



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA  
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
MESTRADO EM MATEMÁTICA

**Teoremas de convergência fraca e forte para o  
Método das Projeções Alternadas**

**Valdir Ferreira de Paula Junior**

**Teresina - 2013**

**Valdir Ferreira de Paula Junior**

**Dissertação de Mestrado:**

**Teoremas de convergência fraca e forte para o Método das  
Projeções Alternadas**

Dissertação submetida à Coordenação do  
Curso de Pós-Graduação em Matemática,  
da Universidade Federal do Piauí, como  
requisito parcial para obtenção do grau  
de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Marcos Vinício Travaglia

**Teresina - 2013**

Paula Junior, V. F.

Teoremas de convergência fraca e forte para o Método das Projeções Alternadas.

Valdir Ferreira de Paula Junior – Teresina: 2013.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Vinício Travaglia.

1. Otimização.

CDD 516.36

*A minha mãe Maria Zélia, meus irmãos Assis e  
Washington e a minha irmã Valdenia.*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado forças para superar todos os desafios da minha vida, inclusive para conseguir terminar essa dissertação.

A minha mãe, Maria Zélia (Zélia), que criou eu e meus irmãos com muita dificuldade, mas nunca deixou falta nada em casa, como principalmente, amor. Agradeço aos meus irmãos, Francisco Ferreira (Assis) e Washington e a minha irmã Valdenia Alves, os quais me ajudaram muito a realiza esse sonho, incentivando tanto financeiramente quanto moralmente. A meu pai Valdir Ferreira de Paula (o qual eu herdei seu nome).

Um agradecimento especial a minha prima Maria de Jesus ( Dona Jesus) por tudo o que ela fez por mim durante os três anos e meio em que me acolheu em sua casa, pois na ocasião ela mim tratou como um filho, bem como as suas adoráveis filhas Adrielle Ravena (Drica) e Andressa Daniele, por terem mim ajudado tanto. Aos meus primos e amigos Alan e Alex.

Um muito obrigado aos meus grandes amigos Edvalter Sena (Valtinho), por ter sido, e continua sendo, um amigo tão fiel, ao flamenguista Ailton Campos, por ter me ajudado em muitos trabalhos, e ao botafoguense Ricardo Barros, o qual é um dos melhores amigos que tenho. Esses três amigos tive o prazer de estudar com eles na graduação da UFPI, e com os dois primeiros no mestrado também.

Aos meus amigos do mestrado Felipe Mareiros (Lipe), que é um amigo em que se pode contar em todas as horas, o palmeirense Jefferson de Brito (Jeff), o qual admiro sua força de vontade, ao poeta e matemático Ramon Soares, ao amigo Leonardo (Leo) , Renata Batista (Renatinha), Joel Rabelo, Gilson, Emerson (Baiano), Yuri (grande Bacharel), Valdinês (Doutor Valdinês), Kelson, Edvaldo, Vitaliano Amaral, Alex Sandro, Franciane de Brito, aos amigos de Parnaíba Mykael Cardoso, Diego, Israel e Bernardo (o "Cara ", como é conhecido, na verdade ele não é de Parnaíba, mas sua cidade é tão próximo quanto você puder imaginar de Parnaíba). A minha amiga Fernanda e ao amigo Zenon. Aos meu

amigos de Regeneração Jerre Jones (o qual seu conhecimento em química supera, e muito, o meu em matemática), Sílvio Vilarinho (Silvinho) e Celso Romeu (25).

Agradeço muito ao meu amigo e professor Nelson Rios, o qual já aprendi muitas coisas com ele, por exemplo, a gostar de matemática, e continuo aprendendo, por exemplo, sobre a vida.

Ao professores da UFPI, em especial aos professores Gilvan, João Xavier, Paulo Alexandre, Humberto, Jurandir e Roger Peres.

Ao professor Cleon Barroso, que gentilmente aceitou a fazer parte da banca de defesa, e também por ter feito várias correções importantes nesta dissertação. Ao professor Paulo César (Paulinho), por ter feito várias correções dessa dissertação, e a sua adorável esposa professora Sissy Sousa.

Um agradecimento especial, ao meu orientador o professor Marcos Vinício Travaglia, o qual é a pessoa mais paciente e bondosa que conheço, a sua paciência só não é maior que sua inteligência.

Por último, e não menos importante, a minha namorada Samara Costa que me ajudou em muitos momentos difíceis, nesses dois anos de mestrado dando muita força, carinho e compreensão.

*“Quem escreve um livro constrói um castelo; Quem o lê, passa à habitá-lo”.*

Autor Desconhecido.

# Resumo

Nesta dissertação mostraremos que o **método das projeções alternadas** num espaço de Hilbert, sempre converge fraco para um elemento desse espaço, e daremos condições para que essa convergência seja forte ou à uma taxa geométrica. Este trabalho teve como base inicial o artigo dos autores D. C. Youla e H. Webb, intitulado "Image restoration by the method of convex projections-Parte 1 Theory", publicado em 1982 na revista IEEE Transactions on Medical Imaging, volume 1, páginas 81 a 94.



# Abstract

In this dissertation show that the **method of alternating projections** in a Hilbert space, always converges weakly to an element of this space, and we give conditions for this convergence is strong or at a geometric rate. This work was based on the original authors of the article D. C. Youla and H. Webb, entitled "Image restoration by the method of convex projections Part 1-Theory," published in 1982 in the journal IEEE Transactions on Medical Imaging, volume 1, pages 81-94.

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vi</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>3</b>
1.1 Definições e resultados básicos . . . . .	3
1.2 Propriedades da convergência fraca . . . . .	4
1.3 Teorema de Opial . . . . .	12
<b>2 O operador projeção</b>	<b>19</b>
2.1 Conjuntos convexos . . . . .	19
2.2 Definição e algumas propriedades do operador projeção . . . . .	20
<b>3 Teoremas de convergência para sequências de projeções alternadas</b>	<b>26</b>
3.1 Sequência de projeções alternadas . . . . .	26
3.2 Convergência forte no caso dos conjuntos serem subespaços afim fechados.	39
3.3 Algoritmo de passo simples cíclico. . . . .	45
3.4 Convergência forte e sua taxa de convergência no método das projeções alternadas. . . . .	50
<b>4 O contra-exemplo de Hundal</b>	<b>64</b>
4.1 Construção do contra-exemplo de Hundal . . . . .	65
4.2 Propriedades dos conjuntos H e K de Hundal. . . . .	66
<b>5 Aplicação</b>	<b>75</b>
5.1 Fundamentos Matemáticos da Tomografia Computadorizada . . . . .	75

---

5.1.1 Os modelos matemáticos. . . . .	75
5.2 Aplicando o método das projeções alternadas sobre conjuntos convexos. .	77
<b>A Comentários do Capítulo 1</b>	<b>79</b>
<b>B Comentários do Capítulo 2</b>	<b>81</b>
<b>C Comentários do Capítulo 3</b>	<b>92</b>
<b>D Comentários do Capítulo 4</b>	<b>97</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>100</b>

# Introdução

Em muitas aplicações da matemática é importante encontrar um ponto que pertença à interseção de um número finito de conjuntos convexos e fechados em um espaço de Hilbert qualquer, como por exemplo na restauração de imagens e na tomografia computadorizada (veja Capítulo 5). Tal problema é conhecido na literatura como **problema de viabilidade convexa**.

Daí a importância de se estudar um método para encontrar um ponto que pertença à interseção de um número finito de conjuntos convexos e fechados em um espaço de Hilbert qualquer, por isso, descreveremos o **método das projeções alternadas**, o qual consiste basicamente em construir uma sequência formada por projeções sucessivas sobre um número finito de conjuntos convexos e fechados. Mostraremos que o **problema de viabilidade convexa** é equivalente a um **problema de ponto fixo** (veja Corolário 3.1.1).

O nosso principal objetivo neste trabalho é mostrar que a sequência obtida pelo **método das projeções alternadas** converge na topologia para um elemento dessa interseção, por isso, iremos sempre supor que tal interseção é não-vazia. Posteriormente daremos condições para que essa convergência seja forte ou até a uma taxa geométrica.

Com esse objetivo consideraremos  $\mathcal{H}$  como sendo um espaço de Hilbert e  $C_1, C_2, \dots, C_m$  como sendo subconjuntos convexos e fechados de  $\mathcal{H}$ , com  $C_0 = \bigcap_{i=1}^m C_i$  não-vazia.

Tomaremos  $x^0 = x \in \mathcal{H}$ , qualquer (alguns livros chamam esse  $x^0$  de inicialização), e projetaremos  $x^0$  sobre  $C_1$ , obtendo  $P_{C_1}(x^0)$ , e depois projetaremos  $P_{C_1}(x^0)$ , sobre  $C_2$ , obtendo  $P_{C_2}P_{C_1}(x^0)$ . Repetindo esse processo  $m$  vezes obtemos  $P_{C_m} \cdots P_{C_2}P_{C_1}(x^0) = T(x^0) =: x^1$ , onde definimos  $T = P_{C_m} \cdots P_{C_2}P_{C_1}$ . Projetaremos agora  $x^1$  sobre  $C_1$  obtendo  $P_{C_1}(x^1)$ , repetindo esse processo sucessivamente obteremos uma sequência  $(x^n := T^n(x^0) \subset \mathcal{H}$ . Provaremos que a sequência assim obtida, **a sequência formada pelo método das projeções alternadas** sobre conjuntos convexos, sempre converge fraco

para um ponto  $x^* \in C_0$  (veja Teorema 3.1.2). Posteriormente, daremos condições para que essa convergência seja forte e mostraremos também que sobre certas hipóteses essa sequência converge a uma taxa geométrica (veja o Teorema 3.4.2).

Este trabalho está dividido em cinco capítulos e quatro apêndices.

O primeiro capítulo engloba alguns resultados que serão utilizados nos capítulos seguintes, com destaque para o **Teorema de ponto fixo de Opial** (Teorema 1.3.1 e sua consequência Teorema 3.1.1), o qual será de suma importância para provar o **Teorema de viabilidade convexa** (Teorema 3.1.2).

No segundo capítulo, falaremos sobre conjuntos convexos, onde provaremos o Teorema da Projeção (Teorema 2.2.1), um teorema que será muito usado nos capítulos posteriores.

Já o Terceiro capítulo tem a propósito de expor os principais resultados desta dissertação, ou seja, os **teoremas de convergência para o método das projeções alternadas**, para ser mais exato, Teoremas 3.1.2, 3.4.1 e 3.4.2.

No quarto capítulo faremos um breve comentário sobre o Contra-exemplo de Hundal ([3]), o qual mostra que nem sempre o método das projeções alternadas converge forte, embora o Teorema 3.1.2 garanta convergência fraca desse método. Hundal mostrou, através de um exemplo, que essa convergência nem sempre é forte, mostraremos que os conjuntos que ele utilizou, para construir esse exemplo, não satisfaz, como já era de se esperar, as hipóteses dos Teorema 3.4.1 e 3.4.2, pois esses teoremas garantem a convergência forte.

E no último capítulo, capítulo 5, daremos uma breve aplicação da teoria vista nesta dissertação e indicaremos alguns artigos onde o leitor poderá encontrar mais algumas outras aplicações interessantes.

O objetivo dos apêndices é a de esclarecer algumas passagens que podem gerar dúvidas. Tais passagens foram omitidas no texto para que este não se estendesse muito. Além disso, destacamos que alguns desses apêndices acrescentam algumas informações que consideramos interessantes.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo abordaremos as definições e os resultados que serão utilizados nos capítulos seguintes.

### 1.1 Definições e resultados básicos

Nesta dissertação  $\mathcal{H}$  denotará um espaço de Hilbert sobre os complexos, com  $f, g, h, x, y, 0, \dots$ , como sendo seus elementos,  $0$  denotará tanto o elemento nulo de  $\mathcal{H}$  quanto os de  $\mathbb{C}$  e  $\mathbb{R}$ , e denotaremos também por  $C, C_1, C_2, \dots, C_m$  subconjuntos convexos e fechados de  $\mathcal{H}$ , com  $\alpha, \beta, \sigma, \dots$  os elementos de  $\mathbb{C}$  e  $\mathbb{R}$ , e finalmente, a notação  $\operatorname{Re}\alpha$  e  $\operatorname{Im}\alpha$  indicará a parte real e imaginária do número complexo  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Quando houver alguma chance de dúvida procuraremos deixar isso bem claro no contexto, lembrando tais notações, se acharmos necessário (Para o leitor que não estiver muito familiarizado com a definição, bem com algumas propriedades elementares dos espaços de Hilbert recomenda-se o Apêndice A).

Denotando o produto interno em  $\mathcal{H}$  por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ; temos por definição, que a norma em  $\mathcal{H}$  é dada por

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} \geq 0$$

para qualquer  $f \in \mathcal{H}$ .

Com essa norma em  $\mathcal{H}$ , temos a seguinte definição.

**Definição 1.1.1.** *Diremos que a sequência  $(x_n) \subset \mathcal{H}$  converge forte para  $x_0 \in \mathcal{H}$ , se*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x_0\| = 0.$$

*Neste caso denotaremos por:  $x_n \rightarrow x_0$ .*

**Definição 1.1.2.** Chamaremos de fecho forte, ou simplesmente, fecho de um subconjunto  $C \subset \mathcal{H}$ , ao conjunto formado por todos os pontos  $x \in \mathcal{H}$ , tal que existe uma sequência  $(x_n) \subset C$ , com  $x_n \rightarrow x$ .

Neste caso denotaremos o fecho forte de  $C$  por  $\overline{C}$ .

Segue da definição de fecho, a seguinte definição:

**Definição 1.1.3.** Diremos que um subconjunto  $C \subset \mathcal{H}$  é fechado forte, ou simplesmente, fechado quando ele for igual ao seu fecho, isto é,  $C = \overline{C}$ .

A seguinte definição será muito usada no decorrer dessa dissertação.

**Definição 1.1.4.** Diremos que a sequência  $(x_n)$  converge fraco para um ponto  $x_0$  de  $\mathcal{H}$ , se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, x \rangle = \langle x_0, x \rangle$$

$\forall x \in \mathcal{H}$ .

Neste caso denotaremos por:  $x_n \rightharpoonup x_0$ .

Uma definição mais geral para convergência fraca em um espaço normado  $\mathcal{H}$ , neste caso  $\mathcal{H}$  não necessariamente é um espaço de Hilbert, pode ser encontrada em [7] na página 257.

Da definição de convergência fraca temos a seguinte definição.

**Definição 1.1.5.** Diremos que um subconjunto  $C \subset \mathcal{H}$  é fechado fraco se para toda sequência  $(x_n) \subset C$  tal que  $x_n \rightharpoonup x$  implicar que  $x \in C$ .

Uma observação interessante é que convergência forte implica em convergência fraca (Teorema 1.2.1, Item  $w_5$ ), porém convergência fraca não implica em forte (Observação 1.2.1).

## 1.2 Propriedades da convergência fraca

O objetivo dessa seção é provar alguns resultados que serão úteis para a demonstração do Teorema de Opial (Teorema 1.3.1), na seção 1.3. Essa seção e a próxima foram baseadas no artigo de Andrzej Cegielski [4], da página 12 a 15.

Apresentaremos agora algumas propriedades da convergência fraca que serão muito usadas no decorrer dessa dissertação.

**Teorema 1.2.1.** (*Propriedades da convergência fraca*) Seja  $(x_n)$  uma sequência em  $\mathcal{H}$ , então:

(w<sub>1</sub>) Se a sequência  $(x_n)$  é fracamente convergente, então este limite é único.

*Demonstração.* Suponha que  $x_n \rightharpoonup x_0$  e que  $x_n \rightharpoonup x_*$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . Então por definição de convergência fraca, temos:

$$\langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle x_0, y \rangle \quad \text{e} \quad \langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle x_*, y \rangle,$$

para todo  $y \in \mathcal{H}$ .

Como  $(\langle x_n, y \rangle) \subset \mathbb{R}$ , para todo  $y \in \mathcal{H}$ , daí usando o fato de que nos reais temos a unicidade do limite, temos

$$\langle x_0, y \rangle = \langle x_*, y \rangle, \forall y \in \mathcal{H},$$

logo,

$$\langle x_0 - x_*, y \rangle = 0, \forall y \in \mathcal{H},$$

em particular, tomando  $y = x_0 - x_*$ , temos

$$\langle x_0 - x_*, x_0 - x_* \rangle = 0$$

implicando que

$$x_0 = x_*.$$

□

(w<sub>2</sub>) Toda sequência  $(x_n)$  fracamente convergente é limitada

*Demonstração.* A demonstração desse item pode ser encontrada nas notas de aulas do professor Rodney Brezuner, veja [5] (página 57 e 5.11 Teorema, item ii). □

(w<sub>3</sub>) Toda sequência limitada possui uma subsequência que converge fraco.

*Demonstração.* A demonstração desse item pode ser encontrada nas notas de aulas do professor Rodney Brezuner, veja [5] (página 65 e 5.25 Teorema). □

(w<sub>4</sub>) Se a sequência  $(x_n)$  é limitada e seu fecho fraco possui um único elemento  $x \in \mathcal{H}$ , então a sequência converge fraco para  $x$ .



*Demonstração.* Suponha por contradição que a sequência não convirja fraco para  $x$  (provaremos que nesse caso a sequência  $(x_n)$  possuirá ao menos dois elementos no seu fecho fraco), logo, existe uma subsequência de  $(x_n)$  que não converge fraco para  $x$ , digamos  $(x_{n_j})$ , e logo, para todo  $\epsilon > 0$  dado existe um  $y_\epsilon = y(\epsilon) \in \mathcal{H}$  tal que

$$|\langle x_{n_j}, y_\epsilon \rangle - \langle x, y_\epsilon \rangle| \geq \epsilon \quad (1.1)$$

para todo  $n_j \in \mathbb{R}$ .

Como por hipótese a sequência  $(x_n)$  é limitada, resulta que, a subsequência  $(x_{n_j})$  também é limitada, segue pelo item anterior (item  $w_3$ ) a sequência  $(x_{n_j})$  possui uma subsequência que converge fraco, a menos de uma mudança de índice, suponhamos que  $x_{n_j} \rightharpoonup x_0$  (quando  $n_j \rightarrow +\infty$ ), e logo,  $x_0$  pertence ao fecho fraco da sequência  $(x_n)$ . Porém fazendo  $n_j \rightarrow +\infty$  em (1.1) obtemos que  $x \neq x_0$ . Portanto a sequência  $(x_n)$  possui dois elementos no seu fecho fraco a saber:  $x$  e  $x_0$ . Contradizendo o fato de que a sequência  $(x_n)$  possui somente um elemento no seu fecho fraco.

Logo a sequência  $(x_n)$  converge fraco para  $x$ . □

( $w_5$ ) Se a sequência  $(x_n)$  converge forte para  $x \in \mathcal{H}$ , então essa sequência converge fraco para  $x$ .

*Demonstração.* De fato, se  $x_n \rightarrow x_0$  então usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos:

$$|\langle x_n - x_0, x \rangle| \leq \|x_n - x_0\| \|x\|.$$

Desde que  $x_n \rightarrow x_0$  implica  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\| = 0$ , e logo,  $\langle x_n - x_0, x \rangle \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ .

Portanto,

$$\langle x_n, x \rangle \rightarrow \langle x_0, x \rangle.$$

Isto significa por definição que

$$x_n \rightarrow x_0.$$

Provando assim o item em questão. □

( $w_6$ ) Se a sequência  $(x_n) \subset \mathcal{H}$  converge fraco para  $x \in \mathcal{H}$  e a dimensão de  $\mathcal{H}$  é finita, então a sequência converge forte para  $x$ .

*Demonstração.* Suponhamos  $\dim \mathcal{H} = k$ , e que  $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  seja uma base ortonormal de  $\mathcal{H}$ . Se  $x_n \rightarrow x \in \mathcal{H}$ , então supondo  $x_n = a_1^n e_1 + a_2^n e_2 + \dots + a_k^n e_k, \forall n \in \mathbb{N}$ , e  $x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_k e_k$ , concluímos que para todo  $i = 1, 2, \dots, k$ ,

$$\langle e_i, e_i \rangle = 1 \text{ e } \langle e_j, e_i \rangle = 0, \forall j \neq i,$$

o que resulta, pela linearidade do produto interno, que

$$\langle x, e_i \rangle = a_i \text{ e } \langle x_n, e_i \rangle = a_i^n,$$

para todo  $i = 1, 2, \dots, k$  e todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Como por hipótese  $x_n \rightarrow x_0$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ , segue que  $a_i^n = \langle x_n, e_i \rangle \rightarrow \langle x, e_i \rangle = a_i, \forall i = 1, 2, \dots, k$ , mostrando que  $a_i^n \rightarrow a_i, \forall i = 1, 2, \dots, k$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ , e logo,

$$\|x_n - x\| = \left\| \sum_{j=1}^k (a_j^n - a_j) e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^k |a_j^n - a_j| \|e_j\| \rightarrow 0,$$

quando  $n \rightarrow +\infty$ .

Provando que  $x_n \rightarrow x$  em  $\mathcal{H}$ . □

Para o leitor que quiser ter mais informações interessantes sobre convergência fraca, principalmente do ponto de vista topológico, indicamos [12].

**Observação 1.2.1.** *Notemos que convergência fraca não implica em forte. De fato, tomando  $\mathcal{H} = \ell^2$ , onde  $\ell^2 = \{(x_n) \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^2 < +\infty\}$  e a sequência  $(e_n) \subset \ell^2$  sendo  $e_n = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots)$ , com 1 na  $n$ -ésima posição, considerando também o produto interno usual de  $\ell^2$ , isto é,  $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \cdot y_n$  para todo  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  e  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) \in \ell^2$ , temos:*

\* Como  $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}, \forall n \neq m$ , resulta que a sequência  $(x_n)$  não converge forte em  $\ell^2$ .

\* Combinando o fato de que  $\langle e_n, x \rangle = x_n, \forall x \in \ell^2$ , onde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ , com  $x_n \rightarrow 0$ , pois  $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^2 < +\infty$ , resulta da definição de convergência fraca que  $e_n \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ .

*Provando que a sequência  $(e_n)$  converge fraco para zero, mas não forte.*

Daremos agora uma sequência de lemas e definições que serão importante para provar o Teorema de Opial (Teorema 1.3.1).

O seguinte lema é muito conhecido em Análise funcional.

**Lema 1.2.1.** *Se  $x_n \rightarrow x \in \mathcal{H}$ , então  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\| \geq \|x\|$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $x_n \rightarrow x \in \mathcal{H}$ .

Se  $x = 0$ , então o resultado é obvio. Suponhamos agora  $x \neq 0$ , usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos:

$$\|x_n\| \|x\| \geq \langle x_n, x \rangle, \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.2)$$

como por hipótese  $x_n \rightarrow x$ , ou seja,  $\langle x, x_n \rangle \rightarrow \langle x, x \rangle = \|x\|^2$ , resulta passando o "lim inf" em (1.2) que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\| \|x\| \geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \langle x, x_n \rangle = \|x\|^2, \quad (1.3)$$

que após dividir por  $\|x\|$  ambos os lados de (1.3), resulta

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\| \geq \|x\|,$$

chegando no resultado desejado. □

**Lema 1.2.2.** *Se  $x_n \rightarrow x \in \mathcal{H}$  e  $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ , então  $x_n \rightarrow x$ .*

*Demonstração.* De fato, combinando a hipótese de que:  $x_n \rightarrow x$  e  $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ , temos:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x\|^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \{\|x_n\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x_n, x \rangle + \|x\|^2\} = \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x, x \rangle + \|x\|^2 = 0.$$

O resultado segue da definição de convergência forte. □

O próximo lema é conhecido como Lema de Opial 1; ele será usado em seguida para provar o Lema de Opial 2.

**Lema 1.2.3. ( Lema de Opial 1)** *Se  $x_n \rightarrow x \in \mathcal{H}$ , então para todo  $y \in \mathcal{H} \setminus \{x\}$  temos:*

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - y\|.$$

*Demonstração.* Se  $x_n \rightarrow x \in \mathcal{H}$ , então dado  $y \in \mathcal{H} \setminus \{x\}$  qualquer, temos que  $\delta = \|x - y\|^2 > 0$ .

Como pelo Teorema 1.2.1-(w<sub>2</sub>), toda sequência fracamente convergente é limitada, temos:

$$\|x_n - x\| \leq \|x_n\| + \|x\| \leq c + \|x\|,$$

para algum  $c > 0$ .

Daí temos:

$$\begin{aligned} \|x_n - y\|^2 &= \|x_n - x + x - y\|^2 = \|x_n - x\|^2 + \|x - y\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x_n - x, x - y \rangle \\ &= \|x_n - x\|^2 + \delta + 2\operatorname{Re}\langle x_n - x, x - y \rangle. \end{aligned}$$

Passando o "lim inf" na igualdade acima e usando a hipótese de que  $x_n \rightarrow x$ , vemos que  $\operatorname{Re}\langle x_n - x, x - y \rangle \rightarrow 0$ , donde segue;

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - y\|^2 = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x\|^2 + \delta > \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x\|^2$$

pois  $\delta > 0$ .

Provando o Lema. □

**Definição 1.2.1. ( Ponto fixo)** *Seja  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  um operador (não-necessariamente linear). Diremos que  $x \in \mathcal{H}$  um é ponto fixo de  $T$ , se  $T(x) = x$ .*

*Denotaremos por  $\operatorname{Fix}T$  ao conjunto dos pontos fixos de  $T$ .*

**Definição 1.2.2. ( Não-expansivo)** *Seja  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  um operador (não-necessariamente linear). Diremos que  $T$  é um operador não-expansivo se*

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\|, \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

**Observação 1.2.2.** *A definição de não-expansivo generaliza a definição de contração. Se  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  é uma contração, então o teorema do ponto fixo de Banach garante a existência de um único ponto fixo para  $T$ , e além disso, a sequência  $(T^n(x))$  converge forte para este ponto fixo, para todo  $x \in \mathcal{H}$  (veja, por exemplo, página 34 de [13]).*

*Ao contrário de muitas áreas da matemática que procuram provar que  $\operatorname{Fix}T \neq \emptyset$ , nesta dissertação estaremos assumindo que  $\operatorname{Fix}T \neq \emptyset$ , e o nosso objetivo, é mostrar que sob certas hipóteses (Teorema de Opial ) a sequência  $(T^n(x))$  sempre converge, pelo menos fracamente, para algum ponto do conjunto  $\operatorname{Fix}T$ .*

**Lema 1.2.4. ( Lema de Opial 2)** *Seja  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  um operador não-expansivo. Se a sequência  $(x_n)$  possui uma subsequência que converge fraco, digamos  $x_{n_k} \rightharpoonup y \in \mathcal{H}$ , quando  $k \rightarrow +\infty$ , e além disso,  $\|T(x_{n_k}) - x_{n_k}\| \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ , então  $y \in \operatorname{Fix}T$ .*

*Demonstração.* Suponhamos por contradição que  $T(y) \neq y$ , então temos:

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \|x_{n_k} - y\| \geq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \|T(x_{n_k}) - T(y)\|, \tag{1.4}$$

pois  $T$  é não-expansivo. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow +\infty} \|T(x_{n_k}) - T(y)\| &= \liminf_{k \rightarrow +\infty} \|T(x_{n_k}) - x_{n_k} + x_{n_k} - T(y)\| \\ &\geq \liminf_{k \rightarrow +\infty} (\|x_{n_k} - T(y)\| - \|T(x_{n_k}) - x_{n_k}\|) \end{aligned}$$

pois,  $\|a - b\| \geq \|a\| - \|b\|$ ,  $\forall a, b \in \mathcal{H}$ . Combinando a desigualdade anterior com (1.4), obtemos

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow +\infty} \|x_{n_k} - y\| &\geq \liminf_{k \rightarrow +\infty} (\|x_{n_k} - T(y)\| - \|T(x_{n_k}) - x_{n_k}\|) \\ &\geq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \|x_{n_k} - T(y)\| \\ &> \liminf_{k \rightarrow +\infty} \|x_{n_k} - y\| \end{aligned}$$

onde na penúltima desigualdade usamos que  $\|T(x_n) - x_n\| \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ , enquanto que na última desigualdade usamos o Lema de Opial 1 (Lema 1.2.3).

Portanto:

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \|x_{n_k} - y\| > \liminf_{k \rightarrow +\infty} \|x_{n_k} - y\|$$

o que é um absurdo. Logo  $T(y) = y$ . □

**Definição 1.2.3. ( Fejér monótona )** Dizemos que uma seqüência  $(x_n)$  é Fejér monótona em relação ao conjunto  $C$  se

$$\|x_n - y\| \geq \|x_{n+1} - y\|, \forall y \in C.$$

**Exemplo 1.2.1.** Toda seqüência  $(x_n) \subset \mathbb{R}$  não-crescente é Fejér monótona em relação ao conjunto  $C = \{0\}$ .

**Lema 1.2.5.** Se  $C \subset \mathcal{H}$  é convexo e fechado e  $(x_n) \subset \mathcal{H}$  é uma seqüência Fejér monótona em relação a  $C$ . Então existe, e é único, um elemento  $y^* \in C$  tal que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - y^*\| = \inf_{y \in C} \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - y\|.$$

*Demonstração.* Definamos:

$$d : C \rightarrow \mathbb{R}$$

pondo

$$d(y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - y\|$$

para  $y \in C$ .

Note que a função acima está bem definido, pois sendo  $(x_n)$  uma sequência Fejér monótona em relação a  $C$  implica que  $(\|x_n - y\|)$  é uma sequência convergente,  $\forall y \in C$ , pois  $(\|x_n - y\|)$  é uma sequência monótona não-crescente e limitada inferiormente por 0,  $\forall y \in C$ .

Sejam  $\delta = \inf\{d(y) : y \in C\}$  e a sequência  $(y_m)$  tais que  $d(y_m) \rightarrow \delta$ . Note que esse "δ" existe pois  $(x_n)$  é Fejér monótona em relação a  $C$  e a sequência  $(y_m) \subset C$ .

Inicialmente provaremos que a sequência  $(y_m)$  é de Cauchy, para isto usaremos a igualdade do paralelogramo (A.3). De fato dados  $k, l, m \in \mathbb{N}$  quaisquer, temos

$$\begin{aligned} \|y_m - y_l\|^2 &= \|(x_k - y_m) - (x_k - y_l)\|^2 \\ &= 2\|x_k - y_m\|^2 + 2\|x_k - y_l\|^2 - \|(x_k - y_m) + (x_k - y_l)\|^2 \\ &= 2\|x_k - y_m\|^2 + 2\|x_k - y_l\|^2 - \|2x_k - y_m - y_l\|^2 \\ &= 2\|x_k - y_m\|^2 + 2\|x_k - y_l\|^2 - 4\left\|x_k - \frac{y_m + y_l}{2}\right\|^2. \end{aligned}$$

Como  $\frac{y_m + y_l}{2} \in C$ , pois  $C$  é convexo. Como, por hipótese,  $(x_n)$  é Fejér monótona em relação a  $C$  temos

$$\left\|x_k - \frac{y_m + y_l}{2}\right\| \geq \lim_{k \rightarrow +\infty} \left\|x_k - \frac{y_m + y_l}{2}\right\| = d\left(\frac{y_m + y_l}{2}\right) \geq \delta, \forall l, m \in \mathbb{N}.$$

Daí temos que

$$\|y_m - y_l\|^2 \leq 2\|x_k - y_m\|^2 + 2\|x_k - y_l\|^2 - 4\delta^2.$$

Fazendo  $k \rightarrow +\infty$  na desigualdade acima e usando a definição de  $d$ , temos

$$\|y_m - y_l\|^2 \leq 2d(y_m)^2 + 2d(y_l)^2 - 4\delta.$$

E portanto,

$$\lim_{l, m \rightarrow +\infty} \|y_m - y_l\|^2 = 0,$$

isto é a sequência,  $(y_m) \subset \mathcal{H}$  é de Cauchy. Como  $\mathcal{H}$  é um espaço de Hilbert, a sequência  $(y_m)$  é convergente, digamos  $y_m \rightarrow y^*$ . Note que  $y^* \in C$ , pois  $(y_m) \subset C$  e por hipótese  $C$  é fechado.

Provaremos agora que  $d(y^*) = \delta$ . De fato

$$\delta \leq d(y^*) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|x_k - y^*\| \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} (\|x_k - y_m\| + \|y_m - y^*\|) = d(y_m) + \|y_m - y^*\| \rightarrow \delta$$

quando  $m \rightarrow +\infty$ , pois  $y_m \rightarrow y^*$  e  $d(y_m) \rightarrow \delta$  (quando  $m \rightarrow +\infty$ ).

