Universidade Federal do Piauí

Centro de Ciências da Natureza

Pós-Graduação em Matemática

Mestrado em Matemática

SUPERFÍCIES DE WEINGARTEN LINEARES ROTACIONAIS NA ESFERA EUCLIDIANA $\mathbb{S}^3$

ALEX SANDRO LOPES SANTOS

Teresina - 2012

Alex Sandro Lopes Santos

Dissertação de Mestrado:

Superfícies de Weingarten Lineares Rotacionais na Esfera Euclidiana $\mathbb{S}^3$

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Juscelino Pereira Silva

Teresina - 2012

Santos, A. S. L.

xxxx Superfícies de Weingarten Lineares Rotacionais na Esfera Euclidiana $\mathbb{S}^3$.

Alex Sandro Lopes Santos – Teresina: 2012.

Orientador: Prof. Dr. Juscelino Pereira Silva.

Co-Orientador: Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa.

1. Geometria Diferencial

CDD 516.36

Ao meu avô Antonio Lopes Filho e à minha professora Dulcelene Chaves (In memoriam).

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por esta conquista, pela oportunidade que me foi dada e pelo conforto nas horas adversas. Em segundo, à minha família que sempre me apoiou e me incentivou, em especial às minhas duas mães Maria da Salete(avó) e Marinalda Sousa Lopes as quais dedicaram-se ao máximo para minha formação acadêmica e, principalmente, como pessoa.

Aos professores da Universidade Federal do Piauí (UFPI), por terem sido compreensivos em relação a minha base na graduação e pela força dada. Em especial a João Xavier por ter depositado toda confiança na minha pessoa e fazendo assim com que eu acreditasse em mim mesmo para enfrentar essa jornada, ao professor João Benício que não deixou que a chama da matemática se apagasse em mim, levando matemática de qualidade aos sábados à pacata cidade de Esperantina, fazendo assim com que meu entusiasmo pela matemática não acabasse, ao professor Roger Peres pelas aulas da análise real da iniciação e pelos emprestimos das passagens que possibilitavam meu deslocamento até Teresina.

Aos Professores da Universidade Estadual do Piauí(UESPI), onde fiz minha graduação,principalmente a Bruno e Juscelino pela compreensão em relação a minha ausência nos últimos períodos do curso.

Aos meus companheiros de mestrado e amigos: Irsael Evangelista, Franciane Vieira, Valdinês Junior, Cleidinaldo Aguiar, Yuri Rafael, Edvaldo Elias, Edvalter Sena, Antoniio Kelson, Renata Batista, Ítalo Dowell. Aos Colegas de graduação na UESPI pelos momentos de descontração.

Ao meu Orientador Juscelino Pereira Silva pela paciência e compreensão, e por ter sido acima de tudo um amigo, juntamente com o professor Paulo Alexandre, os quais sempre estiveram dispostos a ajudar-me sempre que assim precisei.

À minha futura eesposa, minha amada Yane que sempre me apoiou e por vezes perdeu a paciência comigo, pela falta de tempo, mas sempre me encorajou a seguir em frente, obrigado por tudo amor.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

“Fizeram você trocar [...] um papel de coadjuvante na guerra por um papel principal em uma cela?”.

David Gilmour/Roger Waters

Resumo

Apresentaremos uma descrição completa de todas as superfícies de Weingarten lineares rotacionais na esfera euclidiana $\mathbb{S}^3$. Tais superfícies são caracterizadas pela relação:

$$aH + bK = c,$$

onde H e K representam as curvaturas média e gaussiana, respectivamente, enquanto a,b e c são constantes reais. Este trabalho baseia-se no artigo *Rotational Linear Weingarten Surface into the Euclidian Sphere* de Barros, Sousa e Silva em 2011.

Abstract

We present a complete description of all rotational linear Weingarten surfaces into the Euclidean sphere $\mathbb{S}^3$. Such surfaces are characterized by the relation:

$$aH + bK = c,$$

where H and K represents the mean and Gaussian curvatures, respectively, while a, b and c are real constants. This work is based on Article *Linear Weingarten Rotational Surface Sphere into the Euclidian* de Barros, Sousa e Silva in 2011.

