Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Uma Membrana Elástica com Amortecimento

Vitaliano de Sousa Amaral

Teresina - 2013

Vitaliano de Sousa Amaral

Uma Membrana Elástica com Amortecimento

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Marcondes Rodrigues Clark

Teresina - 2013

A485m Amaral, Vitaliano de Sousa.

Uma Membrana Elástica com Amortecimento / Vitaliano de Sousa Amaral – 2013.

65f.

Dissertação (Mestrado em Matemática)- Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2013.

Orientação: Prof. Dr. Marcondes Rodrigues Clark

1. Equações Diferenciais. 2. Membrana Elástica. 3. Matemática. I. Título.

CDD: 512.516.35

Dedico este trabalho a meu pai Antonio Rodrigues do Amaral, minha mãe Luzia de Sousa Amaral, meus irmãos Everaldo e Joaquim, meus avós materno Maria Ferreira e Vitaliano Castro e todos os outros familiares.
E a meus avós paterno Joaquim e Socorro (In memóriam).

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por está presente em todos os momentos de minha vida e por ter me ajudado a superar muitos momentos difíceis que enfrentei para conseguir chegar pelo menos até a graduação.

Agradeço aos meus pais Antonio Rodruigues do Amaral e Luzia de Sousa Amaral, que sempre me incentivaram em meus estudos, por terem feito com que eu retornasse aos meus estudos depois de alguns anos parado e, por estarem sempre ao meu lado nos momentos difíceis da minha vida. Agradeço a eles pela minha formação moral e pelo apoio durante a realização do meu ensino médio, quando muitas vezes deixei de trabalhar ao lado deles para conseguir fazer minhas provas do ensino médio.

Agradeço aos meus irmãos Everaldo e Joaquim pelo apoio e suporte, sem o qual seria muito difícil eu ter conseguido chegar ao mestrado. Agradeço principalmente ao Everaldo por ter aguentado o tranco no árduo trabalho da roça para que eu conseguisse ir em frente nos meus estudos.

Agradeço aos professores Doutores: Marcondes R. Clark; Haroldo R. Clark e Roger Peres Moura por terem aceito participar da banca examinadora desta dissertação, pelo apoio e pelas valiosas sugestões.

Agradeço aos meus amigos do Mestrado e Graduação que em diversos momentos apoiaram e ajudaram na batalha cotidiana de estudos, provas, trabalhos e seminários. Em especial a Franciane Vieira, Bernardo Cardoso, Mykael Cardoso, Valdir Ferreira, Diego Prudêncio, Renata Batista, Edvalter Sena, Gilson Silva, Israel Evangelista, Rui Marques, Sandoel, Jordan, Kadu, Lucas Viana, Atécio Alves, Jerson Leite, Elizabete Cardoso, Joel Rabelo, Antonio Aguiar(Veludo) e Carlos Adriano. Agradeço também aos amigos(as) Marilene Magalhães, Marilha Vieira, Cristiane Amaral e Fernando Vieira pela boa convivência e pelo apoio durante o mestrado.

Agradeço em especial aos amigos Sandoel Vieira, Rui Marques, Gilson Silva, Carlos Adriano e Elizabete Cardoso pela ótima convivência e amizade verdadeira, também pelo apoio nos momentos mais difíceis do mestrado. Amigos que ficaram marcados em minha vida escolar, amigos que quando mais precisei estiveram ao meu lado e ajudaram a superar as adversidades do curso.

Agradeço ao professor Antonio Cardoso do Amaral(Amaral) que foi o primeiro a incentivar-me a estudar matemática, e que ainda no ensino médio encorajou-me a estudar visando ingresso na Universidade. Um grande incentivador que teve um papel fundamental na minha escolha pela matemática como área de estudo. Agradeço também aos professores Geovane e Narjara Benício pelo grande incentivo e apoio durante o ensino médio.

Agradeço ao Professor e grande amigo Marcondes Rodrigues Clark pelo apoio nos momentos mais difíceis do mestrado e graduação, pelas ótimas conversas, excelente orientação científica e por ter depositado toda confiança na minha pessoa e fazendo assim com que eu acreditasse em mim mesmo para enfrentar essa jornada. Agradeço também ao Professor Roger Moura pelo apoio e pelo grando insentivo nos estudos e por tudo tudo que me ensinou.

Agradeço aos professores que tive na UFPI, tanto na graduação como no mestrado, em especial aos Professores Newton Santos, Roger Moura, João Xavier, Benicio, Mário Gomes, Paulo Alexandre, Sissy Souza, Paulo Sergio, Jurandir, Vicente, Gilvan, Marcos Vinícius, Isaías, Barnabé e Alexandre Marinho.

Agradeço em especial aos Professores Jurandir Lopes e Paulo Sergio pelo apoio durante toda a graduação e mestrado, agradeço pela amizade e pelos ensinamentos, força e coragem que me passaram durante toda essa jornada.

Agradeço à CAPES e ao CNPq pelo auxílio financeiro em forma de bolsa de estudos, que permitiu minha permanência em uma cidade distante da minha família, e que me ajudou na aquisição de livros e materiais didáticos sem os quais meu êxito não seria possível.

"A nossa maior glória não reside no fato de nunca cairmos, mas sim em levantarmo-nos sempre depois de cada queda.".

Confúcio.

Resumo

Neste trabalho estudaremos a existência e unicidade de soluções do problema relacionado com o modelo de Kirchho-Carrier para pequenas deformações de uma membrana

$$u'' + M\big(\|u\|^2\big)Au + F(u) + Au' = 0,$$

quando M é não degenerada, e A, F são operadores. Além disso, obtemos o comportamento assintótica, como $t \to \infty$, de uma solução em um caso concreto.

Abstract

In this work study existence and uniqueness of solutions to the abstract framework related to Kirchhoff-Carrier model for small deformations of a membrane

$$\mathsf{u}'' + \mathsf{M}\big(\|\mathsf{u}\|^2\big)\mathsf{A}\mathsf{u} + \mathsf{F}(\mathsf{u}) + \mathsf{A}\mathsf{u}' = 0,$$

when is degenetated or not and A, F are operators. Furthemore, we obtain the asymptotic behavior, as $\mathsf{t} \to \infty$, of solution in a concrete case.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

1.1 Introdução

Durante os últimos anos muitos matemáticos vem estudando diversos aspectos associados ao seguinte problema misto:

$$\left| \begin{array}{l} u''(t) - M(\| u(t) \|^2)\Delta u(t) = 0 \text{ em } Q = \Omega \times (0,T), \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma = \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0) = u_0, \; u'(0) = u_1 \text{ em } \Omega, \end{array} \right. \tag{1.1}$$

onde $'$ significa derivada temporal, M uma função real, Ω é um conjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com a fronteira $\partial\Omega$ suave e T um número real positivo.

Fisicamente, a equação $(1.1)_1$ descreve pequenas deformações de uma membrana, a qual foi deduzida por Kirchhoff [7]. A equação $(1.1)_1$ fornece uma descrição mais precisa a elasticidades do material do que a equação de ondas clássicas $u_t'' - \triangle u = 0$.

O primeiro resultado sobre existência de soluções a cerca de (1.1) foi obtido por Bernstein [2] no caso unidimensional com M satisfazendo a hipótese não degenerada, $M(\lambda) \geqslant m_0 > 0$.

Neste trabalho, consideremos também esta hipótese, precisamente supõe-se:

$$M \in C^1([0,\infty);\mathbb{R}) \text{ tal que } M(\lambda) \geqslant m_0 > 0, \text{ para todo } \lambda \geqslant 0. \tag{1.2}$$

Dickey [6] também investigou a existência e singularidade da solução para (1.1) quando $n = 1$. Pohozhaev [19] estudou um caso mais geral para o problema, considerando os dados iniciais em uma classe especial. Para mais referências relacionadas com o problema não linear (1.1), os leitores poderão consultar Medeiros ([11], [12]) e referências nele contidas.

Nesta dissertação iremos discutir a existência, unicidade e o comportamento assintótico, de solução para $t \to \infty$, do problema:

$$\left| \begin{array}{l} u''(t) + M(\| u(t) \|^2)Au(t) + F(u(t)) + Au'(t) = 0 \text{ em } H, \\ u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1, \end{array} \right. \tag{1.3}$$

onde H é um espaço de Hilbert real, A e F são operadores. A formulação (1.3), para F e A nulas, pode ser encontrado em Lions [10], que propôs várias perguntas sobre este tipo de equação não linear.

Aqui iremos investigar a existência e unicidade de soluções forte e fraca globais para o problema (1.3) com M sendo não-degenerada conforme (1.2). O caso concreto de (1.3) é:

$$\left| \begin{array}{l} u_{tt}(t) - M(\| u(t) \|^2)\Delta u(t) + g\big(u(t)\big) - \Delta u_t(t) = 0 \text{ em } Q, \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma, \\ u(0) = u_0,\ u_t(0) = u_1 \text{ em } \Omega, \end{array} \right. \tag{1.4}$$

onde g é uma função real $C^1(\mathbb{R})$ satisfazendo as seguintes hipóteses:

$$\left| \begin{array}{l} | g(t) - g(s) | \leqslant C_0(1 + | t |^{p-1} + | s |^{p-1}) \, | t - s |, \quad \forall t, s \in \mathbb{R}, \\ C_0 > 0,\ 1 < p < \dfrac{n}{n-2} \text{ se } n \geqslant 3 \text{ e } p > 1 \text{ se } n = 1 \text{ ou } n = 2, \end{array} \right. \tag{1.5}$$

e existe $C_1 > 0$ tal que $C_1 s g(s) \geqslant G(s) \geqslant 0$, para todo $s \in \mathbb{R}$, onde

$$G(s) = \int_0^s g(t)dt, \tag{1.6}$$

onde-se obtem o decaimento exponencial para a energia do sistema (1.4) definida por

$$E(t) = \frac{1}{2}\left[| u'(t) |^2 + \widehat{M}\big(\| u(t) \|^2 \big) + 2\int_\Omega G(u(x,t))dx \right], \tag{1.7}$$

onde $\widehat{M}(\lambda) = \displaystyle\int_0^\lambda M(s)ds$.

Para um caso particular da função degenerada, $M(\lambda) = \lambda^s$, podemos citar o trabalho de Ono [18], onde o autor estudou a existência de soluções fracas globais e decaimento polinomial de soluções (com $t \to \infty$) do sistema (1.4) com $g(u) = | u |^\alpha$. Além disso, analisamos o comportamento assintótico, quando $t \to \infty$, das soluções fracas associada ao problema concreto (1.4). Precisamente, vamos mostrar que a energia (1.7) tem algumas propriedades de decaimento. É importante salientar que, para o comportamento assintótico, em geral, a propriedade de decaimento de soluções para (1.3) não pode ser esperado para uma função arbitrária M (ver, por exemplo, [17]). No entanto, podemos provar as propriedades de decaimento das soluções para (1.3) com $M(\lambda) = \lambda^s, \ s > 0$. Para alcançar nossos objetivos, organizamos esta dissertação da seguinte maneira. No capítulo 2, será apresentado várias definições e resultados básicos necessários para o perfeito entendimento do capítulo 3. Alguns dos resultados são provados e outros apenas indicamos onde encontrá-los. No capítulo 3, provamos a existência e unicidade de soluções forte e fraca para (1.3) no caso onde M satisfaz (1.2). No capítulo 4 obtemos o decaimento exponencial da energia associada à solução fraca do problema concreto (1.4). Finalmente nos apêndices **A** e **B** veremos essencialmente o Teorema Espectral e sobre o Prolongamento de Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias, respectivamente.

Capítulo 2

Resultados Básicos

Neste capítulo apresentaremos vários resultados básicos e definições necessárias para compreenção do nosso trabalho.

2.1 Preliminares

Definição 1. *A topologia fraca em* E *é a topologia* $\sigma(E, E')$ *gerada pelos funcionais lineares em* E'*, onde* E' *é o dual de* E*, ou seja, é a topologia menos fina em* E *na qual todos os elementos de* E' *permanecem contínuos.*

Definição 2. ***(Convergência Forte)*** *Uma sequência* $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ *pertencente a um espaço normado* E *é dita fortemente convergente para o vetor* u *se, somente se,*

$$\|u_\nu - u\|_E \to 0 \qquad .$$

A convergência forte em E *será representada por* $u_\nu \to u$ *em* E*.*

Definição 3. ***(Convergência Fraca)*** *Seja* E *uma espaço de Banach e* $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ *uma sequência em* E*. Então* (u_ν) *converge fracamente para* u *e denota-se por* $u_\nu \rightharpoonup u$ *se, e somente se,* $\langle \varphi, u_\nu \rangle \to \langle \varphi, u \rangle\ \forall \varphi \in E'$*.*

Definição 4. ***(Convergência Fraca Estrela)*** *Seja* E *um espaço de Banach,* $\varphi \in E'$ *e* $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ *uma sequência em* E'*. Diz-se que* $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ *converge fraco estrela para* u*, e denota-se;* $\varphi_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$ *se, e somente se,* $\langle \varphi_\nu, u \rangle \to \langle \varphi, u \rangle$*,* $\forall u \in E$*.*

Proposição 1. *Seja* E *um espaço de Banach e* (x_n) *uma sequência em* E*. Tem-se os seguintes resultados:*

I) Se $x_n \rightharpoonup x$ *em* $\sigma(E, E')$ *então* $\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$*,* $\forall f \in E'$*;*

II) Se $x_n \to x$ *fortemente então* $x_n \rightharpoonup x$ *fracamente para* $\sigma(E, E')$*;*

III) Se $x_n \rightharpoonup x$ *fracamente para* $\sigma(E, E')$*, então* $\|x_n\|$ *é limitada e* $\|x\| \leqslant \liminf \|x_n\|$*;*

IV) Se $x_n \rightharpoonup x$ *fracamente para* $\sigma(E, E')$ *e se* $f_n \to f$ *fortemente em* E' *(isto é,* $\|f_n - f\|_{E'} \to 0$*), então* $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Demonstração: Ver [3] ∎

Teorema 1. *Seja* E *um espaço de Banach separável e seja* (f_n) *uma sequência limitada em* E'*. Então existe uma subsequência* (f_{n_k}) *que converge na topologia* $\sigma(E', E)$*.*

Demonstração: Ver [3] ∎

Denotamos por $L^1(\Omega)$ ao espaço das funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mensuráveis e integráveis.

Definição 5. *Seja* $p \in \mathbb{R}$ *com* $1 \leqslant p < \infty$*. O espaço* $L^p(\Omega)$ *é definido da seguinte forma:*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\ \textit{com } f \textit{ mensurável e } |f|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

Dado $f \in L^p(\Omega)$*, definimos a norma em* $L^p(\Omega)$ *como:* $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$.

Definição 6. *O espaço* $L^\infty(\Omega)$ *é definido da seguinte forma:*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\ \textit{com } f \textit{ mensurável e existe} c > 0 \textit{ tal que } |f| \leqslant c \textit{ quase sempre em } \Omega\}.$$

Se $f \in L^\infty(\Omega)$*, temos a norma:*

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \{|f(x)| \leqslant c \textit{ quase sempre em } \Omega\} = \sup_{x\in\Omega} \mathrm{ess}|f(x)|.$$

Teorema 2. *(Desigualdade de Hölder) Sejam* Ω *um aberto limitado,* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *e* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$*. Se* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$*, então* $fg \in L^1(\Omega)$ *e* $\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}$.

Demonstração: Ver [3] ∎

Teorema 3. *(Desigualdade de Gronwall) Seja* $C \geqslant 0$ *uma constante real e* $u \geqslant 0$ *uma função integrável em* (s, T) *quase sempre e* $\varphi : (s, T) \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua e não negativa, tal que*

$$\varphi(t) \leqslant C + \int_s^T u(\xi)\varphi(\xi)\, d\xi,\ \forall\, t \in [s, T].$$

Então,

$$\varphi(t) \leqslant Ce^{\int_s^T u(\xi)d\xi},\ \forall\, t \in [s, T].$$

Demonstração: Seja $\psi(t) = C + \displaystyle\int_s^t u(\xi)\varphi(\xi)d\xi$. Então $\varphi(t) \leqslant \psi(t)\ \forall\, t \in [s,T]$.
Daí, diferenciando a última inequação temos,

$$\frac{d\psi}{dt}(t) = u(t)\varphi(t) \leqslant u(t)\psi(t) \Rightarrow u(t)\varphi(t) - u(t)\psi(t) \leqslant 0, \quad \text{q.s. em} \quad (0,T).$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\psi(t)e^{-\int_s^t u(\xi)d\xi}\right) &= \frac{d\psi}{dt}(t)e^{-\int_s^t u(\xi)d\xi} - \psi(t)u(t)e^{-\int_s^t u(\xi)d\xi} \\ &= (u(t)\varphi(t) - u(t)\psi(t))e^{-\int_s^t u(\xi)d\xi} \leqslant 0, \quad \text{q.s.} \quad (s,T).\end{aligned}$$

Logo

$$\text{Logo}\frac{d}{dt}\left(\psi(t)e^{-\int_s^t u(\xi)d\xi}\right) \leqslant 0.$$

Integrando obtemos

$$\psi(t)e^{-\int_s^t u(\xi)d\xi} \leqslant C \text{ ou } \psi(t) \leqslant Ce^{\int_s^t u(\xi)d\xi}.$$

Como $\varphi(t) \leqslant \psi(t),\ \forall\, t \in [s,T],$ então $\varphi(t) \leqslant Ce^{\int_s^t u(\xi)d\xi}\ \forall\, t \in [s,T]$.
Portanto,

$$\varphi(t) \leqslant Ce^{\int_s^t u(\xi)d\xi},\ \forall\, t \in [s,T].$$

■

Para enunciarmos o próximo resultado vamos precisar de algumas definições.

Definição 7. *Sejam* M*,* N *espaços métricos e* E *um conjunto de aplicações* $f : M \to N$*. O conjunto* E *diz-se equicontínuo no ponto* $a \in M$ *quando, para todo* $\epsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que* $d(x,a) < \delta$ *implica* $d(f(x), f(a)) < \epsilon$*, seja qual for* $f \in E$*. Um conjunto* E *de aplicações* $f : M \to N$ *diz-se equicontínuo quando é equicontínuo em todos os pontos de* M*.*

Definição 8. *Dado o espaço de Banach* X *e um número real* $T > 0$*, denotamos por* $L^p(0,T;X)$*,* $1 \leqslant p \leqslant \infty$*, o espaço das funções* $u : (0,T) \to X$ *que são mensuráveis a Lebesgue e tais que a aplicação* $t \to \|u(t)\|_X$ *definida quase sempre em* $(0,T)$*, está em* $L^p(0,T)$*. O espaço* $L^p(0,T;X)$ *é munido da seguinte norma:*

$$|u|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \ \textit{para}\ 0 \leqslant p < \infty,$$

$$|u|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t\in(0,T)} \text{ess}\|u(t)\|_X.$$

Teorema 4. *Sejam* X *e* Y *espaços de Banach tais que* X *é reflexivo,* $X \hookrightarrow Y$ *e* X *denso em* Y*. Se* $u \in L^1(0,T;X)$ *e* $u' \in L^1(0,T;Y)$*, então* $u \in C([0,T];Y)$*.*

Demonstração: Ver [14]. ∎

Teorema 5. ***(Áscoli-Arzelá)*** *Seja* $E \subset C(K, N) = \{f : K \to N;\ f \text{ é contínua}\}$*, onde* K *e* N *são espaços métricos sendo,* K *compacto. A fim de que* E *seja relativamente compacto em* $C(K, N)$*, é necessário e suficiente que:*

I) E *seja equicontínuo;*

II) Para cada $x \in K$*, o conjunto* $E(x) = \{f(x);\ f \in E\}$ *seja relativamente compacto em* N*, isto é, toda sequência de* E *admite uma subsequência que converge forte em* $C(K, N)$*.*

Demonstração: Ver [8]. ∎

Teorema 6. ***(Teorema da representação de Riesz-Fréchet)*** *Seja* H *um espaço de Hilbert com dual* H'*, dada* $\varphi \in H'$ *existe um único* $f \in H$*, tal que* $\varphi(v) = (f\,,\,v)\ \forall v \in H$ *e verifica-se* $\| f \|_H = \| \varphi \|_{H'}$*.*

Demonstração: Ver [1]. ∎

Definição 9. *Sejam* X*,* Y *dois espaços de Banach e suponha* $X \subset Y$*. Diz-se que* X *está imerso continuamente em* Y *se a aplicação inclusão*

$$i : X \to Y,\ i(x) = x,\ \forall x \in X,$$

é contínua.