Portanto  $d(\mathbf{y}^*) = \delta$ , isto é,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}^*\| = \inf_{\mathbf{y} \in C} \lim_{k \rightarrow +\infty} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}\|.$$

Agora provaremos que existe um único  $\mathbf{y}^* \in C$  tal que  $d(\mathbf{y}^*) = \delta$ . Para isto suponha-  
mos  $d(\mathbf{y}') = \delta$  para algum  $\mathbf{y}' \in C$ . Como  $C$  é convexo temos que  $\frac{\mathbf{y}^* + \mathbf{y}'}{2} \in C$ , logo, por  
definição de ínfimo  $d(\frac{\mathbf{y}^* + \mathbf{y}'}{2}) \geq \delta$ . Usando a igualdade do paralelogramo (A.3), temos:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}^* - \mathbf{y}'\|^2 &= \|(\mathbf{x}_k - \mathbf{y}^*) - (\mathbf{x}_k - \mathbf{y}')\|^2 \\ &= 2\|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}^*\|^2 + 2\|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}'\|^2 - \|(\mathbf{x}_k - \mathbf{y}^*) + (\mathbf{x}_k - \mathbf{y}')\|^2 \\ &= 2\|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}^*\|^2 + 2\|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}'\|^2 - \|2\mathbf{x}_k - (\mathbf{y}^* + \mathbf{y}')\|^2 \\ &= 2\|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}^*\|^2 + 2\|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}'\|^2 - 4\left\|\mathbf{x}_k - \frac{(\mathbf{y}^* + \mathbf{y}')}{2}\right\|^2 \end{aligned}$$

fazendo  $k \rightarrow +\infty$ , obtemos

$$\|\mathbf{y}^* - \mathbf{y}'\|^2 = 2d(\mathbf{y}^*)^2 + 2d(\mathbf{y}')^2 - 4d\left(\frac{\mathbf{y}^* + \mathbf{y}'}{2}\right)^2 = 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4d\left(\frac{\mathbf{y}^* + \mathbf{y}'}{2}\right)^2 \leq 0,$$

pois  $d\left(\frac{\mathbf{y}^* + \mathbf{y}'}{2}\right) \geq \delta$ .

Portanto  $\mathbf{y}^* = \mathbf{y}'$ , provando o resultado. □

### 1.3 Teorema de Opial

Nosso objetivo nesta seção é provar um teorema muito interessante que é conhecido como o Teorema de Opial (Teorema 1.3.1). Esse teorema dará condições para que a sequência  $(T^n(x))$  convirja, pelo menos fracamente, para algum ponto do conjunto  $\text{Fix}T$ , e isso será usado para provar o Teorema 3.1.1 que, por sua vez, será usado para provar um dos principais teoremas dessa dissertação (Teorema 3.1.2) que garante a convergência fraca para o método formado por projeções alternada sobre conjuntos convexos, fechados e com interseção não-vazia, em um espaço de Hilbert e, além do mais, dá uma condição necessária e suficiente para que essa convergência seja forte.

Para isto, provaremos inicialmente que o conjunto dos pontos fixos (veja Definição 1.2.1) de um operador não-expansivo (veja a Definição 1.2.2) é convexo e fechado, pois esse fato será usado na demonstração desse teorema (Teorema de Opial). Isso será provado nos próximos três lemas.

Agora daremos uma definição que será útil para o próximo lema.

**Definição 1.3.1.** *Um espaço de Banach  $X$  é dito estritamente convexo se todo ponto da esfera unitária não é pontos de linha em uma bola unitária, isto é, dados  $x, y \in X$  quaisquer, com  $\|x\| = \|y\| = 1$  e  $x \neq y$ , então  $\|(1-t)x + ty\| < 1, \forall t \in (0, 1)$ .*

**Exemplo 1.3.1.** *Todo espaço de Hilbert é estritamente convexo, qualquer dúvida veja a Observação 1.3.1 abaixo.*

O lema a seguir bem como sua demonstração foi extraído do livro "Fixed Point Theory An Introduction", veja [10] páginas 57 e 58, e será usado para provar o lema posterior a ele.

**Lema 1.3.1.** *(Extraído de [10]) Dado  $X$  um espaço de Banach, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1.  $X$  é estritamente convexo.
2. Para todo  $x, y \in X$ , com  $\|x\| = \|y\| \leq 1$  e  $x \neq y$ , então  $\|x + y\| < 2$ .
3. Se  $x, y \in X$  e  $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ , então  $x = ay$  ou  $y = ax$ , para algum  $a \in \mathbb{R}$ , com  $a \geq 0$ .

*Demonstração.* Nós provaremos as implicações  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ .

**Parte A** ( $1 \rightarrow 2$ ). Primeiramente suponha 1 válido e sejam dados  $x, y \in X$ , tais que  $\|x\| = \|y\| \leq 1$ . Pela desigualdade triangular temos:  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq 2$ .

Suponha por contradição que  $\|x + y\| = 2$ . Então tomando  $z = \frac{x+y}{2}$ , temos  $\|z\| = 1$  e que  $z = \frac{x+y}{2} = (1-t)x + ty$ , onde  $t = \frac{1}{2} \in (0, 1)$ , contradizendo a hipótese de que  $X$  estritamente convexo. Portanto  $1 \rightarrow 2$ .

**Parte B** ( $2 \rightarrow 3$ ). Suponhamos agora que 2 é verdade e sejam dados quaisquer  $x, y \in X$ , com  $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ .

Se  $x = 0$  ou  $y = 0$ , então tomemos  $a = 0$ .

Se  $x \neq 0$  e  $y \neq 0$  então podemos supor sem perda de generalidade que  $\|x\| \leq \|y\|$ , pois o caso  $\|x\| \geq \|y\|$  é feito de maneira análoga.



Neste caso temos:

$$\begin{aligned}
 2 &= 1 + 1 = \frac{\|x\|}{\|x\|} + \frac{\|y\|}{\|y\|} \geq \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| = \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} - \frac{y}{\|x\|} \right\| \\
 &\geq \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|x\|} \right\| - \left\| \frac{y}{\|y\|} - \frac{y}{\|x\|} \right\| = \frac{\|x+y\|}{\|x\|} - \left\| \frac{\|x\|y - \|y\|y}{\|x\|\|y\|} \right\| \\
 &= \frac{\|x\| + \|y\|}{\|x\|} - \left\| \frac{(\|x\| - \|y\|)y}{\|x\|\|y\|} \right\| = \frac{\|x+y\|}{\|x\|} - \left| \frac{\|x\| - \|y\|}{\|x\|} \right| \frac{\|y\|}{\|y\|} \\
 &= \frac{\|x+y\|}{\|x\|} - \frac{\|x\| - \|y\|}{\|x\|} = \frac{\|x\| + \|y\|}{\|x\|} - \frac{\|y\| - \|x\|}{\|x\|} \\
 &= \frac{\|x\| + \|y\|}{\|x\|} - \frac{\|y\| - \|x\|}{\|x\|} = \frac{2\|x\|}{\|x\|} = 2.
 \end{aligned}$$

onde na segunda desigualdade usamos o fato de que  $\|a + b\| \geq \|a\| - \|b\|, \forall a, b \in X$ , na sétima igualdade usamos a hipótese de que  $\|x\| \leq \|y\|$  e na oitava igualdade usamos que  $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ . Logo

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| = 2.$$

Desde que "2" é verdade e  $\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \left\| \frac{y}{\|y\|} \right\| = 1 \leq 1$ , temos que

$$\frac{x}{\|x\|} = \frac{y}{\|y\|},$$

tomando  $a = \frac{\|x\|}{\|y\|}$  ou  $a = \frac{\|y\|}{\|x\|}$ , obtemos o resultado desejado.

Provando que 2  $\rightarrow$  3.

**Parte C (3  $\rightarrow$  1).** Suponhamos agora que 3 seja verdade. Sejam  $x, y \in X$  tais que  $x \neq y$  e  $\|x\| = \|y\| = 1$ . Logo não existe  $\alpha \geq 0$  tal que  $y = \alpha x$  ou  $x = \alpha y$ , pois se existisse tal  $\alpha \geq 0$  teríamos, pelo fato de  $\|x\| = \|y\| = 1$  que  $\alpha = 1$ , e logo,  $x = y$  o que seria uma contradição. Daí, por 3 temos  $\|x + y\| < \|x\| + \|y\| = 2$ , o que nos dá  $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1$ . Mostrando que o ponto médio do segmento  $(x; y) = \{(1 - \alpha)x + \alpha y : \alpha \in (0, 1)\}$  pertence a  $B(0, 1)$ . Como  $B(0, 1)$  é convexo, o seguimento inteiro  $(x; y)$  esta contido em  $B(0, 1)$ . Isto nos diz que  $X$  é estritamente convexo.

Logo 3  $\rightarrow$  1. □

**Observação 1.3.1.** *Todo espaço de Hilbert é estritamente convexo. De fato, seja  $\mathcal{H}$  um espaço de Hilbert. Para provar isto, tome quaisquer  $x, y \in \mathcal{H}$ , com  $x \neq y$ ,  $\|x\| \leq 1$  e  $\|y\| \leq 1$ , então*

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq 1 + 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle + 1 < 1 + \|x\|^2 + \|y\|^2 + 1 \leq 1 + 1 + 1 + 1 = 4,$$

logo,

$$\|x + y\| < 2.$$

Acima usamos o fato de que

$$0 < \|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \Rightarrow 2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle < \|x\|^2 + \|y\|^2, \forall x \neq y.$$

**Observação 1.3.2.** Note que na demonstração do Lema 1.3.1 não foi usado o fato de que  $X$  é espaço de Banach, logo, esse lema vale para espaço normado (veja [14] página 8, proposição 1.2.2).

Provaremos agora que se o conjunto dos pontos fixos de um operador não-expansivo em um espaço de Hilbert é não-vazio, então ele é convexo.

**Lema 1.3.2.** Seja  $\mathcal{H}$  um espaço de Hilbert. Se  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  é não-expansivo e  $\operatorname{Fix}T \neq \emptyset$ , então  $\operatorname{Fix}T$  é convexo.

*Demonstração.* Dados quaisquer elementos  $x, y \in \operatorname{Fix}T$ , devemos provar que  $z = tx + (1-t)y \in \operatorname{Fix}T, \forall t \in [0, 1]$ .

De fato se  $t = 0$  ou  $t = 1$ , nada há para se fazer. Por isso suponhamos  $t \in (0, 1)$ . Usando a Hipótese de que  $T$  é não-expansiva e que  $x, y \in \operatorname{Fix}T$ , temos

$$\|T(z) - x\| = \|T(z) - T(x)\| \leq \|z - x\| \tag{1.5}$$

e

$$\|T(z) - y\| = \|T(z) - T(y)\| \leq \|z - y\|. \tag{1.6}$$

Como

$$z - x = tx + (1-t)y - x = (1-t)y - (1-t)x = (1-t)(y - x) \tag{1.7}$$

e

$$z - y = tx + (1-t)y - y = t(x - y), \tag{1.8}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \|x - T(z) + T(z) - y\| \leq \|x - T(z)\| + \|T(z) - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| \\ &= (1-t)\|x - y\| + t\|x - y\| = \|x - y\|, \end{aligned}$$

logo,

$$\|x - T(z)\| + \|T(z) - y\| = \|x - y\| = \|x - T(z) + T(z) - y\|. \tag{1.9}$$

Se  $x - T(z) = 0$ , então substituindo esse valor em (1.9), depois usando (1.6) e (1.8), respectivamente, temos:

$$\|x - y\| = \|T(z) - y\| \leq \|z - y\| = t\|x - y\|, \text{ ou seja, } \|x - y\| \leq t\|x - y\|,$$

portanto,  $1 \leq t$ . Contradizendo o fato de que  $t \in (0, 1)$ .

Logo  $x - T(z) \neq 0$ .

Se  $T(z) - y = 0$ , então substituindo esse valor em (1.9), depois usando (1.5) e (1.7), respectivamente, temos:

$$\|x - y\| = \|x - T(z)\| \leq \|x - z\| = (1 - t)\|x - y\|, \text{ ou seja, } \|x - y\| \leq (1 - t)\|x - y\|,$$

e portanto,  $t \leq 0$ . Contradizendo o fato de que  $t \in (0, 1)$ .

Logo  $T(z) - y \neq 0$ .

Combinando o fato de que  $\mathcal{H}$  é estritamente convexo (veja Observação 1.3.1), com  $T(z) - y \neq 0$ ,  $x - T(z) \neq 0$ ,  $\|x - T(z)\| + \|T(z) - y\| = \|x - T(z) + T(z) - y\|$  e com o Lema 1.3.1 (item 3), obtemos que existe um  $\alpha > 0$  (pois  $T(z) - y \neq 0$  e  $x - T(z) \neq 0$ ) tal que  $T(z) - x = \alpha(y - T(z))$ .

Donde segue  $T(z) = (1 - \beta)x + \beta y$ , onde  $\beta = \frac{\alpha}{1 + \alpha} > 0$ . Disto temos que  $T(z) - x = \beta(y - x)$ , logo, por (1.5) e (1.7), resulta:

$$\beta\|y - x\| = \|T(z) - x\| \leq \|z - x\| = (1 - t)\|x - y\|$$

o que nos dá

$$\beta\|y - x\| \leq (1 - t)\|x - y\|,$$

portanto,  $\beta \leq 1 - t$ .

Analogamente para  $T(z) - y = (1 - \beta)(x - y)$ , por (1.6) e (1.8), temos:

$$(1 - \beta)\|x - y\| = \|T(z) - y\| \leq \|z - y\| = t\|x - y\|,$$

o que nos dá

$$(1 - \beta)\|x - y\| \leq t\|x - y\|$$

logo,  $\beta \geq 1 - t$ . Portanto  $\beta = 1 - t$ , logo

$$T(z) = (1 - \beta)x + \beta y = tx + (1 - t)y = z \Rightarrow T(z) = z \Rightarrow z \in \text{Fix}T.$$

Provando que  $\text{Fix}T$  é convexo. □

O próximo lema provará que se  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  é não-expansivo, então  $\text{Fix}T$  é fechado.

**Lema 1.3.3.** *Se  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  é não-expansivo então  $\text{Fix}T$  é fechado.*

*Demonstração.* Como  $T$  é contínuo, pois é não-expansivo, temos que o operador:  $I_T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ , dado por  $I_T(x) = T(x) - x$  é contínuo, e logo,  $\text{Fix}T = I_T^{-1}(0)$  é fechado.  $\square$

Daremos agora uma definição que será muito usada nos próximos teoremas, (Teorema 1.3.1 e Teorema 3.1.1).

**Definição 1.3.2.** *Diremos que um operador  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  é assintoticamente regular quando para todo  $x \in \mathcal{H}$  tivermos que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T^{n+1}(x) - T^n(x)\| = 0$ .*

Finalmente estamos prontos para enunciar e provar o Teorema de Opial (Teorema 1.3.1).

**Teorema 1.3.1. (Teorema de Opial, [4] 1967)** *Seja  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  um operador não-expansivo, assintoticamente regular tal que  $\text{Fix}T \neq \emptyset$ . Então para todo  $x_0 \in \mathcal{H}$  a sequência  $(T^n(x_0))$  converge fraco para um elemento  $y^* \in \text{Fix}T$ .*

*Demonstração.* Para cada  $x_0 \in \mathcal{H}$  denote por  $x_n = T^n(x_0)$ . Como  $T$  é não-expansivo, temos que para qualquer  $z \in \text{Fix}T$  vale que:

$$\|x_{n+1} - z\| = \|T^{n+1}(x_0) - z\| = \|T^{n+1}(x_0) - T(z)\| \leq \|T^n(x_0) - z\| = \|x_n - z\|.$$

Isso mostra que a sequência  $(x_n)$  é Fejér monótona em relação ao conjunto  $\text{Fix}T$ , e conseqüentemente a sequência  $(x_n)$  é limitada, pois:

$$\|x_{n+1}\| - \|x\| \leq \|x_{n+1} - x\| \leq \|x_n - x\| \leq \dots \leq \|x_0 - x\|,$$

e logo,

$$\|x_{n+1}\| \leq \|x_0 - x\| + \|x\|$$

onde  $x \in \text{Fix}T$  é fixo (lembre-se de que por hipótese  $\text{Fix}T \neq \emptyset$ ).

Seja dada qualquer subsequência  $(x_{n_k})$  fracamente convergente da sequência  $(x_n)$  (note que tal subsequência de  $(x_n)$  existe pois sendo  $(x_n)$  limitada pelo Teorema 1.2.1 ( $w_3$ ) a sequência  $(x_n)$  possui uma subsequência que converge fraco.), digamos  $x_{n_k} \rightharpoonup y \in \mathcal{H}$ , quando  $k \rightarrow +\infty$ .

Como por hipótese  $T$  é assintoticamente regular temos:

$$\|T(x_n) - x_n\| = \|T^{n+1}(x_0) - T^n(x_0)\| \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow +\infty$ .

Pelo Lema de Opial  $2 \ y \in \text{Fix}T$ .

Como  $T$  é não-expansivo,  $\text{Fix}T$  é convexo e fechado, pelos Lema 1.3.2 e Lema 1.3.3, respectivamente.

Pelo Lema 1.2.5, existe um único  $y^* \in \text{Fix}T$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - y^*\| = \inf_{y \in \text{Fix}T} \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - y\|.$$

Provaremos agora que  $x_{n_k} \rightharpoonup y^*$ , para isto é suficiente provamos que  $y = y^*$ , pois  $x_{n_k} \rightharpoonup y \in \mathcal{H}$ .

Suponha por absurdo que  $y \neq y^*$ , então pelo Lema de Opial 1

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - y^*\| &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \|x_{n_k} - y^*\| = \lim_{k \rightarrow +\infty} \inf \|x_{n_k} - y^*\| \\ &> \lim_{k \rightarrow +\infty} \inf \|x_{n_k} - y\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - y\| \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - y^*\| \end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos o fato de que a sequência  $(\|x_n - y\|)$  sendo Fejér monótona em relação á  $\text{Fix}T$  ela é monótona não-crescente e limitada inferiormente por 0, valendo isso para todo  $y \in \text{Fix}T$ , e portanto,  $(\|x_n - y\|)$  converge, pois toda sequência monótona limitada em  $\mathbb{R}$  converge.

Portanto, obtemos:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - y^*\| > \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - y^*\|$$

o que é um absurdo. Logo  $y = y^*$ .

Daí concluímos que qualquer subsequência fracamente convergente da sequência  $(x_n)$  possui o limite igual á  $y^*$ , portanto,  $y^*$  é o único elemento do fecho fraco da sequência  $(x_n)$ .

Como a  $(x_n)$  é limitada e possui um único elemento no seu fecho fraco, a saber  $y^*$ , resulta pelo Teorema 1.2.1 ( $w_4$ ) que

$$x_n \rightharpoonup y^*.$$

Concluindo a demonstração do Teorema de Opial. □

# Capítulo 2

## O operador projeção

Neste capítulo definiremos o operador projeção sobre um subconjunto convexo e fechado de um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  e também demonstraremos algumas de suas propriedades básicas. Tais propriedades serão muito úteis nos próximos capítulos, principalmente para podemos definir o método da projeções alternadas (Definição 3.1.2). Por isso começaremos esse capítulo falando sobre conjuntos convexos.

### 2.1 Conjuntos convexos

Nesta seção falaremos sobre conjuntos convexos.

**Definição 2.1.1.** *Diremos que um conjunto  $C \subset \mathcal{H}$  é convexo quando para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$  tivermos que:*

$$(1 - \lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} \in C, \text{ para todo } 0 \leq \lambda \leq 1.$$

**Definição 2.1.2.** *Diremos que um conjunto convexo  $C$  é estritamente convexo se  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ , com  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ , então o ponto médio,  $\frac{\mathbf{x} + \mathbf{y}}{2}$ , pertence ao interior de  $C$ , ou seja, existe  $\delta = \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ , com  $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > 0$  para  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ , tal que*

$$\left\| z - \frac{\mathbf{x} + \mathbf{y}}{2} \right\| \leq \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Rightarrow z \in C.$$

**Definição 2.1.3.** *Um conjunto convexo  $C$  é dito uniformemente convexo se existe uma função  $\delta(\tau)$  positiva para  $\tau > 0$ , e zero apenas se  $\tau = 0$ , tal que  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$  e*

$$\left\| z - \frac{\mathbf{x} + \mathbf{y}}{2} \right\| \leq \delta(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)$$

*implicar que  $z \in C$ .*

**Definição 2.1.4.** *Um conjunto uniformemente convexo em que é possível encontrar uma constante positiva  $\tau > 0$ , tal que*

$$\delta(\tau) = \mu\tau^2$$

*é chamado de fortemente convexo.*

**Observação 2.1.1.** *Note que todo conjunto estritamente convexo é convexo, todo conjunto uniformemente convexo é estritamente convexo e que todo conjunto fortemente convexo é uniformemente convexo. Porém, provamos no Apêndice B que as recíprocas não são verdadeiras, isto é, que nem todo conjunto convexo é estritamente convexo, nem todo conjunto estritamente convexo é uniformemente convexo e que nem todo conjunto uniformemente convexo é fortemente convexo. Neste mesmo apêndice demonstramos alguns lemas, cujo objetivo é mostrar outro modo em que poderíamos ter definido conjuntos estritamente convexos e uniformemente convexos.*

## 2.2 Definição e algumas propriedades do operador projeção

O seguinte teorema mostra que se  $C$  é convexo e fechado, então para todo  $x \in \mathcal{H}$  existe um único  $P_C(x) \in C$ , tal que  $P_C(x)$  é o elemento de  $C$  mais próximo de  $x$ .

**Teorema 2.2.1. (Teorema da Projeção)** *Seja  $C \subset \mathcal{H}$  um conjunto convexo, fechado e não-vazio. Então para todo  $x \in \mathcal{H}$  existe um único elemento  $P_C(x) \in C$  tal que*

$$\|x - P_C(x)\| = \min_{y \in C} \|x - y\|. \quad (2.1)$$

*Além disso,  $\bar{x} = P_C(x)$  se, e somente se,*

$$\bar{x} \in C \text{ e } \operatorname{Re}\langle x - \bar{x}, y - \bar{x} \rangle \leq 0 \quad \forall y \in C. \quad (2.2)$$

*Demonstração. (a) Existência.*

Para cada  $x \in \mathcal{H}$  considere  $(v_n) \subset C$  uma sequência tal que

$$d_n = \|x - v_n\| \rightarrow d := \inf_{y \in C} \|x - y\|$$

quando  $n \rightarrow +\infty$ . A existência de tal sequência decorre da definição de ínfimo no conjunto dos reais.

Provemos que a sequência  $(v_n)$  é de Cauchy. Para isto tomando na identidade do paralelogramo os vetores  $\mathbf{a} = \mathbf{x} - v_n$  e  $\mathbf{b} = \mathbf{x} - v_m$  temos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{\mathbf{a} - \mathbf{b}}{2} \right\|^2 &= \frac{1}{2} (\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2) \\ \Rightarrow \left\| \frac{\mathbf{x} - v_n + \mathbf{x} - v_m}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{\mathbf{x} - v_n - (\mathbf{x} - v_m)}{2} \right\|^2 \\ &= \frac{1}{2} (\|\mathbf{x} - v_n\|^2 + \|\mathbf{x} - v_m\|^2) \\ \Rightarrow \left\| \mathbf{x} - \frac{v_n + v_m}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{v_n - v_m}{2} \right\|^2 &= \frac{1}{2} (d_n^2 + d_m^2), \end{aligned}$$

portanto,

$$\left\| \frac{v_n - v_m}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} (d_n^2 + d_m^2) - \left\| \mathbf{x} - \frac{v_n + v_m}{2} \right\|^2.$$

Como  $\frac{v_n + v_m}{2} \in C$ , pois  $C$  é convexo, temos  $\left\| \mathbf{x} - \frac{v_n + v_m}{2} \right\| \geq d = \inf_{y \in C} \|\mathbf{x} - y\|$ , logo substituindo esse valor na igualdade acima temos

$$\left\| \frac{v_n - v_m}{2} \right\|^2 \leq \frac{1}{2} (d_n^2 + d_m^2) - d^2.$$

E portanto,

$$\lim_{m, n \rightarrow +\infty} \|v_n - v_m\| = 0.$$

Provando que a sequência  $(v_n) \subset C$  é de Cauchy. Como  $\mathcal{H}$  é um espaço de Hilbert segue que  $v_n \rightarrow \bar{x}$ , para algum  $\bar{x} \in \mathcal{H}$ . Resulta do fato de que  $C$  é fechado que  $\bar{x} \in C$ .

Portanto  $\bar{x} \in C$  e  $\inf_{y \in C} \|\mathbf{x} - y\| = d = \|\mathbf{x} - \bar{x}\|$ .

(b)  $\bar{x} = P_C(x)$  se, e somente se, vale (2.2).

( $\Rightarrow$ ) Suponhamos que  $\bar{x} = P_C(x) \in C$  e provemos daí que (2.2) é válido. Como por hipótese  $C$  é convexo segue que para qualquer  $y \in C$  que

$$v(t) = (1 - t)\bar{x} + ty \in C, \forall t \in [0, 1].$$

Se  $t = 0$  então  $\bar{x} = v(0)$ , e logo, vale claramente (2.2).

Seja  $t \in (0, 1]$ . Então usando a hipótese de que  $\bar{x} = P_C(x)$  combinada com o item (a) segue que

$$\|\mathbf{x} - \bar{x}\| \leq \|\mathbf{x} - ((1 - t)\bar{x} + ty)\| = \|(\mathbf{x} - \bar{x}) - t(y - \bar{x})\|, \forall t \in (0, 1]$$



daí temos

$$\begin{aligned} \|x - \bar{x}\|^2 &\leq \|x - v(t)\|^2 = \|(x - \bar{x}) - t(y - \bar{x})\|^2 \\ &= \|x - \bar{x}\|^2 - 2t\operatorname{Re}\langle x - \bar{x}, y - \bar{x} \rangle + t^2\|y - \bar{x}\|^2 \end{aligned}$$

e logo

$$2t\operatorname{Re}\langle x - \bar{x}, y - \bar{x} \rangle \leq t^2\|y - \bar{x}\|^2$$

dividindo por  $t$ , pois  $t \in (0, 1]$ , a desigualdade acima temos

$$2\operatorname{Re}\langle x - \bar{x}, y - \bar{x} \rangle \leq t\|y - \bar{x}\|^2$$

fazendo  $t \rightarrow 0$  na desigualdade acima obtemos

$$\operatorname{Re}\langle x - \bar{x}, y - \bar{x} \rangle \leq 0.$$

Desde que  $y \in C$  é arbitrário, resulta que

$$\operatorname{Re}\langle x - \bar{x}, y - \bar{x} \rangle \leq 0 \quad \forall y \in C.$$

( $\Leftarrow$ ) Agora suponhamos que  $\bar{x}$  satisfaça (2.2). Então para todo  $y \in C$  temos

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \|x - \bar{x} + \bar{x} - y\|^2 \\ &= \|x - \bar{x}\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x - \bar{x}, \bar{x} - y \rangle + \|\bar{x} - y\|^2 \\ &\geq -2\operatorname{Re}\langle x - \bar{x}, y - \bar{x} \rangle + \|\bar{x} - y\|^2 \\ &\geq \|\bar{x} - y\|^2, \end{aligned}$$

logo,

$$\|x - \bar{x}\| \leq \|x - y\|, \forall y \in C$$

implicando que  $P_C(x) = \bar{x}$ .

(c) Unicidade.

Supondo que  $x_1$  e  $x_2$  satisfaçam (2.1), para o mesmo  $x \in \mathcal{H}$ . Então por (b) os elementos  $x_1$  e  $x_2$  satisfazem (2.2), isto é

$$\operatorname{Re}\langle x - x_1, y - x_1 \rangle \leq 0, \forall y \in C \tag{2.3}$$

e

$$\operatorname{Re}\langle x - x_2, y - x_2 \rangle \leq 0, \quad \forall y \in C. \quad (2.4)$$

Escolhendo  $y = x_2$  em (2.3) e  $y = x_1$  em (2.4) obtemos

$$-\operatorname{Re}\langle x - x_1, x_1 - x_2 \rangle \leq 0 \quad (2.5)$$

e

$$\operatorname{Re}\langle x - x_2, x_1 - x_2 \rangle \leq 0, \quad (2.6)$$

respectivamente. Somando (2.5) com (2.6) obtemos

$$\operatorname{Re}\langle x_1 - x_2, x_1 - x_2 \rangle = \|x_1 - x_2\|^2 \leq 0.$$

Portanto  $x_1 = x_2$ . Finalizando a demonstração do teorema.

□

A seguinte definição justifica porque o Teorema 2.2.1 é conhecido como o Teorema da projeção.

**Definição 2.2.1.** *Seja  $C \subset \mathcal{H}$  convexo, fechado e não-vazio. Dado  $x \in \mathcal{H}$  qualquer, chamaremos de projeção de  $x$  sobre  $C$  ao único elemento  $P_C(x) \in C$  que satisfaz:*

$$\|x - P_C(x)\| = \min_{y \in C} \|x - y\|.$$

*Isto define um operador  $P_C : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  que chamaremos de operador projeção.*

Se  $C$ , no Teorema da Projeção (Teorema 2.2.1), for subespaço fechado então claramente  $C$  é convexo e não-vazio, e logo, vale o Teorema da Projeção (Teorema 2.2.1). Mas além de valer esse teorema, no caso em que  $C$  for subespaço fechado de um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ , vale que podemos representar o espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  como soma direta de  $C$  com seu complementar ortogonal  $C^\perp$ . Isso é justamente o enunciado do próximo teorema.

**Teorema 2.2.2** (Teorema da Projeção para Subespaços Fechados). *Se  $C$  é um subespaço fechado de um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  então*

$$\mathcal{H} = C \oplus C^\perp,$$

*ou seja, para todo  $x \in \mathcal{H}$ , existem únicos  $z \in C$  e  $y \in C^\perp$  tais que  $x = z + y$ . Além disso, têm-se necessariamente que  $z = P_C(x)$  e  $y = P_{C^\perp}(x)$ .*

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [7] página 146.  $\square$

**Observação 2.2.1.** *Note que nenhuma das hipóteses do Teorema da Projeção (Teorema 2.2.1) pode ser retirada. De fato:*

- *Retirando o fato de que  $C$  é convexo podemos perder a unicidade da projeção. Para ver isto tomemos  $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$ ,  $C = S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$  e  $x = (0, 0)$  obtemos que  $C$  é fechado e não-vazio, porém a projeção de  $x$  sobre  $C$  é  $P_C(x) = C$ .*

- *Retirando o fato de que  $C$  é fechado a projeção pode não existir. Por exemplo, tomando  $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$ ,  $C = B((0, 0); 1) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$  e  $x = (7, 0)$  obtemos que  $C$  é convexo e não-vazio, porém a projeção de  $x$  sobre  $C$  é  $P_C(x) = (1, 0)$  que não pertence a  $C$ .*

- *Retirando o fato de que  $C$  é convexo a projeção pode não-existir. Por exemplo tomando  $\mathcal{H} = \ell^2$ ,  $C = \{x_n \in \ell^2 : x_n = (0, \dots, 0, 1 + \frac{1}{n}, 0, \dots)\}$  e  $x = (0, 0, \dots)$  obtemos que  $C$  é fechado e não-vazio, porém a projeção de  $x$  sobre  $C$  é  $P_C(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$  que não pertence a  $C$ .*

**Corolário 2.2.1.** *Seja  $C \subset \mathcal{H}$  um conjunto convexo, fechado e não vazio. Então para todo  $x, y \in \mathcal{H}$ , temos:*

$$\|P_C(x) - P_C(y)\|^2 \leq \operatorname{Re}\langle x - y, P_C(x) - P_C(y) \rangle. \quad (2.7)$$

*Demonstração.* Dados  $x, y \in \mathcal{H}$  quaisquer. Pelo teorema 2.2.1 os elementos  $x_1 = P_C(x)$  e  $x_2 = P_C(y)$  satisfazem (2.2), isto é,

$$\operatorname{Re}\langle x - x_1, z - x_1 \rangle \leq 0, \forall z \in C \quad (2.8)$$

e

$$\operatorname{Re}\langle y - x_2, z - x_2 \rangle \leq 0, \forall z \in C \quad (2.9)$$

escolhendo  $z = x_2$  em (2.8) e  $z = x_1$  em (2.9) obtemos

$$\operatorname{Re}\langle x - x_1, x_2 - x_1 \rangle \leq 0 \Rightarrow -\operatorname{Re}\langle x - x_1, x_1 - x_2 \rangle \leq 0$$

ou seja,

$$\operatorname{Re}\langle x_1 - x, x_1 - x_2 \rangle \leq 0 \quad (2.10)$$

e

$$\operatorname{Re}\langle \mathbf{y} - \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \rangle \leq 0 \quad (2.11)$$

somando (2.10) com (2.11) obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\langle \mathbf{x}_1 - \mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \rangle \leq 0 &\Rightarrow \operatorname{Re}\langle \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \rangle + \operatorname{Re}\langle -\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \rangle \leq 0 \\ &\Rightarrow \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^2 - \operatorname{Re}\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \rangle \leq 0 \\ &\Rightarrow \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^2 \leq \operatorname{Re}\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \rangle. \end{aligned}$$

Como  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}$  são arbitrários, temos

$$\|\mathbf{P}_C(\mathbf{x}) - \mathbf{P}_C(\mathbf{y})\|^2 \leq \operatorname{Re}\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{P}_C(\mathbf{x}) - \mathbf{P}_C(\mathbf{y}) \rangle, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}.$$

Provando o corolário. □

**Corolário 2.2.2. (Operador de projeção é não-expansivo)** *Seja  $C \subset \mathcal{H}$  um conjunto convexo, fechado e não-vazio. Então para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}$ , temos:*

$$\|\mathbf{P}_C(\mathbf{x}) - \mathbf{P}_C(\mathbf{y})\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

*Demonstração.* Sejam dados quaisquer  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}$ .