Sumário

Introdução

Uma superfície M^2 no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$ é chamada uma *superfície de Weingarten* se existir uma relação entre suas curvaturas principais k_1 e k_2, mais precisamente, se elas satisfazem uma relação do tipo $W(k_1, k_2) = 0$, onde W é uma função suave definida sobre o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$, de especial interessse se $W(k_1, k_2) = U(H, K) = 0$, onde H e K representam as curvaturas média e Gaussiana de M, respectivamente. Essencialmente, tais superfícies são uma generalização de superfícies de curvatura constante. Substituindo o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$ pela esfera Euclidiana $\mathbb{S}^3$ ou o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3(-1)$ como espaço ambiente temos a mesma definição. Em particular, trabalharemos com $\mathbb{S}^3$ como espaço ambiente e abordaremos as superfícies de Weingarten do tipo linear, neste caso a função U satisfaz uma relação linear do tipo:

$$U(H, K) = aH + bK - c = 0,$$

onde a,b,$c \in \mathbb{R}$.

Este trabalho tem como objetivo classificar as *superfícies de Weingarten lineares rotacionais em* $\mathbb{S}^3$, abreviadamente $SWLR$, tais superfícies, além das propiedades já citadas acima, são geradas pela ação do grupo $O(P^2)$ sobre uma curva perfil $\gamma \subset P^3 \cap \mathbb{S}^3$, tal que, $\gamma \cap P^2 = \emptyset$, onde P^n é um subespaço n-dimensional de $\mathbb{R}^4$ e $O(P^2)$ é um subgrupo do grupo das isometrias de $\mathbb{S}^3$ que preservam P^2 fixo. Tomemos uma parametrização para γ em $\mathbb{S}^3$ dada por $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$, com $x(s) \geq 0$.

Um ingrediente fundamental para o entedimento das propiedades qualitativas das $SWLR$ é o sinal do discrimante Δ, o qual é definido por $\Delta = a^2+4bc$, consideraremos o caso em que $\Delta \neq 0$.

Primeiramente apresentaremos uma relação fundamental que caracteriza as $SWLR$ na esfera Euclidiana $\mathbb{S}^3$:

$$\frac{a}{2}\sqrt{1 - x^2 - \dot{x}^2} + \frac{b}{2}(x^2 + \dot{x}^2) + \frac{c}{2}x^2 = \alpha,$$

onde α é uma constante. Associaremos cada $SWLR$ à função x e ao parâmetro α correspondentes, diremos que uma solução x da equação diferencial ordinária acima é completa se x está definida para todo $s \in \mathbb{R}$ ou tem apenas os valores $(0, \pm 1)$ como valores de aderência, soluções completas definem $SWLR$ completas.

Através do estudo dos pontos críticos e das curvas de nível da função $F : D \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(u, v) = \frac{a}{2}\sqrt{1 - u^2 - v^2} + \frac{b}{2}(u^2 + v^2) + \frac{c}{2}u^2,$$

onde $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \geq 0 \text{ e } u^2 + v^2 \leq 1\}$. Encontraremos restrições a respeito dos possíveis valores de α e através destes determinar se uma $SWLR$ é completa ou não. Mais precisamente, mostraremos que:

1. $\alpha \in [\min\{0, \frac{b}{2}\}, \alpha_0]$.

2. Não existe $SWLR$ M_α completa imersa tal que

$$\alpha \in \left(\min\{0, \frac{b}{2}\}, \max\{0, \frac{b}{2}\}\right) \cup \left(\frac{b}{2}, \frac{b+c}{2}\right).$$

3. Para todo $\alpha \in (\max\{0, \frac{b+c}{2}\}, \alpha_0)$, M_α é uma $SWLR$ completa imersa.

4. Se $\alpha = \alpha_0$, então o toro de Clifford em $\mathbb{S}^3$ é a única $SWLR$ completa,

onde M_α é a $SWLR$ associada ao parâmetro α. Como último resultado deste trabalho mostraremos a existência de uma família de $SWLR$ imersas em $\mathbb{S}^3$ que não contém superfícies isoparamétricas.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Neste capítulo abordaremos de forma concisa algumas definições e resultados que serão utilizados no decorrer deste trabalho, estabeleceremos também a terminologia que será utilizada no decorrer do mesmo.

1.1 Curvas

Definição 1. *Uma curva diferenciável parametrizada é uma aplicação diferenciável $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ de um intervalo aberto $I = (a, b)$ da reta $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^3$. Uma curva diferenciável parametrizada $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ é chamada regular, se $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$*

Definição 2. *Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada, diferenciável e regular, a função $s : I \to \mathbb{R}$ dada por:*

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\alpha'(\xi)| d\xi$$

é chamada função comprimento de arco da curva α apartir de t_0, onde $t_0 \in I$.