Isto equivale a dizer que existe $C > 0$ *tal que:*

$$\|x\|_Y \leqslant C\|x\|_X,\ \forall x \in X,$$

onde C *é a constante de imersão. Este fato é simbolizado por* $X \hookrightarrow Y$*. Se* $X \hookrightarrow Y$ *e* X *é denso em* Y*, diz-se que* X *está imerso, contínua e densamente em* Y *com a topologia de* Y*. Se a aplicação inclusão for contínua e compacta, diz-se que* X *está imerso contínuo e compactamente em* Y*. Denota-se:* $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$*.*

Observação 1. *Se a imersão* $V \subset H$ *é contínua, densa e compacta, indentificando* H *com* H'*, temos a inclusão* $V \subset H \subset V'$*. De fato, como* H *é um espaço de Hilbert, tem-se pelo teorema da represenração de Riesz, que* H *pode ser identificado com* H'*.*

Definamos a aplicação $T : H \to V$ *da seguinte forma,*
$\langle Tf, v\rangle_{V'V} = (f, v)\ \forall\, f \in H,\ \forall\, v \in V.$
i) T *é claramente linear*
ii) $\|Tf\|_{V'} = \|(f, v)\|_{V'} \leqslant \|v\|_V|f|_H = C|f|_H\ \forall\, f \in H$. *Logo* T *é limitada e, portanto contínua.*
iii) T *é injetiva, pois* $T = 0 \Rightarrow (f, v) = 0\ \forall\, v \in V$. *Como* V *é denso em* H *temos que* $(f, v) = 0,\ \forall\, v \in H$, *daí obtemos que* $f = 0$. *Portanto,* T *é injetiva.*
iv) $T(H)$ *é denso em* V'. *De fato, seja* $h \in V'' = V$ *tal que* $\langle Tf, h\rangle = 0\ \forall\, f \in H$, *então* $(f, h) = 0\ \forall\, f \in H$, *logo* $h = 0$, *portanto* $\overline{T(H)} = V$.

Consideremos o retângulo $R = \{(t,\ x) \in \mathbb{R}^{n+1};\ |t-t_0| \leqslant a,\ |x-x_0| \leqslant b\},\ a > 0,\ b > 0.$

Teorema 7. ***(Carathéodory)*** *Seja* $f : R \to \mathbb{R}^n$ *que satisfaz as condições de Carathéodory sobre* R, *então existe uma solução* $x(t)$ *de (2) sobre algum intervalo* $|t - t_0| \leqslant \beta,\ \beta > 0$.

Corolário 1. *Seja* D *aberto de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *e* f *satisfazendo as condições de carathéodory sobre* D, *então o problema* (2) *tem solução para qualquer* $(t_0,\ x_0) \in D$.

Para mais detalhes sobre esse teorema consulte o apêndice **B** desta dissertação.

Teorema 8. ***(Aubin-Lions)****: Sejam* X, B, Y *espçaos de Banach,* X *reflexivo e* $X \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow Y$. *Suponhamos que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *seja uma sequência uniformemente limitada em* $L^p(0, T; X)$ *tal que* $(\frac{d}{dt}u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *seja limitada em* $L^p(0, T; Y)$ *para algum* $p > 1$. *Então existe uma subsequência de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *que converge fortemente em* $L^2(0, T; B)$.

Demonstração: Ver [4] ∎

Capítulo 3

Uma Membrana Elástica com Amortecimento

Neste capítulo iremos estabelecer o principal resultado desta dissertação, que é a existência e unicidade de soluções fortes e fracas para o seguinte problema não linear:

$$\left| \begin{array}{l} u''(t) + M(\| u(t) \|^2)Au(t) + F(u(t)) + Au'(t) = 0 \text{ em H}, \\ u(0) = u_0, \ u'(0) = u_1. \end{array} \right. \tag{3.1}$$

Para isto, faremos as seguintes notações e hipóteses:

Consideramos H um espaço de Hilbert real com produto interno e norma denotada por $(.,.)$ e $|\ .\ |$, respectivamente. Vamos considerar $A : D(A) \to H$ um operador linear e auto-adjunto com domínio $D(A)$ denso em H e satisfazendo a condição:

- Existe uma constante $C_0 > 0$ tal que $(Au, u) \geqslant C_0 \mid u \mid^2$ para todo $u \in D(A)$. (3.2)

Aqui usaremos o produto interno $((u, v)) = (A^{\frac{1}{2}}u, A^{\frac{1}{2}}v)$. Vemos que este produto interno faz sentido, pois por (3.2) A é positivo, portanto da Teoria Espectral, existe uma raiz quadrada que também é positiva, (veja apêndice A). Logo faz sentido considerar o espaço de Hilbert $V = D(A)$, equipado com o produto interno $((u, v)) = (A^{\frac{1}{2}}u, A^{\frac{1}{2}}v)$ e norma $\| v \| = \mid A^{\frac{1}{2}}v \mid$. Assumimos que a imersão $V \subset H$ é contínua, densa e compacta. Se identificarmos H com o seu dual H', obtemos as inclusões contínuas e densas $V \subset H \subset V'$.
Vamos considerar uma aplicação contínua $F : V \to H$ satisfazendo as seguintes condições:
- Para cada constante $C > 0$ existe uma constante $\alpha_c > 0$ tal que se $\| u \| \leqslant C$ e $\| v \| \leqslant C$ então

$$\mid F(u) - F(v) \mid \leqslant \alpha_c \| u - v \|, \text{ para todo } u, v \in V, \text{ isto é, } F \text{ é lipschitziana.} \tag{3.3}$$

• Existem constantes $k_0 > 0$ e $\eta > 0$ tal que para todo $t > 0$ tem-se a seguinte desigualdade:

$$\int_0^t (F(u(s)), u'(s))ds \geqslant -k_0 \parallel u(0) \parallel^\eta, \text{ para todo } u \in C^1([0,\infty); V). \tag{3.4}$$

• Para cada $v \in D(A)$ temos

$$F(v) \in V. \tag{3.5}$$

• Para cada $C > 0$ existe $\beta_c > 0$ tal que

$$\text{se} \parallel u \parallel \leqslant C \text{ então } \mid ((F(u), v)) \mid \leqslant \beta_c \mid Au \mid \parallel v \parallel, \text{ para todo } v \in V. \tag{3.6}$$

• Para cada $C > 0$ existe γ_c tal que

$$\text{se } \mid Au \mid \leqslant C \text{ então } \parallel F(u) \parallel \leqslant \gamma_c. \tag{3.7}$$

Aqui e no que segue C denotará várias constantes positivas.

Teorema 9. *Suponhamos* $(u_0, u_1) \in D(A) \times V$ *e que os operadores* A *e* F *satisfazem as condições* $(3.2) - (3.7)$ *e* M *uma função real não degenerada. Então existe uma única função* $u : [0, T] \to H$ *satisfazendo:*

$$u \in C^0([0,T];\, D(A)) \cap C^1([0,T]; V), \tag{3.8}$$

$$(u(t), u'(t), F(u(t))) \in D(A) \times D(A) \times V, \tag{3.9}$$

$$u' + Au \in C^1([0,T]; H) \text{ e } (u' + Au)' = u'' + Au', \tag{3.10}$$

$$u'' \in L^2(0,T; H), \tag{3.11}$$

$$u'' + M(\|u\|^2)Au + F(u) + Au' = 0 \text{ em } L^2(0,T;H), \tag{3.12}$$

$$u(0) = u_0 \text{ e } u'(0) = u_1. \tag{3.13}$$

Para demonstrarmos a existência de soluções usaremos o *Método de Faedo-Galerkin*, seguindo as seguites etapas:

i) Existência de soluções aproximadas;

ii) Estimativas das soluções aproximadas;

iii) Limite das soluções aproximadas;

Além disso, provaremos:

iv) Verificação das condições iniciais;

v) Unicidade de soluções.

3.1 Existência de soluções aproximadas

Das hipóteses sobre o operador A, podemos garantir, via teorema Espectral, a existência de uma seqüência de autovetores $\{w_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ e seus respectivos autovalores $\{\lambda_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ tal que

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_\nu \leqslant \ldots \quad \text{com} \quad \lim_{\nu\to\infty}(\lambda_\nu) = \infty \tag{3.14}$$

e $\{w_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ é um conjunto ortonormal completo em H e ortogonal completo em V.

Para obtensão das soluções aproximadas, vamos utilizar o método de Galerkin, o qual consiste em encontrar $u_m(t)$ soluções aproximadas do problema (3.1) em V_m, onde $V_m = [w_1, \ldots, w_n]$ é o espaço gerado pelos m primeiros vetores de $\{w_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$, a qual é definida por

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} f_{jm}(t)w_j,$$

onde f_{jm} são funções encontradas como soluções do seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\left|\begin{array}{l} (u_m''(t), w) + M(\| u_m(t) \|^2)(Au_m(t), w) + (F(u_m(t)), w) + (Au_m'(t), w) = 0 \ \forall w \in V_m, \\ u_m(0) = u_{0m} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j w_j \to u_0 \text{ fortemente em } D(A), \\ u_m'(0) = u_{1m} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_j w_j \to u_1 \text{ fortemente em } V. \end{array}\right. \tag{3.15}$$

O sistema aproximado (3.15) possui soluções u_m definidas em $[0, t_m)$, essas soluções são obtidas por meio do Teorema de Carathéodory. De fato, temos:

$(u_m''(t), w_j) = \sum_{i=1}^{m} f_{im}''(t)(w_i, w_j)$, $(Au_m(t), w_j) = \sum_{i=1}^{m} f_{im}(t)\lambda_i(w_i, w_j)$, $(Au_m'(t), w_j) = \sum_{i=1}^{m} f_{im}'(t)\lambda_i(w_i, w_j)$, $(u_{0m}, w_j) = \sum_{i=1}^{m} f_{im}(0)(w_i, w_j)$ e $(u_{1m}, w_j) = \sum_{i=1}^{m} f_{im}'(0)(w_i, w_j)$ para $j = 1, \ldots, m$. Daí o sistema (3.15) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\left|\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} f_{im}''(t)(w_i, w_j) + M(\| u_m(t) \|^2) \sum_{i=1}^{m} f_{im}(t)\lambda_i(w_i, w_j) \\ \displaystyle +(F(u_m(t)), w) + \sum_{i=1}^{m} f_{im}'(t)\lambda_i(w_i, w_j) = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} f_{im}(0)(w_i, w_j) \to (u_0, w_j) \text{ fortemente em } D(A), \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} f_{im}'(0)(w_i, w_j) \to (u_1, w_j) \text{ fortemente em } V. \end{array}\right. \tag{3.16}$$

Consideremos as seguintes matrizes:

$$A_{ij} = [(w_i, w_j)]_{m\times m};\ B_{ij} = [\lambda_i(w_i, w_j)];\ C_i(t) = \Big[\big(F\big(\sum_{i=1}^{m} f_{im}(t)w_i\big), w_j\big)\Big]_{m\times 1};$$

$$Y(t) = [f_{1m}(t);\ f_{2m}(t), \cdots, f_{mm}(t)]^t_{m\times 1};\ Y(0) = [f_{1m}(0),\ f_{2m}(0), \cdots, f_{mm}(0)]^t_{m\times 1},$$

$$Y't) = [f'_{1m}(t),\ f'_{2m}(t), \cdots, f'_{mm}(t)]^t_{m\times 1};\ Y''(t) = [f''_{1m}(t),\ f''_{2m}(t), \cdots, f''_{mm}(t)]^t_{m\times 1}$$

e $Y'(0) = [f'_{1m}(0),\ f'_{2m}(0), \cdots, f'_{mm}(0)]^t_{m\times 1}$ e substituindo em (3.16) obtemos

$$\left|\begin{array}{l} A_{ij}Y''(t) + M(\| u_m(t) \|^2)B_{ij}Y(t) + C_i(t) + B_{ij}Y'(t) = 0 \\ Y_{0m} = A_{ij}Y(0) \\ Y_{1m} = A_{ij}Y'(0). \end{array}\right. \tag{3.17}$$

Afirmamos que a matriz A_{ij} é invertível.

De fato, consideramos $a_m = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j w_j$ e $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)^t$ tal que $A_{ij}\alpha = 0$, então $\sum_{i=1}^{m}(w_i, w_j)\alpha_i = 0 \Leftrightarrow \big(\sum_{i=1}^{m} w_i\alpha_i, w_j\big) = 0$. Multiplicando a última equação por α_j e somando em j, $j = 1, \cdots, m$ temos; $\big(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i w_i, \sum_{j=1}^{m}\alpha_j w_j\big) = 0 \Leftrightarrow (a_m, a_m) = 0$ $\Leftrightarrow |a_m|^2_{L^2} = 0 \Leftrightarrow a_m = 0$ em V_m q.s. Logo $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i w_i = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0$, pois os w_i são L.I para todo $i = 1, \cdots, m$,. Assim, temos que $A_{ij}\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \Leftrightarrow \mathsf{Ker}(A_{ij}) = \{\overrightarrow{0}\}$. Portanto a matriz A_{ij} é invertível.

Denotando $(A_{ij}) = A$, $(B_{ij}) = B$, $(C_i(t)) = C(t)$ obtemos, após multiplicar (3.17) por A^{-1}, que:

$$\left|\begin{array}{l} Y''(t) + \big(A^{-1}B\big)Y'(t) + \big(A^{-1}BM(\| u_m(t) \|^2)\big)Y(t) + A^{-1}C(t) = 0 \\ Y_{0m} = AY(0) \\ Y_{1m} = AY'(0). \end{array}\right. \tag{3.18}$$

Tomando $Y'(t) = Z(t)$, temos $Y''(t) = Z'(t)$. E podemos escrever (3.18) como:

$$\left|\begin{array}{l} Z' = G\big(t, Z(t)\big) \\ Z(0) = Y'(0). \end{array}\right. \tag{3.19}$$

onde $G\big(t, Z(t)\big) = -\big(A^{-1}BM(\|u_n(t)\|^2)Y(t) - A^{-1}C(t) - (A^{-1}B)Y'(t)$.

Verificaremos agora que $G(t, Z(t))$ está nas condições de Carathéodory. De fato, seja

$$R = \{(t, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^m;\ 0 \leqslant t \leqslant a,\ |z - z_0| \leqslant b,\ \text{com } a, b > 0\}.$$

1) $G(t, Z(t))$ é mensurável em t para cada z fixo.

De fato, como $Y(t) = [f_{1m}, \cdots, f_{mm}]^t_{m\times m}$, $C(t) = \big[\big(F\big(\sum_{i=1}^{m} f_{im}(t)w_i\big), w_j\big)\big]_{m\times 1}$ e w_i não dependente de t e f_{im} são mensuráveis, pois f_{im} são diferenciáveis e F é contínua, daí temos que $G(t, Z(t))$ é mensurável.

2) Da linearidade de $G(t, Z)$, para cada t fixado, temos a continuidade de $G(t, Z)$.

3) Como $G(t, Z)$ é uniformimente contínua em R temos que G é limitada em cada compacto onde G está definida, ou seja, existe uma função constante que limita $F(t, Z)$ em cada compacto onde F está definida.

Daí temos que $G(t, Z)$ satisfaz as condições do Teorema de Carathéodory. Portanto, pelo Teorema de Carathéodory, para cada m o sistema (3.19) possui uma solução no intervalo $[0, t_m),\ t_m < T$, e consequentimente o sistema (3.15) tem solução definida sobre um determinado intervalo $[0, t_m)$, para $t_m < T$.

Esta solução pode ser estendida para o intervalo inteiro $[0, T]$ usando a primeira estimativa a ser provado no seguinte passo.

3.2 Estimativas a Priori das soluções aproximadas

3.2.1 I - Estimativa a priori

Tomando $w = u'_m(t)$ em $(3.15)_1$, temos

$$\left|\begin{array}{l}(u''_m(t), u'_m(t)) + M(\| u_m(t) \|^2)(Au_m(t), u'_m(t)) \\ +(F(u_m(t)), u'_m(t)) + (Au'_m(t), u'(t)) = 0 \\ u_m(0) = u_{0m} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j w_j \to u_0 \text{ fortemente em } D(A), \\ u'_m(0) = u_{1m} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_j w_j \to u_1 \text{ fortemente em } V.\end{array}\right. \tag{3.20}$$

daí segue-se que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\big(u'_m(t), u'_m(t)\big) + \int_0^{\|u_m(t)\|^2} M(s)ds\right] + \|u'_m(t)\|^2 = -\big(F(u_m(t)), u'_m(t)\big)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\big(u'_m(t), u'_m(t)\big) + \widehat{M}\big(\|u_m(t)\|^2\big)\right] + \|u'_m(t)\|^2 = -\big(F(u_m(t)), u'_m(t)\big),$$

pois temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(u'_m(t), u'_m(t)\big) = \big(u''_m(t), u'_m(t)\big), \text{ e sendo } \widehat{M}(\lambda) = \int_0^\lambda M(s)ds \text{ obtemos,}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\widehat{M}\big(\|u_m(t)\|^2\big) = M\big(\|u_m(t)\|^2\big)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 = M\big(\|u_m(t)\|^2\big)\big(\big(u_m(t), u'_m(t)\big)\big)$$
$$= M\big(\|u_m(t)\|^2\big)\big(Au_m(t), u'(t)\big) \text{ e } \|u'_m(t)\|^2 = \big(u'_m(t), u'_m(t)\big) = \big(Au'_m(t), u'_m(t)\big).$$

Assim temos,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[|u'_n(t)|^2 + \widehat{M}\Big(\|u_m(t)\|^2\Big)\right] + \|u'_m(t)\|^2 = -(F(u_m(t)), u'_m(t)), \tag{3.21}$$

onde $\widehat{M}(\lambda) = \int_0^\lambda M(s)ds$.