Se  $\mathbf{P}_C(\mathbf{x}) = \mathbf{P}_C(\mathbf{y})$ , então nada há para se fazer.

Se  $\mathbf{P}_C(\mathbf{x}) \neq \mathbf{P}_C(\mathbf{y})$ , então usando Cauchy-Schwarz em (2.7) temos

$$\|\mathbf{P}_C(\mathbf{x}) - \mathbf{P}_C(\mathbf{y})\|^2 \leq \operatorname{Re}\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{P}_C(\mathbf{x}) - \mathbf{P}_C(\mathbf{y}) \rangle \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \|\mathbf{P}_C(\mathbf{x}) - \mathbf{P}_C(\mathbf{y})\|,$$

dividindo a desigualdade anterior por  $\|\mathbf{P}_C(\mathbf{x}) - \mathbf{P}_C(\mathbf{y})\| \neq 0$ , obtemos

$$\|\mathbf{P}_C(\mathbf{x}) - \mathbf{P}_C(\mathbf{y})\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Desde que  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}$  são arbitrários, segue o resultado. □

# Capítulo 3

## Teoremas de convergência para sequências de projeções alternadas

Este capítulo foi baseado no artigo [1] (da página 81 á página 92). Nele estudaremos a convergência do método das projeções alternadas, sobre um número finito de subconjuntos convexos e fechados de um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ . O Teorema 3.1.2 garantirá que esse método sempre converge fracamente para um elemento desse espaço, e dará uma condição necessária e suficiente para que essa convergência seja forte. Lamentavelmente tal condição não é prática. O Teorema 3.4.1 garantirá a convergência forte. Por outro lado, o Teorema 3.4.2 apresentará uma condição prática para que essa convergência, além de ser forte, seja à uma taxa geométrica. Para isto, relembremos inicialmente que estamos denotando por  $C_1, C_2, \dots, C_m$  conjuntos convexos, fechados e não-vazios e que estamos sempre supondo  $\bigcap_{i=1}^m C_i = C_0 \neq \emptyset$ .

Queremos destacar que o Corolário 3.1.1 mostra que o problema de viabilidade convexa (ou seja, encontrar um ponto da interseção de conjuntos convexos) é a equivalente a um problema de ponto fixo.

### 3.1 Sequência de projeções alternadas

Esse próximo teorema será usado para a demonstração do Teorema 3.1.2 o qual garantirá que o método das projeções alternadas converge, pelo menos, fracamente.

**Teorema 3.1.1** (Teorema A1 de [1]). *Seja  $T : C \rightarrow C$  um operador não-expansivo e assintoticamente regular, com  $C \subset \mathcal{H}$  convexo e fechado. Assuma o conjunto  $\text{Fix}T$  não-*

vazio.

**Parte 1.** Então para todo  $x \in \mathcal{H}$  a sequência  $(T^n(x))$  converge fraco para  $x^* \in \text{Fix}T$ .

**Parte 2.** Além disso, essa convergência é forte se, e somente se, a sequência  $(T^n(x))$  possui uma subsequência que converge forte.

*Demonstração.* A **Parte 1** do Teorema segue direto do Teorema de Opial.

A prova da **Parte 2** será dividida em duas etapas. Na primeira etapa vamos mostrar que se a sequência  $(T^n(x))$  converge forte então ela possui uma subsequência que converge forte. Já na segunda etapa mostraremos que se a sequência  $(T^n(x))$  possui uma subsequência que converge forte então a própria sequência  $(x_n)$  converge forte.

(**Etapa 1** " $\Rightarrow$ ") Se  $T^n(x) \rightarrow y$  para algum  $y \in \mathcal{H}$ , então a própria sequência  $(T^n(x))$  é uma subsequência que converge forte.

(**Etapa 2** " $\Leftarrow$ ") Suponhamos agora que  $(T^n(x))$  possui uma subsequência que converge forte, digamos,  $T^{n_k}(x) \rightarrow y$ , existe  $y \in \mathcal{H}$ , quando  $k \rightarrow +\infty$ .

Afirmamos que  $T^n(x) \rightarrow y$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ . De fato, se  $(T^{n_k}(x))$  converge forte para  $y$ , então, pelo Teorema 1.2.1 ( $w_5$ ),  $(T^{n_k}(x))$  converge fraco para  $y$ . Segue pela primeira parte do Teorema 3.1.1 que  $y \in \text{Fix}T$ . Combinando esta com a não-expansividade de  $T$ , obtemos:

$$\|T^{n+1}(x) - y\| = \|T^{n+1}(x) - T(y)\| \leq \|T^n(x) - y\|.$$

Assim segue que a sequência  $(\|T^{n+1}(x) - y\|) \subset \mathbb{R}$  é monótona decrescente. Combinando o fato de que a sequência  $(\|T^{n+1}(x) - y\|) \subset \mathbb{R}$  é monótona decrescente com a hipótese de que ela possui uma subsequência que converge a zero (pois:  $\|T^{n_k}(x) - y\| \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow +\infty$ ) resulta que ela mesma converge a zero, isto é,

$$\|T^n(x) - y\| \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow +\infty$ .

O resultado segue imediato da definição de convergência forte.  $\square$

Daremos a seguir a definição da sequência formada pelo método das projeções alternadas sobre um número finito de conjuntos convexos e fechados. Essa definição será muito usada nos próximos resultados. Por isso definiremos inicialmente um caso particular (em que  $\lambda_i = 1$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, m$ ), para que o leitor possa entender melhor como se obtém cada termo desse método, e posteriormente a ela, daremos uma definição mais geral (em que  $\lambda_i \in (0, 2)$  para todo  $i = 1, 2, \dots, m$ ).

**Definição 3.1.1.** Para cada  $i = 1, 2, \dots, m$ , seja  $P_i : \mathcal{H} \rightarrow C_i$  a projeção sobre  $C_i$ . Definamos o operador

$$T_i : \mathcal{H} \rightarrow C_i$$

como

$$T_i(x) := P_i(x), \forall x \in \mathcal{H}$$

para cada  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Definamos também  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  pondo

$$T(x) := (P_m \circ P_{m-1} \circ \dots \circ P_2 \circ P_1)(x).$$

Onde "o" indica a composição de funções (no caso de operadores).

Finalmente definamos a seqüência  $(x^n)$  pondo:

$$x^{n+1} := T(x^n), \forall n \geq 0.$$

Onde estamos supondo  $x^0 = x$ .

A Figura 3.1 abaixo ilustra a Definição 3.1.1, nela consideramos  $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$ ,  $C_1 =$  segmento de reta,  $C_2 =$  segmento de reta e  $x \in \mathbb{R}^2$  um ponto qualquer. Claramente  $\mathbb{R}^2$  é um espaço de Hilbert,  $C_1$  e  $C_2$  são subconjuntos convexos, fechados e não-vazios de  $\mathbb{R}^2$ .

Já o objetivo da Figura 3.2 abaixo é ilustrar que a seqüência  $(x^n)$  da Definição 3.1.1 depende da ordem das projeções, isto é,  $y^* = P_{C_2}(P_{C_1}(x)) \neq P_{C_1}(P_{C_2}(x)) = z^*$ , nela consideramos  $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$ ,  $C_1 = B[(0, 0); 1, 5] = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1, 5\}$ ,  $C_2 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in \mathbb{R}, 0 \leq x_2 \leq \frac{1}{2}\}$  e  $x = (3, 2; 3, 2) \in \mathbb{R}^2$ . Claramente  $\mathbb{R}^2$  é um espaço de Hilbert,  $C_1$  e  $C_2$  são subconjuntos convexos, fechados e não-vazios de  $\mathbb{R}^2$ .

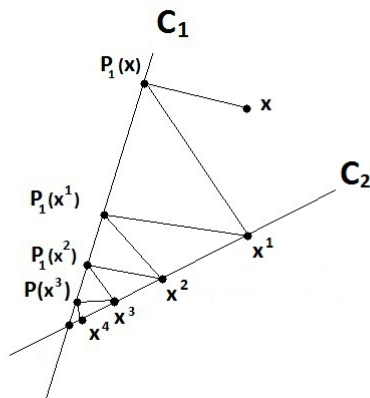


Figura 3.1: Projeções alternadas.

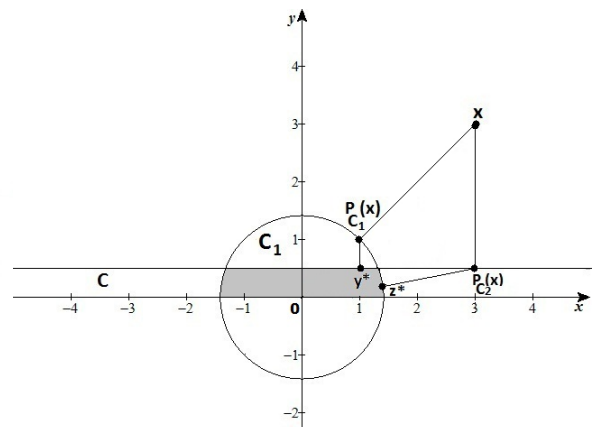


Figura 3.2:  $P_{C_2}(P_{C_1}(x)) \neq P_{C_1}(P_{C_2}(x))$ .

Note que a Figura 3.2 ilustra também que a seqüência  $(x^n)$  da Definição 3.1.1 pode convergir forte para um ponto  $x^* \in C_0$  e que além disso seu limite depende diretamente da ordem das projeções. Para ver isto notemos inicialmente que na Figura 3.2 se começarmos projetando sobre  $C_1$  e depois projetarmos sobre  $C_2$  obtemos a seqüência  $(x^{n+1} = T^n(x))$ , onde  $x^1 = T(x) = P_{C_2}(P_{C_1}(x))$  então a seqüência  $(x^{n+1} = T^n(x))$  converge forte para o ponto  $y^* = x^1$ , pois essa seqüência satisfaz  $x^{n+1} = x^1 = y^*$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por outro lado, se começarmos projetando sobre  $C_2$  e depois projetamos sobre  $C_1$  obtemos a seqüência  $(x^{n+1} = T^n(x))$ , onde  $x^1 = T(x) = P_{C_1}(P_{C_2}(x))$ . Essa seqüência  $(x^n)$  assim obtida converge para  $z^*$ , pois  $x^{n+1} = x^1 = z^*$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por último é claro que  $y^* \neq z^*$ .

A seguinte definição generaliza a anterior, pois na anterior  $\lambda_i = 1$  para todo  $i = 1, 2, \dots, m$  enquanto que nessa próxima definição teremos que  $\lambda_i \in (0, 2)$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, m$ .

**Definição 3.1.2.** Para cada  $i = 1, 2, \dots, m$ , seja  $P_i : \mathcal{H} \rightarrow C_i$  a projeção de  $x$  sobre  $C_i$ . Dado  $\lambda_i \in (0, 2)$  qualquer, definamos o operador

$$T_i^{\lambda_i} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$$

como

$$T_i^{\lambda_i}(x) := (1 - \lambda_i)x + \lambda_i P_i(x),$$

para cada  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Para simplificar a notação denotaremos " $T_i^{\lambda_i}$ " apenas por: " $T_i$ ".

Definamos também  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  pondo

$$T_{(\lambda_1, \dots, \lambda_m)}(x) := (T_m^{\lambda_m} \circ T_{m-1}^{\lambda_{m-1}} \circ \dots \circ T_2^{\lambda_2} \circ T_1^{\lambda_1})(x),$$

isto é,

$$T(x) := (T_m \circ T_{m-1} \circ \dots \circ T_2 \circ T_1)(x).$$

Onde " $\circ$ " indica a composição de funções (no caso de operadores).

Chamaremos de seqüência de projeções a seqüência  $(x^n)$  definida por:

$$x^{n+1} = T(x^n).$$

Onde estamos supondo  $x^0 = x$ .



Uma observação interessante sobre a Definição 3.1.2 é que ela pode ser vista como um algoritmo (veja [11] páginas 65 e 68).

Na Definição 3.1.2 se  $\lambda_i \in (0, 1)$  então a seqüência dessa definição (algoritmo) é conhecido como seqüência subrelaxada (algoritmo subrelaxado) e se  $\lambda_i \in (1, 2)$  então a seqüência dessa definição é conhecida como sobrerelaxada (algoritmo sobrerelaxado).

As figuras 3.3 e 3.4 abaixo ilustram a definição 3.1.2. Na Figura 3.3 supomos  $\lambda_i \in (0, 1)$  para todo  $i = 1, 2, \dots, m$ , isto é, a seqüência subrelaxada na Figura 3.4 supomos  $\lambda_i \in (1, 2)$  para todo  $i = 1, 2, \dots, m$ , isto é, a seqüência sobrerelaxada.

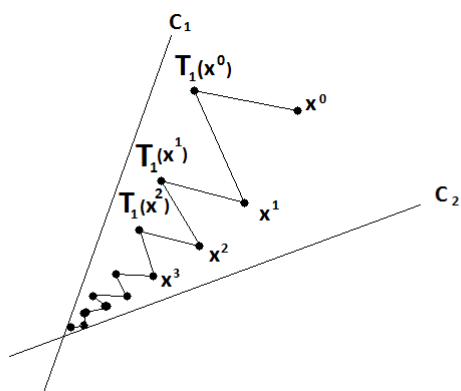


Figura 3.3: seqüência subrelaxada.

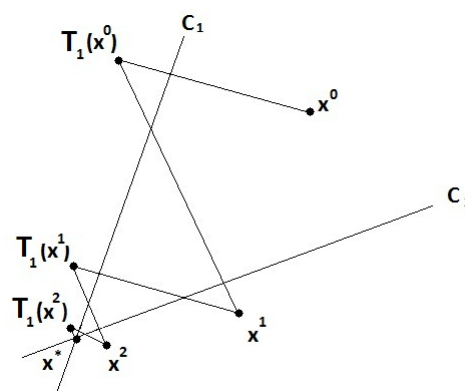


Figura 3.4: seqüência sobrerelaxada.

**Observação 3.1.1.** *A motivação para a generalização de  $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, m$ , com  $\lambda_i \in (0, 2), i = 1, 2, \dots, m$ , ou seja, da Definição 3.1.1 para a Definição 3.1.2 é tomar o algoritmo das projeções alternadas mais eficiente (veja as Figuras 3.5 e 3.6.)*

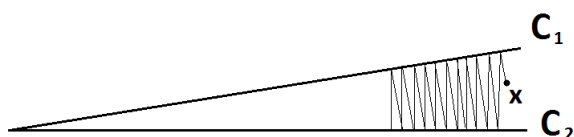


Figura 3.5: Com  $\lambda_i = 1$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, m$ .

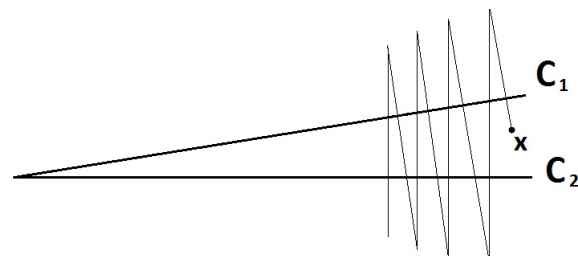


Figura 3.6: Com  $\lambda_i > 1$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Este próximo lema será usado para provar o Teorema 3.1.2.

**Lema 3.1.1.** *Se  $C_1, C_2, \dots, C_m$  são subconjuntos convexos de um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  então  $C_0 = \bigcap_{i=1}^m C_i$  é convexo.*

*Demonstração.* Dados  $x, y \in C_0$  quaisquer então  $x, y \in C_i, \forall i = 1, 2, \dots, m$ , e como cada  $C_i$  é convexo temos que :

$$((1 - \lambda_i)x + \lambda_i y) \in C_i, \forall \lambda_i \in [0, 1], \forall i = 1, 2, \dots, m$$

e logo

$$((1 - \lambda_i)x + \lambda_i y) \in \bigcap_{i=1}^m C_i = C_0, \forall \lambda_i \in [0, 1], \forall i = 1, 2, \dots, m$$

□

Finalmente estamos preparados para enunciar e provar o teorema que garante a convergência fraca da seqüência formada por projeções alternadas sobre conjuntos convexos, fechados e não-vazios (veja Definição 3.1.2), bem como de informa uma condição necessária e suficiente para que essa convergência seja forte em um espaço de Hilbert.

**Teorema 3.1.2** (Convergência da seqüência formada por projeções alternadas). *Seja  $C_0$  não-vazio. Então para todo  $x \in \mathcal{H}$  e todas constantes de relaxação  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , com  $0 < \lambda_i < 2$ ,  $i = 1, \dots, m$  a seqüência  $(T^n(x))$ , da Definição 3.1.2, converge fraco para  $x^* \in C_0$ . Além disso essa convergência é forte se, e somente se, a seqüência  $(T^n(x))$  possui uma subsequência que converge forte.*

*Demonstração.* A idéia da prova desse Teorema é usar o Teorema 3.1.1, para isto necessitaremos provar que o operador  $T$  da Definição 3.1.2 é não-expansivo assintoticamente regular e que o conjunto dos pontos fixos de  $T$  é não-vazio (veja as hipóteses do Teorema 3.1.1). Por isso dividiremos a prova desse teorema em três partes:

**Parte 1.** O operador  $T$  é não-expansivo.

**Parte 2.** Assintoticamente regular.

**Parte 3.** Tem-se a igualdade de conjuntos  $C_0 = \text{Fix}T$ .

**Prova da parte 1.** Vamos mostrar que para cada  $0 \leq \lambda_i \leq 2$ , com  $i = 1, \dots, m$  as aplicações:

$$T_i : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$$

dadas por:

$$T_i(x) = x + \lambda_i(P_i(x) - x) = (1 - \lambda_i)x + \lambda_i P_i(x)$$

são não-expansivas.

De fato:

**Caso  $0 \leq \lambda_i \leq 1$ .**

Se  $0 \leq \lambda_i \leq 1$  então

$$\begin{aligned} \|T_i(x) - T_i(y)\| &= \|(1 - \lambda_i)(x - y) + \lambda_i(P_i(x) - P_i(y))\| \\ &\leq |(1 - \lambda_i)| \cdot \|x - y\| + |\lambda_i| \cdot \|P_i(x) - P_i(y)\| \\ &\leq (1 - \lambda_i)\|x - y\| + \lambda_i\|x - y\| \\ &= \|x - y\| \end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos o fato de  $P_i$  ser não-expansivo.

**Caso  $1 < \lambda_i \leq 2$ .**

Da seguinte igualdade

$$\begin{aligned} \|T_i(x) - T_i(y)\|^2 &= \|(1 - \lambda_i)(x - y) + \lambda_i(P_i(x) - P_i(y))\|^2 \\ &= (1 - \lambda_i)^2\|x - y\|^2 + \lambda_i^2\|P_i(x) - P_i(y)\|^2 \\ &\quad + 2(1 - \lambda_i)\lambda_i \operatorname{Re}\langle x - y, P_i(x) - P_i(y) \rangle \end{aligned}$$

combinada com o Corolário 2.2.1 e também com o fato de que  $1 - \lambda_i < 0$ , temos

$$\begin{aligned} \|T_i(x) - T_i(y)\|^2 &= (1 - \lambda_i)^2\|x - y\|^2 + \lambda_i^2\|P_i(x) - P_i(y)\|^2 \\ &\quad + 2(1 - \lambda_i)\lambda_i \operatorname{Re}\langle x - y, P_i(x) - P_i(y) \rangle \\ &\leq (1 - \lambda_i)^2\|x - y\|^2 + \lambda_i^2\|P_i(x) - P_i(y)\|^2 \\ &\quad + 2(1 - \lambda_i)\lambda_i\|P_i(x) - P_i(y)\|^2 \\ &= (1 - \lambda_i)^2\|x - y\|^2 \\ &\quad + (\lambda_i^2 + 2(1 - \lambda_i)\lambda_i)\|P_i(x) - P_i(y)\|^2 \\ &= (1 - \lambda_i)^2\|x - y\|^2 \\ &\quad + (\lambda_i^2 + 2\lambda_i - 2\lambda_i^2)\|P_i(x) - P_i(y)\|^2 \\ &= (1 - \lambda_i)^2\|x - y\|^2 \\ &\quad + (\lambda_i(2 - \lambda_i))\|P_i(x) - P_i(y)\|^2 \\ &\leq (1 - \lambda_i)^2\|x - y\|^2 + (\lambda_i(2 - \lambda_i))\|x - y\|^2 \\ &= ((1 - \lambda_i)^2 + (\lambda_i(2 - \lambda_i)))\|x - y\|^2 \\ &= (1 - 2\lambda_i + \lambda_i^2 + 2\lambda_i - \lambda_i^2)\|x - y\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 \end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos o Corolário 2.2.2 e o fato de que  $2 - \lambda_i \geq 0$  (também o fato que  $0 \leq \lambda_i \leq 2$ ).

Daí resulta que

$$\|T_i(x) - T_i(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2,$$

e portanto,

$$\|T_i(x) - T_i(y)\| \leq \|x - y\|.$$

Mostrando que  $T_i$  é não-expansiva para todo  $i = 1, \dots, m$ , logo, resultando daí que  $T = T_m T_{m-1} \cdots T_1$  é não-expansivo.

Provando assim a Parte 1.

**Prova da parte 2.** Provaremos agora que  $T = T_m T_{m-1} \cdots T_1$  é assintoticamente regular. Para isto é suficiente provar que:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|T^n(x) - T^{n+1}(x)\|^2 < +\infty$$

pois se a série acima converge então seu termo geral vai a zero quando  $n \rightarrow +\infty$ , isto é,  $\|T^n(x) - T^{n+1}(x)\| \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ , o que provará a Parte 2.

Para isto provaremos inicialmente por indução sobre  $m$  que:

$$\|x - T(x)\|^2 \leq b_m 2^{m-1} (\|x - y\|^2 - \|T(x) - y\|^2) \quad (3.1)$$

$$\forall y \in C_0 \text{ e } b_m = \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\lambda_i}{2 - \lambda_i} \right\}.$$

De fato:

**Etapa 1.** Para  $m = 1$  temos:  $T = T_1$ ,  $C_0 = C_1$  e

$$\|x - T(x)\|^2 = \|x - T_1(x)\|^2 = \|x - (1 - \lambda_1)x - \lambda_1 P_1(x)\|^2 = \lambda_1^2 \|x - P_1(x)\|^2 \quad (3.2)$$

Dado qualquer  $y \in C_0$ , temos:  $T(y) = P_1(y) = y$  e

$$\begin{aligned} \|T(x) - y\|^2 &= \|x - y + \lambda_1(P_1(x) - x)\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 + \lambda_1^2 \|P_1(x) - x\|^2 + 2\lambda_1 \operatorname{Re}\langle x - y, P_1(x) - x \rangle \\ &= \|x - y\|^2 + \lambda_1^2 \|P_1(x) - x\|^2 \\ &\quad + 2\lambda_1 \operatorname{Re}\langle x - P_1(x) + P_1(x) - y, P_1(x) - x \rangle \\ &= \|x - y\|^2 - 2\lambda_1 \|P_1(x) - x\|^2 + \lambda_1^2 \|P_1(x) - x\|^2 \\ &\quad + 2\lambda_1 \operatorname{Re}\langle P_1(x) - y, P_1(x) - x \rangle \\ &= \|x - y\|^2 - \lambda_1 \{2 - \lambda_1\} \|P_1(x) - x\|^2 + 2\lambda_1 \operatorname{Re}\langle P_1(x) - y, P_1(x) - x \rangle \\ &\leq \|x - y\|^2 - \lambda_1 \{2 - \lambda_1\} \|P_1(x) - x\|^2, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue do Teorema da Projeção (Teorema 2.2.1), isto é, a desigualdade  $\operatorname{Re}\langle x - P_1(x), y - P_1(x) \rangle \leq 0$ .

Portanto, obtemos acima que

$$\|T(x) - y\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \lambda_1(2 - \lambda_1) \|x - P_1(x)\|^2, \quad (3.3)$$

ou seja

$$\|x - y\|^2 - \|T(x) - y\|^2 \geq \lambda_1(2 - \lambda_1) \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2} \|x - P_1(x)\|^2, \quad (3.4)$$

Substituindo (3.2) em (3.4) temos

$$\|T(x) - x\|^2 \leq \frac{\lambda_1}{2 - \lambda_1} (\|x - y\|^2 - \|T(x) - y\|^2), \quad (3.5)$$

pois  $T = P_1$  e  $0 < \lambda_1 < 2$ .

Provando o caso em que  $m = 1$ .

**Etapa 2.** Suponhamos válido para  $m - 1$ , e provemos que isto implica que será válido também para  $m$ , onde pela Etapa 1 podemos supor que  $m \geq 2$ .

Daí fazendo  $T = T_m K$ , onde  $K = T_{m-1} T_{m-2} \cdots T_1$ , temos a seguinte cadeia de desigualdades cujos detalhes estão explicados passo a passo na Observação C.0.1, no Apêndice C:

$$\begin{aligned} \|x - T(x)\|^2 &= \|x - K(x) + K(x) - T(x)\|^2 \\ &\leq (\|x - K(x)\| + \|K(x) - T(x)\|)^2 \\ &\leq 2 (\|x - K(x)\|^2 + \|K(x) - T(x)\|^2) \\ &\leq 2 (\|x - K(x)\|^2 + 2^{m-2} \|K(x) - T_m(K(x))\|^2) \\ &\leq 2 \|x - K(x)\|^2 + 2^{m-1} \frac{\lambda_m}{2 - \lambda_m} (\|K(x) - y\|^2 - \|T(x) - y\|^2) \\ &\leq 2 \|x - K(x)\|^2 + 2^{m-1} b_m (\|K(x) - y\|^2 - \|T(x) - y\|^2) \\ &\leq 2 b_{m-1} 2^{m-2} (\|x - y\|^2 - \|K(x) - y\|^2) + 2^{m-1} b_m (\|K(x) - y\|^2 - \|T(x) - y\|^2) \\ &\leq b_{m-1} 2^{m-1} (\|x - y\|^2 - \|K(x) - y\|^2) + 2^{m-1} b_m (\|K(x) - y\|^2 - \|T(x) - y\|^2) \\ &\leq 2^{m-1} b_m (\|x - y\|^2 - \|K(x) - y\|^2 + \|K(x) - y\|^2 - \|T(x) - y\|^2) \\ &\leq 2^{m-1} b_m (\|x - y\|^2 - \|T(x) - y\|^2). \end{aligned}$$

Provando (3.1).

Segue imediatamente de (3.1), com  $T^n(x)$  no lugar de  $x$  que:

$$\|T^n(x) - T^{n+1}(x)\| \leq 2^{m-1} b_m (\|T^n(x) - y\|^2 - \|T^{n+1}(x) - y\|^2), \forall y \in C_0 \quad (3.6)$$

Usando (3.6) temos:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^k \|T^n(x) - T^{n+1}(x)\|^2 &= \sum_{n=0}^k \|T^n(x) - T(T^n(x))\|^2 \\
 &\leq \sum_{n=0}^k b_m 2^{m-1} (\|T^n(x) - y\|^2 - \|T^{n+1}(x) - y\|^2) \\
 &= 2^{m-1} b_m \{ \|x - y\|^2 - \|T(x) - y\|^2 + \|T(x) - y\|^2 - \|T^2(x) - y\|^2 \\
 &\quad + \|T^2(x) - y\|^2 - \|T^3(x) - y\|^2 - \dots - \|T^k(x) - y\|^2 \\
 &\quad + \|T^k(x) - y\|^2 - \|T^{k+1}(x) - y\|^2 \} \\
 &= 2^{m-1} b_m (\|x - y\|^2 - \|T^{k+1}(x) - y\|^2)
 \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^k \|T^n(x) - T^{n+1}(x)\|^2 &= 2^{m-1} b_m (\|x - y\|^2 - \|T^{k+1}(x) - y\|^2) \\
 &\leq 2^{m-1} b_m \|x - y\|^2
 \end{aligned}$$

note que na desigualdade acima  $m$  é finito e que o lado direito dessa desigualdade não depende de  $k$ , logo, fazendo  $k \rightarrow +\infty$ , obtemos:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|T^n(x) - T^{n+1}(x)\|^2 \leq 2^{m-1} b_m \|x - y\|^2 < +\infty. \quad (3.7)$$

Portanto  $T$  é assintoticamente regular.

**Parte 3.** Provaremos agora que  $\text{Fix}T = C_0$ .

De fato:

Se  $x \in C_0$  então  $T_i(x) = x, \forall i = 1, \dots, m$ , e logo,  $T(x) = x$  implicando que  $x \in \text{Fix}T$ , e portanto,  $C_0 \subset \text{Fix}T$ .

Se  $x \in \text{Fix}T$  então  $T(x) = x$ . Tomemos  $y \in C_0$  qualquer, temos da não-expansividade de  $T_i, i = 1, 2, \dots, m$  que:

$$\begin{aligned}
 \|x - y\| &= \|T(x) - T(y)\| = \|T_m T_{m-1} \cdots T_1(x) - T_m T_{m-1} \cdots T_1(y)\| \\
 &\leq \|T_{m-1} T_{m-2} \cdots T_1(x) - T_{m-1} T_{m-2} \cdots T_1(y)\| \\
 &\leq \dots \leq \|T_1(x) - T_1(y)\| = \|T_1(x) - y\| \\
 &\leq \|x - y\|
 \end{aligned}$$

implicado que:

$$\|x - y\| = \|T_1(x) - y\|.$$

Segue imediatamente de (C.2) que  $x = T_1(x)$ .

Usando o fato provado acima de que  $x = T_1(x)$  e lembrando-se de que  $y \in C_0$ , temos:

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \|T(x) - T(y)\| = \|T_m T_{m-1} \cdots T_1(x) - T_m T_{m-1} \cdots T_1(y)\| \\ &\leq \|T_{m-1} T_{m-2} \cdots T_1(x) - T_{m-1} T_{m-2} \cdots T_1(y)\| \\ &\leq \cdots \leq \|T_2(T_1(x)) - T_2(T_1(y))\| = \|T_2(x) - y\| \\ &\leq \|T_1(x) - T_1(y)\| = \|x - y\| \end{aligned}$$

implicado que:

$$\|x - y\| = \|T_2(x) - y\|$$

Segue imediatamente de (C.2) que  $x = T_2(x)$ .

E repetindo o processo acima as  $m - 2$  vezes faltantes, obtemos:

$$T_1(x) = T_2(x) = \cdots = T_m(x) = x.$$

De

$$x = T_i(x) = x + \lambda_i(P_i(x) - x), \forall i = 1, 2, \dots, m$$

temos que

$$x = P_i(x) \in C_i, \forall i = 1, 2, \dots, m$$

onde usamos a hipótese de que  $0 < \lambda_i, \forall i = 1, 2, \dots, m$

E portanto

$$x \in C_0 = \bigcap_{i=1}^m C_i.$$

O que mostra a Parte 3.

Relembrando que estamos supondo que o conjunto  $C_0 = \bigcap_{i=1}^m C_i$  é não-vazio, e logo, resulta da Parte 3 que  $\text{Fix}T$  é não-vazio, portanto, o resultado segue do Teorema 3.1.1.  $\square$

Em particular para  $\lambda_i = 1$  com todo  $i = 1, 2, \dots, m$  temos o seguinte corolário:

**Corolário 3.1.1.** *Sejam  $C_i \subset \mathcal{H}$  para todo  $i = 1, 2, \dots, m$ , conjuntos convexos e fechados.*

*Então os pontos fixos do operador  $T = P_{C_m} \cdots P_{C_1}$  são exatamente os pontos do conjunto*

$$C_0 = \bigcap_{i=1}^m C_i.$$

*Demonstração.* Segue direto da **Etapa 3** do Teorema anterior.  $\square$



**Observação 3.1.2.** *O teorema anterior (Teorema 3.1.2) garante a convergência fraca da sequência formada pelas projeções alternadas sobre um número finito de conjuntos convexos e fechados num espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Porém, não garante a convergência forte dessa sequência! Foi provado no artigo do contra-exemplo de Hundal (veja [3]) que existe sequências de projeções no espaço de Hilbert  $\ell^2$  que não converge forte para  $\text{Fix}\Gamma$  (veja Capítulo 4).*

**Observação 3.1.3.** *Independentemente da convergência ser forte ou fraco, em geral, não vale que o ponto limite  $x^*$  da sequência  $(\Gamma^n(x))$  seja igual ao ponto  $P_{C_0}(x)$ , isto é, a projeção do valor de inicialização  $x = x^0$ , sobre  $C_0$ , pode não ser igual a  $x^*$ . Veja Figura 3.7.*

Na Figura 3.7 abaixo consideramos o nosso espaço de Hilbert como sendo  $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$ ,  $C_1 = B[(0, 0); 1, 5] = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1, 5\}$ ,  $C_2 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in \mathbb{R}, 0 \leq x_2 \leq \frac{1}{2}\}$  e  $x = (3, 2; 3, 2) \in \mathbb{R}^2$ . Claramente  $\mathbb{R}^2$  é um espaço de Hilbert,  $C_1$  e  $C_2$  são subconjuntos convexos, fechados e não-vazios de  $\mathbb{R}^2$ .

