de (3.19)

Adotaremos a seguinte notação $X = -\int_{Q_T} \big(V(t)p\big)\big(U(t)p\big)dxdt$. Portanto

$$
\begin{aligned}
X = \; & -\int_{Q_T} [-\tilde{A}^*p + \lambda^2\phi^2 s^2|M\nabla\psi|^2 p + s\lambda^2\phi|M\nabla\psi|^2 p - s\alpha_t p] \\
& [2\lambda\phi s M\nabla p \cdot M\nabla\psi + 2s\lambda^2\phi|M\nabla\psi|^2 p]dxdt
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

Sabemos que existem constantes $K_1, N > 0$ tais que

$$
|\nabla\psi|^2 \leqslant N, \quad |M\nabla\psi|^2 \leqslant N \quad , \quad |A^*\psi|^2 \leqslant N \quad \text{e} \quad |B_t\nabla p \cdot \nabla p| \leqslant K_1|\nabla p|^2
$$

temos

$$
(V_t(t)p)p = \big[-\nabla \cdot B_t\nabla p + \lambda^2 s^2|M\nabla\psi|^2 2p\phi\phi_t + s\lambda^2|M\nabla\psi|^2 p\phi_t - s\alpha_{tt}p\big]p. \tag{3.24}
$$

Segue de (3.20) e (3.22) na Observação 3.1 que

$$
|(\lambda^2 s^2|M\nabla\psi|^2 2p\phi\phi_t + s\lambda^2|M\nabla\psi|^2 p\phi_t - s\alpha_{tt}p)\, p| \leqslant C_1(\lambda^2 s^2\phi^3 + s\lambda^2\phi^2 + s\phi^3)p^2, \tag{3.25}
$$

onde $C_1 = \max\{2NC, C\}$. Temos ainda que

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{Q_T} p\nabla \cdot B_t\nabla p dxdt\right| &= \left|\int_{Q_T} B_t\nabla p \cdot \nabla p dxdt\right| \\
&\leqslant \int_{Q_T} |B_t\nabla p \cdot \nabla p|\, dxdt \\
&\leqslant K_1\int_{Q_T} |\nabla p|^2 dxdt.
\end{aligned}
$$

Considerando $C_2 = \max\{C_1, K_1\}$, temos

$$
X_1 = \left|\int_{Q_T} (V_t(t)p)p dxdt\right| \leqslant C_2\int_{Q_T} \left[|\nabla p|^2 + (\lambda^2 s^2\phi^3 + s\lambda^2\phi^2 + s\phi^3)p^2\right] dxdt. \tag{3.26}
$$

Por outro lado, temos

$$
\begin{aligned}
X_2 = &\ \left|2\int_{Q_T}(V(t)p)(e^{s\alpha}f + Z(t)p)dxdt\right| \\
\leqslant &\ 2\int_{Q_T}|(V(t)p)||e^{s\alpha}f|dxdt + 2\int_{Q_T}|(V(t)p)||(Z(t)p)|dxdt \\
\leqslant &\ 2\int_{Q_T}|(V(t)p)|^2dx + \int_{Q_T}e^{2s\alpha}|f|^2dxdt + \int_{Q_T}|(Z(t)p)|^2dxdt.
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

Observando que $(a+b+c+d+e)^2 \leqslant 16(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)$, tem-se

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega}|(Z(t)p)|^2dxdt \leqslant &\ \int_{\Omega}\left|s\lambda\phi\big(\tilde{A}^*\psi\big)p - a(t)p - \lambda\phi s\big(\nabla\psi\cdot\vec{b}\big)p + \operatorname{div}(p\vec{b})\right|^2 dxdt \\
\leqslant &\ 16\int_{\Omega}s^2\lambda^2\phi^2|\tilde{A}^*\psi|^2p^2 + |a(t)|^2p^2 + \lambda^2\phi^2s^2|\nabla\psi|^2|\vec{b}|^2_{\infty}p^2 + \\
&\ +|\nabla p|^2|b|^2_{\infty} + p^2|\operatorname{div}(\vec{b})|^2_{\infty}dxdt \\
\leqslant &\ C_3\int_{Q_T}\left[(s^2\lambda^2\phi^2+1)p^2 + |\nabla p|^2\right]dxdt,
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

onde $C_3 = 16\max\{N + N|\vec{b}|^2_{\infty}, |b|^2_{\infty}, M^2 + |\operatorname{div}\vec{b}|^2_{\infty}\}$. Fazendo a substituição de (3.28) em (3.27), obtém-se

$$
X_2 \leqslant 2\int_{Q_T}|(V(t)p)|^2dxdt + 2\int_{Q_T}e^{2s\alpha}|f|^2dxdt + C_3\int_{Q_T}\left[(s^2\lambda^2\phi^2+1)p^2 + |\nabla p|^2\right]dxdt.
\tag{3.29}
$$

Segue de (3.19) que

$$
2X + 2\int_{Q_T}|(V(t)p)|^2dxdt \leqslant X_1 + X_2
$$

Dessa forma, fazendo $\overline{C} = \max\{C_2, C_3\}$, segue de (3.26) e (3.29) que

$$
\begin{aligned}
2X + 2\int_{Q_T}|(V(t)p)|^2dxdt \leqslant &\ 2\int_{Q_T}|(V(t)p)|^2dxdt + 2\int_{Q_T}|e^{s\alpha}f|^2dxdt \\
&+2\overline{C}\int_{Q_T}(s^2\lambda^2\phi^2+1)p^2 + (\lambda^2s^2\phi^3 + s\lambda^2\phi^2 + s\phi^3)p^2dxdt \\
&+2\overline{C}\int_{Q_T}|\nabla p|^2dxdt.
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

Para $s \geqslant 1$ e $C = 2\overline{C}$, decorre de (3.30) que

$$
\begin{aligned}
X \leqslant &\ \int_{Q_T}|e^{s\alpha}f|^2dxdt + C\int_{Q_T}[\lambda^2(s^2\phi^2 + s^2\phi^3) + s\phi^3 + 1]p^2dxdt + \\
&+C\int_{Q_T}|\nabla p|^2dxdt.
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

3.2 Análise dos Termos de X

Observe que

$$\begin{aligned}
X = & -\int_{Q_T} \big(V(t)p\big)\big(U(t)p\big)dxdt \\
= & \int_{Q_T} \Big[\tilde{A}^*p - \lambda^2\phi^2 s^2|M\nabla\psi|^2 p - s\lambda^2\phi|M\nabla\psi|^2 p + s\alpha_t p\Big] \\
& [2\lambda\phi s M\nabla p \cdot M\nabla\psi + 2s\lambda^2\phi|M\nabla\psi|^2 p]\, dxdt \\
= & \ 2\int_{Q_T} s\lambda^2\phi|M\nabla\psi|^2 p\tilde{A}^*p dxdt - 2\int_{Q_T} \lambda^4\phi^3 s^3|M\nabla\psi|^4 p^2 dxdt \\
& -2\int_{Q_T} \lambda^4\phi^2 s^2|M\nabla\psi|^4 p^2 dxdt + 2\int_{Q_T} \lambda\phi s\,[M\nabla p\cdot M\nabla\psi]\,\tilde{A}^*p dxdt \\
& -2\int_{Q_T} \big[\lambda^3\phi^3 s^3 M\nabla p\cdot M\nabla\psi|M\nabla\psi|^2 p + \lambda^3\phi^2 s^2 M\nabla p\cdot M\nabla\psi|M\nabla\psi|^2 p\big]\, dxdt \\
& 2\int_{Q_T} \big[p\lambda\phi s^2\alpha_t M\nabla p\cdot M\nabla\psi + s^2\lambda^2\phi|M\nabla\psi|^2 p^2\alpha_t\big]\, dxdt.
\end{aligned}$$

Portanto, consideremos a seguinte notação

$$\begin{aligned}
M_1 &= 2\int_{Q_T} s\lambda^2\phi|M\nabla\psi|^2 p\tilde{A}^*p dxdt \\
M_2 &= -2\int_{Q_T} \lambda^4\phi^3 s^3|M\nabla\psi|^4 p^2 dxdt - 2\int_{Q_T} \lambda^4\phi^2 s^2|M\nabla\psi|^4 p^2 dxdt \\
M_3 &= 2\int_{Q_T} \lambda\phi s\,[M\nabla p\cdot M\nabla\psi]\,\tilde{A}^*p dxdt \\
M_4 &= -2\int_{Q_T} \big[\lambda^3\phi^3 s^3 M\nabla p\cdot M\nabla\psi|M\nabla\psi|^2 p + \lambda^3\phi^2 s^2 M\nabla p\cdot M\nabla\psi|M\nabla\psi|^2 p\big]\, dxdt \\
M_5 &= 2\int_{Q_T} \big[p\lambda\phi s^2\alpha_t M\nabla p\cdot M\nabla\psi + s^2\lambda^2\phi|M\nabla\psi|^2 p^2\alpha_t\big]\, dxdt.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Dessa forma temos

$$X = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5.$$

Análise de M_1

Observe que como $p = 0$ em Σ_T, e considerando $\eta = (\eta_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ o vetor unitário normal exterior a Σ_T, temos

$$\begin{aligned}
\int_{Q_T} \phi|M\nabla\psi|^2 p\tilde{A}^*p dxdt = & \int_{Q_T} s\lambda^2\phi|M\nabla\psi|^2 p(\nabla\cdot B\nabla p)dxdt \\
= & \int_{\Sigma_T} \phi|M\nabla\psi|^2 p[B\nabla p\cdot\eta]d\Sigma_T - \int_{Q_T} \nabla(\phi|M\nabla\psi|^2 p)\cdot B\nabla p dxdt \\
= & -\int_{Q_T} \nabla(\phi|M\nabla\psi|^2 p)\cdot B\nabla p dxdt.
\end{aligned}$$

Logo,

$$M_1 = -2\int_{Q_T} s\lambda^2\nabla(\phi|M\nabla\psi|^2 p)\cdot B\nabla p dxdt. \tag{3.33}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}\nabla(\phi|M\nabla\psi|^2p) = & \ [|M\nabla\psi|^2p]\,[\nabla\phi] + [\phi p](\nabla|M\nabla\psi|^2) + \phi|M\nabla\psi|^2(\nabla p)\\ = & \ [\lambda\phi|M\nabla\psi|^2p]\,[\nabla\psi] + [\phi p](\nabla|M\nabla\psi|^2) + \phi|M\nabla\psi|^2(\nabla p).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}M_1 = & -2\int_{Q_T} s\lambda^3\phi|M\nabla\psi|^2p(\nabla\psi\cdot B\nabla p)dxdt\\ & -2\int_{Q_T} s\lambda^2\phi p(\nabla(|M\nabla\psi|^2)\cdot B\nabla p)dxdt\\ & +2\int_{Q_T} s\lambda^2\phi|M\nabla\psi|^2|M\nabla p|^2dxdt.\end{aligned}$$

Note que $\psi\in C^2(\overline{\Omega})$, disso segue que existe $\widehat{C}=\widehat{C}(\Omega)>0$ tal que

$$\begin{cases}|M\nabla\psi|^4 \leqslant \widehat{C}\\ |M\nabla(|M\nabla\psi|)|^2 \leqslant \widehat{C}.\end{cases}$$

Lembrando que

$$\Big\{\ \nabla\psi\cdot B\nabla p = -M\nabla\psi\cdot M\nabla p,$$

temos

$$\begin{aligned}|-2\int_{Q_T} s\lambda^3\phi|M\nabla\psi|^2p(\nabla\psi\cdot B\nabla p)dxdt| = & \ |-2\textstyle\int_{Q_T} s\lambda^3\phi|M\nabla\psi|^2p(-M\nabla\psi\cdot M\nabla p)dxdt|\\ \leqslant & \ 2\int_{Q_T} s\lambda^3\phi|M\nabla\psi|^2p|M\nabla\psi||M\nabla p|dxdt\\ \leqslant & \ \int_{Q_T} s\phi(4\lambda^2|M\nabla\psi|^2p)(\frac{\lambda}{2}|M\nabla\psi||M\nabla p|)dxdt\\ \leqslant & \ 8\int_{Q_T} s\phi\lambda^4|M\nabla\psi|^4p^2dxdt\\ & +\int_{Q_T} s\phi\frac{\lambda^2}{4}|M\nabla\psi|^2|M\nabla p|^2dxdt\\ \leqslant & \ 8\widehat{C}\int_{Q_T} s\phi\lambda^4p^2dxdt+\\ & \ \frac{1}{4}\int_{Q_T} s\phi\lambda^2|M\nabla\psi|^2|M\nabla p|^2dxdt.\end{aligned}$$

De onde segue que

$$\begin{aligned}-2\int_{Q_T} s\lambda^3\phi|M\nabla\psi|^2p(\nabla\psi\cdot B\nabla p)dxdt \geqslant & -8\widehat{C}\int_{Q_T} s\phi\lambda^4p^2dxdt\\ & -\frac{1}{4}\int_{Q_T} s\phi\lambda^2|M\nabla\psi|^2|M\nabla p|^2dxdt.\end{aligned} \tag{3.34}$$

Também temos

$$
\begin{aligned}
|-2\int_{Q_T} s\lambda^2\phi p(\nabla(|M\nabla\psi|^2)\cdot B\nabla p)dxdt| &\leqslant |2\int_{Q_T} s\lambda^2\phi p(\nabla(M\nabla\psi\cdot M\nabla\psi)\cdot B\nabla p)dxdt| \\
&\leqslant |2\int_{Q_T} s\lambda^2\phi 2|M\nabla\psi|p(M\nabla(M\nabla\psi)\cdot M\nabla p)dxdt| \\
&\leqslant 4\int_{Q_T} s\lambda^2\phi|M\nabla\psi|p|M\nabla(M\nabla\psi)||M\nabla p|dxdt \\
&\leqslant \int_{Q_T} s\lambda^2\phi(8|M\nabla(M\nabla\psi)|p)(\tfrac{|M\nabla\psi||M\nabla p|}{2})dxdt \\
&\leqslant \int_{Q_T} s\lambda^2\phi(8|M\nabla(M\nabla\psi)|p)(\tfrac{|M\nabla\psi||M\nabla p|}{2})dxdt \\
&\leqslant 32\int_{Q_T} s\lambda^2\phi(|M\nabla(M\nabla\psi)|^2p^2)dxdt+ \\
&\quad +\int_{Q_T} s\lambda^2\phi(\tfrac{|M\nabla\psi|^2|M\nabla p|^2}{4})dxdt \\
&\leqslant 32\widehat{C}\int_{Q_T} s\lambda^2\phi p^2dxdt+ \\
&\quad +\tfrac{1}{4}\int_{Q_T} s\lambda^2\phi|M\nabla\psi|^2|M\nabla p|^2dxdt.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
-2\int_{Q_T} s\lambda^2\phi p(\nabla(|M\nabla\psi|^2)\cdot B\nabla p)dxdt \geqslant\ & -32\widehat{C}\int_{Q_T} s\lambda^2\phi p^2dxdt \\
& -\tfrac{1}{4}\int_{Q_T} s\lambda^2\phi|M\nabla\psi|^2|M\nabla p|^2dxdt.
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

Dessa forma por (3.34) e (3.35) temos

$$
\begin{aligned}
M_1 \geqslant\ & -8\widehat{C}\int_{Q_T} s\phi\lambda^4p^2dxdt - \frac{1}{4}\int_{Q_T} s\phi\lambda^2|M\nabla\psi|^2|M\nabla p|^2dxdt - 32\widehat{C}\int_{Q_T} s\lambda^2\phi p^2dxdt \\
& -\tfrac{1}{4}\int_{Q_T} s\lambda^2\phi|M\nabla\psi|^2|M\nabla p|^2dxdt + 2\int_{Q_T} s\lambda^2\phi|M\nabla\psi|^2|M\nabla p|^2dxdt \\
\geqslant\ & -32\widehat{C}\int_{Q_T} s\phi(\lambda^4+\lambda^2)p^2dxdt + \frac{3}{2}\int_{Q_T} s\lambda^2\phi|M\nabla\psi|^2|M\nabla p|^2dxdt.
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

Análise de M_3

Seja
$$M_3 = 2\int_{Q_T} \lambda\phi s\,[M\nabla p\cdot M\nabla\psi]\,\tilde{A}^* p\,dxdt.$$
Dessa forma, usando a fórmula de Green, temos

$$\int_{Q_T} \lambda\phi s\,[M\nabla p\cdot M\nabla\psi]\,\tilde{A}^* p\,dxdt + \int_{Q_T} \nabla(\lambda\phi s M\nabla p\cdot M\nabla\psi)\cdot B\nabla p\,dxdt = \int_{\Sigma_T} \lambda\phi s\,[M\nabla p\cdot M\nabla\psi]\,B\nabla p\cdot\eta\,d\Sigma_T,$$

onde η é o vetor unitário normal exterior a Σ_T, portanto

$$M_3 = -2\int_{Q_T} \nabla(\lambda\phi s M\nabla p\cdot M\nabla\psi)\cdot B\nabla p\,dxdt + 2\int_{\Sigma_T} \lambda\phi s\,[M\nabla p\cdot M\nabla\psi]\,B\nabla p\cdot\eta\,d\Sigma_T. \tag{3.37}$$

Por outro lado
$$\begin{aligned}
\nabla(\phi M\nabla p\cdot M\nabla\psi) =& \ (M\nabla p\cdot M\nabla\psi)(\nabla\phi) + \phi\nabla(M\nabla p\cdot M\nabla\psi)\\
=& \ (\lambda\phi M\nabla p\cdot M\nabla\psi)\nabla\psi + \phi\nabla\left(\sum_{i,j,k=1}^{n} a_{kj}\frac{\partial p}{\partial y_j}\frac{\partial\psi}{\partial y_k}\right)\\
=& \ (\lambda\phi M\nabla p\cdot M\nabla\psi)\nabla\psi + \phi\xi,
\end{aligned}$$
onde $\xi = (\xi_1,\cdots,\xi_n) = (\xi_l)_{1\leqslant l\leqslant n}$, com
$$\xi_l = \frac{\partial}{\partial y_l}\left(\sum_{i,j,k=1}^{n} a_{kj}\frac{\partial p}{\partial y_j}\frac{\partial\psi}{\partial y_k}\right).$$

Substituindo em (3.37) temos
$$\begin{aligned}
M_3 =& \ -2\int_{Q_T} s\lambda\,[(\lambda\phi M\nabla p\cdot M\nabla\psi)\nabla\psi + \phi\xi]\cdot B\nabla p\,dxdt\\
&+2\int_{\Sigma_T} \lambda\phi s\,[M\nabla p\cdot M\nabla\psi]\,B\nabla p\cdot\eta\,d\Sigma_T\\
=& \ -2\int_{Q_T} (s\lambda^2\phi M\nabla p\cdot M\nabla\psi)(\nabla\psi\cdot B\nabla p)dxdt - 2\int_{Q_T} s\lambda\phi(\xi\cdot B\nabla p)dxdt\\
&+2\int_{\Sigma_T} \lambda\phi s\,[M\nabla p\cdot M\nabla\psi]\,B\nabla p\cdot\eta\,d\Sigma_T\\
=& \ 2\int_{Q_T} (s\lambda^2\phi M\nabla p\cdot M\nabla\psi)(M\nabla\psi\cdot M\nabla p)dxdt - 2\int_{Q_T} s\lambda\phi(\xi\cdot B\nabla p)dxdt\\
&+2\int_{\Sigma_T} \lambda\phi s\,[M\nabla p\cdot M\nabla\psi]\,B\nabla p\cdot\eta\,d\Sigma_T\\
=& \ 2\int_{Q_T} s\lambda^2\phi(M\nabla p\cdot M\nabla\psi)^2 dxdt - 2\int_{Q_T} s\lambda\phi(\xi\cdot B\nabla p)dxdt\\
&-2\int_{\Sigma_T} \lambda\phi s\,[M\nabla p\cdot M\nabla\psi]\,M\nabla p\cdot M\eta\,d\Sigma_T.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Denotamos por

$N_1 = -2\displaystyle\int_{\Sigma_T} \lambda\phi s\,[M\nabla p \cdot M\nabla\psi]\, M\nabla p \cdot M\eta d\Sigma_T$ e

$N_2 = -2\displaystyle\int_{Q_T} s\lambda\phi(\xi \cdot B\nabla p)dxdt.$

Análise de N_1

Observe que $\Gamma = \psi^{-1}(0)$ e também $\nabla\psi \neq 0$ em Γ, então temos que Γ é uma superfície de dimensão $n-1$, logo temos que para cada $x \in \Gamma$ o espaço tangente $T_x(\Gamma)$ tem dimensão $n-1$, portanto

$$\dim\{T_x(\Gamma)^{\perp}\} = 1$$

dessa forma concluímos que

$$[T_x(\Gamma)^{\perp}] = \eta(x).$$

Observe também que fixando $t \in (0,T)$ e pela definição de ψ, tem-se

$$\psi\Big|_{\Gamma} = 0 \quad \text{e} \quad p\Big|_{\Gamma} = 0$$

então teremos que $\nabla\psi \cdot \nu = \nabla p \cdot \nu = 0 \quad \forall \nu \in T_x(\Gamma)^{\perp} \quad \forall x \in \Gamma$. Logo, teremos que $\nabla\psi$, $\nabla p \in (T_x(\Gamma))^{\perp}$, e como $\|\eta(x)\| = 1$, tem-se que

$$\begin{cases} \nabla\psi = \eta(\nabla\psi \cdot \eta) & \text{em } \Gamma \\ \nabla p = \eta(\nabla p \cdot \eta) & \text{em } \Gamma. \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} N_1 = & -2\int_{\Sigma_T} \lambda\phi s\,[M\eta(\nabla p \cdot \eta) \cdot M\eta(\nabla\psi \cdot \eta)]\, M\eta(\nabla p \cdot \eta) \cdot M\eta d\Sigma_T \\ = & -2\int_{\Sigma_T} \lambda\phi s(\nabla\psi \cdot \eta)(\nabla p \cdot \eta)^2\,[M\eta \cdot M\eta]\, M\eta \cdot M\eta d\Sigma_T \\ = & -2\int_{\Sigma_T} \lambda\phi s(\nabla\psi \cdot \eta)(\nabla p \cdot \eta)^2 |M\eta|^4 d\Sigma_T. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Observe que como η é o normal exterior a Γ, temos que dado $x \in \Gamma$ e $k < 0$, com k suficientemente pequeno, temos $x + k\eta \in \Omega$, $\psi(x) = 0$ e como $\psi(x + k\eta) > 0$, então

$$\nabla\psi \cdot \eta = \frac{\partial\psi}{\partial\eta}(x) = \lim \frac{\psi(x + k\eta) - \psi(x)}{k} = \lim \frac{\psi(x + k\eta)}{k} \leqslant 0.$$

Portanto, $N_1 \geqslant 0$.