Integrando (3.21) de 0 a $t \leqslant t_m$ e usando (3.4) obtemos

$$\frac{1}{2}|u'_m(t)|^2 - \frac{1}{2}|u'_m(0)|^2 + \frac{1}{2}\widehat{M}\big(\|u(t)\|^2\big) - \frac{1}{2}\widehat{M}\big(\|u(0)\|^2\big) + \int_0^t \|u'_m(s)\|^2 ds$$
$$= -\int_0^t \big(F(u_m(s), u'_m(s))\big)ds$$

ou

$$|u'_m(t)|^2 + \int_0^{\|u(t)\|^2} M(s)ds + 2\int_0^t \|u'_m(s)\|^2 ds$$
$$= |u'_m(0)|^2 + \widehat{M}\big(\|u(0)\|^2\big) - 2\int_0^t \big(F(u_m(s)), u'_m(s)\big)ds$$
$$= |u'_{1m}|^2 + \widehat{M}\big(\|u_{0m})\|^2\big) - 2\int_0^t \big(F(u_m(s)), u'_m(s))\big)ds.$$

Como $\int_0^1 F\big(u(s), u'(s)\big)ds \geqslant -k_0\|u(0)\|^\mu$ temos

$$-2\int_0^1 F\big(u_m(s), u'_m(s)\big)ds \leqslant 2k_0\|u_m(0)\|^\mu = 2k_0\|u_{0m}\|^\mu.$$

Logo obtemos:

$$|u'_m(t)|^2 + \int_0^{\|u_m(t)\|^2} M(s)ds + 2\int_0^t \|u'_m(s)\|^2 ds \leqslant |u_{1m}|^2 + \widehat{M}\big(\|u_{0m}\|^2\big) + 2k_0\|u_{0m}\|^\mu.$$

Como $M(\lambda) > 0\ \forall\, \lambda \geqslant 0$, segue-se que $\int_0^{\|u_m(t)\|^2} M(s)ds \geqslant 0$, e das convergências: $u_{0m} \to u_0,\ u_{1m} \to u_1$ forte, obtemos: $|u_{1m}|^2 + \widehat{M}\big(\|u_{0m}\|^2\big) + 2k_0\|u_{0m}\|^\mu \leqslant C$.

Logo temos que

$$|u'_m(t)|^2 + 2\int_0^t \|u'_m(s)\|^2 ds \leqslant |u'_m(t)|^2 + \int_0^{\|u_m(t)\|^2} M(s)ds + 2\int_0^t \|u'_m(s)\|^2 ds \leqslant C,$$

ou seja

$$|u_m'(t)|^2 + \int_0^t \|u_m'(s)\|^2 ds \leqslant C, \tag{3.22}$$

onde $C > 0$, independente de m e t.

Como

$$\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2 = 2((u_m'(t), u_m(t)))$$

obtemos após integrar de 0 a $t \leqslant t_m$ que:

$$\|u_m(t)\|^2 - \|u_{0m}\|^2 = \int_0^t 2\big(\big(u_m'(s),\, u_m(s)\big)\big)ds \leqslant \int_0^t \big(\|u_m'(s)\|^2 + \|u_m(s)\|^2\big)ds$$

$$\|u_m(t)\|^2 \leqslant \|u_{0m}\|^2 + \int_0^t \big(\|u_m(s)\|^2 + \|u_m'(s)\|^2\big)ds. \tag{3.23}$$

De (3.22) temos que;

$$\int_0^t \|u_m'(s)\|^2 ds \leqslant C,$$

logo de (3.23) e da convergência $u_{0m} \to u_0$ em $V = D(A)$ temos que

$$\|u_m(t)\|^2 \leqslant C + \int_0^t \|u_m(s)\|^2 ds.$$

Logo pela desigualdade de Gronwall, podemos deduzir que existe uma constante $C > 0$, independente de m e t, tal que

$$|u_m'(t)|^2 \leqslant C \text{ e } \|u_m(t)\|^2 \leqslant C \;\; \forall\, t \in [0, T], \tag{3.24}$$

Portanto pelo corolário do Teorema de Carathéodory $u_m(t)$ pode ser prolongada para todo $t \in [0, T]$ e para qualquer $T > 0$.

3.2.2 II - Estimativa a priori

Fazendo $w = Au_m(t)$ em $(3.15)_1$ obtemos

$$\big(u_m''(t),\, Au_m(t)\big) + M\big(\|u_m(t)\|^2\big)\big(Au_m(t),\, Au_m(t)\big)$$

$$+\big(F(u_m(t)),\, Au_m(t)\big) + \big(Au_m'(t),\, Au_m(t)\big) = 0, \text{ ou}$$

$$\big(u_m''(t),\, Au_m(t)\big) + M\big(\|u_m(t)\|^2\big)|Au_m(t)|^2 + \big(F(u_m(t)),\, Au_m(t)\big)$$

$$+\big(Au_m'(t),\, Au_m(t)\big) = 0.$$

Note que

$$\frac{d}{dt}\big(u'_m(t),\, Au_m(t)\big) = \big(u''_m(t),\, Au_m(t)\big) + \big(u'_m(t),\, Au'_m(t)\big)$$

e $\big(u'_m(t),\, Au'_m(t)\big) = \big(A^{\frac{1}{2}}u'_m(t),\, A^{\frac{1}{2}}u'_m(t)\big) = \|u'(t)\|^2$, temos que

$$\big(u''_m(t),\, Au_m(t)\big) = \frac{d}{dt}\big(u'_m(t),\, Au_m(t)\big) - \|u'(t)\|^2.$$

Logo temos

$$\frac{d}{dt}(u'_m(t), Au_m(t)) - \|u'_m(t)\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|Au_m(t)|^2 + M\Big(\|u_m(t)\|^2\Big)|Au_m(t)|^2$$

$$+(F(u_m(t)), Au_m(t)) = 0.$$

Integrando a equação acima de 0 a $t \leqslant T$ e usando (3.5), obtemos

$$\big(u'_m(t),\, Au_m(t)\big) - \big(u'_m(0),\, Au_m(0)\big) - \int_0^t \|u'(s)\|^2 ds + \frac{1}{2}|Au_m(t)|^2 - \frac{1}{2}|Au_m(0)|^2$$

$$+\int_0^t M\big(\|u_m(s)\|^2\big)|Au_m(s)|^2 ds + \int_0^t \big(F(u_m(s)),\, Au_m(s)\big) ds = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}|Au_m(t)|^2 + \int_0^t M\big(\|u_m(s)\|^2\big)|Au_m(s)|^2 ds \leqslant |\big(u'_m(t),\, Au_m(t)\big)| + |\big(u_{1m},\, Au_{0m}\big)|$$

$$+\frac{1}{2}|Au_{0m}|^2 + \int_0^t \|u'(s)\|^2 ds + \left|\int_0^t \big(F(u_m(s)),\, Au_m(s)\big) ds\right|,$$

Como $F(v) \in V$ temos:

$$|\big((F(u_m(t)),\, Au_m(t))\big)| = |\big((A^{\frac{1}{2}}F(u_m(t)),\, A^{\frac{1}{2}}u_m(t))\big)| = |\big((F(u_m(t)),\, u_m(t))\big)|.$$

Assim obtemos:

$$\frac{1}{2}|Au_m(t)|^2 + \int_0^t M\Big(\|u_m(s)\|^2\Big)|Au_m(s)|^2 ds \leqslant |(Au_{om}, u_{1m})| + \frac{1}{2}|Au_{0m}|^2$$

$$+|(Au_m(t), u'_m(t))| + \int_0^t \|u'_m(s)\|^2 ds + \int_0^t |((F(u_m(s)), u_m(s)))| ds. \tag{3.25}$$

Da hipótese (3.6) e de (3.24) temos

$$|\big((F(u_m(s)),\, u_m(s))\big)| \leqslant \beta_c |Au_m(s)| \|u_m(s)\| = \beta_c |Au_m(s)|^2.$$

Logo de (3.25) temos

$$|Au_m(t)|^2 + 2\int_0^t M\Big(\|u_m(s)\|^2\Big)|Au_m(s)|^2 ds \leqslant 2|Au_{0m}|\,|u_{1m}| + |Au_{0m}|^2$$

$$+\frac{1}{2}|Au_m(t)|^2 + |u'_m(t)|^2 + 2\int_0^t \|u'_m(s)\|^2 ds + 2\beta_c \int_0^t |Au_m(s)|^2 ds. \tag{3.26}$$

Como $u_{0m} \to u_0$ forte em V, $u_{1m} \to u_1$ forte em V, $\|u_m(t)\|^2 \leqslant C$:

$$2|Au_{0m}|\,|u_{1m}| + |Au_{0m}|^2 \leqslant C \text{ e } \frac{1}{2}|Au_m(t)|^2 \leqslant C.$$

Assim, de (3.26) obtemos, usando (3.22) que:

$$|Au_m(t)|^2 + 4\int_0^t M\Big(\|u_m(s)\|^2\Big)|Au_m(s)|^2 ds \leqslant C + 4\beta_c \int_0^t |Au_m(s)|^2 ds.$$

Portanto, aplicando a desigualdade de Gronwall na estimativa acima, segue-se que

$$|Au_m(t)| \leqslant C, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}, \text{ para todo } t \in [0,T]. \tag{3.27}$$

3.2.3 III - Estimativa a priori

Tomando $w = Au_m'(t)$, em $(3.15)_1$ obtemos

$$\big((u_m''(t),\, Au_m'(t))\big) + M\big(\|u_m(t)\|^2\big)\big(Au_m(t),\, Au_m'(t)\big) + \big(F(u_m(t)),\, Au_m'(t)\big)$$
$$+\big(Au_m'(t),\, Au_m'(t)\big) = 0.$$

Como $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m'(t)\|^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big((A^{\frac{1}{2}}u_m'(t),\, A^{\frac{1}{2}}u_m'(t))\big) = \big((A^{\frac{1}{2}}u_m''(t),\, A^{\frac{1}{2}}u_m'(t))\big)$
$$= \big((u_m''(t),\, Au_m'(t))\big).$$

Então,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m'(t)\|^2 + M(\|u_m(t)\|^2)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|Au_m(t)|^2$$
$$+(F(u_m(t)), Au_m'(t)) + |Au_m'(t)|^2 = 0. \tag{3.28}$$

Ou $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m'(t)\|^2 + M(\|u_m(t)\|^2)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|Au_m(t)|^2 + \big(F(u_m(t)),\, Au_m'(t)\big) + |Au_m'(t)|^2$

$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(M(\|u_m(t)\|^2)\big)|Au_m(t)|^2 = \frac{1}{2}M'\big(\|u_m(t)\|^2\big)\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^2|Au_m(t)|^2$$
$$= M'\big(\|u_m(t)\|^2\big)\big((u_m'(t),\, u_m(t))\big)|Au_m(t)|^2,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big[\|u_m'(t)\|^2 + M(\|u_m(t)\|^2)|Au_m(t)|^2\Big] + |Au_m'(t)|^2$$
$$= M'(\|u_m(t)\|^2)|Au_m(t)|^2((u_m(t), u_m'(t))) - (F(u_m(t)), Au_m'(t)).$$

Como $M \in C^1\big([0,\,\infty);\,\mathbb{R}\big)$ e $\|u_m(t)\|^2 \leqslant C$ temos que

$$|M'(\|u_m(t)\|^2)| \leqslant C, \text{ para todo } m \in \mathbb{N} \text{ e para todo } t \in [0,T]. \tag{3.29}$$

Sabemos que: se $v \in D(A)$ então $F(v) \in V$, e se $\|u\| \leqslant C$ então $|\big((F(u), v)\big) \leqslant \beta_c |Au| \|v\|$ $\forall v \in V$. Logo temos:

$$|\big(Fu_m(t),\ Au'_m(t)\big)| \leqslant \beta_c |Au_m(t)| \|Au'_m(t)\| = \beta_c |Au_m(t)| \|u'_m(t)\|$$

$$\leqslant \frac{\beta_c}{2}|Au_m(t)|^2 + \frac{\beta_c}{2}\|u'_m(t)\|^2, \text{ ou seja,}$$

$$|(F(u_m(t)), Au'_m(t))| \leqslant \frac{\beta_c}{2}|Au_m(t)|^2 + \frac{\beta_c}{2}\|u'_m(t)\|^2. \tag{3.30}$$

Substituindo (3.27), (3.29) e (3.30) em (3.28) obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|u'_m(t)\|^2 + M(\|u_m(t)\|^2)|Au_m(t)|^2\right] + |Au'_m(t)|^2 \leqslant C\|u_m(t)\|\,\|u'_m(t)\|$$

$$+\frac{\beta_c}{2}|Au_m(t)|^2 + \frac{\beta_c}{2}\|u'_m(t)\|^2. \tag{3.31}$$

Integrando (3.31) de 0 a $t \leqslant T$, obtemos

$$\frac{1}{2}\left[\|u'_m(t)\|^2 + M\big(\|u_m(t)\|^2\big)|Au_m(t)|^2\right] - \frac{1}{2}\left[\|u'_m(0)\|^2 + M\big(\|u_m(0)\|^2\big)|Au_m(0)|^2\right]$$

$$+\int_0^t |Au'_m(s)|^2 ds \leqslant C\int_0^t \|u_m(s)\|\|u'_m(s)\|^2 ds + \frac{\beta_c}{2}\int_0^t |Au_m(s)|^2 ds + \frac{\beta_c}{2}\int_0^t \|u'_m(s)\|^2 ds.$$

Daí,

$$\frac{1}{2}\left[\|u'_m(t)\|^2 + M(\|u_m(t)\|^2)|Au_m(t)|^2\right] + \int_0^t |Au'_m(s)|^2 ds \leqslant \frac{1}{2}\|u_{1m}\|^2$$

$$+\frac{1}{2}M(\|u_{0m}\|^2)|Au_{0m}|^2 + \frac{\beta_c}{2}\int_0^t |Au_m(s)|^2 ds + C\int_0^t \|u_m(s)\|\|u'_m(s)\| ds + \frac{\beta_c}{2}\int_0^t \|u'_m(s)\| ds$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\|u_{1m}\|^2 + \frac{1}{2}M(\|u_{0m}\|^2)|Au_{0m}|^2 + C\int_0^t \|u_m(s)\|^2 ds + C\int_0^t \|u'_m(s)\|^2 ds + \frac{\beta_c}{2}\int_0^t |Au_m(s)|^2$$

$$+C\int_0^t \|u_m(s)\|^2 ds + C\int_0^t \|u'_m(s)\|^2 ds + \frac{\beta_c}{2}\int_0^t |Au_m(s)|^2 ds + \frac{\beta_c}{2}\int_0^t \|u'_m(s)\|^2 ds.$$

Daí obtemos,

$$\|u'_m(t)\|^2 + M(\|u_m(t)\|^2)|Au_m(t)|^2 + 2\int_0^t |Au'_m(s)|^2 ds \leqslant \|u_{1m}\| + M(\|u_{0m}\|^2)|Au_{0m}|^2$$

$$+\beta_c\int_0^t |Au_m(s)|^2 ds + C\int_0^t \|u_m(s)\|^2 ds + C\int_0^t \|u'_m(s)\|^2 ds. \tag{3.32}$$

Das convergências $u_{0m} \to u_0,\ u_{1m} \to u_1$ obtemos o seguinte: $\|u_{0m}\| \leqslant C,\ \|u_{1m}\| \leqslant C,$ $\|u_m(t)\|^2 \leqslant C, |u'_m(t)|^2 + \int_0^t \|u'_m(s)\|^2 ds \leqslant C$ e $|Au_m(t)| \leqslant C$.

Daí segue-se que

$$\|u'_m(t)\|^2 + \int_0^t |Au'_m(s)|^2 ds \leqslant K + \frac{\beta_c}{2}C + C\int_0^t \|u_m(s)\|^2 ds + C\int_0^t \|u'_m(s)\|^2 ds$$

$$+\frac{\beta_c}{2}\int_0^t |Au_m(s)|^2 ds.$$

Daí temos que:

$$\|u'_m(t)\|^2 + \int_0^t |Au'_m(s)|^2 ds \leqslant \overline{C} \tag{3.33}$$

onde $\overline{C} = C(T) > 0$ é uma constante independente de m.

3.2.4 IV - Estimativa a priori

Tomando $w = u''_m(t)$ em $(3.15)_1$ obtemos

$$\big(u''_m(t), u''_m(t)\big) + M\big(\|u_m(t)\|^2\big)\big(Au_m(t), u''_m(t)\big) + \big(F(u_m(t)), u''_m(t)\big) + \big(Au'_m(t), u''_m(t)\big) = 0.$$

Daí,

$$|u''_m(t)|^2 = -M\big(\|u_m(t)\|^2\big)\big(Au_m(t), u''_m(t)\big) - \big(F(u_m(t)), u''_m(t)\big) - \big(Au'_m(t), u''_m(t)\big).$$

Daí $|u''_m(t)|^2 \leqslant M\big(\|u_m(t)\|^2\big)\big(Au_m(t), u''_m(t)\big) + \big(F(u_m(t)), u''_m(t)\big) + \big(Au'_m(t), u''_m(t)\big)$

ou ainda

$|u''_m(t)|^2 \leqslant M\big(\|u_m(t)\|^2\big)|Au_m(t)|\,|u''_m(t)| + |F(u_m(t))|\,|u''_m(t)| + |Au'_m(t)|\,|u''_m(t)|$.

Como $M \in C^1([0,\infty);\mathbb{R})$, e vimos que $\|u'_m(t)\| \leqslant C$, temos que $M\big(\|u_m(t)\|^2\big) \leqslant C$, assim temos $|u''_m(t)| \leqslant C|Au_m(t)| + |F(u_M(t))| + |Au'_m(t)|$. Temos que $|Au_m(t)| \leqslant C$ e se $|Au| \leqslant C$ então $\|F(u)\| \leqslant \gamma_c$, daí tém-se, $|Au_m(t)| + \|F(u_m(t))\| \leqslant C$ $\Rightarrow |u''_m(t)| \leqslant C|Au_m(t)| + |F(u_m(t))| + |Au'_m(t)|$, daí podemos deduzir que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|u''_m(t)| \leqslant C + |Au'_m(t)| \text{ ou } |u''_m(t)|^2 \leqslant 2(C^2 + |Au'_m(t)|^2). \tag{3.34}$$

Integrando (3.34) de 0 a $t \leqslant T$, temos

$$\int_0^t |u''_m(s)|^2 ds \leqslant 2\int_0^t (C^2 + |Au'_m(s)|^2) ds \text{ de (3.33) temos } \int_0^t |Au'_m(s)|^2 \leqslant C. \text{ Assim,}$$

$$\int_0^t |u''_m(s)|^2 ds \leqslant C(T), \text{ onde } C(T) > 0 \text{ independe de } m. \tag{3.35}$$

3.2.5 V - Estimativa a priori

Finalmente de $(3.15)_1$ obtemos

$$(u''_m(t) + Au'_m(t), w) + M(\|u_m(t)\|^2)(Au_m(t), w) + (F(u_m(t)), w) = 0$$

e tomando $w = u''_m(t) + Au'_m(t)$, segue-se que

$$\big(u''_m(t) + Au'_m(t),\, u''_m(t) + Au'_m(t)\big) + M\big(\|u_m(t)\|^2\big(Au_m(t),\, u''_m(t) + Au'_m(t)\big)\big)$$

$$+\big(F(u_m(t)),\, u''_m(t) + Au'_m(t)\big) = 0, \text{ daí, } |u''_m(t) + Au'_m(t)|^2$$

$$+M(\|u_m(t)\|^2)(Au_m(t), u''_m(t) + Au'_m(t)) + (F(u_m(t)), u''_m(t) + Au'_m(t)) = 0.$$

Daí temos que

$$|u''_m(t) + Au'_m(t)|^2 \leqslant \big(|u''_m(t) + Au'_m(t)| + M(\|u_m(t)\|^2|Au_m(t))\big)|\,|u''_m(t) + Au'_m(t)|$$

$$+|F(u_m(t))|\,|u''_m(t) + Au'_m(t)|,$$

$$\text{ou seja, } |u''_m(t) + Au'_m(t)|^2 \leqslant C|u''_m(t) + Au'_m(t)|$$

$$+|F(u_m(t))|\,|u''_m(t) + Au'_m(t)| \Rightarrow |u''_m(t) + Au'_m(t)| \leqslant C|Au_m(t)| + |F(u_m(t))|.$$

De (3.7) e de (3.27) obtemos que:

$$|u''_m(t) + Au'_m(t)| \leqslant C, \tag{3.36}$$

com $C > 0$ independente de m e t.

