Universidade Federal do Piauí

Centro de Ciências da Natureza

Pós-Graduação em Matemática

Mestrado em Matemática

A CURVATURA MÉDIA DE SUBVARIEDADES CILINDRICAMENTE LIMITADAS

FRANCIANE DE BRITO VIEIRA

Teresina - 2012

FRANCIANE DE BRITO VIEIRA

Dissertação de Mestrado:

A CURVATURA MÉDIA DE SUBVARIEDADES CILINDRICAMENTE LIMITADAS

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. BARNABÉ PESSOA LIMA
Co-Orientador:
Prof. Dr. PAULO ALEXANDRE ARAÚJO SOUSA

Teresina - 2012

Vieira, Franciane de Brito.

A Curvatura Média de Subvariedades Cilindricamente Limitadas.

Franciane de Brito Vieira– Teresina: 2012.

Orientador: Prof. Dr. Barnabé Pessoa Lima.

Co-Orientador: Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa.

1. Geometria Diferencial

CDD 516.36

A minha familia.

Agradecimentos

Agradeço a minha familia que tiveram um papel importante para exercução desta etapa, em especial aos meus pais: Zenilda e Arnaldo, por ter acreditado em meu sonho. Agradeço também aos meus irmãos: Maria de fátima e Fernando pela grande amizade e amor. Agradeço aos meus tios: Francisca e Chaguinha, que também são como pais para mim.

Agradecimento muito especial a todos meus amigos de Cocal dos Alves, em especial: Luzanira(tia Nira) e Dejnane, nunca vou esquecer das nossas brincadeiras no Colégio, das brigas e principalmente do nosso companheirismo. Não poderia deixar de agradecer as minhas eternas parceiras de estudos, festas e fofocas, que são elas: Sandra(Sandrinha Maravilha), Edna, Maria Siqueira, Francisca Moura, Cleidiane e Antonia Araujo. Muito obrigada meninas pelos mais diversos momentos que passamos juntas e também pelos amendoim do João Roseira.

Agradeço ao companheirismo dos meus amigos da graduação: Gideône, Alexson, Ederson, Roberto, Cleiton. Gideône e Alexson serei sempre grata pela força e também pelos ensinamentos. Não posso deixar de agradecer meu salvador em física I e física II, Natanael muito obrigada. Adoro todos vocês meninos.

Agradeço a todos os meus amigos da residência Universitária da UFPI, em especial as minhas colegas de quarto: Jaqueline, Emiliana, Jusamara, Priscila. Vocês me ensinaram que amizade também é respeito e compreensão. Um agradecimento todo especial a minha grande amiga Elizabete cardoso, companheira no ensino médio, graduação e residência. Eu digo que sou uma pessoa sortuda por ter conhecido uma pessoal tão especial como você Elizabete.

Agradeço a todos os professores que contibuirão para minha formação: Aurilene, Amaral, Narjara, João Xavier, Benicio, Mário Gomes, Juscelino, Paulo Alexandre, Newton Santos, Sissy Souza, Paulo Sergio, Jurandir, Umberto, Liane, Aurineide, Vicente. Um agradecimento muito especial ao Professor Barnabé, meu pai acadêmico, amigo e um grande exemplo. Por mais que eu escrever, não será possivel descrever a importância que você tem em minha vida.

Agradeço a todos os meus amigos do mestrado: Cledinaldo(O Naldo), Yuri Rafael, Edvalter, Edvaldo, Leandro, Kelson, Italo Dowel, Arimateia, Daniel, Bernado, Diego Prudêncio, Felipe, Israel, Jefferson, Mikael, Valdir, Emerson, Gilson, Vitaliano e Leonardo. Não poderia esquecer dos meus três grandes parceiros: Renata Batista (Renatinha), Alex Sandro (Milgram) e Valdinês (Doctor, aaaaaahhhhh). Vocês transformaram meus monentos de estudos mais prazerosos e engraçados.

Agradeço ao Marcos Vinicius pela a força, paciência, carinho e comprienção. Você me tornou um pessoa exponencialmente melhor. Agradeço também a Dona Fátima e Sr. Guimarães, Samara e Jonatas pela amizade e por todos os finais de semana maravilhosos que passei junto a vocês.

Enfim, quero agradecer a cada pessoa que direta ou indiretamente colaborou para que este trabalho fosse realizado. Sem dúvidas esta tarefa não teria sido realizada sem o auxílio da cada uma delas.

Agradeço (a CAPES, ao CNPq, a FAPEPI) pelo apoio financeiro.

"*E ainda que tivesse o dom da profecia, e conhecesse todos os mistérios e toda a ciência, e ainda que tivesse toda a fé, de maneira tal que transportasse os montes, e não tivesse amor, nada seria*".

Coríntios 13:2.

Resumo

Nesta dissertação, são estudadas estimativas para a curvatura média de subvariedades completas M cilindricamente limitadas. As principais ferramentas utilizadas neste trabalho são: Teorema de comparação de hessiano e Princípio do Máximo de Omori-Yau, versão provada por Pigola-Rigola-Setti [2]. O trabalho aqui desenvolvido baseia-se no artigo *"The mean curvature of cylindrically bounded"* de Alías, Bessa e Dajczer em 2009.

Abstract

In this dissertation, estimates are studied for mean curvature of complete cylindrically bounded submanifolds M^m, where $m \geqslant l + 1$. The main tools used in this work are: Hessian cmparison theorem e Maximum Principle of Omori-Yau, version proved by Pigola-Rigola-Setti [2]. The work developed here baseia on article *"The mean curvature of cylindrically bounded"* Alías, Bessa and Dajczer in 2009.

Sumário

Resumo **v**

Abstract **vi**

1 Noções Preliminares **3**

1.1 Geodésicas 3

1.2 Curvaturas e a Segunda Forma Fundamental 6

1.3 Campos de Jacobi e o *Cut Locus* 8

1.4 Gradiente, Hessiano e Laplaciano 9

1.5 Teoremas de Comparação de Hessiano e Laplaciano 15

2 Princípio do Máximo do Omori-Yau **24**

2.1 Princípio do Máximo do Omori-Yau 25

2.2 Variedade Riemanniana Estocasticamente Completa 34

3 A Curvatura Média de Subvariedades Cilindricamente Limitadas **36**

Referências Bibliográficas **44**

Introdução

Em 1965 Calabi [5] apresentou duas conjecturas sobre hipersuperfície euclidiana mínima. A primeira conjectura é que qualquer hipersuperfície completa limitada em $\mathbb{R}^n$ não é mínima. A segunda conjectura afirmou que qualquer hipersuperfície mínima completa não flat em $\mathbb{R}^n$ tem projeções ilimitadas em todo subespaço $(n-2)$-dimensional.

Ao longo das últimas décadas muitos trabalhos foram feitos sobre as conjecturas de Calabi. Dentre eles, os exemplos de Jorge-Xavier de 1980 e Nadirashvilli de 1996 mostraram que ambas as conjecturas eram falsas para superfície imersas em $\mathbb{R}^3$.

Jorge-Xavier [8] exibiram uma superfície mínima completa não-flat entre dois planos, obtendo então um contra exemplo para segunda conjectura de Calabi. Dezesseis anos depois Nadirashvilli [10] na busca de contra-exemplos para a primeira conjectura de Calabi construiu uma superfície mínima completa dentro de uma bola em $\mathbb{R}^3$.

Colding e Minicozzi [4] em 2005 mostraram que ambas as conjecturas são verdadeiras para superfície mergulhada. Especificamente, Colding e Minicozzi obteve:

Teorema 1. *Existe uma constante* $C > 0$ *tal que se* $M \subset \mathbb{R}^3$ *é disco mergulhado mínimo,* $\mathcal{B}_{2R} = \mathcal{B}_{2R}(0)$ *é a bola intríseca em* $M \setminus \partial M$ *de raio* $2R$ *e se* $\sup_{\mathcal{B}_{r_0}} \mid A \mid^2 > r_0^{-2}$ *onde* $R > r_0$*, então para* $x \in \mathcal{B}_R$

$$C dist_M(x, 0) < \mid x \mid + r_0. \tag{1}$$

Corolário 1. *Um disco mínimo mergulhado em* $\mathbb{R}^3$ *deve ser própria.*

O corolário acima é consequência imediata do teorema (1). O corolário (1) implica que a primeira conjectura de Calabi é verdadeira para disco mínimo mergulhado. Os contra-exemplos de imersão para a conjectura de Calabi discudidos acima são imersões não-própria. É natural perguntar se qualquer contra-exemplo para a segunda conjectura de Calabi deve ser não-própria para dimensões maiores. No caso em que $\phi : M^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ é uma imersão mínima, segue do corolário do resultado principal do presente trabalho que uma hipersuperfície mínima completa de $\mathbb{R}^n$, com $n \geqslant 3$, com projeção limitada em um subespaço bidimensional não pode ser própria.

Em 2009 Bessa e Montenegro [3] mostraram que subvariedades de $\mathsf{N} \times \mathbb{R}$ mínima, completa e cilindricamente limitada são estocasticamente incompleta. Alías, Bessa e Dajczer extenderam este resultado para subvariedade cilindricamente limitada em $\mathsf{N}^{n-l} \times \mathbb{R}^l$ com curvatura média suficientemente pequena. Veremos detalhadamente tais demonstrações no capítulo 3. No capítulo 1 temos alguns resultados básicos que serão utilizados ao longo dos demais capítulos. No capítulo 2 apresentaremos o Princípio Máximo de Omori-Yau e um breve comentário sobre variedade estocasticamente completa.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Neste capitulo iremos estabelecer a notação a ser usada e relembraremos alguns conceitos básicos necessários ao desenvolvimento dos capitulos seguintes. Para a leitura do texto o leitor deve ter conhecimento prévio em geometria tais como: Conceito de variedade Riemanniana, espaço tangente, campo vetorial, fibrado vetorial, seção global e local, aplicação entre variedades, métricas Riemannianas e curvatura. Todos esses tópicos estão presente em [6].

Denotaremos por M uma variedade Riemanniana e $C^\infty(M)$ o conjunto das funções suaves em M.

1.1 Geodésicas

Definição 1. *Uma curva parametrizada* $\gamma : I \to M$ *é uma geodésica em* $t_0 \in I$ *se* $\frac{D}{dt}\left(\frac{d}{dt}\right) = 0$ *no ponto* t_0. *Se* γ *é geodésica em* t, *para todo* $t \in I$, *diremos que* γ *é geodésica.*

Como consequência do resultado seguinte, temos que existe e é única a geodésica $\gamma(t, q, v)$ que passa por q com velocidade v em um intervalo $(-\delta, \delta)$.

Proposição 1. *Dado* $p \in M$, *existem* $V \subset M$, *aberto contendo* p, *números* δ *e* ε *positivos, e uma aplicação* $C^\infty(M)$

$$\gamma : (-\delta, \delta) \times U \to M, \quad U = \{(q, v); q \in V, v \in T_qM \ \ e \ \ \|v\| < \varepsilon\},$$

tais que a curva $t \to \gamma(t, q, v)$, $t \in (-\delta, \delta)$ *é a única geodésica de M que em* $t = 0$ *passa pelo ponto* q *com velocidade* v, *isso para todo* $q \in V$ *e para todo* $v \in T_q M$ *com* $\|v\| < \varepsilon$.

Demonstração. Vide [6] □

Decorre do lema seguinte que é possível aumentar a velocidade de uma geodésica diminuindo o seu intervalo de definição, ou vice-versa.

Lema 1. *Se* $\gamma(t, q, v)$ *é uma geodésica definida no intervalo* $(-\delta, \delta)$, *então a geodésica* $\gamma(t, q, av)$, $a > 0$, *está definida no intervalo* $(\frac{-\delta}{a}, \frac{\delta}{a})$ *e* $\gamma(t, q, av) = \gamma(at, q, v)$.

Demonstração. vide [6] □

Definição 2. *Dado* $p \in M$ *e* $U \subset TM$, *onde* U *é um aberto. Definimos a aplicação exponencial em* U *como sendo*

$$\exp : U \to M; \quad \exp(q, v) = \gamma(1, q, v) = \gamma(\|v\|, q, \frac{v}{\|v\|}), \quad (q, v) \in U.$$

Observe que a aplicação $\exp$ é diferenciável. Tomemos $\exp$ restrita a um aberto do espaço tangente $T_q M$, isto é,

$$\exp_q : B_\varepsilon(0) \subset T_q M \to M$$

por $\exp_q(v) = \exp(q, v)$, onde $B_\varepsilon(0) = \{v \in T_q M; \|v\| < \varepsilon\}$.

Proposição 2. *Seja* $q \in M$, *então existe* $\varepsilon > 0$ *tal que* $\exp_q : B_\varepsilon(0) \subset T_q M \to M$ *é um difeomorfismo sobre a imagem.*

Demonstração. Defina a curva $\beta(t) = tv$ e perceba que $\beta(0) = 0$ e $\beta'(0) = v$. Daí

$$\begin{aligned} d(\exp_q)_0(v) &= \frac{d}{dt}(\exp_q(tv))\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(\gamma(1, q, tv))\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(\gamma(t, q, v))\Big|_{t=0} \\ &= v. \end{aligned}$$

Logo $d(\exp_q)_0 = \mathrm{Id} : T_q M \to T_q M$, e o resultado segue pelo teorema da aplicação inversa. □

Se $V \subset T_pM$ é uma vizinhança da origem tal que $\exp_p : V \to U$ é um difeomorfismo, diremos que $\exp_p(V) = U$ é uma Vizinhança Normal de p. Se $B_\varepsilon(0) \subset T_pM$ é tal que $\overline{B_\varepsilon(0)} \subset V$, denominemos $\exp_p(B_\varepsilon(0))$ de Bola Normal, ou Bola Geodésica, de centro p e raio ε. Denominaremos de Esfera Geodésica a fronteira de $B_\varepsilon(0)$, a qual denotaremos por $S_\varepsilon(p)$. As geodésicas em $B_\varepsilon(p)$ que partem de p são chamadsa de geodésicas radias.

Definição 3. *Um segmento de geodésica $\gamma : [a,b] \to M$ é minimizante quando $l(\gamma) \leqslant l(c)$, onde $l(\cdot)$ indica o comprimento radial de qualquer que seja a curva e c é qualquer curva diferenciável por partes ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.*

O resultado seguinte tem como propósito mostrar que localmente as geodésicas minimizam a dsitância entre dois pontos .