Análise do Termo N_2

Observe que

$$B\nabla p = \left(\sum_{r,\nu=1}^{n} -a_{lr}\frac{\partial p}{\partial y_r}\right)_{1\leqslant l\leqslant n}$$

lembrando que

$$a_{lr} = \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_\nu}\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_\nu}$$
$$B = (-a_{lr})_{1\leqslant l,r\leqslant n}.$$

Dessa forma temos

$$\begin{aligned} N_2 = &\ -2\sum_{l=1}^{n}\int_{Q_T} s\lambda\phi\frac{\partial}{\partial y_l}\left(\sum_{i,j,k=1}^{n} a_{kj}\frac{\partial p}{\partial y_j}\frac{\partial \psi}{\partial y_k}\right)\cdot\left(\sum_{r,\nu=1}^{n} -a_{lr}\frac{\partial p}{\partial y_r}\right)dxdt \\ = &\ 2\sum_{l=1}^{n}\int_{Q_T} s\lambda\phi\frac{\partial}{\partial y_l}\left(\sum_{i,j,k=1}^{n} a_{kj}\frac{\partial p}{\partial y_j}\frac{\partial \psi}{\partial y_k}\right)\cdot\left(\sum_{r,\nu=1}^{n} a_{lr}\frac{\partial p}{\partial y_r}\right)dxdt \\ = &\ 2\sum_{l=1}^{n}\int_{Q_T} s\lambda\phi\left(\sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_l}\left(a_{kj}\frac{\partial \psi}{\partial y_k}\right)\frac{\partial p}{\partial y_j}\right)\cdot\left(\sum_{r,\nu=1}^{n} a_{lr}\frac{\partial p}{\partial y_r}\right)dxdt \\ &+2\sum_{l=1}^{n}\int_{Q_T} s\lambda\phi\left(\sum_{i,j,k=1}^{n} a_{kj}\frac{\partial \psi}{\partial y_k}\frac{\partial^2 p}{\partial y_l\partial y_j}\right)\cdot\left(\sum_{r,\nu=1}^{n} a_{lr}\frac{\partial p}{\partial y_r}\right)dxdt. \end{aligned}$$

Seja

$$N_{11} = 2\sum_{l=1}^{n}\int_{Q_T} s\lambda\phi\left(\sum_{i,j,k=1}^{n} a_{kj}\frac{\partial \psi}{\partial y_k}\frac{\partial^2 p}{\partial y_l\partial y_j}\right)\cdot\left(\sum_{r,\nu=1}^{n} a_{lr}\frac{\partial p}{\partial y_r}\right)dxdt \tag{3.40}$$

Note que

$$\begin{aligned} \overline{N}_{11} = &\ 2\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{i,j,k=1}^{n} a_{kj}\frac{\partial \psi}{\partial y_k}\frac{\partial^2 p}{\partial y_l\partial y_j}\sum_{r,\nu=1}^{n} a_{lr}\frac{\partial p}{\partial y_r}\right) \\ = &\ 2\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{i,j,k=1}^{n} a_{kj}\frac{\partial \psi}{\partial y_k}\sum_{r,\nu=1}^{n} a_{lr}\frac{\partial p}{\partial y_r}\frac{\partial^2 p}{\partial y_j\partial y_l}\right) \\ = &\ 2\left(\sum_{i,j,k=1}^{n} a_{kj}\frac{\partial \psi}{\partial y_k}\sum_{l,r,\nu=1}^{n} a_{lr}\frac{\partial p}{\partial y_r}\frac{\partial^2 p}{\partial y_j\partial y_l}\right) \\ = &\ \sum_{i,j,k=1}^{n} a_{kj}\frac{\partial \psi}{\partial y_k}\Big(\sum_{l,r,\nu=1}^{n} a_{lr}\frac{\partial p}{\partial y_r}\frac{\partial^2 p}{\partial y_j\partial y_l} + \sum_{l,r,\nu=1}^{n} a_{lr}\frac{\partial p}{\partial y_r}\frac{\partial^2 p}{\partial y_j\partial y_l}\Big) \\ = &\ \sum_{i,j,k=1}^{n} a_{kj}\frac{\partial \psi}{\partial y_k}\Big(\sum_{l,r,\nu=1}^{n} a_{lr}\frac{\partial p}{\partial y_r}\frac{\partial^2 p}{\partial y_j\partial y_l} + \sum_{l,r,\nu=1}^{n} a_{lr}\frac{\partial p}{\partial y_l}\frac{\partial^2 p}{\partial y_j\partial y_r}\Big) \\ = &\ \sum_{i,j,k=1}^{n} a_{kj}\frac{\partial \psi}{\partial y_k}\Big(\sum_{l,r,\nu=1}^{n} a_{lr}\frac{\partial p}{\partial y_r}\frac{\partial^2 p}{\partial y_j\partial y_l} + \sum_{l,r,\nu=1}^{n} a_{lr}\frac{\partial p}{\partial y_l}\frac{\partial^2 p}{\partial y_j\partial y_r} \\ &\ \sum_{l,r,\nu=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j}(a_{lr})\frac{\partial p}{\partial y_r}\frac{\partial p}{\partial y_l} - \sum_{l,r,\nu=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j}(a_{lr})\frac{\partial p}{\partial y_r}\frac{\partial p}{\partial y_l}\Big). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\overline{N}_{11} = \sum_{i,j,k=1}^{n} a_{kj}\frac{\partial\psi}{\partial y_k}\frac{\partial}{\partial y_j}\sum_{l,r,\nu=1}^{n} a_{lr}\frac{\partial p}{\partial y_r}\frac{\partial p}{\partial y_l} - \sum_{i,j,k=1}^{n} a_{kj}\frac{\partial\psi}{\partial y_k}\sum_{l,r,\nu=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_j}(a_{lr})\frac{\partial p}{\partial y_l}\frac{\partial p}{\partial y_r}. \tag{3.41}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} N_{11} = & \int_{Q_T} s\lambda\phi\sum_{i,j,k=1}^{n} a_{kj}\frac{\partial\psi}{\partial y_k}\frac{\partial}{\partial y_j}\sum_{l,r,\nu=1}^{n} a_{lr}\frac{\partial p}{\partial y_r}\frac{\partial p}{\partial y_l}dxdt \\ & -\int_{Q_T} s\lambda\phi\sum_{i,j,k=1}^{n} a_{kj}\frac{\partial\psi}{\partial y_k}\sum_{l,r,\nu=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_j}(a_{lr})\frac{\partial p}{\partial y_l}\frac{\partial p}{\partial y_r}dxdt. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Integrando por partes temos que

$$\begin{aligned} N_{11} = & -\int_{Q_T} s\lambda\sum_{i,j,k=1}^{n} a_{kj}\frac{\partial\psi}{\partial y_k}\frac{\partial\phi}{\partial y_j}\sum_{l,r,\nu=1}^{n} a_{lr}\frac{\partial p}{\partial y_r}\frac{\partial p}{\partial y_l}dxdt \\ & -\int_{Q_T} s\lambda\phi\sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_j}\left(a_{kj}\frac{\partial\psi}{\partial y_k}\right)\sum_{l,r,\nu=1}^{n} a_{lr}\frac{\partial p}{\partial y_r}\frac{\partial p}{\partial y_l}dxdt \\ & +\int_{\Sigma_T} s\lambda\phi\sum_{i,j,k=1}^{n} a_{kj}\frac{\partial\psi}{\partial y_k}\eta_j\sum_{l,r,\nu=1}^{n} a_{lr}\frac{\partial p}{\partial y_r}\frac{\partial p}{\partial y_l}d\Sigma_T \\ & -\int_{Q_T} s\lambda\phi\sum_{i,j,k=1}^{n} a_{kj}\frac{\partial\psi}{\partial y_k}\sum_{l,r,\nu=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_j}(a_{lr})\frac{\partial p}{\partial y_l}\frac{\partial p}{\partial y_r}dxdt \\ = & -\int_{Q_T} s\lambda^2\phi\sum_{i,j,k=1}^{n} a_{kj}\frac{\partial\psi}{\partial y_k}\frac{\partial\psi}{\partial y_j}\sum_{l,r,\nu=1}^{n} a_{lr}\frac{\partial p}{\partial y_r}\frac{\partial p}{\partial y_l}dxdt \\ & -\int_{Q_T} s\lambda\phi|M\nabla p|^2\sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_j}\left(a_{kj}\frac{\partial\psi}{\partial y_k}\right)dxdt \\ & +\int_{\Sigma_T} s\lambda\phi|M\nabla p|^2(M\nabla\psi\cdot M\eta)d\Sigma_T \\ & -\int_{Q_T} s\lambda\phi\sum_{i,j,k=1}^{n} a_{kj}\frac{\partial\psi}{\partial y_k}\sum_{l,r,\nu=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_j}(a_{lr})\frac{\partial p}{\partial y_l}\frac{\partial p}{\partial y_r}dxdt \\ = & -\int_{Q_T} s\lambda^2\phi|M\nabla p|^2|M\nabla\psi|^2dxdt \\ & -\int_{Q_T} s\lambda\phi|M\nabla p|^2\sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_j}\left(a_{kj}\frac{\partial\psi}{\partial y_k}\right)dxdt \\ & +\int_{\Sigma_T} s\lambda\phi|M\nabla p|^2(M\nabla\psi\cdot M\eta)d\Sigma_T \\ & -\int_{Q_T} s\lambda\phi\sum_{i,j,k=1}^{n} a_{kj}\frac{\partial\psi}{\partial y_k}\sum_{l,r,\nu=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_j}(a_{lr})\frac{\partial p}{\partial y_l}\frac{\partial p}{\partial y_r}dxdt. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Pela análise de N_1 temos que $\nabla\psi = \eta(\nabla\psi\cdot\eta)$ e $\nabla p = \eta(\nabla p\cdot\eta)$ em Γ. Portanto,

$$
\begin{aligned}
N_{11} = & -\int_{Q_T} s\lambda^2\phi|M\nabla p|^2|M\nabla\psi|^2 dxdt \\
& -\int_{Q_T} s\lambda\phi|M\nabla p|^2 \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j}\left(a_{kj}\frac{\partial\psi}{\partial y_k}\right) dxdt \\
& +\int_{\Sigma_T} s\lambda\phi(\nabla\psi\cdot\eta)(\nabla p\cdot\eta)^2|M\eta|^4 d\Sigma_T \\
& -\int_{Q_T} s\lambda\phi \sum_{i,j,k=1}^{n} a_{kj}\frac{\partial\psi}{\partial y_k} \sum_{l,r,\nu=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j}(a_{lr})\frac{\partial p}{\partial y_l}\frac{\partial p}{\partial y_r} dxdt.
\end{aligned} \tag{3.44}
$$

Logo, temos que

$$
\begin{aligned}
N_2 = \; & 2\sum_{l=1}^{n}\int_{Q_T} s\lambda\phi\left(\sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_l}\left(a_{kj}\frac{\partial\psi}{\partial y_k}\right)\frac{\partial p}{\partial y_j}\right)\cdot\left(\sum_{r,\nu=1}^{n} a_{lr}\frac{\partial p}{\partial y_r}\right) dxdt \\
& -\int_{Q_T} s\lambda^2\phi|M\nabla p|^2|M\nabla\psi|^2 dxdt \\
& -\int_{Q_T} s\lambda\phi|M\nabla p|^2 \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j}\left(a_{kj}\frac{\partial\psi}{\partial y_k}\right) dxdt \\
& +\int_{\Sigma_T} s\lambda\phi(\nabla\psi\cdot\eta)(\nabla p\cdot\eta)^2|M\eta|^4 d\Sigma_T \\
& -\int_{Q_T} s\lambda\phi \sum_{i,j,k=1}^{n} a_{kj}\frac{\partial\psi}{\partial y_k} \sum_{l,r,\nu=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j}(a_{lr})\frac{\partial p}{\partial y_l}\frac{\partial p}{\partial y_r} dxdt.
\end{aligned} \tag{3.45}
$$

Segue de (3.38), (3.39) e (3.45) que

$$
\begin{aligned}
M_3 = \; & 2\int_{Q_T} s\lambda^2\phi(M\nabla p\cdot M\nabla\psi)^2 dxdt \\
& +2\sum_{l=1}^{n}\int_{Q_T} s\lambda\phi\left(\sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_l}\left(a_{kj}\frac{\partial\psi}{\partial y_k}\right)\frac{\partial p}{\partial y_j}\right)\cdot\left(\sum_{r,\nu=1}^{n} a_{lr}\frac{\partial p}{\partial y_r}\right) dxdt \\
& -\int_{Q_T} s\lambda^2\phi|M\nabla p|^2|M\nabla\psi|^2 dxdt \\
& -\int_{Q_T} s\lambda\phi|M\nabla p|^2 \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j}\left(a_{kj}\frac{\partial\psi}{\partial y_k}\right) dxdt \\
& -\int_{Q_T} s\lambda\phi \sum_{i,j,k=1}^{n} a_{kj}\frac{\partial\psi}{\partial y_k} \sum_{l,r,\nu=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j}(a_{lr})\frac{\partial p}{\partial y_l}\frac{\partial p}{\partial y_r} dxdt \\
& -\int_{\Sigma_T} \lambda\phi s(\nabla\psi\cdot\eta)(\nabla p\cdot\eta)^2|M\eta|^4 d\Sigma_T.
\end{aligned} \tag{3.46}
$$

Seja

$$
N = -\int_{\Sigma_T} \lambda\phi s(\nabla\psi\cdot\eta)(\nabla p\cdot\eta)^2|M\eta|^4 d\Sigma_T.
$$

Observe que $|u|^2|v|^2 - (u\cdot v)^2 \geqslant 0 \;\forall u, v \in \mathbb{R}^n$, também veja que existe $k_1 = \frac{1}{\alpha_0}$ tal que

$|\nabla p| \leqslant k_1|M\nabla p|$, e ainda que existe constante positiva K tal que

$$\begin{cases} \left|\frac{\partial}{\partial y_l}\left(a_{kj}\frac{\partial\psi}{\partial y_k}\right)\right| \leqslant K \\ |a_{lk}| \leqslant K \\ \left|\frac{\partial}{\partial y_j}\left(a_{kj}\frac{\partial\psi}{\partial y_k}\right)\right| \leqslant K \\ \left|\frac{\partial}{\partial y_j}(a_{lr})\right| \leqslant K. \end{cases} \tag{3.47}$$

Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned} |M_3 - N| \leqslant\ & \int_{Q_T} s\lambda^2\phi\left|(M\nabla p\cdot M\nabla\psi)^2 - |M\nabla p|^2|M\nabla\psi|^2\right| dxdt \\ & + \left|\int_{Q_T} s\lambda^2\phi(M\nabla p\cdot M\nabla\psi)^2 dxdt\right| \\ & +2\sum_{l=1}^{n}\int_{Q_T} s\lambda\phi\left(\sum_{i,j,k=1}^{n}\left|\frac{\partial}{\partial y_l}\left(a_{kj}\frac{\partial\psi}{\partial y_k}\right)\right|\left|\frac{\partial p}{\partial y_j}\right|\right)\cdot\left(\sum_{r,\nu=1}^{n}|a_{lr}|\left|\frac{\partial p}{\partial y_r}\right|\right) dxdt \\ & + \int_{Q_T} s\lambda\phi|M\nabla p|^2\sum_{i,j,k=1}^{n}\left|\frac{\partial}{\partial y_j}\left(a_{kj}\frac{\partial\psi}{\partial y_k}\right)\right| dxdt \\ & + \int_{Q_T} s\lambda\phi\sum_{i,j,k=1}^{n}\left|a_{kj}\frac{\partial\psi}{\partial y_k}\right|\sum_{l,r,\nu=1}^{n}\left|\frac{\partial}{\partial y_j}(a_{lr})\right|\left|\frac{\partial p}{\partial y_l}\right|\left|\frac{\partial p}{\partial y_r}\right| dxdt \\ \leqslant\ & \int_{Q_T} s\lambda^2\phi\left((-M\nabla p\cdot M\nabla\psi)^2 + |M\nabla p|^2|M\nabla\psi|^2\right) dxdt \\ & + \int_{Q_T} s\lambda^2\phi(M\nabla p\cdot M\nabla\psi)^2 dxdt \\ & +2\sum_{l=1}^{n}\int_{Q_T} s\lambda\phi\left(\sum_{i,j,k=1}^{n} K|\nabla p|\right)\cdot\left(\sum_{r,\nu=1}^{n} K|\nabla p|\right) dxdt \\ & + \int_{Q_T} s\lambda\phi|M\nabla p|^2\sum_{i,j,k=1}^{n} K dxdt \\ & + \int_{Q_T} s\lambda\phi\sum_{i,j,k=1}^{n} K\sum_{l,r,\nu=1}^{n} K|\nabla p|^2 dxdt \\ \leqslant\ & \int_{Q_T} s\lambda^2\phi|M\nabla p|^2|M\nabla\psi|^2 dxdt \\ & + (3K^2K_1^2n^6 + Kn^3)\int_{Q_T} s\lambda\phi|M\nabla p|^2 dxdt. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Como $N \geqslant 0$ implica $M_3 \geqslant M_3 - N$ e fazendo $\overline{C} = 3K^2K_1^2n^6 + Kn^3$ temos

$$M_3 \geqslant -\int_{Q_T} s\lambda^2\phi|M\nabla p|^2|M\nabla\psi|^2 dxdt - \overline{C}\int_{Q_T} s\lambda\phi|M\nabla p|^2 dxdt. \tag{3.49}$$

Análise de M_4

$$
\begin{aligned}
M_4 = & -2\int_{Q_T}\left[\lambda^3\phi^3 s^3 M\nabla p\cdot M\nabla\psi|M\nabla\psi|^2 p+\lambda^3\phi^2 s^2 M\nabla p\cdot M\nabla\psi|M\nabla\psi|^2 p\right]dxdt\\
= & \int_{Q_T}\left[\lambda^3\phi^3 s^3(2p\nabla p\cdot B\nabla\psi)|M\nabla\psi|^2+\lambda^3\phi^2 s^2\nabla p^2\cdot B\nabla\psi|M\nabla\psi|^2\right]dxdt\\
= & \int_{Q_T}\left[\lambda^3\phi^3 s^3(\nabla p^2\cdot B\nabla\psi)|M\nabla\psi|^2+\lambda^3\phi^2 s^2\nabla p^2\cdot B\nabla\psi|M\nabla\psi|^2\right]dxdt.
\end{aligned}
$$

Denotamos por

$$
A=\int_{Q_T}\left[(\nabla p^2\cdot B\nabla\psi)|M\nabla\psi|^2\phi^3\right]dxdt.
$$

Por outro lado, note que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}(\phi^3|M\nabla\psi|^2 B\nabla\psi p^2) = & \ \phi^3|M\nabla\psi|B\nabla\psi\cdot\nabla p^2+\nabla\phi\cdot B\nabla\psi|M\nabla\psi|^2 3p^2\phi^2+\\
& +p^2\phi^3[\nabla(|M\nabla\psi|^2)\cdot B\nabla\psi+|M\nabla\psi|^2(\nabla\cdot(B\nabla\psi))]\\
= & \ \phi^3|M\nabla\psi|B\nabla\psi\cdot\nabla p^2+\nabla\phi\cdot B\nabla\psi|M\nabla\psi|^2 3p^2\phi^2+\\
& +p^2\phi^3[\nabla(|M\nabla\psi|^2)\cdot B\nabla\psi+|M\nabla\psi|^2\tilde{A}^*\psi]\\
= & \ \phi^3|M\nabla\psi|B\nabla\psi\cdot\nabla p^2+\nabla\phi\cdot B\nabla\psi|M\nabla\psi|^2 3p^2\phi^2+p^2\phi^3 F
\end{aligned}
$$

onde $F=\nabla(|M\nabla\psi|^2)\cdot B\nabla\psi+|M\nabla\psi|^2\tilde{A}^*\psi$.

Também temos pelo fato de $p=0$ em Σ_T e pelo teorema da divergência que

$$
\begin{aligned}
0 = & \int_{\Sigma_T}(p^2\phi^3|M\nabla\psi|^2 B\nabla\psi)\cdot\eta d\Sigma_T\\
= & \int_{Q_T}\mathrm{div}(\phi^3|M\nabla\psi|^2 B\nabla\psi dtp^2)dx\\
= & \int_{Q_T}\phi^3|M\nabla\psi|B\nabla\psi\cdot\nabla p^2 dxdt+\int_{Q_T}(\nabla\phi\cdot B\nabla\psi)|M\nabla\psi|^2 3p^2\phi^2 dxdt+\\
& +\int_{Q_T}p^2\phi^3 F dxdt\\
= & \int_{Q_T}\phi^3|M\nabla\psi|B\nabla\psi\cdot\nabla p^2 dxdt+\int_{Q_T}(\lambda\phi\nabla\psi\cdot B\nabla\psi)|M\nabla\psi|^2 3p^2\phi^2 dxdt+\\
& +\int_{Q_T}p^2\phi^3 F dxdt\\
= & \ A-\int_{Q_T}3\lambda p^2\phi^3(M\nabla\psi\cdot M\nabla\psi)|M\nabla\psi|^2 dxdt+\int_{Q_T}p^2\phi^3 F dxdt
\end{aligned}
$$

$$
\therefore\ A=\int_{Q_T}3\lambda p^2\phi^3|M\nabla\psi|^4 dxdt-\int_{Q_T}p^2\phi^3 F dxdt. \tag{3.50}
$$

Seja

$$
B=\int_{Q_T}\phi^2|M\nabla\psi|^2 B\nabla\psi\cdot\nabla p^2 dxdt
$$

Analogamente temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\phi^2|M\nabla\psi|^2 B\nabla\psi p^2) = \ & \phi^2|M\nabla\psi|B\nabla\psi\cdot\nabla p^2 + \nabla\phi\cdot B\nabla\psi|M\nabla\psi|^2 2p^2\phi + \\
&+ p^2\phi^2[\nabla(|M\nabla\psi|^2)\cdot B\nabla\psi + |M\nabla\psi|^2(\nabla\cdot(B\nabla\psi))] \\
= \ & \phi^2|M\nabla\psi|B\nabla\psi\cdot\nabla p^2 + \nabla\phi\cdot B\nabla\psi|M\nabla\psi|^2 2p^2\phi + \\
&+ p^2\phi^2[\nabla(|M\nabla\psi|^2)\cdot B\nabla\psi + |M\nabla\psi|^2\tilde{A}^*\psi] \\
= \ & \phi^2|M\nabla\psi|B\nabla\psi\cdot\nabla p^2 + \nabla\phi\cdot B\nabla\psi|M\nabla\psi|^2 2p^2\phi + p^2\phi^2 F
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
0 = \ & \int_{\Sigma_T}(p^2\phi^2|M\nabla\psi|^2 B\nabla\psi)\cdot\eta d\Sigma_T \\
= \ & \int_{Q_T}\operatorname{div}(\phi^2|M\nabla\psi|^2 B\nabla\psi dt p^2)dx \\
= \ & \int_{Q_T}\phi^2|M\nabla\psi|B\nabla\psi\cdot\nabla p^2 dxdt + \int_{Q_T}(\nabla\phi\cdot B\nabla\psi)|M\nabla\psi|^2 2p^2\phi dxdt + \\
&+ \int_{Q_T} p^2\phi^2 F dxdt \\
= \ & \int_{Q_T}\phi^2|M\nabla\psi|B\nabla\psi\cdot\nabla p^2 dxdt + \int_{Q_T}(\lambda\phi\nabla\psi\cdot B\nabla\psi)|M\nabla\psi|^2 2p^2\phi dxdt + \\
&+ \int_{Q_T} p^2\phi^2 F dxdt \\
= \ & B - \int_{Q_T} 2\lambda p^2\phi^2(M\nabla\psi\cdot M\nabla\psi)|M\nabla\psi|^2 dxdt + \int_{Q_T} p^2\phi^2 F dxdt
\end{aligned}$$

$$\therefore \ B = \int_{Q_T} 2\lambda p^2\phi^2|M\nabla\psi|^4 dxdt - \int_{Q_T} p^2\phi^2 F dxdt. \tag{3.51}$$

Logo, de (3.50) e (3.51) concluímos que

$$M_4 = \int_{Q_T}\lambda^4(3p^2\phi^3 s^3 + 2p^2\phi^2 s^2)|M\nabla\psi|^4 dxdt - \int_{Q_T}\lambda^3(p^2\phi^2 s^2 + p^2\phi^3 s^3)F dxdt.$$

Como $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$, temos

$$|F| \leqslant C$$

portanto,

$$|M_4 - \int_{Q_T}\lambda^4(3p^2\phi^3 s^3 + 2p^2\phi^2 s^2)|M\nabla\psi|^4 dxdt| \leqslant C\int_{Q_T}\lambda^3(p^2\phi^2 s^2 + p^2\phi^3 s^3)dxdt.$$

Logo,

$$M_4 \geqslant \int_{Q_T}\lambda^4(3p^2\phi^3 s^3 + 2p^2\phi^2 s^2)|M\nabla\psi|^4 dxdt - C\int_{Q_T}\lambda^3(p^2\phi^2 s^2 + p^2\phi^3 s^3)dxdt. \tag{3.52}$$

Análise de M_5

Temos que

$$\begin{aligned} M_5 = & \; 2\int_{Q_T} \left[p\lambda\phi s^2\alpha_t M\nabla p \cdot M\nabla\psi + s^2\lambda^2\phi|M\nabla\psi|^2 p^2\alpha_t\right] dxdt \\ = & \; -\int_{Q_T} \lambda\phi s^2\alpha_t\nabla p^2 \cdot B\nabla\psi dxdt + 2\int_{Q_T} s^2\lambda^2\phi|M\nabla\psi|^2 p^2\alpha_t dxdt. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Denotamos por

$$D = -\int_{Q_T} \phi\alpha_t(\nabla p^2 \cdot B\nabla\psi)dxdt. \tag{3.54}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(p^2\phi\alpha_t B\nabla\psi) = & \; \phi\alpha_t\nabla p^2 \cdot B\nabla\psi + p^2\alpha_t(B\nabla\psi\cdot\nabla\phi) \\ & +p^2\phi\nabla\alpha_t \cdot B\nabla\psi + p^2\phi\alpha_t\nabla\cdot B\nabla\psi \\ = & \; \phi\alpha_t\nabla p^2 \cdot B\nabla\psi + p^2\alpha_t\lambda\phi(B\nabla\psi\cdot\nabla\psi) \\ & +p^2\phi(\nabla\alpha)_t \cdot B\nabla\psi + p^2\phi\alpha_t\tilde{A}^*\psi \\ = & \; \phi\alpha_t\nabla p^2 \cdot B\nabla\psi - p^2\alpha_t\lambda\phi|M\nabla\psi|^2 \\ & +\lambda p^2\phi\phi_t\nabla\psi \cdot B\nabla\psi + p^2\phi\alpha_t\tilde{A}^*\psi. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} 0 = & \int_{\Sigma_T} p^2 \cdot \phi\alpha_t B\nabla\psi \cdot \eta\Sigma_T \\ = & \int_{Q_T} \operatorname{div}(p^2\phi\alpha_t B\nabla\psi)dxdt \\ = & \int_{Q_T} \phi\alpha_t\nabla p^2 \cdot B\nabla\psi dxdt - \int_{Q_T} p^2\alpha_t\lambda\phi|M\nabla\psi|^2 dxdt \\ & -\int_{Q_T} \lambda p^2\phi\phi_t M\nabla\psi \cdot M\nabla\psi dxdt + \int_{Q_T} p^2\phi\alpha_t\tilde{A}^*\psi dxdt \\ = & \int_{Q_T} \phi\alpha_t\nabla p^2 \cdot B\nabla\psi dxdt - \int_{Q_T} p^2\alpha_t\lambda\phi|M\nabla\psi|^2 dxdt \\ & -\int_{Q_T} \lambda p^2\phi\phi_t|M\nabla\psi|^2 dxdt + \int_{Q_T} p^2\phi\alpha_t\tilde{A}^*\psi dxdt \end{aligned}$$

$$\therefore \;\; D = \int_{Q_T} p^2\alpha_t\lambda\phi|M\nabla\psi|^2 dxdt + \int_{Q_T} \lambda p^2\phi\phi_t|M\nabla\psi|^2 dxdt - \int_{Q_T} p^2\phi\alpha_t\tilde{A}^*\psi dxdt. \tag{3.55}$$