3.3 Passagem ao limite

Das estimativas (3.27), (3.33), (3.35) e (3.36), temos que:

$$(u_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; D(A)), \tag{3.37}$$

$$(u'_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; V), \tag{3.38}$$

$$(u''_m) \text{ é limitada em } L^2(0, T; H), \tag{3.39}$$

$$(Au'_m) \text{ é limitada em } L^2(0, T; H), \tag{3.40}$$

$$(u''_m + Au'_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H). \tag{3.41}$$

Das limitações (3.37)-(3.41) e pela desigualdade do valor médio obtemos, para $t,\ s \in [0, T]$,

$$|u_m(t) - u_m(s)| \leqslant C|t - s|, \text{ para todo } m \in \mathbb{N};$$

$$\|u_m(t) - u_m(s)\| \leqslant C|t - s|, \text{ para todo } m \in \mathbb{N};$$

$$\text{e } |(u'_m(t) + Au_m(t)) - (u'_m(s) + Au_m(s))| \leqslant C|t - s|, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Assim, usando o Teorema de Arzelá-Ascoli e o Teorema 4, obtemos uma subsequência (u_k) de (u_m) e $u \in C([0,T]; V) \cap L^\infty(0,T; D(A))$ tal que

$$u_k \to u \text{ fortemente em } C^0([0,T]; V), \tag{3.42}$$

$$u'_k + Au_k \to u' + Au \text{ fortemente em } C^0([0,T]; H). \tag{3.43}$$

Do Teorema 1 e da estimativa (3.37) temos que existe uma subsequência (u_k) de (u_m) e $u \in L^\infty(0,T; D(A))$ tal que

$$u_k \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty(0,T; D(A)). \tag{3.44}$$

Além disso, como $\|u_k\| \leqslant C$ e $\|u\| \leqslant C$ seque de (3.3) que $|F(u_k) - F(u)| \leqslant \alpha_c \|u_k - u\|$ onde α_c é uma constante positiva. Daí e de (3.42), temos que

$$F(u_k) \to F(u) \text{ fortemente em } C^0([0,T]; H). \tag{3.45}$$

Também de (3.39)-(3.41), (3.42) e usando o fato que $M \in C^1([0,\infty); \mathbb{R})$, temos que

$$u'_k \to u' \text{ fracamente em } L^2(0,T; D(A)), \tag{3.46}$$

$$Au'_k \to Au' \text{ fracamente em } L^2([0,T]; H), \tag{3.47}$$

$$u''_m + Au'_m \to u'' + Au' \text{ fraco-}\star \text{ em } L^\infty([0,T]; D(A)), \tag{3.48}$$

$$M(\|u_k(t)\|^2) \to M(\|u(t)\|^2) \text{ uniformemente am } [0,T]. \tag{3.49}$$

Precisamos obter a seguinte convergência:

$$Au_k \to Au \text{ fortemente em } C^0([0,T]; H). \tag{3.50}$$

Para isto, considere a função

$$G_{jk}(t) = \frac{|f'_{jk}(t)|^2}{\mu_k(t)} + \lambda_j |f_j(t)|^2; \;\; j = 1, ..., k$$

onde $\mu_k(t) = M\big(\|u_k(t)\|^2\big)$. Temos, derivando $G_{jk}(t)$ em t,

$$G'_{jk}(t) = \frac{2f'_{jk}(t)f''_{jk}(t)\mu_k(t) + |f'_{jk}(t)|^2\mu'_k(t)}{\mu_k^2(t)} + 2\lambda_j f_{jk}(t)f'_{jk}(t).$$

Fazendo $w = w_j$ na equação aproximada $(3.15)_1$ obtemos:

$$f''_{jk}(t) + \mu_k(t)\lambda_j f_{jk}(t) + F\big(u_k(t), w_j\big) + \lambda_j f'_{jk}(t) = 0,$$

que, resolvendo para $f''_{jk}(t)$ e substituindo na expressão de $G'_{jk}(t)$ acima, obtemos:

$$G'_{jk}(t) = \frac{-|f'_j(t)|^2\mu_k}{\mu_k^2(t)} + 2\frac{f'_{jk}(t)}{\mu_k(t)}\Big[-\lambda_j f'_{jk}(t) - \big(F(u_k(t)), w_j\big)\Big]. \tag{3.51}$$

Usando (1.2), (3.14), (3.24), (3.25) e (3.28) nós obtemos de (3.51) que existe uma constante $C > 0$ tal que:

$$G'_{jk}(t) \leqslant CG_{jk}(t) + \frac{1}{w}\Big|\big(F(u_k(t)), w_j\big)\Big|.$$

integrando de 0 a T, e usando (3.7) e a desiguladade de Growall obtemos:

$$\lambda_j\big|f'_{jk}(t)\big|^2 + \lambda_j^2\big|f_{jk}(t)\big|^2 \leqslant C\{\lambda_j|b_j|^2 + \lambda_j^2|a_j|^2 + \lambda_j\int_0^T \Big|\big(F(u_k(t)), w_j\big)\Big|^2 dt. \tag{3.52}$$

Denotando-se o lado direito de (3.52) por S_{jk}, temos usando (3.46) que:

$$\lim_{k\to\infty} S_{jk} = C\Big\{\lambda_j|b_j|^2 + \lambda_j^2|a_j|^2 + \lambda_j\int_0^T \big(F(u(t)), w_j\big)\Big\} = S_j. \tag{3.53}$$

Usando (3.43), (3.52) e (3.53), obtemos:

$$\lambda_j^2\Big|\big(u(t), w_j\big)\Big|^2 \leqslant S_j, \quad \forall\, t \in [0, T], \ \forall\, j. \tag{3.54}$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue obtemos:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^T \Big|\big(F(u(t)), w_j\big)\Big|^2\lambda_j\, dt = \int_0^T \|F(u(t))\|^2 dt.$$

Consequentemente, desde que $(u_0, u_1) \in D(A) \times V$, obtemos por (3.54) e pelo Teorema Espectral (Vê Apêndice-A):

$$|Au(t)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^2\Big|\big(u(t), w_j\big)\Big|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} S_j < \infty, \ \forall\, t \in [0, T]. \tag{3.55}$$

Além disso temos:

$$\big|Au_k(t) - Au(t)\big|^2 = \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^2\big|f_{jk}(t) - (u(t), w_j)\big|^2 + \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^2\big|(u(t), w_j)\big|.$$

Daí, de (3.43) e (3.55) obtemos a convergência

$$Au_k \to Au \text{ fortemente em } C^0([0,T];H).$$

Consequentemente, por (3.45), (3.49) e (3.50), fazendo $k \to \infty$ em $(3.15)_1$ obtemos

$$u_k'' + Au_k' \to -M(\|u\|^2)Au - F(u) \text{ fortemente em } C^0([0,T];H).$$

Combinando a última convergência com (3.48) obtemos

$$u'' + M(\|u\|^2)Au + F(u) + Au' = 0 \text{ em } L^2(0,T;H),$$

o que prova (3.12).

3.4 Verificação dos dados iniciais

De (3.42), (3.46) e (3.48) tem-se que $u \in C^0([0,T];V)$ e $u' \in C^0([0,T];H)$, conforme Teorema 4. Logo faz sebtido calcular $u(0)$ e $u'(0)$.

I) $u(0) = u_0$.

Como $u_k \overset{*}{\rightharpoonup} u$ em $L^\infty\big(0,T;D(A)\big)$, isto significa que:

$$\int_0^T \big(u_k(t),\varphi(s)\big)\psi(t)dt \to \int_0^T \big(u(t),\varphi(s)\big)\psi(t)dt,$$

para toda $\varphi \in V'$ e para toda $\psi \in L^1(0,T)$. Em particular, para $\psi \in D(0,T)$. Logo tomando $\psi = \theta'$ onde $\theta \in C^1([0,T])$ com $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$, teremos

$$\int_0^T \big(u_k(t),\varphi(s)\big)\theta'(t)dt \to \int_0^T \big(u(t),\varphi(s)\big)\theta'(t)dt. \tag{3.56}$$

De (3.46) temos que

$$\int_0^T \big(u_k'(t),\varphi(s)\big)\psi(t)dt \to \int_0^T \big(u'(t),\varphi(s)\big)\psi(t)dt \text{ para toda } \varphi \in V' \text{ e para toda}$$

$\psi \in L^1(0,T)$. Em particular para $\psi = \theta \in C^1([0,T])$ onde $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$ obtemos

$$\int_0^T \big(u_k'(t),\varphi(s)\big)\theta(t)dt \to \int_0^T \big(u'(t),\varphi(s)\big)\theta(t)dt. \tag{3.57}$$

Somando (3.56) e (3.57) obtemos

$$\int_0^T \big(u_k(t),\varphi(s)\big)\theta'(t)dt + \int_0^T \big(u_k'(t),\varphi(s)\big)\theta(t)dt \to \int_0^T \big(u(t),\varphi(s)\big)\theta'(t)dt$$
$$+ \int_0^T \big(u'(t),\varphi(s)\big)\theta(t)dt.$$

Portanto,

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\Big(\big(u_k(t),\varphi(s)\big)\Big)\theta(t)dt \to \int_0^T \frac{d}{dt}\Big(\big(u(t),\varphi(s)\big)\theta(t)\Big)dt.$$

Daí temos

$$\big(u_k(T),\varphi(s)\big)\theta(T) - \big(u_k(0),\varphi(s)\big)\theta(0) \to \big(u(T),\varphi(s)\big)\theta(T) - \big(u(0),\varphi(s)\big)\theta(0).$$

Como $\theta(T) = 0$ e $\theta(0) = 1$, então temos

$$\big(u_k(0),\varphi(s)\big) \to \big(u(0),\varphi(s)\big) \text{ para toda } \varphi \in V'.$$

Assim temos que

$$u_k(0) \rightharpoonup u(0) \text{ em } D(A). \tag{3.58}$$

Por outro lado, temos que

$$u_k(0) \rightharpoonup u_0 \text{ em } D(A). \tag{3.59}$$

Logo de (3.58), (3.59) e pela unicidade do limite temos que

$$u(0) = u_0.$$

II) $u'(0) = u_1$.

Temos que $u_k'' \overset{*}{\rightharpoonup} u''$ em $L^\infty\big([0,T];D'(A)\big)$, logo,

$$\int_0^T \big\langle u_k''(t),\varphi(s)\big\rangle\psi(t)dt \to \int_0^T \big\langle u''(t),\varphi(s)\big\rangle\psi(t)dt \text{ para todo } \varphi \in D(A)$$
$$\text{e para todo } \psi \in C^1([0,T]) \text{ com } \psi(T) = 0 \text{ e } \psi(0) = 1. \tag{3.60}$$

Como $u_k' \overset{*}{\rightharpoonup} u'$ em $L^2\big([0,T];D'(A)\big)$, temos também que

$$\int_0^T \big\langle u_k'(t),\varphi(s)\big\rangle\psi'(t)dt \to \int_0^T \big\langle u'(t),\varphi(s)\big\rangle\psi'(t)dt \text{ para todo } \varphi \in D(A)$$
$$\text{e para todo } \psi \in C^1([0,T]) \text{ com } \psi(T) = 0 \text{ e } \psi(0) = 1. \tag{3.61}$$

Somando (3.60) e (3.61) obtemos

$$\int_0^T \big\langle u_k''(t),\varphi(s)\big\rangle\psi(t)dt + \int_0^T \big\langle u_k'(t),\varphi(s)\big\rangle\psi'(t)dt \to \int_0^T \big\langle u''(t),\varphi(s)\big\rangle\psi(t)dt$$
$$+\int_0^T \big\langle u'(t),\varphi(s)\big\rangle\psi'(t)dt.$$

$$\text{donde } \int_0^T \frac{d}{dt}\big(\big\langle u_k'(t),\varphi(s)\big\rangle\big)\psi(t)dt \to \int_0^T \frac{d}{dt}\big(\big\langle u'(t),\varphi(s)\big\rangle\psi(t)\big)dt.$$

Logo

$$\left\langle u_k'(T), \varphi(s)\right\rangle \psi(T) - \left\langle u_k'(0), \varphi(s)\right\rangle \psi(0) \to \left\langle u'(T), \varphi(s)\right\rangle \psi(T) - \left\langle u'(0), \varphi(s)\right\rangle \psi(0)$$

Como $\psi(T) = 0$ e $\psi(0) = 1$, então temos

$$\left\langle u_k'(0), \varphi(s)\right\rangle \to \left\langle u'(0), \varphi(s)\right\rangle \text{ para toda } \varphi \in D(A).$$

Assim temos que

$$u_k'(0) \rightharpoonup u'(0) \text{ em } D(A). \tag{3.62}$$

Por outro lado, temos que

$$u_k'(0) \rightharpoonup u_1 \text{ em } D(A). \tag{3.63}$$

Logo de (3.62), (3.63) e pela unicidade do limite temos que

$$u'(0) = u_1.$$

3.5 Unicidade das Soluções

Para a unicidade, consideramos u e v soluções do problema (1.3) nas condições do Teorema 9. Então $w = u - v$ também satisfaz todas as condições do mesmo Teorema 9, ou seja:

$$w \in C^0([0,T]; D(A)) \cap C^1([0,T]; V), \tag{3.64}$$

$$(w(t), w'(t)) \in D(A) \times D(A), \tag{3.65}$$

$$w' + Aw \in C^1([0,T]; H) \text{ em } (w' + Aw)' = w'' + Aw', \tag{3.66}$$

$$w'' \in L^2(0,T; H), \tag{3.67}$$

$$w'' + M(\|u(t)\|^2)Au - M(\|v(t)\|^2)Av + F(u) - F(v) + Aw' = 0 \text{ em } L^2(0,T;H), \tag{3.68}$$

$$w(0) = w'(0) = 0. \tag{3.69}$$

Fazendo o produto interno em H de (3.68) com $w'(t)$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[|w'(t)|^2 + M(\|u(t)\|^2)\|w(t)\|^2\right] &= -\|w'(t)\|^2 \\ -M'(\|u(t)\|^2)((u(t), u'(t)))\|w(t)\|^2 &+ M(\|v(t)\|^2)(Av(t), w'(t)) \\ -M(\|u(t)\|^2)(Au(t), w'(t)) &- (F(u) - F(v), w'(t)). \end{aligned} \tag{3.70}$$

Como $M \in C^1([0,\infty); \mathbb{R})$, obtemos por (3.8)

$$M\big(\|v(t)\|^2\big)\big(Av(t), w'(t)\big) - M\big(\|u(t)\|^2\big)\big(Au(t), w'(t)\big)$$

$$\leqslant C\big[\big(Av(t), w'(t)\big) - \big(Au(t), w'(t)\big)\big] \leqslant C\big(A(v-u), w'(t)\big) = C\big(A(-w), w'(t)\big)$$
$$\leqslant C\big(A^{\frac{1}{2}}w(t), A^{\frac{1}{2}}w'(t)\big) \leqslant C\big(|w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2\big) \tag{3.71}$$

e

$$M'(\|u(t)\|^2)((u(t), u'(t)))\|w(t)\|^2 \leqslant C\|w(t)\|^2. \tag{3.72}$$

Temos também, por (3.3), que

$$(F(u) - F(v), w'(t)) \leqslant C(\|w'(t)\|^2 + \|w(t)\|^2). \tag{3.73}$$

Substituindo (3.71)-(3.73) em (3.70) deduzimos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[|w'(t)|^2 + M(\|u(t)\|^2)\|w(t)\|^2\right] \leqslant C(|w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2).$$

Itegrando a última inequação de 0 a $t \leqslant T$, usando o fato de $w(0) = w'(0) = 0$ temos

$$|w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2 \leqslant C\int_0^t (|w'(s)|^2 + \|w(s)\|^2)ds.$$

Logo, pela desigualdade de Gronwall, obtemos que

$$|w'(t)|^2 + \|w(t)\|^2 \leqslant 0.$$

Daí temos que $\|w(t)\|^2 = 0$, ou seja, $w(t) = 0$ q.s. Portanto $u = v$ q.s, provando a unicidade da solução.

3.6 Soluções fracas

Aqui o objetivo é a obtenção de existência e unicidade de solução fraca para o problema (3.1), com menas regularidade sobre os dados iniciais. A solução correspondente será chamada fraca. Para isso, vamos considerar o seguinte resultado.

Teorema 10. *Suponhamos que os dados* $(u_0, u_1) \in V \times H$, M *uma função não-degenerada satisfazendo* (3.1) *e* F *um operador nas condições de* $(3.3) - (3.7)$. *Então existe uma única função* $u : [0, T] \to H$ *verificando*

$$(u, u') \in L^\infty(0, T; V) \times \big[L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)\big], \tag{3.74}$$

$$u'' + M\big(\|u(t)\|^2\big)Au + F(u) + Au' = 0 \text{ em } L^2(0, T; V'), \tag{3.75}$$

$$u(0) = u_0 \text{ e } u'(0) = u_1. \tag{3.76}$$

Demonstração: Pelo Teorema 9 segue-se que, para cada $k \in \mathbb{N}$, o problema (3.1), com dados iniciais $(u_{0k}, u_{1k}) \in D(A) \times V$, tem uma única solução $u_k : [0,T] \to H$ satisfazendo

$$u_k \in C^0([0,T]; D(A)) \cap C^1([0,T]; V), \tag{3.77}$$

$$((u_k(t), u_k'(t), F(u_k(t)))) \in D(A) \times D(A) \times V, \text{ para todo } t > 0, \tag{3.78}$$

$$u_k'' \in L^2(0,T; H), \tag{3.79}$$

$$u_k'' + M(\|u_k(t)\|^2)Au_k + F(u_k) + Au_k' = 0 \text{ em } L^2(0,T;H). \tag{3.80}$$

Tomando o produto interno em H de (3.80) com $u_k'(t)$ obtemos
$\big(u''(t)_k, u_k'(t)\big) + M(\|u_k(t)\|^2)\big(Au_k(t), u_k'(t)\big) + \big(F(u_k(t)), u_k'(t)\big) + \big(Au_k'(t), u_k'(t)\big) = 0$
e depois integrando de 0 a $t \leqslant T$, obtemos

$$\frac{1}{2}|u_k'(t)|^2 + \int_0^{\|u_k(t)\|^2} M(s)ds + \int_0^T \|u_k'(s)\|^2 ds = \frac{1}{2}|u_k'(0)|^2$$
$$+\frac{1}{2}\widehat{M}\big(\|u_k(0)\|^2\big) - \int_0^T \big(F(u_k(s)), u_k'(s)\big)ds.$$

Logo de (3.4), segue-se que

$$|u_k'(t)|^2 + \int_0^{\|u_k(t)\|^2} M(s)ds + 2\int_0^t \|u_k'(s)\|^2 ds \leqslant |u_{1k}|^2 + \widehat{M}\big(\|u_{0k}\|^2\big) + 2k_0\|u_{0k}\|^{\mu}. \tag{3.81}$$

Procedendo de uma maneira inteiramente análoga à estimativa **I** do Terorema 9 obtemos

$$\|u_k(t)\|^2 \leqslant C \tag{3.82}$$

e

$$|u_k'(t)|^2 + \int_0^t \|u_k'(s)\|^2 ds \leqslant C, \tag{3.83}$$

onde $C > 0$ é uma constante independente de k e t.