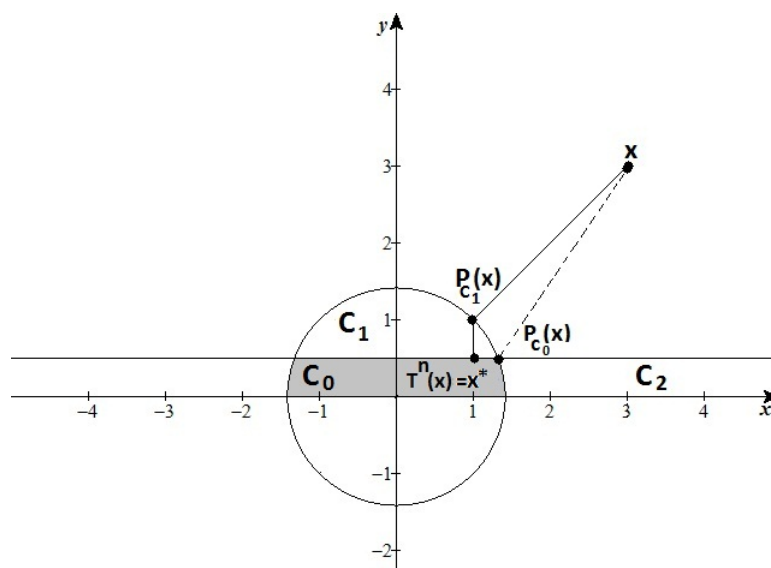


Figura 3.7: Nem sempre  $x^* = P_{C_0}(x)$ .

## 3.2 Convergência forte no caso dos conjuntos serem subespaços afim fechados.

O Corolário abaixo (Corolário 3.2.1) dá condições para que a sequência  $(T^n(x))$  do Teorema 3.1.2 possa convergir forte, e além disto, o elemento que será limite forte, digamos  $x^*$ , satisfaz o fato de que  $\|x - x^*\| = \min_{y \in C_0} \|x - y\|$ , ou seja,  $x^* = P_{C_0}(x)$  (note que nem sempre isso acontece, para  $C_i$   $i = 1, 2, \dots, m$  quaisquer, veja Figura 3.7).

Para isto necessitaremos das seguintes definições:

**Definição 3.2.1.** Chamaremos de subespaço ao conjunto  $C \subset \mathcal{H}$ , tal que

$$\alpha x + \beta y \in C, \forall x, y \in C, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Denotaremos o subespaço  $C \subset \mathcal{H}$ , por LM. Quando o subespaço (LM) for um conjunto fechado em  $\mathcal{H}$  denotaremos ele por CLM.

**Definição 3.2.2.** Chamaremos de subespaço afim ao conjunto

$$C_g = \{x = g + y; y \in \text{CLM}\},$$

onde  $g \in \mathcal{H}$  é fixo e CLM é um subespaço fechado.

A seguinte proposição será usada para provar o Corolário 3.2.1 abaixo.

**Proposição 3.2.1** (Expressão para a Projeção Sobre Subespaço Afim). *Seja  $C_g = \{g + y; y \in \delta\} \subset \mathcal{H}$  um subespaço afim obtida pela translação por  $g$  do  $\text{CLM} = \delta$  (subespaço fechado).*

*Dado qualquer  $x \in \mathcal{H}$  então  $P_{C_g}(x) = P_\delta(x) + P_{\delta^\perp}(g)$ . Onde  $P_{C_g}, P_\delta$  e  $P_{\delta^\perp}$  são operadores projeções sobre  $C_g, \delta$  e  $\delta^\perp$ , respectivamente.*

*Demonstração.* Vamos provar que  $P_\delta(x) + P_{\delta^\perp}(g)$  satisfaz a desigualdade (2.2) do Teorema da Projeção (Teorema 2.2.1). Para isto, sejam  $x \in \mathcal{H}$  fixado e  $y \in C_g$  qualquer, defina  $G(x) := P_\delta(x) + P_{\delta^\perp}(g)$ . Disto teremos:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\langle x - G(x), y - G(x) \rangle &= \operatorname{Re}\langle x - P_\delta(x) - P_{\delta^\perp}(g), z + g - P_\delta(x) - P_{\delta^\perp}(g) \rangle \\ &= \operatorname{Re}\langle x - P_\delta(x) - P_{\delta^\perp}(g), z - P_\delta(x) \rangle \\ &\quad + \operatorname{Re}\langle x - P_\delta(x) - P_{\delta^\perp}(g), g - P_{\delta^\perp}(g) \rangle \end{aligned}$$

onde  $z \in \delta$  é tal que  $\mathbf{y} = \mathbf{g} + z$ .

Usando  $P_\delta(\mathbf{x} - P_{\delta^\perp}(\mathbf{x})) = P_\delta(\mathbf{x}) - P_\delta(P_{\delta^\perp}(\mathbf{x})) = P_\delta(\mathbf{x})$  na igualdade acima resulta:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\langle \mathbf{x} - \mathbf{G}(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{G}(\mathbf{x}) \rangle &= \operatorname{Re}\langle \mathbf{x} - P_{\delta^\perp}(\mathbf{g}) - P_\delta(\mathbf{x} - P_{\delta^\perp}(\mathbf{g})), z - P_\delta(\mathbf{x} - P_{\delta^\perp}(\mathbf{g})) \rangle \\ &\quad + \operatorname{Re}\langle \mathbf{x} - P_\delta(\mathbf{x}) - P_{\delta^\perp}(\mathbf{g}), \mathbf{g} - P_{\delta^\perp}(\mathbf{g}) \rangle \\ &\leq \operatorname{Re}\langle \mathbf{x} - P_\delta(\mathbf{x}) - P_{\delta^\perp}(\mathbf{g}), \mathbf{g} - P_{\delta^\perp}(\mathbf{g}) \rangle \end{aligned}$$

onde na desigualdade acima usamos a desigualdade (2.2) do Teorema da Projeção (Teorema 2.2.1), pois por hipótese  $P_\delta(\mathbf{x} - P_{\delta^\perp}(\mathbf{g}))$  é a projeção de  $\mathbf{x} - P_{\delta^\perp}(\mathbf{g})$  sobre  $\delta$  (note que  $\delta$  é convexo e fechado).

Pelo Teorema da Projeção para Subespaços Fechados (Teorema 2.2.2) pode fazer  $\mathbf{x} = P_\delta(\mathbf{x}) + P_{\delta^\perp}(\mathbf{x})$ , e logo,  $\mathbf{x} - P_\delta(\mathbf{x}) = P_{\delta^\perp}(\mathbf{x}) \in \delta^\perp$ . Usando novamente o teorema da projeção, desta vez sobre o conjunto convexo  $\delta^\perp$ , temos:

$$\operatorname{Re}\langle \mathbf{x} - \mathbf{G}(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{G}(\mathbf{x}) \rangle \leq \operatorname{Re}\langle \mathbf{x} - P_\delta(\mathbf{x}) - P_{\delta^\perp}(\mathbf{g}), \mathbf{g} - P_{\delta^\perp}(\mathbf{g}) \rangle \leq 0$$

valendo isto para todo  $z + \mathbf{g} = \mathbf{y} \in C_g = \delta + \mathbf{g}$ .

Devido a unicidade da projeção sobre  $C_g$  em satisfazer a desigualdade (2.2) do Teorema da Projeção (Teorema 2.2.1):

$$P_\delta(\mathbf{x}) + P_{\delta^\perp}(\mathbf{g}) = \mathbf{G}(\mathbf{x}) = P_{C_g}(\mathbf{x}). \quad (3.8)$$

Provando a proposição. □

Abaixo temos o principal resultado dessa seção sobre convergência forte, o qual é uma consequência do Teorema 3.1.2. Esse resultado vale para quaisquer escolhas de  $0 < \lambda_i < 2$  (constantes de relaxação).

**Corolário 3.2.1.** *(Halperin [15], 1962) Se todos os  $C_i, \forall i = 1, 2, \dots, m$  são subespaços afins então a sequência  $(T^n(\mathbf{x}))$  converge forte para  $P_0(\mathbf{x}) \in C_0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$  (Veja Figura 3.8 abaixo).*

*Demonstração.* Primeiramente provaremos o caso particular em que todos os  $C_i$  são CLM (subespaços fechados), o caso geral será provado usando esse fato.

Para isto supomos que todos os  $C_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, m$  sejam CLM (é o que acontece quando  $\mathbf{g} = 0$  na Definição 3.2.2). Então, pelo Teorema da Projeção para

Subespaços Fechados (Teorema 2.2.2), todos os  $P_i$  são operadores de projeção sobre  $C_i$ , sendo que os  $P_i$  são lineares e auto-adjuntos para  $i = 1, 2, \dots, m$  (veja [6], página 134).

Consequentemente

$$T_i^* = I + \lambda_i(P_i^* - I) = I + \lambda_i(P_i - I) = T_i \quad (3.9)$$

é linear e auto-adjunto,  $\forall i = 1, 2, \dots, m$ , onde  $I$  representa o operador identidade.

Como já foi provado no teorema anterior que  $T$  é não-expansivo e sabendo que  $T(0) = 0$  (pois  $0 = 0 \cdot \alpha + 0 \cdot \beta \in C_i', \forall i = 1, 2, \dots, m$ , onde  $\alpha, \beta \in C_i$ , e usamos o fato de que os  $C_i$  são CLM implicando que  $P_i(0) = 0, \forall i = 1, 2, \dots, m$ ) temos

$$\|T(x)\| = \|T(x) - T(0)\| \leq \|x - 0\| = \|x\|, \forall x \in \mathcal{H}$$

daí

$$\|T^n\|_{op} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N},$$

onde  $\|T\|_{op} := \sup\{\|T(x)\| : \|x\| = 1\}$ , pois:  $\|T^n(x)\| \leq \|x\| \Rightarrow \|T^n(\frac{x}{\|x\|})\| \leq 1, \forall x \neq 0$  ( $\|\cdot\|_{op}$  = operador norma).

Como foi provado na Parte 2 da demonstração do Teorema 3.1.2 que  $T$  é assintoticamente regular, isto é,

$$T^n(x) - T^{n+1}(x) = T^n(I - T)(x) \rightarrow 0, \forall x \in \mathcal{H}$$

segue que

$$T^n(y) \rightarrow 0, \forall y \in \text{Im}(I - T). \quad (3.10)$$

Do fato que  $I - T$  é um operador linear e contínuo resulta que:

$$\overline{\text{Im}(I - T)} = (\text{Ker}(I - T^*))^\perp \quad (3.11)$$

(onde  $\text{Ker}(I - T^*) = \{x \in \mathcal{H} : x - T^*(x) = 0\}$  é o núcleo de  $I - T^*$ ).

Notando que  $\text{Ker}(I - T^*) = \text{Ker}(I - T_1 T_2 \cdots T_m)$ , pois

$$\begin{aligned} \langle T^*(x), y \rangle &= \langle x, T(y) \rangle = \langle x, T_m T_{m-1} \cdots T_1(y) \rangle = \langle (T_m)^*(x), T_{m-1} \cdots T_1(y) \rangle \\ &= \langle (T_{m-1})^*(T_m)^*(x), T_{m-2} \cdots T_1(y) \rangle = \cdots = \langle (T_1)^*(T_2)^* \cdots (T_m)^*(x), y \rangle \\ &= \langle T_1 T_2 \cdots T_m(x), y \rangle, \forall x, y \in \mathcal{H} \Rightarrow T^* = T_1 T_2 \cdots T_m \end{aligned}$$

onde na penúltima igualdade usamos o fato de que cada  $T_i$  é auto-adjunto ( veja (3.9)).

Resulta que:  $x \in \text{Ker}(I - T^*)$  se, e somente se,  $x \in \text{Ker}(I - T_1 T_2 \cdots T_m)$ , e logo,  $x \in$

$\text{Ker}(I - T^*)$  se, e somente se,  $x = T_1 T_2 \dots T_m(x)$ , isto é, pela Parte 3 da demonstração do Teorema 3.1.2 se, e só se,  $x \in C_0$ , e portanto,

$$\text{Ker}(I - T^*) = C_0. \quad (3.12)$$

Como  $\text{Ker}(I - T^*)$  é um subespaço fechado de uma espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  segue pelo Teorema da Projeção para Subespaços Fechados (Teorema 2.2.2) que

$$\mathcal{H} = \text{Ker}(I - T^*) \oplus (\text{Ker}(I - T^*))^\perp. \quad (3.13)$$

Substituindo (3.11) e (3.12) em (3.13) obtemos

$$\mathcal{H} = C_0 \oplus \overline{\text{Im}(I - T)}. \quad (3.14)$$

Dado  $y \in \overline{\text{Im}(I - T)}$  qualquer então existe uma seqüência  $(y_i) \subset \text{Im}(1 - T)$  tal que  $y_i \rightarrow y$ , e logo, não-expansividade de  $T$ , temos:

$$\|T^n(y)\| = \|T^n(y_i) + T^n(y) - T^n(y_i)\| \leq \|T^n(y_i)\| + \|T^n(y) - T^n(y_i)\| \quad (3.15)$$

$$\leq \|T^n(y_i)\| + \|y - y_i\| \quad (3.16)$$

o que nos dá

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \|T^n(y)\| \leq \|y - y_i\|$$

pois, por 3.10,  $T^n(y_i) \rightarrow 0$  (quando  $n \rightarrow +\infty$ .) para cada  $i \in \mathbb{N}$ .

Mas  $\|y - y_i\| \rightarrow 0$  (quando  $n \rightarrow +\infty$ .), pela hipótese de que  $y_i \rightarrow y$ , e logo,

$$T^n(y) \rightarrow 0 \quad (3.17)$$

quando  $n \rightarrow +\infty$  isto valendo  $\forall y \in \overline{\text{Im}(1 - T)}$ .

Finalmente dado  $x \in \mathcal{H}$  qualquer, por (3.14), podemos admitir a decomposição única  $x = z + y$ , com  $z = P_{C_0}(x) \in C_0$  e  $y = P_{C_0^\perp}(x) \in \overline{\text{Im}(I - T)}$ , pois  $C_0$  é subespaço (veja o Teorema da Projeção para Subespaços Fechados (Teorema 2.2.2) ), e logo,  $T^n(z) = z, \forall n \in \mathbb{N}$  (pois  $z \in C_0$ ).

Por (3.17) temos

$$T^n(x) = T^n(z) + T^n(y) = z + T^n(y) \rightarrow z = P_0(x) \quad (3.18)$$

quando  $n \rightarrow +\infty$  (onde acima usamos o fato de que  $T^n$  é linear, pois em (3.9) sendo  $T_i$  linear  $\forall i = 1, 2, \dots, m$  implica que  $T$  é linear e usamos também o Teorema da projeção

(Teorema 2.2.2) para obtemos que  $z = P_{C_0} \in C_0$ ). Portanto  $(T^n(x))$  converge forte para a projeção ortogonal de  $x$  sobre  $C_0$ , isto é,  $T^n(x) \rightarrow P_0(x)$ .

Provando o caso particular em que todo os  $C_i$  são CLM (subespaço fechados).

Agora provaremos o caso geral em que os conjuntos  $C_1, C_2, \dots, C_m$  são subespaços afins quaisquer, com  $C_0 = \bigcap_{i=1}^m C_i$  não-vazio.

Daremos apenas a prova para o caso  $m = 3$ , os outros casos prova-se de maneira análoga.

Para isto seja  $C_i = g_i + \delta_i$ , onde  $g_i \in \mathcal{H}$  é fixo e  $\delta_i$  é um CLM (subespaço fechado),  $\forall i = 1, 2, 3$ .

Por (3.8), temos que:

$$P_i(x) = S_i(x) + R_i(g_i) \quad (3.19)$$

onde  $S_i$  é o operador projeção sobre  $\delta_i$  e  $R_i(g_i)$  denota a projeção de  $g_i$  sobre  $\delta_i^\perp$ .

Daí, pela definição de  $T^i$ , temos

$$\begin{aligned} T_i(x) &= x + \lambda_i(P_i(x) - x) = x + \lambda_i(S_i(x) + R_i(g_i) - x) \\ &= (1 - \lambda_i)x + \lambda_i S_i(x) + \lambda_i R_i(g_i) \\ &= L_i(x) + \lambda_i R_i(g_i) \end{aligned}$$

onde  $L_i(x) = (1 - \lambda_i)x + \lambda_i S_i(x)$ ,  $\forall i = 1, 2, 3$ .

Daí temos

$$\begin{aligned} T(x) &= T_3 T_2 T_1(x) = T_3(T_2 T_1(x)) = L_3(T_2 T_1(x)) + \lambda_3 R_3(g_3) = L_3 T_2(T_1(x)) + \lambda_3 R_3(g_3) \\ &= L_3 L_2(T_1(x)) + \lambda_2 L_3 R_2(g_2) + \lambda_3 R_3(g_3) = L_3 L_2 T_1(x) + \lambda_2 L_3 R_2(g_2) + \lambda_3 R_3(g_3) \\ &= L_3 L_2 L_1(x) + \lambda_1 L_3 L_2 R_1(g_1) + \lambda_2 L_3 R_2(g_2) + \lambda_3 R_3(g_3) \\ &= h + L(x) \end{aligned}$$

onde:  $h = \lambda_1 L_3 L_2 R_1(g_1) + \lambda_2 L_3 R_2(g_2) + \lambda_3 R_3(g_3)$  e  $L(x) = L_3 L_2 L_1(x)$ .

Portanto iterando "T" n- vezes resulta:

$$T^n(x) = T^{n-1}T(x) = T^{n-1}(h + L(x)) = \dots = h + Lh + \dots + L^{n-1}h + L^n(x) = \left( \sum_{i=0}^{n-1} L^i h \right) + L^n(x),$$

isto é,

$$T^n(x) = \left( \sum_{i=0}^{n-1} L^i h \right) + L^n(x),$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ , onde supomos que  $L^0 = I$ , com  $I$  o operador identidade e lembrando-se que  $L$  é linear.

Em particular tomando  $x = f$ , onde  $f \in \text{Fix}T$  (logo  $T^n(f) = f$ ), acima temos:

$$f = \sum_{i=0}^{n-1} L^i h + L^n(f)$$

onde supomos que  $L^0 = I$ , com  $I$  o operador identidade.

Agora subtraíndo as duas igualdades anteriores obtemos:

$$T^n(x) - f = L^n(x - f)$$

$\forall n \in \mathbb{N}$  (está subentendido que  $L^0 = I$ ).

Como  $L^n = L^{n-1}(L(x)) = L^{n-1}(L_3 L_2 L_1(x))$ , onde  $L_i(x) = (1 - \lambda_i)x + \lambda_i S_i(x)$ ,  $\forall i = 1, 2, 3$ , é a projeção sobre  $\delta_3$  que por hipótese é CLM (subespaço fechado) resulta do caso anterior que  $L^n(x - f) \rightarrow P_\delta(x - f)$ , e logo,

$$T^n(x) \rightarrow f + P_\delta(x - f) = w$$

onde  $P_\delta$  é o operador projeção sobre  $\delta = \cap_{i=1}^3 \delta_i$  (que é CLM).

Provado que a sequência  $(T^n(x))$  converge forte para  $w$ . Para provamos o corolário é suficiente provar que:  $w = P_0(x)$ .

Para isto, lembre-se de que de acordo com a Parte 3 da demonstração do Teorema 3.1.2  $f \in \text{Fix}T$  é equivalente á  $f \in C_0$ . E se  $f \in C_0$  então  $w \in C_0$ , pois:

- \*  $f \in C_0 \Rightarrow f \in C_i = g_i + \delta_i, \forall i = 1, 2, 3.$
- \*  $P_\delta(x - f) \in \delta \Rightarrow P_\delta(x - f) \in \delta_i, \forall i = 1, 2, 3.$

Supondo  $f = g_i + \alpha_i, \forall i = 1, 2, 3$ , com  $\alpha_i \in \delta_i$ , temos:

$$\begin{aligned} f + P_\delta(x - f) &= g_i + \alpha_i + P_\delta(x - f) = g_i + (\alpha_i + P_\delta(x - f)) \in C_i, \forall i = 1, 2, 3 \\ \Rightarrow f + P_\delta(x - f) &= w \in C_0 = \cap_{i=1}^3 C_i, \end{aligned}$$

pois  $\alpha_i + P_\delta(x - f) \in C_i, \forall i = 1, 2, 3$ , uma vez que cada  $C_i$  é CLM.

Segue pelo Teorema da Projeção para Subespaços Fechados (Teorema 2.2.2) que:

$$x - w = x - f - P_\delta(x - f) = Q_\delta(x - f)$$

onde  $Q_\delta(x - f)$  denota a projeção  $x - f$  sobre  $\delta^\perp$ . Daí:

$$\|x - w\| = \|Q_\delta(x - f)\| \leq \|x - f\|, \forall f \in C_0 \Rightarrow P_0(x) = w$$

Desde que  $f \in C_0$  era qualquer, temos que:

$$T^n(x) \rightarrow w = P_0(x)$$

obtendo o resultado desejado. □

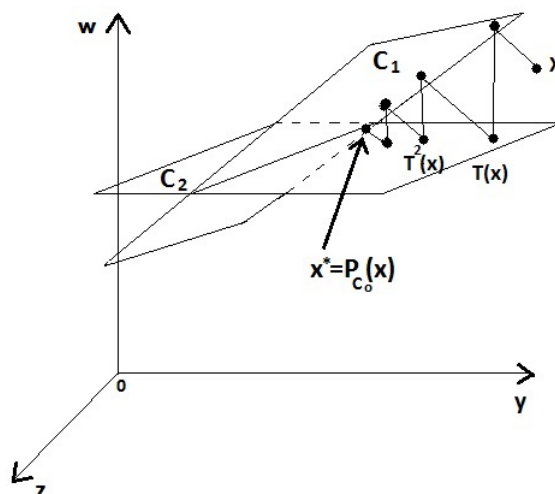


Figura 3.8: Projeção sobre CLM.

### 3.3 Algoritmo de passo simples cíclico.

Nesta seção generalizaremos a Definição 3.1.2 bem como o Teorema 3.1.2.

Para isto notemos que a Definição 3.1.2 poderia ter sido reescrita assim: para cada  $i = 1, 2, \dots, m$  sejam os operadores  $T_i : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ , dado por,  $T_i(x) := x + \lambda_i(P_i(x) - x) = (1 - \lambda_i)x + \lambda_i P_i(x)$ , com constantes  $\lambda_i \in (0, 2)$ , onde  $P_i : \mathcal{H} \rightarrow C_i$  é o operador projeção sobre  $C_i$ . E defini-se  $x_{n+1} = T_m T_{m-1} \cdots T_1(x)$ .

Para cada  $x \in \mathcal{H}$  definamos a sequência  $(x_n)$  agora do seguinte modo:

$$\begin{aligned} x_1 &= T_1(x) \\ x_2 &= T_2(x_1) = T_2(T_1(x)) \\ &\vdots \\ x_m &= T_m(x_{m-1}) = T_m T_{m-1} \cdots T_1(x) = T(x) \\ x_{m+1} &= T_1(x_m) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \vdots \\ x_{2m} &= T_m(x_{2m-1}) = T_m T_{m-1} \cdots T_1 T(x) = T^2(x) \\ x_{2m+1} &= T_1 x_{2m} \\ & \vdots \end{aligned}$$

Logo uma generalização para a definição da seqüência anterior, pois a seqüência anterior é uma mera subsequência desta.

Formalizaremos a seqüência acima através da seguinte definição:

**Definição 3.3.1.** (*algoritmo cíclico*) Dado  $x_0 = x \in \mathcal{H}$  qualquer então defina a seqüência recursivamente:

$$x_{n+1} = T_{\alpha(n)}(x_n),$$

onde  $x_0 = x$  e

$$\alpha(n) = 1 + n(\bmod m)$$

onde  $n(\bmod m)$  é o restos da divisão de  $n$  por  $m$ .

O processo da definição acima para se obter cada termo da seqüência  $x_n$  é chamado de algoritmo cíclico.

A seguir daremos dois exemplos para ficar bem claro a Definição 3.3.1. O objetivo do primeiro é entender como achar cada termo da seqüência gerada pelo algoritmo cíclico. Por isso o exemplo será bem detalhado. Já no segundo exemplo, nosso objetivo é destacar uma propriedade bem interessante da relação da inicialização  $x = x_0$  com o termo  $x_n$  da seqüência gerada pelo algoritmo cíclico.

**Exemplo 3.3.1.** Consideremos  $m = 3$  então para calcularmos o termo  $x_8$ , note que neste caso estamos tomando  $n = 7$  na Definição 3.3.1. Para isto temos:

- \* O resto da divisão de 7 por 3 é: 1. Logo  $7(\bmod 3) = 1$ , e portanto,  $\alpha(7) = 1 + 7(\bmod 3) = 2$ .
- \* O resto da divisão de 6 por 3 é: 0. Logo  $6(\bmod 3) = 0$ , e portanto,  $\alpha(6) = 1 + 6(\bmod 3) = 1$ .

- \* O resto da divisão de 5 por 3 é : 2. Logo  $5(\bmod 3) = 2$ , e portanto,  $\alpha(5) = 1 + 5(\bmod 3) = 3$ .
- \* O resto da divisão de 4 por 3 é : 1. Logo  $4(\bmod 3) = 1$ , e portanto,  $\alpha(4) = 1 + 4(\bmod 3) = 2$ .
- \* O resto da divisão de 3 por 3 é : 0. Logo  $3(\bmod 3) = 0$ , e portanto,  $\alpha(3) = 1 + 3(\bmod 3) = 1$ .
- \* O resto da divisão de 2 por 3 é : 2. Logo  $2(\bmod 3) = 2$ , e portanto,  $\alpha(2) = 1 + 2(\bmod 3) = 3$ .
- \* O resto da divisão de 1 por 3 é : 1. Logo  $1(\bmod 3) = 1$ , e portanto,  $\alpha(1) = 1 + 1(\bmod 3) = 2$ .
- \* O resto da divisão de 0 por 3 é : 0. Logo  $0(\bmod 3) = 0$ , e portanto,  $\alpha(0) = 1 + 0(\bmod 3) = 1$ .

Temos, substituindo os valores acima na Definição 3.3.1, que:

$$\begin{aligned}
 x_8 &= x_{n+1} = T_{\alpha(n)}(x_n) = T_{\alpha(7)}(x_7) = T_2(x_7) = T_2(T_{\alpha(6)}(x_6)) = T_2(T_1(x_6)) \\
 &= T_2T_1(T_{\alpha(5)}x_5) = T_2T_1(T_3(x_5)) = T_2T_1T_3(T_{\alpha(4)}(x_4)) = T_2T_1T_3(T_2(x_4)) \\
 &= T_2T_1T_3(T_2(T_{\alpha(3)}x_3)) = T_2T_1T_3T_2T_1(x_3) = T_2T_1T_3(T_2T_1(T_{\alpha(2)}x_2)) \\
 &= T_2T_1T_3T_2T_1T_3(x_2) = T_2T_1T_3T_2T_1T_3(T_{\alpha(1)}x_1) = T_2T_1T_3T_2T_1T_3(T_2x_1) \\
 &= T_2T_1T_3T_2T_1T_3T_2(T_{\alpha(0)}x_0) = T_2T_1(T_3T_2T_1)(T_3T_2T_1)(x_0) \\
 &= T_2T_1T^2(x)
 \end{aligned}$$

lembrando-se que  $T := T_3T_2T_1$  e  $x_0 = x$ .

**Exemplo 3.3.2.** Consideremos  $m = 3$ , então o termo  $x_{14}$  da sequência gerada pelo algoritmo cíclico está relacionado com a inicialização  $x = x_0$  do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
 x_{14} &= T_2T_1(T_3T_2T_1)(T_3T_2T_1)(T_3T_2T_1)(T_3T_2T_1)(x) \\
 &= T_2T_1T^4(x)
 \end{aligned}$$

lembrando-se que  $T = T_3T_2T_1$ .

Segue dos exemplos 3.3.1 e 3.3.2 a seguinte observação.

**Observação 3.3.1.** De modo geral a relação entre  $x_n$  e  $x = x^0$  no algoritmo cíclico é  $x_n = T_r T_{r-1} \cdots T_1 T^l(x)$ , onde  $l \in \mathbb{N}$  e  $r \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$  são os únicos números que satisfazem  $n = lm + r$  (Algoritmo da divisão de Euclides).

Notemos que pelo Teorema 3.1.2 a seqüência  $(T^l(x))$ , onde  $T = T_m T_{m-1} \cdots T_1$ , converge fraco para um ponto  $x^* \in C_0$  para qualquer inicialização  $x^0 = x \in \mathcal{H}$ . Nosso **objetivo** nesta seção é mostra que para qualquer inicialização  $x^0 = x \in \mathcal{H}$  a seqüência  $(x_n)$  gerada pelo algoritmo cíclico converge fracamente para o mesmo ponto  $x^*$  (do Teorema 3.1.2).

**Corolário 3.3.1.** Para qualquer inicilização  $x^0 = x \in \mathcal{H}$  as seqüências  $(T^l(x))_{l \in \mathbb{N}}$  e  $(x_n = T_{\alpha(n-1)}(x_{n-1}))_{n \in \mathbb{N}}$  convergem fraco para o mesmo ponto  $x^* \in C_0$ .

*Demonstração.* A idéia da provar é mostrar que **qualquer** subsequência  $(x_{n_i})$  da seqüência  $(x_n)$  gerada pelo algoritmo cíclico satisfaz:

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \|x_{n_i} - T^{l_i}(x)\| = 0 \quad (3.20)$$

onde  $l_i \in \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{N}$  é dado pelo algoritmo da divisão de Euclides satisfazendo  $n_i = l_i m + r_i$ , com  $0 \leq r_i \leq m-1$  (Veja os exemplos 3.3.1 e 3.3.2 e a Observação 3.3.1).

Note que de (3.20) seguirá o resultado do corolário 3.3.1, pois pelo Teorema 3.1.2,  $T^l(x) \rightharpoonup x^*$  quando  $l \rightarrow +\infty$ , para algum  $x^* \in C_0$ , e consequentemente  $T^{l_i}(x) \rightharpoonup x^*$  quando  $i \rightarrow +\infty$ , ou seja, para todo  $z \in \mathcal{H}$ , tem-se

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \langle T^{l_i}(x), z \rangle - \langle x^*, z \rangle = 0 \quad (3.21)$$

Usando a desigualdade triangular e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} |\langle x_{n_i}, z \rangle - \langle x^*, z \rangle| &\leq |\langle x_{n_i}, z \rangle - \langle T^{l_i}(x), z \rangle| + |\langle T^{l_i}(x), z \rangle - \langle x^*, z \rangle| \\ &\leq \|x_{n_i} - T^{l_i}(x)\| \|z\| + |\langle T^{l_i}(x), z \rangle - \langle x^*, z \rangle| \end{aligned}$$

segue por (3.20) e por (3.21) que  $\lim_{i \rightarrow +\infty} \langle x_{n_i}, z \rangle - \langle x^*, z \rangle = 0$ , ou seja,  $x_{n_i} \rightharpoonup x^*$  quando  $i \rightarrow +\infty$ .

Portanto é suficiente provamos (3.20). Para isto dividiremos a prova de (3.20) em duas partes:

**Parte A.** Vamos mostrar que para todo  $y \in C_0 \neq \emptyset$ , tem-se

$$\|x_{n_i} - T^{l_i}(x)\|^2 \leq b_m \cdot 2^{m-1} (\|T^{l_i}(x) - y\|^2 - \|T^{l_{i+1}}(x) - y\|^2).$$

onde  $b_m = \sup_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\lambda_i}{2 - \lambda_i} \right\}$ .