Substituindo (3.55) em (3.53), temos

$$\begin{aligned} M_5 = & \int_{Q_T} s^2\lambda(\alpha_t\lambda\phi|M\nabla\psi|^2p^2 + \lambda p^2\phi\phi_t|M\nabla\psi|^2 - p^2\phi\alpha_t\tilde{A}^*\psi)dxdt \\ & +2\int_{Q_T} s^2\lambda^2\phi|M\nabla\psi|^2p^2\alpha_t dxdt \\ = & \int_{Q_T} s^2\lambda(\lambda p^2\phi\phi_t|M\nabla\psi|^2 - p^2\phi\alpha_t\tilde{A}^*\psi)dxdt + 3\int_{Q_T} s^2\lambda^2\phi|M\nabla\psi|^2p^2\alpha_t dxdt. \end{aligned}$$

Segue da Observação 3.1 e do fato de existir $\overline{C}$ com a propriedade $|M\nabla\psi|^2 \leqslant \overline{C}$, $|\widetilde{A}^*\psi| \leqslant \overline{C}$ que

$$\begin{aligned}|M_5| &\leqslant \int_{Q_T} s^2\lambda(\lambda p^2|\phi||\phi_t||M\nabla\psi|^2 + p^2|\phi||\alpha_t||\tilde{A}^*\psi|)dxdt + 3\int_{Q_T} s^2\lambda^2|\phi||M\nabla\psi|^2p^2|\alpha_t|dxdt \\ &\leqslant C\overline{C}\left(\int_{Q_T}(s^2\lambda^2p^2|\phi|^3 + s^2p^2\lambda|\phi|^3 + 3s^2\lambda^2|\phi|^3p^2)dxdt\right) \\ &\leqslant \widetilde{C}\left(\int_{Q_T}(s^2\lambda^2p^2|\phi|^3 + s^2p^2\lambda|\phi|^3)dxdt\right).\end{aligned}$$

Portanto, considerando $\widetilde{C} = 4C\overline{C}$, temos

$$M_5 \geqslant -\widetilde{C}\left(\int_{Q_T}(s^2\lambda^2p^2|\phi|^3 + s^2p^2\lambda|\phi|^3)dxdt\right). \tag{3.56}$$

Segue de (3.36), (3.32),(3.49), (3.52) e de (3.56) que

$$\begin{aligned}&M_1 \geqslant -C\int_{Q_T} s\phi(\lambda^4+\lambda^2)p^2dxdt + \frac{3}{2}\int_{Q_T} s\lambda^2\phi|M\nabla\psi|^2|M\nabla p|^2dxdt \\ &M_2 = -2\int_{Q_T}\lambda^4\phi^3s^3|M\nabla\psi|^4p^2dxdt - 2\int_{Q_T}\lambda^4\phi^2s^2|M\nabla\psi|^4p^2dxdt \\ &M_3 \geqslant -\int_{Q_T} s\lambda^2\phi|M\nabla p|^2|M\nabla\psi|^2dxdt - C\int_{Q_T} s\lambda\phi|M\nabla p|^2dxdt \\ &M_4 \geqslant \int_{Q_T}\lambda^4(3p^2\phi^3s^3 + 2s^2p^2\phi^2)|M\nabla\psi|^4dxdt - C\int_{Q_T}\lambda^3(p^2\phi^2s^2 + p^2\phi^3s^3)dxdt \\ &M_5 \geqslant -C\left(\int_{Q_T}(s^2\lambda^2p^2|\phi|^3 + s^2p^2\lambda|\phi|^3)dxdt\right).\end{aligned} \tag{3.57}$$

Lembrando que $X = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5$, segue de (3.31) e (3.57) que

$$\begin{aligned}&-C\int_{Q_T} s\phi(\lambda^4+\lambda^2)p^2dxdt + \frac{1}{2}\int_{Q_T} s\lambda^2\phi|M\nabla\psi|^2|M\nabla p|^2dxdt - C\int_{Q_T} s\lambda\phi|M\nabla p|^2dxdt \\ &+\int_{Q_T}\lambda^4p^2\phi^3s^3|M\nabla\psi|^4dxdt - C\int_{Q_T}\lambda^3(p^2\phi^2s^2 + s^3p^2\phi^3)dxdt \\ &-C\int_{Q_T}(s^2\lambda^2p^2|\phi|^3 + s^2p^2\lambda|\phi|^3)dxdt \leqslant \int_{Q_T}|e^{s\alpha}f|^2dxdt + C\int_{Q_T}|\nabla p|^2dxdt \\ &+C\int_{Q_T}[\lambda^2(s^2\phi^2 + s^2\phi^3) + s\phi^3 + 1]p^2dxdt.\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_{Q_T} s\lambda^2\phi|M\nabla\psi|^2|M\nabla p|^2dxdt + \int_{Q_T}\lambda^4p^2\phi^3s^3|M\nabla\psi|^4dxdt \leqslant C\int_{Q_T} s\lambda\phi|M\nabla p|^2dxdt \\ &+C\int_{Q_T} s\phi(\lambda^4+\lambda^2)p^2dxdt + C\int_{Q_T}\lambda^3(p^2\phi^2s^2 + s^3p^2\phi^3)dxdt + C\int_{Q_T}|\nabla p|^2dxdt \\ &+C\int_{Q_T}(s^2\lambda^2p^2|\phi|^3 + s^2p^2\lambda|\phi|^3)dxdt + \int_{Q_T} e^{2s\alpha}|f|^2dxdt \\ &+C\int_{Q_T}[\lambda^2(s^2\phi^2 + s^2\phi^3) + s\phi^3 + 1]p^2dxdt.\end{aligned} \tag{3.58}$$

Considerando $\lambda \geqslant \lambda_0 \geqslant 1$, e $\lambda^4 s \geqslant \lambda^4 + \lambda^2$ e C_1 tal que $C_1 \leqslant \phi$, temos

$$C_1^2 s\phi(\lambda^4+\lambda^2) \leqslant s^2\lambda^4 p^2\phi^3$$
$$C_1\lambda^3 s^3\phi^2 p^2 \leqslant \lambda^3 s^3\phi^3 p^2.$$

Tome $m = \min\{C_1, C_1^2\}$, logo

$$\begin{aligned} ms\phi(\lambda^4+\lambda^2) &\leqslant s^2\lambda^4 p^2\phi^3 \\ m\lambda^3 s^3\phi^2 p^2 &\leqslant \lambda^3 s^3\phi^3 p^2. \end{aligned} \tag{3.59}$$

Segue de (3.58) e (3.59) que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_{Q_T} s\lambda^2\phi|M\nabla\psi|^2|M\nabla p|^2 dxdt + \int_{Q_T}\lambda^4 p^2\phi^3 s^3|M\nabla\psi|^4 dxdt \leqslant C\int_{Q_T} s\lambda\phi|M\nabla p|^2 dxdt \\ &+\frac{C}{m}\int_{Q_T} ms\phi(\lambda^4+\lambda^2)p^2 dxdt + \frac{C}{m}\int_{Q_T} m\lambda^3 p^2\phi^2 s^2 dxdt + C\int_{Q_T}\lambda^3 s^3 p^2\phi^3 dxdt \\ &+\frac{Ck_1^2}{m}\int_{Q_T} m|M\nabla p|^2 dxdt + C\int_{Q_T}(s^2\lambda^2 p^2|\phi|^3 + s^2p^2\lambda|\phi|^3)dxdt + \frac{C}{m}\int_{Q_T} m\lambda^2 s^2\phi^2 p^2 dxdt \\ &+C\int_{Q_T}\lambda^2 s^2\phi^3 p^2 dxdt + C\int_{Q_T} s\phi^3 p^2 dxdt + \frac{C}{m^3}\int_{Q_T} m^3 p^2 dxdt + \int_{Q_T} e^{2s\alpha}|f|^2 dxdt \end{aligned} \tag{3.60}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_{Q_T} s\lambda^2\phi|M\nabla\psi|^2|M\nabla p|^2 dxdt + \int_{Q_T}\lambda^4 p^2\phi^3 s^3|M\nabla\psi|^4 dxdt \leqslant C\int_{Q_T} s\lambda\phi|M\nabla p|^2 dxdt \\ &+\frac{C}{m}\int_{Q_T} s^2\phi^3\lambda^4 p^2 dxdt + \frac{C}{m}\int_{Q_T}\lambda^4 p^2\phi^3 s^2 dxdt + 2C\int_{Q_T}\lambda^3 s^3 p^2\phi^3 dxdt \\ &+\frac{Ck_1^2}{m}\int_{Q_T} s\lambda\phi|M\nabla p|^2 dxdt + C\int_{Q_T}(s^2\lambda^4 p^2|\phi|^3 + s^2p^2\lambda^4|\phi|^3)dxdt + \frac{C}{m}\int_{Q_T}\lambda^4 s^2\phi^3 p^2 dxdt \\ &+C\int_{Q_T} s^2\lambda^4\phi^3 p^2 dxdt + \frac{C}{m^3}\int_{Q_T}\phi^3 p^2 dxdt + \int_{Q_T} e^{2s\alpha}|f|^2 dxdt. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Portanto, considerando $K = \max\{3C + 3\frac{C}{m}, 2C, C + \frac{Ck_1^2}{m}, \frac{C}{m^3}, 1\}$, temos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_{Q_T} s\lambda^2\phi|M\nabla\psi|^2|M\nabla p|^2 dxdt + \int_{Q_T}\lambda^4 p^2\phi^3 s^3|M\nabla\psi|^4 dxdt \leqslant K\Big(\int_{Q_T} e^{2s\alpha}|f|^2 dxdt \\ &+\int_{Q_T}(s^2\phi^3\lambda^4 p^2 + \lambda^3 s^3 p^2\phi^3 + \phi^3 p^2)dxdt + \int_{Q_T} s\lambda\phi|M\nabla p|^2 dxdt\Big). \end{aligned} \tag{3.62}$$

Temos que $|\nabla\psi| > 0$ em $\partial\Omega$. Então, segue que $|\nabla\psi| > 0$ em $\partial\Omega \cup (\Omega - \omega_0)$, que é compacto. Então, existe $\gamma > 0$ tal que $0 < \gamma < |\nabla\psi|$ para todo $x \in \partial\Omega \cup (\Omega - \omega_0)$.Lembrando que existe k_1 tal que $|\nabla\psi| \leqslant k_1|M\nabla\psi|$. Tomando

$k = \min\{\gamma^2, \gamma^4\}$, $\bar{k} = \max\{k_1^4, k_1^2\}$ e utilizando (3.62), tem-se

$$
\begin{aligned}
& k \int_{Q_T - Q_{\omega_0}} (s^3\lambda^4\phi^3 p^2 + s\lambda^2\phi|M\nabla p|^2)dxdt \\
& \leqslant \int_{Q_T - Q_{\omega_0}} (\gamma^4 s^3\lambda^4\phi^3 p^2 + \gamma^2 s\lambda^2\phi|M\nabla p|^2)dxdt \\
& \leqslant \int_{Q_T - Q_{\omega_0}} (|\nabla\psi|^4 s^3\lambda^4\phi^3 p^2 + |\nabla\psi|^2 s\lambda^2\phi|M\nabla p|^2)dxdt \\
& \leqslant k_1^4 \int_{Q_T - Q_{\omega_0}} |M\nabla\psi|^4 s^3\lambda^4\phi^3 p^2 dxdt + k_1^2 \int_{Q_T - Q_{\omega_0}} |M\nabla\psi|^2 s\lambda^2\phi|M\nabla p|^2 dxdt \\
& \leqslant \bar{k}\left(2\int_{Q_T - Q_{\omega_0}} |M\nabla\psi|^4 s^3\lambda^4\phi^3 p^2 dxdt + \int_{Q_T - Q_{\omega_0}} |M\nabla\psi|^2 s\lambda^2\phi|M\nabla p|^2 dxdt\right) \\
& = 2\bar{k}\left(\int_{Q_T - Q_{\omega_0}} |M\nabla\psi|^4 s^3\lambda^4\phi^3 p^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_{Q_T - Q_{\omega_0}} |M\nabla\psi|^2 s\lambda^2\phi|M\nabla p|^2 dxdt\right) \\
& \leqslant 2\bar{k}\left(\int_{Q_T} |M\nabla\psi|^4 s^3\lambda^4\phi^3 p^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_{Q_T} |M\nabla\psi|^2 s\lambda^2\phi|M\nabla p|^2 dxdt\right) \\
& \leqslant 2\bar{k}K\Big(\int_{Q_T} e^{2s\alpha}|f|^2 dxdt + \int_{Q_T} (s^2\phi^3\lambda^4 p^2 + \lambda^3 s^3 p^2\phi^3 + \phi^3 p^2)dxdt + \int_{Q_T} s\lambda\phi|M\nabla p|^2 dxdt\Big).
\end{aligned}
$$

Faça $C = \frac{2\bar{k}K}{k}$. Para $s \geqslant \lambda$ e $\lambda \geqslant \max\{2(3C+1), \lambda_0\} \geqslant 1$, onde λ_0 é suficientemente grande. Logo,

$$
\begin{aligned}
& \int_{Q_T - Q_{\omega_0}} (s^3\lambda^4\phi^3 p^2 + s\lambda^2\phi|M\nabla p|^2)dxdt \\
& \leqslant C\Big(\int_{Q_T} e^{2s\alpha}|f|^2 dxdt + \int_{Q_T} (s^2\phi^3\lambda^4 p^2 + \lambda^3 s^3 p^2\phi^3 + \phi^3 p^2)dxdt + \int_{Q_T} s\lambda\phi|M\nabla p|^2 dxdt\Big) \\
& \leqslant C\Big(\int_{Q_T} e^{2s\alpha}|f|^2 dxdt + 3\int_{Q_T} s^3\phi^3\lambda^3 p^2 dxdt + \int_{Q_T} s\lambda\phi|M\nabla p|^2 dxdt\Big) \\
& \leqslant (3C+1)\Big(\int_{Q_T} e^{2s\alpha}|f|^2 dxdt + \int_{Q_{\omega_0}} \big(s^3\phi^3\lambda^3 p^2 + s\lambda\phi|M\nabla p|^2 dxdt\big)\Big) \\
& (3C+1)\int_{Q_T - Q_{\omega_0}} \big(s^3\phi^3\lambda^3 p^2 + s\lambda\phi|M\nabla p|^2\big)\, dxdt \\
& \leqslant (3C+1)\Big(\int_{Q_T} e^{2s\alpha}|f|^2 dxdt + \int_{Q_{\omega_0}} \big(s^3\phi^3\lambda^3 p^2 + s\lambda\phi|M\nabla p|^2 dxdt\big)\Big) \\
& + \frac{1}{2}\int_{Q_T - Q_{\omega_0}} \big(s^3\phi^3\lambda^4 p^2 + s\lambda^2\phi|M\nabla p|^2\big)\, dxdt.
\end{aligned}
$$

Fazendo $\overline{C} = 3C + 1$ segue que

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\int_{Q_T - Q_{\omega_0}} (s^3\lambda^4\phi^3 p^2 + s\lambda^2\phi|M\nabla p|^2)dxdt \\
& \leqslant \overline{C}\Big(\int_{Q_T} e^{2s\alpha}|f|^2 dxdt + \int_{Q_{\omega_0}} \big(s^3\phi^3\lambda^3 p^2 + s\lambda\phi|M\nabla p|^2 dxdt\big)\Big) \\
& \leqslant \overline{C}\Big(\int_{Q_T} e^{2s\alpha}|f|^2 dxdt + \frac{1}{\overline{C}}\int_{Q_{\omega_0}} \big(s^3\phi^3\lambda^4 p^2 + s\lambda^2\phi|M\nabla p|^2 dxdt\big)\Big) \\
& \leqslant \overline{C}\int_{Q_T} e^{2s\alpha}|f|^2 dxdt + \int_{Q_{\omega_0}} \big(s^3\phi^3\lambda^4 p^2 + s\lambda^2\phi|M\nabla p|^2 dxdt\big)\,.
\end{aligned}
$$

Lembrando que $\int_{Q_T - Q_{\omega_0}} h dxdt = \int_{Q_T} h dxdt - \int_{Q_{\omega_0}} h dxdt$, temos

$$\begin{aligned}&\int_{Q_T} (s^3\lambda^4\phi^3 p^2 + s\lambda^2\phi|M\nabla p|^2)dxdt\\ &\leqslant 3\int_{Q_{\omega_0}} (s^3\lambda^4\phi^3 p^2 + s\lambda^2\phi|M\nabla p|^2)dxdt + 2\overline{C}\int_{Q_T} e^{2s\alpha}|f|^2 dxdt.\end{aligned}$$

Tomando $C = 3 + 2\overline{C}$, temos que

$$\begin{aligned}&\int_{Q_T} (s^3\lambda^4\phi^3 p^2 + s\lambda^2\phi|M\nabla p|^2)dxdt\\ &\leqslant C\left(\int_{Q_T} e^{2s\alpha}|f|^2 dxdt + \int_{Q_{\omega_0}} (s^3\lambda^4\phi^3 p^2 + s\lambda^2\phi|M\nabla p|^2)dxdt\right).\end{aligned} \tag{3.63}$$

3.3 Retornando para as Variáveis Originais

Temos que $p = e^{s\alpha}$, então $\nabla p = s\nabla\alpha e^{s\alpha} w + e^{s\alpha}\nabla w$. Logo,

$$\begin{aligned}|M\nabla p|^2 = \;& s^2|M\nabla\alpha|^2 e^{2s\alpha}w^2 + e^{2s\alpha}|M\nabla w|^2 + 2se^{2s\alpha}w(M\nabla\alpha\cdot M\nabla w)\\ \leqslant\;& s^2|M\nabla\alpha|^2 e^{2s\alpha}w^2 + e^{2s\alpha}|M\nabla w|^2 + 2se^{2s\alpha}w|M\nabla\alpha||M\nabla w|\\ \leqslant\;& s^2|M\nabla\alpha|^2 e^{2s\alpha}w^2 + e^{2s\alpha}|M\nabla w|^2 + s^2e^{2s\alpha}w^2|M\nabla\alpha| + e^{2s\alpha}|M\nabla w|\\ \leqslant\;& 2s^2|M\nabla\alpha|^2 e^{2s\alpha}w^2 + 2e^{2s\alpha}|M\nabla w|^2.\end{aligned} \tag{3.64}$$

Lembrando ainda que $M\nabla\alpha = \lambda\phi M\nabla\psi$ e veja que $|M\nabla\alpha|^2 \leqslant \lambda^2\phi^2||M\nabla\psi||_\infty^2$, fazendo $C_1 = ||M\nabla\psi||_\infty^2$ e $C_2 = \max\{2C_1, 2\}$, teremos

$$|M\nabla p|^2 \leqslant \;C_2 e^{2s\alpha}(\phi^2\lambda^2 w^2 s^2 + |M\nabla w|^2). \tag{3.65}$$

De $M\nabla p = sM\nabla\alpha p + e^{s\alpha}M\nabla w$ segue que

$$|M\nabla p|^2 = s^2|M\nabla\alpha|^2 p^2 + e^{2s\alpha}|M\nabla w|^2 + 2se^{s\alpha}p(M\nabla\alpha\cdot M\nabla w). \tag{3.66}$$

Substituindo (3.65) e (3.66) no primeiro e segundo membro da desigualdade (3.63), respectivamente. Tomando $k = \max\{C, C(C_2+1), CC_2\}$ e substituindo $p = e^{s\alpha}w$ em ambos os membros teremos

$$\begin{aligned}&\int_{Q_T} (e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3 w^2 + s\lambda^2\phi(s^2|M\nabla\alpha|^2p^2 + e^{2s\alpha}|M\nabla w|^2 + 2se^{s\alpha}p(M\nabla\alpha\cdot M\nabla w)))dxdt\\ &\leqslant C\left(\int_{Q_T} e^{2s\alpha}|f|^2dxdt + \int_{Q_{\omega_0}} (e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3w^2 + s\lambda^2\phi C_2 e^{2s\alpha}(\phi^2\lambda^2w^2s^2 + |M\nabla w|^2))dxdt\right)\\ &\leqslant C\left(\int_{Q_T} e^{2s\alpha}|f|^2dxdt + \int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha}(C_2+1)s^3\lambda^4\phi^3w^2 + C_2se^{2s\alpha}\lambda^2\phi|M\nabla w|^2dxdt\right)\\ &\leqslant k\left(\int_{Q_T} e^{2s\alpha}|f|^2dxdt + \int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3w^2 + e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|M\nabla w|^2dxdt\right).\end{aligned} \tag{3.67}$$

Denotaremos por

$$F = k\left(\int_{Q_T} e^{2s\alpha}|f|^2 dxdt + \int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\varphi^3 w^2 + e^{2s\alpha}s\lambda^2\varphi|M\nabla w|^2 dxdt\right). \tag{3.68}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}\left|\int_{Q_T} 2s^2\lambda^2\varphi e^{s\alpha}p(M\nabla\alpha\cdot M\nabla w)dxdt\right| &\leqslant \int_{Q_T} 2s^2\lambda^2\varphi e^{s\alpha}p|M\nabla\alpha||M\nabla w|dxdt\\ &= \int_{Q_T} s\lambda^2\varphi(2sp|M\nabla\alpha|)(e^{s\alpha}|M\nabla w|)dxdt\\ &\leqslant \int_{Q_T} s\lambda^2\varphi(2s^2p^2|M\nabla\alpha|^2 + \frac{1}{2}e^{2s\alpha}|M\nabla w|^2)dxdt.\end{aligned} \tag{3.69}$$

Dessa forma temos

$$\begin{aligned}&\int_{Q_T} 2s^2\lambda^2\varphi e^{s\alpha}p(M\nabla\alpha\cdot M\nabla w)dxdt + \int_{Q_T} s^3\lambda^2\varphi|M\nabla\alpha|^2p^2 dxdt \geqslant\\ &-\int_{Q_T} s\lambda^2\varphi(s^2p^2|M\nabla\alpha|^2 + \frac{1}{2}e^{2s\alpha}|M\nabla w|^2)dxdt.\end{aligned} \tag{3.70}$$

segue de (3.67) e (3.70) que

$$\begin{aligned}&\int_{Q_T}(s^3\lambda^4\varphi^3w^2 + s\lambda^2\varphi|M\nabla w|^2)dxdt\\ &= \int_{Q_T} s^3\lambda^4\varphi^3 w^2 dxdt + \int_{Q_T} s\lambda^2\varphi|M\nabla w|^2 dxdt\\ &-\int_{Q_T} s\lambda^2\varphi(s^2p^2|M\nabla\alpha|^2 + \frac{1}{2}e^{2s\alpha}|M\nabla w|^2)dxdt\\ &+\int_{Q_T} s\lambda^2\varphi(s^2p^2|M\nabla\alpha|^2 + \frac{1}{2}e^{2s\alpha}|M\nabla w|^2)dxdt\\ &\leqslant \int_{Q_T} s^3\lambda^4\varphi^3 w^2 dxdt + \int_{Q_T} s\lambda^2\varphi|M\nabla w|^2 dxdt\\ &+\int_{Q_T} 2s^2\lambda^2\varphi e^{s\alpha}p(M\nabla\alpha\cdot M\nabla w)dxdt + \int_{Q_T} s^3\lambda^2\varphi|M\nabla\alpha|^2p^2 dxdt\\ &+\int_{Q_T} s\lambda^2\varphi(s^2p^2|M\nabla\alpha|^2 + \frac{1}{2}e^{2s\alpha}|M\nabla w|^2)dxdt.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}&\int_{Q_T}(s^3\lambda^4\varphi^3w^2 + s\lambda^2\varphi|M\nabla w|^2)dxdt\\ &\leqslant F + \int_{Q_T} s\lambda^2\varphi(s^2p^2|M\nabla\alpha|^2 + \frac{1}{2}e^{2s\alpha}|M\nabla w|^2)dxdt.\end{aligned} \tag{3.71}$$