Proposição 3. *Sejam $p \in M$, U uma vizinhança normal de p e $B \subset U$ uma bola normal de centro p. Dada $\gamma : [0,1] \to B$ um segmento de geodésica com $\gamma(0) = p$. Se $c : [0,1] \to M$ é qualquer curva diferenciável por partes ligando $\gamma(0)$ a $\gamma(1)$, então $l(\gamma) \leqslant l(c)$ e $l(\gamma) = l(c)$ implica em $\gamma([0,1]) = c([0,1])$.*

Demonstração. vide [6] □

A reciproca é verdadeira, ou seja, se considerarmos uma curva γ diferenciável por parte que minimiza a distância entre dois pontos, mostraremos que γ é geodésica.

Proposição 4. *Dado $p \in M$ existem $\delta > 0$ e uma vizinhança W de p, tais que para todo $q \in W$ a aplicação $\exp_q$ é um difeomorfismo entre $B_\delta(0) \subset T_qM$ e $\exp_q(B_\delta(0)) \supset W$, ou seja, W é uma vizinhança normal de cada um de seus pontos.*

Demonstração. vide [6] □

Passaremos a discutir o conceito de variedade completa, o que possibilita o estudos da existência de geodésicas minimizante ligando dois pontos.

Definição 4. *Uma variedade Riemanniana M é dita geodesicamente completa, ou simplismente completa, se para qualquer $p \in M$, a aplicação exponencial restrita, $\exp_p$, está definida para qualquer $v \in T_pM$, ou seja, as geodésicas radiais $\gamma(t)$ estão definidas para todos os valores de $t \in \mathbb{R}$.*

Introduziremos agora o conceito de distância numa variedade. Dados dois pontos $p, q \in M$, considere as curvas diferênciais por parte ligando p a q

Definição 5. *Dados* $p, q \in M$*, definimos a distância entre* p *e* q*,* $d(p, q)$*, como sendo o ínfimo dos comprimentos de todas as curvas diferenciáveis por partes que ligam* p *a* q*.*

É fácil provar que com esta definição de distância, a variedade M é um espaço métrico e que a topologia induzida por está métrica coincide com a topologia da variedade M. E ainda temos que fixado um ponto a função distância e continua na topologia induzida por d.

Sendo a distância entre dois pontos p e q o ínfimo dos comprimentos das curvas diferênciaveis por partes, calcular a distãncia entre p e q em uma variedade se tornaria mais simples caso existisse uma geodésica minimizante ligando p e q. O resultado seguinte torna isso possível em variedades completas.

Proposição 5. *Dados* M *uma variedade Riemanniana e* $p \in M$*. Se* M *for geodesicamente completa então para todo ponto* $q \in M$ *existe uma geodésica* γ *que liga* p *a* q *com* $l(\gamma) = d(p, q)$*.*

Demonstração. vide [6]. □

1.2 Curvaturas e a Segunda Forma Fundamental

Definição 6. *Dada* M *uma variedade Riemanniana, a correspondência que associa a cada par* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *a aplicação* $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ *dada por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, \quad \forall\, Z \in \mathfrak{X}(M),$$

onde ∇ *é a conexão Riemanniana de* M*, chama-se a curvatura de* M *e* $\mathfrak{X}(M)$*o conjunto dos campos de vetores de classe* C^∞ *em* M*.*

Proposição 6. *A curvatura de uma variedade Riemanniana* M *possui as seguintes propriedades:*

1. R *é bilinear em* $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$*, isto é,*

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1)$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2),$$

2. $R(X,Y)$ *é linear em* $\mathfrak{X}(M)$*, isto é,*

$$R(X,Y)(fZ+W)=fR(X,Y)Z+R(X,Y)W.$$

Isto para quaisquer $X,Y,Z,W\in\mathfrak{X}(M)$ *e quaisquer* $f,g:M\to\mathbb{R}$ *suave em* M.

Demonstração. vide [6]. □

O conceito seguinte é uma generalização natural da curvatura Gaussiana das superfícies. Sejam $p\in M$ e $\sigma\subset T_pM$ um subespaço bi-dimensional, denominamos curvatura seccional de σ em p, o número real

$$K(\sigma)=\frac{\langle R(u,v)u,v\rangle}{\|u\|^2\|v\|^2-\langle u,v\rangle^2},$$

onde $\{u,v\}$ é uma base qualquer de σ. A expressão acima não depende da escolhar dos vetores u e $v\in\sigma$. A curvatura seccional nos dá interessantes interpretações geométricas e além disso, temos ainda que o conhecimento de $K(\sigma)$, para todo subespaço bidimensional $\sigma\subset T_pM$, determina completamentea curvatura R de M.

Dada $f:M\to\overline{M}$ uma imersão de uma variedade diferenciável M de dimensão n em uma variedade Riemanniana $\overline{M}$ de dimensão $k=n+m$. Estaremos interessados em estudar as relações entre as geométrias de M e $\overline{M}$, tais como a curvatura, métrica e conexão. A métrica Riemanniana em M será induzida apartir da métrica de $\overline{M}$, da seguinte maneira: se u e $v\in T_pM$, define-se $\langle u,v\rangle=\langle df_pu,df_pv\rangle$. Sendo f uma imersão, temos que $f(M)$ é uma subvariedade imersa em $\overline{M}$ de dimensão n. Para simplificar a notação identificaremos U aberto de M com $f(U)$ e $v\in T_pM,\ p\in M$ com $df_pv\in T_{f(p)}\overline{M}$. Para cada p em M , o produto interno em T_pM decompõe $T_p\overline{M}$ na soma direta

$$T_p\overline{M}=T_pM\oplus(T_pM)^\perp,$$

onde $(T_pM)^\perp$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$.

Denotaremos por $\overline{\nabla}$ a conexão de $\overline{M}$. Se X e Y são campos locais de vetores em M, e $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ são extensões locais a $\overline{M}$, definimos

$$\nabla_XY=(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^T,$$

a conexão em M.

Definição 7. *Sejam* $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ *definidos localmente, então*

$$\alpha(X,Y)=\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}-\nabla_XY\in\mathfrak{X}(M)^\perp$$

é chamada a Segunda Forma Fundamental.

Observe que $\alpha(X,Y)$ está bem definido pois não depende das extensões $\overline{X}$ e $\overline{Y}$. De fato, pois se $\overline{X}_1$ é uma extensão de X, teremos

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y) - (\overline{\nabla}_{\overline{X}_1}\overline{Y} - \nabla_X Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}-\overline{X}_1}\overline{Y},$$

onde $\overline{\nabla}_{\overline{X}-\overline{X}_1}\overline{Y} = 0$ em M, pois $\overline{X} - \overline{X}_1 = 0$ em M. Se $\overline{Y}_1$ é uma outra extensão de Y,

$$(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y) - (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}_1 - \nabla_X Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}(\overline{Y} - \overline{Y}_1) = 0,$$

pois $\overline{Y} - \overline{Y}_1 = 0$ em M.

1.3 Campos de Jacobi e o *Cut Locus*

Os campos de Jacobi estabelece uma relação entre os conceitos mais importante apresentado até agora, sendo eles, geodésicas e curvatura. Os campos de Jacobe nos fornece informações sobre a velocidade de afastamento das geodésicas. Tal afastamento está intimamente ligado ao valor da curvatura seccional $K(\sigma)$.

Definição 8. *Dada $\gamma : [0,a] \to M$ uma geodésica em M. Dizemos que um campo de vetores J, suave ao longo de γ, é um campo de Jacobi quando ele satisfaz a equação de Jacobi:*

$$\frac{D^2}{dt}J + R(\dot{\gamma}, J)\dot{\gamma} = 0, \tag{1.1}$$

em $[0,a]$.

Um campo de Jacobi é determinado pelas condições iniciais $J(0)$, $\frac{DJ}{dt}(0)$. Pois podemos transformar a equação de Jacobi em um sistema linear de segunda ordem. Assim dada as condições iniciais $J(0)$, $\frac{DJ}{dt}(0)$ existe uma solução C^∞ do sistema em $[0,a]$.

Definição 9. *Dada $\gamma : [0,a] \to M$ uma geodésica. O ponto $\gamma(t_0)$ é conjugado de $\gamma(0)$, ao longo de γ, $t_0 \in (0,a]$, se existe um campo de Jacobi J ao longo de γ, não identicamente nulo, que satisfaz $J(0) = 0 = J(t_0)$.*

Proposição 7. *Dados $\gamma : [0,a] \to M$ uma geodésica, $V_1 \in T_{\gamma(0)}M$ e $V_2 \in T_{\gamma(a)}M$. Então existe um único campo de Jacobi J ao longo de γ, com $J(0) = V_1$ e $J(a) = V_2$, sempre que $\gamma(a)$ não for conjugado de $\gamma(0)$.*

Demonstração. Vide [6]. □

Seja M variedade Riemanniana completa. Fixado $p \in M$, se $\gamma : [0, +\infty) \to M$ é uma geodésica normalizada em M tal que $\gamma(0) = p$. Podemos tomar $t > 0$ suficientemente pequeno tal que $\gamma \mid_{[0,t]}$ seja minimizante. Por outro lado, se $\gamma \mid_{[0,t_0]}$ não for minimizante, então $\gamma \mid_{[0,t]}$ não é minimizante para todo $t \geqslant t_0$. Pela continuidade da função distância apartir de p, podemos concluir que o conjunto dos $t \in \mathbb{R}$ que satisfazem a equação $d(\gamma(0), \gamma(t)) = t$ tem a forma $[0, t_0]$ ou $[0, \infty)$. As discusões acima motivam a seguinte definição.

Definição 10. *Seja M uma variedade Riemanniana completa. Dados $p \in M$ e $v \in T_pM$ unitário, seja $\gamma_v : [0, +\infty) \to M$ geodésica normalizada $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$. Se o conjunto dos $t \in (0, +\infty)$ tais que γ_v é minimizante for um intervalo da forma $[0, t_0]$, então dizemos que $\gamma_v(t_0)$ é o ponto de mínimo de p na direção de v. O lugar geométrico dos pontos mínimos de p ou Cut locus de p é a união dos pontos mínimos de p ao longo de todos as geodésicas que partem de p, o qual denotaremos por $Cut(p)$.*

Para cada $p \in M$, o lugar geométricos dos pontos mínimos $Cut(p)$ determina os pontos onde a função distância apartir de p deixa de ser suave.

1.4 Gradiente, Hessiano e Laplaciano

Definição 11. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função suave. O gradiente de f é o campo vetorial suave em M, denotado por ∇f, definido sobre M por*

$$\langle \nabla f, X \rangle = X(f) \tag{1.2}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$

O campo gradiente é unicamente determina por (1.2). O resultado seguinte garante a existência do campo gradiente.

Proposição 8. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função suave e $\{e_1, ..., e_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança aberta $U \subset M$. Então, em U temos*

$$\nabla f = \sum_{j=1}^{n} e_j(f) e_j,$$

onde a igualdade independe do referencial escolhido.

Demonstração. Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$, podemos escrever $X = \sum_{j=1}^{n} a_j e_j$ em U. Aplicando em f,

$$\begin{aligned} X(f) &= \sum_{j=1}^{n} a_j e_j(f) && (1.3)\\ &= \langle \sum_{j=1}^{n} a_j e_j, \sum_{j=1}^{n} e_j(f) e_j \rangle && (1.4)\\ &= \langle X, \sum_{j=1}^{n} e_j(f) e_j \rangle. && (1.5) \end{aligned}$$

Donde obtemos $\nabla f = \sum_{j=1}^{n} e_j(f) e_j$.

Se tomarmos $\{\overline{e}_i\}_{i=1}^{n}$ outro referencial ortonormal em U, então

$$\overline{e}_j(f)\overline{e}_j = \sum_{k,l=1}^{n} a_{kj} a_{lk} e_k(f) e_l = \delta_{kl} e_k(f) e_l = e_k(f) e_k$$

□

Proposição 9. *Dadas* $f, g : M \to \mathbb{R}$ *funções diferenciáveis, valem:*

i. $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$;

ii. $\nabla(f \cdot g) = g\nabla f + f\nabla g$.

Demonstração. Sendo X um campo suave sobre M, temos

$$\begin{aligned} \langle \nabla(f+g), X \rangle &= X(f+g)\\ &= X(f) + X(g)\\ &= \langle \nabla(f), X \rangle + \langle \nabla g, X \rangle\\ &= \langle \nabla(f) + \nabla(g), X \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \nabla(f \cdot g), X \rangle &= X(f \cdot g)\\ &= gX(f) + fX(g)\\ &= \langle g\nabla(f), X \rangle + \langle f\nabla(g), X \rangle\\ &= \langle g\nabla(f), f\nabla(g), X \rangle \end{aligned}$$

□

Proposição 10. *Seja* $f : M \to \mathbb{R}$ *uma função suave. Dados* $p \in M$ *e* $v \in T_pM$*, seja* $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ *uma curva suave tal que* $\gamma(0) = p$ *e* $\dot{\gamma}(0) = v$*. Então*

$$\langle \nabla f, v \rangle_p = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)\Big|_{t=0}.$$

Demonstração. Seja X uma extensão local de $\dot{\gamma}$, temos que

$$\langle \nabla(f), v \rangle_p = (X(f))_p = \frac{d}{dt}\Big|_{\gamma(0)} f = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f \circ \gamma)$$

□

Corolário 2. *Seja* $f : M \to \mathbb{R}$ *e* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *são funções suave, então*

$$\nabla(\phi \circ f) = \phi'(f)\nabla(f)$$

Demonstração. Seja $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ curva suave tal que $\gamma(0) = p \in M$ e $\gamma'(0) = v \in T_pM$, então

$$\begin{aligned} \langle \nabla(\phi \circ f), v \rangle &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\phi \circ f \circ \gamma)(t) && (1.6) \\ &= \phi'(f(p))\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f \circ \gamma)(t) && (1.7) \\ &= (\phi' \circ f)_p \langle \nabla f, v \rangle && (1.8) \end{aligned}$$

□

Um outro conceito importante é o de hessiano de uma função.

Definição 12. *Seja* $f : M \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável. O Hessiano de f é para cada ponto* $p \in M$*, o operador linear Hess* $f_p : T_pM \to T_{f(p)}M$ *definido do seguinte modo:*

$$\mathit{Hess}\ f_p(v) = (\nabla_v \nabla f)(p).$$

Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ for uma extensão de v numa vizinhança de p, segue das propriedade da conexão Riemanniana que $(\mathit{Hess}\ f)_p(X) = (\nabla_X \nabla f)(p)$.