Proposição 1. *Uma curva regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ está parametrizada pelo comprimento de arco, se e somente se, $|\alpha'(t)| = 1$, para todo $t \in I$.*

Definição 3. *Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco $t \in I$. O número $|\alpha''(t)| = k(t)$, chama-se curvatura de α em t.*

1.2 Superfícies Regulares

Definição 4. *Um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^3$ e uma aplicação $X : U \to V \cap M$ de um aberto U de $\mathbb{R}^2$ sobre $V \cap M \subset \mathbb{R}^3$ tal que:*

1. *X é diferenciável.*
2. *X é um homeomorfismo.*
3. *Para todo $q \in U$, a diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é injetiva.*

Definição 5. *Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ o conjunto obtido ao girarmos uma curva regular plana γ em torno de um eixo no plano que não encontra a curva; vamos considerar o plano xz como o plano da curva e o eixo Oz como o eixo de rotação. Seja*

$$x = f(v), z = g(v), a < v < b, f(v) > 0,$$

uma parametrização para γ e denote por u o ângulo de rotação em torno do eixo Oz. Assim, obtemos a aplicação $X : U \to M$ definida por

$$X(u, v) = (f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v)),$$

onde $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi, a < v < b\}$. S é uma superfície regular chamada de superfície de revolução. A curva γ é chamada curva geratriz de

M, e o eixo Oz é o eixo de rotação de M. Os círculos descritos pelos pontos de γ são chamados de paralelos de M, e as várias posições de γ sobre M são chamados de meridianos.

Proposição 2. *Seja M uma superfície de revolução parametrizada por*

$$X(u,v) = (f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v)),$$

onde a curva geratriz é dada por $\gamma(v) = (f(v), 0, g(v))$, se a curva γ estiver parametrizada pelo comprimento de arco, então os meridianos são geodésicas.

Definição 6. *Uma superfície parametrizada $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável X de um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$. O conjunto $X(U) \subset \mathbb{R}^3$ é chamado o traço de X. Dizemos que X é regular se a diferencial $dX_p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ è injetiva para todo $p \in U$. Um ponto $p \in U$ onde dX_p não è injetiva é chamado ponto singular de X.*

Definição 7. *Uma superfície regular conexa M é denominada completa quando para qualquer ponto $p \in M$, qualquer geodésica parametrizada $\gamma : [0,\epsilon) \longrightarrow M$, começando em $p = \gamma(0)$, pode ser estendida e parametrizada por $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \longrightarrow M$, definida sobre toda a reta $\mathbb{R}$.*

Proposição 3. *Uma superficície fechada $M \subset \mathbb{R}^3$ é completa.*

1.3 Aplicação Normal de Gauss

Definição 8. *Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície com uma orientação N. A aplicação $N : M \to \mathbb{R}^3$ toma seus valores na esfera unitária*

$$\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

associando cada ponto $p \in M$ ao vetor unitário normal a M no ponto p. A aplicação $N : M \to \mathbb{S}^2$, assim definida, é chamada a aplicação de Gauss de M.

A diferencial dN_p de N em $p \in M$ é uma aplicação linear de T_pM em $T_{N(p)}\mathbb{S}^2$. Como T_pM e $T_{N(p)}\mathbb{S}^2$ são espaços vetoriais, dN_p pode ser considerada como uma aplicação linear em T_pM.

Proposição 4. *A diferencial $dN_p : T_pM \to T_pM$ da aplicação de Gauss é uma aplicação linear auto-adjunta.*

Demonstração. Vide [2] □

O fato de ser $dN_p : T_pM \to T_pM$ uma aplicação linear auto-adjunta nos permite associar a dN_p uma forma quadrática Q definida em T_pM, dada por

$$Q(v) = -\langle dN_p(v), v\rangle, \;\; v \in T_pM$$

Definição 9. *A forma quadrática II_p definida em T_pM por $II_p(v) = -\langle dN_p(v), v\rangle$, é chamada a segunda forma fundamental de M em p.*

Definição 10. *Seja γ uma curva regular em M passando por $p \in M$, k a curvatura de γ em p, e $\cos\theta = \langle n, N\rangle$, onde n é o vetor normal a γ e N é o vetor normal a M em p. O número $k_n = k\cos\theta$ é chamado a curvatura normal de $\gamma \subset M$ em p.*

Como a aplicação linear dN_p é auto-adjunta, para cada $p \in S$ existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de T_pS tal que $dN_p(e_1) = k_1e_1$ e $dN_p(e_2) = k_2e_2$. Além disso, k_1 e k_2 ($k_1 \geq k_2$) são o máximo e o mínimo da segunda forma fundamental II_p restrita ao círculo unitário de T_pM; isto é, são os valores extremos da curvatura normal em p.