**Parte B.** Vamos mostrar que  $\lim_{i \rightarrow +\infty} (\|T^{l_{i+1}}(x) - y\|^2 - \|T^{l_i}(x) - y\|^2) = 0$ .

**Prova da parte A.** Tomando em (3.1),  $T_{r_i} \cdots T_1$  em vez de  $T$  e  $T^{l_i}(x)$  em vez de  $x$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \|x_{n_i} - T^{l_i}(x)\|^2 &= \|T_{r_i} \cdots T_1 T^{l_i}(x) - T^{l_i}(x)\|^2 \\ &\leq b_{m_i} \cdot 2^{m_i-1} (\|T^{l_i}(x) - y\|^2 - \|T_{r_i} \cdots T_1 T^{l_i}(x) - y\|^2) \\ &\leq b_m \cdot 2^{m-1} (\|T^{l_i}(x) - y\|^2 - \|T_{r_i} \cdots T_1 T^{l_i}(x) - y\|^2) \\ &\leq b_m \cdot 2^{m-1} (\|T^{l_i}(x) - y\|^2 - \|T^{l_{i+1}}(x) - y\|^2) \end{aligned}$$

para todo  $y \in C_0 \neq \emptyset$ . Observe que na última desigualdade acima usamos o fato de que

$$\|T^{l_{i+1}}(x) - y\|^2 \leq \|T_{r_i} \cdots T_1 T^{l_i}(x) - y\|^2. \quad (3.22)$$

Para provar (3.22), usaremos o fato que foi provado no Teorema 3.1.2 de que  $T_s$  é não-expansivo, para todo  $s = 1, 2, \dots, m$ . De fato, para  $k := l_{i+1} - (l_i + 1)$  (note que  $k \geq 0$ ), tem-se:

$$\begin{aligned} \|T^{l_{i+1}}(x) - y\| &= \|T^k T^{l_i+1}(x) - T^k T^{l_i+1}(y)\| \\ &\leq \|T^{l_i+1}(x) - T^{l_i+1}(y)\| = \|T \cdot T^{l_i}(x) - T \cdot T^{l_i}(y)\| \\ &= \|(T_m \cdots T_{r_{i+1}})(T_{r_i} \cdots T_1) T^{l_i}(x) - (T_m \cdots T_{r_{i+1}})(T_{r_i} \cdots T_1) T^{l_i}(y)\| \\ &\leq \|(T_{r_i} \cdots T_1) T^{l_i}(x) - (T_{r_i} \cdots T_1) T^{l_i}(y)\| \\ &= \|T_{r_i} \cdots T_1 T^{l_i}(x) - y\|. \end{aligned}$$

Provando que

$$\|T^{l_{i+1}}(x) - y\| \leq \|T_{r_i} \cdots T_1 T^{l_i}(x) - y\|, \forall y \in C_0.$$

**Prova da parte B** Defina  $s_i := \|T^{l_i}(x) - y\|^2$ . Vamos mostra que a sequência  $(s_i)$  assim definida é convergente. De fato, notemos inicialmente que a sequência  $(s_i)$  é claramente limitada inferiormente por zero, e além disso, essa sequência é monótona não crescente, pois por (3.22) temos:

$$\begin{aligned} \|T^{l_{i+1}}(x) - y\|^2 &\leq \|T_{r_i} T_{r_{i-1}} \cdots T_1 T^{l_i}(x) - y\|^2 \\ &= \|T_{r_i} T_{r_{i-1}} \cdots T_1 T^{l_i}(x) - T_{r_{i+1}} T_{r_i} \cdots T_1 T^{l_i}(y)\|^2 \\ &\leq \|T^{l_i}(x) - y\|^2 \end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos novamente o fato de que os  $T_j$  são não-expansivos e  $y \in C_0$ . Provando que a sequência  $(s_i)$  é monótona não crescente.

Portanto, existem os limites  $\lim_{i \rightarrow +\infty} s_i$  e  $\lim_{i \rightarrow +\infty} s_{i+1}$ , os quais são iguais. Logo

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} (s_i - s_{i+1}) = \lim_{i \rightarrow +\infty} s_i - \lim_{i \rightarrow +\infty} s_{i+1} = 0.$$

Provando a Parte B e o corolário.

□

### 3.4 Convergência forte e sua taxa de convergência no método das projeções alternadas.

Nesta seção mostraremos que a convergência da sequência formada por projeções, a sequência do Teorema 3.1.2, converge forte sob condição de um dos conjuntos  $C_i$  serem uniformemente convexo (veja a Definição 2.1.3 e Teorema 3.4.2). Além disto a convergência forte será a uma taxa geométrica condição (3.35) (veja Teorema 3.4.2).

Para isto relembremos que um subconjunto  $C \subset \mathcal{H}$  é fechado fraco se para toda sequência  $(x_n) \subset C$  tal que,  $x_n \rightharpoonup x$  implicar que  $x \in C$ .

**Lema 3.4.1.** *Se  $C$  é convexo e fechado então  $C$  é fechado fraco.*

*Demonstração.* Seja  $(x_n) \subset C$  uma sequência fracamente convergente para um ponto  $x \in \mathcal{H}$ . Vamos mostra que  $x \in C$ .

Uma vez que por hipótese o conjunto  $C$  é fechado e convexo, pode-se usar o teorema da projeção (Teorema 2.2.1). Como resultado deste teorema (com  $\bar{x} = P_C(x)$  e  $y = x_n \in C$ ), tem-se a desigualdade

$$\operatorname{Re}\langle x - P_C(x), x_n - P_C(x) \rangle \leq 0 \tag{3.23}$$

é válida para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Como  $x_n \rightharpoonup x$  temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}\langle x - P_C(x), x_n - P_C(x) \rangle &= \operatorname{Re}\langle x - P_C(x), x - P_C(x) \rangle \\ &= \|x - P_C(x)\|^2 \geq 0. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Combinado (3.23) com (3.24) temos

$$0 \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Re} \langle \mathbf{x} - \mathbf{P}_C(\mathbf{x}), \mathbf{x}_n - \mathbf{P}_C(\mathbf{x}) \rangle = \|\mathbf{x} - \mathbf{P}_C(\mathbf{x})\|^2 \geq 0.$$

e logo

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{P}_C(\mathbf{x})\| = 0$$

portanto

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}_C(\mathbf{x}) \in C$$

□

**Observação 3.4.1.** Se  $C \subset \mathcal{H}$  é fechado não implica, em geral, que  $C$  é fechado fraco.

De fato tomemos  $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$  e  $C = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; \|\mathbf{x}\| = 1\}$ .

$C$  é claramente fechado, pois é imagem inversa de um fechado  $\{1\}$  na reta por uma função " $\|\cdot\|$ " contínua, mas  $C$  não é fechado fraco, pois  $\mathbf{e}_n \rightarrow 0$ . Veja observação 1.2.1.

**Lema 3.4.2.** Seja  $T$  uma aplicação não-expansiva cujo o conjunto dos pontos fixos contém um conjunto convexo e fechado  $\mathcal{F}$  ( $\mathcal{F} \subset \operatorname{Fix} T$ ). Seja  $\mathbf{P}_{\mathcal{F}}$  o operador projeção sobre  $\mathcal{F}$ . Então para todo  $\mathbf{x} \in \operatorname{dom} T$  temos:

$$\operatorname{Re} \langle \mathbf{x} - T(\mathbf{x}), \mathbf{x} - \mathbf{P}_{\mathcal{F}}(\mathbf{x}) \rangle \geq 0 \quad (3.25)$$

e

$$\|\mathbf{x} - T(\mathbf{x})\| \leq 2\|\mathbf{x} - \mathbf{P}_{\mathcal{F}}(\mathbf{x})\|. \quad (3.26)$$

*Demonstração.* Como  $T$  é não-expansivo temos:

$$\|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \Rightarrow \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 - \|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})\|^2 \geq 0$$

$\forall \mathbf{x} \in \operatorname{dom} T$ .

Em particular tomando  $\mathbf{y} = \mathbf{P}_{\mathcal{F}}(\mathbf{x})$ , temos

$$\|T(\mathbf{x}) - \mathbf{P}_{\mathcal{F}}(\mathbf{x})\|^2 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{P}_{\mathcal{F}}(\mathbf{x})\|^2$$

pois  $\mathbf{P}_{\mathcal{F}}(\mathbf{x}) \in \mathcal{F} \subset \operatorname{Fix} T$ , implica que,  $T(\mathbf{P}_{\mathcal{F}}(\mathbf{x})) = \mathbf{P}_{\mathcal{F}}(\mathbf{x}) \in \operatorname{dom} T$

e logo

$$\|\mathbf{x} - T(\mathbf{x}) - (\mathbf{x} - \mathbf{P}_{\mathcal{F}}(\mathbf{x}))\|^2 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{P}_{\mathcal{F}}(\mathbf{x})\|^2 \Rightarrow \|\mathbf{x} - T(\mathbf{x})\|^2 - 2\operatorname{Re} \langle \mathbf{x} - T(\mathbf{x}), \mathbf{x} - \mathbf{P}_{\mathcal{F}}(\mathbf{x}) \rangle +$$

$$\|x - P_{\mathcal{F}}(x)\|^2 \leq \|x - P_{\mathcal{F}}(x)\|^2 \Rightarrow \|x - T(x)\|^2 \leq 2\operatorname{Re}\langle x - T(x), x - P_{\mathcal{F}}(x) \rangle$$

e logo

$$\|x - T(x)\|^2 \leq 2\operatorname{Re}\langle x - T(x), x - P_{\mathcal{F}}(x) \rangle \quad (3.27)$$

$\forall x \in \operatorname{dom}T$ .

Provando a primeira afirmação.

Para prova a segunda afirmação, usando Cauchy-Schwarz em (3.27), temos

$$\|x - T(x)\|^2 \leq 2\|x - T(x)\|\|x - P_{\mathcal{F}}(x)\|. \quad (3.28)$$

Se  $T(x) = x$ , então  $\|x - T(x)\| = 0 \leq \|x - P_{\mathcal{F}}(x)\| \leq 2\|x - P_{\mathcal{F}}(x)\|$ .

Agora se  $T(x) \neq x$ , então dividindo (3.28) por  $\|x - T(x)\|$ , temos:

$$\|x - T(x)\| \leq 2\|x - P_{\mathcal{F}}(x)\|.$$

Provando o lema. □

O seguinte lema nos fornece uma condição "necessária" e uma segunda condição "suficiente" para que o limite fraco  $x^*$  garantido pelo Teorema 3.1.1 também seja o limite forte.

**Lema 3.4.3.** *Seja  $T$  um operador satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.1.1. Se  $x^*$  é o limite fraco da sequência  $(T^n(x))$ , garantido por este teorema, então as seguintes afirmações acerca de  $x^*$  são válidas:*

- a) *Se  $x^*$  é também o limite forte da sequência  $(T^n(x))$  então  $\|T^n(x) - P_{\operatorname{Fix}T}T^n(x)\| \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow +\infty$ .*
- b) *Se existe um conjunto convexo e fechado  $\mathcal{F} \subset \operatorname{Fix}T$  satisfazendo a hipótese de que  $\|T^n(x) - P_{\mathcal{F}}T^n(x)\| \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow +\infty$ , então  $x^*$  é também o limite forte da sequência  $(T^n(x))$ .*

*Demonstração. Prova de a).* Pelo teorema 3.1.1 a sequência de iterações  $(T^n(x))$  converge fraco para um ponto  $x^* \in \operatorname{Fix}T$ .

É claro que se a sequência  $(T^n(x))$  converge forte então  $T^n(x) \rightarrow x^*$  (pois  $T^n(x) \rightharpoonup x^*$ ) daí, temos

$$d(T^n(x), \operatorname{Fix}T) = \inf_{z \in \operatorname{Fix}T} \|T^n(x) - z\| = \|T^n(x) - P_{\operatorname{Fix}T}(T^n(x))\| \leq \|T^n(x) - x^*\| \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow +\infty$ , pois  $x^* \in \text{Fix}T$ .

Provando que

$$d(T^n(x), \text{Fix}T) \rightarrow 0$$

ou

$$\|T^n(x) - P_{\text{Fix}T}T^n(x)\| \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow +\infty$ .

**Prova de b).** Agora suponhamos que  $\|T^n(x) - P_{\mathcal{F}}T^n(x)\| \rightarrow 0$ , ( $n \rightarrow +\infty$ ), para algum conjunto fechado e convexo  $\mathcal{F} \subset \text{Fix}T$ .

Como  $T^n$  é não-expansivo  $\forall n \in \mathbb{N}$  e  $\mathcal{F}$  é convexo obtemos pelo lema 3.4.2 que

$$\|x - T^n(x)\| \leq 2\|x - P_{\mathcal{F}}(x)\|, \forall n \in \mathbb{N} \quad (3.29)$$

em particular, tomando  $T^k(x)$  em vez de  $x$  acima e lembrando que por hipótese temos  $\|T^n(x) - P_{\mathcal{F}}T^n(x)\| \rightarrow 0$ , ( $n \rightarrow +\infty$ ) resulta

$$\|T^k(x) - T^{k+n}(x)\| \leq 2\|T^k(x) - P_{\mathcal{F}}(T^k(x))\| \rightarrow 0 \quad (3.30)$$

quando  $k \rightarrow +\infty$ .

Portanto  $(T^k(x)) \subset \mathcal{H}$  é de Cauchy, e logo, possui uma subsequência convergente forte. Disto segue pela segunda parte do Teorema 3.1.1, que

$$T^n(x) \rightarrow x^*.$$

Provando o item b) e o lema. □

**Observação 3.4.2.** *Segue direto do lema anterior que a sequência  $(T^n(x))$  do Teorema 3.1.2 converge forte para um ponto de  $C_0$  se, e somente se,*

$$d(T^n(x), C_0) = \|T^n(x) - P_0T^n(x)\| \rightarrow 0$$

*quando  $n \rightarrow +\infty$  (pois foi provado na Parte 3 do Teorema 3.1.2 que o conjunto dos pontos fixo de  $T = T_m T_{m-1} \cdots T_1$  é igual a  $C_0$  e que o operador  $T = T_m T_{m-1} \cdots T_1$  é assintoticamente regular e não-expansivo, ficando assim nas hipótese do Teorema 3.1.1).*

**Observação 3.4.3.** *Nós podemos mostrar sem hipóteses adicionais (por exemplo sem a hipótese de que  $T^n(x)$  converge forte) que:*

$$d(T^n(x), C_r) = \|T^n(x) - P_r T^n(x)\| \rightarrow 0$$



quando,  $n \rightarrow +\infty$ , para cada  $r = 1, 2, \dots, m$ .

Para provar isto tomando  $T^n(x)$  em vez de  $x$  e  $P_r P_{r-1} \cdots P_1$  em vez de  $T$  em (3.1), com  $\lambda_i = 1$  para todo  $i = 1, 2, \dots, m$ , temos que

$$\begin{aligned} \|T^n(x) - P_r P_{r-1} \cdots P_1 T^n(x)\| &\leq 2^{r-1} (\|T^n(x) - y\|^2 - \|P_r P_{r-1} \cdots P_1 T^n(x) - y\|^2) \\ &\leq 2^{r-1} (\|T^n(x) - y\|^2 - \|T^{n+1}(x) - y\|^2), \end{aligned}$$

pois:  $\|T^{n+1}(x) - y\| \leq \|P_r P_{r-1} \cdots P_1 T^n(x) - y\|$ .

O que nos dá

$$\|T^n(x) - P_r P_{r-1} \cdots P_1 T^n(x)\| \leq 2^{r-1} (\|T^n(x) - y\| - \|T^{n+1}(x) - y\|) \rightarrow 0$$

para todo  $y \in C_0$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ , onde  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T^n(x) - y\|$  existe, pois:  $\|T^n(x) - y\| = \|T^n(x) - T(y)\| \leq \|T^{n+1}(x) - y\| \leq \cdots \leq \|x - y\|$ , logo,  $(\|T^n(x) - y\|)$  é monótona limitada, e portanto convergente.

Finalmente usando o fato de que  $(\|T^n(x) - y\|)$  é uma sequência convergente combinado com  $P_r P_{r-1} \cdots P_1 T^n(x) \in C_r$ , temos:

$$d(T^n(x), C_r) \leq \|T^n(x) - P_r P_{r-1} \cdots P_1 T^n(x)\| \rightarrow 0.$$

**Teorema 3.4.1.** (Convergência forte do método das projeções alternadas) Seja  $x^*$  o limite fraco da sequência  $(T^n(x))$  do Teorema 3.1.2.

Se pelo menos um dos conjuntos  $C_1, C_2, \dots, C_n$  é uniformemente convexo e esse conjunto não contém  $x^*$  como ponto interior então  $(T^n(x))$  converge forte para  $x^*$ .

*Demonstração.* Suponhamos sem perda de generalidade que  $C_1$  seja uniformemente convexo e que  $x^*$  não é ponto interior de  $C_1$ .

Pela Observação 3.4.3, temos:

$$d(T^n(x), C_1) = \|T^n(x) - P_1 T^n(x)\| \rightarrow 0 \tag{3.31}$$

quando  $n \rightarrow +\infty$ . Defina  $y_n := P_1 T^n(x) \in C_1$ . Note que  $y_n \rightarrow x^*$ , pois para todo  $x \in \mathcal{H}$ , temos

$$|\langle T^n(x), z \rangle - \langle y_n, z \rangle| = |\langle T^n(x) - y_n, z \rangle| \leq \|T^n(x) - y_n\| \|z\| \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow +\infty$  ( pois, pela Observação 3.4.3,  $\|T^n(x) - y_n\| \rightarrow 0$ ), e logo,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle y_n, z \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T^n(x), z \rangle = \langle x^*, z \rangle, \forall z \in \mathcal{H}$$

o que nos dá

$$\mathbf{y}_n \rightarrow \mathbf{x}^*$$

quando  $n \rightarrow +\infty$ .

Afirmamos que  $\mathbf{y}_n \rightarrow \mathbf{x}^*$ , ( $n \rightarrow +\infty$ ).

De fato se  $(\mathbf{y}_n)$  não convergisse forte para  $\mathbf{x}^*$ , então existiria um  $\epsilon > 0$  e uma subseqüência  $(\mathbf{y}_{n_k})$  de  $(\mathbf{y}_n)$  tal que

$$\|\mathbf{y}_{n_k} - \mathbf{x}^*\| \geq \epsilon, \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.32)$$

Por outro lado como  $C_1$  é por hipótese uniformemente convexo existe uma função positiva  $\delta$  tal que

$$\left\| z - \frac{\mathbf{x} + \mathbf{y}}{2} \right\| \leq \delta(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) \Rightarrow z \in C_1, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in C_1. \quad (3.33)$$

Afirmamos que para todo  $\mathbf{z}_{n_k} = \frac{\mathbf{y}_{n_k} + \mathbf{x}^*}{2} + \mathbf{h}$ , com  $\mathbf{h} \in \mathcal{H}$  tal que  $\|\mathbf{h}\| \leq \delta(\epsilon)$ , temos que:  $\mathbf{z}_{n_k} \in C_1, \forall k \in \mathbb{N}$ . De fato como  $\mathbf{y}_{n_k}, \mathbf{x}^* \in C_1$  (pois  $\mathbf{y}_{n_k} = P_{C_1}(T^n)(\mathbf{x}) \in C_1$  e, pelo Teorema 3.1.2,  $\mathbf{x}^* \in C_0$ ) e

$$\left\| \mathbf{z}_{n_k} - \frac{\mathbf{x}^* + \mathbf{y}_{n_k}}{2} \right\| = \|\mathbf{h}\| \leq \delta(\epsilon) \leq \delta(\|\mathbf{x}^* - \mathbf{y}_{n_k}\|) \Rightarrow \mathbf{z}_{n_k} \in C_1,$$

onde usamos o fato de que a função  $\delta$  pode sempre ser tomada não decrescente (veja Definição 2.1.3) combinada com a desigualdade (3.32) e com (3.33), daí temos que

$$\left\| \mathbf{z}_{n_k} - \frac{\mathbf{x}^* + \mathbf{y}_{n_k}}{2} \right\| \leq \delta(\epsilon) \Rightarrow \mathbf{z}_{n_k} \in C_1$$

provando a afirmação.

Fixando agora qualquer  $\mathbf{h} \in \mathcal{H}$ , com  $\|\mathbf{h}\| < \delta(\epsilon)$ , temos

$$\mathbf{z}_{n_k} = \frac{\mathbf{y}_{n_k} + \mathbf{x}^*}{2} + \mathbf{h} \rightarrow \frac{\mathbf{x}^* + \mathbf{x}^*}{2} + \mathbf{h} = \mathbf{x}^* + \mathbf{h}$$

pois por hipótese  $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}^*$  ( $n \rightarrow +\infty$ ). Como  $C_1$  é fechado fraco (esse fato segue direto do Lema 3.4.1, pois  $C_1$  é forte e convexo) e  $\mathbf{z}_{n_k} \in C_1$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ , concluímos que

$$\mathbf{x}^* + \mathbf{h} \in C_1 \quad (3.34)$$

isto para qualquer  $\mathbf{h} \in \mathcal{H}$ , com  $\|\mathbf{h}\| < \delta(\epsilon)$ .

Afirmamos agora que  $B(\mathbf{x}^*, \delta(\epsilon)) \subset C_1$ .

Para provar essa afirmação tomemos  $z \in B(x^*, \delta(\epsilon))$  qualquer fazendo  $h = z - x^* \in \mathcal{H}$  obtemos que

$$\|h\| = \|z - x^*\| < \delta(\epsilon)$$

e por (3.34), pois lá era qualquer  $h \in \mathcal{H}$  tal que  $\|h\| < \delta(\epsilon)$ , concluímos que

$$z = x^* + h \in C_1.$$

Provando a afirmação de que  $B(x^*, \delta(\epsilon)) \subset C_1$ , isto é,  $x^*$  é ponto interior e  $C_1$ . Contradizendo a hipótese de que  $x^*$  não é um ponto interior de  $C_1$ .

Portanto  $y_n \rightarrow x^*$  quando  $n \rightarrow +\infty$ . Combinando com (3.36) que diz  $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$ , temos:

$$\|x_n - x^*\| \leq \|x_n - y_n\| + \|y_n - x^*\|,$$

mostrando que  $x^n \rightarrow x^*$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ . □

**Teorema 3.4.2.** *Para qualquer  $x \in \mathcal{H}$  seja  $(T^n(x))$  a seqüência do Teorema 3.1.2.*

*Se para algum índice  $\alpha$ ,  $1 \leq \alpha \leq m$ , tivermos que*

$$C_\alpha \cap \text{Int} \left( \bigcap_{i=1, i \neq \alpha}^m C_i \right) \neq \emptyset, \quad (3.35)$$

*então a convergência fraca da seqüência  $(T^n(x))$ , garantida pelo Teorema 3.1.2, é forte e a uma taxa geométrica (veja as Figuras 3.9 e 3.10).*

*Demonstração.* Dividiremos a demonstração deste teorema em duas etapas.

Na primeira etapa provaremos que com as hipótese acima a seqüência  $(T^n(x))$  converge forte para um ponto  $x^*$ .

Na segunda etapa provaremos que essa convergência é a uma taxa geométrica.

**Etapa 1.** Suponhamos que existe  $\alpha$ , com  $1 \leq \alpha \leq m$ , tal que

$$C_\alpha \cap \text{Int} \left( \bigcap_{i=1, i \neq \alpha}^m C_i \right) \neq \emptyset.$$

Então tomando  $z \in C_\alpha \cap \text{Int} \left( \bigcap_{i=1, i \neq \alpha}^m C_i \right)$ , temos que  $z \in C_0$ . Pela definição de interior de um conjunto, existe  $\delta > 0$  tal que

$$\|h - z\| \leq \delta \Rightarrow h \in C_i$$

para cada  $i = 1, 2, \dots, m$  e  $i \neq \alpha$  (pois  $z \in \text{Int} \left( \bigcap_{i=1, i \neq \alpha}^m C_i \right)$ ).

Seja  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(n) := P_\alpha T^n(x)$ .

Afirmamos que para qualquer  $\epsilon > 0$  o seguinte vetor de  $\mathcal{H}$

$$\mathbf{w} = \frac{\epsilon}{\epsilon + \delta} \cdot \mathbf{z} + \frac{\delta}{\epsilon + \delta} \cdot \mathbf{y} \quad (3.36)$$

pertence a  $C_0$ , para todo  $n$  suficientemente grande.

De fato, como  $\mathbf{z} \in C_\alpha$  (pois  $\mathbf{z} \in C_\alpha \cap \text{Int}(\bigcap_{i \neq \alpha}^m C_i)$ .) e  $\mathbf{y} := P_\alpha T^n(x) \in C_\alpha$ , combinando a convexidade de  $C_\alpha$  com os fatos de que  $\frac{\epsilon}{\epsilon + \delta} \in (0, 1)$ ,  $\frac{\delta}{\epsilon + \delta} \in (0, 1)$  e  $\frac{\epsilon}{\epsilon + \delta} + \frac{\delta}{\epsilon + \delta} = 1$ , resulta que

$$\frac{\epsilon}{\epsilon + \delta} \cdot \mathbf{z} + \frac{\delta}{\epsilon + \delta} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{w} \in C_\alpha. \quad (3.37)$$

Agora

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y} - P_i(\mathbf{y})\| &= d(\mathbf{y}, C_i) \leq \|\mathbf{y} - P_i(T^n(x))\| \\ &= \|\mathbf{y} - T^n(x) + T^n(x) - P_i(T^n(x))\| \\ &\leq \|\mathbf{y} - T^n(x)\| + \|T^n(x) - P_i(T^n(x))\| \\ &= \|P_\alpha(T^n(x)) - T^n(x)\| + \|T^n(x) - P_i(T^n(x))\| \\ &\leq d(T^n(x), C_\alpha) + d(T^n(x), C_i) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

para todo  $n$  suficientemente, pois pela observação 3.4.3:

$$d(T^n(x), C_i) = \|T^n(x) - P_i(T^n(x))\| \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow +\infty$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Logo existe  $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \leq N(\epsilon)$  vale a seguinte estimativa para  $\mathbf{y} := P_\alpha(T^n(x))$

$$\|\mathbf{y} - P_i(\mathbf{y})\| < \epsilon. \quad (3.38)$$

Tomando  $\mathbf{h} = \mathbf{z} + \frac{\delta}{\epsilon} (\mathbf{y} - P_i(\mathbf{y}))$  temos

$$\mathbf{h} \in B(\mathbf{z}, \delta)$$

pois

$$\|\mathbf{h} - \mathbf{z}\| = \left\| \frac{\delta}{\epsilon} (\mathbf{y} - P_i(\mathbf{y})) \right\| = \frac{\delta}{\epsilon} \|\mathbf{y} - P_i(\mathbf{y})\| < \frac{\delta}{\epsilon} \cdot \epsilon = \delta$$

onde usamos (3.38).

Como  $h \in B(z, \delta) \subset \bigcap_{i=1, i \neq \alpha}^m C_i$  ( $\delta$  foi escolhido anteriormente para satisfazer isto) segue que

$$h \in C_i, \forall i \neq \alpha, i = 1, 2, \dots, m. \quad (3.39)$$

Notando que

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\epsilon + \delta} \cdot y &= \frac{\delta}{\epsilon + \delta} \cdot y - \frac{\delta}{\epsilon + \delta} P_i(y) + \frac{\delta}{\epsilon + \delta} P_i(y) = \frac{\delta}{\epsilon + \delta} (y - P_i(y)) + \frac{\delta}{\epsilon + \delta} P_i(y) \\ &\Rightarrow \frac{\delta}{\epsilon + \delta} \cdot y = \frac{\delta}{\epsilon + \delta} (y - P_i(y)) + \frac{\delta}{\epsilon + \delta} P_i(y) \end{aligned}$$

e substituindo essa igualdade em (3.37) temos

$$\begin{aligned} w &= \frac{\epsilon}{\epsilon + \delta} \cdot z + \frac{\delta}{\epsilon + \delta} \cdot y \\ &= \frac{\epsilon}{\epsilon + \delta} \cdot z + \frac{\delta}{\epsilon + \delta} (y - P_i(y)) + \frac{\delta}{\epsilon + \delta} P_i(y) \\ &= \frac{\epsilon}{\epsilon + \delta} \cdot \left( z + \frac{\delta}{\epsilon} (y - P_i(y)) \right) + \frac{\delta}{\epsilon + \delta} \cdot P_i(y) \\ &= \frac{\epsilon}{\epsilon + \delta} \cdot h + \frac{\delta}{\epsilon + \delta} \cdot P_i(y). \end{aligned}$$

e logo

$$w = \frac{\epsilon}{\epsilon + \delta} \cdot h + \frac{\delta}{\epsilon + \delta} \cdot P_i(y)$$

onde usamos a hipótese de que  $h = z + \frac{\delta}{\epsilon} (y - P_i(y))$ .

Combinando a igualdade acima, com a hipótese de que todos os  $C_i$  são convexos, com o fato de que  $h \in C_i$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $i \neq \alpha$  (veja (3.39)), e por último, o fato de que  $P_i(y) \in C_i$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, m$ , resulta que

$$w \in C_i$$

para todo  $i \neq \alpha$  (onde usamos também o fato de que  $\frac{\epsilon}{\epsilon + \delta} \in (0, 1)$ ,  $\frac{\delta}{\epsilon + \delta} \in (0, 1)$  e  $\frac{\epsilon}{\epsilon + \delta} + \frac{\delta}{\epsilon + \delta} = 1$ ).

Por (3.37), e pelo que foi provado acima, segue que  $w \in C_i$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, m$ , isto é,  $w \in C_0$ .

Provando a afirmação de que  $w \in C_0$  para todo  $n \geq N(\epsilon)$ , ou seja,  $w \in C_0$  para todo  $n$  suficientemente grande.

Dessa afirmação temos para todo  $n$  suficientemente grande que

$$\begin{aligned}
 d(T^n(x), C_0) &\leq \|T^n(x) - w\| = \|T^n(x) - y + y - w\| \\
 &\leq \|T^n(x) - y\| + \|y - w\| \\
 &= \|T^n(x) - P_\alpha T^n(x)\| + \|y - w\| \\
 &= d(T^n(x), C_\alpha) + \left\| y - \frac{\epsilon}{\epsilon + \delta} \cdot z - \frac{\delta}{\epsilon + \delta} \cdot y \right\| \\
 &= d(T^n(x), C_\alpha) + \frac{\epsilon}{\epsilon + \delta} \|y - z\| \\
 &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{\delta} R \\
 &= \left(1 + \frac{2R}{\delta}\right) \frac{\epsilon}{2} = \frac{c \cdot \epsilon}{2},
 \end{aligned}$$

isto é,

$$d(T^n(x), C_0) \leq \frac{c \cdot \epsilon}{2} \quad (3.40)$$

onde as constantes  $c := (1 + \frac{2R}{\delta})$  e  $R$  são constantes positivas e finitas, em que  $R > 0$  pode ser qualquer constante satisfazendo  $\|y - z\| \leq R$ , notemos que tal constante positiva existe pois:

$$\begin{aligned}
 \|y - z\| &= \|P_\alpha(T^n(x)) - P_\alpha(z)\| \\
 &\leq \|T^n(x) - z\| = \|T^n(x) - T^n(z)\| \\
 &\leq \|T^{n-1}(x) - T^{n-1}(z)\| = \|T^{n-1}(x) - z\| \\
 &\leq \dots \leq \|x - z\|
 \end{aligned}$$

onde usamos o fato de que  $z \in C_0$  e  $T$  é não-expansivo, logo, basta tomar  $R > 0$  tal que  $\|x - z\| \leq R$ .

Como  $\epsilon > 0$  era qualquer segue que  $d(T^n(x), C_0)$  converge para zero quando  $n \rightarrow +\infty$ , e portanto,  $(T^n(x))$  converge forte para algum  $x^* \in C_0$ .

Note que tal limite forte da seqüência  $(T^n(x))$  coincide com o limite fraco dessa mesma seqüência garantido pelo Teorema 3.1.2.

**Etapa 2.** Mostraremos agora que essa convergência ocorre a uma taxa geométrica.

Para isto, notemos inicialmente que o fato de que  $d(T^n(x), C_0) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow +\infty$ , pois isso já foi provado na etapa 1, resulta que  $d(T^n(x), C_i) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow +\infty$  para todo  $i = 1, 2, \dots, m$ , e logo, dado qualquer  $\epsilon > 0$  temos

$$d(T^n(x), C_i) = \|T^n(x) - P_i(T^n(x))\| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

para todo  $n$  suficientemente grande e todo  $i = 1, 2, \dots, m$  (um modo de chegar na desigualdade acima é nota que  $C_0 \subset C_i, \forall i = 1, 2, \dots, m$ , implica que  $d(T^n(x), C_0) \geq d(T^n(x), C_i), \forall i = 1, 2, \dots, m$ , e por último usar o fato de que  $d(T^n(x), C_0) \rightarrow 0$ ). Isto mostra que  $\max_{i=1,2,\dots,m} d(T^n(x), C_i)$  existe para todo  $n$  suficientemente grande, portanto, podemos supor

$$\max_{i=1,2,\dots,m} \|T^n(x) - P_i(T^n(x))\| = \max_{i=1,2,\dots,m} d(T^n(x), C_i) = d(T^n(x), C_{i_{\max}})$$

para algum  $i_{\max} \in \{1, 2, \dots, m\}$ .