Das estimativas (3.82) e (3.83) obtemos a existência de uma subsequência de $\{u_k\}$, ainda denotada da por $\{u_k\}$, tal que

$$u_k \to u \text{ fraco-}\star \text{ em } L^\infty(0,T;V), \tag{3.84}$$

$$u_k' \to u' \text{ fraco-}\star \text{ em } L^\infty(0,T;H), \tag{3.85}$$

$$u_k' \to u' \text{ fracamente em } L^2(0,T;V). \tag{3.86}$$

Segue-se por (3.84), (3.85) e do Teorema de Aubin-Lions que

$$u_k \to u \text{ fortemente em } L^2(0,T;V). \tag{3.87}$$

Desde que $\|u_k(t)\| \leqslant C$ para todo $k \in \mathbb{N}$, tem $\|u(t)\| \leqslant C$. Por (3.3) temos que

$$|F(u_k(t)) - F(u(t))|^2 \leqslant C|u_k(t) - u(t)|^2.$$

Daí, segue-se que:

$$\int_0^T |F\big(u_k(t)\big) - F\big(u(t)\big)|^2 dt \leqslant C \int_0^T |u_k(t) - u(t)|^2 dt,$$

ou seja,

$$\|F(u_k) - F(u)\|_{L^2(0,T;H)} \leqslant C\|u_k - u\|_{L^2(0,T;H)}.$$

De (3.87) e da última inequação obtemos que

$$F(u_k) \to F(u) \text{ fortemente em } L^2(0,T;H). \tag{3.88}$$

Agora, analisamos a convergência do termo não-linear $M(\|u_k(t)\|^2)$.

Para isso, consideramos a função $\phi_k(t) = \|u_k(t)\|^2$. Assim, por (3.82). temos

$$|\phi(t)| \leqslant C, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}, \text{ para todo } t \in [0,T]. \tag{3.89}$$

Para t_1, $t_2 \in [0,T]$ temos, usando (3.82) e (3.89), que

$$|\phi_k(t_1) - \phi(t_2)| = \big|\|u_k(t_1)\|^2 - \|u_k(t_2)\|^2\big| \leqslant \big(\|u_k(t_1)\| + \|u_k(t_2)\|\big)\|u_k(t_1) - u_k(t_2)\|$$

$$\leqslant 2C\|u_k(t_1) - u_k(t_2)\| \leqslant 2C \int_{t_1}^{t_2} \|u_k'(s)\| ds \leqslant 2C\|u_k'\|_{L^2(0,T;V)}|t_1 - t_2|.$$

Então, podemos concluir por (3.83) que

$$|\phi_k(t_1) - \phi_k(t_2)| \leqslant C|t_1 - t_2|, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}. \tag{3.90}$$

De (3.89), (3.90) e pelo Teorema de Arzelà-Ascoli temos que existe uma função contínua $\phi : [0,T] \to \mathbb{R}$ tal que

(3.67) $$\|u_k(t)\|^2 \to \phi(t) \text{ uniformemente em } [0,T].$$

Desde que $M \in C^1([0,\infty);\mathbb{R})$, segue-se que

$$M(\|u_k(t)\|^2) \to M(\phi(t)) \text{ uniformemente em } [0,T] \tag{3.91}$$

Agora iremos mostrar que $\phi(t) = \|u(t)\|^2$.

De fato, tomando $v_k = u_k - u$, temos, por (3.84) – (3.86), que

$$(v_k) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;V), \tag{3.92}$$

$$(v_k') \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V). \tag{3.93}$$

Subtraindo

$u'' + M\big(\|\phi(t)\|^2\big)Au + F(u) + Au' = 0$ de $u_k'' + M\big(\|u_k(t)\|^2\big)Au_k$
$+F(u_k) + Au_k' = 0$ obtemos

$$u_k'' - u'' + M\big(\|u_k(t)\|^2\big)Au_k - M\big(\|\phi(t)\|^2\big)Au + F(u_k) - F(u) + Au_k' - Au' = 0 \text{ ou}$$

$$u_k'' - u'' + M\big(\|u_k(t)\|^2\big)Au_k - M\big(\|u_k(t)\|^2\big)Au + M\big(\|u_k(t)\|^2\big)Au - M\big(\|\phi(t)\|^2\big)Au$$

$$+F(u_k) - F(u) + Au_k' - Au' = 0, \text{ ou ainda}$$

$$(u_k - u)'' + M\big(\|u_k(t)\|^2\big)A(u_k - u) + \big[M\big(\|u_k(t)\|^2\big) - M\big(\|\phi(t)\|^2\big)\big]Au$$

$$+F(u_k) - F(u) + A(u_k - u)' = 0,$$

daí obtemos:

$$v_k'' + Av_k' + M(\|u_k(t)\|^2)Av_k + [M(\|u_k(t)\|^2) - M(\phi)]Au$$

$$+F(u_k) - F(u) = 0 \text{ em } L^2(0,T;V'), \tag{3.94}$$

$$v_k(0) = v_{0k} \to 0 \text{ fortemente em } V, \tag{3.95}$$

$$v_k'(0) = v_{1k}' \to 0 \text{ fortemente em } H. \tag{3.96}$$

Tomando a dualidade $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V'\times V}$ de (3.94) com $v_k \in V$, temos

$$\langle v_k''(t), v_k(t)\rangle + \langle Av_k'(t), v_k(t)\rangle + M(\|u_k(t)\|^2)\langle Av_k(t), v_k(t)\rangle$$

$$+\big[M(\|u_k(t)\|^2) - M(\phi(t))\big]\langle Au(t), v_k(t)\rangle + \langle F(v_k(t)) - F(u(t)), v_k(t)\rangle = 0.$$

Daí temos que

$$\frac{d}{dt}(v_k'(t), v_k(t)) - |v_k'(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_k(t)\|^2 + M\big(\|u_k(t)\|^2\big)\|v_k(t)\|^2$$

$$+[M(\|u_k(t)\|^2) - M(\phi(t))]((u(t), v_k(t))) + \langle F(u_k(t)) - F(u(t)), v_k(t)\rangle = 0. \tag{3.97}$$

Integrando (3.97) de 0 a $t \leqslant T$, obtemos:

$$\big(v_k'(t), v_k(t)\big) - \big(v_k'(0), v_k(0)\big) - \int_0^t |v_k'(s)|^2 ds + \frac{1}{2}\|v_k(t)\|^2 - \frac{1}{2}\|v_k(0)\|^2$$

$$+\int_0^t M\big(\|u_k(s)\|^2\big)\|v_k(s)\|^2 ds + \int_0^t \big[M\big(\|u_k(t)\|^2\big) - M\big(\phi(s)\big)\big]\big((u(s), v_k(s))\big) ds$$

$$+\int_0^t \langle F\big(u_k(s)\big) - F\big(u(s)\big), v_k(s)\rangle ds = 0 \text{ ou}$$

$$\frac{1}{2}\|v_k(t)\|^2 \leqslant \frac{1}{2}\|v_{0k}\|^2 + |v_{1k}|\,|v_{0k}| + |v_k'(t)|\,\|v_k(t)\| + \int_0^t \|v_k'(s)\|^2 ds$$

$$+\sup_{[0,T]} M\big(\|u_k(t)\|^2\big)\int_0^t \|v_k(s)\|^2 ds + \sup_{[0,T]}\big|M(\|u_k(t)\|^2) - M(\phi(t))\big|\int_0^t \|u(s)\|\,\|v_k(s)\|ds$$

$$+\int_0^t \big|\langle F(u_k(t)) - F(u(s)), v_k(s)\rangle\big| ds. \tag{3.98}$$

Da hipótese (3.3), e sendo $\|u_k\| \leqslant C$ e $\|u\| \leqslant C$ tem-se

$$|F(u_k) - F(u)| \leqslant \alpha_c\|u_k - u\|,\ \ \alpha_c > 0,\ \ C > 0,$$

e usando a desigualdade elementar $\alpha\beta \leqslant \alpha^2 + \frac{1}{4}\beta^2$, obtemos que

$$|v_k'(t)|\,\|v_k(t)\| \leqslant |v_k'(t)|^2 + \frac{1}{4}\|v_k(t)\|^2.$$

Daí e de (3.98) obtemos

$$\frac{1}{2}\|v_k(t)\|^2 \leqslant \|v_{0k}\|^2 + |v_{1k}|\,|v_{0k}| + |v_k'(t)|^2 + \frac{1}{4}\|v_k(t)\|^2 + \int_0^t \|v_k'(s)\|^2 ds$$

$$+\sup_{[0,T]} M\big(\|u_k(t)\|^2\big)\int_0^t \|v_k(s)\|^2 ds + \int_0^t \sup_{[0,T]}\big|M\big(\|u_k(t)\|^2\big) - M(\phi(t))\big|\|u_k(s)\|\,\|v_k(s)\|ds$$

$$+\int_0^t \alpha_c\|v_k(s)\|^2 ds,$$

de onde resulta que:

$$\frac{1}{4}\|v_k(t)\|^2 \leqslant \|v_{0k}\|^2 + |v_{1k}|\,|v_{0k}| + |v_k'(t)|^2 + \int_0^t \|v_k'(s)\|^2 ds$$

$$+\sup_{[0,T]} M\big(\|u_k(t)\|^2\big)\int_0^t \|v_k(s)\|^2 ds + \int_0^t \frac{1}{2}\left(\sup_{[0,T]}\big|M(\|u_k(t)\|^2) - M(\phi(t))\big|\right)^2 \|u(s)\|^2 ds$$

$$+\int_0^t \frac{1}{2}\|v_k(s)\|^2 ds + \int_0^t \alpha_c\|v_k(s)\|^2 ds,$$

ou seja, usando as convergências (3.95) e (3.96):

$$\frac{1}{2}\|v_k(t)\|^2 \leqslant \|v_{0k}\|^2 + |v_{1k}|\,|v_{0k}| + |v_k'(t)|^2 + \int_0^t \|v_k'(s)\|^2 ds$$

$$+\left(\sup_{[0,T]} M\big(\|u_k(t)\|^2\big) + \alpha_c + \frac{1}{2}\right)\int_0^t \|v_k(s)\|^2 ds$$

$$+\frac{1}{2}\left(\sup_{[0,T]}\big|M(\|u_k(t)\|^2) - M(\phi(t))\big|\right)^2\int_0^t \|u(s)\|^2 ds. \tag{3.99}$$

Agora, tomando a dualidade $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V'\times V}$ de (3.94) com $v_k'(t) \in V$, obtemos

$$\langle v_k''(t), v_k'(t)\rangle + \langle Av_k'(t), v_k'(t)\rangle + M\big(\|u_k(t)\|^2\big)\langle Av_k(t), v_k'(t)\rangle$$

$$+\big[M\big(\|u_k(t)\|^2\big) - M(\phi(t))\big]\langle Au(t), v_k'(t)\rangle + \langle F(u_k(t)) - F(u(t)), v_k'(t)\rangle = 0. \quad (3.100)$$

Como $\langle Au, v\rangle = ((u, v))$, obtemos que,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_k'(t)|^2 + \|v_k'(t)\|^2 = -M\big(\|u_k(t)\|^2\big)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_k(s)\|^2$$

$$-\big[M\big(\|u_k(t)\|^2\big) - M(\phi(t))\big]\big((u(t), v_k'(t))\big) - \langle F(u_k(t)) - F(u(t)), v_k'(t)\rangle. \quad (3.101)$$

Integrando (3.101) de 0 a $t \leqslant T$ e usando o fato que:
$|F(u_k(t)) - F(u(t))| \leqslant \alpha_c\|u_k(t) - u(t)\|$ obtemos

$$\frac{1}{2}|v_k'(t)|^2 - \frac{1}{2}|v_k'(0)|^2 + \int_0^t \|v_k'(s)\|^2 ds \leqslant \sup_{[0,T]} M\big(\|u_k(t)\|\big)\int_0^t \|v_k(s)\|\|v_k'(s)\|ds$$

$$+\sup_{[0,T]}\big|M\big(\|u_k(t)\|^2\big) - M(\phi(t))\big|\int_0^t \|u(s)\|\,\|v'(s)\|ds + \int_0^t \alpha_c\|v_k(s)\|\,\|v_k'(s)|ds$$

$$= \sup_{[0,T]}\big(M\big(\|u_k(t)\|^2\big) + \alpha_c\big)\int_0^t \|v_k(s)\|\|v_k'(s)\|ds$$

$$+\sup_{[0,T]}|M\big(\|u_k(t)\|^2\big) - M(\phi(t))|\int_0^t \|u(s)\|\,\|v'(s)\|ds$$

$$= \int_0^t \sup_{[0,T]}\big(M\big(\|u_k(t)\|^2\big) + \alpha_c\big)\|v_k(s)\|\sqrt{2}\,\frac{\|v_k'(s)\|}{\sqrt{2}}ds$$

$$+\int_0^t \sup_{[0,T]}|M\big(\|u_k(t)\|^2\big) - M(\phi(t))|\|u(s)\|\sqrt{2}\,\frac{\|v_k'(s)\|}{\sqrt{2}}ds$$

$$\leqslant \int_0^t \left(\sup_{[0,T]} M\big(\|u_k(t)\|^2\big) + \alpha_c\right)^2\|v_k(s)\|^2 ds + \frac{1}{4}\int_0^t \|v_k'(s)\|^2 ds$$

$$+\int_0^t \left(\sup_{[0,T]}\big|M\big(\|u_k(t)\|^2\big) - M(\phi(t))\big|\right)^2\|u(s)\|^2 ds + \frac{1}{4}\int_0^t \|v_k'(s)\|^2 ds$$

ou ainda;

$$\frac{1}{2}|v_k'(t)|^2 + \int_0^t \|v_k'(s)\|^2 ds \leqslant \frac{1}{2}|v_k'(0)|^2 + \left(\sup_{[0,T]} M\big(\|u_k(t)\|^2\big) + \alpha_c\right)^2\int_0^t \|v_k(s)\|^2 ds$$

$$+\left(\sup_{[0,T]}\big|M\big(\|u_k(t)\|^2\big) - M(\phi(t))\big|\right)^2\int_0^t \|u(s)\|^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t \|v_k'(s)\|^2 ds. \quad (3.102)$$

Substituindo (3.102) em (3.99) obtemos

$$\frac{1}{4}\|v_k(t)\|^2 \leqslant \|v_{0k}\|^2 + |v_{1k}|\,|v_{0k} + \left(\sup_{[0,T]}|M\big(\|u_k(t)\|^2| + \alpha_c\right)^2\int_0^t \|v_k(s)\|^2 ds$$

$$+\left(\sup_{[0,T]}|M\big(u_k(t)\|^2\big) - M(\phi(t))|\right)^2\int_0^t \|u(s)\|^2 ds + \left(\sup_{[0,T]}|M\big(u_k(t)\|^2\big)| + \alpha_c + \frac{1}{2}\right)\int_0^t \|v_k(s)\|^2 ds$$

$$+\frac{1}{2}\left(\sup_{[0,T]}|M\big(\|u_k(t)\|^2\big)-M(\phi(t))|\right)^2\int_0^t\|u(s)\|^2ds,$$

ou seja,

$$\|v_k(t)\|^2\leqslant 4\|v_{0k}\|^2+4|v_{1k}|\,|v_{0k}+4C\left(\sup_{[0,T]}|M\big(u_k(t)\|^2\big)-M(\phi(t))|\right)^2+C\int_0^t\|v_k(s)\|^2ds$$

de onde segue que

$$\|v_k(t)\|^2\leqslant C_k+C\int_0^t\|v_k(s)\|^2ds, \tag{3.103}$$

onde,

$$C_k=4\|v_{0k}\|^2+4|v_{1k}|\,|v_{0k}|+4C\left(\sup_{[0,T]}|M\big(u_k(t)\|^2\big)-M(\phi(t))|\right)^2.$$

Como $\lim\limits_{k\to\infty}C_k=0$ temos pela desigualdade de Gronwall que

$$\|v_k(t)\|\leqslant C_k.$$

Daí,

$$\|v_k(t)\|\to 0 \text{ uniformemente em } [0,T]. \tag{3.104}$$

Das convergências (3.87), (3.88), (3.89) e (3.92) podemos passar o limite em (3.80) para obter (3.75). A verifcação das condições iniciais são inteiramente análogas às feitas no Teorema [9]. ■

Capítulo 4

Estabilização

Nós obtemos a estabilização do problema (1.3) para um caso particular. Para isto, consideremos $V = H_0^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$ e $F = g$, onde g é positiva. Assim podemos garantir a existência e unicidade de solução fraca para o problema "concreto". Aqui iremos usar o seguinte resultado, devido à Nakao [16].

Lema 1. ***(Nakao)****Seja $E : [0,\infty) \to [0,\infty)$ uma função não crescente, limitada e que existem constantes positivos α e β, tais que*

$$\max_{t \leqslant s \leqslant t+1} E^{1+\beta}(s) \leqslant \alpha\big[E(t) - E(t+1)\big], \ \textit{para todo } t \geqslant 0. \tag{4.1}$$

Então existe uma constante positiva C, tal que

$$E(t) \leqslant C(1+t)^{-1/\beta}. \tag{4.2}$$

A prova será feita apenas para o caso particular

$$M(\lambda) = \lambda^s, \ s > 0.$$

A energia associada à solução fraca de (1.3) é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}\left[|u'(t)|^2 + \frac{1}{s+1}\|u(t)\|^{2(s+1)} + 2\int_\Omega G(u(x,t))dx\right], \tag{4.3}$$

a qual é obtida a seguir e $G(\xi) = \displaystyle\int_0^\xi g(s)ds$.
O principal resultado desta seção é dado pelo teorema a seguir:

Teorema 11. *Considerando as hipóteses* (1.1) *e* (1.4)*, então a energia* (4.3) *satisfaz*

$$E(t) \leqslant C(1+t)^{-(1+1/s)}, \ \textit{para todo } t \geqslant 0, \tag{4.4}$$

onde C é uma constante positiva.