Definição 11. *O máximo da curvatura normal* k_1 *e o mínimo da curvatura normal* k_2*, são chamados curvaturas principais em* p*; as direções correspondentes, isto é, as direções dadas pelos auto-vetores* e_1 *e* e_2 *são chamadas de direções principais em* p*.*

Definição 12. *Se uma curva regular e conexa* γ *em uma superfície* M *é tal que para todo* $p \in \gamma$ *a reta tangente a* γ *é uma direção principal em* p*, então dizemos que* γ *é uma linha de curvatura de* M

Proposição 5. *Uma curva regular e conexa* γ *em* M *é uma linha de curvatura de* M *se, e somente se, satisfaz*

$$N'(t) = \lambda(t)\tilde{\gamma}'(t), \tag{1.1}$$

para qualquer parametrização $\tilde{\gamma}(t)$ *de* γ*, onde* $N(t) = N \circ \tilde{\gamma}(t)$ *e* $\lambda(t)$ *é uma função diferenciável de* t*. Neste caso,* $-\lambda(t)$ *é a curvatura (principal) segundo* $\tilde{\gamma}'(t)$*.*

Demonstração. Basta observar que se $\tilde{\gamma}'(t)$ está contido em uma direção principal, então $\tilde{\gamma}'(t)$ é um autovetor de dN e

$$dN(\tilde{\gamma}'(t)) = N'(t) = \lambda(t)\tilde{\gamma}'(t).$$

A recíproca é imediata. □

Definição 13. *Uma superfície* M *é dita isoparamétrica quando suas curvaturas principais* k_1 *e* k_2 *são constantes.*

Definição 14. *Seja* $p \in S$ *e seja* $dN_p : T_pM \to T_pM$ *a diferencial da aplicação de Gauss. O determinante de* dN_p *é chamado a curvatura Gaussiana* K *de* M *em* p*. O negativo da metade do traço de* dN_p *é chamado a curvatura média* H *de* M *em* p*.*

Em termos das curvaturas principais k_1 e k_2 podemos escrever

$$K = k_1 k_2, \quad H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

O objetivo agora é obtermos as expressões da segunda forma fundamental e da diferencial da aplicação de Gauss, em um sistema de coordenadas locais. A partir de agora consideraremos as parametrizações $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to M$ compatíveis com a orientação N de M; isto é, em $X(U)$,

$$N = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}.$$

Seja $X(u, v)$ uma parametrização em um ponto $p \in M$ de uma superfície M, e seja $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ uma curva parametrizada em M, com $\alpha(0) = p$, para simplificar a notação todas as funções que aparecem abaixo indicam seus valores no ponto p.

O vetor tangente a $\alpha(t)$ em p é $\alpha' = X_u u' + X_v v'$ e

$$dN(\alpha') = N'(u(t), v(t)) = N_u u' + N_v v'.$$

Como N_u e N_s pertencem a T_pM, podemos escrever

$$N_u = a_{11} X_u + a_{21} X_v \quad (1.2)$$

$$N_v = a_{12} X_u + a_{22} X_v \quad (1.3)$$

e, portanto,

$$dN(\alpha') = (a_{11} u' + a_{12} v') X_u + (a_{21} u' a_{22} v') X_v;$$

isto é,

$$dN \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Assim, na base $\{X_u, X_v\}$, dN_p é dada pela matriz (a_{ij}), com $i, j = 1, 2$. Por outro lado, a expressão da segunda forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$ é dada por

$$\begin{aligned} II_p(\alpha') &= -\langle dN(\alpha'), \alpha' \rangle = -\langle N_u u' + N_v v', X_u u' + X_v v' \rangle \\ &= e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2, \end{aligned}$$

onde, desde que $\langle N, X_u \rangle = \langle N, X_v \rangle = 0$, tem-se

$$\begin{aligned} e &= -\langle N_u, X_u \rangle = \langle N, X_{uu} \rangle \\ f &= -\langle N_v, X_u \rangle = \langle N, X_{uv} \rangle = \langle N, X_{vu} \rangle = -\langle N_u, X_v \rangle \\ g &= -\langle N_v, X_v \rangle = \langle N, X_{vv} \rangle \end{aligned}$$

Vamos agora obter os valores de a_{ij} em termos dos coeficientes e, f, g. A partir das equações (1.2) e (1.3), obtemos:

$$\begin{aligned} -f &= \langle N_u, X_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G \\ -f &= \langle N_v, X_u \rangle = a_{12}E + a_{22}F \\ -e &= \langle N_u, X_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F \\ -g &= \langle N_v, X_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G \end{aligned}$$

onde $E = \langle X_u, X_u \rangle$, $F = \langle X_u, X_v \rangle$ e $G = \langle X_v, X_v \rangle$. As relações acima podem ser expressas em forma matricial por