Daí para todo  $n$  suficientemente grande temos de acordo com a Observação C.0.2, equação (C.4), do Apêndice C

$$d(T^n(x), C_0) \leq c \cdot \max_{i=1,2,\dots,m} \|T^n(x) - P_i(T^n(x))\| = c \cdot d(T^n(x), C_{i_{\max}})$$

onde  $c$  é a mesma constante da etapa 1, isto é,  $c = (1 + \frac{2R}{\delta})$ .

Escolhendo números positivos  $\epsilon_1 > 0$  e  $\epsilon_2 > 0$  tais que

- $\frac{\epsilon_1 \cdot \epsilon_2}{c^2} < 1$ .
- $0 < \epsilon_1 \leq \lambda_i \leq 2 - \epsilon_2, \forall i = 1, 2, \dots, m$ .

Observe que tais  $\epsilon_1 > 0$  e  $\epsilon_2 > 0$ , satisfazendo as hipóteses acima, existem. Para ver isto basta tomar  $\epsilon_1 > 0$  e  $\epsilon_2 > 0$  tão pequenos quanto for necessário. Como veremos a seguir a velocidade de convergência da sequência  $(T^n(x))$  será tanto melhor quanto pudermos escolher  $\frac{\epsilon_1 \cdot \epsilon_2}{c^2}$  próximo de 1, ou seja,  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$  maiores possíveis satisfazendo as condições acima.

Para cada  $n \in \mathbb{N}$  seja

$$d(T^n(x), C_{i_{\max}}) = \max_{i=1,2,\dots,m} \|T^n(x) - P_i(T^n(x))\|.$$

Tomemos em (C.6), veja no Apêndice C a Observação C.0.3,  $T^n(x)$  no lugar de  $x$  e

$P_0(T^n(x))$  no lugar de  $y$  obtemos, para todo  $i = 1, 2, \dots, m$ , que

$$\begin{aligned}
 d^2(T^n(x), C_0) &\leq c^2 \cdot d^2(T^n(x), C_{i_{\max}}) = c^2 \cdot \|T^n(x) - P_{i_{\max}}(T^n(x))\|^2 \\
 &\leq \frac{c^2}{\lambda_{i_{\max}}(2 - \lambda_{i_{\max}})} \cdot \left( \|T^n(x) - P_0(T^n(x))\|^2 - \|T_{i_{\max}}(T^n(x)) - P_0(T^n(x))\|^2 \right) \\
 &\leq \frac{c^2}{\epsilon_1 \cdot \epsilon_2} \cdot \left( \|T^n(x) - P_0(T^n(x))\|^2 - \|T_{i_{\max}}(T^n(x)) - P_0(T^n(x))\|^2 \right) \\
 &\leq \frac{c^2}{\epsilon_1 \cdot \epsilon_2} \cdot \left( \|T^n(x) - P_0(T^n(x))\|^2 - \|T^{n+1}(x) - P_0(T^n(x))\|^2 \right) \\
 &\leq \frac{c^2}{\epsilon_1 \cdot \epsilon_2} \cdot \left( \|T^n(x) - P_0(T^n(x))\|^2 - \|T^{n+1}(x) - P_0(T^{n+1}(x))\|^2 \right) \\
 &= \frac{c^2}{\epsilon_1 \cdot \epsilon_2} \cdot (d^2(T^n(x), C_0) - d^2(T^{n+1}(x), C_0))
 \end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos o fato de que  $\|T^{n+1}(x) - P_0(T^{n+1}(x))\| \leq \|T^{n+1}(x) - y\|$  para todo  $y \in C_0$  (isto pela definição de projeção, veja definição 2.2.1, e portanto, tomando um ponto teste igual a  $P_0 T^n(x) \in C_0$  obtemos a última desigualdade).

De

$$d^2(T^n(x), C_0) \leq \frac{c^2}{\epsilon_1 \cdot \epsilon_2} \cdot (d^2(T^n(x), C_0) - d^2(T^{n+1}(x), C_0))$$

obtemos

$$\frac{\epsilon_1 \cdot \epsilon_2}{c^2} \cdot d^2(T^n(x), C_0) \leq d^2(T^n(x), C_0) - d^2(T^{n+1}(x), C_0)$$

daí segue que

$$d^2(T^{n+1}(x), C_0) \leq d^2(T^n(x), C_0) - \frac{\epsilon_1 \cdot \epsilon_2}{c^2} \cdot d^2(T^n(x), C_0).$$

O que implica

$$d^2(T^{n+1}(x), C_0) \leq \left(1 - \frac{\epsilon_1 \cdot \epsilon_2}{c^2}\right) d^2(T^n(x), C_0),$$

e portanto,

$$d(T^{n+1}(x), C_0) \leq \left(1 - \frac{\epsilon_1 \cdot \epsilon_2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} d(T^n(x), C_0).$$



Usando a desigualdade acima  $n$  vezes obtemos

$$\begin{aligned} d(T^{n+1}(x), C_0) &\leq \left(1 - \frac{\epsilon_1 \cdot \epsilon_2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} d(T^n(x), C_0) \\ &\leq \left(1 - \frac{\epsilon_1 \cdot \epsilon_2}{c^2}\right)^{\frac{2}{2}} d(T^{n-1}(x), C_0) \\ &\leq \left(1 - \frac{\epsilon_1 \cdot \epsilon_2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} d(T^{n-2}(x), C_0) \\ &\leq \dots \leq \left(1 - \frac{\epsilon_1 \cdot \epsilon_2}{c^2}\right)^{\frac{n+1}{2}} d(x, C_0), \end{aligned}$$

ou seja,

$$d(T^n(x), C_0) \leq \left(1 - \frac{\epsilon_1 \cdot \epsilon_2}{c^2}\right)^{\frac{n}{2}} d(x, C_0).$$

Disto decorre que  $\|T^n(x) - P_{C_0}(T^n(x))\| \rightarrow 0$  e por isto podemos usar o Lema 3.4.3 item b). Por conseguinte, poderemos usar a desigualdade (3.30), com  $\mathcal{F} = C_0$ ,  $P_{\mathcal{F}} = P_0$  e  $T^n = T^k$  e  $T^k = T^n$ . Combinando isto com a desigualdade acima resulta:

$$\begin{aligned} \|T^n(x) - T^{(n)+k}(x)\| &\leq 2 \|T^n(x) - P_{C_0}(T^n(x))\| \\ &= 2d(T^n(x), C_0) \\ &\leq 2 \left(1 - \frac{\epsilon_1 \cdot \epsilon_2}{c^2}\right)^{\frac{n}{2}} d(x, C_0) \leq 2R \left(1 - \frac{\epsilon_1 \cdot \epsilon_2}{c^2}\right)^{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

onde  $R > d(x, C_0)$ .

Mas para cada  $n$  fixo, conforme foi provado na etapa 1, obtemos que  $T^{n+k}(x) \rightarrow x^*$ , quando  $k \rightarrow +\infty$ . Então fazendo  $k \rightarrow +\infty$  na desigualdade acima obtemos

$$\|T^n(x) - x^*\| = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|T^n(x) - T^{n+k}(x)\| \leq 2R \left(1 - \frac{\epsilon_1 \cdot \epsilon_2}{c^2}\right)^{\frac{n}{2}},$$

e logo,

$$\|T^n(x) - x^*\| \leq 2R \left(1 - \frac{\epsilon_1 \cdot \epsilon_2}{c^2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

isto é, a sequência  $(T^n(x))$  converge forte para seu limite  $x^*$ , que pelo Teorema 3.1.2 só tínhamos a garantia da convergência fraca para este  $x^* \in C_0$ , com velocidade de convergência menor ou igual a velocidade que a sequência  $(b_n = 2Ra^n)$  converge a zero, onde

$$a = \left(1 - \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} < 1.$$

Provando assim o Teorema.

□

**Observação 3.4.4.** *As Figuras 3.9 e 3.10 sugerem casos em que a convergência forte a uma taxa geométrica é garantida e não é garantida, respectivamente. Nelas tomamos  $m = 3$ .*

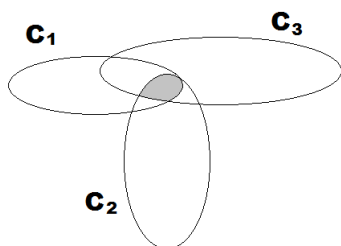


Figura 3.9:  $C_1 \cap \text{int}(C_2 \cap C_3) \neq \emptyset$ .

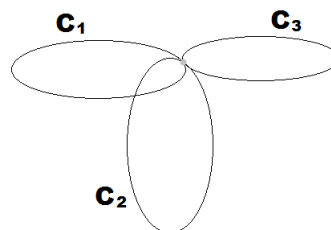


Figura 3.10:  $C_1 \cap \text{int}(C_2 \cap C_3) = \emptyset$ .

# Capítulo 4

## O contra-exemplo de Hundal

Neste capítulo estudaremos o contra-exemplo de Hundal (veja [3] preprint do ano 2002), o qual mostra que nem sempre em um espaço de Hilbert a convergência fraca da sequência de projeções alternadas garantida pelo Teorema 3.1.2 é forte. Tal contra-exemplo consiste em apresentar um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  que possui dois subconjuntos convexos e fechados  $H$  e  $K$ , sendo  $H \cap K = \{0\}$ , e um ponto  $x^0$  (inicialização), tais que o limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|(P_H P_K)^n(x^0) - 0\|$  não é zero. Em outras palavras, a sequência de projeções alternadas  $(P_H P_K)^n(x^0)$  não converge forte para algum elemento de  $H \cap K$ .

Aqui não iremos reproduzir a demonstração de Hundal pois tal demonstração, embora não utilize teoremas fundamentais de Análise Funcional (axioma da escolha, por exemplo) é longa (27 páginas), pois a construção do segundo conjunto  $K$  é bem elaborada. Não é à toa que o contra-exemplo de Hundal fechou uma lacuna que estava aberta por cerca de quarenta anos! Período compreendido entre os primeiros teoremas de convergência forte, da década de 1960, ao ano 2002. O objetivo desse capítulo é demonstrar detalhadamente que os conjuntos  $H$  e  $K$ , construídos por Hundal, não satisfazem as hipóteses dos teoremas de convergência forte visto no capítulo 3. Embora a construção do conjunto  $K$  seja muito bem elaborada, trata-se de um cone convexo. Isto mostra por exemplo, que o Teorema de Halperin (veja Corolário 3.2.1) não é válido se substituirmos os subespaços afins por cones convexos.

## 4.1 Construção do contra-exemplo de Hundal

Nesta seção daremos um breve comentário de como foi construído o contra-exemplo de Hundal.

Para isto consideraremos o nosso espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  como sendo o espaço de Hilbert  $\ell^2 = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \sum_{i=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty\}$ , ou seja, o espaço das sequências quadrado somáveis.

Relembremos que os vetores da forma  $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$  onde a única entrada diferente de zero é igual a  $n$ -ésima que é um, formam uma base para  $\ell^2$ , isto é,  $\mathcal{H} = \ell^2 = \overline{\text{span}}\{e_1, e_2, \dots\}$ , onde o  $\overline{\text{span}}\{e_1, e_2, \dots\}$  é o fecho do conjunto formado por todas as combinações lineares finitas do conjunto  $\{e_1, e_2, \dots\}$ .

Consideremos a função  $p : [0, +\infty) \rightarrow \ell^2$  pondo

$$p(x) = \exp(-100x^3)e_1 + \cos\left(\frac{\pi}{2}(x - [x])\right)e_{[x]+2} + \sin\left(\frac{\pi}{2}(x - [x])\right)e_{[x]+3},$$

onde  $[x] = \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$  (a função maior inteiro menor que).

Definamos o conjunto

$$H := \{x \in \ell^2 : \langle x, e_1 \rangle \leq 0\}, \tag{4.1}$$

e o conjunto

$$K := \overline{\text{cone}}\{p(x) : x \in [0, +\infty)\}, \tag{4.2}$$

onde

$$\text{cone}\{C\} = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i : \lambda_i \geq 0, x_i \in C, \forall i = 1, 2, \dots, k \right\}. \tag{4.3}$$

Hundal mostrou que tomando a inicialização  $p(1) = x^0$  a sequência de projeções alternada  $((P_H P_K)^n(x^0))_{n \in \mathbb{N}}$  não converge forte para o vetor zero, sendo  $H \cap K = \{0\}$  (veja Lema D.0.6, no Apêndice D), tal sequência não converge forte para algum elemento de  $H \cap K$ . Contudo, pelo Teorema 3.1.2, a sequência  $((P_H P_K)^n(x^0))_{n \in \mathbb{N}}$  converge fraco para um elemento de  $H \cap K$ , sendo  $H \cap K = \{0\}$  (veja Lema D.0.6, no Apêndice D), resulta que essa sequência converge fraco para o vetor zero (mostrando que o Teorema 3.1.2, embora garanta a convergência fraca da sequência formada por projeções alternadas sobre conjuntos convexos e fechados, não garante a convergência forte dessa sequência).

## 4.2 Propriedades dos conjuntos H e K de Hundal.

O leitor atento deve ter notado que os conjuntos H e K devem satisfazer os seguintes itens:

**Item 1.** Os conjuntos H ou K não podem ser subespaço afim (veja definição 3.2.2), pois se os dois forem subespaço afins teríamos pelo Corolário 3.2.1 que a sequência de projeções alternadas convergiria forte para zero.

**Item 2.** As seguintes duas interseções devem satisfazer:  $H \cap \text{int}(K) = \emptyset$  e  $K \cap \text{int}(H) = \emptyset$ . Pois do contrário teríamos pelo Teorema 3.4.2 que a sequência de projeções alternadas convergiria forte para algum elemento de  $H \cap K$ , e além disso, essa convergência seria a uma taxa geométrica.

**Item 3.** Nem um dos conjuntos H ou K podem ser uniformemente convexo (veja a Definição 2.1.3) e terem o vetor nulo como ponto interior (já que  $H \cap K = \{0\}$ ). Pois do contrário, pelo Teorema 3.4.1 a sequência de projeções alternadas convergiria forte para zero.

Provaremos agora esses três itens.

**(Prova do item 1)** Provaremos agora que H não é subespaço afim, pois se ele fosse, como  $0 \in H$ , teríamos que H seria subespaço de  $\ell^2$  o que não ocorre, para ver isto basta tomar  $x = -e_1$  então, é claro que,  $-e_1 \in H$  (pois  $\langle -e_1, e_1 \rangle = -\langle e_1, e_1 \rangle = -1 \leq 0$ ) mas  $e_1 = -(-e_1)$  não pertence á H (pois  $\langle e_1, e_1 \rangle = 1 > 0$ ), e logo, H não pode ser subespaço de  $\ell^2$ .

**(Prova do item 2)** Provaremos agora que  $H \cap \text{int}(K) = \emptyset$  e que  $K \cap \text{int}(H) = \emptyset$ . Para ver isto lembremos que  $H \cap K = \{0\}$  (veja Lema D.0.6, no Apêndice D), vamos mostra que disto segue,  $H \cap \text{int}(K) = \emptyset$  e  $K \cap \text{int}(H) = \emptyset$ . De fato, se  $H \cap \text{int}(K) \neq \emptyset$  ou  $K \cap \text{int}(H) \neq \emptyset$  então, de  $H \cap K = \{0\}$ , temos que  $H \cap \text{int}(K) = \{0\}$  ou  $K \cap \text{int}(H) = \{0\}$ , e logo,  $0 \in \text{int}(K)$  ou  $0 \in \text{int}(H)$ , em qualquer hipótese, temos um absurdo, pois  $0 \in H$  e a sequência  $(z_n = +\frac{1}{n}e_1)$  é tal que  $(z_n) \subset H^c$  e  $z_n \rightarrow 0$ , e a sequência  $(y_n = -\frac{1}{n}e_1 - \frac{1}{n}e_2)$  é tal que  $(y_n) \subset K^c$  e  $y_n \rightarrow 0$ , portanto, zero não pode ser ponto interior de H e nem de K (note que usamos o fato de que os elementos de K sempre possuem coeficientes não negativos, note também que outro modo de concluir que zero não pode ser ponto interior de H, é usar o Lema D.0.6, no Apêndice D, combinado com o fato de que H e K serem convexos).

**(Prova do item 3)** Para provar este item é suficiente provamos que H e K não são

estritamente convexos, ou seja, que existem vetores  $v, w \in H$ , com  $v \neq w$ , e  $k, l \in K$ , com  $k \neq l$ , tais que  $\bar{x} = \frac{v+w}{2}$  não é ponto interior de  $H$  e  $\bar{y} = \frac{k+l}{2}$  não é ponto interior de  $K$  (veja a Definição 2.1.2), isto provará que  $H$  e  $K$  não são uniformemente convexo (qualquer dúvida veja a Definição 2.1.3 e a Observação 2.1.1).

**H não é estritamente convexo.** De fato tomando  $v = e_2$  e  $w = -e_2$  temos que:

- $v = e_2 \neq -e_2 = w$ , e logo,  $v \neq w$ .
- $v, w \in H$ , pois  $\langle v, e_1 \rangle = \langle e_2, e_1 \rangle = 0 \leq 0$  e  $\langle w, e_1 \rangle = \langle -e_2, e_1 \rangle = -0 \leq 0$ .
- $\bar{x} = \frac{v+w}{2} = \frac{e_2 - e_2}{2} = \frac{0}{2} = 0$ , e logo, tomando  $z_n = +\frac{1}{n}e_1$ , tem-se  $(z_n) \subset H^c$  e  $z_n \rightarrow 0$ ,

quando  $n \rightarrow +\infty$ , provando que  $\bar{x} = 0$  não é ponto interior de  $H$ .

Portanto  $H$  não é estritamente convexo.

**K não é estritamente convexo.** De fato tomando  $k = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2$  e  $l = \frac{3}{2}e_1 + \frac{3}{2}e_2$

temos que:

- $k = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 \neq \frac{3}{2}e_1 + \frac{3}{2}e_2 = l$ , e logo,  $k \neq l$ .
- $k, l \in K$ , pois  $p(0) = e_1 + e_2$ , e pela definição do conjunto  $K$ , temos que  $\lambda p(0) \in K$  para todo  $\lambda \geq 0$ , e logo, tomando  $\lambda = \frac{1}{2}$  temos que  $k = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 = \lambda p(0) \in K$ , tomando agora e  $\lambda = \frac{3}{2}$  temos que  $l = \frac{3}{2}e_1 + \frac{3}{2}e_2 = \lambda p(0) \in K$ .
- $\bar{y} = \frac{k+l}{2} = \frac{\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 + \frac{3}{2}e_1 + \frac{3}{2}e_2}{2} = \frac{2e_1 + 2e_2}{2} = e_1 + e_2$  não será ponto interior de  $K$ . Para

provar isto é suficiente provar que existe uma sequência  $(z_n) \subset K^c$ , tal que,  $z_n \rightarrow \bar{y}$  (quando  $n \rightarrow +\infty$ ). Com esse objetivo tomemos  $z_n = (1 - \frac{1}{n})e_1 + e_2$  então é claro que  $z_n \rightarrow e_1 + e_2 = \bar{y}$  (quando  $n \rightarrow +\infty$ ).

Afirmamos que  $(z_n) \subset K^c$ . Para provar essa afirmação é suficiente provar que  $\alpha e_1 + e_2$  não pertence a  $K$ , para todo  $0 < \alpha < 1$ .

Para isto, denotando  $A = \text{cone}\{\sum_{i=1}^n \lambda_i p(x_i) : \lambda_i \geq 0, n \in \mathbb{N}\}$  obtemos a igualdade  $K = A \cup \{\bar{A} - A\}$ , e logo, provar que  $\alpha e_1 + e_2$  não pertence á  $K$  para todo  $0 < \alpha < 1$ , é equivalente á provar que, ele não pertence á  $A$  e á  $\{\bar{A} - A\}$  para todo  $0 < \alpha < 1$ .

Dado  $0 < \alpha < 1$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) qualquer, provaremos inicialmente que  $\alpha e_1 + e_2$  não pertence á  $A$  ( **Caso 1**), e depois que ele não pertence ao conjunto  $\{\bar{A} - A\}$  ( **Caso 2**), pelo que foi dito acima, isto provará que  $\alpha e_1 + e_2$  não pertence á  $K$ .

**Caso 1.** Para provar, que  $\alpha e_1 + e_2$  não pertence á  $A$ , suponhamos por absurdo que  $\alpha e_1 + e_2 \in A$ , daí segue pela definição de  $A$ , que existem  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p(x_i) = \alpha(x_i)e_1 + c(x_i)e_{\lfloor x_i \rfloor + 2} + s(x_i)e_{\lfloor x_i \rfloor + 3}$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$ , e constantes não negativas  $\lambda_i$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ , tais que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i p(x_i) = \alpha e_1 + e_2$ . Com a finalidade de facilitar a notação esta-

mos escrevendo:  $\alpha(x) = \exp(-100x^3)$ ,  $c(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}(x - \lfloor x \rfloor)\right)$  e  $s(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(x - \lfloor x \rfloor)\right)$ .

Dividiremos a prova de que isso não pode acontecer em quatro etapas:

**Etapa 1.** Provaremos que não pode ocorrer de que  $x_i \geq 1$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Etapa 2.** Provaremos que não pode ocorrer de que  $0 < x_i < 1$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Etapa 3.** Provaremos que não pode ocorrer de que  $x_i = 0$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Etapa 4.** Finalmente concluiremos que não pode ocorrer de que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i p(x_i) = \alpha e_1 + e_2$  (agora  $x_i \in [0, +\infty)$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Um fato que será muito útil para a demonstração dessas etapas é notamos que  $0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$ , resulta  $0 \leq \frac{\pi}{2}(x - \lfloor x \rfloor) < \frac{\pi}{2}$ , e logo:

$$0 < \cos\left(\frac{\pi}{2}(x - \lfloor x \rfloor)\right) \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq \sin\left(\frac{\pi}{2}(x - \lfloor x \rfloor)\right) < 1,$$

para todo  $x \in [0, +\infty)$  (veja a Figura 4.1).

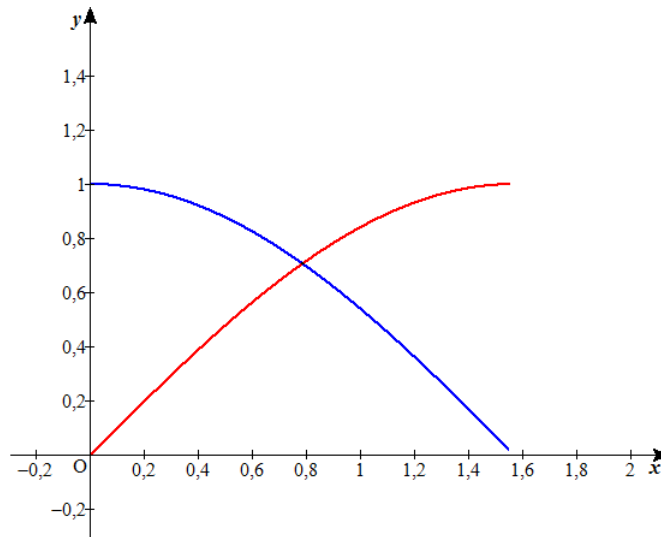


Figura 4.1: Gráficos das funções cosseno e seno, no intervalo  $[0; \frac{\pi}{2}]$ .

**Prova da etapa 1.** Suponha que  $x_i \geq 1$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, n$  então  $\lfloor x \rfloor \geq 1$ , e logo,  $\lfloor x \rfloor + 2 > 2$ , e portanto,  $e_{\lfloor x \rfloor + 2} \neq e_2$  e  $e_{\lfloor x \rfloor + 2} \neq e_1$ . Como por hipótese  $\sum_{i=1}^n \lambda_i p(x_i) = \alpha e_1 + e_2$ , temos

$$\begin{aligned} \alpha e_1 + e_2 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i p(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i (\alpha(x_i)e_1 + c(x_i)e_{\lfloor x_i \rfloor + 2} + s(x_i)e_{\lfloor x_i \rfloor + 3}) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha(x_i)e_1 + \sum_{i=1}^n \lambda_i c(x_i)e_{\lfloor x_i \rfloor + 2} + \sum_{i=1}^n \lambda_i s(x_i)e_{\lfloor x_i \rfloor + 3}, \end{aligned}$$

e logo,

$$\mathbf{a}e_1 + e_2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha(x_i) e_1 + \sum_{i=1}^n \lambda_i c(x_i) e_{[x_i]+2} + \sum_{i=1}^n \lambda_i s(x_i) e_{[x_i]+3},$$

tomando o produto interno com  $e_2$  em ambos os lados, na igualdade acima, e usando que  $e_{[x]+2} \neq e_2$ , para todo  $x \in [1, +\infty)$  (pois  $[x] \geq 1$  para todo  $x \in [1, +\infty)$ ), segue do fato de que  $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$  ser uma base ortogonal de  $\ell^2$  que  $1 = 0$  (pois  $\langle e_2, e_{[x_i]+2} \rangle = 0$ , para todo  $x_i \in [1, +\infty)$ ) o que é um absurdo. O que prova a primeira etapa.

**Prova da etapa 2.** Suponhamos agora que  $0 < x_i < 1$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ , então  $[x_i] = 0$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ , e portanto,  $[x_i] + 3 = 3$ ,  $[x_i] + 2 = 2$  e  $s(x_i) = \sin(\frac{\pi}{2}(x_i)) > 0$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ , daí segue por hipótese que

$$\begin{aligned} \mathbf{a}e_1 + e_2 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i p(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i (\alpha(x_i) e_1 + c(x_i) e_2 + s(x_i) e_3) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha(x_i) e_1 + \sum_{i=1}^n \lambda_i c(x_i) e_2 + \sum_{i=1}^n \lambda_i s(x_i) e_3, \end{aligned}$$

e logo,

$$\mathbf{a}e_1 + e_2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha(x_i) e_1 + \sum_{i=1}^n \lambda_i c(x_i) e_2 + \sum_{i=1}^n \lambda_i s(x_i) e_3,$$

tomando o produto interno com  $e_3$  em ambos os lados, na igualdade acima, e lembrando de que  $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$  é uma base ortogonal de  $\ell^2$ , temos:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i s(x_i) = 0.$$

Desde que  $s(x_i) = \sin(\frac{\pi}{2}(x_i)) > 0$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ , temos que  $\lambda_i = 0$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ , e logo, obtemos que

$$\mathbf{a}e_1 + e_2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i p(x_i) = 0,$$

o que é um absurdo (pois teríamos que  $\mathbf{a} = 0$  e  $1 = 0$ ). Provando, assim, a segunda etapa.

**(Prova da etapa 3)** Suponha que  $x_i = 0$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, n$  então  $[x] = 0$ ,



$\alpha(x_i) = 1, c(x_i) = 1$  e  $s(x_i) = 0$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ , o que nos dá

$$\begin{aligned} \mathbf{a}e_1 + e_2 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i p(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i (\alpha(x_i)e_1 + c(x_i)e_2 + s(x_i)e_3) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha(x_i)e_1 + \sum_{i=1}^n \lambda_i c(x_i)e_2 + \sum_{i=1}^n \lambda_i s(x_i)e_3 \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i e_1 + \sum_{i=1}^n \lambda_i e_2, \end{aligned}$$

isto é,

$$\mathbf{a}e_1 + e_2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_1 + \sum_{i=1}^n \lambda_i e_2,$$

tomando o produto interno com  $e_1$ , e depois com  $e_2$ , na igualdade acima resulta

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad \text{e} \quad 1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i,$$

respectivamente, portanto,  $\mathbf{a} = 1$ .

O que é um absurdo, pois por hipótese  $0 < \mathbf{a} < 1$ .

Provando a terceira etapa.

**(Prova da etapa 4)** Para prova esta etapa, podemos supor sem perda de generalidade que:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i p(x_i) = \mathbf{a}e_1 + e_2,$$

com  $x_i = 0$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, n_0$ , e que  $x_i \in (0, 1)$  para todo  $i = n_0 + 1, \dots, n_1$ , e também que  $x_i \in [1, +\infty)$  para todo  $i = n_1 + 1, \dots, n_2$ , onde  $n_0, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  são quaisquer.

Usando a hipótese de que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i p(x_i) = \mathbf{a}e_1 + e_2,$$

resulta usando a definição do conjunto  $K$ , as seguintes sequência de igualdades

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}e_1 + e_2 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i p(x_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i (\alpha(x_i)e_1 + c(x_i)e_{\lfloor x_i \rfloor + 2} + s(x_i)e_{\lfloor x_i \rfloor + 3}) \\
 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha(x_i)e_1 + \sum_{i=1}^n \lambda_i c(x_i)e_{\lfloor x_i \rfloor + 2} + \sum_{i=1}^n \lambda_i s(x_i)e_{\lfloor x_i \rfloor + 3} \\
 &= \sum_{i=1}^{n_0} \lambda_i e_1 + \sum_{i=1}^{n_0} \lambda_i e_2 \\
 &\quad + \sum_{i=n_0+1}^{n_1} \lambda_i \alpha(x_i)e_1 + \sum_{i=n_0+1}^{n_1} \lambda_i c(x_i)e_2 + \sum_{i=n_0+1}^{n_1} \lambda_i s(x_i)e_3 \\
 &\quad + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} \lambda_i \alpha(x_i)e_1 + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} \lambda_i c(x_i)e_{\lfloor x_i \rfloor + 2} + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} \lambda_i s(x_i)e_{\lfloor x_i \rfloor + 3} \\
 &= \sum_{i=1}^{n_0} \lambda_i e_1 + \sum_{i=n_0+1}^{n_1} \lambda_i \alpha(x_i)e_1 + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} \lambda_i \alpha(x_i)e_1 \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{n_0} \lambda_i e_2 + \sum_{i=n_0+1}^{n_1} \lambda_i c(x_i)e_2 \\
 &\quad + \sum_{i=n_0+1}^{n_1} \lambda_i s(x_i)e_3 + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} \lambda_i c(x_i)e_{\lfloor x_i \rfloor + 2} + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} \lambda_i s(x_i)e_{\lfloor x_i \rfloor + 3},
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}e_1 + e_2 &= \left( \sum_{i=1}^{n_0} \lambda_i + \sum_{i=n_0+1}^{n_1} \lambda_i \alpha(x_i) + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} \lambda_i \alpha(x_i) \right) e_1 \\
 &\quad + \left( \sum_{i=1}^{n_0} \lambda_i + \sum_{i=n_0+1}^{n_1} \lambda_i c(x_i) \right) e_2 \\
 &\quad + \sum_{i=n_0+1}^{n_1} \lambda_i s(x_i)e_3 + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} \lambda_i c(x_i)e_{\lfloor x_i \rfloor + 2} + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} \lambda_i s(x_i)e_{\lfloor x_i \rfloor + 3},
 \end{aligned}$$

e logo, tomando o produto interno com  $e_1$ , depois com  $e_2$  e por fim com  $e_3$  na igualdade acima, resulta:

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n_0} \lambda_i + \sum_{i=n_0+1}^{n_1} \lambda_i \alpha(x_i) + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} \lambda_i \alpha(x_i), \quad (4.4)$$

$$1 = \sum_{i=1}^{n_0} \lambda_i + \sum_{i=n_0+1}^{n_1} \lambda_i c_i(x_i). \quad (4.5)$$

e

$$0 = \sum_{i=n_0+1}^{n_1} \lambda_i s(x_i) + r$$

onde  $r = \lambda_{i_1} c(x_{i_1}) + \lambda_{i_2} c(x_{i_2}) + \dots + \lambda_{i_j} c(x_{i_j})$ , em que  $x_{i_n}$  são os possíveis valores de  $x_i \in [1, +\infty)$ ,  $i = n_1 + 1, \dots, n_2$ , tais que  $x_{i_n} \in [1, 2)$ ,  $i_n = i_1, i_{1+1}, \dots, i_j$ .

Como  $x_i \in (0, 1)$ , para todo  $i = n_0 + 1, \dots, n_1$  e  $x_i \in [1, +\infty)$ , para todo  $i = n_1 + 1, \dots, n_2$  resulta que  $s(x_i) > 0$  e que  $c(x_i) > 0$  para todo  $i = n_0 + 1, \dots, n_1, n_1 + 1, \dots, n_2$  temos da última igualdade e do fato de que  $\{e_1, e_2, \dots\}$  é um conjunto ortogonal de  $\ell^2$  que

$$0 = \sum_{i=n_0+1}^{n_1} \lambda_i s(x_i) \quad \text{e} \quad 0 = r,$$

o que só ocorre quando  $0 = \lambda_i$ , para todo  $i = n_0 + 1, \dots, n_1$  (na verdade com esse mesmo argumento acima teremos que:  $\lambda_i = 0, \forall i = n_0 + 1, \dots, n_1, n_1 + 1, \dots, n_2$ ), substituindo esse valores de  $0 = \lambda_i$  em (4.5) temos

$$1 = \sum_{i=1}^{n_0} \lambda_i + \sum_{i=n_0+1}^{n_1} \lambda_i c_i(x_i) = \sum_{i=1}^{n_0} \lambda_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n_0} \lambda_i = 1$$

substituindo esse valor em (4.4) obtemos

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n_0} \lambda_i + \sum_{i=n_0+1}^{n_1} \lambda_i \alpha(x_i) + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} \lambda_i \alpha(x_i) = 1 + \sum_{i=n_0+1}^{n_1} \lambda_i \alpha(x_i) + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} \lambda_i \alpha(x_i)$$

o que é um absurdo, pois  $0 < \alpha < 1$  e  $\alpha = 1 + \sum_{i=n_0+1}^{n_1} \lambda_i \alpha(x_i) + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} \lambda_i \alpha(x_i) \geq 1$  (pois  $\sum_{i=n_0+1}^{n_1} \lambda_i \alpha(x_i) + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} \lambda_i \alpha(x_i) \geq 0$ ).