Demonstração: Tomando a dualidade $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V'V}$ de $(1.3)_1$ com $u'(t)$, temos

$$\big(u''(t),u'(t)\big)+M\big(\|u(t)\|^2\big)\big(Au(t),u'(t)\big)+\big(F(u(t)),u'(t)\big)+\big(Au'(t),u'(t)\big)=0,$$

ou ainda,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u'(t)|^2+\|u(t)\|^{2s}\big((u(t),u'(t))\big)+\big(g(u(t)),u'(t)\big)+\|u'(t)\|^2=0,$$

daí temos,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u'(t)|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\{\frac{1}{s+1}\|u(t)\|^{2(s+1)}\Big\}+\frac{d}{dt}\int_\Omega\int_0^{u(x,t)}g(s)dsdx+\|u'(t)\|^2=0,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{|u'(t)|^2+\frac{1}{s+1}\|u(t)\|^{2(s+1)}+2\int_\Omega G(u(x,t))dx\right\}+\|u'(t)\|^2=0,$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}E(t)+\|u'(t)\|^2=0. \tag{4.5}$$

Daí $\dfrac{d}{dt}E(t)\leqslant 0$, deste modo, a energia E é uma função real não negativa, não crescente e limitada, dada por

$$E(t)=\frac{1}{2}\Big[|u'(t)|^2+\frac{1}{s+1}\|u(t)\|^{2(s+1)}+2\int_\Omega G(u(x,t))dx\Big].$$

Daí segue-se que,

$$\frac{1}{2(s+1)}\|u\|^{2(s+1)}=E(t)-\frac{1}{2}|u'(t)|^2-\int_\Omega G\big(u(x,t)\big)dx\leqslant E(t)$$

De onde obtemos:

$$\|u(t)\|\leqslant 2(s+1)^{\frac{1}{2(s+1)}}E(t)^{\frac{1}{2(s+1)}},\ \text{para todo } t\geqslant 0. \tag{4.6}$$

Integrando ambos os lados da equação (4.5) de t a $t+1$, obtemos;

$$\int_t^{t+1}\|u'(\xi)\|^2d\xi+E(t+1)-E(t)=0,$$

ou ainda,

$$\int_t^{t+1}\|u'(\xi)\|^2d\xi=E(t)-E(t+1).$$

Temos também

$$\int_t^{t+1}|u'(\xi)|^2d\xi\leqslant C\int_t^{t+1}\|u'(\xi)\|^2d\xi=C\big[E(t)-E(t+1)\big]=:L^2(t), \tag{4.7}$$

onde C é a constante de imersão de V em H. Daí, resulta que

$$\int_t^{t+1/4} |u'(\xi)|^2 d\xi + \int_{t+3/4}^{t+1} |u'(\xi)|^2 d\xi \leqslant \int_t^{t+1} |u'(\xi)|^2 d\xi \leqslant L^2(t),$$

ou seja,

$$\int_t^{t+1/4} |u'(\xi)|^2 d\xi + \int_{t+3/4}^{t+1} |u'(\xi)|^2 d\xi \leqslant L^2(t),$$

Pelo teorema do valor médio para integral, existem $t_1 \in [t, t+1/4]$ e $t_2 \in [t+3/4, t+1]$ tais que:

$$\frac{1}{t+\frac{1}{4}-t}|u'(t_1)|^2 + \frac{1}{t+1-t-\frac{3}{4}}|u'(t_2)|^2 \leqslant L^2(t),$$

ou seja,

$$4|u'(t_1)|^2 + 4|u'(t_2)|^2 \leqslant L^2(t).$$

Portanto,

$$|u'(t_i)| \leqslant 2L(t), \;\; i = 1, 2. \tag{4.8}$$

Agora, tomando a dualidade $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V'V}$ de $(1.3)_1$ com $u(t)$, e usando o Teorema da Representação de Riesz obtemos

$$\big(u''(t), u(t)\big) + M\big(\|u(t)\|^2\big)\big(Au(t), u(t)\big) + \big(F(u(t)), u(t)\big) + \big(Au'(t), u(t)\big) = 0,$$

ou seja,

$$\big(u''(t), u(t)\big) + \|u(t)\|^{2s}\|u(t)\|^2 + \big(g(u(t)), u(t)\big) + \big((u'(t), u(t))\big) = 0,$$

daí temos que,

$$\frac{d}{dt}\big(u'(t), u(t)\big) - |u'(t)|^2 + \|u(t)\|^{2(s+1)} + \big((u'(t), u(t))\big) + \big(g(u(t)), u(t)\big) = 0.$$

Integrando a última equação de t_1 a t_2 obtemos

$$\big(u'(t_2), u(t_2)\big) - \big(u'(t_1), u(t_1)\big) - \int_{t_1}^{t_2} |u'(\xi)|^2 d\xi + \int_{t_1}^{t_2} \|u(\xi)\|^{2(s+1)} d\xi$$
$$+ \int_{t_1}^{t_2} \big((u'(\xi), u(\xi))\big) d\xi + \int_{t_1}^{t_2} \big(g(u(\xi)), u(\xi)\big) d\xi = C.$$

Usando-se a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\int_{t_1}^{t_2} \|u(\xi)\|^{2(s+t)} d\xi + \int_{t_1}^{t_2} \big(g(u), u(\xi)\big) d\xi \leqslant C + \big[|u'(t_1)|\, \|u(t_1)\| + |u'(t_2)|\, \|u(t_2)\|\big]$$
$$+ \int_{t_1}^{t_2} |u'(\xi)|^2 d\xi + \int_{t_1}^{t_2} \|u'(\xi)\|\, \|u(\xi)\| d\xi. \tag{4.9}$$

Usando a desigualdade de Young obtemos,

$$
\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \|u'(\xi)\|\,\|u(\xi)\| d\xi &\leqslant \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2(s+1)} \|u(\xi)\|^{2(s+1)} + \frac{2s+1}{2(s+1)} \|u'(\xi)\|^{\frac{2(s+1)}{2s+1}} \right) d\xi \\
&\leqslant \frac{1}{2(s+1)} \int_{t_1}^{t_2} \|u(\xi)\|^{2(s+1)} d\xi + \frac{2s+1}{2(s+1)} \int_{t_1}^{t_2} \|u'(\xi)\|^{\frac{2(s+1)}{2s+1}} d\xi \\
&\leqslant \frac{1}{2(s+1)} \int_{t_1}^{t_2} \|u(\xi)\|^{2(s+1)} d\xi + C \left(\int_{t_1}^{t_2} \|u'(\xi)\|^2 d\xi \right)^{\frac{s+1}{2s+1}}. \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

Substituindo (4.6) – (4.8) e (4.10) em (4.9), obtemos,

$$
\int_{t_1}^{t_2} \|u(\xi)\|^{2(s+1)} d\xi \leqslant C\big[L(t)E^{\frac{1}{2s+1}}(t) + L^2(t) + L^{\frac{2(s+1)}{2s+1}}(t)\big] + \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2(s+1)} \|u(\xi)\|^{2(s+1)} d\xi,
$$

ou ainda,

$$
\int_{t_1}^{t_2} \|u(\xi)\|^{2(s+1)} d\xi + \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega G(u(x,\xi)) dx d\xi \leqslant C\big[L(t)E^{\frac{1}{2s+1}}(t) + L^2(t) + L^{\frac{2(s+1)}{2s+1}}(t)\big] \equiv J^2(t). \qquad (4.11)
$$

Adicionando ambos os lados das desigualdades (4.7) e (4.11), obtemos

$$
\int_t^{t+1} |u'(\xi)|^2 d\xi + \int_{t_1}^{t_2} \|u(\xi)\|^{2(s+1)} d\xi + \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega G\big(u(x,\xi)\big) dx d\xi \leqslant L^2(t) + J^2(t),
$$

ou seja,

$$
\int_t^{t+1} \frac{1}{2} \big[|u'(\xi)|^2 + \|u(\xi)\|^{2(s+1)}\big] d\xi + 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega G\big(u(x,\xi)\big) dx d\xi \leqslant \frac{1}{2} \big[L^2(t) + J^2(t)\big],
$$

daí temos que,

$$
\int_{t_1}^{t_2} E(\xi) d\xi \leqslant \frac{1}{2} \big[L^2(t) + J^2(t)\big].
$$

Aplicando novamente o teorema do valor médio, podemos garantir a existência de $t^* \in [t_1, t_2]$ tal que

$$
\frac{1}{2} E(t^*) \leqslant E(t^*)(t_2 - t_1) \leqslant \frac{1}{2} \big[L^2(t) + J^2(t)\big].
$$

Assim,

$$
E(t^*) \leqslant L^2(t) + J^2(t). \qquad (4.12)
$$

Integrando (4.5) de t a t^* obtemos,

$$
E(t^*) - E(t) + \int_t^{t^*} \|u'(\xi)\|^2 d\xi = 0
$$

ou

$$
E(t) = E(t^*) + \int_t^{t^*} \|u'(\xi)\|^2 d\xi.
$$

Usando (4.7), (4.11) e (4.12), obtemos

$$E(t) = E(t^*) + \int_t^{t^*} \|u'(\xi)\|^2 d\xi \leqslant L^2(t) + J^2(t) + \int_t^{t^*} \|u'(\xi)\|^2 d\xi \leqslant 2L^2(t) + J^2(t)$$
$$\leqslant 2L^2(t) + C\big[L(t)E^{\frac{1}{2(s+1)}}(t) + L^2(t) + L^{\frac{2(s+1)}{2s+1}}(t)\big],$$

ou seja,

$$E(t) \leqslant C\big[L(t)E^{\frac{1}{2(s+1)}}(t) + L^2(t) + L^{\frac{2(s+1)}{2s+1}}(t)\big]. \tag{4.13}$$

Usando a desigualdade de Young obtemos que,

$$L(t)E^{\frac{1}{2(s+)}}(t) \leqslant C\frac{2s+1}{2(s+1)}L^{\frac{2(s+1)}{2s+1}}(t) + \frac{E(t)}{2(s+1)},$$

daí e de (4.13) obtemos

$$E(t) \leqslant CL^{\frac{2(s+1)}{2s+1}}(t) + \frac{1}{2(s+1)}E(t) + CL^2(t) + CL^{\frac{2(s+1)}{2s+1}}(t),$$

Assim temos,

$$E(t) - \frac{1}{2(s+1)}E(t) \leqslant CL^{\frac{2(s+1)}{2s+1}}(t)\big[1 + L^{\frac{2s}{2s+1}}(t)\big],$$

como $L^2(t) + \int_t^{t+1} \|u'(\xi)\|^2 d\xi$ temos de (3.22) que $1 + L^{\frac{2s}{2s+1}}(t)$ é limitada, daí temos que

$$E(t) \leqslant \frac{2(s+1)}{2s+1}CL^{\frac{2(s+1)}{2s+1}}(t),$$

como $\dfrac{2(s+1)}{2s+1} \leqslant 2$, então podemos considerar,

$$E(t) \leqslant CL^{\frac{2(s+1)}{2s+1}}(t).$$

Desta forma temos que

$$E^{\frac{2s+1}{s+1}}(t) \leqslant CL^2(t) = C\big[E(t) - E(t+1)\big]$$

e, portanto,

$$\max_{\xi \in [t,t+1]} E^{1+\frac{s}{s+1}}(\xi) \leqslant C\big[E(t) - E(t+1)\big].$$

Daí pelo Lema de Nakao, podemos concluir a existência de uma constante positiva C tal que

$$E(t) \leqslant C(1+t)^{-(\frac{s+1}{s})} \leqslant C(1+t)^{-(1+\frac{1}{s})}, \text{ para todo } t \geqslant 0,$$

provando o teorema. ■

Apêndice A

Teorema Espectral

Neste apêndice daremos um resumo sobre o Teoria Espectral em espaços de Hilbert, onde faremos a demonstração do Teorema Espectral e da unicidade da raiz quadrada de um operador linear auto-adjunto, simétrico e positivo definido num espaço de Hilbert. Para maiores detalhes colsulte as referências [13] e [9].

A.1 Definições e Resultados

Seja H um espaço de Hilbert real munido do produto interno $(.,.)$.

Definição 10. *Um operador* A *definido no espaço* H *é dito simétrico se* $\big(Au, v\big) = \big(u, Av\big)$ *para todo par* u, v *em* H.

Definição 11. *Quando* $\big(Au, u\big) \geqslant 0$ *para todo* u *em* H*, diz-se que* A *é positivo, escrevendo-se* $A \geqslant 0$.
No final deste apêndice, iremos mostrar que A *positivo admite uma raiz quadrada positiva simétrica.*

Definição 12. *Denotamos por* $\mathcal{L}(E, F)$ *o espaço das transformações lineares contínuas* T *de* E *em* F*, munido da norma*

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Tx\|.$$

Teorema 12. *Sejam* E *e* F *espaços de Hilbert, então dado* $T \in \mathcal{L}(E, F)$ *existe um únicio operador* $T^* \in \mathcal{L}(F, E)$ *tal que* $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \;\; \forall x \in E; \;\; \forall y \in F$. *Tem-se* $\|T^*\| = \|T\|$. *O operador* T^* *é chamado adjunto de* T. *Quando* $T = T^*$ *diz-se que* T *é auto-adjunto.*

Demonstração: Consideramos as aplicações $\phi : E \to E'$ onde $\langle \phi x, y \rangle = (y, x)$ para todo x, $y \in E$; $\psi : F \to F'$ definida por $\langle \psi r, s \rangle = (s, r)$ para todo r, $s \in F$. Pelo teorema da representação de Riesz, ϕ e ψ são bijeções isométricas. Seja T' o dual de T em $\mathcal{L}(F'; E')$, isto é, $\langle T'y', x \rangle = \langle y', Tx \rangle$ para todo $y' \in F'$ e $x \in E$.

Consideramos $T^* = \phi^{-1} \circ T' \circ \psi \in \mathcal{L}(F, E)$, daí temos que $(x, T^*y) = \langle \phi \circ T^*y, x \rangle$ $= \langle \phi \circ \phi^{-1} \circ T' \circ \psi y, x \rangle = \langle T' \circ \psi y, x \rangle = \langle \psi y, Tx \rangle = (Tx, y)$.

Provando assim a existência de T^*.

Afirmamos que T^* é linear.

De fato, dados x, $y \in F$, $z \in E$ e α, β escalares temos que

$(z, T^*(\alpha x + \beta y)) = (Tz, \alpha x + \beta y) = (Tz, \alpha x) + (Tz, \beta y) = \alpha(z, T^*x) + \beta(z, T^*y)$
$= (z, \alpha T^*x + \beta T^*y)$.

Afirmamos que T^* é contínuo.

De fato, $\| T^*y \| = \| \phi^{-1} \circ T' \circ \psi y \| = \| T' \circ \psi y \| \leqslant \| T' \| \| \psi y \| = \| T' \| \| y \|$, logo T^* é limitado e portanto contínuo, ou seja, $T^* \in \mathcal{L}(F; E)$.

Suponhamos que existam T_1^*, $T_2^* \in \mathcal{L}(F, E)$ tais que $(x, T_1^*y) = (Tx, y)$ e $(x, T_2^*y) = (Tx, y)$, logo $(x, T_1^*y) = (x, T_2^*y) \Rightarrow (x, T_1^*y - T_2^*y) = (x, (T_1^* - T_2^*)(y)) = 0$, $\forall x \in E$ como $(T_1^* - T_2^*)(y) \in E$ tomando $x = (T_1^* - T_2^*)(y)$ temos que $((T_1^* - T_2^*)(y), (T_1^* - T_2^*)(y)) = 0 \Rightarrow (T_1^* - T_2^*) = 0 \Rightarrow T_1^* = T_2^*$ provando a unicidade de T^*.

Vimos que:

$$\| T^* \| \leqslant \| T' \| \| y \| \text{ logo } \| T^* \| \leqslant \| T' \| . \tag{A.1}$$

De $T' = \phi \circ T^* \circ \psi^{-1}$ temos que

$$\| T'x \| = \| \phi \circ T' \circ \psi^{-1}x \| \leqslant \| T^* \| \| \psi^{-1}x \| = \| T^* \| \| x \| \text{ logo } \| T' \| \leqslant \| T^* \| \tag{A.2}$$

daí segue-se de $(A.1)$ e $(A.2)$ que $\|T^*\| = \|T\|$.

Portanto dado $T \in \mathcal{L}(E, F)$ existe um único operador $T^* \in \mathcal{L}(F, E)$ tal que $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$ $\forall x \in E$; $\forall y \in F$ e $\|T^*\| = \|T\|$. ∎

Proposição 2. *Se* $T \in \mathcal{L}(E, F)$ *é auto adjunto então,* $\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x \rangle|; \ \|x\| = 1\}$.

Demonstração: Se $T = 0$ temos $\| T \| = 0 = \sup\{| Tx |, \| x \| = 1\}$.

Suponhamos $T \neq 0$. Da desigualdade de Cauchy-Schwarz temos $(Tx, x) \leqslant \| Tx \|$ para $\| x \| = 1$ o que implica em:

$$\lambda = \sup\{(Tx, x), \| x \| = 1\} \leqslant \sup\{\| Tx \|, \| x \| = 1\} = \| T \| . \tag{A.3}$$

Sejam $x = \| Tz \|^{\frac{1}{2}} z$ e $y = \| Tz \|^{-\frac{1}{2}} Tz$. Como T é auto adjunto, temos que (Tx, y) $= (\| Tz \|^{\frac{1}{2}} Tz, \| Tz \|^{-\frac{1}{2}} Tz) = \| Tz \|^2 = (x, Ty)$. Consideramos $u = x + y$ e $v = x - y$, daí segue-se que $(Tu, u) = (Tx + Ty, x + y) = (Tx, x) + (Tx, y) + (Ty, x) + (Ty, y)$ e $(Tv, v) = (Tx - Ty, x - y) = (Tx, x) - (Tx, y) - (Ty, x) + (Ty, y)$, assim obtemos que $(Tu, u) - (Tv, v) = 2(Tx, x) + 2(Ty, y) = 4 \| Tz \|^2$.

Temos também que $(Tu, u) - (Tv, v) \leqslant (Tu, u) + (Tv, v) \leqslant \sup\{(Tx, x), \| x \| = 1\}((Tu, u) + (Tv, v)) = \lambda(\| u \|^2 + \| v \|^2) = \lambda(\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2) = \lambda(2 \| x \|^2 + \| y \|^2) = 2\lambda((x, x) + (y, y)) = 2\lambda((\| Tz \|^{\frac{1}{2}} z, \| Tz \|^{\frac{1}{2}} z) + (\| Tz \|^{-\frac{1}{2}} Tz, \| Tz \|^{-\frac{1}{2}} Tz))$
$= 2\lambda \| Tz \| (\| z \|^2 + \| Tz \|^{-2} \| z \|^2) \leqslant 4\lambda \| Tz \|$, logo temos que

$$4 \| Tz \|^2 \leqslant 4\lambda \| Tz \| \Rightarrow \| Tz \| \leqslant \lambda \Rightarrow \| T \| \leqslant \lambda, \tag{A.4}$$

assim de (A.3) e (A.4) temos que $\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle|;\ \|x\| = 1\}$.

Portanto se $T \in \mathcal{L}(E, F)$ é auto adjunto então, $\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle|;\ \|x\| = 1\}$. ■

Proposição 3. *Se* $T \in \mathcal{L}(E, F) \Rightarrow \langle Tx, x\rangle$ *é real para cada* $x \in E$. *Com isso seja* $m_T = \inf\{\langle Tx, x\rangle\};\ \|x\| = 1$ *e* $M_T = \sup\{\langle Tx, x\rangle;\ \|x\| = 1\}$ *então* $\|T\| = \max\{M_T, -m_T\}$.

Demonstração: Temos que $\max\{M_T, -m_T\} = \dfrac{1}{2}\big[M_T + (-m_T) + \mid M_T - (-m_T) \mid \big]$ e $-m_T = -\inf\{\langle Tx, x\rangle\} = \sup\{-\langle Tx, x\rangle\}$, logo temos que
$\max\{M_T, -m_T\} = \dfrac{1}{2}\big[\sup\{\langle Tx, x\rangle\} + \sup\{-\langle Tx, x\rangle\} + \mid \sup\{\langle Tx, x\rangle\} - \sup\{-\langle Tx, x\rangle\} \mid \big]$
$= \dfrac{1}{2}\big[\mid \sup\{\langle Tx, x\rangle + \langle Tx, x\rangle\} \mid \big] = \dfrac{1}{2}(2 \mid \sup\{\langle Tx, x\rangle\} \mid) = \sup\{\mid \langle Tx, x\rangle \mid\}$, assim temos que $\max\{M_T, -m_T\} = \sup\{\mid \langle Tx, x\rangle \mid\}$. Portanto pela proposição (2) temos que se $m_T = \inf\{\langle Tx, x\rangle\};\ \|x\| = 1$ e $M_T = \sup\{\langle Tx, x\rangle;\ \|x\| = 1\}$ então $\|T\| = \max\{M_T, -m_T\}$.

■

Proposição 4. *Sejam* E *e* F *espaços de Banach e* $T \in \mathcal{L}(E, F)$, *diz-se que* T *é compacto se* $\overline{T(B_E(0, 1))}$ *é relativamente compacto em* F. *O conjunto dos operadores compactos denota-se por* $\mathcal{L}_K(E, F)$. *Além disso temos que* $\mathcal{L}_K(E, F)$ *é subespaço fechado de* $\mathcal{L}(E, F)$.

Demonstração: Consideramos (T_n) uma sequência de elementos de $\mathcal{L}_K(E, F)$ convergente para um operador $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

Afirmação: cada sequência em $T(\overline{B}_E)$ possui uma subsequência convergente.