Utilizando (3.63) e (3.65) de forma análoga ao que foi feito em (3.67) e lembrando que

$|M\nabla\alpha|^2 \leqslant \lambda^2\phi^2 C_1$, temos que

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_T} \lambda^2\phi s^3 p^2 |M\nabla\alpha|^2 dxdt \leqslant C_1 \int_{Q_T} \lambda^4\phi^3 s^3 p^2 dxdt \\
&\leqslant C_1 \left[C \left(\int_{Q_T} e^{2s\alpha}|f|^2 dxdt + \int_{Q_{\omega_0}} (s^3\lambda^4\phi^3 p^2 + s\lambda^2\phi|M\nabla p|^2) dxdt \right) \right] \\
&\leqslant C_1 \left[k \left(\int_{Q_T} e^{2s\alpha}|f|^2 dxdt + \int_{Q_{\omega_0}} (e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3 w^2 + e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|M\nabla w|^2) dxdt \right) \right] \\
&= C_1 F.
\end{aligned} \tag{3.72}$$

Substituindo (3.72) em (3.71) temos

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_T} (s^3\lambda^4\phi^3 w^2 + s\lambda^2\phi|M\nabla w|^2) dxdt \\
&\leqslant F + C_1 F + \frac{1}{2}\int_{Q_T} s\lambda^2\phi e^{2s\alpha}|M\nabla w|^2 dxdt.
\end{aligned} \tag{3.73}$$

Dessa forma temos

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_T} (s^3\lambda^4\phi^3 w^2 + \frac{1}{2}s\lambda^2\phi|M\nabla w|^2) dxdt \\
&\leqslant (C_1 + 1)F.
\end{aligned} \tag{3.74}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_T} (s^3\lambda^4\phi^3 w^2 + s\lambda^2\phi|M\nabla w|^2) dxdt \\
&\leqslant \int_{Q_T} (2s^3\lambda^4\phi^3 w^2 + s\lambda^2\phi|M\nabla w|^2) dxdt \\
&= 2\int_{Q_T} (s^3\lambda^4\phi^3 w^2 + \frac{1}{2}s\lambda^2\phi|M\nabla w|^2) dxdt \\
&\leqslant 2(C_1 + 1)F.
\end{aligned} \tag{3.75}$$

Fazendo $C = 2(C_1 + 1)K$, tem-se

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_T} (s^3\lambda^4\phi^3 w^2 + s\lambda^2\phi|M\nabla w|^2) dxdt \\
&\leqslant C \left(\int_{Q_T} e^{2s\alpha}|f|^2 dxdt + \int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3 w^2 + e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|M\nabla w|^2 dxdt \right).
\end{aligned} \tag{3.76}$$

3.4 Estimativa de Carleman

Elevando $(3.1)_1$ ao quadrado temos

$$w_t^2 - 2w_t A^* w + |A^* w|^2 = a^2 w^2 - 2afw + |f|^2. \tag{3.77}$$

Ao multiplicarmos a equação (3.77) por $(\phi s)^{-1}e^{2s\alpha}$ e integrá-la em Q_T obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_T}(\phi s)^{-1}e^{2s\alpha}(|w_t|^2+|A^*w|^2)dxdt\\
&=\int_{Q_T}(\phi s)^{-1}e^{2s\alpha}a^2w^2dxdt-\int_{Q_T}(\phi s)^{-1}e^{2s\alpha}2afwdxdt+\int_{Q_T}(\phi s)^{-1}e^{2s\alpha}|f|^2dxdt\\
&+2\int_{Q_T}(\phi s)^{-1}e^{2s\alpha}w_t\tilde{A}^*wdxdt-2\int_{Q_T}(\phi s)^{-1}e^{2s\alpha}w_t\operatorname{div}(w\vec{b})dxdt\\
&=\int_{Q_T}(\phi s)^{-1}e^{2s\alpha}|f|^2dxdt+\int_{Q_T}(\phi s)^{-1}e^{2s\alpha}a^2w^2dxdt-\int_{Q_T}(\phi s)^{-1}e^{2s\alpha}2afwdxdt+\\
&+2\int_{Q_T}(\phi s)^{-1}e^{2s\alpha}w_t\tilde{A}^*wdxdt-2\int_{Q_T}(\phi s)^{-1}e^{2s\alpha}w_t\nabla w\cdot\vec{b}dxdt\\
&-2\int_{Q_T}(\phi s)^{-1}e^{2s\alpha}w_tw\operatorname{div}\vec{b}dxdt.
\end{aligned}\tag{3.78}$$

Sejam

$$\begin{aligned}
F_1&=\int_{Q_T}(\phi s)^{-1}e^{2s\alpha}|f|^2dxdt\\
F_2&=\int_{Q_T}(\phi s)^{-1}e^{2s\alpha}a^2w^2dxdt\\
F_3&=-\int_{Q_T}(\phi s)^{-1}e^{2s\alpha}2afwdxdt\\
F_4&=2\int_{Q_T}(\phi s)^{-1}e^{2s\alpha}w_t\tilde{A}^*wdxdt\\
F_5&=-2\int_{Q_T}(\phi s)^{-1}e^{2s\alpha}w_t\nabla w\cdot\vec{b}dxdt\\
F_6&=-2\int_{Q_T}(\phi s)^{-1}e^{2s\alpha}w_tw\operatorname{div}\vec{b}dxdt.
\end{aligned}$$

Note que $\phi\geqslant\frac{1}{T^2}$ e fazendo $s\geqslant T^2$, temos que

$$(s\phi)^{-1}\leqslant 1\qquad (s\phi)^{-1}\leqslant(s\phi)^3$$

Seja $M>0$ tal que $|a(x,t)|\leqslant M$. Logo,

$$|F_1|\leqslant\int_{Q_T}e^{2s\alpha}|f|^2dxdt\tag{3.79}$$

$$|F_2|\leqslant M\int_{Q_T}s^3\phi^3e^{2s\alpha}|w|^2dxdt.\tag{3.80}$$

Note ainda que $\alpha(0)=\alpha(T)=-\infty$, logo $e^{2s\alpha(0)}=e^{2s\alpha(T)}=0$. Observe que $w_t=0$ em Σ_T. Segue do Teorema de Green que

$$\begin{aligned}
\int_{Q_T}(\phi s)^{-1}e^{2s\alpha}w_t\tilde{A}^*wdxdt &= -\int_{Q_T}\nabla\left((\phi s)^{-1}e^{2s\alpha}w_t\right)\cdot B\nabla wdxdt\\
&\quad+\int_{\Sigma_T}(\phi s)^{-1}e^{2s\alpha}w_t(B\nabla w\cdot\eta)d\Sigma_T\\
&= -\int_{Q_T}\nabla\left((\phi s)^{-1}e^{2s\alpha}w_t\right)\cdot B\nabla wdxdt.
\end{aligned}$$

Dessa forma temos

$$
\begin{aligned}
&2\int_{Q_T}(\phi s)^{-1}e^{2s\alpha}w_t\tilde{A}^*w\,dxdt = -2\int_{Q_T}2s(\phi s)^{-1}e^{2s\alpha}w_t(\nabla\alpha\cdot B\nabla w)dxdt\\
&+2\int_{Q_T}\phi^{-2}s^{-1}e^{2s\alpha}w_t(\nabla\phi\cdot B\nabla w)dxdt - 2\int_{Q_T}(\phi s)^{-1}e^{2s\alpha}(\nabla w_t\cdot B\nabla w)dxdt\\
&= 4\int_{Q_T}s(\phi s)^{-1}e^{2s\alpha}w_t(M\nabla\alpha\cdot M\nabla w)dxdt + 2\int_{Q_T}\phi^{-2}s^{-1}e^{2s\alpha}w_t(\lambda\phi\nabla\psi\cdot B\nabla w)dxdt\\
&+2\int_{Q_T}(\phi s)^{-1}e^{2s\alpha}(M\nabla w_t\cdot M\nabla w)dxdt.
\end{aligned}
$$

Observe que

$$
\frac{d}{dt}|M\nabla w|^2 = 2(M_t\nabla w\cdot M\nabla w) + 2(M\nabla w_t\cdot M\nabla w)
$$

onde $M_t = \frac{\partial}{\partial t}M$, logo

$$
\begin{aligned}
&2\int_{Q_T}(\phi s)^{-1}e^{2s\alpha}w_t\tilde{A}^*w\,dxdt = 4\int_{Q_T}(\phi s)^{-1}e^{2s\alpha}s\phi\lambda w_t(M\nabla\psi\cdot M\nabla w)dxdt\\
&-2\int_{Q_T}\lambda\phi^{-1}s^{-1}e^{2s\alpha}w_t(M\nabla\psi\cdot M\nabla w)dxdt\\
&+\int_{Q_T}(\phi s)^{-1}e^{2s\alpha}\left[\frac{d}{dt}|M\nabla w|^2 - 2(M_t\nabla w\cdot M\nabla w)\right]dxdt.
\end{aligned}
$$

Lembrando que $|\alpha_t| \leqslant C\phi^2$, $|\phi_t| \leqslant C\phi^2$ para um $C > 0$, temos ainda que

$$
\begin{aligned}
F_4 &= \int_{Q_T}(4-2(s\phi)^{-1})e^{2s\alpha}\lambda w_t(M\nabla\psi\cdot M\nabla w)dxd\\
&+\int_{Q_T}(\phi s)^{-1}e^{2s\alpha}\frac{d}{dt}|M\nabla w|^2dxdt - 2\int_{Q_T}(\phi s)^{-1}e^{2s\alpha}(M_t\nabla w\cdot M\nabla w)dxdt.
\end{aligned}
$$

Portanto, temos

$$
\begin{aligned}
F_4 &= \int_{Q_T}(4-2(s\phi)^{-1})e^{2s\alpha}\lambda w_t(M\nabla\psi\cdot M\nabla w)dxd\\
&+\int_{\Omega}(\phi s)^{-1}e^{2s\alpha(T)}|M\nabla w(x,T)|^2dx - \int_{\Omega}(\phi s)^{-1}e^{2s\alpha(0)}|M\nabla w(x,0)|^2dx\\
&-\int_{Q_T}\frac{d}{dt}\left[(\phi s)^{-1}e^{2s\alpha}\right]|M\nabla w|^2dxdt - 2\int_{Q_T}(\phi s)^{-1}e^{2s\alpha}(M_t\nabla w\cdot M\nabla w)dxdt\\
&= \int_{Q_T}(4-2(s\phi)^{-1})e^{2s\alpha}\lambda w_t(M\nabla\psi\cdot M\nabla w)dxd\\
&-\int_{Q_T}2s\alpha_t(\phi s)^{-1}e^{2s\alpha}|M\nabla w|^2dxdt + \int_{Q_T}\phi_t\phi^{-2}s^{-1}e^{2s\alpha}|M\nabla w|^2dxdt\\
&-2\int_{Q_T}(\phi s)^{-1}e^{2s\alpha}(M_t\nabla w\cdot M\nabla w)dxdt.
\end{aligned}
$$

Como $|M_t\nabla w| \leqslant k|\nabla w|$ e $|\nabla w| \leqslant \frac{1}{\alpha_0}|M\nabla w|$, então $|M_t\nabla w| \leqslant \frac{k}{\alpha_0}|M\nabla w|$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
|F_4| &\leqslant \int_{Q_T}(4+2(s\phi)^{-1})e^{2s\alpha}\lambda|w_t||M\nabla\psi||M\nabla w|dxd \\
&+\int_{Q_T}(2sC\phi^2(\phi s)^{-1}e^{2s\alpha}+C\phi^2\phi^{-2}s^{-1}e^{2s\alpha}+2(\phi s)^{-1}e^{2s\alpha}\frac{k}{\alpha_0})|M\nabla w|^2dxdt \\
&\leqslant 6\int_{Q_T}e^{2s\alpha}\lambda|w_t||M\nabla\psi||M\nabla w|dxd \\
&+(2\frac{k}{\alpha_0}+3C)\int_{Q_T}e^{2s\alpha}\phi s|M\nabla w|^2dxdt.
\end{aligned}
$$

Tomando $\overline{K}=\max\{6, 2\frac{k}{\alpha_0}+3C\}$, tem-se

$$
\begin{aligned}
|F_4| &\leqslant \overline{K}\left(\int_{Q_T}e^{2s\alpha}\lambda|w_t||M\nabla\psi||M\nabla w|dxd+\int_{Q_T}e^{2s\alpha}\phi s|M\nabla w|^2dxdt\right) \\
&\leqslant \int_{Q_T}e^{2s\alpha}\frac{\overline{K}}{\sqrt{\epsilon}}\lambda(|M\nabla\psi||M\nabla w|\sqrt{s\phi})(|w_t|\frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{s\phi}})dxdt+\overline{K}\int_{Q_T}e^{2s\alpha}\phi s|M\nabla w|^2dxdt \\
&\leqslant \frac{\overline{K}^2}{\epsilon}\int_{Q_T}e^{2s\alpha}\lambda^2|M\nabla\psi|^2|M\nabla w|^2s\phi dxdt+\epsilon\int_{Q_T}e^{2s\alpha}|w_t|^2(s\phi)^{-1}dxdt \\
&+\overline{K}\int_{Q_T}e^{2s\alpha}\lambda^2\phi s|M\nabla w|^2dxdt.
\end{aligned}
$$

Como $\exists\overline{M}>0$ tal que $|M\nabla\psi| \leqslant \overline{M}$, segue-se que

$$
\begin{aligned}
|F_4| &\leqslant \left(\frac{\overline{M}^2\overline{K}^2}{\epsilon}+\overline{K}\right)\int_{Q_T}e^{2s\alpha}\lambda^2 s\phi|M\nabla w|^2dxdt+\epsilon\int_{Q_T}e^{2s\alpha}|w_t|^2(s\phi)^{-1}dxdt \\
&=\overline{C}\int_{Q_T}e^{2s\alpha}\lambda^2 s\phi|M\nabla w|^2dxdt+\epsilon\int_{Q_T}e^{2s\alpha}|w_t|^2(s\phi)^{-1}dxdt
\end{aligned}
\tag{3.81}
$$

onde $\overline{C}=\frac{\overline{M}^2\overline{K}^2}{\epsilon}+\overline{K}$. Temos ainda que

$$
\begin{aligned}
|F_3| &= \left|\int_{Q_T}(\phi s)^{-1}e^{2s\alpha}2afwdxdt\right| \\
&\leqslant \int_{Q_T}(\phi s)^{-1}e^{2s\alpha}(|a|^2|f|^2+w^2)dxdt \\
&\leqslant M\int_{Q_T}(\phi s)^{-1}e^{2s\alpha}|f|^2dxdt+\int_{Q_T}(\phi s)^{-1}e^{2s\alpha}w^2dxdt \\
&\leqslant M\int_{Q_T}e^{2s\alpha}|f|^2dxdt+\int_{Q_T}(\phi s)^{3}e^{2s\alpha}w^2dxdt
\end{aligned}
\tag{3.82}
$$

e temos também que

$$
\begin{aligned}
|F_5| &= \left|2\int_{Q_T}(\phi s)^{-1}e^{2s\alpha}w_t\nabla w\cdot\vec{b}dxdt\right| \\
&\leqslant 2\int_{Q_T}e^{2s\alpha}|w_t||\nabla w||\vec{b}|_\infty dxdt \\
&\leqslant 2\int_{Q_T}e^{2s\alpha}(\frac{|w_t|}{\sqrt{s\phi}}\sqrt{\epsilon})(\frac{\sqrt{s\phi}}{\sqrt{\epsilon}\alpha_0}|M\nabla w||\vec{b}|_\infty)dxdt \\
&\leqslant \epsilon\int_{Q_T}e^{2s\alpha}|w_t|^2(s\phi)^{-1}dxdt+\frac{|\vec{b}|_\infty^2}{\alpha_0^2\epsilon}\int_{Q_T}e^{2s\alpha}s\phi|M\nabla w|^2dxdt \\
&\leqslant \epsilon\int_{Q_T}e^{2s\alpha}|w_t|^2(s\phi)^{-1}dxdt+C_2\int_{Q_T}e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|M\nabla w|^2dxdt.
\end{aligned}
\tag{3.83}
$$

Onde $C_2 = \frac{|\vec{b}|_\infty^2}{\alpha_0^2 \epsilon}$. Temos por fim que

$$\begin{aligned}
|F_6| &= \left| 2\int_{Q_T} (\phi s)^{-1} e^{2s\alpha} w_t w \operatorname{div}\vec{b}\, dxdt \right| \\
&\leqslant 2\int_{Q_T} e^{2s\alpha} |w_t||w||\operatorname{div}\vec{b}|_\infty dxdt \\
&= 2\int_{Q_T} e^{2s\alpha} \Big(\frac{|w_t|}{\sqrt{s\phi}}\sqrt{\epsilon}\Big)\Big(\frac{|w|}{\sqrt{\epsilon}}\sqrt{s\phi}|\operatorname{div}\vec{b}|_\infty\Big) dxdt \\
&\leqslant \epsilon \int_{Q_T} e^{2s\alpha}|w_t|(s\phi)^{-1}dxdt + \frac{|\operatorname{div}\vec{b}|_\infty^2}{\epsilon}\int_{Q_T} e^{2s\alpha}|w|^2 s\phi\, dxdt \\
&\leqslant \epsilon \int_{Q_T} e^{2s\alpha}|w_t|(s\phi)^{-1}dxdt + C_3\int_{Q_T} e^{2s\alpha}|w|^2(s\phi)^3 dxdt.
\end{aligned} \tag{3.84}$$

Fazendo a substituição de (3.79),(3.80), (3.81),(3.82),(3.83) e (3.84) em (3.78) temos

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_T} (\phi s)^{-1} e^{2s\alpha}(w_t^2 + |A^* w|^2) dxdt \\
&\leqslant \int_{Q_T} e^2 s\alpha |f|^2 dxdt + M\int_{Q_T} s^3\phi^3 e^2 s\alpha |w|^2 dxdt + M\int_{Q_T} e^{2s\alpha}|f|^2 dxdt \\
&+ \int_{Q_T} (\phi s)^3 e^{2s\alpha} w^2 dxdt + \overline{C}\int_{Q_T} e^{2s\alpha}\lambda^2 s\phi |M\nabla w|^2 dxdt + \epsilon\int_{Q_T} e^{2s\alpha}|w_t|^2(s\phi)^{-1}dxdt \\
&+\epsilon\int_{Q_T} e^{2s\alpha}|w_t|^2(s\phi)^{-1}dxdt + C_2\int_{Q_T} e^{2s\alpha} s\lambda^2\phi|M\nabla w|^2 dxdt \\
&+\epsilon\int_{Q_T} e^{2s\alpha}|w_t|(s\phi)^{-1}dxdt + C_3\int_{Q_T} e^{2s\alpha}|w|^2(s\phi)^3 dxdt.
\end{aligned}$$

Fazendo $K_2 = \max\{M+1, M+1+C_3, \overline{C}+C_2\}$ e tomando $\epsilon = \frac{1}{6}$, tem-se

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_T} (\phi s)^{-1} e^{2s\alpha}(w_t^2 + |A^* w|^2) dxdt \\
&\leqslant K_2 \left(\int_{Q_T} e^2 s\alpha|f|^2 dxdt + \int_{Q_T} s^3\phi^3 e^2 s\alpha |w|^2 dxdt + \int_{Q_T} e^{2s\alpha}\lambda^2 s\phi|M\nabla w|^2 dxdt \right) \\
&+\frac{1}{2}\int_{Q_T} e^{2s\alpha}|w_t|^2(s\phi)^{-1}dxdt.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_T} (\phi s)^{-1} e^{2s\alpha}\Big(\frac{1}{2}|w_t|^2 + |A^* w|^2\Big) dxdt \\
&\leqslant K_2 \left(\int_{Q_T} e^2 s\alpha|f|^2 dxdt + \int_{Q_T} s^3\phi^3 e^2 s\alpha |w|^2 dxdt + \int_{Q_T} e^{2s\alpha}\lambda^2 s\phi|M\nabla w|^2 dxdt \right)
\end{aligned} \tag{3.85}$$

De (3.76) e (3.85) segue que

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_T} (\phi s)^{-1} e^{2s\alpha}\Big(\frac{1}{2}|w_t|^2 + |A^* w|^2\Big) dxdt \\
&\leqslant K_2\int_{Q_T} e^2 s\alpha|f|^2 dxdt + K_2 C\int_{Q_T} e^{2s\alpha}|f|^2 dxdt + \\
&K_2 C\int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha}s^3\lambda^4\phi^3 w^2 + e^{2s\alpha}s\lambda^2\phi|M\nabla w|^2 dxdt
\end{aligned} \tag{3.86}$$

Fazendo $C_4 = \max\{K_2 C, K_2 C + K_2\}$, segue de (3.86) que

$$
\begin{aligned}
&\int_{Q_T} (\phi s)^{-1} e^{2s\alpha}(\frac{1}{2}|w_t|^2 + |A^* w|^2)dxdt \\
&\leqslant C_4 \left(\int_{Q_T} e^2 s\alpha |f|^2 dxdt + \int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha} s^3 \lambda^4 \phi^3 w^2 + e^{2s\alpha} s \lambda^2 \phi |M\nabla w|^2 dxdt \right)
\end{aligned}
\tag{3.87}
$$

Seja a seguinte função $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$
\begin{aligned}
\chi : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto \chi(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in \overline{\omega_0} \\ 0 \text{ se } x \in \Omega - \omega, \end{cases}
\end{aligned}
$$

onde $\omega_0 \subseteq \overline{\omega}_0 \subseteq \text{supp}(\chi) \subset \omega$ e $\text{supp}(\chi)$ é o suporte de χ. Ao multiplicarmos a equação $(3.1)_1$ por $e^{2s\alpha}\chi s\phi w$ e integrá-la em Q_T, obtemos

$$
\begin{aligned}
&-\int_{Q_T} e^{2s\alpha}\chi s\phi w w_t dxdt + \int_{Q_T} e^{2s\alpha}\chi s\phi w A^* w dxdt + \int_{Q_T} a e^{2s\alpha}\chi s\phi w^2 dxdxdt \\
&= \int_{Q_T} e^{2s\alpha}\chi s\phi w f dxdt.
\end{aligned}
\tag{3.88}
$$

Análise dos Termos de (3.88)

Veja que

$$
\begin{aligned}
&\int_{Q_T} e^{2s\alpha}\chi s\phi w w_t dxdt = \frac{1}{2}\int_{Q_T} e^{2s\alpha}\chi s\phi \frac{d}{dt}|w|^2 dxdt = \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega e^{2s\alpha}\chi s\phi \frac{d}{dt}|w|^2 dxdt \\
&= \frac{1}{2}\int_\omega \chi s \left(\int_0^T e^{2s\alpha}\phi \frac{d}{dt}|w|^2 dt \right) dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\omega \chi s \left(e^{2s\alpha(T)}\phi |w(x,T)|^2 - e^{2s\alpha(0)}\phi |w(x,0)|^2 - \int_0^T \frac{d}{dt}(e^{2s\alpha}\phi)|w|^2 dt \right) dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_{Q_\omega} \chi s (e^{2s\alpha}\phi_t |w|^2 + 2s\alpha_t e^{2s\alpha}\phi |w|^2) dtdx.
\end{aligned}
$$

Lembrando que $s \geqslant s_0 \geqslant 1$, $\lambda \geqslant \lambda_0 \geqslant 1$ e $\phi^2 \leqslant T^2\phi^3$, temos que

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_{Q_T} e^{2s\alpha}\chi s\phi w w_t dxdt \right| \leqslant \frac{1}{2}\int_{Q_\omega} |\chi| s (e^{2s\alpha}|\phi_t||w|^2 + 2s|\alpha_t| e^{2s\alpha}|\phi||w|^2) dtdx \\
&\leqslant \frac{1}{2}\int_{Q_\omega} s(e^{2s\alpha}C\phi^2|w|^2 + 2sC\phi^2 e^{2s\alpha}|\phi||w|^2) dtdx \\
&\leqslant \frac{1}{2}\int_{Q_\omega} s(e^{2s\alpha}CT^2\phi^3|w|^2 + 2sC\phi^3 e^{2s\alpha}|w|^2) dtdx \\
&\leqslant K \int_{Q_\omega} s^3\phi^3 e^{2s\alpha}\lambda^2 |w|^2 dtdx
\end{aligned}
\tag{3.89}
$$

onde $K = \max\{C, \frac{CT^2}{2}\}$. Note que sendo $w = 0$ em Σ_T, então pela fórmula de Green teremos que

$$\int_{Q_T} e^{2s\alpha}\chi s\phi w\tilde{A}^* w dxdt + \int_{Q_T} \nabla\left(e^{2s\alpha}\chi s\phi w\right)\cdot B\nabla w dxdt =$$
$$\int_{\Sigma_T} e^{2s\alpha}\chi s\phi w(B\nabla w\cdot\eta)d\Sigma_T = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_{Q_T} e^{2s\alpha}\chi s\phi w\tilde{A}^* w dxdt &= -\int_{Q_T} \nabla\left(e^{2s\alpha}\chi s\phi w\right)\cdot B\nabla w dxdt \\ = \int_{Q_T} e^{2s\alpha}\chi s\phi M\nabla w\cdot M\nabla w dxdt &- \int_{Q_T} w\nabla\left(e^{2s\alpha}\chi s\phi\right)\cdot B\nabla w dxdt.\end{aligned} \tag{3.90}$$