Proposição 11. *Seja* $f : M \to \mathbb{R}$ *função suave e* $p \in M$*, então* $(\mathit{Hess}\ f)_p : T_pM \to T_{f(p)}M$ *é um operador linear auto-adjunto.*

Demonstração. Denotemos por V e W as respectivas extensões de v e w em uma vizinhança de p em M, segue que

$$\begin{aligned}
\langle (\mathit{Hess}\ f)_p(v), w\rangle &= \langle \nabla_V \nabla(f), W\rangle_p \\
&= (V\langle \nabla(f), W\rangle)(p) - \langle \nabla(f), \nabla_V W\rangle_p \\
&= (V\langle \nabla(f), W\rangle)(p) - \langle \nabla(f), \nabla_W V + [V, W]\rangle_p \\
&= (W(V(f)))(p) + ([V, W](f))(p) - \langle \nabla(f), \nabla_W V + [V, W]\rangle_p \\
&= (W(V(f)))(p) - \langle \nabla(f), \nabla_W V\rangle_p \\
&= \langle \nabla_W \nabla, V\rangle_p \\
&= \langle (\mathit{Hess}\ f)_p w, v\rangle.
\end{aligned}$$

□

A proposição acima permite definir a forma bilinear simétrica

$$\begin{aligned}
(X, Y) \longmapsto \mathit{Hess}\ f(X, Y) &= \langle \mathit{Hess}\ f(X), Y\rangle \\
&= \langle \nabla_X \nabla f, Y\rangle \\
&= X\langle \nabla f, Y\rangle - \langle \nabla f, \nabla_X Y\rangle \\
&= X(Y(f)) - \nabla_X Y(f)
\end{aligned}$$

denominda a *forma hessiana* de f.

Definição 13. *Dados $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $f : M \to \mathbb{R}$ diferenciável, onde M é uma variedade Riemanniana. A divergência do campo X é uma função suave $\mathrm{div}\, X(p) : M \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\mathrm{div}\, X(p) = tr[Y(p) \to \nabla_Y X(p)], \quad p \in M,$$

onde tr denota o traço do operador linear.

A proposição seguinte permite escrever o divergente em uma vizinhança coordenada.

Proposição 12. *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\{e_i\}_{i=1}^n$ um referencial ortonormal em uma vizinhança coordenada $U \subset M$. Se $X = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ em U, então*

$$\mathrm{div} X = \sum_{i=1}^n e_i(a_i) - \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} e_i, X\rangle.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}X &= \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{e_i}X, e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} e_i\langle X, e_i\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle X, \nabla_{e_i}e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} e_i(a_i) - \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{e_i}e_i, X\rangle
\end{aligned}$$

□

Observe que se o referencial for geodésico, a expressão obtida na proposição 12 se resume a

$$\mathrm{div}X = \sum_{i=1}^{n} e_i(a_i).$$

Ainda tendo $\{e_i\}$ como referencial ortonormal em vizinhança coordenada $U \subset M$ temos a seguinte proposição.

Proposição 13. *Se* $f : M \to \mathbb{R}$ *é diferenciável e* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *valem:*

1. $\mathrm{div}\,(X + Y) = \mathrm{div}\,X + \mathrm{div}\,Y$,

2. $\mathrm{div}\,(f \cdot X) = f \cdot \mathrm{div}\,X + \langle\nabla f, X\rangle$.

Demonstração. O item (1) segue direto da definição de divergente e da linearidade da conexão. Para o item (2) temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(fX) &= \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{e_i}fX, e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} e_i(f)\langle X, E_i\rangle + f\sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{e_i}X, e_i\rangle \\
&= \langle X, \sum_{i=1}^{n} e_i(f)e_i\rangle + f\sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{e_i}X, e_i\rangle \\
&= \langle X, \nabla(f)\rangle + f\mathrm{div}(X).
\end{aligned}$$

□

Definição 14. *Seja* $f : M \to \mathbb{R}$ *uma função suave. O laplaciano de* f *é a função* $\Delta f : M \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\Delta f = \mathrm{div}(\nabla f)$$

Segue naturalmente da definição de *divergente* a seguinte expressão para o laplaciano de uma função suave f em M:

$$\Delta f = tr(Hess\ f)$$

Apartir da proposição 12 vejamos que a expressão do Laplaciano de uma função sauve em termos de uma referencial ortonormal.

Proposição 14. *Seja* $f : M \to \mathbb{R}$ *uma função suave e* $\{e_i\}_{i=1}^n$ *um referencial ortonormal em um aberto* $U \subset M$*. Então*

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} e_i(e_i(f)) - \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{e_i} e_i) f$$

Demonstração. Observe primeiro que $\Delta f = \sum_{i=1}^n e_i(f) e_i$ em U. Segue da definição de Laplaciano e da proposição 12 que

$$\begin{aligned} \Delta f &= \sum_{i=1}^{n} e_i(e_i(f)) - \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} e_I, \nabla f \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} e_i(e_i(f)) - \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{e_i} e_i) f \end{aligned}$$

Em particular, se o referencial for geodésico, então teremos

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} e_i(e_i(f))$$

□

Proposição 15. *Se* $f, g : M \to \mathbb{R}$ *é diferenciável e* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *valem:*

1. $\Delta(f + g) = \Delta f + \Delta g$,

2. $\Delta(f \cdot g) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle$.

Demonstração. Segue da definição de Laplaciano e da proposição 14 que

$$\begin{aligned} \Delta(f \cdot g) &= div(\nabla(f \cdot g)) \\ &= div(g\nabla f + f\nabla g) \\ &= div(g\nabla f) + div(f\nabla g) \\ &= \langle \nabla g, \nabla f \rangle + g div(\nabla f) + \langle \nabla f, \nabla g \rangle + f div(\nabla g) \\ &= 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle + g\Delta(f) + f\Delta(g) \end{aligned}$$

□

1.5 Teoremas de Comparação de Hessiano e Laplaciano

Fixado o ponto p em M, denotaremos por $\rho(x) = d(p, x)$ a distância geodésica entre p e x, onde $x \in M \setminus cut(p)$.

Proposição 16. *Seja* $\gamma : [0, a] \to M \setminus cut(p)$ *uma geodésica normalizada partindo de* p. *Então*

$$\nabla\rho(\gamma(t)) = \gamma'(t), \;\; 0 < t \leqslant a.$$

Demonstração. Sendo $\gamma(t) = exp_p(tv)$, $0 \leqslant t \leqslant a$ e $q = \gamma(t_0)$.

$$\gamma'(t_0) = \frac{d}{dt}(exp_p(tv))|_{t=t_0} = \frac{d}{dt}(\gamma(t, q, v)) = v.$$

Se $w \in T_qM$ e $\langle w, v\rangle = 0$, então pelo Lema de Gauss (Lema 3.3.5 em [6]) $\exists\, W \in T_v(T_pM)$ tal que

$$\langle d(exp_p)_{t_0v}W, d(exp_p)_{t_0v}v\rangle = \langle w, v\rangle = 0$$

e $d(exp_p)_{t_0v}W = w$. Tomemos $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to E_p$ tal que $|\alpha(s)| = t_0$, $\alpha(0) = t_0v$ e $\alpha'(0) = w$, assim $\rho(exp_p(\gamma(s))) = t_0$. Daí,

$$0 = \langle \nabla(\rho(q)), d(exp_p)_{t_0v}W\rangle = \langle \nabla(\rho(q)), w\rangle.$$

Como a igualdade é válida para todo w ortogonal a $\gamma'(t_0)$, segue que $\Delta\rho(q)$ é um múltiplo de $\gamma'(t_0)$. Sendo $\rho(\gamma(t)) = t$ para $0 \leqslant t \leqslant a$, segue que

$$\langle \nabla\rho(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle = 1,$$

e

$$|\nabla\rho(\gamma(t))| = 1.$$

Donde segue que

$$\nabla\rho(\gamma(t)) = \gamma'(t), \;\; 0 \leqslant t \leqslant a.$$

□

Definição 15. *Seja* M *uma variedade Riemanniana* $\gamma : [0, a] \to M$ *uma geodésica de* M *e* V *um campo de vetores diferenciáveis por partes ao longo de* γ. *Para todo* $t_0 \in [0, a]$, *denotaremos*

$$I_{t_0}(V, V) = \int_0^{t_0} \{\langle V', V'\rangle - \langle R(\gamma', V)\gamma', V\rangle\}dt \tag{1.9}$$

O lema seguinte conhecido com *Lema do Índice* afirma que para todos os campos de vetores difernciáveis por partes ao longo de γ que se anula em $t = 0$ e coincidem $t = t_0$, o mínimo da expressão (1.9) é atingindo pelos campos de Jacobi.

Lema 2. *Seja* $\gamma : [0, a] \to M$ *uma geodésica que não possui pontos conjugados a* $\gamma(0)$ *em* $(0, a]$. *Tomemos um campo de Jacobi* J *ao longo de* γ, *com* $\langle J, \gamma' \rangle = 0$ *e um campo de vetores* V *diferenciável por partes ao longo de* γ, *tal que* $\langle V, \gamma' \rangle = 0$. *Nestas condições, se* $J(0) = V(0) = 0$ *e* $J(t_0) = V(t_0)$, *para* $t_0 \in (0, a]$, *então*

$$I_{t_0}(J, J) \leqslant I_{t_0}(V, V)$$

e vale a igualdade se, e somente se, $V(t) = J(t)$ *para todo* $t \in [0, t_0]$.

Demonstração. vide [6]. □

Seja M variedade Riemanniana completa n-dimensional e γ um geodésica mínima parametrizada pelo comprimnto de arco ligando p e x, tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(r) = x$. Tomemos X um vetor em T_xM talque $\langle X, \frac{\partial}{\partial r} \rangle = 0$. Como x não é conjugado de p, segue da proposição (7) que podemos extender X a um campo de Jacobi J ao longo de γ satisfazendo as condições $J(\gamma(0)) = 0$, $J(\gamma(r)) = X$ e $[J, \frac{\partial}{\partial r}] = 0$. Nessa configuração temos

$$\begin{aligned} \mathrm{Hess}(\rho)(X, X) &= JJ(\rho) - (\nabla_J J)(\rho) \\ &= J\langle J, \frac{\partial}{\partial r} \rangle - \langle \nabla_J J, \frac{\partial}{\partial r} \rangle \\ &= \langle J, \nabla_J \frac{\partial}{\partial r} \rangle \\ &= \langle J, \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} J \rangle \end{aligned}$$

Observação 1. *Sendo* $[J, \frac{\rho}{\partial r}] = 0$, *então* $\langle J, \nabla_J \frac{\partial}{\partial r} \rangle = \langle J, \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} J \rangle$.

Portanto, em $x \in M$ temos

$$\begin{aligned} \mathrm{Hess}(\rho)(X, X) &= \langle J, \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} J \rangle \\ &= \int_0^r \frac{d}{dt} \langle J, \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} J \rangle dt \\ &= \int_0^r (\{| \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} J |^2 + \langle J, \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} J \rangle \} dt. \end{aligned}$$

Sendo J campo de Jacobi

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} J + R(J, \frac{\partial}{\partial r})\frac{\partial}{\partial r} = 0$$

Assim obtemos a seguinte igualdade:

$$\textit{Hess } (\rho)(X, X) = \int_0^r \{| \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} J |^2 - \langle R(J, \frac{\partial}{\partial r})\frac{\partial}{\partial r}, J\rangle\}dt \tag{1.10}$$

portanto

$$\textit{Hess } (\rho)(X, X) = I_0^r(J) \tag{1.11}$$

Apartir dos resultados obtidos acima, podemos então enunciar e demonstrar o seguinte teorema de comparação do hessiano.

Teorema 2. *Sejam M_1 e M_2 variedades Riemannianas n-dimensionais completas, assuma que $\gamma_i : [0, a] \to M_i \quad (i = 1, 2)$ são duas geodésicas parametrizadas pelo comprimento de arco e γ_i não interceptam o cut locus de $\gamma_i(0)$. Denotemos por ρ_i as funções distância a $\gamma_i(0)$ em M_i e sejam K_i as curvaturas seccionais de M_i, com $i = 1, 2$. Suponhamos que em $\gamma_1(t)$ e $\gamma_2(t)$, com $0 \leqslant t \leqslant a$, tenhamos*

$$K_1(X_1, \frac{\partial}{\partial \rho_1}) \geqslant K_2(X_2, \frac{\partial}{\partial \rho_2}) \tag{1.12}$$

onde X_i é qualquer vetor unitário em $T_{\gamma_i(t)}M_i$ e $\langle X_i, \frac{\partial}{\partial \rho_i}\rangle = 0$. Então

$$\mathrm{Hess}(\frac{\partial}{\partial \rho_1})(X_1, X_1) \leqslant \mathrm{Hess}(\frac{\partial}{\partial \rho_2})(X_2, X_2). \tag{1.13}$$

Demonstração. Para cada $i = 1, 2$, consideremos os campos de vetores ortonormais $\{E_1^i, ..., E_n^i\}$ paralelos ao longo de γ_i, com $E_n^i = \frac{\partial}{\partial \rho_i}$. A igualdade (5) nos diz que

$$\textit{Hess } (\rho_i)(X_i, X_i) = I_a(J_i, J_i), \tag{1.14}$$

onde J_i são campos de Jacobi ao longo das geodésicas γ_i, $J_i(\gamma_i(0)) = 0$ e $J_i(\gamma_i(a)) = X_i$. Como $\langle X_i, \frac{\partial}{\partial \rho_i}\rangle = 0$ e sendo $\{E_j^i\}_{i=1}^n$ campos paralelos, então J_i é perpendicular a E_n^i ao longo de γ_i. Podemos então escrever

$$J_2 = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j(t)E_j^2.$$

Tomemos então $\{E_1^1, ..., E_n^1\}$ de tal modo que (provar depois)

$$X_1 = J_1(a) = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j(a)E_j^1(\gamma_1(a)).$$

Defina agora, um campo de vetores Z ao longo de γ_1 por

$$Z = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j(t)E_j^1.$$

Observe que em $t = 0$ e $t = a$, os campos Z e J_1 coincidem. Sendo os coeficientes dos campos Z e J_2 iguais e $\{E_1^i, ..., E_n^i\}$ campos de vetores ortonormais, então $\|Z\| = \|J_2\|$ e

$$\|\nabla_{\frac{\partial}{\partial\gamma_2}} J_2\| = \|\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j^{'}(t)E_j^2\| = \|\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j^{'}(t)E_j^1\| = \|\nabla_{\frac{\partial}{\partial\gamma_1}} Z\|.$$

Pelo lema 2, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hess}(\rho_1)(X_1, X_1) = I_a(J_1) &\leqslant I_a(Z) \\
&= \int_0^a \{\|\nabla_{\frac{\partial}{\partial\gamma_1}} Z\|^2 - \langle R(Z, \frac{\partial}{\partial\gamma_1})\frac{\partial}{\partial\gamma_1}, Z\rangle\}dt \\
&= \int_0^a \{\|\nabla_{\frac{\partial}{\partial\gamma_2}} J_2\|^2 - K_1(Z, \frac{\partial}{\partial\gamma_1})\}dt \\
&\leqslant \int_0^a \{\|\nabla_{\frac{\partial}{\partial\gamma_2}} J_2\|^2 - K_2(J_2, \frac{\partial}{\partial\gamma_2})\}dt \\
&= I_a(J_2) = \mathrm{Hess}(\rho_2)(X_2, X_2).
\end{aligned}$$

□

Considere M uma subvariedade de dimensão m imersa em uma variedade Riemaniana N n-dimensional.