Provando a etapa 4, e portanto, que  $\alpha e_1 + e_2$  não pertence á  $A$ , para todo  $0 < \alpha < 1$ .

**Caso 2.** Provaremos agora que  $y = \alpha e_1 + e_2$  não pertence á  $B = \bar{A} - A$ . De fato suponha por absurdo que  $\alpha e_1 + e_2$  pertence a  $B$  então existe uma sequência  $(y_n) \subset A$  tal que  $y_n \rightarrow y$  (quando  $n \rightarrow +\infty$ ) segue, do fato de  $A$  ser convexo e de  $z := e_1 + e_2 = p(0) \in \bar{A}$ , que  $(1 - \lambda)y_n + \lambda z \in A$  para todo  $\lambda \in [0, 1]$  e para cada  $n \in \mathbb{N}$ , resulta daí que  $(1 - \lambda)y + \lambda z \in A$  para todo  $\lambda \in (0, 1]$  (veja a Figura 4.2 abaixo), substituindo agora os valores de  $y$  e  $z$ , resulta

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)y + \lambda z &= (1 - \lambda)(\alpha e_1 + e_2) + \lambda(e_1 + e_2) \\ &= (1 - \lambda)\alpha e_1 + (1 - \lambda)e_2 + \lambda e_1 + \lambda e_2 \\ &= [(1 - \lambda)\alpha + \lambda]e_1 + (1 - \lambda)e_2 + \lambda e_2 \\ &= [(1 - \lambda)\alpha + \lambda]e_1 + e_2 - \lambda e_2 + \lambda e_2 \\ &= [(1 - \lambda)\alpha + \lambda]e_1 + e_2, \end{aligned}$$

e logo,  $[(1 - \lambda)\mathbf{a} + \lambda]\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \in \mathbf{A}$  para todo  $\lambda \in (0, 1]$ , isto é,  $\sigma\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \in \mathbf{A}$ , para todo  $\sigma \in (\alpha, 1)$ , o que é um absurdo, pois já provamos que  $\sigma\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$  não pertence  $\mathbf{A}$  para todo  $\sigma \in (0, 1)$ .

Portanto, segue dos **Casos 1 e 2**, que  $\alpha\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$  não pode pertencer á  $\mathbf{K}$ .

As figuras abaixo ilustram á ideia geométrica da prova de que  $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$  não pertence ao conjunto  $\mathbf{K}$ .

Na Figura 4.2 estamos supondo  $\mathbf{w} = \sigma\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ , para algum  $\sigma \in (\alpha, 1)$ .

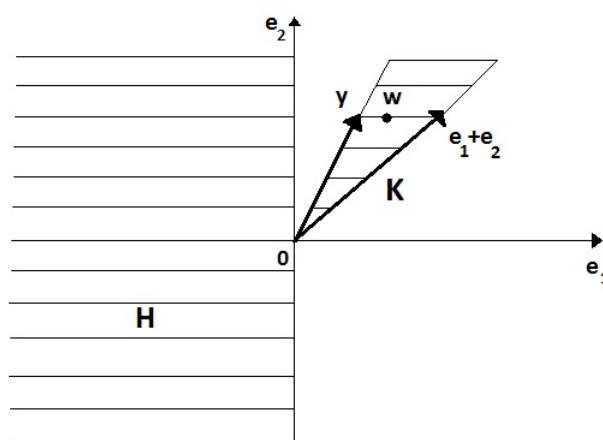


Figura 4.2: Idéia geométrica da prova de que  $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$  não pertence ao conjunto  $\overline{\mathbf{A}} - \mathbf{A}$ .

Na figura abaixo está a representação dos conjuntos  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{K}$  usando somente como base os vetores  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$ , bem como a representação de como a sequência  $(z_n)$  converge para  $\mathbf{z}$ .

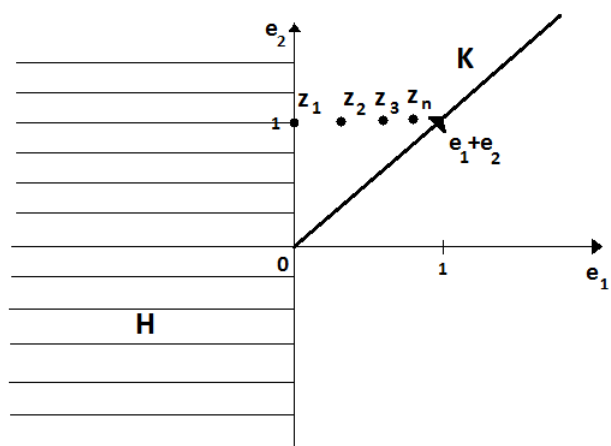


Figura 4.3: Representação de  $H$  e  $K$  usando somente como base os vetores  $e_1$  e  $e_2$ .

# Capítulo 5

## Aplicação

Neste capítulo apresentaremos uma aplicação envolvendo o método das projeções alternadas sobre conjuntos. Nessa aplicação não iremos entrar em mais detalhes do que julgarmos necessários, pois nosso objetivo é só justificar a importância do assunto que foi abordado nesse artigo. O leitor que desejar ter mais detalhes dessas, como de outras aplicações indicaremos [11], sobre o qual a próxima seção foi baseada. Indicamos também a referência [2].

### 5.1 Fundamentos Matemáticos da Tomografia Computadorizada

Nessa aplicação nosso espaço de Hilbert será  $\mathcal{H} = \mathbb{R}^n$ , munido da norma euclidiana.

#### 5.1.1 Os modelos matemáticos.

Consideremos uma região limitada  $S$  de  $\mathbb{R}^n$  (que pode representar, por exemplo, uma seção plana de um corpo) na qual está definida uma função  $f(x, y)$  que indica o coeficiente de atenuação linear (ou simplesmente atenuação) de raios  $X$  no ponto  $(x, y)$ , ou seja, a fração da intensidade de um raio  $X$  que é absorvida num quadrado de lado  $dx$  com centro em  $(x, y)$ . Como tecidos diferentes tem atenuações diferentes, o conhecimento da  $f$  permite conhecer a forma e tamanho dos órgãos presente na seção  $S$ .

Em geral usam-se um detector de partículas para medir a fração total de intensidade atenuada ao longo da trajetória de um raio  $L$  que atravessa a região  $S$ , ou seja, tal fração

é determinada pela integral retilínea:

$$\varphi(L) = \int_L f(x) dx \tag{5.1}$$

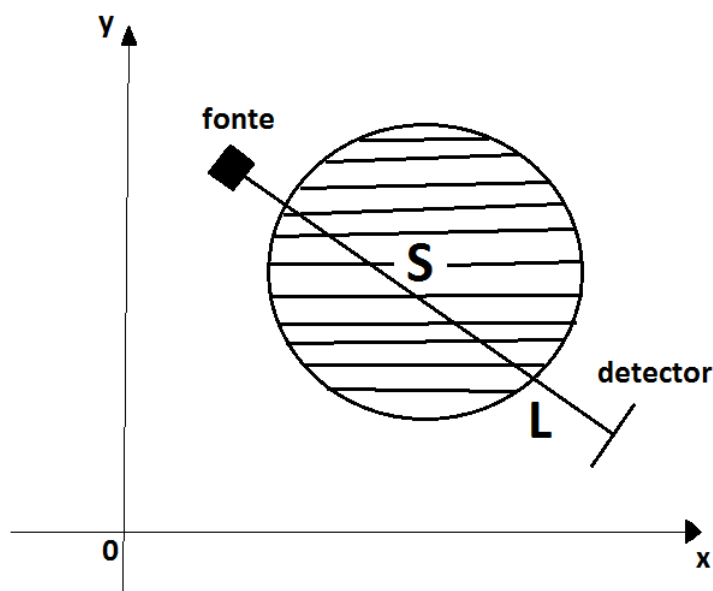


Figura 5.1: Diagrama 1

Supondo que a região  $S$  está dividida em pequenos quadrados, chamaremos esse pequenos quadrados de pixels e supomos também que  $S$  tenha  $n$  pixels ( $n$  quadrados). Seja  $x_i$  o valor de  $f$  no pixel  $i$ , agora nossa incógnita não é mais uma função  $f(x, y)$  mas o vetor  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Também supomos que o número de raios é finito (como acontece na realidade), digamos que são  $m$ . Denotando por  $L_1, L_2, \dots, L_m$  esses raios e suas atenuações medidas por  $\varphi(L_i) = b_i$ .

A função total de intensidade atenuada ao longo de  $\cup_{i=1}^m L_i$ , passa a ser igual á soma das integrais sobre  $L_i$ , para cada  $i = 1, 2, \dots, m$ , ou seja, a integral em (5.1) passa a ser a soma das integrais sobre cada pixel atravessado pelo raio  $L$ . É imediato então que essa integral se escreve como:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (1 \leq i \leq m) \tag{5.2}$$

onde  $a_{ij}$  é o comprimento da intersecção do  $i$ -ésimo pixel com o  $j$ -ésimo raio, isto é, com

$L_j$  ( $a_{ij}$  é zero se o raio não passa pelo pixel  $j$ ). Em notação matricial:

$$Ax = b \tag{5.3}$$

onde  $A = a_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $b = b_i \in \mathbb{R}^m$ ,  $x = x_i \in \mathbb{R}^n$ . Se associarmos aos valores de  $x_j$  tons de cinza entre o branco e o preto, a coloração numa tela de cada pixel com esses tons faz de cada vetor  $x$  uma imagem. Assim o vetor  $x$  solução de (5.3) pode ser considerado como a imagem reconstruída de uma parte de  $S$ . Como pode haver alguns erros, como por exemplo estamos considerando que os raios  $L_i$  serão sempre retilínios o que na realidade eles podem não ser, por isso, para uma representação mais realista da imagem de  $S$  pode ser obtida de

$$b - \epsilon \leq Ax \leq b + \epsilon \tag{5.4}$$

onde  $b$  é o vetor das atenuações medidas e  $\epsilon \in \mathbb{R}^m$  é um vetor de erros. Trocando o sinal da desigualdade esquerda de (5.4) podemos reescrever (5.4) como apenas uma desigualdade:

$$\bar{A}x \leq \bar{b} \tag{5.5}$$

com  $\bar{A} \in \mathbb{R}^{2m \times n}$  e  $\bar{b} \in \mathbb{R}^{2m}$  (ou seja, pagamos o preço de dobramos o tamanho de  $b$  e de  $A$ , de  $m$  para  $2m$ ).

## 5.2 Aplicando o método das projeções alternadas sobre conjuntos convexos.

Notemos inicialmente que resolver o sistema (5.2) é o mesmo que achar um ponto pertencente a todos os hiperplanos  $C_i = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle a^i, y \rangle = b_i\}$ , com  $i = 1, 2, \dots, m$ , isto é, achar um ponto que pertence  $C = \bigcap_{i=1}^m C_i$ . Analogamente, resolver o sistema (5.5) é equivalente a achar um ponto pertencente a todos os conjuntos convexos  $T_i = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle a^i, y \rangle \leq b_i\}$ , com  $i = 1, 2, \dots, m$ , isto é, achar um ponto que pertence  $T = \bigcap_{i=1}^m T_i$ .

Mostraremos como obter um ponto  $x \in C = \bigcap_{i=1}^m C_i$ , o outro caso é totalmente análogo. Para isto usaremos o método das projeções alternadas, o qual convergirá para um ponto de  $C$ .



Seja  $P_i : \mathbb{R}^n \rightarrow C_i$  a projeção de  $x$  sobre  $C_i$ . Dado  $\alpha \in (0, 2)$ , definamos

$$P_i^\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

como

$$P_i^\alpha(x) = (1 - \alpha)x + \alpha P_i(x). \quad (5.6)$$

Definamos agora  $P_i^\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  pondo

$$P(x) = (P_m^\alpha \circ P_{m-1}^\alpha \circ \cdots \circ P_2^\alpha \circ P_1^\alpha)(x). \quad (5.7)$$

onde  $\circ$  indica a composição de funções.

Defina a sequência  $(x_n)$  como sendo  $x^{n+1} = P(x^n)$ . Como os  $C_i$  são conjuntos convexos e fechados, supondo  $C \neq \emptyset$ , segue do Teorema 3.1.2 que a sequência  $(x_n)$ , dada acima, converge fraco para um ponto  $x^* \in C$ , o qual é ponto fixo de  $P$ . Como  $\mathbb{R}^n$  tem dimensão finita segue que essa sequência é limitada, e pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass no  $\mathbb{R}^n$ , possui subsequência que converge forte, logo, pelo Teorema 3.1.2 converge forte para  $x^* \in C$ .

# Apêndice A

## Comentários do Capítulo 1

Objetivo desse apêndice é comentar, provar e definir algumas propriedades do Capítulo 1 que para facilitar a compreensão da dissertação decidimos apresentar em separado.

A seguinte definição é muito importante para podemos definir um espaço de Hilbert.

**Definição A.0.1.** *Seja  $\mathcal{H}$  uma espaço vetorial. Chamaremos de produto interno em  $\mathcal{H}$  a uma função  $\langle \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  satisfazendo:*

1.  $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{H}$
2.  $\langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H} \text{ e } \forall \alpha \in \mathbb{C}$
3.  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$
4.  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \iff \mathbf{x} = 0$
5.  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}$

Se  $\mathcal{H}$  é um espaço com produto interno então relembremos que podemos definir uma norma em  $\mathcal{H}$  do seguinte modo

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \geq 0 \tag{A.1}$$

para qualquer  $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ , e uma métrica em  $\mathcal{H}$  pode ser definida por

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle}$$

para qualquer  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}$ .

Uma propriedade que usaremos muito no decorrer desta dissertação é que um espaço vetorial  $\mathcal{H}$ , o qual está definido um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , satisfaz a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \quad (\text{A.2})$$

em que  $|\cdot|$  representa o módulo de um número complexo.

Para provar essa desigualdade veja que:

- se  $\mathbf{y} = 0$  então a desigualdade é evidente, pois  $|\langle \mathbf{x}, 0 \rangle| = 0 \leq 0 = \|\mathbf{x}\| \|0\|$ .
- se  $\mathbf{y} \neq 0$  então para todo  $\alpha \in \mathbb{C}$  temos

$$\begin{aligned} 0 \leq \|\mathbf{x} - \alpha \mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x} - \alpha \mathbf{y}, \mathbf{x} - \alpha \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \bar{\alpha} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - \alpha [\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - \bar{\alpha} \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle]. \end{aligned}$$

Veja que a expressão em  $[\dots]$  é zero se escolhermos  $\bar{\alpha} = \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle}$ . Daí para esta escolha de  $\alpha$  temos

$$0 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 - \frac{|\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle|^2}{\|\mathbf{y}\|^2}$$

onde usamos que  $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}$ . Por fim na desigualdade acima multiplicando por  $\|\mathbf{y}\|^2$  e depois transferindo o último termo para o primeiro membro e extraíndo a raiz quadrada em ambos os lados obtemos (A.2).

Outra propriedade que usaremos muito é que em um espaço com produto interno  $\mathcal{H}$  vale a identidade do paralelogramo

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2). \quad (\text{A.3})$$

para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}$ .

Para provar isto dados  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}$  quaisquer temos:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ &= 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ &= 2(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2) \end{aligned}$$

provando assim a identidade do paralelogramo, isto é, provando (A.3).

Definiremos agora espaços de Hilbert.

**Definição A.0.2.** *Um espaço de Hilbert é um espaço com produto interno que é completo com a norma induzida por esse produto interno (veja (A.1)).*

# Apêndice B

## Comentários do Capítulo 2

Provaremos neste apêndice que:

- a) Nem todo conjunto convexo é estritamente convexo (veja a Definição 2.1.1 e a Definição 2.1.2).
- b) Nem todo conjunto estritamente convexo é uniformemente convexo (veja a Definição 2.1.2 e a Definição 2.1.3).
- c) Nem todo conjunto uniformemente convexo é fortemente convexo (veja a Definição 2.1.3 e a Definição 2.1.4).

Para isto provaremos alguns lemas que serão de grande ajuda para provarmos esses itens.

O próximo lema mostra outro modo que poderíamos ter definido conjunto estritamente convexo .

**Lema B.0.1.** *Um subconjunto  $C \subset \mathcal{H}$  é estritamente convexo se, e somente se, dados  $x, y \in C$ , com  $\frac{x+y}{2} \in \text{Fr}C$  implicar que  $x = y$ . Onde "Fr" significa a "fronteira".*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Suponhamos que  $C \subset \mathcal{H}$  seja estritamente convexo. Dados quaisquer  $x, y \in C$ , com  $\frac{x+y}{2} \in \text{Fr}C$ , provaremos que isto implica que  $x = y$ .

Suponhamos por contradição que isto não ocorre, isto é,  $x \neq y$  então usando o fato de que  $C$  é, por hipótese, estritamente convexo existe um  $\delta = \delta(x, y) > 0$  tal que  $B\left(\frac{x+y}{2}, \delta\right) \subset C$ , logo,  $\frac{x+y}{2} \notin \text{Fr}C$ . Contradizendo a hipótese de que  $\frac{x+y}{2} \in \text{Fr}C$ .

Logo  $x = y$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos agora que para todo  $x, y \in C$ , com  $\frac{x+y}{2} \in \text{Fr}C$  implique que  $x = y$ .

Dados quaisquer  $x, y \in C$ , com  $x \neq y$ . Provaremos que existe um  $\delta = \delta(x, y) > 0$  tal que  $B\left(\frac{x+y}{2}, \delta\right) \subset C$ . De fato, como  $C$  é convexo, resulta que  $\frac{x+y}{2} \in C = \text{Fr}C \cup \text{int}C$ , e logo, ou  $\frac{x+y}{2} \in \text{Fr}C$  ou  $\frac{x+y}{2} \in \text{int}C$ .

- Se  $\frac{x+y}{2} \in \text{Fr}C$  então, por hipótese,  $x = y$ . Contradizendo a hipótese de que  $x \neq y$ .
- Se  $\frac{x+y}{2} \in \text{int}C$  então, por definição de interior, existe um  $\delta = \delta(x, y) > 0$  tal que  $B\left(\frac{x+y}{2}, \delta\right) \subset C$ .

Portanto,  $C$  é estritamente convexo.

Provando assim o lema. □

O lema a seguir mostra outro modo de se definir conjuntos uniformemente convexo.

**Lema B.0.2.** *Um subconjunto  $C \subset \mathcal{H}$  é uniformemente convexo se, e somente se,  $\forall (x_n), (y_n) \subset C$ , com  $d\left(\frac{x_n+y_n}{2}, \text{Fr}C\right) \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ , implicar que  $x_n - y_n \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ .*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Suponhamos que  $C \subset \mathcal{H}$  seja uniformemente convexo. Então existe uma função  $\delta : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ , com  $\delta(t) > 0$ ,  $\forall t > 0$  tal que  $B\left(\frac{x+y}{2}, \delta(\|x-y\|)\right) \subset C$ ,  $\forall x, y \in C$ , com  $x \neq y$ .

Sejam as seqüências  $(x_n), (y_n) \subset C$  tal que  $d\left(\frac{x_n+y_n}{2}, \text{Fr}C\right) \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ , isto é,  $\frac{x_n+y_n}{2} \rightarrow z \in \text{Fr}C$ . Segue daí que  $\delta(\|x_n - y_n\|) \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ , e logo, pela definição da função  $\delta$ , que  $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ . Pois:

- Se existe um  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $x_n = y_n, \forall n \geq n_0$  então é claro que  $x_n - y_n \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ .

- Se não existe um  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $x_n = y_n, \forall n \geq n_0$ , isto é,  $x_n \neq y_n$ , para todo  $n$  suficientemente grande então, segue da hipótese de que  $C$  é uniformemente convexo que,  $B\left(\frac{x_n+y_n}{2}, \delta(\|x_n - y_n\|)\right) \subset C$ , para todo  $n$  suficientemente grande, desde que  $\frac{x_n+y_n}{2} \rightarrow z \in \text{Fr}C$ , resulta que  $\delta(\|x_n - y_n\|) \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ , e logo, pela definição da função  $\delta$ , que  $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ .

Portanto  $x_n - y_n \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos que para quaisquer seqüências  $(x_n), (y_n) \subset C$  tais que  $d\left(\frac{x_n+y_n}{2}, \text{Fr}C\right) \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ , implica que  $x_n - y_n \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ . Provaremos que nesse caso  $C$  é uniformemente convexo.

Para isto seja  $\alpha = \sup\{\delta(t), t \geq 0\}$  onde

$$\delta(t) := \sup \left\{ r \geq 0 : B\left(\frac{x+y}{2}, r\right) \subset C, \forall x, y \in C, \text{ tal que } \|x-y\| = t \right\} \quad (\text{B.1})$$

(estamos supondo  $\mathbf{a} = +\infty$ , quando  $C$  for ilimitado)

Considere a função  $\delta : [0, \mathbf{a}] \rightarrow [0, \mathbf{a}]$  dada por ( B.1) (no caso de  $\mathbf{a} = +\infty$  estamos supondo  $\delta : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ ).

Para provar que  $C$  é uniformemente convexo é suficiente provar que essa função "  $\delta$  " satisfaz:  $\delta(t) > 0, \forall t > 0$  (veja a Definição 2.1.3).

Para isto afirmamos que essa função realmente satisfaz  $\delta(t) > 0, \forall t > 0$ . De fato suponhamos por contradição que existe um  $t_0 > 0$  tal que  $\delta(t_0) = 0$ .

Por definição da função  $\delta$  existem  $x_0, y_0 \in C$  tal que  $\|x_0 - y_0\| = t_0 > 0$ . Usando o fato de que  $C$  é convexo obtemos que  $\frac{x_0+y_0}{2} \in C = \text{int}C \cup \text{Fr}C$ , e logo, temos:

- Se  $\frac{x_0+y_0}{2} \in \text{int}C$  então existe um  $r > 0$  tal que  $B\left(\frac{x_0+y_0}{2}, r\right) \subset C$ , segue daí, pela definição da função  $\delta$ , que  $\delta(\|x_0 - y_0\|) \geq r > 0$ . Contradizendo a hipótese de que  $\delta(t_0) = 0$ .

- Se  $\frac{x_0+y_0}{2} \in \text{Fr}C$  então, tomando  $(x_n = x_0)$  e  $(y_n = y_0)$ , teríamos  $(x_n), (y_n) \subset C$  tais que  $d\left(\frac{x_n+y_n}{2}, \text{Fr}C\right) \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ , implicando, por hipótese, que  $x_n - y_n \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ , logo, que  $x_0 - y_0 = 0$ , isto é,  $x_0 = y_0$ . O que contradiz a hipótese de que  $\|x_0 - y_0\| = t_0 > 0$ .

Portanto  $C$  é uniformemente convexo. □

Finalmente provaremos os itens **a)**, **b)** e **c)** do início desse apêndice.

**a)** Provaremos que nem todo conjunto convexo é estritamente convexo.

Para isto tomemos  $C = \{(1 - \alpha)x + \alpha y \in \mathbb{R}^2 : \alpha \in [0, 1], x = (1, 1) \text{ e } y = (2, 2)\}$ .

Então:

- o conjunto  $C$  é convexo.

Isto segue direto da definição de  $C$  (qualquer dúvida veja a Definição 2.1.1).

- o conjunto  $C$  não é estritamente convexo.

Para ver isto basta notarmos que o conjunto convexo  $C$  não contém nenhuma bola aberta do  $\mathbb{R}^2$ , isto mostra que  $C$  não pode ser estritamente convexo (qualquer dúvida veja a Definição 2.1.2).

**b)** Mostraremos agora que nem todo conjunto estritamente convexo é uniformemente convexo.

De fato tomemos  $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$  e  $C = \{(x, y) \in \mathcal{H} : y \geq \frac{1}{x} > 0\}$ . Então:

- O conjunto  $C$  é estritamente convexo.

Para provar isto notemos inicialmente que a fronteira de  $C$  é igual ao conjunto

$$\text{Fr}C = \left\{ (x, y) \in \mathcal{H} : y = \frac{1}{x} > 0 \right\}. \quad (\text{B.2})$$

Pelo Lema B.0.1 para provar que  $C$  é estritamente convexo é suficiente provamos que dados quaisquer  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in C$ , com  $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2} \in \text{Fr}C$  então  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ .

Para isto tomemos quaisquer  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in C$ , com  $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2} \in \text{Fr}C$ . Suponhamos sem perda de generalidade que :  $\mathbf{a} = (x, y)$ , e que,  $\mathbf{b} = (z, w)$ . Daí segue da definição de  $C$  que:

$$y \geq \frac{1}{x} > 0, \text{ e que, } w \geq \frac{1}{z} > 0. \quad (\text{B.3})$$

Como por hipótese  $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2} \in \text{Fr}C$ , isto é,  $\left(\frac{x+z}{2}, \frac{y+w}{2}\right) \in \text{Fr}C$ , resulta de (B.2) que

$$\frac{y+w}{2} = \frac{1}{\frac{x+z}{2}} = \frac{2}{x+z}, \quad (\text{B.4})$$

substituindo as desigualdades de (B.3) acima, resulta

$$\begin{aligned} \frac{2}{x+z} &= \frac{y+w}{2} \geq \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{z}}{2} = \frac{x+z}{2xz} \\ &\Rightarrow \frac{2}{x+z} \geq \frac{x+z}{2xz} \\ &\Rightarrow 4xz \geq (x+z)^2 \\ &\Rightarrow 4xz \geq x^2 + 2xz + z^2 \\ &\Rightarrow 0 \geq x^2 - 2xz + z^2 \\ &\Rightarrow 0 \geq (x-z)^2 \geq 0 \\ &\Rightarrow x = z, \end{aligned}$$

provando que,

$$x = z. \quad (\text{B.5})$$

Provaremos agora que  $y = w$ . Para isto de (B.3) obtemos  $x \geq \frac{1}{y} > 0$ , e que,  $z \geq \frac{1}{w} > 0$ , substituindo esse valores em (B.4) obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{y+w}{2} &= \frac{2}{x+z} \leq \frac{2}{\frac{1}{y} + \frac{1}{w}} = \frac{2yw}{y+w} \\
&\Rightarrow \frac{y+w}{2} \leq \frac{2yw}{y+w} \\
&\Rightarrow (y+w)^2 \leq 4yw \\
&\Rightarrow y^2 + 2yw + w^2 \leq 4yw \\
&\Rightarrow y^2 - 2yw + w^2 \leq 0 \\
&\Rightarrow 0 \leq (y-w)^2 \leq 0 \\
&\Rightarrow y = w,
\end{aligned}$$

provando que,

$$y = w. \tag{B.6}$$

Portanto de (B.5) e (B.6) concluímos que:

$$\mathbf{a} = (x, y) = (z, w) = \mathbf{b}.$$

Provando que  $C$  é estritamente convexo.

- O conjunto  $C$  não é uniformemente convexo.

Pelo Lema B.0.2 é suficiente provamos que existem sequências  $(x_n), (y_n) \in C$ , com  $d\left(\frac{x_n+y_n}{2}, \text{Fr}C\right) \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ , mas que,  $x_n - y_n \rightarrow \mathbf{a} \neq 0$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ .

Para isto tomando  $(x_n = (n, \frac{1}{n}))$  e  $(y_n = (n+1, \frac{1}{n}))$  temos que  $(x_n), (y_n) \in C$ , pois  $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n} > 0$  e  $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1} > 0$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Para provar que  $d\left(\frac{x_n+y_n}{2}, \text{Fr}C\right) \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ , é suficiente provamos que: para todo  $\epsilon > 0$ , existem  $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$  e  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\epsilon) \in C$  tal que

$$\left\| \frac{x_{n_0} + y_{n_0}}{2} - \mathbf{a} \right\| < \epsilon.$$

De fato dado  $\epsilon > 0$  qualquer então tomando  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{n_0(2n_0+1)} < \epsilon$ , daí



para  $\mathbf{a} = \left( \frac{2n_0+1}{2}, \frac{2}{2n_0+1} \right)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\mathbf{x}_{n_0} + \mathbf{y}_{n_0}}{2} - \mathbf{a} \right\| &= \left\| \frac{\left( n_0, \frac{1}{n_0} \right) + \left( n_0 + 1, \frac{1}{n_0} \right)}{2} - \left( \frac{2n_0 + 1}{2}, \frac{2}{2n_0 + 1} \right) \right\| \\ &= \left\| \left( \frac{2n_0 + 1}{2}, \frac{1}{n_0} \right) - \left( \frac{2n_0 + 1}{2}, \frac{2}{2n_0 + 1} \right) \right\| \\ &= \left\| \left( 0, \frac{1}{n_0} - \frac{2}{2n_0 + 1} \right) \right\| \\ &= \left\| \left( 0, \frac{1}{n_0(2n_0 + 1)} \right) \right\| \\ &= \frac{1}{n_0(2n_0 + 1)} \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Provando que  $\mathbf{d} \left( \frac{\mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n}{2}, \text{FrC} \right) \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ .

Como

$$\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n = \left( n_0, \frac{1}{n_0} \right) - \left( n_0 + 1, \frac{1}{n_0} \right) = (-1, 0)$$

obtemos

$$\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n \rightarrow (-1, 0) \neq (0, 0).$$

Portanto, pelo Lema B.0.2, C não é uniformemente convexo.

c) Provaremos agora que nem todo conjunto uniformemente convexo (Definição 2.1.3) é fortemente convexo (Definição 2.1.4).

Considerando o nosso espaço de Hilbert como sendo  $\mathbb{R}^2$  munido da norma euclidiana provaremos que o conjunto  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x^4 + y^4 \leq 1\}$  é uniformemente convexo, mas não é fortemente convexo.

- O conjunto C é uniformemente convexo.

Provaremos isso em 2 etapas:

Na **Etapa 1** provaremos 3 lemas que serão usado para provar que o conjunto C é uniformemente convexo.

Na **Etapa 2** provaremos que o conjunto C é uniformemente convexo.

**Etapa 1.** O Lema B.0.4 e o Lema B.0.5 abaixo, foi baseado nas questões 1.1 e 2.2, da página 36 do livro Análise Real 2, do professor Ellon Lages Lima [9].

**Lema B.0.3.** Para todo  $a, b \in \mathbb{R}$  temos:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}.$$

*Demonstração.* Sabendo que  $0 \leq (a-b)^2$ , temos:

$$\begin{aligned} 0 \leq (a-b)^2 &\Rightarrow 0 \leq a^2 + b^2 - 2ab \\ &\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 \leq 2a^2 + 2b^2 \\ &\Rightarrow (a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) \\ &\Rightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}. \end{aligned}$$

Provando o Lema. □

**Lema B.0.4.** Seja  $x, y \in \mathbb{R}^2$ . Se  $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$  com  $x \neq y$ , então existe  $\sigma \geq 0$  tal que  $y = \sigma x$ .

*Demonstração.* Se  $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$  então  $\|x+y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$ , ou seja,  $\|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$ , logo  $\langle x, y \rangle = \|x\|\|y\|$  e daí, por Cauchy-Schwarz essa igualdade só ocorre se  $y = \sigma x$ , com  $\sigma \geq 0$ . □

**Lema B.0.5.** Seja  $x, y \in \mathbb{R}^2$ . Se  $x, y \in B[0, 1]$  com  $x \neq y$ , então  $\|(1-\alpha)x + \alpha y\| < 1$ , para todo  $\alpha \in (0, 1)$ .

*Demonstração.* De fato dados  $x, y \in B[0, 1]$ , com  $x \neq y$  e dado  $\alpha \in (0, 1)$ . Então:

- Caso  $\|x\| < 1$  e  $\|y\| < 1$ , temos

$$\begin{aligned} \|(1-\alpha)x + \alpha y\| &\leq \|(1-\alpha)x\| + \|\alpha y\| = (1-\alpha)\|x\| + \alpha\|y\| < (1-\alpha)1 + \alpha 1 = 1 \\ &\Rightarrow \|(1-\alpha)x + \alpha y\| < 1. \end{aligned}$$

- Caso  $\|x\| < 1$  e  $\|y\| = 1$ , temos

$$\begin{aligned} \|(1-\alpha)x + \alpha y\| &\leq \|(1-\alpha)x\| + \|\alpha y\| = (1-\alpha)\|x\| + \alpha\|y\| < (1-\alpha)1 + \alpha 1 = 1 \\ &\Rightarrow \|(1-\alpha)x + \alpha y\| < 1. \end{aligned}$$

- Caso  $\|x\| = 1$  e  $\|y\| < 1$  é análogo ao anterior.