De fato, seja $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência em $\overline{B}_E$. De $(T_n) \in \mathcal{L}_K(E, F)$, temos que T_1 é compacto, logo $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ possui uma subsequência $(x_j^1)_{j=1}^{\infty}$ tal que a sequência $(T_1 x_j^1)_{j=1}^{\infty}$ é convergente. Do mesmo modo, T_2 é compacto e daí $(x_j^1)_{j=1}^{\infty}$ possui uma subsequência $(x_j^2)_{j=1}^{\infty}$

tal que $(T_2x_j^2)_{j=1}^{\infty}$ é convergente. Prosseguindo de forma análoga para cada $i \in \mathbb{N}$ obtemos uma subsequência $(x_j^i)_{j=1}^{\infty}$ de $(x_j^{i-1})_{j=1}^{\infty}$ tal que $(T_ix_j^i)_{j=1}^{\infty}$ é convergente. Consideramos a sequência diagonal $(z_j)_{j=1}^{\infty} = (x_j^j)_{j=1}^{\infty}$, assim $(z_j)_{j=1}^{\infty}$ é uma subsequência de $(x_j^i)_{j=1}^{\infty}$ tal que $(T_iz_j)_{j=1}^{\infty}$ é convergente para cada i, logo dado $\epsilon > 0$ existe i tal que $\| T_i - T \| < \epsilon$. Fixado i, existe j_0 tal que $\| T_iz_j - T_iz_k \| < \epsilon$ para cada $j, k > j_0$. De onde segue-se que $\| Tz_j - Tz_k \| \leqslant \| Tz_j - T_iz_j \| + \| T_iz_j - T_iz_k \| + \| T_iz_k - Tz_k \| < 3\epsilon$ para cada $j, k > j_0$, logo $(Tz_j)_{j=1}^{\infty}$ é convergente. E assim cada sequência em $T(\overline{B}_E)$ possui uma subsequência convergente. Portanto $\mathcal{L}_K(E, F)$ é subespaço fechado de $\mathcal{L}(E, F)$. ■

Proposição 5. *Se E é Hilbert e $T \in \mathcal{L}_K(E, F)$ é auto-adjunto com $T \neq 0$, então $\|T\|$ ou $-\|T\|$ é autovalor de T e existe um auto vetor associado $x \in S_E$ (esfera de E) tal que $|\langle Tx, x\rangle| = \|T\|$.*

Demonstração: Afirmação: existe uma sequência $(x_n) \subset S_E$ tal que $(Tx_n, x_n) \to \lambda$, onde λ é $\| T \|$ ou $- \| T \|$.
De fato, seja $(y_n) \subset S_E$ e $Ty_n = \lambda y_n$, como S_E é compacto temos que (y_n) possui uma subsequência $(x_n) \subset S_E$ convergente em S_E. Suponha $x_n \to x$, logo $\| x \| = 1$ e $(Tx_n, x_n) = (\lambda x_n, x_n) \to (Tx, x) = (\lambda x, x) = \lambda(x, x) = \lambda \| x \|^2 = \lambda$. Como $\| T \| = max\{m_T, M_T\}$, onde $m_T = \inf\{\langle Tx, x\rangle\}$; $\|x\| = 1$ e $M_T = \sup\{\langle Tx, x\rangle;\ \|x\| = 1\}$, temos que λ é $\| T \|$ ou $- \| T \|$.
Observamos que:
$0 \leqslant \| Tx_n - \lambda x_n \|^2 = (Tx_n - \lambda x_n, Tx_n - \lambda x_n) = \| Tx_n \|^2 - \lambda(Tx_n, x_n) - \lambda(x_n, Tx_n \lambda^2 \| x_n \|^2 \leqslant \| T \|^2 - 2\lambda(Tx_n, x_n) + \lambda^2 \to \| T \|^2 - 2\lambda\lambda + \lambda^2 = 0$, isso devido o resultado da afirmação. Daí temos que $Tx_n - \lambda x_n \to 0$, como T é compacto, a sequência (Tx_n) possui uma subsequência convergente, suponhamos, sem perda de generalidade, que $Tx_n \to y$, como $Tx_n - \lambda x_n \to 0$, temos que $\lambda x_n \to y$. Como $\lambda \neq 0$, temos que $x_n \to x = \dfrac{y}{\lambda}$, como $\| x_n \| = 1$ segue-se que $\| x \| = 1$. Mas por uma lado $Tx_n \to y = \lambda x$ e por outro lado $Tx_n \to Tx$. Logo $Tx = \lambda x$, assim λ é um autovalor de T. Daí temos que $| (Tx_n, x_n) | \to \| T \|$ e portanto $| (Tx, x) | = \| T \|$. ■ A seguir, enuciaremos o principal resultado desta seção.

Teorema 13. ***(Teorema Espactral)*** *Se E é Hilbert, $T \in \mathcal{L}_K(E, F)$ e $T \neq 0$. Então:*

(1) *Existe uma sequência (λ_n) de autovalores e (x_n) de autovetores correspondentes tal que:*

$$Tx = \sum \lambda_n \langle x, x_n\rangle x_n = \sum \langle Tx, x\rangle x_n$$

$\forall x \in E$. *A sequência* (x_n) *é ortonormal.*

(2) *Se* (λ_n) *é infinita então* $\lambda_n \to 0$.

(3) *Cada* λ_n *é diferente de zero. O subespaço de autovetores correspondentes* E_λ *tem dimensão finita. A dimensão de* (E_λ) *coincide com o número de vezes que* λ *aparece na sequencia* (λ_n).

Demonstração:

1- Pela propsição 5, obtemos $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ e $x_1 \in E$ com $\| x_1 \| = 1$, tais que
$Tx_1 = \lambda_1 x_1$, $|\lambda_1| = \| T \|$. Seja $E_1 = \langle x_1 \rangle$ o espaço gerado por x_1.
Afirmação: $T(E_1^\perp) \subset E_1^\perp$.
De fato, para cada $x \in E_1^\perp$ tem-se que $(Tx, x_1) = (x, Tx_1) = (x, \lambda_1 x_1) = \lambda_1 (x, x_1) = 0$.
Se $T|_{E_1^\perp}$ é identicamente nulo, termina ademonstração. Caso contrário, aplicamos o resultado da proposição 5 à restrição $T|_{E_1^\perp}$, e obtemos $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, e $x_2 \in E_1^\perp$, com $\| x_2 \| = 1$, tais que $Tx_2 = \lambda_2 x_2$, $|\lambda_2| = \| T|_{E_1^\perp} \|$. Prossedendo indutivamente obtemos uma sequência $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$, com $\lambda_n \neq 0$, e uma sequência correspondente $(x_n) \subset E$, com $\| x_n \| = 1$, tais que $Tx_n = \lambda_n x_n$, $|\lambda_n| = \| T|_{E_{n-1}^\perp} \|$, $x_n \in E_{n-1}^\perp$, onde $E_n = \langle x_1, \cdots, x_n \rangle$ para cada $n \geqslant 1$. É claro que $(|\lambda_n|)$ é decrescente, e a sequência (x_n) é ortonormal. Suponhamos primeiro que a restrição $T|_{E_n^\perp}$ seja zero para algum n. Cada $x \in E$ pode ser escrito na forma $x = y_n + z_n$, com $y_n \in E_n$, $z_n \in E_n^\perp$, e portanto $x = \sum_{j=1}^{n} (x, x_j) x_j + z_n$. Como $T|_{E_n^\perp} = 0$, segue-se que $Tx = \sum_{j=1}^{n} (x, x_j) T x_j = \sum_{j=1}^{n} (x, x_j) \lambda_j x_j = \sum_{j=1}^{n} (x, \lambda_j x_j) x_j$
$= \sum_{j=1}^{n} (x, T x_j) x_j = \sum_{j=1}^{n} (Tx, x_j) x_j$.

2- Suponhamos que a sequência (λ_n) seja infinita, mas $\lambda_n \nrightarrow 0$. Como $(|\lambda_n|)$ é decrescente, existe $\epsilon > 0$ tal que $|\lambda_n| > \epsilon$ para todo n. Como T é compacto, segue que a sequência Tx_n admite uma subsequência convergente, mas $Tx_n = \lambda_n x_n$ e $|\lambda_n| > \epsilon$, segue-se que (x_n) admite uma subsequência convergente, o que é uma absurdo, pois como (x_n) é ortonormal temos que $\| x_n - x_m \|^2 = 2$ para $n \neq m$.
Portanto, se (λ_n) é infinita então $\lambda_n \to 0$.

3-Suponhamos que exista um autovalor $\lambda \neq 0$ de T que não apareça na sequência (λ_n). Seja x um autovetor correspondente, $x \neq 0$. Neste caso $(x, x_n) = 0$ para cada n, daí segue que $Tx = 0$. Absurdo, pois $Tx = \lambda x$, com $\lambda \neq 0$, $x \neq 0$.
Suponhamos que um autovalor $\lambda \neq 0$ apareça p vezes na sequêencia (λ_n). Neste caso o

subespaço E_λ contém um subconjunto ortonormal formado por p vetores $x_{n_1}, \cdots, x_{n_p}$, e daí $\mathtt{dim}E_\lambda \leqslant p$. Se fosse $\mathtt{dim}E_\lambda > p$, então existiria $x \in E_\lambda$, com $x \neq 0$ e $(x, x_{n_j}) = 0$ para $j = 1, \cdots, p$. Daí $(x, x_n) = 0$ para todo n, de onde teríamos $Tx = 0$, novamente um absurdo. Logo $\mathtt{dim}E_\lambda = p$. ∎

Proposição 6. *Seja* A *um operador linear definido num espaço de Hilbert* H *tal que* $A \geqslant 0$. *Então*

$$\big|\big(Au,\, v\big)\big|^2 \leqslant \big(Au,\, u\big)\big(Av,\, v\big) \text{ para todo } u,\ v \text{ em } H.$$

Demonstração: Se $A = I$ obtém-se a desigualdade de Schwarz. Consideremos o vetor $w(\lambda) = u + \lambda\big(Au,\, v\big)v$. Tem-se $\big(Aw(\lambda),\, w(\lambda)\big) \geqslant 0$ para todo λ real, isto é,

$$\big(Au + \lambda(Au,\, v)Av,\, u + \lambda(Au,\, v)v\big) \geqslant 0$$

ou

$$\big(Au,\, u\big) + 2\lambda\big|\big(Au,\, v\big)\big|^2 + \lambda^2\big|\big(Au,\, v\big)\big|^2\big(Av,\, v\big) \geqslant 0,$$

daí temos que

$$4\big|\big(Au,\, v\big)\big|^4 - 4\big|\big(Au,\, v\big)\big|^2\big(Av,\, v\big)\big(Au,\, u\big) \leqslant 0$$

de onde resulta que $\big|\big(Au,\, v\big)\big|^2 \leqslant \big(Au,\, u\big)\big(Av,\, v\big)$. ∎

Proposição 7. *Seja* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de elementos simétrico, monótona e limitada definida no espaço de Hilbert* H. *Então* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergente em* H, *além disso o operador* $Au = \lim A_n u$ *é simétrico e limitado.*

Demonstração: Sendo $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitada, podemos supor que $0 \leqslant A_n \leqslant I$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para fixar as ideias, suponhamos a sequência crescente. É suficiente mostrar que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. Suponhamos $m < n$ e seja $A_{nm} = A_n - A_m$, logo pela proposição (6) obtemos que:

$$\|A_{nm}u\|^4 = \big(A_{nm}u,\, A_{nm}u\big)^2 \leqslant \big(A_{nm}u,\, u\big)\big(A_{nm}^2u,\, A_{nm}u\big).$$

Sendo $0 \leqslant A_n \leqslant I$, conclui-se que $\|A_{nm}\| \leqslant 1$, $\big(A_{nm}u,\, u\big) \leqslant \big(u,\, u\big)$ e $\big(A_{nm}^2u,\, A_{nm}u\big) \leqslant \|A_{nm}\|\big(A_{nm}u,\, u\big) \leqslant \big(u,\, u\big)$. Resulta destas considerações, que

$$\|A_nu - A_mu\|^4 \leqslant \big(A_{nm}u,\, u\big)\big(u,\, u\big) = \big\{\big(A_n,\, u\big) - \big(A_mu,\, u\big)\big\}\big(u,\, u\big).$$

Sendo $\big((A_n u, u)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais monótona e limitada, ela será convergente, logo de Cauchy. Portanto, a desigualdade anterior nos leva a concluir que $\lim \|A_n u - A_m u\| = 0$, provando que a sequência $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge em H.

Afirmamos que o operador $Au = \lim A_n u$ é simétrico!

De fato,

$\big(Au, u\big) = \big(\lim A_n u, u\big) = \lim\big(A_n u, u\big) = \lim\big(u, A_n u\big) = \big(u, \lim A_n u\big) = \big(u, Au\big)$.

Portanto temos que o operador $Au = \lim A_n u$ é simétrico. ∎

Teorema 14. *Seja A um operador linear auto-adjunto, simétrico e positivo num espaço de Hilbert H. Então existe um único operador Z linear auto-adjunto, simétrico e positivo em H tal que $Z^2 = A$. Tal operador Z é chamado de raiz quadrada de A, o qual também é um operador positivo.*

Demonstração: Sem perda de generalidade, podemos supor que $0 \leqslant A \leqslant I$. Assim, pode-se escrever $A = I - B$, com $0 \leqslant B \leqslant I$ e $Z = I - Y$ com $0 \leqslant Y \leqslant I$. Daí temos que, resolver $Z^2 = A$, significa resolver $(I - Y)^2 = I - B$, ou seja, significa resolver a seguinte equação

$$Y = \frac{1}{2}(B + Y^2). \tag{A.5}$$

Para a existência da solução de $(A.5)$ usaremos o método de aproximações sucessivas. Iniciaremos com a aproximação $Y_0 = 0$, da qual obtém-se $Y_1 = \frac{1}{2}B$ de onde resulta que $Y_2 = \frac{1}{2}\bigg(B + \big(\frac{B}{2}\big)^2\bigg)$. Continuando o processo obtemos $Y_{n+1} = \frac{1}{2}\big(B + Y_n^2\big)$ para todo $n \geqslant 0$. Mostraremos agora que a sequência $\big(Y_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ assim definida, é convergente, cujo limite é solução de $(A.5)$. Observe que para cada n fixo, Y_n é um polinômio em B com coeficientes positivos, o que acarreta $Y_n Y_m = Y_m Y_n$, para todo par n, m de inteiros.

Portanto

$$Y_{n+1} - Y_n = \frac{1}{2}\big(B + Y_n^2\big) - \frac{1}{2}\big(B + Y_{n-1}^2\big) = \frac{1}{2}\big(Y_n + Y_{n-1}\big)\big(Y_n - Y_{n-1}\big).$$

Tem-se $B^n \geqslant 0$ para $n = 2, 3, \cdots$, porque $B \geqslant 0$. Sendo Y_n polinômio em B, com coeficientes positivos, resulta que $Y_n \geqslant 0$ para todo n, assim temos $Z_n = Y_{n+1} - Y_n$ é tal que $Z_1 = Y_2 - Y_1 \geqslant 0$. Suponhamos $Z_n = Y_{n+1} - Y_n \geqslant 0$, logo como $Z_{n+1} = Y_{n+2} - Y_{n+1} = \frac{1}{2}\big(Y_{n+1} + Y_n\big)\big(Y_{n+1} - Y_n\big)$ temos que $Z_{n+1} \geqslant 0$, portanto temos que Y_n é uma sequência crescente de elementos simétricos.

Afirmamos que $\|Y_n\| \leqslant 1$.

De fato, para $n = 1$ temos $\|Y_1\| = \|\frac{1}{2}B\| \leqslant \frac{1}{2}\|I\| = 1$, suponhamos por indução que $\|Y_n\| \leqslant 1$, daí temos que $\|Y_{n+1}\| = \|\frac{1}{2}\big(B + Y_n^2\big)\| \leqslant \frac{1}{2}\big(\|B\| + \|Y_n^2\|\big) \leqslant 1$, portanto pelo princípio de indução temos que $\|Y_n\| \leqslant 1$.

Daí resulta que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de elementos simétricos, monótona e limitada, logo pela proposição (7) temos que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente para um elemento simétrico Y, isto é, $Yu = \lim Y_n u$. Tomando o limite em $Y_{n+1} = \frac{1}{2}\big(B+Y_n^2\big)$, nos dá $Y = \frac{1}{2}(B + Y^2)$, provando que Y é solução de $Y = \frac{1}{2}(B + Y^2)$. Sendo $\|Y\| = \lim \|Y_n\| \leqslant 1$, conclui-se $X = I - Y \geqslant 0$, que é a solução de $Z^2 = A$.

Unicidade da raiz quadrada: Suponhamos que A possui duas raízes quadradas Z, Z', isto é, $Z^2 = A = Z'^2$. Coclui-se que $Z'A = AZ' = Z'^3$, isto é, A comulta com Z', portanto $Z^2 - Z'^2 = \big(Z + Z'\big)\big(Z - Z'\big)$.

Consideramos as raízes quadradas positivas R, R' de Z e Z' respectivamente, isto é, $R^2 = Z$, $R'^2 = Z'$. Consideramos um vetor qualquer u em H e seja $v = \big(Z - Z'\big)u$. É suficiente mostrar que $v = 0$, isto é, $Z = Z'$.

Tem-se,

$$\|Rv\|^2 + \|R'v\|^2 = \big(R^2v,\, v\big) + \big(R'^2v,\, v\big) = \big(Zv,\, v\big) + \big(Z'v,\, v\big)$$

$$= \big(Z(Z - Z')u,\, v\big) + \big(Z'(Z - Z')u,\, v\big) = \big((Z^2 - Z'^2))u,\, v\big) = \big((A - A)u, u\big) = 0$$

para todo u. Logo $Rv = R'v = 0$, ou seja, $Zv = R^2v = R(Rv) = 0$ e $Z'v = R'^2v = R'(R'v) = 0$, daí resulta que

$$\|(Z - Z')u\|^2 = \big((Z - Z')^2u,\, u\big) = \big((Z - Z')v,\, u\big) = 0$$

para todo u em H, Assim $(Z - Z')u = 0$, para todo u em H.

Daí, $Z = Z'$, provando assim unicidade da raiz quadrada de A.

$\blacksquare$

Apêndice B

Prolongamento de Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias

B.1 Introdução

O objetivo deste apêndice é demonstrar teoremas de existência e prolongamento de soluções de Equações Diferenciais Ordinárias nas condições de Carathéodory. Estes resultados podem ser aplicados para demonstrar a existência de soluções aproximadas, segundo Galerkin, de certas equações diferenciais parciais. Para um maoir aprofundamento nestas ideias pode-se consultar [15] ou [5]. Seja D um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$ cujos elementos serão denotados por (t, x), $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ e seja $f : D \to \mathbb{R}^n$ uma função não necessariamente contínua. O problema é encontrar uma função absolutamente contínua $x(t)$ definida em algum intervalo da reta I tal que $(t, x(t)) \in D$, para todo $t \in I$ e

$$x' = f(t, x), \text{ para quase todo } t \text{ em I.} \tag{B.1}$$

Se uma tal função $x(t)$ e um tal intervalo I existem, então diz-se que $x(t)$ é uma solução de (15) sobre I. Se $(t_0, x_0) \in D$ associado a (15) e a (t_0, x_0), se tem o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{B.2}$$

é dizer, o problema de encontrar uma solução $x(t)$ de (15) sobre I tal que $t_0 \in$ I e $x(t_0) = x_0$.