Lema 3. *Seja* $f : N \to R$ *uma função suave em* N *e* $\varphi : M \to N$ *uma imersão, assim* $f \circ \varphi : M \to R$ *é uma função suave. Podemos então relacionar os hessianos Hess* (f) *e* $\mathrm{hess}(f \circ \varphi)$ *como segue:*

$$\mathrm{Hess}^M(f \circ \varphi)(X, Y) = \mathrm{Hess}^N(f)(X, Y) + \langle\overline{\nabla}(f), \alpha(X, Y)\rangle, \tag{1.15}$$

onde $\overline{\nabla}$, ∇ *conexões de* N *e* M *respectivamente.*

Demonstração. Sendo $\overline{\nabla}$, ∇ conexões de N e M respectivamente, temos que

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y), \quad \text{com } X, Y \in TM \subset M \tag{1.16}$$

onde α é a segunda forma fundamental de M em N

Substituindo (1.16) na forma hessiana de f, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hess}^N(f)(X, Y) &= \langle\overline{\nabla}_X \nabla f, Y\rangle \\
&= X\langle\nabla f, Y\rangle - \langle\nabla(f), \overline{\nabla}_X Y\rangle \\
&= X\langle\nabla(f \circ \varphi), Y\rangle - \langle\nabla(f \circ \varphi), \nabla_X Y\rangle - \langle\nabla(f), \alpha(X, Y)\rangle \\
&= \langle\nabla_X \nabla(f \circ \varphi), Y\rangle - \langle\nabla(f), \alpha(X, Y)
\end{aligned}$$

□

Lema 4. *Seja* N *uma variedade Riemanniana,* $f : N \to \mathbb{R}$ *e* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*. Então*

$$Hess^{N}(\phi \circ f)(X,X) = \phi''(f)\langle \nabla^{N}(f), X\rangle^2 + \phi'(f)Hess^{N}(f)(X,X) \tag{1.17}$$

Demonstração. Utilizando o corolário 2 e apartir de um cálculo simples, temos

$$\begin{aligned}
Hess^{N}(\phi \circ f) &= \langle \nabla_X \nabla(\phi \circ f), X\rangle \\
&= \langle \nabla_X(\phi'(f)\nabla(f)), X\rangle \\
&= \langle \phi'(f)\nabla_X\nabla(f) + X(\phi'(f))\nabla(f), X\rangle \\
&= \phi'(f)\langle \nabla_X\nabla(f), X\rangle + X(\phi'(f))\langle \nabla(f), X\rangle \\
&= \phi'(f)\langle \nabla_X\nabla(f), X\rangle + \phi''(f)X(f)\langle \nabla(f), X\rangle \\
&= \phi'(f)\langle \nabla_X\nabla(f), X\rangle + \phi''(f)\langle \nabla(f), X\rangle^2 \\
&= \phi''(f)\langle \nabla(f), X\rangle^2 + \phi'(f)Hess^{N}(f)(X,X).
\end{aligned}$$

□

Para o próximo resultado escreveremos $f \circ \varphi = \tilde{f}$, onde f e φ satisfazem as hipóteses do lema 3.

Lema 5. *Seja* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $\tilde{f} : M \to \mathbb{R}$ *funções suaves. Então*

$$\mathrm{Hess}^{M}(\phi \circ \tilde{f})(X,X) = \phi''(\tilde{f})\langle \nabla N(\tilde{f}), X\rangle^2 + \phi'(\tilde{f})\mathrm{Hess}^{N}(\tilde{f})(X,X) + \langle \nabla^{N}(\tilde{f}), \alpha(X,X)\rangle$$

para todo $X \in TM \subset N$.

Demonstração. Dos lemas 3 e 4 temos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hess}^{M}(\phi \circ \tilde{f})(X,X) &= \phi''(\tilde{f})\langle \nabla^{M}(\tilde{(f)}), X\rangle^2 + \phi'(\tilde{f})\mathrm{Hess}^{M}(\tilde{f})(X,X) \\
&= \phi''\langle \nabla^{M}(\tilde{f}), X\rangle^2 + \phi'(\tilde{f})(\mathrm{Hess}^{N}(\tilde{f})(X,X) + \langle \nabla^{N}(\tilde{f}), \alpha(X,X)\rangle) \\
&= \phi''\langle \nabla^{N}(\tilde{f}), X\rangle^2 + \phi'(\tilde{f})\mathrm{Hess}^{N}(\tilde{f})(X,X) + \phi'(\tilde{(f)})\langle \nabla^{N}(\tilde{f}), \alpha(X,X)\rangle) \\
&= \phi''\langle \nabla^{N}(\tilde{f}), X\rangle^2 + \phi'(\tilde{f})\mathrm{Hess}^{N}(\tilde{f})(X,X) + \langle \nabla^{N}(\phi \circ \tilde{f}), \alpha(X,X)\rangle)
\end{aligned}$$

para todo $X \in TM \subset N$. □

Seja M variedade Riemanniana de curvatura seccional constante k. Para calcular o Hessiano da função distância em M consideremos

$$S_k(t) = \begin{cases} \frac{\sinh(t\sqrt{-k})}{\sqrt{-k}}, & se \quad k < 0 \\ t, & se \quad k = 0 \\ \frac{\sin\sqrt{k}}{\sqrt{k}}, & se \quad k > 0 \end{cases}$$

e

$$C_k(t) = \frac{S_k'(t)}{S_k(t)} = \begin{cases} \sqrt{-k}\coth(t\sqrt{-k}), & se \quad k < 0 \\ \dfrac{1}{t}, & se \quad k = 0 \\ \sqrt{k}\cot(t\sqrt{k}), & se \quad k > 0. \end{cases}$$

Defina $f(t) = \frac{S_k(t)}{S_k(\rho)}$, observe que f satisfaz a equação de Jacobi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t} f(t) + kf(t) = 0 \\ f(0) = 0, f(\rho) = 1 \end{cases} \tag{1.18}$$

Tomemos uma geodésica mínima γ parametrizada pelo comprimento de arco e $X \in T_pM$ tal que $\langle X, \frac{\partial}{\partial\rho}\rangle = 0$. Denotemos por $X(t), t \in [0, \rho]$ o transporte paralelo de X ao longo de γ. Assim o campo de Jacobi J ao longo de γ com $J(0) = 0$ e $J(p) = X$, tem a seguinte forma

$$J(t) = f(t)X(t)$$

Sendo $\{\frac{\partial}{\partial\rho}, X_1, ..., X_{n-1}\}$ base ortonormal para $T_{\gamma(\rho)}M$ e $J(t) = f(t)X_i$ campos de Jacobi, considerando o caso em que a curvatura seccional constante $k < 0$ temos pela expressão (1.10)

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Hess}(\rho)(X_i, X_i) &= \int_0^\rho \{\|\nabla_{\frac{\partial}{\partial\rho}} f(t)X_i(t)\|^2 - \langle R(f(t)X(t), \frac{\partial}{\partial\rho})\frac{\partial}{\partial\rho}, f(t)X(t)\rangle\}dt \\
&= \int_0^\rho \{\|f(t)\nabla_{\frac{\partial}{\partial\rho}} X_i(t) + \frac{\partial}{\partial\rho}(f(t))X_i(t)\|^2 - kf^2(t)\}dt \\
&= \int_0^\rho \{-k\frac{\cosh^2(\sqrt{-k}t)}{\sinh^2(\sqrt{-k}\rho)} - k\frac{\sinh^2(\sqrt{-k}t)}{\sinh^2(\sqrt{-k}\rho)}\} \\
&= \int_0^\rho \frac{-k}{\sinh^2(\sqrt{-k}\rho)}(2\cosh^2(\sqrt{-k}t) - 1)dt \\
&= \frac{-k}{\sinh^2(\sqrt{-k}\rho)}\int_0^\rho \cosh(2\sqrt{k}t)dt \\
&= \frac{-k}{\sinh^2\sqrt{-k}\rho)}(\frac{\sinh(2\sqrt{-k}\rho)}{2\sqrt{-k}} \\
&= \frac{\sqrt{-k}}{2}\frac{\sinh(2\sqrt{-k}\rho)}{\sinh^2(\sqrt{-k}\rho)} \\
&= \sqrt{-k}\frac{\cosh(\sqrt{-k}\rho)}{\sinh(\sqrt{-k}\rho)} \\
&= \sqrt{-k}\mathsf{coth}(\sqrt{-k}\rho)
\end{aligned}
$$

Para os demais valores de k os cálculos são análogos. Obtemos que o Hessiano da função distância em M satisfaz

$$\mathsf{Hess}(\rho)(X_i, X_i) = C_b(\rho(x)). \tag{1.19}$$

Nessas configurações calcular o laplaciano da função distância torna-se bastante simples

$$\Delta\rho = \sum_{i=1}^{n-1} \mathsf{Hess}(\rho)((X_i, X_i) \tag{1.20}$$

$$\Delta\rho = (n-1)\sqrt{k}\mathsf{coth}(\sqrt{k}\rho). \tag{1.21}$$

Observe que $\mathsf{Hess}(\rho)(\frac{\partial}{\partial\rho}, \frac{\partial}{\partial\rho}) = 0$, usamos esse fato para mostrar a igualdade acima.

Teorema 3. *Seja* M *uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante* k *e* $\rho(x)$ *a função distância para* x_0 *em* M*, com* $x \in M \setminus \mathsf{cut}(x_0)$*. Então*

$$\mathsf{Hess}^M(\rho(x))(X, X) = C_k(\rho(x))(1 - \langle\Delta^M(\rho(x)), X\rangle^2) \tag{1.22}$$

onde $X \in T_xM$ *e* $\|X\| = 1$.

Demonstração. Seja γ uma geodésica minimizante ligando x_0 a x com vetor velocidade unitário. Consideremos os campos de vetores ortononormais $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ paralelos ao longo de γ, com $X_1 = \dot{\gamma}$. Sendo $X \in T_xM$ com $\|X\| = 1$, podemos então escrever $X = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$. Daí, segue que

$$\begin{aligned} \mathrm{Hess}^M(\rho(x))(X,X) &= \mathrm{Hess}^M(\rho(x))(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \sum_{i=1}^{n} a_i X_i) && (1.23)\\ &= \sum_{i=2}^{n} a_i^2 \mathrm{Hess}^M(\rho(x))(X_i,X_i). && (1.24) \end{aligned}$$

Pela igualdade (1.19) temos que

$$\mathrm{Hess}^M(\rho(x))(X,X) = \sum_{i=1}^{n} C_k(\rho(x)) a_i^2. \tag{1.25}$$

Observe que $\langle X, X\rangle_g = 1$, ou seja, $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$. Assim, $1 - \sum_{i=2}^{n} a_i^2 = a_1^2$, onde $a_1^2 = \langle X_1, \nabla(\rho(x))\rangle^2$. Combinando as duas últimas igualdades, obtemos

$$\sum_{i=2}^{n} a_i^2 = 1 - \langle X, \nabla(\rho(x))\rangle^2.$$

Portanto

$$\mathrm{Hess}^M(\rho(x))(X,X) = C_k(\rho(x))(1 - \langle X, \nabla(\rho(x))\rangle^2). \tag{1.26}$$

$\square$

O resultado seguinte permite relacionar o laplaciano da função distância à curvatura média em $x \in M \setminus \mathrm{cut}(p)$.

Teorema 4. *Seja* M *uma variedade Riemanniana* m*-dimensional com curvatura seccional constante* k *e* $\rho(x) = d(x,p)$ *a função distância para* p *em* M *com* $x \in M \setminus \mathrm{cut}(p)$*, então*

$$\Delta\rho(x) = (n-1)\overrightarrow{H}(x).$$

Demonstração. Seja f uma função suave em M e $x \in M$ talque $\Delta f(x) \neq 0$. Então localmente a imagem inversa do valor $f(x)$ é uma hipersuperfície suave a qual denotaremos por N. Tomemos $\{e_1, ..., e_{m-1}\}$ uma base ortonormal de vetores tangentes a N. Denotemos por e_m o vetor unitário normal a N. Assim obtemos a seguinte expressão para o laplaciano de f em x,

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= \sum_{i=1}^{m-1} (e_i e_i - \nabla^M_{e_i} e_i) f(x) + (e_m e_m - \nabla_{e_m} e_m) f(x)\\ &= \sum_{i=1}^{m-1} (e_i e_i - \nabla^N_{e_i} e_i) f(x) - \sum_{i=1}^{m-1} (\nabla_e e_i)_i^{\perp} f(x) + (e_m e_m - \nabla_{e_m} e_m) f(x)\\ &= \Delta^N f(x) + (m-1)\overrightarrow{H}(x) + (e_m e_m - \nabla_{e_m} e_m) f(x). \end{aligned}$$

Sendo f constante em N segue-se que o laplaciano de f em N denotado por $\Delta^N f(x)$ é igual a zero, portanto

$$\Delta f(x) = (m-1)\overrightarrow{H}(x) + (e_m e_m - \nabla_{e_m} e_m) f(x)$$

onde, $H(x) = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m-1} \alpha(e_i, e_i)$ é a curvatura média de N.

Fazendo $f = \rho$, então para $x \in M \setminus cut(p)$ temos $N = \partial B_p(\rho)$ e o vetor unitária normal $e_m = \frac{\partial}{\partial \rho}$. Segue da igualdade acima que

$$\Delta \rho(x) = (n-1)H(x). \tag{1.27}$$

□

Juntando os últimos resultados podemos demonstrar a seguinte proposição.

Teorema 5. *Seja M^m uma variedade Rimanniana e $x_0, x_1 \in Mm$ tal que existe uma geodésica minimizante $\gamma : [a, 0] \to M$ ligando x_0 e x_1 com $\| \dot{\gamma} \| = 1$ e seja $\rho(x) = d(x_0, x)$ a função distância para x_0. Seja $K_\gamma^M \leqslant b$ a curvatura seccional de M ao longo de γ. Se $b > 0$ assumimos $\rho(x_1) < \frac{\pi}{2\sqrt{b}}$. Então, temos que o Hess $\rho(x)(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0$ e*

$$\text{Hess } \rho(x)(X, X) \geqslant C_b(\rho(x)) \parallel X \parallel^2$$

onde $\langle X, \dot{\gamma}(\rho(x)) \rangle = 0$ com $X \in T_x M$.