Também observe que

$$\begin{aligned}&\left|\iint_{Q_T} w\nabla\left(e^{2s\alpha}\chi s\phi\right)\cdot B\nabla w dxdt\right| \\ &= \left|\iint_{Q_T} ws\left(e^{2s\alpha}\chi\nabla\phi + e^{2s\alpha}\nabla\chi\phi + 2s\nabla\alpha e^{2s\alpha}\chi\phi\right)\cdot B\nabla w dxdt\right|.\end{aligned}$$

Note que $\nabla\chi = 0$ em $\Omega - \text{supp}(\chi)$, portanto

$$\begin{aligned}&\left|\iint_{Q_T} w\nabla\left(e^{2s\alpha}\chi s\phi\right)\cdot B\nabla w dxdt\right| \\ &= \left|-\int_{\text{supp}(\chi)\times(0,T)} \lambda\phi w s e^{2s\alpha}\chi M\nabla\psi\cdot M\nabla w dxdt\right. \\ &-\int_{\text{supp}(\chi)\times(0,T)} w s e^{2s\alpha}\phi M\nabla\chi\cdot M\nabla w dxdt \\ &\left.-2\int_{\text{supp}(\chi)\times(0,T)} \lambda\phi w s^2 e^{2s\alpha}\chi\phi M\nabla\psi\cdot M\nabla w dxdt\right| \\ &\leqslant \int_{\text{supp}(\chi)\times(0,T)} \lambda\phi w s e^{2s\alpha}|M\nabla\psi||M\nabla w|dxdt \\ &+\int_{\text{supp}(\chi)\times(0,T)} w s e^{2s\alpha}\phi|M\nabla\chi||M\nabla w|dxdt \\ &+2\int_{\text{supp}(\chi)\times(0,T)} \lambda\phi^2 w s^2 e^{2s\alpha}|M\nabla\psi||M\nabla w|dxdt.\end{aligned}$$

Como existe K_3 tal que

$$\begin{cases} |M\nabla\psi| \leqslant K_3 \\ |M\nabla\chi| \leqslant K_3 \end{cases}$$

temos que

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{Q_T} w\nabla\left(e^{2s\alpha}\chi s\phi\right)\cdot B\nabla w dxdt\right| \\
&\leqslant K_3\int_{supp(\chi)\times(0,T)} \lambda\phi|w|se^{2s\alpha}|M\nabla w|dxdt \\
&+K_3\int_{supp(\chi)\times(0,T)} wse^{2s\alpha}\phi|M\nabla w|dxdt \\
&+2K_3\int_{supp(\chi)\times(0,T)} \lambda\phi^2|w|s^2e^{2s\alpha}|M\nabla w|dxdt \\
&\leqslant 4K_3\int_{supp(\chi)\times(0,T)} \lambda\phi^2|w|s^2e^{2s\alpha}|M\nabla w|dxdt \\
&= k_4\int_{supp(\chi)\times(0,T)} \lambda\phi^2|w|s^2e^{2s\alpha}|M\nabla w|dxdt
\end{aligned}$$

onde fizemos $k_4 = 4K_3$ e lembrando que $supp(\chi)\subset\omega$. Dessa forma temos que

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{Q_T} w\nabla\left(e^{2s\alpha}\chi s\phi\right)\cdot B\nabla w dxdt\right| \\
&\leqslant k_4\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}((s\phi)^{\frac{3}{2}}\frac{|w|}{\sqrt{\epsilon}}\lambda)(\sqrt{\epsilon}|M\nabla w|\sqrt{s\phi})dxdt \\
&\leqslant \tfrac{k_4}{\epsilon}\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}((s\phi)^3|w|^2\lambda^2)dxdt + k_4\epsilon\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}|M\nabla w|^2(s\phi)dxdt.
\end{aligned} \tag{3.91}$$

Note que de (3.90) e (3.88) temos

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_T} e^{2s\alpha}\chi s\phi M\nabla w\cdot M\nabla w dxdt = \int_{Q_T} e^{2s\alpha}\chi s\phi w w_t dxdt - \int_{Q_T} ae^{2s\alpha}\chi s\phi w^2 dxdxdt \\
&+\int_{Q_T} e^{2s\alpha}\chi s\phi w f dxdt + \int_{Q_T} w\nabla\left(e^{2s\alpha}\chi s\phi\right)\cdot B\nabla w dxdt \\
&+\int_{Q_T} e^{2s\alpha}\chi s\phi w \mathrm{div}(w\vec{b})dxdt.
\end{aligned} \tag{3.92}$$

Note ainda que

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_T} e^{2s\alpha}\chi s\phi w \mathrm{div}(w\vec{b})dxdt = -\int_{Q_T} w\nabla(e^{2s\alpha}\chi s\phi w)\cdot\vec{b}dxdt \\
&+\int_{\Sigma_T} e^{2s\alpha}\chi s\phi w w\vec{b}\cdot\eta d\Sigma_T \\
&= -\int_{Q_T} we^{2s\alpha}\chi s\phi\nabla w\cdot\vec{b}dxdt - \int_{Q_T} w^2e^{2s\alpha}\chi s(\nabla\phi\cdot\vec{b})dxdt \\
&-\int_{Q_T} w^2e^{2s\alpha}s\phi(\nabla\chi\cdot\vec{b})dxdt - \int_{Q_T} w^2e^{2s\alpha}\chi s\phi 2s\nabla\alpha\cdot\vec{b}dxdt
\end{aligned}$$

como $|\nabla\psi| \leqslant k_5$, temos que

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{Q_T} e^{2s\alpha}\chi s\phi w \operatorname{div}(w\vec{b})dxdt\right| \\
&\leqslant |\vec{b}|_\infty \int_{Q_\omega} |w|e^{2s\alpha}s\phi|\nabla w|dxdt + K_5|\vec{b}|_\infty \int_{Q_\omega} w^2 e^{2s\alpha}s\lambda\phi dxdt \\
&+K_3|\vec{b}|_\infty \int_{Q_\omega} w^2 e^{2s\alpha}s\phi dxdt + 2K_5|\vec{b}|_\infty \int_{Q_\omega} w^2 e^{2s\alpha}s^2\phi^2\lambda dxdt \\
&\leqslant |\vec{b}|_\infty \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s\phi(\sqrt{\epsilon}|\nabla w|)\left(\frac{|w|}{\sqrt{\epsilon}}\right)dxdt+ \\
&(K_3+3K_5)|\vec{b}|_\infty \int_{Q_\omega} w^2 e^{2s\alpha}\lambda^2(s\phi)^3 dxdt \\
&\leqslant |\vec{b}|_\infty \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s\phi\epsilon|\nabla w|^2 dxdt + \frac{|\vec{b}|_\infty}{\epsilon}\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s\phi|w|^2 dxdt+ \\
&(K_3+3K_5)|\vec{b}|_\infty \int_{Q_\omega} w^2 e^{2s\alpha}\lambda^2(s\phi)^3 dxdt \\
&\leqslant \frac{|\vec{b}|_\infty\epsilon}{\alpha_0^2}\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s\phi|M\nabla w|^2 dxdt + \overline{K}\int_{Q_\omega} w^2 e^{2s\alpha}\lambda^2(s\phi)^3 dxdt
\end{aligned}
\tag{3.93}
$$

onde $\overline{K} = (\frac{1}{\epsilon} + K_3 + 3K_5)|\vec{b}|_\infty$. Por outro lado

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{Q_T} e^{2s\alpha}\chi s\phi w f dxdt\right| \leqslant \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}(\lambda s\phi|w|)(\frac{|f|}{\lambda})dxdt \\
&\leqslant \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\lambda^2 s^2\phi^2|w|^2 dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\left(\frac{|f|^2}{\lambda^2}\right)dxdt \\
&\leqslant \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\lambda^2 s^2\phi^2|w|^2 dxdt + \frac{1}{\lambda^2}\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}(|f|^2)dxdt.
\end{aligned}
\tag{3.94}
$$

Substituindo (3.89),(3.94),(3.91) e (3.93) em (3.92), temos que

$$
\begin{aligned}
&\int_{Q_T} e^{2s\alpha}\chi s\phi|M\nabla w|^2 w dxdt \\
&\leqslant K\int_{Q_\omega} s^3\phi^3 e^{2s\alpha}\lambda^2|w|^2 dxdt + M\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\chi s\phi w^2 dxdt \\
&+\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\lambda^2 s^2\phi^2|w|^2 dxdt + \frac{1}{\lambda^2}\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}|f|^2 dxdt \\
&+\frac{k_4}{\epsilon}\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}(s\phi|w|^2\lambda^2)dxdt + k_4\epsilon\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}|M\nabla w|^2(s\phi)dxdt \\
&+\frac{|\vec{b}|_\infty\epsilon}{\alpha_0^2}\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}s\phi|M\nabla w|^2 dxdt + \overline{K}\int_{Q_\omega} w^2 e^{2s\alpha}\lambda^2(s\phi)^3 dxdt \\
&\leqslant (K+M+1+\frac{k_4}{\epsilon}+\overline{K})\int_{Q_\omega} s^3\phi^3 e^{2s\alpha}\lambda^2|w|^2 dxdt + \frac{1}{\lambda^2}\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}|f|^2 dxdt \\
&+\left(\frac{|\vec{b}|_\infty\epsilon}{\alpha_0^2} + k_4\epsilon\right)\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}|M\nabla w|^2(s\phi)dxdt.
\end{aligned}
\tag{3.95}
$$

Ao multiplicarmos (3.95) por λ^2, fazendo $C_1 = K + M + 1 + \frac{k_4}{\epsilon} + \overline{K}$ e $C_2 = \frac{|\vec{b}|_\infty}{\alpha_0^2} + k_4$, e notando ainda que $\int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha} s\phi |M\nabla w|^2 w dxdt \leqslant \int_{Q_T} e^{2s\alpha} \chi s\phi |M\nabla w|^2 w dxdt$, teremos

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha}\lambda^2 s\phi |M\nabla w|^2 w dxdt \leqslant C_1 \int_{Q_\omega} s^3\phi^3 e^{2s\alpha}\lambda^4 |w|^2 dtdx + \int_{Q_T} e^{2s\alpha}|f|^2 dxdt \\
&+C_2\epsilon \int_{Q_T} e^{2s\alpha}|M\nabla w|^2 \lambda^2 (s\phi) dxdt
\end{aligned} \tag{3.96}$$

Ao somarmos (3.76) com (3.87) obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_T} (s^3\lambda^4\phi^3 w^2 + s\lambda^2\phi |M\nabla w|^2) dxdt + \int_{Q_T} (\phi s)^{-1} e^{2s\alpha} (\frac{1}{2}|w_t|^2 + |A^* w|^2) dxdt \\
&\leqslant \overline{C}\left(\int_{Q_T} e^{2s\alpha}|f|^2 dxdt + \int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha} s^3\lambda^4\phi^3 w^2 + e^{2s\alpha} s\lambda^2\phi |M\nabla w|^2 dxdt\right).
\end{aligned} \tag{3.97}$$

Segue de (3.97) e (3.96) que

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_T} (s^3\lambda^4\phi^3 w^2 + s\lambda^2\phi |M\nabla w|^2) dxdt + \int_{Q_T} (\phi s)^{-1} e^{2s\alpha} (\frac{1}{2}|w_t|^2 + |A^* w|^2) dxdt \\
&\leqslant 2\overline{C}\int_{Q_T} e^{2s\alpha}|f|^2 dxdt + (\overline{C}C_1 + \overline{C}) \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} s^3\lambda^4\phi^3 w^2 dxdt \\
&+\overline{C}C_2\epsilon \textstyle\int_{Q_T} e^{2s\alpha} s\lambda^2\phi |M\nabla w|^2 dxdt.
\end{aligned} \tag{3.98}$$

Fazendo $\epsilon = \frac{1}{2\overline{C}C_2}$ e considerando $K_3 = \max\{2\overline{C}, \overline{C}C_1 + \overline{C}\}$, temos

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_T} (s^3\lambda^4\phi^3 w^2 + \frac{1}{2}s\lambda^2\phi |M\nabla w|^2) dxdt + \int_{Q_T} (\phi s)^{-1} e^{2s\alpha} (\frac{1}{2}|w_t|^2 + |A^* w|^2) dxdt \\
&\leqslant K_3\left(\int_{Q_T} e^{2s\alpha}|f|^2 dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} s^3\lambda^4\phi^3 w^2 dxdt\right).
\end{aligned} \tag{3.99}$$

Dessa forma temos

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_T} (s^3\lambda^4\phi^3 w^2 + s\lambda^2\phi |M\nabla w|^2) dxdt + \int_{Q_T} (\phi s)^{-1} e^{2s\alpha} (|w_t|^2 + |A^* w|^2) dxdt \\
&\leqslant \int_{Q_T} (2s^3\lambda^4\phi^3 w^2 + s\lambda^2\phi |M\nabla w|^2) dxdt + \int_{Q_T} (\phi s)^{-1} e^{2s\alpha} (|w_t|^2 + 2|A^* w|^2) dxdt \\
&= 2\int_{Q_T} (s^3\lambda^4\phi^3 w^2 + \frac{1}{2}s\lambda^2\phi |M\nabla w|^2) dxdt + 2\int_{Q_T} (\phi s)^{-1} e^{2s\alpha} (\frac{1}{2}|w_t|^2 + |A^* w|^2) dxdt \\
&\leqslant 2K_3\left(\int_{Q_T} e^{2s\alpha}|f|^2 dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} s^3\lambda^4\phi^3 w^2 dxdt\right)
\end{aligned} \tag{3.100}$$

fazendo $C = 2K_3$, temos em fim a desigualdade desejada

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_T} (s^3\lambda^4\phi^3 w^2 + s\lambda^2\phi |M\nabla w|^2) dxdt + \int_{Q_T} (\phi s)^{-1} e^{2s\alpha} (|w_t|^2 + |A^* w|^2) dxdt \\
&\leqslant C\left(\int_{Q_T} e^{2s\alpha}|f|^2 dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} s^3\lambda^4\phi^3 w^2 dxdt\right)
\end{aligned} \tag{3.101}$$

Capítulo 4

Desigualdade de Observabilidade

Neste capítulo será provada a desigualdade da observabilidade para o sistema adjunto (3.1). Para tal utilizaremos a desigualdade Carleman provada no capítulo anterior. Assim, o objetivo é provar o seguinte

Teorema 4.0.1. *Sejam* α *e* ϕ *como em (3.2). Então para* $\lambda \geqslant \lambda_0$*,* $s \geqslant s(\lambda)$*, temos a seguinte desigualdade de observabilidade*

$$\int_\Omega |w(x,0)|^2 dxdt \leqslant C\left(\int_{Q_T} |f|^2 dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3 |w|^2 dxdt\right).$$

para $w(x,t)$ *solução fraca do sistema adjunto (3.1).*

Demonstração. Multiplicando a equação $(3.1)_1$ por w e integrando em Ω, temos

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega w^2 dx + \int_\Omega wA^* w dx = \int_\Omega fw dx - \int_\Omega a w^2 dx. \tag{4.1}$$

Façamos uma análise dos termos de (4.1). Primeiramente note que segue da fórmula de Green e de $(3.1)_2$ que

$$\int_\Omega w\tilde{A}^* w dx + \int_\Omega \nabla w \cdot B\nabla w dx = \int_\Gamma wB\nabla w \cdot \eta d\Gamma = 0$$

portanto,

$$\int_\Omega w\tilde{A}^* w dx = \int_\Omega |M\nabla w|^2 dx \qquad \text{(pois } \nabla w \cdot B\nabla w = -|M\nabla w|^2).$$

Além disso, temos ainda que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega w \operatorname{div}(w\vec{b})dx &= \int_\Omega w^2 \operatorname{div}\vec{b}dx + \int_\Omega w\nabla w \cdot \vec{b}dx \\
&= \int_\Omega w^2 \operatorname{div}\vec{b}dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla w^2 \cdot \vec{b}dx \\
&= \int_\Omega w^2 \operatorname{div}\vec{b}dx - \frac{1}{2}\int_\Omega w^2 \operatorname{div}\vec{b}dx + \int_\Gamma w^2\vec{b}\cdot \eta d\Gamma \\
&= \int_\Omega w^2 \operatorname{div}\vec{b}dx - \frac{1}{2}\int_\Omega w^2 \operatorname{div}\vec{b}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega w^2 \operatorname{div}\vec{b}dx.
\end{aligned}$$

Logo, substituindo em (4.1) temos

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega w^2 dx + \int_\Omega |M\nabla w|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega w^2 \operatorname{div}\vec{b}dx = \int_\Omega fw dx - \int_\Omega a w^2 dx$$

$$-\frac{d}{2dt}\int_\Omega w^2 dx + \int_\Omega |M\nabla w|^2 dx = \int_\Omega fw dx - \int_\Omega \left(a - \frac{1}{2}\operatorname{div}\vec{b}\right) w^2 dx. \tag{4.2}$$

Note que

$$\left|\frac{1}{2}\operatorname{div}\vec{b} - a\right| \leqslant \frac{1}{2}|\operatorname{div}\vec{b}|_\infty + M = C.$$

Por outro lado temos

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{dt}\left(e^{2(C+1)t}\int_\Omega w^2 dx\right) &= \left(-(C+1)\int_\Omega w^2 dx - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega w^2 dx\right) 2e^{2(C+1)t} \\
&\leqslant \left(-(C+1)\int_\Omega w^2 dx\right) 2e^{2(C+1)t} + \\
&\quad + \left(-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega w^2 dx + \int_\Omega |M\nabla\psi|^2 dx\right) 2e^{2(C+1)t} \\
&= \left(-(C+1)\int_\Omega w^2 dx\right) 2e^{2(C+1)t} + \\
&\quad + \left(\left(\int_\Omega fw dx - \int_\Omega (a - \frac{1}{2}\operatorname{div}\vec{b}) w^2 dx\right)\right) 2e^{2(C+1)t} \\
&= \left(-(C+1)\int_\Omega w^2 dx\right) 2e^{2(C+1)t} + \\
&\quad + \left(\left(\int_\Omega \left(\frac{f}{\sqrt{2}}\right)(\sqrt{2}) w dx - \int_\Omega (a - \frac{1}{2}\operatorname{div}\vec{b}) w^2 dx\right)\right) 2e^{2(C+1)t} \\
&\leqslant \left(-(C+1)\int_\Omega w^2 dx\right) 2e^{2(C+1)t} + \\
&\quad + \left(\frac{1}{4}\int_\Omega |f|^2 dx + (C+1)\int_\Omega w^2 dx\right) 2e^{2(C+1)t} \\
&= \frac{e^{2(C+1)t}}{2}\int_\Omega |f|^2 dx.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Ao integrar (4.3) em $[0, t]$, obtém-se

$$\int_\Omega |w(x,0)|^2 dx - e^{2(C+1)t}\int_\Omega |w(x,t)|^2 dx \leqslant \int_0^t \left(\frac{e^{2(C+1)y}}{2}\int_\Omega |f|^2 dx\right) dy$$

de onde segue que

$$\int_\Omega |w(x,0)|^2 dx \leqslant e^{2(C+1)t}|w(x,t)|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \left(\frac{e^{2(C+1)y}}{2} \int_\Omega |f|^2 dx \right) dy. \tag{4.4}$$

Defina

$$\begin{aligned} \theta : (0,T) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \theta(t) = \sup\{e^{-2s\alpha(y,t)} : y \in \Omega\}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

e note que

$$\theta(t) \leqslant e^{\frac{2se^{2\lambda||\psi||}}{\beta(t)}}, \tag{4.6}$$

pois

$$-2s\alpha(y,t) = \frac{-2se^{\lambda\psi(y)} + 2se^{2\lambda||\psi||}}{\beta(t)} \leqslant \frac{2se^{2\lambda||\psi||}}{\beta(t)}.$$

Segue da definição de ψ que $\psi \geqslant 0$ em $\overline{\Omega}$, de onde obtemos que

$$\frac{1}{\phi(y,t)} = \frac{\beta(t)}{e^{\lambda\psi(y)}} \leqslant \beta(t) = t(T-t) \leqslant T^2 = \sqrt[3]{\overline{C}}$$

portanto,

$$\frac{1}{\phi^3} \leqslant \overline{C} \quad \text{em} \quad \overline{\Omega} \times [0,T]. \tag{4.7}$$

Assim, obtém-se $1 \leqslant \theta(t)e^{2s\alpha(x,t)}$ em $(0,T)$ e $1 \leqslant \overline{C}\phi^3$ em $\overline{\Omega} \times (0,T)$. Note também que

$$e^{2(C+1)t} \leqslant e^{2(C+1)T} = C_1 \quad \forall\, 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{4.8}$$

Fazendo a substituição de (4.8) em (4.4) temos que

$$\begin{aligned} |w(\cdot,0)|^2_{L^2(\Omega)} &\leqslant C_1 \int_\Omega 1 \cdot |w(x,t)|^2_{L^2(\Omega)} dx + C_1 \int_0^t \left(\int_\Omega 1 \cdot |f|^2 dx \right) dy \\ &\leqslant C_1 \int_\Omega \theta(t)e^{2s\alpha(x,t)}|w(x,t)|^2 dx + C_1 \int_0^t \left(\int_\Omega \theta(t)e^{2s\alpha(x,t)}|f|^2 dx \right) dy \\ &= C_1\theta(t) \int_\Omega e^{2s\alpha(x,t)}|w(x,t)|^2 dx + C_1\theta(t) \int_0^t \left(\int_\Omega e^{2s\alpha(x,t)}|f|^2 dx \right) dy. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{|w(\cdot,0)|^2_{L^2(\Omega)}}{\theta(t)} \leqslant C_1 \int_\Omega e^{2s\alpha(x,t)}|w(x,t)|^2 dx + C_1 \int_0^t \left(\int_\Omega e^{2s\alpha(x,t)}|f|^2 dx \right) dy \tag{4.9}$$

pois, $\theta(t) > 0$. Note ainda que

$$0 < e^{\frac{-2se^{2\lambda||\psi||}}{\beta}} \leqslant \frac{1}{\theta(t)} \quad \forall\, 0 < t < T. \tag{4.10}$$

Dessa forma, substituindo em (4.9) temos

$$|w(\cdot,0)|^2_{L^2(\Omega)} e^{\frac{-2se^{2\lambda||\psi||}}{\beta}} \leqslant C_1 \int_\Omega e^{2s\alpha(x,t)}|w(x,t)|^2 dx + C_1 \int_0^t \left(\int_\Omega e^{2s\alpha(x,t)}|f|^2 dx \right) dy. \tag{4.11}$$

Para t_1 e t_2 fixos com $0 < t_1 < t_2 < T$, temos integrando (4.12) em $[t_1, t_2]$ que

$$
\begin{aligned}
|w(\cdot,0)|^2_{L^2(\Omega)} \int_{t_1}^{t_2} e^{\frac{-2se^{2\lambda||\psi||}}{\beta}} dt \leqslant\ & C_1 \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega e^{2s\alpha(x,t)} |w(x,t)|^2 dx \\
& + C_1 \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^t \left(\int_\Omega e^{2s\alpha(x,t)} |f|^2 dx \right) dy \right) dt \\
\leqslant\ & C_1 \int_0^T \int_\Omega e^{2s\alpha(x,t)} |w(x,t)|^2 dx \\
& + C_1 \int_0^T \left(\int_0^t \left(\int_\Omega e^{2s\alpha(x,t)} |f|^2 dx \right) dy \right) dt.
\end{aligned} \tag{4.12}
$$

Defina

$$J = \int_0^T \left(\int_0^t \left(\int_\Omega e^{2s\alpha(x,t)} |f|^2 dx \right) dy \right) dt.$$

Proposição 4.0.1. *Sejam* $f \in L^2(Q_T)$, $s > 0$ *e* α *como em (3.2). Então temos*

$$J = \int_0^T \left(\int_0^t \left(\int_\Omega e^{2s\alpha(x,t)} |f|^2 dx \right) dy \right) dt \leqslant C_2 \int_{Q_T} |f(x,t)|^2 dx dt$$

com $C_2 = C_2(\Omega, T) > 0$.