- Caso  $\|\mathbf{x}\| = 1$  e  $\|\mathbf{y}\| = 1$  temos

$$\begin{aligned} \|(1 - \alpha)\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}\| &< \|(1 - \alpha)\mathbf{x}\| + \|\alpha\mathbf{y}\| = (1 - \alpha)\|\mathbf{x}\| + \alpha\|\mathbf{y}\| = (1 - \alpha)1 + \alpha 1 = 1 \\ &\Rightarrow \|(1 - \alpha)\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}\| < 1. \end{aligned}$$

onde usamos o fato de que  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$  combinado com  $\|\mathbf{x}\| = 1 = \|\mathbf{y}\|$  e com o Lema B.0.4 (qualquer dúvida veja as questões 1.1 e 2.2 da página 36 de [9]).  $\square$

**Etapa 2.** Finalmente estamos prontos para provar que  $\mathbf{C}$  é uniformemente convexo.

Para isto suponha por absurdo que ele não seja uniformemente convexo. Então existe um  $t > 0$  tal que  $\delta(t) = 0$ , onde  $\delta$  é a função definido na demonstração Lema B.0.2, isto é,  $\delta$  é dado por

$$\delta(t) := \sup \left\{ r > 0 : B\left(\frac{\mathbf{x} + \mathbf{y}}{2}, r\right) \subset \mathbf{C}, \text{ com } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{C}, \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \text{ e } \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = t > 0 \right\}.$$

Logo pela definição de  $\delta$  existem  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{C}$  tais que  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = t > 0$ , com  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{C}$  tais que  $\frac{\mathbf{x} + \mathbf{y}}{2} \in \text{Fr}\mathbf{C}$ , isto é, supondo  $\mathbf{x} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$  e  $\mathbf{y} = (\mathbf{c}, \mathbf{d})$ , temos:

$$\left(\frac{\mathbf{a} + \mathbf{c}}{2}\right)^4 + \left(\frac{\mathbf{b} + \mathbf{d}}{2}\right)^4 = 1. \quad (\text{B.7})$$

Daí como  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{C}$ , temos  $\mathbf{a}^4 + \mathbf{b}^4 \leq 1$  e  $\mathbf{c}^4 + \mathbf{d}^4 \leq 1$ , logo,  $(\mathbf{a}^2, \mathbf{b}^2), (\mathbf{c}^2, \mathbf{d}^2) \in B[0, 1]$ .

Considere os casos:

**Caso 1.** Se  $(\mathbf{a}^2, \mathbf{b}^2) \neq (\mathbf{c}^2, \mathbf{d}^2)$ , então usando o Lema B.0.5 temos

$$\|(1 - \alpha)(\mathbf{a}^2, \mathbf{b}^2) + \alpha(\mathbf{c}^2, \mathbf{d}^2)\| < 1, \text{ para todo } \alpha \in (0, 1),$$

donde segue,

$$\|((1 - \alpha)\mathbf{a}^2 + \alpha\mathbf{c}^2, (1 - \alpha)\mathbf{b}^2 + \alpha\mathbf{d}^2)\|^2 < 1, \text{ para todo } \alpha \in (0, 1).$$

em particular para  $\alpha = \frac{1}{2}$ , temos

$$\left(\frac{\mathbf{a}^2 + \mathbf{c}^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\mathbf{b}^2 + \mathbf{d}^2}{2}\right)^2 < 1,$$

usando agora o Lema B.0.3 combinado com a hipótese de que  $\frac{\mathbf{x} + \mathbf{y}}{2} \in \text{Fr}\mathbf{C}$ , isto é, com (B.7) resulta

$$1 = \left(\frac{\mathbf{a} + \mathbf{c}}{2}\right)^4 + \left(\frac{\mathbf{b} + \mathbf{d}}{2}\right)^4 \leq \left(\frac{\mathbf{a}^2 + \mathbf{c}^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\mathbf{b}^2 + \mathbf{d}^2}{2}\right)^2 < 1 \Rightarrow 1 < 1,$$

o que é um absurdo.

**Caso 2.** Se  $(a^2, b^2) = (c^2, d^2)$ , então  $c = \pm a$  e  $d = \pm b$ , lembrando que por hipótese estamos supondo que  $(a, b) \neq (c, d)$  resulta em três sub-casos:

**Sub-caso 2.1.** Em que  $c = -a$  e  $d = b$ .

**Sub-caso 2.2.** Em que  $c = +a$  e  $d = -b$ .

**Sub-caso 2.3.** Em que  $c = -a$  e  $d = -b$ .

Provaremos que em qualquer um desses sub-casos chegaremos num absurdo.

**Sub-caso 2.1.** Se  $c = -a$  e  $d = b$  então substituindo em (B.7) obtemos:

$$\left(\frac{a+c}{2}\right)^4 + \left(\frac{b+d}{2}\right)^4 = 1 \Rightarrow \left(\frac{b+b}{2}\right)^4 = 1 \Rightarrow b = \pm 1.$$

Se  $b = 1$ , então  $d = 1$  por definição de  $C$  concluímos que  $a = c = 0$ , e portanto temos

$$(a, b) = (0, 1) = (c, d)$$

contradizendo que  $(a, b) \neq (c, d)$  ( $x \neq y$ ).

Se  $b = -1$ , então  $d = -1$  por definição de  $C$  concluímos que  $a = c = 0$ , e portanto temos

$$(a, b) = (0, -1) = (c, d)$$

contradizendo que  $(a, b) \neq (c, d)$  ( $x \neq y$ ).

**Sub-caso 2.2.** Se  $c = +a$  e  $d = -b$ , então prosseguindo de maneira análoga obtemos que

$$(a, b) = (c, d)$$

contradizendo que  $(a, b) \neq (c, d)$  ( $x \neq y$ ).

**Sub-caso 2.3.** Se  $c = -a$  e  $d = -b$ , então substituindo esse valores em (B.7) obtemos:

$$1 = \left(\frac{a+c}{2}\right)^4 + \left(\frac{b+d}{2}\right)^4 = 0,$$

o que é um absurdo.

Portanto  $C$  é uniformemente convexo.

• Provaremos agora que  $C$  não é fortemente convexo. Para isto tomando qualquer  $0 < s < 1$ , seja  $\mathbf{x}_s = (s, (1 - s^4)^{\frac{1}{4}})$  e  $\mathbf{y}_s = (s, -(1 - s^4)^{\frac{1}{4}})$ . Então para estes valores de  $\mathbf{x}_s$  e  $\mathbf{y}_s$  temos:

$$s^4 + ((1 - s^4)^{\frac{1}{4}})^4 = s^4 + 1 - s^4 = 1 \Rightarrow \mathbf{x}_s \in C,$$

$$s^4 + (-(1 - s^4)^{\frac{1}{4}})^4 = s^4 + 1 - s^4 = 1 \Rightarrow \mathbf{y}_s \in C$$

$$\text{e } \frac{\mathbf{x}_s + \mathbf{y}_s}{2} = (s, 0).$$

Combinando

$$d\left(\frac{\mathbf{x}_s + \mathbf{y}_s}{2}, \text{Fr}C\right) \leq d\left(\frac{\mathbf{x}_s + \mathbf{y}_s}{2}, (1, 0)\right) = \left\| \frac{\mathbf{x}_s + \mathbf{y}_s}{2} - (1, 0) \right\| = \|(s-1, 0)\| = 1-s,$$

pois  $(0, 1) \in \text{Fr}C$ , com

$$\|\mathbf{x}_s - \mathbf{y}_s\| = \|(0, 2(1 - s^4)^{\frac{1}{4}})\| = 2(1 - s^4)^{\frac{1}{4}},$$

obtemos:

$$\delta_C(2(1 - s^4)^{\frac{1}{4}}) \leq 1 - s, \tag{B.8}$$

pois  $(0, 1) \in \text{Fr}C$ .

Daí, fazendo  $t = 2(1 - s^4)^{\frac{1}{4}}$ , obtemos  $s = \left(1 - \left(\frac{t}{2}\right)^4\right)^{\frac{1}{4}}$ , substituindo esse valor em (B.8) resulta

$$\begin{aligned} \delta_C(t) &\leq 1 - \left(1 - \left(\frac{t}{2}\right)^4\right)^{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{t^4}{64} - \frac{t^4}{64} + 1 - \left(1 - \left(\frac{t}{2}\right)^4\right)^{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{t^4}{64} + 1 - \left[\frac{t^4}{64} + \left(1 - \left(\frac{t}{2}\right)^4\right)^{\frac{1}{4}}\right] \\ &= \frac{t^4}{64} + \mathcal{O}(t^4) \end{aligned}$$

onde  $\mathcal{O}(t^4) = 1 - \left[\frac{t^4}{64} + \left(1 - \left(\frac{t}{2}\right)^4\right)^{\frac{1}{4}}\right]$ , daí temos

$$\delta_C(t) \leq \frac{t^4}{64} + \mathcal{O}(t^4) \Rightarrow \frac{\delta_C(t)}{t^2} \leq \frac{t^2}{64} + \mathcal{O}(t^2),$$

isto é,

$$0 \leq \frac{\delta_C(t)}{t^2} \leq \frac{t^2}{64} + \mathcal{O}(t^2),$$

fazendo  $t = t_s \rightarrow 0$ , acima, ou seja,  $s \rightarrow 1$ , obtemos:

$$\frac{\delta(t)}{t^2} \rightarrow 0.$$

Para provar isso, é suficiente provar que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{O}(t^2) = \frac{\mathcal{O}(t^4)}{t^2} = 0, \text{ e que, } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{64} = 0.$$

Claramente a segunda igualdade é verdadeira. Resta, por tanto, mostrar a primeira.

Para isto, usaremos a regra L'Hospital. Com efeito, de

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{O}(t^2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{O}(t^4)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \left[ \frac{t^4}{64} + \left( 1 - \left( \frac{t}{2} \right)^4 \right)^{\frac{1}{4}} \right]}{t^2} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}$$

podemos usar a regra de L'Hospital, e obter

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{O}'(t^4)}{2t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{4t^3}{64} + \frac{1}{4} \left( 1 - \left( \frac{t}{2} \right)^4 \right)^{-\frac{3}{4}} (-4) \left( \frac{t}{2} \right)^3 \left( \frac{1}{2} \right)}{2t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^3}{16} - \frac{1}{2} \left( 1 - \left( \frac{t}{2} \right)^4 \right)^{-\frac{3}{4}} \left( \frac{t}{2} \right)^3}{2t} \\ &= \frac{0 - 0}{0} = \frac{0}{0} \end{aligned}$$

usando novamente L'Hospital, resulta

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{O}''(t^4)}{2} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{3t^2}{16} - \frac{3}{4} \left( 1 - \left( \frac{t}{2} \right)^4 \right)^{-\frac{7}{4}} \left( \frac{t}{2} \right)^3 \left( \frac{t}{2} \right)^3 - \frac{3}{4} \left( 1 - \left( \frac{t}{2} \right)^4 \right)^{-\frac{3}{4}} \left( \frac{t}{2} \right)^2}{2} \\ &= \frac{0 - 0 - 0}{2} = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, segue de L'Hospital que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{O}(t^2) = \frac{\mathcal{O}(t^4)}{t^2} = 0,$$

e portanto,

$$\frac{\delta(t)}{t^2} \rightarrow 0.$$

Mostrando que não existe  $\mu > 0$ , tal que  $\delta(t) = \mu t^2$ , ou seja,  $C$  não pode ser fortemente convexo (qualquer dúvida veja a Definição 2.1.4).

# Apêndice C

## Comentários do Capítulo 3

Este apêndice é formado por três observações. A primeira é referente a uma passagem da demonstração do Teorema 3.1.2, enquanto que a segunda e a terceira observações foram usadas na demonstração do Teorema 3.4.2.

Explicaremos na observação abaixo algumas das desigualdades usadas no Teorema 3.1.2.

**Observação C.0.1.** *Essa observação é para o leitor que não tenha entendido algumas das sequências de desigualdades apresentadas na primeira parte da Etapa 2 do Teorema 3.1.2, que foram usadas para demonstra por indução a desigualdade (3.1)*

- *A primeira desigualdade refere-se a desigualdade triangular.*
- *Enquanto que a segunda decorre de:*

$0 \leq (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ , implicando,  $2ab \leq a^2 + b^2$ , e logo,  $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leq 2a^2 + 2b^2 = 2(a^2 + b^2)$ .

- *A terceira desigualdade decorre de  $m \geq 2$  implicando  $2^{m-2} \geq 1$ .*
- *A quarta desigualdade segue de:*

se  $1 \leq i \leq m$  então para todo  $y \in C_0$ , temos:  $T_i(y) = y$  e logo:

$$\|x - T_i(x)\|^2 = \|x - [(1 - \lambda_i)x + \lambda_i P_i(x)]\|^2 = \lambda_i^2 \|x - P_i(x)\|^2. \quad (C.1)$$

Da Definição 3.1.2 do operador  $T_i$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
 \|T_i(x) - y\|^2 &= \|(x - y) + \lambda_i(P_i(x) - x)\|^2 \\
 &= \|x - y\|^2 + 2\lambda_i \operatorname{Re}\langle x - y, P_i(x) - x \rangle + \lambda_i^2 \|P_i(x) - x\|^2 \\
 &= \|x - y\|^2 - 2\lambda_i \|P_i(x) - x\|^2 + \lambda_i^2 \|P_i(x) - x\|^2 \\
 &\quad + 2\lambda_i \operatorname{Re}\langle P_i(x) - y, P_i(x) - x \rangle \\
 &\leq \|x - y\|^2 - 2\lambda_i \|P_i(x) - x\|^2 + \lambda_i^2 \|P_i(x) - x\|^2 \\
 &\leq \|x - y\|^2 - \lambda_i(2 - \lambda_i) \|P_i(x) - x\|^2
 \end{aligned}$$

temos:

$$\|T_i(x) - y\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \lambda_i(2 - \lambda_i) \|P_i(x) - x\|^2$$

(onde a primeira desigualdade decorre de  $\operatorname{Re}\langle P_i(x) - y, P_i(x) - x \rangle \leq 0$ , veja (2.2))

Substituindo (C.1) na desigualdade acima, temos:

$$\|T_i(x) - y\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \frac{2 - \lambda_i}{\lambda_i} \|x - T_i(x)\|^2$$

implicando:

$$\|x - T_i(x)\|^2 \leq \frac{\lambda_i}{2 - \lambda_i} (\|x - y\|^2 - \|T_i(x) - y\|^2). \quad (\text{C.2})$$

• A quinta desigualdade resulta de:

$$\frac{\lambda_m}{2 - \lambda_m} \leq \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\lambda_i}{2 - \lambda_i} \right\} = b_m$$

e

$$\|K(x) - y\|^2 - \|T(x) - y\|^2 \geq 0$$

pois

$$\|T(x) - T(y)\| = \|T^m K(x) - T^m(K(y))\| \leq \|K(x) - K(y)\| = \|K(x) - y\|$$

pois  $y \in C_0$  e  $T(y) = y = K(y)$ .

- A sexta desigualdade decorre da hipótese de indução.
- A oitava desigualdade decorre de:

$$b_{m-1} \leq \sup_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\lambda_i}{2 - \lambda_i} \right\} = b_m$$

e

$$\|K(x) - K(y)\| \leq \|x - y\| \implies \|x - y\| - \|K(x) - y\| \geq 0.$$



A seguinte observação foi usada para provar o Teorema 3.4.2.

**Observação C.0.2.** *Note que de modo geral*

$$d(T^n(x), C_0) \geq d(T^n(x), C_j) \quad (C.3)$$

para todo  $j = 1, 2, \dots, m$ , pois

$$C_0 = \bigcap_{i=1}^m C_i \subset C_j$$

para todo  $j = 1, 2, \dots, m$ , e assim,

$$\inf_{v \in C_0} d(T^n(x), v) \geq \inf_{v \in C_j} d(T^n(x), v)$$

para todo  $i = 1, 2, \dots, m$ .

*Provaremos que sob à hipótese de que*

$$C_\alpha \cap \text{int}(\bigcap_{i=1, i \neq \alpha} C_i) \neq \emptyset$$

*tem-se*

$$d(T^n(x), C_0) \leq c \cdot \max_{i=1,2,\dots,m} \|T^n(x) - P_i(T^n(x))\| = c \cdot \max_{i=1,2,\dots,m} d(T^n(x), C_i) \quad (C.4)$$

para todo  $n$  suficientemente grande, onde  $c = (1 + \frac{2R}{\delta})$  com  $R = \|x - z\|$  e  $\delta > 0$  é tal que  $B(z, \delta) \subset \bigcap_{i=1, i \neq \alpha} C_i$ . Em outras palavras, se quisermos inverter a desigualdade (C.3) acima temos que paga o preço de multiplicar por  $c > 1$  e  $n$  ser suficientemente grande.

*Dividiremos à demonstração da desigualdade acima em duas partes.*

**Parte 1.** *Existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que*

$$\max_{i=1,2,\dots,m} \|T^n(x) - P_i(T^n(x))\| = 0$$

para todo  $n \geq n_0$ , e logo,  $d(T^n(x), C_0) = 0$  para todo  $n \geq n_0$ .

*Daí temos*

$$d(T^n(x), C_0) = 0 = c \cdot 0 = c \cdot \max_{i=1,2,\dots,m} \|T^n(x) - P_i(T^n(x))\| = c \cdot \max_{i=1,2,\dots,m} d(T^n(x), C_i).$$

*Provando (C.4).*

**Parte 2.** *Suponhamos que  $\max_{i=1,2,\dots,m} \|T^n(x) - P_i(T^n(x))\| \neq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Para provar esta parte, recordemos (3.37) onde temos para todo  $z \in C_\alpha \cap \text{int}(\bigcap_{i=1, i \neq \alpha} C_i)$  e  $y = P_\alpha T^n(x)$  que vale:*

$$\frac{\epsilon}{\epsilon + \delta} \cdot z + \frac{\delta}{\epsilon + \delta} \cdot y = w \in C_\alpha \quad (C.5)$$

para todo  $\epsilon > 0$ .

Tomando  $\epsilon(\mathbf{n}) = 2 \cdot \max_{i=1,2,\dots,m} d(T^n(x), C_i)$  temos para todo  $i \neq \alpha$  que

$$\begin{aligned} \|y - P_i(y)\| &= d(y, C_i) \leq \|y - P_i(T^n(x))\| \\ &= \|y - T^n(x) + T^n(x) - P_i(T^n(x))\| \\ &\leq \|y - T^n(x)\| + \|T^n(x) - P_i(T^n(x))\| \\ &= \|P_\alpha(T^n(x)) - T^n(x)\| + \|T^n(x) - P_i(T^n(x))\| \\ &= d(T^n(x), C_\alpha) + d(T^n(x), C_i) \\ &\leq \frac{\epsilon(\mathbf{n})}{2} + \frac{\epsilon(\mathbf{n})}{2} = \epsilon(\mathbf{n}), \end{aligned}$$

logo,

$$\|y - P_i(y)\| < \epsilon(\mathbf{n}).$$

Repetindo o processo feito no Teorema 3.4.2, com  $\epsilon(\mathbf{n})$  no lugar de  $\epsilon$ , resulta que

$$w \in C_i$$

para todo  $i \neq \alpha$ .

Por (C.5) e pelo que foi provado acima, segue que  $w \in C_i, \forall i = 1, 2, \dots, m$ , isto é,  $w \in C_0$ .

Daí temos

$$\begin{aligned} d(T^n(x), C_0) &\leq \|T^n(x) - w\| = \|T^n(x) - y + y - w\| \\ &\leq \|T^n(x) - y\| + \|y - w\| \\ &= \|T^n(x) - P_\alpha T^n(x)\| + \|y - w\| \\ &= d(T^n(x), C_\alpha) + \left\| y - \frac{\epsilon(\mathbf{n})}{\epsilon(\mathbf{n}) + \delta} \cdot z - \frac{\delta}{\epsilon(\mathbf{n}) + \delta} \cdot y \right\| \\ &= d(T^n(x), C_\alpha) + \frac{\epsilon(\mathbf{n})}{\epsilon(\mathbf{n}) + \delta} \|z - y\| \\ &< \frac{\epsilon(\mathbf{n})}{2} + \frac{\epsilon(\mathbf{n})}{\delta} R \\ &= \left(1 + \frac{2R}{\delta}\right) \frac{\epsilon(\mathbf{n})}{2} = \frac{c \cdot \epsilon(\mathbf{n})}{2}, \end{aligned}$$

e logo,

$$d(T^n(x), C_0) < \frac{c \cdot \epsilon(\mathbf{n})}{2}$$

substituindo  $\epsilon(\mathbf{n}) = 2 \cdot \max_{i=1,2,\dots,m} d(T^n(\mathbf{x}), C_i)$  acima resulta

$$d(T^n(\mathbf{x}), C_0) < \frac{\mathbf{c} \cdot \epsilon(\mathbf{n})}{2} = \mathbf{c} \cdot \max_{i=1,2,\dots,m} d(T^n(\mathbf{x}), C_i)$$

onde  $(1 + \frac{2R}{\delta}) = \mathbf{c}$ .

Provando (C.4).

A seguinte observação foi útil para provar a etapa 2 do Teorema 3.4.2.

**Observação C.0.3.** Da Definição 3.1.2 do operador  $T_i$ , Tem-se:

$$\begin{aligned} \|T_i(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\|^2 &= \|(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \lambda_i(\mathbf{P}_i(\mathbf{x}) - \mathbf{x})\|^2 \\ &= \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 + 2\lambda_i \operatorname{Re}\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{P}_i(\mathbf{x}) - \mathbf{x} \rangle + \lambda_i^2 \|\mathbf{P}_i(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\|^2 \\ &= \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 - 2\lambda_i \|\mathbf{P}_i(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\|^2 + \lambda_i^2 \|\mathbf{P}_i(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\|^2 \\ &\quad + 2\lambda_i \operatorname{Re}\langle \mathbf{P}_i(\mathbf{x}) - \mathbf{y}, \mathbf{P}_i(\mathbf{x}) - \mathbf{x} \rangle \\ &\leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 - 2\lambda_i \|\mathbf{P}_i(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\|^2 + \lambda_i^2 \|\mathbf{P}_i(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 - \lambda_i(2 - \lambda_i) \|\mathbf{P}_i(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\|^2 \end{aligned}$$

temos:

$$\|T_i(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 - \lambda_i(2 - \lambda_i) \|\mathbf{P}_i(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\|^2$$

(onde a primeira desigualdade decorre de  $\operatorname{Re}\langle \mathbf{P}_i(\mathbf{x}) - \mathbf{y}, \mathbf{P}_i(\mathbf{x}) - \mathbf{x} \rangle \leq 0$ , veja (2.2))

implicando:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{P}_i(\mathbf{x})\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_i(2 - \lambda_i)} (\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 - \|T_i(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\|^2). \quad (\text{C.6})$$

# Apêndice D

## Comentários do Capítulo 4

Neste apêndice iremos demonstra o seguinte lema:

**Lema D.0.6.** *Os conjuntos  $H$  e  $K$  definidos em (4.1) e (4.2), respectivamente, possuem apenas a origem como ponto em comum. Ou seja,  $H \cap K = \{0\}$ .*

*Demonstração.* Dado  $z \in H \cap K$ , iremos mostrar que  $z = 0$ . Então, por definição do conjunto,  $K$  existe uma sequência  $(z_n) \subset A$  tal que  $z_n \rightarrow z$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ , onde  $A = \text{cone}\{p(x) : x \geq 0\}$ , com  $p(x)$  definido em (4.3).

Usando o fato de que o conjunto  $\{e_1, e_2, \dots\}$  forma uma base de  $\ell^2$  obtemos que  $z$  deve possuir uma das formas:

- $z = \alpha e_1$ , para algum  $\alpha \in \mathbb{R}$ , ou seja,  $z$  pertence ao subespaço gerado por  $e_1$ , que denotaremos esse subespaço por  $\text{Span}(e_1)$ .

- $z \neq \alpha e_1$  para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , ou seja,  $z$  não pertence ao subespaço gerado por  $e_1$ .

Usando a definição de  $A$ , podemos supor que  $z_n = \sum_{i=1}^{N_n} \lambda_{ni} p(x_{ni})$ .

**Caso 1 .** Se  $z = \alpha e_1$  para algum número real  $\alpha$ , então

$$\langle e_1, z_n \rangle = \langle e_1, \sum_{i=1}^{N_n} \lambda_{ni} p(x_{ni}) \rangle = \sum_{i=1}^{N_n} \lambda_{ni} h(x_{ni}) \geq 0, \quad (\text{D.1})$$

pois  $h(x_{ni}) = \exp(-100 x_{ni}) \geq 0$  e  $\lambda_{ni} \geq 0$ , para todo  $i = 1, \dots, N_n$ .

Fazendo  $n \rightarrow +\infty$  em (D.1), e usando o fato de que  $\langle e_1, \cdot \rangle$  é contínuo, resulta que:  $\langle e_1, z \rangle \geq 0$ .

Usando agora a definição de  $H$  combinado com a hipótese de que  $z \in H$ , ou seja,  $\langle e_1, z \rangle \leq 0$ , segue que  $\langle e_1, z \rangle = 0$ . Desde que  $z = \alpha e_1$  temos que

$$0 = \langle e_1, z \rangle = \langle e_1, \alpha e_1 \rangle = \alpha \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow z = 0.$$

**Caso 2.** Se  $z \neq \alpha e_1$  para todo número real  $\alpha$ .

Então existe um  $k > 1$  tal que  $\langle e_k, z \rangle \neq 0$ , pois o conjunto  $\{e_1, e_2, \dots\}$  é uma base de  $\ell^2$ . Da hipótese de que  $z \in K$ , concluímos que  $\langle e_k, z \rangle > 0$  (pois  $\cos\left(\frac{\pi}{2}(x - \lfloor x \rfloor)\right) > 0$  e  $\sin\left(\frac{\pi}{2}(x - \lfloor x \rfloor)\right) \geq 0$  para todo  $x \geq 0$ , para ver isto basta notar que  $\langle e_k, z \rangle \geq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , como por hipótese (caso 2) tem-se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle e_k, z_n \rangle = \langle e_k, z \rangle > 0$ ).

Desde que  $\langle e_k, z_n \rangle \rightarrow \langle e_k, z \rangle$ , segue que, existem  $\beta > 0$  e  $N \in \mathbb{N}$  tais que  $\langle e_k, z_n \rangle > \beta$ , para todo  $n \geq N$ .

Portanto para todo  $n \geq N$  segue da definição de  $p$  que

$$\beta < \langle e_k, z_n \rangle = \left\langle e_k, \sum_{i=1}^{N_n} \lambda_{ni} p(x_{ni}) \right\rangle = \sum_{i=1}^{N_n} \lambda_{ni} \langle e_k, p(x_{ni}) \rangle = \sum_{i \in W_n} \lambda_{ni} \langle e_k, p(x_{ni}) \rangle \leq \sum_{i \in W_n} \lambda_{ni},$$

isto é,

$$\beta < \sum_{i \in W_n} \lambda_{ni} \langle e_k, p(x_{ni}) \rangle \leq \sum_{i \in W_n} \lambda_{ni} \tag{D.2}$$

pois  $\cos(x) \leq 1$ ,  $\sin(x) \leq 1$  e o conjunto de índice  $W_n := \{j \in \{1, 2, \dots, N_n\} \mid \lfloor x_{ni} \rfloor + 2 = k, \text{ ou, } \lfloor x_{ni} \rfloor + 3 = k\}$ , pois por definição temos  $p(x_{ni}) = h(x_{ni})e_1 + c(x_{ni})e_{\lfloor x_{ni} \rfloor + 2} + s(x_{ni})e_{\lfloor x_{ni} \rfloor + 3}$ , e logo,  $\langle p(x_{ni}), e_k \rangle = c(x_{ni})$  ou  $\langle p(x_{ni}), e_k \rangle = s(x_{ni})$ , dependendo de  $\lfloor x_{ni} \rfloor + 2 = k$  ou  $\lfloor x_{ni} \rfloor + 3 = k$ .

Daí

$$\begin{aligned} \langle e_1, z_n \rangle &= \left\langle e_1, \sum_{i=1}^{N_n} \lambda_{ni} p(x_{ni}) \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{N_n} \lambda_{ni} \langle e_1, p(x_{ni}) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{N_n} \lambda_{ni} h(x_{ni}) \\ &\geq \sum_{i \in W_n} \lambda_{ni} h(x_{ni}) \\ &\geq \sum_{i \in W_n} \lambda_{ni} h(k-1) \\ &> \beta h(k-1) > 0 \end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos a desigualdade de (D.2) e na ante-penúltima desigualdade usamos o fato de que  $h(x) := \exp(-100x^3)$  é uma função positiva e estritamente decrescente (onde usamos também o fato de que  $x_{ni} < \lfloor x_{ni} \rfloor + 1 \leq k - 2 + 1 = k - 1$  combinado com  $h$  ser estritamente decrescente). Mostrando que  $\langle e_1, z_n \rangle > 0$ , e logo, pela definição de  $H$ , resulta que  $z$  não pertence a  $H$ , o que contradiz o fato de que  $z \in H$ .

Provando assim o lema. □

Podemos resumir a idéia da demonstração do lema acima através do seguinte esquema:

$$\begin{aligned} H \cap K &= H \cap K \cap \ell^2 \\ &= H \cap K (\text{Span}(e_1) \dot{\cup} (\text{Span}(e_1))^c) \\ &= (H \cap K \cap \text{Span}(e_1)) \dot{\cup} (H \cap K \cap (\text{Span}(e_1))^c). \end{aligned}$$

Onde o **Caso 1** corresponde a  $H \cap K \cap \text{Span}(e_1) = \{0\}$  e o **Caso 2** corresponde a  $H \cap K \cap (\text{Span}(e_1))^c = \emptyset$ .

Dessa forma vale  $H \cap K = \{0\}$ .

Por fim, note que o fato do **Caso 2** corresponder ao vazio, significa que o **Caso 2** nunca ocorre.

# Referências Bibliográficas

- [1] Youla, D. C., Webb, H., *Image Restoration by the Method of Convex Projections: Parte1-Theory*. IEEE TRANSACTIONS ON MEDICAL IMAGING, VOL. MI-1, NO.2, pp. 81 a 94, OCTOBER (1982).
- [2] Sezan, M. I., Stark, H., *Image Restoration by the Method of Convex Projections: Parte2-Applications and Numerical Results*. IEEE TRANSACTIONS ON MEDICAL IMAGING, VOL. MI-1, NO.2, , pp. 95 a 101, OCTOBER (1982).
- [3] Hundal, H. *An Alternating Projection that Does Not Converge in Norm* . Setembro. 2002 (preprint).
- [4] Cegielski, A. *Methods for finding fixed points of nonexpansivo operators in a Hilbert space* . Faculty of Mathematics, Computer Sciences and Ecomometrics University of Zielona Góra. Series of lectures presented at the Institute of Mathematics Technical University Ilmenau, Julho de 2008.
- [5] Biezuner, R. J. *Notas de Aula Análise Funcional*. Notas de aula do curso Análise Funcional do Programa de Pós-Graduação em Matemática, ministrado no primeiro semestre de 2009 na Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), julho (2009).
- [6] Brezis, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Editora: Board, Manson, Paris, 1983.
- [7] Kreyszig, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. University of Windsor. John Wiley e Sons, 1978.
- [8] Ismailov, A., Solodov, M. *Otimização - volume 1 - Condições de Otimalidade, Elementos de Análise Convexa e de Dualidade*. IMPA, Rio de Janeiro. 2005.

- [9] Lima, Ellon. L. *Análise Real: Funções de  $n$  Variáveis - volume 2* . Coleção matemática universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 2009.
- [10] Istratescu, V. I. *Fixed Point Theory An Introduction* . Séries: Mathematics and its applicatins. Editora: D. Reidel Publishing Company, 2001.
- [11] Iusem, Alfredo N., De Pierro, Alvaro R. *Fundamentos Matemáticos da Tomografia Computadorizada: Método de Expansão em Séries* . Séries: Matemática Universitária Número:12, pp., 57-85, dezembro de 1990.
- [12] Barroso, Cleon S. *Análise Funcional: uma introdução*.Universidade Federal do Ceará, EMALCA DA AMAZÔNIA 2009.
- [13] Oliveira, César R. de. *Introdução á análise funcional*. IMPA, Rio de Janeiro. 2010.
- [14] Vermersch, Rômulo Maia. *Espaços de Banach que Admitem uma Norma Uniformemente Convexa Equivalente*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, dezembro de 2009.
- [15] Halperin, I. *The product of projection operators* . Acta Sci. Math., vol. 23, pp. 96-99, 1962.