Demonstração. Seja N uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante b e $\tilde{\gamma} : [0, a] \to N$ uma geodésica minimizante com velocidade unitária. Temos por hipótese que $k_\gamma^M < b = k_{\tilde{\gamma}}^N$. Observe ainda que

$$\mathsf{Hess}^M(\rho(x))(X, X) = \|X\|^2 \mathsf{Hess}(\rho(x))(\frac{X}{\|X\|}, \frac{X}{\|X\|}).$$

Pelo teorema 2, temos

$$\mathsf{Hess}^N(\tilde{\rho}(\tilde{\gamma}(a)))(\tilde{X}, \tilde{X}) = C_b(\tilde{\rho}(\tilde{\gamma}(a))),$$

onde $\tilde{X} \in T_{\tilde{\rho}(\tilde{\gamma}(a))}N$, $\|\tilde{X}\| = 1$ e $\langle X, \nabla\tilde{\rho}(\tilde{\gamma}(a)) \rangle = 0$ Utilizando o teorema de comparação do hessianos, concluimos que

$$\mathsf{Hess}\rho(x)(X, X) \geqslant \|X\|^2 C_b(\rho(x)). \tag{1.28}$$

□

Capítulo 2

Princípio do Máximo do Omori-Yau

Desde o cálculo sabemos que se $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função continua, então u atinge valor máximo em algum ponto $x_0 \in [a, b]$ e ainda, se tivermos $x_0 \in (a, b)$ e a derivada segunda de u continua em uma vizinhança de x_0, então

$$u'(x_0) = 0 \text{ e } u''(x_0) \leqslant 0.$$

No contexto de variedades, substituindo o intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ por uma variedade Riemanniana M compacta sem bordo, temos que, dada qualquer função suave $u \in C^2(M)$, existe um ponto x_0 tal que

$$\text{(i) } u(x_0) = u^*; \quad \text{(ii) } |\nabla u(x_0)| = 0; \quad \text{(iii) } \Delta u(x_0) \leqslant 0$$

onde, $u^* = \sup_M u < \infty$.

Quando M não é compacta, nem sempre é possível encontrar um ponto $x_0 \in M$ tal que $u(x_0) = u^*$, onde $u : M \to \mathbb{R}$ é continua e $u^* = \sup_M u < \infty$. Se a variedade Riemanniana considerada for o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ munido da métrica usual e a função $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ limitada superiomente é de classe C^2, então existe uma sequência $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}^n$ tal que:

$$\text{(i) } u(x_k) > u^* - \frac{1}{k}; \quad \text{(ii) } |\nabla u(x_k)| < \frac{1}{k}; \quad \text{(iii) } \Delta u(x_k) < \frac{1}{k},$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. A demonstração do resultado acima pode consultada em [2] e [11].

Retomando este tipo de problema ao contexto de variedades Riemannianas, Omori [7] provou que se M é completa com curvatura seccional limitada inferiomente, então dada uma função $u \in C^2(M)$ limitada superiomente, existe uma sequência de pontos $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ tal que

$$\text{(i) } u(x_k) > u^* - \frac{1}{k}; \quad \text{(ii) } |\nabla u(x_k)| < \frac{1}{K}; \quad \text{(iii) } \textit{Hess}\, u(x_k)(\nu,\nu) < \frac{1}{k}|\nu|^2, \tag{2.1}$$

para todo $\nu \in T_{x_k}M$.

Alguns anos depois Shing-Tung Yau simplificou o príncipio do máximo para variedades com limitação sobre a curvatura de Ricci substituindo a condição (iii) em (2.1) por $\Delta u(x_k) < 1/k$, $k \in \mathbb{N}$. O princípio do Máximo passa então denominar-se Princípio de Máximo do Omori-Yau.

Uma versão mais atual do Princípio do Máximo de Omori-Yau provado por Pigola, Rigola e Setti, mostra que o princípio do Máximo não depende da limitação das curvaturas. Tal resultado será enunciado e provado a seguir:

2.1 Princípio do Máximo do Omori-Yau

Uma versão mais atual do Princípio do Máximo do Omori-Yau proposto por Pigola, Rigola e Setti, mostra que o princípio do Máximo não depende da limitação das curvaturas. Tal resultado será enunciado e provado a seguir:

Teorema 6. *Seja* M^n *uma variedade riemanniana e* $\psi : M \to [0,\infty)$ *uma função não-negativa de classe* C^2 *satisfazendo as seguintes condições:*

(a.1) $\psi(x) \to +\infty$*, quando* $x \to +\infty$*;*

(a.2) $\exists A > 0$ *tal que* $|\nabla\psi| \leqslant A\sqrt{\psi}$*, fora de um conjunto compacto;*

(a.3) $\exists B > 0$ *tal que* $\Delta\psi \leqslant B\sqrt{\psi G(\sqrt{\psi})}$*, fora de um conjunto compacto.*

Onde G *é uma função suave no intervalo* $[0,+\infty)$ *satisfazendo as seguintes condições:*

(b.1) $G(0) > 0$*;*

(b.2) $G'(t) \geqslant 0$ *em* $[0,+\infty)$*;*

(b.3) $\dfrac{1}{\sqrt{G(t)}} \notin L^1(0,+\infty)$*;*

(b.4) $\limsup_{t\to+\infty} \dfrac{tG(\sqrt{t})}{G(t)} < +\infty$.

Então, dada uma função $u \in C^2(M)$ *com* $u^* = \sup_M u < +\infty$ *existe uma sequencia* $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset M^m$ *tal que*

$$\textit{(i)}\ u(x_k) > u^* - \frac{1}{k}; \quad \textit{(ii)}\ |\nabla u|(x_k) < \frac{1}{k}; \quad \textit{(iii)}\ \Delta u(x_k) < \frac{1}{k}.$$

Demonstração. Iniciaremos a demonstração definindo a seguinte função

$$\varphi(t) = e^{\int_0^t \frac{ds}{\sqrt{G(s)}}}.$$

Para uso futuro vejamos algumas relações envolvendo as derivadas de φ

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= e^{\int_0^t \frac{ds}{\sqrt{G(s)}}} \frac{1}{\sqrt{G(t)}} \\
\varphi'(t) &= \frac{\varphi(t)}{\sqrt{G(t)}}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\varphi''(t) &= e^{\int_0^t \frac{ds}{\sqrt{G(s)}}} \frac{1}{\sqrt{G(t)}} \frac{1}{\sqrt{G(t)}} - e^{\int_0^t \frac{ds}{\sqrt{G(s)}}} \frac{G'(t)}{2\sqrt{G(t)}} \frac{1}{G(t)} \\
\varphi''(t) &= \varphi(t)\frac{1}{G(t)} - \varphi(t)\frac{G'(t)}{2G(t)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

Decorre das condições (b.1) e (b.2) que $G(t) > 0$, com $t \in (0, \infty)$ donde segue que

$$(\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)})^2 - \frac{\varphi''(t)}{\varphi(t)} = \frac{G'(t)}{2G(t)^{\frac{3}{2}}} \geqslant 0. \tag{2.2}$$

Fazendo uso das condições satisfeitas por G obtemos

$$\frac{tG(\sqrt{t})}{G(t)} < c \tag{2.3}$$

e portanto

$$\frac{1}{\sqrt{G(t)}} \leqslant \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{tG(\sqrt{t})}}, \tag{2.4}$$

para alguma constante $c > 0$. Diante da deisgualdade (2.4) temos

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{1}{\sqrt{G(t)}} \leqslant \frac{c_1}{\sqrt{tG(\sqrt{t})}} \tag{2.5}$$

onde $c_1 = \sqrt{c}$.

Consideremos agora qualquer função suave $u \in C^2(M)$ com $u^* = \sup_M u < \infty$. Tomemos um ponto $x_0 \in M$ e defina para cada $k \in \mathbb{N}$ a função

$$u_k(x) = \frac{u(x) - u(x_0) + 1}{\varphi(\psi(x))^{\frac{1}{k}}}. \tag{2.6}$$

Aplicando no ponto x_0 obtemos que $u_k(x_0) = \dfrac{1}{\varphi(\psi(x_0))^{\frac{1}{k}}} > 0$.

Além disso, como $u^* < \infty$ e $\varphi(\psi(x)) \to \infty$ quando $x \to \infty$, segue que $\limsup_{x\to\infty} u_k(x) \leqslant 0$. Sendo $u_k(x_0) > 0$, temos que u_k atinge um máximo absoluto positivo em algum ponto $x_k \in M$. Procedendo dessa forma, construimos uma sequencia $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset M$. Prosseguiremos provando que

$$\limsup_{k\to\infty} u(x_k) = u^*. \tag{2.7}$$

Sendo $u^* = \sup_M u$, temos que $\exists\, y \in M$; $u(y) > \sup_M u - \varepsilon$. Pela maximilidade de x_k obtemos

$$\frac{u(x_k) - u(x_0) + 1}{\varphi(\psi(x_k))^{\frac{1}{k}}} \geqslant \frac{u(y) - u(x_0) + 1}{\varphi(\psi(y))^{\frac{1}{k}}} \tag{2.8}$$

Se $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ está em subconjunto compacto de M, então passando à subsequencia se necessário $\{x_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ e fazendo $j \to \infty$, segue que

$$u(\overline{x}) - u(x_0) + 1 \geqslant u(y) - u(x_0) + 1,$$

onde $x_k \to \overline{x}$, quando $j \to \infty$.

Sendo $\limsup_{k\to\infty} u(x_k) \geqslant u(\overline{x})$ e $u(\overline{x}) \geqslant u(y) > \sup_M u - \varepsilon$, fazendo $\varepsilon \to 0$ obtemos $\limsup_{k\to\infty\to} u(x_k) \geqslant \sup_M u$. Provando assim a igualdade (2.7) para $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em um compacto.

Para provar o caso em que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ está fora de um compacto iremos supor que a igualdade desejada não seja verdadeira, ou seja, suponha que exista um ponto $\widehat{x} \in M$ tal que

$$u(\widehat{x}) > u(x_k) + \delta, \tag{2.9}$$

para algum $\delta > 0$ e k suficientemente grande.

Ultilizando a condição (a.1), onde $\psi(x_k) \to \infty$ quando $k \to \infty$ tomemos para cada $k \in \mathbb{N}$ um ponto $\widehat{x} \in M$ tal que $\psi(x_k) > \psi(\widehat{x})$ implicando em

$$\frac{1}{\varphi(\psi(x_k))^{\frac{1}{k}}} < \frac{1}{\varphi(\psi(\widehat{x}))^{\frac{1}{k}}}. \tag{2.10}$$

Das expressões (2.9) e (2.10) obtemos

$$u_k(\widehat{x}) = \frac{u(\widehat{x}) - u(x_0) + 1}{\varphi(\psi(\widehat{x}))^{\frac{1}{k}}} > \frac{u(x_k) - u(x_0) + 1}{\varphi(\psi(x_k))^{\frac{1}{k}}} = u_k(x_k). \tag{2.11}$$

Contradizendo a definição de x_k.

Novamente, consideremos o caso em que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ está em um subconjunto compacto de M, então passando uma subsequencia se necessário, $x_k \to \overline{x} \in M$ e sendo

$$\frac{u(x_k) - u(x_0) + 1}{\varphi\psi(x_k)^{\frac{1}{k}}} \geqslant \frac{u(y) - u(x_0 + 1)}{\varphi(\psi(y))^{\frac{1}{k}}}, \ \ \forall y \in M$$

tem-se $u(\overline{x}) \geqslant u(y), \ \forall y \in M$. Portanto no ponto $\overline{x}$ temos

$$u(\overline{x}) = u^*, \ \ |\nabla u(\overline{x})| = 0 \ \text{ e } \ \nabla^2 u(\overline{x}) \leqslant 0$$

Para o caso em que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ está fora de compacto usaremos que x_k é ponto de máximo para u_k, temos então

$$\nabla u_k(x_k) = 0 \ \text{ e } \ \nabla^2(x_k) \leqslant 0.$$

Um cálculo direto apartir de (2.6) nos dá

$$\nabla u_k(x) = \frac{1}{\varphi(\psi(x))^{\frac{1}{k}}}(\nabla u(x) - \frac{1}{k}\frac{\varphi'(\psi(x))}{\varphi(\psi(x))}\nabla\psi(x)(u(x) - u(x_0) + 1)). \tag{2.12}$$

Portanto, $\nabla u_k(x_k) = 0$ se e somente se

$$\nabla u(x_k) = \frac{1}{k}\frac{\varphi'(\psi(x_k))}{\varphi(\psi(x_k))}\nabla\psi(x)(u(x) - u(x_0) + 1)). \tag{2.13}$$

Utilizando (2.5) e a hipótese (a.2) obtemos

$$\begin{aligned} |\nabla u(x_k)| &\leqslant \frac{1}{k}\frac{c_1}{\sqrt{\psi(x_k)G(\sqrt{\psi(x_k)})}}A\sqrt{\psi(x_k)}|u^* - u(x_0) + 1| \\ |\nabla u(x_k)| &\leqslant \frac{1}{k}\frac{c_1 A}{\sqrt{G(\sqrt{\psi(x_k)})}}(u^* - u(x_0) + 1). \end{aligned}$$

Observe que $|u(x_k)| \to 0$ quando $k \to \infty$, isto prova a condição (ii).