Demonstração. Com efeito, consideremos $\lambda_0 \geqslant 1$ tal que $e^{\lambda_0 ||\psi||} \geqslant 2$, dessa forma para $\lambda \geqslant \lambda_0$, temos

$$2s\alpha(y,t) = \frac{2s(e^{\lambda\psi(y)} - e^{2\lambda||\psi||})}{\beta(t)} \leqslant \frac{-2se^{\lambda||\psi||}}{\beta(t)}, \tag{4.13}$$

pois

$$e^{\lambda\psi(y)} + e^{\lambda||\psi||} \leqslant e^{\lambda||\psi||} + e^{\lambda||\psi||} = 2e^{\lambda||\psi||} \leqslant e^{2\lambda||\psi||}. \tag{4.14}$$

Note que

$$e^{2s\alpha(y,t)} \leqslant e^{\frac{-2se^{\lambda||\psi||}}{\beta}} \quad 0 < t < T \tag{4.15}$$

portanto

$$
\begin{aligned}
J \leqslant\ & \int_0^T \left(\int_0^t \left(\int_\Omega e^{\frac{-2se^{\lambda||\psi||}}{\beta}} |f|^2 dx \right) dy \right) dt \\
=\ & \int_\Omega \left(\int_0^T \left(\int_0^t e^{\frac{-2se^{\lambda||\psi||}}{\beta}} |f|^2 dy \right) dt \right) dx
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

Defina

$$I(x) = \int_0^T \left(\int_0^t e^{\frac{-2se^{\lambda||\psi||}}{\beta}} |f|^2 dy \right) dt. \tag{4.17}$$

Sugue de (4.17) e (4.16) que

$$J \leqslant \int_\Omega I(x) dx \tag{4.18}$$

Faremos uma mudança de variáveis em $I(x)$ definida pela aplicação linear

$$\sigma(t,y) = (y,t)$$

temos que a matriz de σ é $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ com $|\det \sigma| = 1$. Defina $K \subset \mathbb{R}^2$ como

$$K = \{(t, y); 0 < t < T, 0 < y < t\}$$

e $\widehat{K} = \sigma(K)$ com

$$\widehat{K} = \{(t, y); 0 < y < T, 0 < t < y\}.$$

Observando que $e^{\frac{-2se^{\lambda\|\psi\|}}{\beta(t)}}$ é regular, tem-se pelo teorema de mudança de variáveis que

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^T \left(\int_0^t e^{\frac{-2se^{\lambda\|\psi\|}}{\beta(t)}} |f(x,y)|^2 dy \right) dt \\ &= \int_0^T \left(\int_y^T e^{\frac{-2se^{\lambda\|\psi\|}}{\beta(y)}} |f(x,t)|^2 dt \right) dy \\ &\leqslant \int_0^T \left(\int_0^T e^{\frac{-2se^{\lambda\|\psi\|}}{\beta(y)}} |f(x,t)|^2 dt \right) dy \\ &= \left(\int_0^T |f(x,t)|^2 dt \right) \int_0^T e^{\frac{-2se^{\lambda\|\psi\|}}{\beta(y)}} dy \\ &\leqslant \int_0^T \left(|f(x,t)|^2 dt \right) \int_0^T dy \\ &= C_2 \int_0^T |f(x,t)|^2 dt \end{aligned} \tag{4.19}$$

onde $C_2 = T$, segue de (4.19) e (4.20) que

$$J \leqslant C_2 \int_\Omega \left(\int_0^T |f(x,t)|^2 dt \right) dx = C_2 \int_0^T \left(\int_\Omega |f(x,t)|^2 dx \right) dt = C_2 \int_{Q_T} |f(x,t)|^2 dx dt. \tag{4.20}$$

o que prova a proposição.

□

Dessa forma segue da Proposição 4.0.1, de (4.12) e de (4.7) que

$$\begin{aligned} &|w(\cdot,0)|^2_{L^2(\Omega)} \int_{t_1}^{t_2} e^{\frac{-2se^{2\lambda\|\psi\|}}{\beta}} dt \leqslant C_1 \int_{Q_T} e^{2s\alpha(x,t)} |w(x,t)|^2 dx dt + C_1 C_2 \int_{Q_T} |f(x,t)|^2 dx dt \\ &\leqslant C_1 \overline{C} \int_{Q_T} e^{2s\alpha(x,t)} \phi^3 |w(x,t)|^2 dx dt + C_1 C_2 \int_{Q_T} |f(x,t)|^2 dx dt. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Segue do Teorema 3.0.3 (desigualdade de Carleman) para $\lambda \geqslant \lambda_0$, $s \geqslant s_0 \geqslant 1$ que

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} \lambda^4 s^3 \phi^3 |w|^2 e^{-2s\alpha} dx dt &\leqslant C_3 \left(\int_{Q_\omega} \lambda^4 s^3 \phi^3 e^{2s\alpha} |w|^2 dx dt + \int_{Q_T} e^{2s\alpha} |f|^2 dx dt \right) \\ &\leqslant C_3 \left(\int_{Q_\omega} \lambda^4 s^3 \phi^3 e^{2s\alpha} |w|^2 dx dt + \int_{Q_T} e^{2s\alpha} \lambda^4 s^3 |f|^2 dx dt \right) \\ &\leqslant s^3 \lambda^4 C_3 \left(\int_{Q_\omega} \phi^3 e^{2s\alpha} |w|^2 dx dt + \int_{Q_T} |f|^2 dx dt \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{Q_T} \phi^3 |w|^2 e^{-2s\alpha} dxdt \leqslant C_3 \left(\int_{Q_\omega} \phi^3 e^{2s\alpha} |w|^2 dxdt + \int_{Q_T} e^{2s\alpha} |f|^2 dxdt \right). \qquad (4.22)$$

Segue de (4.22) e (4.21) que

$$|w(\cdot,0)|^2_{L^2(\Omega)} \int_{t_1}^{t_2} e^{\frac{-2se^{2\lambda||\psi||}}{\beta}} dt \leqslant \; C_3 C_1 \overline{C} \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} \phi^3 |w|^2 dxdt + (C_1 C_2 + C_3 C_1 \overline{C}) \int_{Q_T} |f|^2 dxdt \qquad (4.23)$$

Fazendo $t_1 = \frac{T}{4}$ e $t_2 = \frac{3T}{4}$, segue-se que

$$\frac{-32se^{2\lambda||\psi||}}{T^2} \leqslant \frac{-32se^{2\lambda||\psi||}}{\beta(t)} \quad \forall \;\; \frac{T}{4} \leqslant t \leqslant \frac{3T}{4}.$$

Assim,

$$\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} e^{\frac{-32se^{2\lambda||\psi||}}{T^2}} dt \leqslant \int_{t_1}^{t_2} e^{\frac{-32se^{2\lambda||\psi||}}{\beta(t)}} dt.$$

Portanto,

$$\frac{T}{2} e^{\frac{-32se^{2\lambda||\psi||}}{T^2}} \leqslant \int_{t_1}^{t_2} e^{\frac{-32se^{2\lambda||\psi||}}{\beta(t)}} dt. \qquad (4.24)$$

Denotando $C_4 = C_4(\lambda, s) = \frac{2}{T} e^{\frac{32se^{2\lambda||\psi||}}{T^2}}$, temos em (4.23) que

$$\frac{1}{C_4} |w(.,0)|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \; C_3 C_1 \overline{C} \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} \phi^3 |w|^2 dxdt + (C_1 C_2 + C_3 C_1 \overline{C}) \int_{Q_T} |f|^2 dxdt.$$

Portanto, fazendo $C = C(s, \lambda) = \max\{C_4 C_3 C_1, C_4(C_1 C_2 + C_3 C_1 \overline{C})\}$, temos

$$\begin{aligned} |w(.,0)|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant & \; C_4 C_3 C_1 \overline{C} \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} \phi^3 |w|^2 dxdt + C_4 (C_1 C_2 + C_3 C_1 \overline{C}) \int_{Q_T} |f|^2 dxdt \\ \leqslant & \; C \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} \phi^3 |w|^2 dxdt + C \int_{Q_T} |f|^2 dxdt. \end{aligned} \qquad (4.25)$$

Assim, obtemos a desigualdade de observabilidade desejada

$$\int_\Omega |w(x,0)|^2 dx \leqslant C \left(\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha(x,t)} \phi^3 |w|^2 dxdt + \int_{Q_T} |f|^2 dxdt \right). \qquad (4.26)$$

□

Capítulo 5

Controlabilidade Nula para o Sistema Linear

Seja a equação linear

$$\left| \begin{array}{rl} p_t + A(t)p + a(y,t)p = & \chi_\omega u(y,t) \ \text{ em } \ Q_T \\ p(y,t) = & 0 \ \text{ em } \ \Sigma_T \\ p(y,0) = & p_0(y) \ \text{ em } \ \Omega, \end{array} \right. \tag{5.1}$$

com $u \in L^2(Q_T)$, $p_0 \in L^2(\Omega)$. Portanto, de forma análoga ao feito no capítulo 2 prova-se que a solução fraca de (5.1) tem regularidade

$$p \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \qquad p' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$$

ou de outra forma

$$p \in H^1(0,T;H^{-1}(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$$

portanto, temos $p \in C([0,T];L^2(\Omega))$.
A controlabilidade nula para o sistema (5.1) significa encontrar um controle $u \in L^2(Q_T)$ tal que a solução fraca p do sistema (5.1) satisfaça

$$p(y,T) = 0 \ \text{ q.t.p.} \quad \text{em } \ \Omega.$$

Teorema 5.0.2. *Dado* $p_0 \in L^2(\Omega)$, *existe um controle* $u \in L^2(Q_T)$ *tal que a solução fraca* $p(y,t)$ *da equação (5.1) satisfaz* $p(y,T) = 0$ *q.t.p. em* Ω.

Demonstração. Seja o sistema linear adjunto de (5.1)

$$\left|\begin{aligned} w_t + A^*(t)w + a(y,t)w = &\ \ 0 \ \text{ em } \ Q_T \\ w(y,t) = &\ \ 0 \ \text{ em } \ \Sigma_T \\ w(y,T) = &\ \ w_T(y) \ \text{ em } \ \Omega. \end{aligned}\right. \tag{5.2}$$

Onde $|a(x,t)|_{L^\infty} < \infty$ e A^* é o operador adjunto formal de A.

Note que, para $s \geqslant s_0$ e $\lambda \geqslant \lambda_0$ suficientemente grandes, existe $C_0 = C_0(\lambda) > 0$ tal que $e^{-2s\alpha}\phi \geqslant C_0$. De fato, supondo $\lambda \geqslant \lambda_0$ suficientemente grande temos $2 \leqslant e^{\lambda||\psi||}$, portanto

$$e^{\lambda\psi} + e^{\lambda||\psi||} \leqslant e^{\lambda||\psi||} + e^{\lambda||\psi||} \leqslant e^{2\lambda||\psi||}$$

dessa forma

$$e^{\lambda||\psi||} \leqslant e^{2\lambda||\psi||} - e^{\lambda\psi} = -\alpha(x,t)\beta(t)$$

que implica em

$$-2s\alpha \geqslant \frac{2se^{\lambda||\psi||}}{\beta(t)} \geqslant \frac{2s}{\beta(t)} \geqslant \frac{1}{\beta(t)}$$

logo,

$$e^{-2s\alpha} \geqslant e^{\frac{1}{\beta(t)}}. \tag{5.3}$$

Note ainda que $\phi = \frac{e^{\lambda\psi}}{\beta(t)} \leqslant \frac{e^{\lambda||\psi||}}{\beta(t)}$, o que implica em $\phi^{-3} \geqslant \frac{\beta(t)^3}{e^{3\lambda||\psi||}}$. Segue de (5.3) que $e^{-2s\alpha} \geqslant 1$, assim temos $e^{-2s\alpha}\phi^{-3} \geqslant \frac{e^{\frac{1}{\beta(t)}}}{e^{3\lambda||\psi||}}\beta(t)^3$. Lembrando que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^3} = \infty$, temos ainda que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{\beta(t)} = \infty$$

o que implica

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{\beta(t)}}}{\frac{1}{\beta(t)^3}} = \infty.$$

Portanto, existe N_1 tal que

$$e^{\frac{1}{\beta(t)}}\beta(t)^3 \geqslant 1 \quad \forall \ 0 < t < N_1.$$

Analogamente,

$$\lim_{t\to T^-} \frac{1}{\beta(t)} = \infty$$

implica

$$\lim_{t\to T^-} \frac{e^{\frac{1}{\beta(t)}}}{\frac{1}{\beta(t)^3}} = \infty$$

portanto, existe N_2 tal que

$$e^{\frac{1}{\beta(t)}}\beta(t)^3 \geqslant 1 \quad \forall\ N_2 < t < T$$

sendo $[N_1, N_2]$ compacto e $e^{\frac{1}{\beta(t)}}\beta(t)^3 > 0$, concluímos que existe $C > 0$ tal que

$$e^{\frac{1}{\beta(t)}}\beta(t)^3 \geqslant C \quad \forall\ N_1 < t < N_2, \tag{5.4}$$

fazendo $C_0 = \max\left\{\dfrac{C}{e^{3\lambda||\psi||}}, \dfrac{1}{e^{3\lambda||\psi||}}\right\}$, temos

$$e^{-2s\alpha}\varphi^{-3} \geqslant C_0. \tag{5.5}$$

Definição 5.0.1. *Para cada* s, λ *definimos o espaço*

$$L^2(Q_T; e^{-2s\alpha}\varphi^{-3}) := \left\{u : Q_T \to \mathbb{R}; \int_{Q_T} e^{-2s\alpha}\varphi^{-3}u^2 dxdt < \infty\right\}.$$

Afirmação: $L^2(Q_T; e^{-2s\alpha}\varphi^{-3}) \subseteq L^2(Q_T)$.

De fato, note que $u^2C_0 \leqslant e^{-2s\alpha}\varphi^{-3}u^2$ em Q_T, dessa forma se $u \in L^2(Q_T; e^{-2s\alpha}\varphi^{-3})$, então $\displaystyle\int_{Q_T} e^{-2s\alpha}\varphi^{-3}u^2 dxdt < \infty$. Portanto, $\displaystyle\int_{Q_T} u^2 dxdt < \infty$ que implica $u \in L^2(Q_T)$. Logo,

$$L^2(Q_T; e^{-2s\alpha}\varphi^{-3}) \subseteq L^2(Q_T). \tag{5.6}$$

Ademais, para cada $u \in L^2(Q_T; e^{-2s\alpha}\varphi^{-3})$ existe uma única solução fraca de (5.1), com $p_0 \in L^2(\Omega)$, associada a u a qual denotaremos por p_u. Para cada $\epsilon > 0$ definimos o funcional

$$\begin{aligned} N_\epsilon : L^2(Q_T; e^{-2s\alpha}\varphi^{-3}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto N_\epsilon(u) := \int_{Q_T} e^{-2s\alpha}\varphi^{-3}u^2 dxdt + \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega p_u(x,T)^2 dx. \end{aligned}$$

Veja que o funcional N_ϵ pode ser escrito como

$$N_\epsilon(u) = ||e^{-s\alpha}\varphi^{-\frac{3}{2}}u||^2_{L^2(Q_T)} + \frac{1}{\epsilon}||p_u(\cdot, T)||^2_{L^2(\Omega)}$$

Proposição 5.0.2. *O funcional* N_ϵ *é semi-contínuo inferiormente, estritamente convexo e coercivo em* $L^2(Q_T)$. *Portanto, o problema Variacional*

$$\min\{N_\epsilon(u)\},$$

tem única solução $u_\epsilon \in L^2(Q_T)$.

De fato, provemos a convexidade estrita. Sejam $u, v \in L^2(Q_T; e^{-2s\alpha}\phi^{-3})$ com $u \neq v$, e seja $t \in [0,1]$. Considere $w = (1-t)u + tv$, teremos assim que $p_w = (1-t)p_u + tp_v$, então temos que

$$\begin{aligned}
N_\epsilon(w) = {} & \|e^{-s\alpha}\phi^{-\frac{3}{2}}w\|^2_{L^2(Q_T)} + \tfrac{1}{\epsilon}\|p_w(\cdot,T)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
< {} & (1-t)\|e^{-s\alpha}\phi^{-\frac{3}{2}}u\|^2_{L^2(Q_T)} + t\|e^{-s\alpha}\phi^{-\frac{3}{2}}v\|^2_{L^2(Q_T)} + \\
& +(1-t)\tfrac{1}{\epsilon}\|p_u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\Omega)} + t\tfrac{1}{\epsilon}\|p_v(\cdot,T)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
= {} & (1-t)\left(\|e^{-s\alpha}\phi^{-\frac{3}{2}}u\|^2_{L^2(Q_T)} + \tfrac{1}{\epsilon}\|p_u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + \\
& +t\left(\|e^{-s\alpha}\phi^{-\frac{3}{2}}v\|^2_{L^2(Q_T)} + \tfrac{1}{\epsilon}\|p_v(\cdot,T)\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \\
= {} & (1-t)N_\epsilon(u) + tN_\epsilon(v).
\end{aligned}$$

Portanto, N_ϵ é estritamente convexo. N_ϵ é coercivo pois

$$N_\epsilon(u) = \|e^{-s\alpha}\phi^{-\frac{3}{2}}u\|^2_{L^2(Q_T)} + \frac{1}{\epsilon}\|p_u(\cdot,T)\|^2_{L^2(\Omega)} \geqslant C_0\|u\|^2_{L^2(Q_T)}.$$

Portanto temos que N_ϵ é semi-contínuo inferiormente, estritamente convexo e coercivo em $L^2(Q_T)$, logo temos que

$$\exists u_\epsilon \in L^2(Q_T) \ \text{ tal que } \ N_\epsilon(u_\epsilon) = \min\{N_\epsilon(u)\} \tag{5.7}$$

Lema 5.0.1. *Seja* u_ϵ *o mínimo do operador* N_ϵ*. Então*

$$u_\epsilon = e^{2s\alpha}\phi^3\chi_\omega w_\epsilon \quad \text{q.t.p.} \ \textit{em} \ Q_T,$$

com

$$w_\epsilon \in H^1(0,T;H^{-1}(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$$

solução fraca do sistema

$$\left|\begin{aligned}
(w_\epsilon)_t - A^*(t)w_\epsilon - a(y,t)w_\epsilon = {} & 0 \ \textit{em} \ Q_T \\
w_\epsilon(y,t) = {} & 0 \ \textit{em} \ \Sigma_T \\
w_\epsilon(y,T) = {} & \tfrac{-1}{\epsilon}p_\epsilon(y,T) \ \textit{em} \ \Omega,
\end{aligned}\right. \tag{5.8}$$

Onde p_ϵ *é solução fraca de (5.1) que é*

$$\left|\begin{aligned}
(p_\epsilon)_t + A(t)p_\epsilon + a(y,t)p_\epsilon = {} & \chi_\omega u_\epsilon(y,t) \ \textit{em} \ Q_T \\
p_\epsilon(y,t) = {} & 0 \ \textit{em} \ \Sigma_T \\
p_\epsilon(y,0) = {} & p_0(y) \ \textit{em} \ \Omega.
\end{aligned}\right. \tag{5.9}$$

Demonstração. Note que cada solução fraca de (5.1) pode ser escrita como $p = \hat{p} + \bar{p}$, onde $\hat{p}$ e $\bar{p}$ soluções fracas de

$$\left| \begin{aligned} \hat{p}_t + A(t)\hat{p} + a(y,t)\hat{p} &= \ 0 \ \text{ em } \ Q_T \\ \hat{p}(y,t) &= \ 0 \ \text{ em } \ \Sigma_T \\ \hat{p}(y,0) &= \ p_0(y) \ \text{ em } \ \Omega \end{aligned} \right. \tag{5.10}$$

e

$$\left| \begin{aligned} \bar{p}_t + A(t)\bar{p} + a(y,t)\bar{p} &= \ \chi_\omega u(y,t) \ \text{ em } \ Q_T \\ \bar{p}(y,t) &= \ 0 \ \text{ em } \ \Sigma_T \\ \bar{p}(y,0) &= \ 0 \ \text{ em } \ \Omega, \end{aligned} \right. \tag{5.11}$$

respectivamente. Veja que $\hat{p}$ não depende de u, assim podemos escrever

$$p_u = \hat{p} + \bar{p}_u.$$

Seja a seguinte aplicação definida por :

$$\begin{aligned} L : L^2(Q_T) \ &\longrightarrow L^2(\Omega) \\ u \qquad &\longmapsto Lu = \bar{p}_u(x,T). \end{aligned}$$

Veja que em (5.11), temos a dependência linear da solução $\bar{p}_u$ para o controle u, dessa forma a aplicação acima está bem definida e é linear. De fato, Se $u, v \in L^2(Q_T)$, $a, b \in \mathbb{R}$, temos que

$$L(au + bv) = \bar{p}_{au+bv}(x,T) = (a\bar{p}_u + b\bar{p}_v)(x,T) = a\bar{p}_u(x,T) + b\bar{p}_v(x,T) = aL(u) + bL(v).$$

Portanto, L é linear. Denotando $J_\epsilon(u) = N_\epsilon(u)$, temos

$$J_\epsilon(u) = \int_{Q_T} e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u^2 dxdt + \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega (\hat{p} + Lu)^2 dx.$$

A derivada de Gateaux de J_ϵ em u_ϵ é nula para todo $v \in L^2(Q_T)$, pois $J_\epsilon(u_\epsilon) = \min\{J_\epsilon(u) : u \in L^2(Q_T)\}$, logo

$$J'_\epsilon(u_\epsilon)v = 0 \quad \forall\, v \in L^2(Q_T).$$

Portanto,

$$\lim_{r\to 0} \frac{J_\epsilon(u_\epsilon + rv) - J_\epsilon(u_\epsilon)}{r} = 0, \tag{5.12}$$

i.e.,

$$\begin{aligned}
J_\epsilon(u_\epsilon + rv) =& \int_{Q_T} e^{-2s\alpha}\phi^{-3}(u_\epsilon + rv)^2 dxdt + \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega (\hat{p}(x,T) + L(u_\epsilon + rv))^2 dx \\
=& \int_{Q_T} e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u_\epsilon^2 dxdt + 2r\int_{Q_T} e^{-2s\alpha}\phi^{-3}(u_\epsilon v)dxdt + \\
&+ r^2\int_{Q_T} e^{-2s\alpha}\phi^{-3}v^2 dxdt + \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega (\hat{p}(x,T) + L(u_\epsilon) + rL(v))^2 dx \\
=& \int_{Q_T} e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u_\epsilon^2 dxdt + 2r\int_{Q_T} e^{-2s\alpha}\phi^{-3}(u_\epsilon v)dxdt + \\
&+ r^2\int_{Q_T} e^{-2s\alpha}\phi^{-3}v^2 dxdt + \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega (p_\epsilon(x,T) + rL(v))^2 dx \\
=& \int_{Q_T} e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u_\epsilon^2 dxdt + 2r\int_{Q_T} e^{-2s\alpha}\phi^{-3}(u_\epsilon v)dxdt + \\
&+ r^2\int_{Q_T} e^{-2s\alpha}\phi^{-3}v^2 dxdt + \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega (p_\epsilon(x,T))^2 dx + \\
&+ \frac{r^2}{\epsilon}\int_\Omega (L(v))^2 dx + \frac{2r}{\epsilon}\int_\Omega (p_\epsilon(x,T)L(v))dx \\
=& J_\epsilon(u_\epsilon) + 2r\left(\int_{Q_T} e^{-2s\alpha}\phi^{-3}(u_\epsilon v)dxdt + \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega (p_\epsilon(x,T)L(v))dx\right) + \\
&+ r^2\left(\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega (L(v))^2 dx + \int_{Q_T} e^{-2s\alpha}\phi^{-3}v^2 dxdt\right).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\tfrac{J_\epsilon(u_\epsilon+rv)-J_\epsilon(u_\epsilon)}{r} =& 2\left(\int_{Q_T} e^{-2s\alpha}\phi^{-3}(u_\epsilon v)dxdt + \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega (p_\epsilon(x,T)L(v))dx\right) + \\
&+ r\left(\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega (L(v))^2 dx + \int_{Q_T} e^{-2s\alpha}\phi^{-3}v^2 dxdt\right).
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Passando ao limite quando $r \to 0$ em (5.13) e usando (5.12), obtemos

$$\int_{Q_T} e^{-2s\alpha}\phi^{-3}(u_\epsilon v)dxdt + \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega (p_\epsilon(x,T)L(v))dx = 0. \tag{5.14}$$

Por definição $L(v) = \bar{p}_v(.,T)$, e para facilitar a notação fazemos $z = \bar{p}_v$, assim segue que z satisfaz

$$\left|\begin{aligned}
z_t + A(t)z + a(y,t)z =& \ \chi_\omega v \ \text{ em } \ Q_T \\
z(y,t) =& \ 0 \ \text{ em } \ \Sigma_T \\
z(y,0) =& \ 0 \ \text{ em } \ \Omega.
\end{aligned}\right. \tag{5.15}$$

Portanto,

$$\int_{Q_T} e^{-2s\alpha}\phi^{-3}(u_\epsilon v)dxdt + \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega (p_\epsilon(x,T)z(x,T))dx = 0. \tag{5.16}$$