Seja D um D um subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ e $f : D \to \mathbb{R}^n$ então diz-se que f satisfaz as condições de Carathéodory sobre D se:

a) $f(t, x)$ é mensurável em t para cada x fixo;

b) $f(t, x)$ é contpinua em x para cada t fixo;

c) para cada compacto U em D existe uma função real integrável $m_U(t)$ tal que

$$|f(t, x)| \leqslant m_U(t), \ \forall (t, x) \in U.$$

B.2 Existência e Prolongamento de Soluções

Consideremos o retângulo $R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}; \, |t - t_0| \leqslant a, \, |x - x_0| \leqslant b\}, \ a > 0, \ b > 0.$

Teorema 15. ***(Carathéodory)*** *Seja* $f : R \to \mathbb{R}^n$ *que satisfaz as condições de Carathéodory sobre* R*, então existe uma solução* $x(t)$ *de (2) sobre algum intervalo* $|t - t_0| \leqslant \beta, \ \beta > 0.$

Demonstração: *Seja* $m(t) = m_R(t)$*, isto é,* $|f(t, x)| \leqslant m(t), \ \forall (t, x) \in R$*. Consideremos o caso* $t \geqslant t_0$*, a demonstração para* $t \leqslant t_0$ *é semelhante. Seja* $M(t)$ *definida por*

$$M(t) = \begin{cases} 0 & t_0 - a \leqslant t < t_0 \\ \displaystyle\int_{t_0}^{t} m(s)ds & t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + a \end{cases}$$

Obviamente, $M(t)$ *é contínua, não decrescente e* $M(t_0) = 0$*.*

Seja $\big(M(t)\big) = \big(M(t), \cdots, M(t)\big) \in \mathbb{R}^n$ *então* $\big(t, \, x_0 \pm (M(t))\big) \in R$ *para algum intervalo* $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \beta \leqslant t_0 + a, \ \beta > 0$*. Escolhenmos qualquer* $\beta > 0$ *para o qual o anterior é válido, e definimos por indução as aproximações* φ_j*,* $(j = 1, \, 2, \cdots)$ *por*

$$\varphi_j(t) = \begin{cases} x_0 & t_0 \leqslant t < t_0 + \dfrac{\beta}{j} \\ x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t - \frac{\beta}{j}} f(s, \, \varphi_j(s))ds & t_0 + \dfrac{\beta}{j} \leqslant t \leqslant t_0 + \beta \end{cases} \tag{B.3}$$

Claramente $\varphi_1(t) \equiv x_0$ *para qualquer* $j \geqslant 1$ *a primeira fórmula de* (16) *define* $\varphi_j(t) \equiv x_0$ *sobre* $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \dfrac{\beta}{j}$ *e como* $(t, x_0) \in R$ *para* $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \dfrac{\beta}{j}$*, a segunda fórmula define* $\varphi_j(t)$ *sobre* $t_0 + \dfrac{\beta}{j} < t \leqslant t_0 + \dfrac{2\beta}{j}$*, pois para qualquer* t *neste intervalo se tem que* $t_0 < t - \dfrac{\beta}{j} \leqslant t_0 + \dfrac{\beta}{j}$*, portanto a integral de* (16) *está bem definida. Notamos que* $\varphi_j(t)$ *é contínua em* $[t_0, \, t_0 + \dfrac{2\beta}{j}]$ *e sobre este intervalo se tem* $|\varphi_j(t) - x_0| \leqslant M(t - \dfrac{\beta}{j}) \leqslant b$*.*

Suponhamos que para $1 < k < j, \ \varphi_j(t)$ *está definida sobre* $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \dfrac{k\beta}{j}$*, é contínua e sobre este intervalo se tenha* $|\varphi_j(t) - x_0| \leqslant M(t - \dfrac{\beta}{j})$*, então a segunda fórmula de* (16)

define $\varphi_j(t)$ *para* $t_0 + \frac{k\beta}{j} < t \leqslant t_0 + \frac{(k+1)\beta}{j}$. *Também sobre* $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \frac{(k+1)\beta}{j}$ *a função* $\varphi_j(t)$ *é contínua e* $|\varphi_j(t) - x_0| \leqslant M(t - \frac{\beta}{j})$ *sobre este interavlo. Por conseguinte, por indução,* (16) *define funções contínuas* $\varphi_j(t)$ *sobre* $[t_0,\ t_0 + \beta]$ *tal que*

$$|\varphi_j(t) - x_0| \leqslant M(t - \frac{\beta}{j})\ t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \beta.$$

Desta desigualdade segue que as $\varphi_j(t)$ *são uniformemente limitadas em* $[t_0,\ t_0 + \beta]$.

Se $t_1,\ t_2 \in [t_0,\ t_0 + \beta]$ *se tem*

$$|\varphi_j(t_1) - \varphi_j(t_2)| \leqslant |M(t_1 - \frac{\beta}{j}) - M(t_2 - \frac{\beta}{j})|$$

e como $M(t)$ *é uniformemnte contínua em* $[t_0,\ t_0+\beta]$ *segue que as* $\varphi_j(t)$ *são equicontínuas em* $[t_0,\ t_0+\beta]$. *De onde pelo teorema de Ascoli, se tem que existe uma subcequência* (φ_{j_k}) *de* (φ_j) *e uma função* $\varphi(t)$ *contínua em* $[t_0,\ t_0 + \beta]$ *tal que*

$$\varphi_{j_k}(t) \to \varphi(t) \text{ uniformemente em } [t_0,\ t_0 + \beta].$$

Se tem $|f(t,\ \varphi_{j_k}(t))| \leqslant m(t),\ t \in [t_0,\ t_0 + \beta]$ *e como* f *é contínua em* x *para cada* t *fixo,* $f(t,\ \varphi_{j_k}(t)) \to f(t,\ \varphi(t))$ *para cada* $t \in [t_0,\ t_0 + \beta]$. *Usando o teorema da convergência dominada de Lebesgue se obtém*

$$\int_{t_0}^{t} f(s,\ \varphi_{j_k}(s))ds \to \int_{t_0}^{t} f(s,\ \varphi(s))ds$$

para cada $t \in [t_0,\ t_0 + \beta]$. *Seja* $t \in [t_0,\ t_0 + \beta]$ *fixo, então para* k *apropriado se tem*

$$\varphi_{j_k}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\ \varphi_{j_k}(s))ds - \int_{t-\frac{\beta}{j_k}}^{t} f(s,\ \varphi_{j_k}(s))ds$$

de onde tomando limite obtemos

$$\varphi_{j_k}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\ \varphi_{j_k}(s))ds.$$

Assim, $\varphi(t)$ *é uma solução que procuramos.* ∎

Corolário 2. *Seja* D *aberto de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *e* f *satisfazendo as condições de carathéodory sobre* D, *então o problema* (2) *tem solução para qualquer* $(t_0,\ x_0) \in D$.

Seja $\varphi(t)$ uma solução de (15) sobre I e I $\subset$ I_1, então diz-se que $\varphi(t)$ tem um prolongamento até I_1 se existir $\varphi_1(t)$ tal que $\varphi_1(t)$ é uma solução de (15) sobbre I_1 e $\varphi_1(t) = \varphi(t),\ \forall t \in I$.

Teorema 16. *Seja* D *aberto limitado conexo em* $\mathbb{R}^{n+1}$, f *satisfazendo as duas primeiras condições de Carathéodory sobre* D *e existe uma função integrável* $m(t)$ *tal que*

$|f(t, x)| \leqslant m(t),\ \forall(t, x) \in D$. *Seja* φ *uma solução de* (15) *sobre o intervalo aberto* (a, b) *então*

i) existem $\varphi(a),\ \varphi(b)$*;*

ii) se $(b, \varphi(b)) \in D$ *então* φ *pode ser prolongada até* $(a, b+\delta]$ *para algum* $\delta > 0$. *Análogo resultado para* a*;*

iii) $\varphi(t)$ *pode ser prolongada até um intervalo* (γ, ω) *tal que* $(\gamma, \varphi(\gamma))$, $(\omega, \varphi(\omega)) \in \partial D$, ($\partial D$ *fronteira de* D);

iv) se f *pode estender-se a* $\overline{D}$ *sem que ele perca suas propiedades, então* $\varphi(t)$ *pode ser prolongada até um intervalo* $[\gamma, \omega]$ *tal que* $(\omega, \varphi(\omega)) \in \partial D$.

Demonstração:

i) Tem-se por hipótese que $\displaystyle\int_a^b m(t)dt < \infty$. *Seja*

$$M(t) = \int_a^b m(s)ds \quad a \leqslant t \leqslant b$$

por ser $\varphi(t)$ *uma solução de* (15) *se tem que*

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds \ \forall t \in (a, b)$$

onde $t_0 \in (a, b)$ *e* $\varphi(t_0) = x_0$, *então se* $t_1, t_2 \in (a, b)$ *se obtem*

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| = |\int_{t_1}^{t_2} f(s, \varphi(s))ds| \leqslant |M(t_2) - M(t_1)|,$$

onde por ser $M(t)$ *contínua em* $[a, b]$ *o resultado i) segue aplicando o critério de Cauchy.*

ii) Definimos $\widetilde{\varphi}(t)$ *como*

$$\widetilde{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t) & t \in (a, b) \\ \varphi(b-0) & t = b \end{cases}$$

Tem-se que

$$\widetilde{\varphi}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \widetilde{\varphi}(s))ds \quad t \in (a, b],$$

t_0 *e* x_0 *como na parte i), pois a igualdade é verdadeira para* $t \in (a, b)$ *e se* $t = b$ *então* $\widetilde{\varphi}(b) = \varphi(b)$ *e*

$$x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \widetilde{\varphi}(s))ds = x_0 + \lim_{\epsilon\to 0}\int_{t_0}^{t-\epsilon} f(s, \widetilde{\varphi}(s))ds = x_0 + \lim_{\epsilon\to 0}\int_{t_0}^{t-\epsilon} f(s, \varphi(s))ds$$

$$= x_0 + \lim_{\epsilon\to 0}[\varphi(b-\epsilon) - \varphi(t_0)] = \varphi(b).$$

Sendo $(b, \varphi(b)) \in D$ *então, pelo teorema anterior, segue que o problema de valor inicial*

$$x' = f(t, x)$$

$$x(t) = \varphi(b)$$

tem uma solução $\psi(t)$ *no intervalo* $[b, b+\delta]$ *para algum* $\delta > 0$.

Seja

$$\widehat{\varphi}(t) = \begin{cases} \widetilde{\varphi}(t) & t \in (a,\, b] \\ \psi(t) & t \in (b, b+\delta] \end{cases}$$

Tem-se que

$$\widehat{\varphi}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \widehat{\varphi}(s))ds \ t \in (a, b+\delta],$$

pois aigualdade é verdadeira para $t \in (a, b]$ *e se* $b < t \leqslant b+\delta$ *se tem*

$$\widehat{\varphi}(t) = \psi(t) = \varphi(b) + \int_{b}^{t} f(s, \psi(s))ds = x_0 + \int_{t_0}^{b} f(s, \widetilde{\varphi}(s))ds$$

$$+ \int_{b}^{t} f(s, \psi(s))ds = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \widehat{\varphi}(s))ds.$$

Assim, $\widehat{\varphi}$ *é um prolongamento de* $\varphi(t)$ *ao intervalo* $(a, b+\delta]$.

Analogamente faze-se a demonstração para o extremo a.

iii) Demonstraremos para o lado direito, análoga demonstração se faz para o lado esquerdo. Se tem que $(b, \varphi(b)) \in \overline{D}$, *de onde* $(b, \varphi(b)) \in \partial D$ *ou* $(b, \varphi(b)) \in D$. *Suponhamos que* $(b, \varphi(b)) \in D$, *entaõ por ii)* φ *pode ser prolongada até um intervalo da forma* $(a, b+\delta]$, $\delta > 0$. *Seja* U *um subconjunto de* D *compacto, conexo, cujo interior é diferente do vazio tal que* $(t, \varphi(t)) \in U$ *para todo* $t \in (a, b+\delta]$, *(se* $(a, \varphi(a)) \in \partial D$ *então escolhemos* a' *tal que* $a < a' < b$ *e trabalhamos com* a' *no lugar de* a*). Seja* $[c, d]$ *a projeção de* U *sobre o eixo dos* t *e escolhemos* $\epsilon > 0$ *tal que a projeção de* D *sobre o eixo* t *contenha o intervalo* $[c-\epsilon, d+\epsilon]$.

Seja

$$N(t) = \int_{c-\epsilon}^{t} m(s)ds \ \ t \in [c-\epsilon, d+\epsilon].$$

Existem $p > 0$, $q > 0$ *tais que qualquer retângulo*

$$R_{s_0,y_0} : |t - s_0| \leqslant p, \ |x - y_0| \leqslant q,$$

com (s_0, y_0) *percorrendo* U, *está contido em* D. *Existe* $\beta > 0$ *tal que se* $|t - s_0| \leqslant \beta$, $t, s_0 \in [c-\epsilon, d+\epsilon]$ *então* $|N(t) - N(s_0)| = \Big|\int_{s_0}^{t} m(s)ds\Big| \leqslant \dfrac{q}{\sqrt{n}}$. *De onde, pela demonstração do*

Teorema 15, para qualquer R_{s_0,y_0} *sempre existe uma solução* φ_{s_0,y_0} *do problema (B.2) no intervalo* $[s_0, s_0 + \beta]$.

Disto segue-se que, pela compacidade de U*, depois de um número finito de passos, podemos prolongar* $\varphi(t)$ *até um intervalo* $(a, b_U]$ *tal que* $(b_U, \varphi(b_U)) \notin U$.

Agora, seja (V_m) *uma sequência de conjuntos abertos de* D *tais que* $\bigcup_{m=1}^{\infty} V_m = D$, $\overline{V}_m$ *é compacto e* $\overline{V}_m \subset V_{m+1}$, $m = 1, 2, \cdots$. *Suponhamos que* $(t, \varphi(t)) \in V_{m_0}$, $t \in (a, b)$ *então prolongamos* φ *até um intervalo* $(a, b_{m_0}]$ *tal que* $(b_{m_0}, \varphi(b_{m_0})) \notin \overline{V}_{m_0}$. *Suponhamos que* $(t, \varphi(t)) \in V_{m_1}$ *então prolongamos o prolongamento aterior até um intervalo* $(a, b_{m_1}]$ *tal que* $(b_{m_1}, \varphi(b_{m_1})) \notin \overline{V}_{m_1}$, *e assim sucessivamente. Assim consegue-se um sequência* (b_{m_j}) *não decrescente de números reais. Seja* $w = \sup_j b_{m_j}$ *então é claro que* $\varphi(t)$ *tem um prolongamento até* (b, w)*, e pela construção de* w*,* $(w, \varphi(w))$ *não pode pertencer a* D*, donde* $w, \varphi(w)) \in \partial D$.

Assim fica demonstrada a parte iii).

iv) Demonstraremos para o lado direito, análogo demostração se faz para o lado esquerdo. Pela parte i), existe $\varphi(w)$ *e pela parte iii),* $(w, \varphi(w)) \in \partial D$. *Se definirmos* $\varphi(w)$ *como* $\varphi(w)$ *então, por demonstração análoga à primeira parte de ii) tem-se*

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds \;\; t \in (a, w].$$

O que prova a parte iv). ■

Corolário 3. *Seja* $D = [0, T] \times B$, T *finito* > 0, $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leqslant b\}$, $b > 0$ *e* f *nas condições do Teorema* 16.

Seja $\varphi(t)$ *um solução de*

$$x' = f(t, x)$$

$$x(0) = x_0, \;\; |x_0| \leqslant b.$$

Suponhamos que em qualquer intervalo I *onde* $\varphi(t)$ *está definida, se tenha* $|\varphi(t)| \leqslant M$, *para todo* $t \in I$, M *independente de* I *e* $M < b$. *Então* φ *tem um prolongamento até* $[0, T]$.

Demonstração: *Pelo teorema anterior,* $\varphi(t)$ *tem um prolongamento até um intervalo* $[0, w]$ *tal que* $(w, \varphi(w)) \in \partial D$. *Pela natureza do conjunto* D*, se tem que* $(w, \varphi(t)) \in \Gamma_1 = \{(t, x); |x| = b, 0 \leqslant t \leqslant T\}$. *ou* $(w, \varphi(t)) \in \Gamma_2 = \{(T, x); |x| = b \leqslant 0\}$. *Acontece que* $|\varphi(t)| \leqslant M$, *para todo* $t \in I$, I *intervalo qualquer onde está definido* $\varphi(t)$*, assim* $(w, \varphi(w)) \in \Gamma_2$, *donde* $w = T$, *o que prova o corolário.* ■

Referências Bibliográficas

[1] Bachman, G. and Narici, L.: *Functional Analysis*, Dover, New York, 2000.

[2] Bestein, S., *Sur une Classe d'Équations Fonctionelles aux Derivées Partielles,* Isv. SSSR, Serie Math. 4, (1940), 17-26.

[3] Brézis, H.*Analise Fonctionalle. Théori et applications* DUNDOD, Paris (1999).

[4] Castro, N.N. de O.:*Soluções Fracas para um Sistema Hiperbólico Envolvendo o Operador p-Laplaciano.* João Pessoa: Universidade Federal da Paraíba. Notas de um Curso de Verão, 2005.

[5] Coddington, E. A. e Levinson, N. *Theory of Ordinary Differential Equations.* New York: Mcgraw-Hill Book co. 1955.

[6] Dickey, R. A. *Quasilinear Evolution Equation and the Method of Galerjin, Proc. of the A.M.S.,* 37(1), (1973), 149-156.

[7] Kirchoff, G., *Vorlesungen Über Mechanik.* (Tauber, Leipzing, 1883).

[8] Lima, E. L.: Espaços Métricos, *Projeto Euclides*, IMPA, Rio de Janeiro, 1977.

[9] Frigys Risz and Béla Sz.- Nagy; *Functional Analysis. Dowr Publications, Inc. New York, 1953.*

[10] Lions, J. L. *"On some questions in boundary value problems of Mathematical Physics", International Symposium on Continuum Machanics and Partial Differential Equations,* Rio de Janeiro, (1977), North-Holland. Dunod, Paris, (1978).

[11] Medeiros, L. A. Limaco, J. and Menezes, S. B. *Vibrations of Elastic String: Mathematical Aspects, Part One, Journal Computational Analysis and Applications,* 4(2), (2002), 91-127.

[12] Medeiros, L. A. Limaco, J. and Menezes, S. B. *Vibrations of Elastic String: Mathematical Aspects, Part Two, Journal Computational Analysis and Applications,* 4(3), (2002), 211-263.

[13] Medeiros, L. A. *Teoria Espectral em Espaços de Hilbert.*

[14] Medeiros, L. A.: *Equações Diferenciais Parciais, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1981.*

[15] Medeiros, L. A- Rivero, P. H. *Textos de Métodos Matemáticos nº 9; Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Prciais*- UFRJ Rio de Janeiro-RJ, 1975.

[16] Nakao, M. *Decay of Solution of some Nonlinear Evolution Equations,* J. Math. Appl., 60 (1977).

[17] Nishihara, K. *Degenerate quasilinear hyperbolic equation with strong damping*, 27, (1984), 125-145.

[18] Ono, K. *On global existence, asymptotic stability and blowing up of solutios for some degenerate non-linear wave equations of Kirchhoff type with a strong dissipation*, Math. Methods Appl. Sci., 20(2), (1997), 151-177.

[19] Pohozaev, S. I.:*On a class of quasilinear hyperbolic equations, Math Sbornik, 95(1975), 152-166.*

[20] Vasconcellos, C. F. and Teixeira, L. M. *Strong Solutions and Exponential Decay for a Nonlinear Hyperbolic Equation,* Applicable Analysis. 55, (1993), 155-173.