Novamente pelo fato de x_k ser ponto de máximo de u_k e da equivalência (2.13) tem-se

$$
\begin{aligned}
\textit{Hess}\ u_k(x_k)(\nu,\nu) &= \langle \nabla_\nu \nabla u_k(x_k), \nu\rangle \\
&= \langle \nabla_\nu \frac{1}{\varphi(\psi_k)^{\frac{1}{k}}}(\nabla u(x_k) - \frac{1}{k}(u(x_k) - u(x_0) + 1)\frac{\varphi'(\psi_k)}{\varphi(\psi_k)}\nabla\psi_k), \nu\rangle \\
&= \langle \frac{1}{\varphi(\psi_k)^{\frac{1}{k}}}\nabla_\nu\nabla u(x_k) - \frac{1}{k}(u(x_k) - u(x_0) + 1)\frac{\varphi'(\psi_k)}{\varphi(\psi_k)}\nabla\psi_k + \\
&\quad +\nu(\frac{1}{\varphi(\psi_k)^{\frac{1}{k}}})(\nabla u(x_k) - \frac{1}{k}(u(x_k) - u(x_0) + 1)\frac{\varphi'(\psi_k)}{\varphi(\psi_k)}\nabla(\psi_k), \nu\rangle \\
&= \langle \frac{1}{\varphi(\psi_k)^{\frac{1}{k}}}(\nabla_\nu\nabla u + (\nabla_\nu(-\frac{1}{k}(u(x_k) - u(x_0) + 1)\frac{\varphi'(\psi_k)}{\varphi(\psi_k)}\nabla\psi_k)) - \\
&\quad -\frac{1}{k}\frac{\varphi'(\psi_k)}{\varphi(\psi_k)^{\frac{1}{k}+1}}\nabla u(x_k) - \frac{1}{k}(u(x_k) - u(x_0) + 1)\frac{\varphi'(\psi_k)}{\varphi(\psi_k)}\nabla\psi_k), \nu\rangle \\
&= \langle \frac{1}{\varphi(\psi_k)^{\frac{1}{k}}}(\nabla_\nu\nabla u - \frac{1}{k}(u(x_k) - u(x_0) + 1)\frac{\varphi'(\psi_k)}{\varphi(\psi_k)}\nabla_\nu\nabla\psi_k - \\
&\quad \nu(\frac{(u(x_k) - u(x_0) + 1)}{k}\frac{\varphi'(\psi_k)}{\varphi(\psi_k)})\nabla\psi_k) - \frac{1}{k}\frac{\varphi'(\psi_k)}{\varphi(\psi_k)^{\frac{1}{k}+1}}\langle\nabla\psi_k, \nu\rangle\nabla u + \\
&\quad \frac{1}{k^2}\frac{\varphi'(\psi_k)}{\varphi(\psi_k)^{\frac{1}{k}+1}}\langle\nabla\psi(x_k), \nu\rangle(u(x_k) - u(x_0) + 1)\frac{\varphi'(\psi_k)}{\varphi(\psi_k)}\nabla\psi_k, \nu\rangle \\
&= \langle \frac{1}{\varphi(\psi_k)^{\frac{1}{k}}}(\nabla_\nu\nabla u(x_k) - \frac{1}{k}(u(x_k) - u(x_0) + 1)\frac{\varphi'(\psi_k)}{\varphi(\psi_k)}\nabla_\nu\nabla\psi_k - \\
&\quad \frac{1}{k}\langle\nabla u(x_k), \nu\rangle\frac{\varphi'(\psi_k)}{\varphi(\psi_k)}\nabla\psi_k - \frac{(u(x_k) - u(x_0) + 1)}{k}\langle\frac{\varphi''(\psi_k)}{\varphi(\psi_k)}\nabla\psi_k - \\
&\quad - \frac{\varphi'(\psi_k)^2}{\varphi(\psi_k)^2}\nabla\psi_k, \nu\rangle\nabla\psi_k - \frac{1}{k}\frac{\varphi'(\psi_k)}{\varphi(\psi_k)^{\frac{1}{k}+1}}\langle\nabla\psi_k, \nu\rangle\nabla u + \\
&\quad \frac{1}{k^2}\frac{\varphi'(\psi_k)}{\varphi(\psi_k)^{\frac{1}{k}+1}}\langle\nabla\psi(x_k), \nu\rangle(u(x_k) - u(x_0) + 1)\frac{\varphi'(\psi_k)}{\varphi(\psi_k)}\nabla\psi_k, \nu\rangle
\end{aligned}
$$

.

De agora em diante, afim de simplificarmos a notação $\alpha_k = u(x_k) - u(x_0) + 1$.

$$
\begin{aligned}
\textit{Hess}\ u_k(x_k)(\nu,\nu) &= \frac{1}{\varphi(\psi_k)^{\frac{1}{k}}}(\textit{Hess}\ u(x_k)(\nu,\nu) - \frac{\alpha_k}{k}(\frac{\varphi'(\psi_k)}{\varphi(\psi_k)}\textit{Hess}\ \psi_k(\nu,\nu) + \\
&\quad \frac{\varphi''(\psi_k)}{\varphi(\psi_k)}\langle\nabla\psi_k, \nu\rangle^2 - \frac{\varphi'(\psi_k)^2}{\varphi(\psi_k)^2}\langle\nabla(\psi_k), \nu\rangle^2 - \frac{1}{k}\frac{\varphi'(\psi_k)^2}{\varphi(\psi_k)^2}\langle\nabla\psi_k, \nu\rangle^2)) - \\
&\quad -\frac{2}{k}\frac{1}{\varphi(\psi)^{\frac{1}{k}}}\frac{\varphi'(\psi)}{\varphi(\psi)}\langle\nabla\psi, \nu\rangle\langle\nabla u, \nu\rangle.
\end{aligned}
$$

Substituindo (2.13) na última igualdade

$$\begin{aligned}
\textit{Hess}\ u_k(x_k)(v,v) &= \frac{1}{\varphi(\psi_k)^{\frac{1}{k}}}(\textit{Hess}\ u(x_k)(v,v) - \frac{\alpha_k}{k}(\frac{\varphi'(\psi_k)}{\varphi(\psi_k)}\textit{Hess}\ \psi_k(v,v) + \\
&\quad \frac{\varphi''(\psi_k)}{\varphi(\psi_k)}\langle\nabla\psi_k, v\rangle^2 - \frac{\varphi'(\psi_k)^2}{\varphi(\psi_k)^2}\langle\nabla(\psi_k), v\rangle^2 - \frac{1}{k}\frac{\varphi'(\psi_k)^2}{\varphi(\psi_k)^2}\langle\nabla(\psi_k), v\rangle^2 + \\
&\quad + \frac{2}{k}\frac{\varphi'(\psi_k)}{\varphi(\psi_2)}\langle\nabla\psi_k, v\rangle^2)) \\
&= \frac{1}{\varphi(\psi_k)^{\frac{1}{k}}}(\textit{Hess}\ u(x_k)(v,v) - \frac{\alpha_k}{k}(\frac{\varphi'(\psi_k)}{\varphi(\psi_k)}\textit{Hess}\ \psi_k(v,v) + \\
&\quad + \frac{\varphi''(\psi_k)}{\varphi(\psi_k)}\langle\nabla\psi_k, v\rangle^2 - \frac{\varphi'(\psi_k)^2}{\varphi(\psi_k)^2}\langle\nabla(\psi_k), v\rangle^2 + \frac{1}{k}\frac{\varphi'(\psi_k)^2}{\varphi(\psi_k)^2}\langle\nabla(\psi_k), v\rangle^2)) \\
&= \frac{1}{\varphi(\psi_k)^{\frac{1}{k}}}(\textit{Hess}\ u(x_k)(v,v) - \frac{\alpha_k}{k}(\frac{\varphi'(\psi_k)}{\varphi(\psi_k)}\textit{Hess}\ \psi_k(v,v) + \\
&\quad + (\frac{1}{k}\frac{\varphi'(\psi_k)^2}{\varphi(\psi_k)^2} - (\frac{\varphi'(\psi_k)^2}{\varphi(\psi_k)^2} - \frac{\varphi''(\psi_k)}{\varphi(\psi_k)}))\langle\psi_k, v\rangle^2)).
\end{aligned}$$

Assim *Hess* $u_k(x_k) \leqslant 0$ se e somente se

$$\begin{aligned}
\textit{Hess}\ u(x_k)(v,v) &\leqslant \frac{\alpha_k}{k}(\frac{\varphi'(\psi_k)}{\varphi(\psi_k)}\textit{Hess}\ \psi_k(v,v) + \frac{1}{k}\frac{\varphi'(\psi_k)^2}{\varphi(\psi_k)^2}\langle\psi_k, v\rangle^2 - \\
&\quad -(\frac{\varphi'(\psi_k)^2}{\varphi(\psi_k)^2} - \frac{\varphi''(\psi_k)}{\varphi(\psi_k)})\langle\psi_k, v\rangle^2).
\end{aligned}$$

Pela expressão (2.2) e sendo $\frac{\alpha_k}{k} > 0$ segue que

$$\textit{Hess}\ u(x_k)(v,v) \leqslant \frac{\alpha_k}{k}(\frac{\varphi'(\psi_k)}{\varphi(\psi_k)}\textit{Hess}\ \psi_k(v,v) + \frac{1}{k}\frac{\varphi'(\psi_k)^2}{\varphi(\psi_k)^2}\langle\nabla\psi_k, v\rangle^2). \tag{2.14}$$

Donde obtemos que

$$\Delta u(x_k) \leqslant \frac{\alpha_k}{k}(\frac{\varphi'(\psi_k)}{\varphi(\psi_k)}\Delta\psi_k + \frac{1}{k}\frac{\varphi'(\psi_k)^2}{\varphi(\psi_k)}\|\nabla\psi_k\|^2). \tag{2.15}$$

Combimando a desigualdade (2.5) e a hipótese (a.2) tem-se

$$\frac{\varphi'(\psi_k)^2}{\varphi(\psi_k)^2}\langle\nabla\psi(x_k), v\rangle^2 \leqslant \frac{c_1^2 A^2}{G(\sqrt{\psi_k})}\|v\|^2, \tag{2.16}$$

para k suficientement grande.

A hipótese (a.3) e a desigualdade (2.5) implicam

$$\frac{\varphi'(\psi_k)}{\varphi(\psi_k)}\textit{Hess}\ \psi_k(v,v) \leqslant c_1 B\|v\|^2. \tag{2.17}$$

Substituindo as equações (2.16) e (2.17) em (2.14)

$$\textit{Hess}\ u(x_k)(v,v) \leqslant \frac{\alpha_k}{k}(c_1 B + \frac{1}{k}\frac{c_1^2 A^2}{G(\sqrt{\psi_k})})\|v\|^2. \tag{2.18}$$

Observe que $\alpha_k = u(x_k) - u(x_0) + 1$ é limitada, ou seja, existe uma constante $c_2 > 0$ talque $\alpha_k \leqslant c_2$. Como $\psi_k \to \infty$ e sendo $G(0) > 0$ e $G'(t) > 0$, então para k suficientemente grande temos $\frac{1}{kG(\sqrt{\psi_k})} < c_3$, onde $c_3 > 0$ é constante.

Portanto,

$$Hess\ u(x_k)(\nu, \nu) \leqslant \frac{1}{k} c_2(c_1 B + c_1^2 A^2 c_3)|\nu|^2 = \frac{c_4}{k}|\nu|^2$$

onde, $c_4 = c_2(c_1 B + c_1^2 A^2 c_3) > 0$

$$Hess\ u(x_k)(\nu, \nu) \leqslant \frac{c_4}{k}\|\nu\|^2, \tag{2.19}$$

obtemos então a seguinte desigualdade

$$\Delta u(x_k) \leqslant \frac{c_4}{k}. \tag{2.20}$$

Fazendo $k \to \infty$ finalizamos a demonstração. □

Exemplo 1. *Para uso futuro mostraremos que a função* $G(t) = (t+2)^2(\ln(t+2))^2$ *satisfaz as condições i), ii), iii) e iv) do teorema acima.*

(i) $G(0) = 2^2(\ln(2))^2$*;*

(ii) $G'(t) = 2(t+2)(\ln(t+2))^2 + 2(t+2)\ln(t+2) > 0$, *para* $t \in [0, +\infty)$*;*

(iii) $\dfrac{1}{\sqrt{G(t)}} = \dfrac{1}{(t+2)\ln(t+2)}$. *Integrando, temos*

$$\lim_{b \to \infty} \int_0^b \frac{1}{(t+2)\ln(t+2)} dt \to +\infty;$$

(iv) $\dfrac{tG(\sqrt{t})}{G(t)} = \dfrac{t(\sqrt{t}+2)^2(\ln(\sqrt{t}+2))^2}{(t+2)^2(\ln(t+2))^2}$. *Para* t *suficientemente grande temos que* $(\sqrt{t}+2) < (t+2)$, *implicando que* $\dfrac{\ln(\sqrt{t}+2)}{\ln(t+2)} < 1$. *Assim,*

$$\frac{tG(\sqrt{t})}{G(t)} = \frac{t(\sqrt{t}+2)^2(\ln(\sqrt{t}+2))^2}{(t+2)^2(\ln(t+2))^2} \to 1, \quad \textit{quando } t \to \infty.$$

Portanto, $\limsup_{t\to\infty} \dfrac{tG(\sqrt{t})}{G(t)} < \infty$.

O resultado seguinte é uma generalização do teorema (6) dada por Pessoa e Lima em [13].

Teorema 7. *Seja M^m uma variedade Riemanniana completa e assuma que existe uma função não negativa γ satisfazendo as seguintes propriedades:*

h1) $\gamma(x) \to +\infty$, *quando* $x \to +\infty$;

h2) $\|\nabla\gamma\| \leqslant A\sqrt[p]{G(\gamma)}\left(\int_0^\gamma \frac{ds}{\sqrt[p]{G(\gamma)}} + 1\right)$, *fora de um conjunto compacto;*

h3) $\Delta\gamma \leqslant B\sqrt[p]{G(\gamma)}\left(\int_0^\gamma \frac{ds}{\sqrt[p]{G(\gamma)}} + 1\right)$, *fora de um conjunto compacto;*

para certas constantes positivas $A, B > 0$, *onde* $p \in \mathbb{N}$ *é fixado e* $G : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *é uma função suave satisfazendo:*

g1) $G(0) > 0$ *e* $G'(t) \geqslant 0$;

g2) $\int_0^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt[p]{G(s)}} = +\infty$.

Se $u \in \mathcal{C}^2(M)$ *é uma função que satisfaz*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{u(x)}{\varphi(\gamma(x))} = 0, \tag{2.21}$$

onde

$$\varphi(t) = \log\left(\int_0^t \frac{ds}{\sqrt[p]{G(s)}} + 1\right),$$

então existe uma sequência $x_n \in M$, $n \in \mathbb{N}$ *tal que:*

i) $\|\nabla u\|(x_n) < \frac{1}{n}$;

ii) $\Delta u(x_n) < \frac{1}{n}$;

para todo $n \in \mathbb{N}$. *Se, ao invés de* h3) *nós assumirmos*

h4) $\operatorname{Hess}\gamma(.,.) \leqslant \sqrt[p]{G(\gamma)}\left(\int_0^\gamma \frac{ds}{\sqrt[p]{G(\gamma)}} + 1\right)\langle .,. \rangle$, *fora de um conjunto compacto.*

No sentido das formas quadráticas, a conclusão de ii) *se modifica para*

iii) $\operatorname{Hess} u(x_n)(.,.) < \frac{1}{n}\langle .,. \rangle$.