Multiplicando $(5.15)_1$ por w_ϵ e integrando em Q_T, obtém-se

$$\int_{Q_T} z_t w_\epsilon dxdt + \int_{Q_T} (A(t)z)\, w_\epsilon dxdt + \int_{Q_T} a(y,t)zw_\epsilon dxdt = \int_{Q_T} \chi_\omega v w_\epsilon dxdt. \tag{5.17}$$

Note ainda que

$$\begin{aligned}\int_{Q_T}\left(\tilde{A}(t)z\right)w_\epsilon dxdt+\int_{Q_T}B\nabla z\cdot\nabla w_\epsilon dxdt &= \int_{\Sigma_T}w_\epsilon(B\nabla z\cdot\eta)d\Sigma_T\\ &= 0\end{aligned}\tag{5.18}$$

$$\begin{aligned}\int_{Q_T}z\tilde{A}(t)w_\epsilon dxdt+\int_{Q_T}\nabla z\cdot B\nabla w_\epsilon dxdt &= \int_{\Sigma_T}z(B\nabla w_\epsilon\cdot\eta)d\Sigma_T\\ &= 0\end{aligned}\tag{5.19}$$

como $\nabla z\cdot B\nabla w_\epsilon = B\nabla z\cdot\nabla w_\epsilon$, segue de (5.18) e (5.19) que

$$\int_{Q_T}z\tilde{A}(t)w_\epsilon dxdt=\int_{Q_T}w_\epsilon\tilde{A}(t)zdxdt.\tag{5.20}$$

Ainda temos que

$$\begin{aligned}\int_{Q_T}w_\epsilon\nabla z\cdot\vec{b}dxdt+\int_{Q_T}z\mathrm{div}(w_\epsilon\vec{b})dxdt &= \int_{\Sigma_T}zw_\epsilon(\vec{b}\cdot\eta)d\Sigma_T\\ &= 0.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{Q_T}w_\epsilon\nabla z\cdot\vec{b}dxdt=-\int_{Q_T}z\mathrm{div}(w_\epsilon\vec{b})dxdt.\tag{5.21}$$

Temos ainda que

$$\begin{aligned}\int_{Q_T}z_tw_\epsilon dxdt &= \textstyle\int_{Q_T}(zw_\epsilon)_tdxdt-\int_{Q_T}z(w_\epsilon)_tdxdt\\ &= \textstyle\int_\Omega z(x,T)w_\epsilon(x,T)dx-\int_\Omega z(x,0)w_\epsilon(x,0)dx-\int_{Q_T}z(w_\epsilon)_tdxdt\\ &= \textstyle\frac{-1}{\epsilon}\int_\Omega z(x,T)p_\epsilon(x,T)dx-\int_{Q_T}z(w_\epsilon)_tdxdt\end{aligned}\tag{5.22}$$

pois, $z(x,0)=0$ em Ω. Lembrando que $\tilde{A}w=\tilde{A}^*w$ e substituindo (5.20), (5.21) e (5.22) em (5.17), tem-se

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega z(x,T)p_\epsilon(x,T)dx-\int_{Q_T}z(w_\epsilon)_tdxdt+\int_{Q_T}\left(\tilde{A}(t)w_\epsilon\right)zdxdt-\int_{Q_T}z\mathrm{div}(w_\epsilon\vec{b})dxdt+\\ &+\int_{Q_T}a(y,t)zw_\epsilon dxdt=\int_{Q_T}\chi_\omega vw_\epsilon dxdt.\end{aligned}\tag{5.23}$$

Portanto,

$$-\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega z(x,T)p_\epsilon(x,T)dx+\int_{Q_T}z\left(-(w_\epsilon)_t+A^*(t)w_\epsilon+a(y,t)w_\epsilon\right)dxdt=\int_{Q_T}\chi_\omega vw_\epsilon dxdt.$$

Por $(5.8)_1$ temos

$$-\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega z(x,T)p_\epsilon(x,T)dx=\int_{Q_T}\chi_\omega vw_\epsilon dxdt.\tag{5.24}$$

De (5.24) e (5.16), tem-se que

$$\int_{Q_T} (\chi_\omega w_\epsilon) v dxdt = \int_{Q_T} (e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u_\epsilon) v dxdt \qquad \forall v \in L^2(Q_T) \tag{5.25}$$

portanto,

$$u_\epsilon = e^{2s\alpha}\phi^3\chi_\omega w_\epsilon \qquad \text{q.t.p. em } Q_T. \tag{5.26}$$

□

Segue de (5.26) e (5.9) que

$$\left| \begin{aligned} (p_\epsilon)_t + A(t)p_\epsilon + a(y,t)p_\epsilon = &\ \chi_\omega e^{2s\alpha}\phi^3 w_\epsilon \ \text{ em } Q_T \\ p_\epsilon(y,t) = &\ 0 \ \text{ em } \Sigma_T \\ p_\epsilon(y,0) = &\ p_0(y) \ \text{ em } \Omega, \end{aligned} \right. \tag{5.27}$$

pois $\chi_\omega^2 = \chi_\omega$. Multiplicando $(5.27)_1$ por w_ϵ e integrando em Q_T, tem-se

$$\begin{aligned} &\int_{Q_T} w_\epsilon (p_\epsilon)_t dxdt + \int_{Q_T} w_\epsilon A(t) p_\epsilon dxdt + \int_{Q_T} w_\epsilon a(y,t) p_\epsilon dxdt \\ &= \int_{Q_T} \chi_\omega e^{2s\alpha}\phi^3 w_\epsilon^2 dxdt = \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3 w_\epsilon^2 dxdt. \end{aligned} \tag{5.28}$$

De forma inteiramente análoga a (5.20), (5.21) e (5.22) temos

$$\int_{Q_T} p_\epsilon \tilde{A}(t) w_\epsilon dxdt = \int_{Q_T} w_\epsilon \tilde{A}(t) p_\epsilon dxdt \tag{5.29}$$

$$\int_{Q_T} w_\epsilon \nabla p_\epsilon \cdot \vec{b} dxdt = -\int_{Q_T} p_\epsilon \text{div}(w_\epsilon \vec{b}) dxdt \tag{5.30}$$

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} w_\epsilon (p_\epsilon)_t dxdt = &\ \int_{Q_T} (p_\epsilon w_\epsilon)_t dxdt - \int_{Q_T} p_\epsilon (w_\epsilon)_t dxdt \\ = &\ \int_\Omega p_\epsilon(x,T) w_\epsilon(x,T) dx - \int_\Omega p_\epsilon(x,0) w_\epsilon(x,0) dx \\ &- \int_{Q_T} (p_\epsilon)(w_\epsilon)_t dxdt \\ = &\ -\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega |p_\epsilon(x,T)|^2 dx - \int_\Omega p_0(x,0) w_\epsilon(x,0) dx \\ &- \int_{Q_T} p_\epsilon (w_\epsilon)_t dxdt. \end{aligned} \tag{5.31}$$

Substituindo (5.29), (5.30) e (5.31) em (5.28) temos

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega |p_\epsilon(x,T)|^2 dx - \int_\Omega p_0(x,0) w_\epsilon(x,0) dx - \int_{Q_T} p_\epsilon (w_\epsilon)_t dxdt \\ &+ \int_{Q_T} p_\epsilon \tilde{A}(t) w_\epsilon dxdt - \int_{Q_T} p_\epsilon \text{div}(w_\epsilon \vec{b}) dxdt + \int_{Q_T} w_\epsilon a(y,t) p_\epsilon dxdt \\ &= -\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega |p_\epsilon(x,T)|^2 dx - \int_\Omega p_0(x,0) w_\epsilon(x,0) dx \\ &+ \int_{Q_T} p_\epsilon \left[-(w_\epsilon)_t + A^*(t) w_\epsilon dxdt + w_\epsilon a(y,t) \right] dxdt = \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3 w_\epsilon^2 dxdt. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Usando a equação $(5.8)_1$ temos

$$\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3 w_\epsilon^2 dxdt = -\frac{1}{\epsilon}\int_\Omega |p_\epsilon(x,T)|^2 dx - \int_\Omega p_0(x,0)w_\epsilon(x,0)dx. \tag{5.33}$$

Dessa forma, temos

$$\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3 w_\epsilon^2 dxdt + \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega |p_\epsilon(x,T)|^2 dx = -\int_\Omega p_0(x,0)w_\epsilon(x,0)dx. \tag{5.34}$$

Note que

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega p_0(x,0)w_\epsilon(x,0)dx\right| &\leqslant |p_0|_{L^2(\Omega)}|w_\epsilon(\cdot,0)|_{L^2(\Omega)} \\ &= |p_0|_{L^2(\Omega)}\left(\int_\Omega |w_\epsilon(x,0)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{5.35}$$

Segue do Teorema 4.0.1 (desigualdade de observabilidade) aplicado a w_ϵ que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |w_\epsilon(x,0)|^2 dx &\leqslant C\left(\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3|w_\epsilon|^2 dxdt\right) \\ &\leqslant C\left(\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi|w_\epsilon|^2 dxdt + \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega |p_\epsilon(x,T)|^2 dx\right) \end{aligned} \tag{5.36}$$

para $\lambda \geqslant \lambda_0$ e $s \geqslant s_0$, suficientemente grandes. Logo substituindo em (5.35) temos

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega p_0(x,0)w_\epsilon(x,0)dx\right| &\leqslant C^{\frac{1}{2}}|p_0|_{L^2(\Omega)}\left(\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi|w_\epsilon|^2 dxdt + \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega |p_\epsilon(x,T)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \frac{C}{2}|p_0|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\left(\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi|w_\epsilon|^2 dxdt + \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega |p_\epsilon(x,T)|^2 dx\right) \end{aligned} \tag{5.37}$$

De (5.34) e (5.37) obtemos

$$\begin{aligned} &\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3 w_\epsilon^2 dxdt + \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega |p_\epsilon(x,T)|^2 dx \leqslant \frac{C}{2}|p_0|^2_{L^2(\Omega)} \\ &+\frac{1}{2}\left(\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi|w_\epsilon|^2 dxdt + \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega |p_\epsilon(x,T)|^2 dx\right). \end{aligned} \tag{5.38}$$

Portanto,

$$\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3 w_\epsilon^2 dxdt + \frac{1}{\epsilon}\int_\Omega |p_\epsilon(x,T)|^2 dx \leqslant C|p_0|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{5.39}$$

Logo,

$$\int_\Omega |p_\epsilon(x,T)|^2 dx \leqslant \epsilon C|p_0|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{5.40}$$

Fixando $s = s_0$ e $\lambda = \lambda_0$ suficientemente grandes, teremos $C(s_0,\lambda_0)$ constante, portanto temos que (5.40) é válida para todo $\epsilon > 0$, então

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_\Omega |p_\epsilon(x,T)|^2 dx = 0$$

isto é,

$$|p_\epsilon(x,T)| \to 0 \quad \text{forte} \quad \text{em} \quad L^2(\Omega). \tag{5.41}$$

De (5.39) também temos que

$$\int_{Q_T} \chi_\omega e^{2s\alpha}\phi^3 w_\epsilon^2 dxdt = \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\phi^3 w_\epsilon^2 dxdtdx \leqslant C|p_0|^2_{L^2(\Omega)} \tag{5.42}$$

Como $u_\epsilon = e^{2s\alpha}\phi^3 w_\epsilon$ q.t.p. em Q_T

$$u_\epsilon^2 = (e^{2s\alpha}\phi^3)(e^{2s\alpha}\phi^3 w_\epsilon^2) \quad \text{q.t.p. em } Q_T.$$

lembrando que $e^{-2s\alpha}\phi^{-3} \geqslant C_0$ em Q_T, temos

$$u_\epsilon^2 \leqslant \frac{1}{C_0}(e^{2s\alpha}\phi^3 w_\epsilon^2) \quad \text{q.t.p. em } Q_T$$

portanto,

$$\int_{Q_T} u_\epsilon^2 dxdt \leqslant \int_{Q_T} \frac{1}{C_0}(e^{2s\alpha}\phi^3 w_\epsilon^2) \leqslant \frac{1}{C_0} C|p_0|^2_{L^2(\Omega)} = K \tag{5.43}$$

e como λ_0 e s_0 são fixados, teremos que K é constante, portanto

$$\int_{Q_T} u_\epsilon^2 dxdt \leqslant K \quad \forall \epsilon > 0 \tag{5.44}$$

Como $L^2(Q_T)$ é um espaço de Banach reflexivo, de (5.44) temos que existe uma sequência $(u_m) \subseteq (u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ com $(u_m) \subseteq L^2(Q_T)$ e $u \in L^2(Q_T)$, tais que

$$u_m \rightharpoonup u \quad \text{fracamente em } L^2(Q_T) \tag{5.45}$$

como

$$\left| \begin{aligned} (p_m)_t + A(t)p_m + a(y,t)p_m = &\ \chi_\omega u_m \text{ em } Q_T \\ p_m(y,t) = &\ 0 \text{ em } \Sigma_T \\ p_m(y,0) = &\ p_0(y) \text{ em } \Omega, \end{aligned} \right. \tag{5.46}$$

temos que $p_m \in H^1(0,T;H^{-1}(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ e de (5.46) e (5.45) temos que existe $p \in H^1(0,T;H^{-1}(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ tal que

$$p_m \rightharpoonup p \quad \text{fracamente em} \quad H^1(0,T;H^{-1}(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{5.47}$$

Portanto, temos que p satisfaz

$$\left| \begin{aligned} p_t + A(t)p + a(y,t)p = &\ \chi_\omega u \text{ em } Q_T \\ p(y,t) = &\ 0 \text{ em } \Sigma_T \\ p(y,0) = &\ p_0(y) \text{ em } \Omega \end{aligned} \right. \tag{5.48}$$

no sentido fraco.

Por outro lado, temos de (5.47) que

$$p_m \to p \quad \text{forte em} \quad C([0,T];L^2(\Omega)). \tag{5.49}$$

De (5.41) temos que

$$p_m(x,T) \to 0 \quad \text{forte} \quad \text{em} \quad L^2(\Omega). \tag{5.50}$$

Assim, temos que existe uma subsequência $(p_{km}) \subseteq (p_m)$ tal que

$$p_{km}(x,T) \to 0 \quad \text{q.t.p} \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{5.51}$$

Também de (5.49) temos que

$$p_{km}(x,t) \to p(x,t) \quad \text{q.t.p em } \Omega \ \ \forall\, 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{5.52}$$

Portanto

$$p_{km}(x,T) \to p(x,T) \quad \text{q.t.p em } \Omega. \tag{5.53}$$

De (5.51) e (5.53) segue que

$$p(x,T) = 0 \quad \text{q.t.p em } \Omega, \tag{5.54}$$

isto prova o Teorema 5.0.2. □

Também observe que $e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u_m^2 = \chi_\omega e^{2s\alpha}\phi^3 w_m^2$, logo integrando em Q_T e usando (5.42), temos que

$$\int_{Q_T} e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u_m^2 dxdt \leqslant C|p_0|^2_{L^2(\Omega)} \quad \forall\, m \in \mathbb{N} \tag{5.55}$$

portanto,

$$\int_{Q_T} e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u^2 dxdt \leqslant C|p_0|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{5.56}$$

Observe que $u_\epsilon = e^{2s\alpha}\phi^3 w_\epsilon$ no sistema (5.9). Portanto, quando $\epsilon \to 0$ em (5.9) obtemos um controle $u \in L^2(Q_T)$ e uma função $p \in H^1(0,T;H^{-1}(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ solução, no sentido fraco, de

$$\left|\begin{aligned} p_t + A(t)p + a(y,t)p = &\ \ \chi_\omega u \ \text{ em } \ Q_T \\ p(y,t) = &\ \ 0 \ \text{ em } \ \Sigma_T \\ p(y,0) = &\ \ p_0(y) \ \text{ em } \ \Omega, \end{aligned}\right. \tag{5.57}$$

tal que

$$p(x,T) = 0 \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Capítulo 6

Controlabilidade Nula para o Sistema Não Linear

Este capítulo é dedicado a investigar a controlabilidade nula do sistema não linear

$$\left|\begin{aligned} p_t + A(t)p + g(p) = &\ \chi_\omega u \ \text{ em } \ Q_T \\ p(y,t) = &\ 0 \ \text{ em } \ \Sigma_T \\ p(y,0) = &\ p_0(y) \ \text{ em } \ \Omega \end{aligned}\right. \tag{6.1}$$

com $u \in L^2(Q_T)$ e $p_0 \in L^2(\Omega)$; onde $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é globalmente Lipschitz, de classe C^1 e tal que $g(0) = 0$, com constante de Lipschitz M, i.e.,

$$|g(x) - g(y)| \leqslant M|x - y| \quad \forall p_1, p_2 \in \mathbb{R}. \tag{6.2}$$

Por outro lado, façamos uma breve análise de alguns espaços que serão necessários para a demonstração da controlabilidade nula do sistema (6.1). Considere inicialmente o seguinte espaço

$$W^1(0,T;H_0^1(\Omega);H^{-1}(\Omega)) = \{p \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) : p' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))\}$$

com o produto interno

$$\langle u, v\rangle_{W^1} = \int_0^T (u,v)_{H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} ds + \int_0^T (u',v')_{H^{-1}(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)} ds \tag{6.3}$$

Considerando a norma induzida pelo produto interno dado em (6.3), que doravante denotaremos por $\|\cdot\|_{W^1}$, dessa forma temos que

$$\|u\|_{W^1}^2 = \|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 + \|u'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}^2. \tag{6.4}$$

Segue do fato de $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ e $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ serem espaços de Hilbert que $(W^1,\langle,\rangle_{W^1})$ é também espaço de Hilbert. Veja que se $p \in W^1(0,T;H_0^1(\Omega);H^{-1}(\Omega))$, então $p \in C([0,T];L^2(\Omega))$, portanto temos que a aplicação

$$t \longmapsto \|p(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

é contínua em $[0,T]$, logo temos que é integrável em $[0,T]$. Segue-se que

$$\exists \int_0^T \|p(t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt = \int_0^T \int_\Omega |p(x,t)|^2 dx dt.$$

Portanto, $p \in L^2(Q_T)$. Considerando a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} G : C([0,T];L^2(\Omega)) &\longrightarrow L^2(Q_T) \\ p &\longmapsto p. \end{aligned}$$

Dessa forma G está bem definida, ademais é uma transformação linear e claramente injetora. Portanto, temos que

$$C([0,T];L^2(\Omega)) \subseteq L^2(Q_T), \tag{6.5}$$

então

$$W^1(0,T;H_0^1(\Omega);H^{-1}(\Omega)) \subseteq C([0,T];L^2(\Omega)) \subseteq L^2(Q_T). \tag{6.6}$$

Note que

$$\begin{aligned} H : L^2(0,T;L^2(\Omega)) &\longrightarrow L^2(Q_T) \\ p &\longmapsto p \end{aligned} \tag{6.7}$$

está também bem definida e é um isomorfismo.
De fato, $\exists \int_0^T \|p(t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt \iff \exists \int_0^T \int_\Omega |p(x,t)|^2 dx dt$, logo a aplicação linear contínua que é claramente injetora, também é sobrejetora, portanto

$$L^2(0,T;L^2(\Omega)) \simeq L^2(Q_T). \tag{6.8}$$

Além disso, $H_0^1(\Omega)$ está imerso compactamente em $L^2(\Omega)$, o qual está imerso continuamente em $H^{-1}(\Omega)$, portanto temos pelo Teorema 1.1.8 e por (6.8) que

$$W^1(0,T;H_0^1(\Omega);H^{-1}(\Omega)) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{6.9}$$

Considere o seguinte subconjunto de $L^2(Q_T)$

$$B = \{p \in W^1(0,T;H_0^1(\Omega);H^{-1}(\Omega)) : \|p\|_{W^1} < M_1\}$$

onde M_1 é uma constante a ser definida. Vamos primeiramente linearizar o sistema (6.1), considere a função auxiliar $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(p) = \begin{cases} \dfrac{g(p)}{p} & \text{se } \ p \neq 0 \\ \lim\limits_{\xi \to 0} \dfrac{g(\xi)}{\xi} & \text{se } \ p = 0, \end{cases} \tag{6.10}$$

assim temos o seguinte sistema linearizado

$$\left| \begin{aligned} p_t + A(t)p + f(\bar{p})p = &\ \ \chi_\omega u \ \text{ em } \ Q_T \\ p(y,t) = &\ \ 0 \ \text{ em } \ \Sigma_T \\ p(y,0) = &\ \ p_0(y) \ \text{ em } \ \Omega. \end{aligned} \right. \tag{6.11}$$

Neste caso temos que $a(y,t) = f(\bar{p}(y,t))$ em Q_T, observe que $\forall \bar{p} \in \mathbb{R}$, tem-se $|g(\bar{p})| \leqslant M|\bar{p}| \quad \forall \bar{p} \in \mathbb{R}$, então temos que $|f(\bar{p})| \leqslant M \quad \forall p \in \mathbb{R}$, ou seja, $|a(y,t)| \leqslant M$ em Q_T. Portanto, temos que $|a|_{L^\infty(Q_T)} \leqslant M$.

Assim, segue do Teorema 5.0.2 que para $\bar{p} \in W^1(0,T; H_0^1(\Omega); H^{-1}(\Omega))$, temos que existe $u \in L^2(Q_T; e^{-2s\alpha}\phi^{-3})$, com $\lambda = \lambda_0$ e $s = s_0$ fixos e suficientemente grandes, tal que a solução fraca de (6.11) satisfaz

$$p(y,T) = 0 \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega.$$

A controlabilidade nula do sistema (6.1) é estabelecida no seguinte

Teorema 6.0.3. *Suponha que* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*, globalmente Lipschitz, de classe* C^1 *em* $\mathbb{R}$ *tal que* $g(0) = 0$*,* $p_0 \in L^2(\Omega)$ *e* $T > 0$*. Então existe* $u \in L^2(Q_T)$ *e* $p \in W^1(0,T; H_0^1(\Omega); H^{-1}(\Omega))$ *solução fraca de (6.1) tal que*

$$p(y,T) = 0 \quad \textit{q.t.p.} \quad \textit{em} \quad \Omega.$$

Demonstração. Seja X um conjunto não vazio. Denotaremos por $2^X = \{A : A \ \text{ é um subconjunto não vazio de } X\} = P(X) - \{\emptyset\}$ onde $P(X)$ representa o conjunto das partes de X.

A prova do Teorema 6.0.3 é feita por meio do seguinte Teorema, conhecido como Teorema de Ponto Fixo de Kakutani.

Teorema 6.0.4. *(Ponto Fixo de Kakutani) Seja* X *um espaço vetorial topológico localmente convexo,* $B \neq \emptyset$ *e compacto, com* $B \subset X$ *e seja*

$$\begin{aligned} \Phi : B &\longrightarrow P(X) \\ \bar{p} &\longmapsto \Phi(\bar{p}) \end{aligned}$$

tal que para cada $\Phi(\bar{p})$ *seja convexo e* Φ *tenha gráfico fechado. Então o conjunto de pontos fixos de* Φ *é não vazio e compacto, i.e.,*

$$\exists p \in B \text{ tal que } p \in \Phi(p)$$

Consideremos $X = L^2(Q_T)$ e $B = \{p \in W^1(0,T;H_0^1(\Omega);H^{-1}(\Omega)) : ||p||_{W^1} \leqslant M_1\}$ onde M_1 é uma constante a ser definida de forma adequada. Note que

$$B \subseteq C([0,T];L^2(\Omega)) \subseteq L^2(Q_T).$$

Proposição 6.0.3. *Seja* B *como definido acima, então* B *é convexo e é subconjunto compacto de* $L^2(Q_T)$.

Demonstração. De fato, sejam $u, v \in B$ e $t \in [0,1]$, dessa forma

$$||(1-t)u + tv||_{W^1} \leqslant (1-t)||u||_{W^1} + t||v||_{W^1} \leqslant (1-t)M_1 + tM_1 = M_1$$

Logo, B é convexo. Mostremos que a imersão em $L^2(Q_T)$ é compacta. Com efeito, seja $(p_m) \subset B$, então $||p_m||_{W^1} \leqslant M_1$, portanto

$$\begin{aligned} &||p_m||_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leqslant M_1 \\ &||\tfrac{d}{dt}(p_m)||_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leqslant M_1 \end{aligned}$$

ou seja, (p_m) é limitada em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, $\frac{d}{dt}(b_m)$ é limitada em $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, segue pelo Teorema 1.1.8 (Aubin-Lions) que B é compacto. $\square$

Seja a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \Phi : B &\longrightarrow P(X) \\ \bar{p} &\longmapsto \Phi(\bar{p}) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{p}) = \Big\{ &p \in W^1(0,T;H_0^1(\Omega);H^{-1}(\Omega)) : p \text{ é solução fraca de } (6.11) \\ &\text{para algum } u \in L^2(Q_T, e^{-2s\alpha}\phi^{-3}) \text{ com } \int_{Q_T} e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u^2 dxdt \leqslant C\int_\Omega |p_0|^2 dx \\ &\text{e } p(y,T) = 0 \text{ q.t.p. em } Q_T \Big\} \end{aligned} \tag{6.12}$$

Com $\lambda = \lambda_0$ e $s = s_0$ arbitrariamente grandes e fixos, segue do capítulo anterior que, para cada $\bar{p} \in B$, temos $\Phi(\bar{p}) \neq \emptyset$. Portanto, Φ está bem definida.

Lema 6.0.2. *Seja Φ definida em (6.12). Então Φ é convexa, $\Phi(\bar{p}) \subset B$ para todo $\bar{p} \in B$, $\Phi(\bar{p})$ é fechado em $L^2(Q_T)$ para todo $\bar{p} \in B$ e Φ tem gráfico fechado.*

Demonstração. Provemos que Φ é convexo. De fato, sejam $p, q \in \Phi(\bar{p})$, dessa forma existem $u, v \in L^2(Q_T, e^{-2s\alpha}\phi^{-3})$ para p e q, respectivamente soluções fracas de (6.11) tais que

$$\int_{Q_T} e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u^2 dxdt \leqslant C\int_{\Omega} |p_0(x)|^2 dx; \text{ e } p(x,T) = 0 \text{ q.t.p. em } \Omega, \tag{6.13}$$

$$\int_{Q_T} e^{-2s\alpha}\phi^{-3}v^2 dxdt \leqslant C\int_{\Omega} |p_0(x)|^2 dx; \text{ e } q(x,T) = 0 \text{ q.t.p. em } \Omega. \tag{6.14}$$

Definindo $z = (1-t)p + tq$ e $w = (1-t)u + tv$, temos que z satisfaz

$$\left| \begin{aligned} z_t + A(t)z + f(\bar{p})z = & \ \chi_\omega w \text{ em } Q_T \\ z(y,t) = & \ 0 \text{ em } \Sigma_T \\ z(y,0) = & \ p_0(y) \text{ em } \Omega. \end{aligned} \right. \tag{6.15}$$

Temos de (6.13) e (6.14) que

$$|ue^{-s\alpha}\phi^{-\frac{3}{2}}|_{L^2(Q_T)} \leqslant \sqrt{C}|p_0|_{L^2(\Omega)}; \tag{6.16}$$

$$|ve^{-s\alpha}\phi^{-\frac{3}{2}}|_{L^2(Q_T)} \leqslant \sqrt{C}|p_0|_{L^2(\Omega)}; \tag{6.17}$$

Por outro lado, $e^{-2s\alpha}\phi^{-3}w = (1-t)e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u + te^{-2s\alpha}\phi^{-3}v \in L^2(Q_T)$ e também

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} e^{-2s\alpha}\phi^{-3}w^2 dxdt = & \ |e^{-s\alpha}\phi^{-\frac{3}{2}}w|^2_{L^2(Q_T)} \\ \leqslant & \ \left[(1-t)|ue^{-s\alpha}\phi^{-\frac{3}{2}}|_{L^2(Q_T)} + t|ve^{-s\alpha}\phi^{-\frac{3}{2}}|_{Q_T}\right]^2 \\ \leqslant & \ \left[(1-t)\sqrt{C}|p_0|_{L^2(\Omega)} + t\sqrt{C}|p_0|_{L^2(\Omega)}\right]^2 \\ = & \ C|p_0|^2_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Dessa forma $w \in L^2(Q_T; e^{-2s\alpha}\phi^{-3})$ e

$$\int_{Q_T} e^{-2s\alpha}\phi^{-3}w^2 dxdt \leqslant C|p_0|^2_{L^2(\Omega)}$$

Portanto $z \in \Phi(\bar{p})$. Mostremos que para M_1 adequado $\Phi(B) \subset B$. Com efeito, seja $\bar{p} \in B$, devemos mostrar que $\Phi(\bar{p}) \subset B$. Assim, seja $p \in \Phi(\bar{p})$, então p é solução fraca de (6.11) para algum $u \in L^2(Q_T; e^{-2s\alpha}\phi^{-3})$. Portanto, multiplicando $(6.11)_1$ por p e integrando em Ω temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |p(x,t)|^2 dx + \int_\Omega p\tilde{A}(t)p dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla p^2 \cdot \vec{b} dx + \int_\Omega f(\bar{p})p^2 dx = \int_\Omega \chi_\omega u p dx$$

note também que

$$\begin{aligned}\int_\Omega p\tilde{A}(t)p dx + \int_\Omega \nabla p \cdot B\nabla p dx &= \int_\Gamma p(B\nabla p \cdot \eta) d\Gamma \\ &= 0\end{aligned}$$

lembrando que $\nabla p \cdot B\nabla p = -|M\nabla p|^2$ e $\alpha_0|\nabla p| \leqslant |M\nabla p|$, temos que

$$\int_\Omega p\tilde{A}(t)p dx = \int_\Omega |M\nabla p|^2 dx$$

Observe ainda que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega \nabla p^2 \cdot \vec{b} dx &= -\frac{1}{2}\int_\Omega p^2 \mathrm{div}\vec{b} dx + \int_\Gamma p^2 \vec{b} \cdot \eta d\Gamma \\ &= -\frac{1}{2}\int_\Omega p^2 \mathrm{div}\vec{b} dx.\end{aligned}$$

Assim, segue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |p(x,t)|^2 dx + \int_\Omega |M\nabla p|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega p^2 \mathrm{div}\vec{b} dx + \int_\Omega f(\bar{p})p^2 dx = \int_\Omega \chi_\omega u p dx$$

donde segue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |p(x,t)|^2 dx + \int_\Omega |M\nabla p|^2 dx = \frac{1}{2}\int_\Omega p^2 \mathrm{div}\vec{b} dx + \int_\Omega (-f(\bar{p}))p^2 dx + \int_\Omega \chi_\omega u p dx$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |p(x,t)|^2 dx + \int_\Omega \alpha_0^2 |\nabla p|^2 dx &\leqslant \frac{1}{2}\int_\Omega p^2 \mathrm{div}\vec{b} dx + M\int_\Omega p^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega p^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_\Omega |\chi_\omega u|^2 dx \\ &\leqslant \left(M + \frac{1}{2}|\mathrm{div}\vec{b}|_\infty + \frac{1}{2}\right)\int_\Omega p^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega u^2 dx.\end{aligned}$$

Fazendo $\bar{k} = \min\{\alpha_0, \frac{1}{2}\}$, temos

$$\bar{k}\left(\frac{d}{dt}\int_\Omega |p(x,t)|^2 dx + \int_\Omega |\nabla p|^2 dx\right) \leqslant \left(M + \frac{1}{2}|\mathrm{div}\vec{b}|_\infty + \frac{1}{2}\right)\int_\Omega p^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega u^2 dx.$$

Fazendo $k = \max\{\frac{M + \frac{1}{2}|\mathrm{div}\vec{b}|_\infty + \frac{1}{2}}{\bar{k}}, \frac{1}{2\bar{k}}\}$ temos

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega |p(x,t)|^2 dx + \|p\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leqslant k\left(\int_\Omega p^2 dx + \int_\Omega u^2 dx\right).$$

Integrando de 0 a t temos

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega |p(x,t)|^2 dx - \int_\Omega |p(x,0)|^2 dx + \int_0^t \|p(\cdot,s)\|^2_{H_0^1(\Omega)} ds \\
&\leqslant k \int_0^t \|p(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds + k \int_0^t \int_\Omega u^2 dx ds \\
&\leqslant k \int_0^t \|p(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds + k \int_0^T \int_\Omega u^2 dx ds \\
&= k \int_0^t \|p(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds + k\|u\|^2_{L^2(Q_T)}.
\end{aligned}
$$

Sendo $p(x,0) = p_0(x)$, decorre que

$$
\int_\Omega |p(x,t)|^2 dx + \int_0^t \|p(\cdot,s)\|^2_{H_0^1(\Omega)} ds \leqslant k \int_0^t \|p(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds + k\|u\|^2_{L^2(Q_T)} + |p(x,0)|^2_{L^2(\Omega)} \tag{6.18}
$$

Para s e λ suficientemente grandes e fixos temos pelo capítulo anterior que existe uma constante positiva tal que $\bar{C} \leqslant e^{-2s\alpha}$. Logo, de (5.56) (do capítulo anterior) segue que

$$
\bar{C}\|u\|^2_{L^2(Q_T)} \leqslant C|p_0|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{6.19}
$$

Fazendo

$$
k_1 = \frac{C}{\bar{C}} \quad \text{e} \quad C_1 = [kk_1 + 1]|p_0|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{6.20}
$$

segue de (6.18) e (6.19) que

$$
\int_\Omega |p(x,t)|^2 dx + \int_0^t \|p(\cdot,s)\|^2_{H_0^1(\Omega)} ds \leqslant \; k \int_0^t \|p(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds + C_1. \tag{6.21}
$$

Definamos por

$$
\gamma(s) = \|p(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^s \|p(\cdot,r)\|^2_{H_0^1(\Omega)} dr \quad 0 \leqslant s \leqslant t \tag{6.22}
$$

e como $\|p(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \gamma(s)$, segue de (6.21) que

$$
\gamma(s) \leqslant k \int_0^s \gamma(r) dr + C_1 \quad 0 \leqslant s \leqslant t. \tag{6.23}
$$

Segue da desigualdade de Gronwall que

$$
\gamma(s) \leqslant C_1 e^{ks} \qquad \forall 0 \leqslant s \leqslant t. \tag{6.24}
$$

Portanto,

$$
\gamma(s) \leqslant C_1 e^{ks} \leqslant C_1 e^{kT} = C_2. \tag{6.25}
$$

Logo,

$$
\int_\Omega |p(x,t)|^2 dx + \int_0^t \|p(\cdot,s)\|^2_{H_0^1(\Omega)} ds \leqslant \; C_2 \qquad \forall 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{6.26}
$$

Por outro lado como $H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$, então existe C tal que

$$||\cdot||_{H_0^1(\Omega)} \leqslant C||\cdot||_{L^2(\Omega)}. \tag{6.27}$$

Lembrando que se $h \in H^{-1}(\Omega)$, temos:

$$||h||_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{||v||\leqslant 1} \{\langle h, v\rangle : v \in H_0^1(\Omega)\}$$

Dado $v \in H_0^1(\Omega)$ com $||v||_{H_0^1(\Omega)} \leqslant 1$, lembrando que existe c_0 tal que $|M\nabla p| \leqslant c_0|\nabla p|$ e usando (6.19), (6.26) e (6.27) temos

$$\begin{aligned}
|\langle p_t, v\rangle| = {} & |\langle -\tilde{A}p - f(\bar{p})p - \nabla p \cdot \vec{b} + \chi_\omega u, v\rangle| \\
\leqslant {} & |\langle \tilde{A}p, v\rangle| + |\langle f(\bar{p})p, v\rangle| + |\langle \nabla p \cdot \vec{b}, v\rangle| + |\langle \chi_\omega u, v\rangle| \\
\leqslant {} & \left|\int_\Omega M\nabla p \cdot M\nabla v dx\right| + M\left|\int_\Omega p v dx\right| + |\vec{b}|_\infty \int_{Q_T} |\nabla p||v| dx + \int_\Omega |\chi_\omega u v| dx \\
\leqslant {} & \left(\int_\Omega |M\nabla p|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |M\nabla v|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + M|p(\cdot,t)|_{L^2(\Omega)}|v|_{L^2(\Omega)} \\
& + |\vec{b}|_\infty |p(\cdot,t)|_{H_0^1(\Omega)}|v|_{L^2(\Omega)} + |u|_{L^2(\Omega)}|v|_{L^2(\Omega)} \\
\leqslant {} & c_0^2|p(\cdot,t)|_{H_0^1(\Omega)}|v|_{H_0^1(\Omega)} + MC|p(\cdot,t)|_{L^2(\Omega)}|v|_{H_0^1(\Omega)} + C|\vec{b}|_\infty|p(\cdot,t)|_{H_0^1(\Omega)}|v|_{H_0^1(\Omega)} \\
& + C|u|_{L^2(\Omega)}|v|_{H_0^1(\Omega)} \\
\leqslant {} & (c_0^2|p(\cdot,t)|_{H_0^1(\Omega)} + MCC_2^{\frac{1}{2}} + C|\vec{b}|_\infty|p(\cdot,t)|_{H_0^1(\Omega)} + Ck_1^{\frac{1}{2}}|p_0|_{L^2(\Omega)})|v|_{H_0^1(\Omega)}
\end{aligned} \tag{6.28}$$

Fazendo $C_3 = MCC_2^{\frac{1}{2}} + Ck_1^{\frac{1}{2}}|p_0|_{L^2(\Omega)}$ e $C_4 = (c_0^2 + C|\vec{b}|_\infty)$ temos que

$$|p_t(\cdot,t)|_{H^{-1}(\Omega)} \leqslant C_4|p|_{H_0^1(\Omega)} + C_3 \tag{6.29}$$

Dessa forma elevando ao quadrado e integrando em $[0, T]$ temos

$$|p_t|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leqslant 2C_4^2||p||^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + 2C_3^2 T \tag{6.30}$$

Como $||p||^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leqslant C_2$, podemos considerar $M_1 = (2C_4^2C_2 + 2C_3^2T)^{\frac{1}{2}}$. Logo, segue de (6.30) que

$$||p||_{W^1} \leqslant M_1 \tag{6.31}$$

Provemos que $\Phi(\bar{p})$ é fechado para cada $\bar{p} \in B$. Tomando $\bar{p}$ fixo em B, e pegando uma sequência $(p_n) \subset \Phi(\bar{p})$ convergente fortemente em $L^2(Q_T)$ para algum $p \in L^2(Q_T)$, i.e.

$$p_n \to p \quad \text{forte em} \quad L^2(Q_T)$$

Segue imediatamente da definição de $\Phi(\bar{p})$ que cada p_n satisfaz

$$\left| \begin{array}{rl} (p_n)_t + A(t)p_n + f(\bar{p})p_n = & \chi_\omega u_n \text{ em } Q_T \\ p_n(y,t) = & 0 \text{ em } \Sigma_T \\ p_n(y,0) = & p_0(y) \text{ em } \Omega \end{array} \right. \tag{6.32}$$

$$\int_{Q_T} e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u_n^2 dxdt \leqslant C\int_\Omega |p_0|^2 dx \tag{6.33}$$

Mas temos que existe $\bar{C} > 0$ tal que $\bar{C} \leqslant e^{-2s\alpha}\phi^{-3}$ e fazendo $k = \frac{C}{\bar{C}}$ obtemos

$$\int_{Q_T} u_n^2 dxdt \leqslant k\int_\Omega |p_0|^2 dx. \tag{6.34}$$

Portanto,

$$||u_n||^2_{L^2(Q_T)} \leqslant k||p_0||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{6.35}$$

De (6.35) segue que (u_n) é limitada em $L^2(Q_T)$ o qual é reflexivo, dessa forma existe subsequência ainda denotada por u_n fracamente convergente, ou seja, existe $u \in L^2(Q_T)$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{fracamente em } L^2(Q_T).$$

Lembrando que $p_n \in B$, dessa forma temos

$$||p_n||_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + ||(p_n)_t||_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leqslant M_1.$$

Logo p_n é limitada em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ e $(p_n)_t$ é limitada em $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, e sendo ambos os espaços reflexivos, temos que existem subsequências ainda denotadas por p_n e $(p_n)_t$, e $p \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ com $p_t \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ tais que

$$\left| \begin{array}{l} p_n \rightharpoonup p \text{ fracamente em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ (p_n)_t \rightharpoonup p_t \text{ fracamente em } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \\ p_n \longrightarrow p \text{ fortemente em } L^2(Q_T) \end{array} \right. \tag{6.36}$$

Pois as derivadas são no sentido das distribuições e temos as imersões: $L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow D(Q_T)$, $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \hookrightarrow D(Q_T)$ e a unicidade do limite garante a segunda convergência acima. Segue do Teorema 1.1.8 (Aubin-Lions) a última convergência em (6.36). Passando ao limite em (6.32) e (6.33) quando $n \to \infty$, segue de (6.36) que

$$\left| \begin{array}{rl} p_t + A(t)p + f(\bar{p})p = & \chi_\omega u \text{ em } Q_T \\ p(y,t) = & 0 \text{ em } \Sigma_T \\ p(y,0) = & p_0(y) \text{ em } \Omega \end{array} \right. \tag{6.37}$$

no sentido fraco e

$$\int_{Q_T} e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u^2 dxdt \leqslant C\int_{\Omega}|p_0|^2 dx. \tag{6.38}$$

Logo, temos que $p \in \Phi(\bar{p})$. Dessa forma temos que $\Phi(\bar{p})$ é fechado em $L^2(Q_T)$, sendo B um subconjunto compacto de $L^2(Q_T)$ e $\Phi(\bar{p})$ subconjunto de B, temos que $\Phi(\bar{p})$ é compacto em $L^2(Q_T)$.

Provemos que Φ tem gráfico fechado. Considere $\bar{p}_n \to \bar{p}$ e $p_n \to p$ fortemente em $L^2(Q_T)$ com $p_n \in \Phi(\bar{p}_n)$. Nosso objetivo é mostrar que $p \in \Phi(\bar{p})$. Dessa forma segue que p_n satisfaz

$$\left|\begin{array}{rl} (p_n)_t + A(t)p_n + f(\bar{p}_n)p_n = & \chi_\omega u_n \text{ em } Q_T \\ p_n(y,t) = & 0 \text{ em } \Sigma_T \\ p_n(y,0) = & p_0(y) \text{ em } \Omega, \end{array}\right. \tag{6.39}$$

no sentido fraco, com

$$\int_{Q_T} e^{-2s\alpha}\phi^{-3}u_n^2 dxdt \leqslant C\int_{\Omega}|p_0|^2 dx, \tag{6.40}$$

para algum $u_n \in L^2(Q_T, e^{-2s\alpha}\phi^{-3})$. Para k_1 como em (6.20) temos que

$$||u_n||^2_{L^2(Q_T)} \leqslant k_1||p_0||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{6.41}$$

Note ainda que $p_n \in \Phi(\bar{p}_n) \subset B$, portanto

$$||p_n||_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + ||(p_n)_t||_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leqslant M_1 \tag{6.42}$$

Segue de (6.41) e (6.42) que

$$\left|\begin{array}{ll} u_n & \text{é limitada em } L^2(Q_T) \\ p_n & \text{é limitada em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ (p_n)_t & \text{limitada em } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \end{array}\right. \tag{6.43}$$

Portanto, existem $u \in L^2(Q_T)$, $p \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ com $p_t \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ e subsequências ainda denotadas por (u_n),(p_n) e $(p_n)_t$ tais que

$$\left|\begin{array}{l} u_n \rightharpoonup u \text{ fracamente em } L^2(Q_T) \\ p_n \rightharpoonup p \text{ fracamente em } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ (p_n)_t \rightharpoonup p_t \text{ fracamente em } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \\ p_n \longrightarrow p \text{ fortemente em } L^2(Q_T). \end{array}\right. \tag{6.44}$$

Veja que como temos

$$\left|\begin{array}{l} \bar{p}_n \longrightarrow \bar{p} \text{ fortemente em } L^2(Q_T) \\ p_n \longrightarrow p \text{ fortemente em } L^2(Q_T) \end{array}\right. \tag{6.45}$$

então

$$\left| \begin{array}{l} \bar{p}_n \longrightarrow \bar{p} \ \text{ q.t.p. em } Q_T \\ p_n \longrightarrow p \ \text{ q.t.p em } Q_T \end{array} \right. \tag{6.46}$$

Segue da continuidade de f que

$$\left| \begin{array}{l} f(\bar{p}_n) \longrightarrow f(\bar{p}) \ \text{ q.t.p. em } Q_T \\ f(\bar{p}_n)p_n \longrightarrow f(\bar{p})p \ \text{ q.t.p em } Q_T \end{array} \right. \tag{6.47}$$

Usando (6.27) teremos que

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} |f(\bar{p}_n)p_n|^2 dxdt &\leqslant M^2 \int_{Q_T} |p_n|^2 dxdt \\ &= M^2 \int_0^T \int_\Omega |p_n(x,t)|^2 dxdt \\ &= M^2 \int_0^T \|p_n(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt \\ &\leqslant M^2 \int_0^T C^2 \|p_n(\cdot,t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} dt \\ &= M^2 C^2 \|p_n\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \\ &\leqslant M^2 C^2 M_1 = K \end{aligned} \tag{6.48}$$

com K independente de n. Segue do Lema 1.1.2 (Lions), de (6.47) e (6.48) que

$$f(\bar{p}_n)p_n \rightharpoonup f(\bar{p})p \qquad \text{fracamente em } L^2(Q_T) \tag{6.49}$$

Donde conclui-se que p satisfaz

$$\left| \begin{array}{rl} p_t + A(t)p + f(\bar{p})p = & \chi_\omega u \ \text{ em } Q_T \\ p(y,t) = & 0 \ \text{ em } \Sigma_T \\ p(y,0) = & p_0(y) \ \text{ em } \Omega \end{array} \right. \tag{6.50}$$

no sentido fraco e

$$\int_{Q_T} e^{-2s\alpha} \phi^{-3} u^2 dxdt \leqslant C \int_\Omega |p_0|^2 dx \tag{6.51}$$

Portanto, $p \in \Phi(\bar{p})$. O que finaliza a prova do Lema. □

Decorre imediatamente do Lema 6.0.2 e do Teorema de Kakutani que existe $p \in B$ tal que $p \in \Phi(p)$, isto é, existe $u \in L^2(Q_T; e^{-2s\alpha}\phi^{-3}) \subset L^2(Q_T)$ tal que p é solução de (6.1) e

$$p(x,T) = 0 \qquad \text{q.t.p em } \Omega$$

□

Referências Bibliográficas

[1] Bachman, G. e Narici, L. -*Functional Analysis*. New York: Dover Publications, INC., 2000.

[2] Biezuner, R. J. - *Análise Funcional*. Notas de Aula. Belo Horizonte: UFMG,2009.

[3] Brezis, H.,*Functional Analysis , Sobolev Spaces and Partial Differencial Equations*. New york: Spriger, 2010.

[4] E.F. Cara and S. Guerreiro. *Global Carleman Inequalities for parabolic systems and applications to controllability*. SIAM Control Optm., V. 45, n^{o} 4 (2006) pp. 1395-1446.

[5] Castro, N. N. O. - *Soluções Fracas para um Sistema Hiperbólico Envolvendo o Operador p-Laplaciano (2<p<3)*. João Pessoa: UFPB, 2005.

[6] de Oliveira, C.R. - *Introdução à Análise Funcional*. Publicações Matemáticas. Rio de Janeior: IMPA, 2010.

[7] Evans, L. C. -*Partial Diferencial Equations*. v. 19. Providence: American Mathematical Society, 1998.

[8] Fursikov, A. V. e Yu Imanuvilov, O. -*Controllability of Evolution Equation*. Lectures Notes Series, Vol. 34, National University, RIM, Seoul, South Korea, 1996.

[9] Limaco,J. et al. - *Carleman Inequality and Null Controllability for Parabolic Equation*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática-UFRJ, 2009.

[10] Medeiros, L. A. J - *Lições de Equações Diferenciais Parciais*. Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2002.

[11] Medeiros, L. A. J. -*Tópicos em Equações Diferenciais Parciais*. Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2006.

[12] Medeiros, L. A; Malta, S. ; Miranda, M. M. - *Tópicos de Equações Diferenciais*. Rio de Janeiro: UFRJ, 1998.

[13] Menezes, Silvano B. de ; Limaco J. ; Medeiros, L.A. -*Remarks on Null Controllability for Semilinear Heat Equation in Moving Domains*. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2003, No. 16, 1-32.

[14] O. Yu Imanuvilov and M. Yamamoto, *Carleman Estimate for a Parabolic Equation in Sobolev Spaces of Negative Order and its Applications*, em Control of Nonlinear Distributed Parameter Systems, G. Chen et al. eds., Marcel- Dekker, 2000, pp. 113-137.

[15] Oleg Yu. Imanuvilov and Masahiro Yamamoto, *Carleman Inequalities for Parabolic Equations in Sobolev Spaces of Negative Order and Exact Controllability for Semilinear Parabolic Equations*. RIMS, Kyoto Univ. (2003) , 227-274.

[16] Oliveira, A. M. - *Soluções Fracas para um Sistema Hiperbólico envolvendo o Operador p-Laplaciano no* $\mathbb{R}^3$. 2006. 81f. Dissertação(Mestrado), Centro de Ciência Exatas e da Natureza, Departamento de Matemática, João Pessoa-PB.

[17] Tasayco, D. A. Y. - *Controlabilidade Nula para um Problema Parabólico não Linear*. 2011. 97f. Dissertação (Mestrado), Instituto de matemática, Universidade Federal Fluminense, Niterói-RJ.