Demonstração. Fixamos uma sequeência de números reais positivos $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que, $\varepsilon_n \to 0$ e consideremos agora uma função $u \in \mathcal{C}^2(M)$ que satisfaça (2.21). Defina

$$g_n(x) = u(x) - \varepsilon_n \varphi(\gamma(x)). \tag{2.22}$$

e observe que φ é $C^2(M)$, positiva e vale

$$\varphi(t) \to +\infty, \quad \text{quando} \quad t \to +\infty.$$

Por uma cálculo direto, temos

$$\varphi'(t) = \left[\sqrt[p]{G(t)}\left(\int_0^t \frac{ds}{\sqrt[p]{G(s)}} + 1\right)\right]^{-1}, \tag{2.23}$$

$$\varphi''(t) = -\left[\sqrt[p]{G(t)}\left(\int_0^t \frac{ds}{\sqrt[p]{G(s)}} + 1\right)\right]^{-2}\left[\frac{G'(t)}{p\sqrt[p]{(G(t))^{p-1}}}\left(\int_0^t \frac{ds}{\sqrt[p]{G(s)}} + 1\right) + 1\right]$$

e usando as propriedades satisfeitas por G, concluimos que

$$\varphi''(t) \leqslant 0. \tag{2.24}$$

É fácil ver que g_n atinge seu supremo em algum ponto $x_n \in M$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Segue diretamente da definição de g_n que

$$\nabla g_n(x) = \nabla u(x) - \varepsilon_n \varphi'(\gamma(x))\nabla\gamma(x).$$

Em particular, nos pontos x_n obtemos

$$\|\nabla u\|(x_n) = \varepsilon_n \varphi'(\gamma(x_n))\|\nabla\gamma\|(x_n). \tag{2.25}$$

Usando $h2$) e (2.23), na igualdade acima, teremos

$$\|\nabla u\|(x_n) = \varepsilon_n \varphi'(\gamma(x_n))\|\nabla\gamma\|(x_n) \leqslant \varepsilon_n.$$

o que prova i).

Similarmente, a expressão (2.22) combinada com (2.24), implica que

$$\begin{aligned} \mathit{Hess}\; g_n(x)(v,v) &= \mathit{Hess}\; u(x)(v,v) - \varepsilon_n\left(\varphi'(\gamma(x))\mathit{Hess}\;\gamma(x)(v,v) - \right. \\ &\quad \left. -\varphi''(\gamma(x))\langle\nabla\gamma(x), v\rangle^2\right) \\ &\geqslant \mathit{Hess}\; u(x)(v,v) - \varepsilon_n\varphi'(\gamma(x))\mathit{Hess}\;\gamma(x)(v,v), \end{aligned}$$

para todo v. Usando o fato que x_n é um ponto de máximo de g_n, a hipótese $h4$) e a inequação (2.23), nos darão

$$\textit{Hess}\, u(x_n)(v,v) \leqslant \varepsilon_n \varphi'(\gamma(x_n))\textit{Hess}\, \gamma(x_n)(v,v) \leqslant \varepsilon_n \langle v, v\rangle. \tag{2.26}$$

Isto prova iii).

Finalmente, se assumirmos que $h3$) ocorra, obteremos

$$\Delta u(x_n) \leqslant \varepsilon_n \varphi'(\gamma(x_n))\Delta\gamma(x_n) \leqslant \varepsilon_n.$$

O que encerra nossa prova.

□

2.2 Variedade Riemanniana Estocasticamente Completa

Definição 16. *Seja* M *variedade Riemanniana (não necessariamente completa) . O Princípio do Máximo de Omori-Yau Fraco é dito verdadeiro em* M *se, para qualquer funcão suave* $u \in C^2(M)$ *com* $u^* = \sup_M u < \infty$*, existe uma sequência de pontos* $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ *satisfazendo*

$$u(x_k) > u^* - \frac{1}{k} \quad e \quad \Delta u(x_k) < \frac{1}{k}.$$

Seja M variedade Riemanniana completa e $\Delta = div \circ grad$ o operador Laplace-Beltrami atuando no espaço $C_0^\infty(M)$ de funções suave de suporte compacto. Relembrando que pela fórmula de Green temos:

$$\int_M (\Delta u) v d\mu = -\int_M \langle \nabla u, \nabla v\rangle.$$

Observe que Δ é simétrica com respeito a μ, podemos então extender a um operador auto-adjunto em $L^2(M,\mu)$. Em geral, esta extensão não pode ser única, mas se M é geodésica completa então a extensão é única, também denotaremos por Δ.

O operador Δ é não-positivo definido, implicando que o seguinte operador $P_t = e^{t\Delta}$ é um operador auto-adjunto limitado em $L^2(M)$ para qualquer $t \geqslant 0$. A família $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ é chamado semi-grupo do calor. Para qualquer $f \in L^2(M)$, a função $u(t,x) = P_t f(x)$ é suave em $(0,+\infty) \times M$ e satisfaz a equação do calor.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla u$$

e a condição inicial

$$u(t,) \to f \text{ com } t \to 0^+ \text{ na norma do } L^2(M).$$

Além disso, existe uma função $p_t(x, y)$ com $t > 0$ e $x, y \in M$ tal que

$$P_t f(x) = \int_M p_t(x, y) f(y) d\mu(y),$$

onde a função $p_t(x, y)$ é chamada núcleo do calor de M.

Definição 17. *Uma variedade Riemanniana M é dita estocasticamente completa se*

$$\int p_t(x, y) dy = 1, \tag{2.27}$$

onde $p_t(x, y)$ é o núcleo do calor com $(x, t) \in M \times (0, +\infty)$.

A condição analítica expressada em (2.27) é equivalente a outras propriedades. A equivalência de estocasticamente completa que utilizaremos no resultado principal deste trabalho é dada por Pigola, Rigoli e Setti em [2] e [12].

Teorema 8. *Seja M variedade Riemanniana. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *M é estocasticamente completa,*

2. *Pra toda função $u \in C^2(M)$ com $u* = \sup_M u < +\infty$ existe uma sequência de pontos $\{x_k\}_{k \in N} \subset M$, para cada $k \in \mathbb{N}$.*

$$u(x_k) > u^* - \frac{1}{k} \quad e \quad \Delta u(x_k) < \frac{1}{k}$$

Capítulo 3

A Curvatura Média de Subvariedades Cilindricamente Limitadas

Neste capítulo apresentaremos resultados para variedades cilindricamente limitadas. Tendo como principal ferramenta O príncipio do Máximo de Omori-Yau, na parte (a) do Teorema 9 apresentaremos uma estimativa inferior para a curvatura média de variedades Riemannianas completas cilindricamente limitadas. Na parte (b) disposmos da versão fraca do Príncipio do Máximo de Omori-Yau caracterizada pelo conceito de completude estocástica. Como corolário do resultado principal temos que uma hipersuperfície completa de $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, com projeção limitada num subespaço bidimensional não pode ser própria.

Teorema 9. *Seja* $\varphi : M^m \to N^{n-l} \times \mathbb{R}^l$ *uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana* M *completa de dimensão* $m \geqslant l+1$. *Seja* $B_N(r)$ *bola geodésica de* N^{n-l} *centrada em* p *com raio* r. *Dado* $q \in M$, *assumimos que curvatura seccional radial* K_N *da geodésica radial saindo de* $p = \pi_N(\varphi(q)) \in N^{n-l}$ *são limitadas* $K_n \leqslant b$ *na* $B_N(r)$. *Suponha que*

$$\varphi(M) \subset B_N \times \mathbb{R}^l \tag{3.1}$$

para $r < \min\{inj_N(p), \frac{\pi}{2\sqrt{b}}\}$, *onde admitiremos* $\frac{\pi}{2\sqrt{b}}$ *por* $+\infty$ *se* $b \leqslant 0$.

a) Se $\varphi : M^m \to N^{n-l} \times \mathbb{R}^l$ *é própria, então*

$$\sup_M |H| \geqslant \frac{m-l}{m} C_b(r). \tag{3.2}$$

b) Se

$$\sup_M |H| < \frac{m-l}{m} C_b(r), \tag{3.3}$$

então M *é estocasticamente imcompleta.*

Demonstração. Defina $\sigma : N^{n-l} \times \mathbb{R}^l \to [0, +\infty)$ por

$$\sigma(z, y) = \rho_{\mathbb{R}^l(y)} \tag{3.4}$$

onde $\rho_{\mathbb{R}^l}(y) = \| y \|_{\mathbb{R}^l}$ é a função distância da origem em $\mathbb{R}^l$. Como φ é própria e $\varphi(M) \subset B_N \times \mathbb{R}^l$, então a função $\psi(x) = \sigma(\varphi(x))$ satisfaz a seguinte condição:

$$\psi(x) \to \infty \text{ quando } \rho_M(x) = dist_M(q, x) \to \infty, \tag{3.5}$$

pois sendo $\varphi(x)$ própria e $\rho_M(x) \to \infty$ obtemos $d_{M\times\mathbb{R}^l}(\varphi(x)) \to \infty$ com $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x)) \in B_N \times \mathbb{R}^l$. Como $\varphi_1(x) \in B_N(r)$ e $\varphi_2(x) \in \mathbb{R}^l$ segue-se então

$$\rho_{\mathbb{R}^l}(\varphi_2(x)) \to \infty, \text{quando } \rho_M(x) = dist_M(q, x) \to \infty,$$

onde $\psi(x) = \rho_2(x)$.

Lembrando que

$$grad^{N\times\mathbb{R}^l} \sigma(\varphi(x)) = grad^M \psi(x) + (grad^M \psi(x))^\perp,$$

temos que

$$|\mathrm{grad}^{N\times\mathbb{R}^l} \sigma(\varphi(x))| \geqslant |grad^M \psi(x)|.$$

Assim, fora de conjunto compacto teremos

$$|\mathrm{grad}^M \psi(x)| \leqslant |\mathrm{grad}^{N\times\mathbb{R}^l} \sigma(\varphi(x))| = |grad^{\mathbb{R}^l} \rho_{\mathbb{R}^l}| = 1 \leqslant \sqrt{\psi(x)}. \tag{3.6}$$

Para calcular $\Delta_M \psi$ iniciaremos tomando as bases $\{\partial/\partial\rho_N, \partial/\partial\theta_2, ..., \partial/\partial\theta_{n-l}\}$ de TN e $\{\partial/\partial\rho_{\mathbb{R}^l}, \partial/\partial\gamma_2, ..., \partial/\partial\gamma_l\}$ de $T\mathbb{R}^l$ ortonormais em $x \in M$. Então, escolhemos uma base ortonormal $\{e_1, ..., e_m\}$ para T_xM como segue

$$e_i = \alpha_i \frac{\partial}{\partial\rho_N} + \sum_{j=2}^{n-l} a_{ij} \frac{\partial}{\partial\theta_j} + \beta_i \frac{\partial}{\partial\rho_{\mathbb{R}^l}} + \sum_{t=2}^{l} b_{it} \frac{\partial}{\partial\gamma_t},$$

onde $\alpha_i^2 + \sum_{j=2}^{n-l} a_{ij}^2 + \beta_i^2 + \sum_{t=2}^{l} b_{it}^2 = 1$.
Portanto, temos

$$\begin{aligned} Hess_{\,N\times\mathbb{R}^l}\sigma(\varphi(x))(e_i,e_i) &= Hess_{\,\mathbb{R}^l}\rho_{\mathbb{R}^l}(\pi_{\mathbb{R}^l}e_i,\pi_{\mathbb{R}^l}e_i) \\ &= \sum_{l}^{t=2} b_{it}^2 Hess_{\,\mathbb{R}^l}\rho_{\mathbb{R}^l}(\frac{\partial}{\partial\gamma_t},\frac{\partial}{\partial\gamma_t}), \end{aligned}$$

onde $\pi_{\mathbb{R}^l}$ denota a projeção ortonormal sobre $T\mathbb{R}^l$. Sendo $\mathbb{R}^l$ um espaço de curvatura seccional constante $k = 0$ e $\rho_{\mathbb{R}^l}$ a função distância para a origem em $\mathbb{R}^l$ então pela igualdade (1.25) segue que

$$Hess_{\,N\times\mathbb{R}^l}(e_i,e_i) = \sum_{t=2}^{l} b_{it}^2 C_k(\rho(\varphi(x))) = \frac{1}{\rho(\varphi(x))}\sum_{t=2}^{l} b_{it}^2.$$

Sendo $\sum_{t=2}^{l} b_{it}^2 \leqslant 1$, obtemos

$$Hess_{\,N\times\mathbb{R}^l}\sigma(\varphi(x))(e_i,e_i) \leqslant \frac{1}{\psi(x)}. \tag{3.7}$$

Temos que $\psi(x) \to \infty$ quando $\rho_M(x) = dist_M(q,x) \to \infty$, de onde decorre que $\sqrt{\psi(x)G(\sqrt{\psi(x)})} \to +\infty$, onde $G(t) = (t+2)^2(\ln(t+2))^2$ satisfaz as condições i), ii), iii) e iv) do Teorema 9 como já provado no exemplo (1).
Assim, fora de um compacto podemos assumir que

$$|\overrightarrow{H}|(x) = m|H|(x) \leqslant \sqrt{\psi(x)G(\sqrt{\psi(x)})}. \tag{3.8}$$

Caso contrário, $\sup_M |H| = +\infty$ e não há nada para provar.

Fora de um compacto temos também

$$\frac{1}{\psi(x)} \leqslant \sqrt{\psi(x)G(\sqrt{\psi(x)})}. \tag{3.9}$$

Combinando a igualdade (1.15) e a deisgualdades (3.7) obtemos

$$\begin{aligned} \Delta_M\psi(x) &= \sum_{i=1}^{m} Hess_{\,N\times\mathbb{R}^l}\sigma(\varphi(x))(e_i,e_i) + \langle grad^{N\times\mathbb{R}^l}\sigma(\varphi(x)), \overrightarrow{H}(x)\rangle \\ &\leqslant \frac{m}{\psi(x)} + m|H|(x). \end{aligned}$$

Segue de (3.8) e (3.9) que

$$\Delta_M\psi(x) \leqslant (m+1)\sqrt{\psi(x)G(\sqrt{\psi})}. \tag{3.10}$$

Observe que ψ satisfaz as condições $(a.1), (a.2)$ e $(a.3)$ do teorema 6. Agora defina $\rho : N^{n-l} \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ como sendo a função distância para p em N^{n-l}, ou seja,

$$\rho(z, y) = \rho_N(z) = dist_N(p, z).$$

Defina ainda $u : M^m \to \mathbb{R}$ por

$$u(x) = \rho(\varphi(x)).$$

Temos $\varphi(M) \subset B_N(r) \times \mathbb{R}^l$, o que implica em $u^* = \sup_M u \leqslant r < \infty$. Portanto, pelo teorema (6) existe uma sequência $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset M^m$ talque

$$u(x_k) > u^* - \frac{1}{k}; \ |grad\, u|(u_k) < \frac{1}{k}; \ \Delta u(x_k) < \frac{1}{k}.$$

Podemos então escrever

$$\frac{1}{k} > \Delta u(x_k) = \sum_{i=1}^{m} Hess_{\ N \times \mathbb{R}^l} \rho(\varphi(x_k))(e_i, e_i) + \langle grad^{N \times \mathbb{R}^l} \rho(\varphi(x_k)), \overrightarrow{H}(x_k) \rangle \qquad (3.11)$$

onde, $\{e_1, ..., e_m\}$ é uma base ortonormal para $T_{x_k}M$.

Sejam $\{\frac{\partial}{\partial \rho_N}, \frac{\partial}{\partial \theta_2}, ..., \frac{\partial}{\partial \theta_{n-l}}\}$ base ortonormal para TN e $\{y_1, ..., y_l\}$ coordenadas usuais para $\mathbb{R}^l$. Assim, escolha uma base ortonormal para $T_{x_k}M$ como segue

$$e_1 = \alpha_i \frac{\partial}{\partial \rho_N} + \sum_{j=2}^{n-l} a_{ij} \frac{\partial}{\partial \theta_j} + \sum_{t=1}^{l} c_{it} \frac{\partial}{\partial y_t} \qquad (3.12)$$

onde, $\alpha_i + \sum_{j=2}^{n-l} a_{ij}^2 + \sum_{t=1}^{l} c_{it}^2 = 1.$

Temos por hipótese $K_{rad}^N \leqslant b$ em $B_N(r)$. Ultilizando o Teorema 5, um cálculo direto nos dá

$$\begin{aligned}
Hess_{\ N \times \mathbb{R}^l} \rho(\varphi(x))(e_i, e_i) &= Hess_{\ N} \rho_N(z(x_k))(\pi_{TN} e_i, \pi_{TN} e_i) && (3.13)\\
&= \sum_{j=2}^{n-l} Hess_{\ N} \rho_N(z(x_k))(\frac{\partial}{\partial \theta_j}, \frac{\partial}{\partial \theta_j}) && (3.14)\\
&\geqslant \sum_{j=2}^{n-l} a_{ij}^2 C_b(r) && (3.15)\\
&= (1 - \alpha_i^2 - \sum_{t=1}^{l} c_{it}^2) C_b(r), && (3.16)
\end{aligned}$$

onde π_{TN} denota a projeção ortogonal em TN. Portanto,

$$\sum_{i=1}^{m} Hess_{\ N\times\mathbb{R}^l}(\varphi(x_k))(e_i,e_i) \geqslant (m-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^2-\sum_{i,t=1}^{m,l}c_{ij}^2)C_b(r). \tag{3.17}$$

Em x_k, temos

$$grad(u_{x_k}) = grad^{N\times\mathbb{R}^l}\rho(\varphi(x_k)) - (grad^{N\times\mathbb{R}^l}\rho(\varphi(x)))^{\perp}.$$

Sendo $\{\frac{\partial}{\partial\rho_N},\frac{\partial}{\partial\theta_2},...,\frac{\partial}{\partial\theta_{n-l}}\}$, $\{\frac{\partial}{\partial y_1},...,\frac{\partial}{\partial y_l}\}$ bases ortonormais para TN e TR^l respectivamente e $|grad u|(x_k) < \frac{1}{k}$, então

$$|grad\ u|^2(x_k) = \sum_{i=1}^{m}\langle\frac{\partial}{\partial\rho_N},e_i\rangle^2 = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i^2 < \frac{1}{k^2}. \tag{3.18}$$

Sendo

$|grad^{N\times\mathbb{R}^l}\rho| = |grad^N\rho_N| = 1$ e $\langle grad^{N\times\mathbb{R}^l}\rho(\varphi(x_k)),\overrightarrow{H}(x_k)\rangle \geqslant -|grad^{N\times\mathbb{R}^l}\rho(\varphi(x_k))||\overrightarrow{H}(x_k)|$, segue que

$$\langle grad^{N\times\mathbb{R}^l}\rho(\varphi(x_k)),\overrightarrow{H}(x_k)\rangle \geqslant -m\sup_M|H|. \tag{3.19}$$

Apartir de (3.11), (3.17) e (3.19) obtemos

$$\frac{1}{k} > (m-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^2-\sum_{i,t=1}^{m,l}c_{ij}^2)C_b(r) - m\sup_M|H|. \tag{3.20}$$

A desigualdade (3.20) combinada com (3.18) implicam

$$\frac{1}{k} > (m-\frac{1}{k^2}-\sum_{i,t=1}^{m,l}c_{ij}^2)C_b(r) - m\sup_M|H|,$$

donde segue que

$$\frac{1}{k}+\frac{C_b(r)}{k^2}+m\sup_M|H| > (m-\sum_{i,t=1}^{m,l}c_{ij}^2)C_b(r). \tag{3.21}$$

Observe agora que

$$\begin{aligned} |grad^M(y_t\circ\varphi)|^2 &= \sum_{i=1}^{m}\langle grad^M(y_t\circ\varphi),e_i\rangle^2 && (3.22)\\ &= \sum_{i=1}^{m}\langle grad^{N\times\mathbb{R}^l}y_t,e_i\rangle^2 && (3.23)\\ &= \sum_{i=1}^{m}\langle\frac{\partial}{\partial y_t},e_i\rangle^2 && (3.24)\\ &= \sum_{i=1}^{m}c_{it}^2. && (3.25)\end{aligned}$$

Temos ainda que $|grad(y_t \circ \varphi)|^2 \leqslant |grad^{\mathbb{R}^l}(y_t)|^2$, desde modo

$$\sum_{i,t} c_{i,t}^2 = \sum_{t=1}^{l} |grad(y_t \circ \varphi)|^2 \leqslant \sum_{t=1}^{l} |grad y_t|^2 = l.$$

Assim,

$$m - \sum_{i,t} c_{i,t}^2 \geqslant m - l,$$

que por sua vez implica em

$$\frac{1}{k} + \frac{C_b(r)}{k^2} + m \sup_M |H| > (m-l)C_b(r).$$

Fazendo $k \to \infty$, segue-se

$$m \sup_M |H| \geqslant (m-l)C_b(r).$$

Concluimos então a prova da primeira parte do Teorema 9. Para provar a segunda parte do teorema faremos uso do Teorema 8.

Suponha M variedade Riemanniana estocasticamente completa. Defina $g : N^{n-l} \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ por

$$g(z,y) = \overline{g}(z) = \phi_b(\rho_N(z))$$

onde

$$\phi_b(t) = \begin{cases} 1 - \cos(\sqrt{b}t) & se \quad b > o, \ t < \pi/2\sqrt{b} \\ t^2 & se \quad b = 0, \\ \cosh(\sqrt{-b}t) & se \quad b < 0. \end{cases}$$

Vejamos as seguintes relações que nos serão utéis e que envolvem as derivadas de ϕ_b.

$$\phi_b'(t) = \begin{cases} \sqrt{b}sen(\sqrt{b}t) & se \quad b > o, \ t < \pi/2\sqrt{b} \\ 2t & se \quad b = 0, \\ \sqrt{-b}senh(\sqrt{-b}t) & se \quad b < 0. \end{cases}$$

e

$$\phi_b''(t) = \begin{cases} b\cos(\sqrt{b}t) & se \quad b > o, \ t < \pi/2\sqrt{b} \\ 2 & se \quad b = 0, \\ -b\cosh(\sqrt{-b}t) & se \quad b < 0. \end{cases}$$

Assim,

$$\phi_b'(t)C_b(t) = \begin{cases} b\cos(\sqrt{b}t) & se \quad b > o, \ t < \pi/2\sqrt{b} \\ 2 & se \quad b = 0, \\ -b\cosh(\sqrt{-b}t) & se \quad b < 0. \end{cases}$$

Donde segue

$$\phi_b''(r_k) - \phi_b' C_b(r_k) = 0. \tag{3.26}$$

Como $\varphi(M) \subset B_N(r) \times \mathbb{R}^l$, temos então que $f = g \circ \varphi$ é uma função suave limitada em M. Assim existe uma sequência de pontos $\{x_k\}$ em M tal que

$$f(x_k) > f^* - 1/k \quad \text{e} \quad \Delta f(x_k) < 1/k.$$

Para $k \geqslant 1$, onde $f^* = \sup_M f \leqslant \phi_b(r) < \infty$. Procedendo como na demonstração da primeira parte do teorema e utilizando o lema **??** encontraremos

$$\begin{aligned}
\mathit{Hess}\,_{N\times\mathbb{R}^l} g(\varphi(x_k)) &= \mathit{Hess}\,_N \overline{g}(z\varphi_1(x_k))(\pi_{TN} e_i, \pi_{TN} e_i) \\
&= \mathit{Hess}\,_N \phi_b(\rho_N(\varphi_1(x_k))) \\
&= \phi_b''(r_k)\langle \mathit{grad}_{N\times\mathbb{R}^l}, e_i\rangle^2 + \phi_b'(r_k)\sum_{j=2}^{n-l} a_{ij}^2 \mathit{Hess}\,_N \rho_N(\varphi_1(x_k))(\frac{\partial}{\partial\theta_j}, \frac{\partial}{\partial\theta_j}) \\
&= \phi_b''(r_k)\alpha_i^2 + \phi_b'(r_k)\sum_{j=2}^{n-l} a_{ij}^2 \mathit{Hess}\,_N \rho_N(\varphi_1(x_k))(\frac{\partial}{\partial\theta_j}, \frac{\partial}{\partial\theta_j}) \\
&\geqslant \phi_b''(r_k)\alpha_i^2 + \phi_b'(r_k)C_b(r_k)\sum_{j=2}^{n-l} a_{ij}^2 \\
&= \phi_b''(r_k)\alpha_i^2 + \phi_b'(r_k)C_b(r_k)(1 - \alpha_i^2 - \sum_{t=1}^{l} c_{it}^2).
\end{aligned}$$

Da igualdade (3.26) temos

$$\mathit{Hess}\,_{N\times\mathbb{R}^l} g(\varphi(x_k))(e_i, e_i) \geqslant \phi_b'(r_k)C_b(r_k)(1 - \sum_{t=1}^{l} c_{it}^2) \tag{3.27}$$

onde, $r_k = \rho_N(\varphi_1(x_k))$.

A desigualdade (3.27) combinada com (1.15) implicam

$$\begin{aligned}
\mathit{Hess}\,_M(f)(e_i, e_i) &= \mathit{Hess}\,_{N\times\mathbb{R}^l}(g)(e_i, e_i) + \langle \mathit{grad}_{N\times\mathbb{R}^l} g, \alpha(e_i, e_i)\rangle \\
&= \mathit{Hess}\,_{N\times\mathbb{R}^l}(g)(e_i, e_i) + \phi_b'(r_k)\langle \mathit{grad}_{N\times\mathbb{R}^l}\rho_N, \alpha(e_i, e_i)\rangle \\
&\geqslant \phi_b'(r_k)C_b(r_k)(1 - \sum_{t=1}^{l} c_{it}^2) + \phi_b'(r_k)\langle \mathit{grad}_{N\times\mathbb{R}^l}\rho_N, \alpha(e_i, e_i)\rangle.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k} > \Delta f(x_k) &= \sum_{i}^{m} \mathit{Hess}\,_{N\times\mathbb{R}^l} g(e_i, e_i) + \langle \mathit{grad}_{N\times\mathbb{R}^l} g, \overrightarrow{H}\rangle \\
&\geqslant \phi_b'(r_k)C_b(r_k)(m - \sum_{it} c_{it}^2) + \phi_b'(r_k)\langle \mathit{grad}_{N\times\mathbb{R}^l}\rho_N, \overrightarrow{H}\rangle \\
&\geqslant \phi_b(r_k)((m-l)C_b(r_k) - m\sup|H|).
\end{aligned}$$

Sendo o $\lim_{k\to\infty} \phi_b'(r_k) > 0$, fazendo $k \to \infty$ temos

$$\sup_M |H| \geqslant \frac{m-l}{m} C_b(r).$$

□

Corolário 3. *Seja* $\varphi : M^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ *uma hipersuperfície completa com curvatura média* H*. Se* $\varphi(M) \subset B_{\mathbb{R}^2}(r) \times \mathbb{R}^{n-2}$ *e* $\sup_M |H| < 1/(n-1)r$*, então* φ *não é própria.*

Demonstração. Suponha que φ seja própria. Podemos então escrever $\varphi : M^{n-1} \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$, sendo $K^{rad}_{\mathbb{R}^2} = 0$ em $B_{\mathbb{R}^2}(r)$, segue do teorema (9) que

$$\sup_{M^{n-1}} |H| \geqslant \frac{(n-1)-(n-2)}{n-1}\frac{1}{r} = \frac{1}{n-1}\frac{1}{r},$$

o que contradiz as hipóteses do corolário. □

Referências Bibliográficas

[1] Alías, L.J., Bessa, G.P., Dajczer, M. - *The mean curvature of cylindrically bounded submanifolds.* Mathematische Annalem, v. 345, 367-376, 2009.

[2] Alías, J.L., Rigoli, M. - *An introduction to the Omori-Yau Maximum Principle and its Applications.* XVI Escola de Geometria Diferncial. São Carlos: RiMa, 2010.

[3] Bessa, G.P., Montenegro, J.F. - *Mean time and isoperimetric inequalities for minimal submanifolds of* $\mathsf{N} \times \mathbb{R}$. Bulletin of the London Mathematical Society (print), v. 41, 242-252, 2009.

[4] Colding, T., Minicozzi, W. - *THe Calabi-Yau conjectures for embedded surfaces.* Annals of Math, v. 161, 727 - 758,2005.

[5] Calabi, E. - *Problems in Differential Geometria.* (S. Kobayashi and J. Eells, Jr., eds.) Proc. of the United States-Japan Seminar in Differen6tial Geometry, Kioto, Japan, 1965, Nippon Hyoronsha Co. Ltd., Tokyo (1966) 170.

[6] do Carmo, M. P. - *Geometria Riemanniana.* Projeto Euclides - IMPA, 2008.

[7] Omori, H. - *Isometric immersions of Riemanniana manifolds.* J. Math. Soc. Japan, v. 19, 205-214, 1967.

[8] Jorge, L., Xavier, F. - *A complete minimal surface in* $\mathbb{R}^3$ *between two parallel planes.* Annals of Math, v. 112, 203-206, 1980.

[9] Markvorsen, S., Min-Oo, M. - *Global Riemannian Geometry: Curvature and Topology.* Birkhäuser, 2003.

[10] Nadirashvili, N. - *Hadamard's and Calabi-Yau's conjectures on negatively curved and minimal surfaces.* Invent Math, v. 126, 457-465, 1996.

[11] Pigola, S., Rigoli, M., Setti, A. - *Maximum Principle on Riemannian Manifolds ans Applications*. Memoirs Amer. Math, v. 822, 2005.

[12] Pigola, S., Rigoli, M., Setti, A. - *A remark on the maximum principle and stochastic completeness*. Proc. Amer. Math, v. 131, 1283-1288, 2003.

[13] Pessoa, L. F. - *Algumas versões e aplicações do princípio do máximo de Omori-yau*. Dissertação-UFPI, 2011.