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

Donde

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1},$$

onde $(\ )^{-1}$ significa a matriz inversa de $(\ )$. Observe que

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{fF-eG}{EG-F^2} & \frac{gF-fG}{EG-F^2} \\ \frac{eF-fE}{EG-F^2} & \frac{fF-gE}{EG-F^2} \end{pmatrix}.$$

Daí decorrem as seguintes expressões para os coeficientes (a_{ij}) da matriz de dN na base $\{X_u, X_v\}$:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2} \\ a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2} \\ a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2} \\ a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2} \end{aligned}$$

Assim, obtemos a curvatura Gaussiana em termos de cooordenadas locais

$$K = \det(a_{ij}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \tag{1.4}$$

Para o cálculo da curvatura média, lembremos que $-k_1, -k_2$ são os autovalores de dN. Portanto, k_1 e k_2 satisfazem a equação

$$dN(v) = -kv = -kI(v) \Rightarrow (dN + kI)(v) = 0$$

para algum $v \in T_pM$, $v \neq 0$, onde I é a aplicação identidade. Decorre que a aplicação linear $dN + kI$ não é invertível; logo, tem determinante nulo. Assim,

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} + k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + k \end{pmatrix} = 0,$$

ou

$$k^2 + k(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0.$$

Como k_1 e k_2 são raízes da equação quadrática acima na variável k, concluímos que

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = -\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) = \frac{1}{2}\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}. \tag{1.5}$$

Donde

$$k^2 - 2Hk + K = 0,$$

e, portanto,

$$k_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}. \tag{1.6}$$

1.4 Superfícies de Weingarten

Definição 15. *Seja M uma superfície, dizemos que uma aplicação diferenciável $X : M \to \mathbb{R}^3$ é uma imersão, se para todo $p \in M$ a aplicação $dX_p : T_pM \to \mathbb{R}^3$ é injetiva. Neste caso, diremos que X ou $X(M) = S$ é uma superfície imersa em $\mathbb{R}^3$. Se além disso, X é um homeomorfismo sobre $X(M) \subset \mathbb{R}^3$, onde $X(M)$ tem a topologia induzida por $\mathbb{R}^3$, diz - se que X é um mergulho.*

Definição 16. *Seja $X : M \to \mathbb{R}^3$ uma imersão, dizemos que X é uma imersão de Weingarten, se as suas curvaturas principais k_1 e k_2 satisfazem uma relação da forma:*

$$W(k_1, k_2) = 0$$

onde W é uma função suave.

Sendo H e K as curvaturas média e Gaussiana, respectivamente de M, por (1.6), temos:

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K} \quad \text{e} \quad k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}.$$

Assim,

$$W(k_1, k_2) = W(H + \sqrt{H^2 - K}, H - \sqrt{H^2 - K}) = U(H, K) = 0.$$

Dizemos que X é de Weingarten linear se U satisfaz uma relação afim entre H e K, ou seja,

$$U(H, K) = aH + bK - c = 0,$$

onde a, b e c são constantes reais não todas nulas, ou ainda, quando

$$aH + bK = c$$

Vamos estudar superfícies de Weingarten que satisfazem o caso em que U é do tipo linear. O comportamento de uma superfície de Weingarten linear e suas propriedades qualitativas dependem do sinal de um discriminante que envolve as constantes reais a, b e c. Vejamos como se expressa esse discriminante.

Seja $X : M \to \mathbb{R}^3$ uma imersão de Weingarten linear, como toda superfícies $S = X(M) \subset \mathbb{R}^3$ é localmente um gráfico, podemos exprimir X em coordenadas locais (u, v) da seguinte forma:

$$X(u, v) = (u, v, z(u, v)).$$

Denotemos $p = z_u$, $q = z_v$, $r = z_{uu}$, $s = z_{uv}$, $t = z_{vv}$, desta forma, obtemos:

$$X_u = (1, 0, p) \quad X_v = (0, 1, q) \quad X_{uu} = (0, 0, r) \quad X_{uv} = (0, 0, s) \quad X_{vv} = (0, 0, t)$$

e

$$N = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}(-p,-q,1).$$

Daí os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental são dados por:

$$\begin{array}{ll} E = \langle X_u, X_u \rangle = 1 + p^2 & e = \langle X_{uu}, N \rangle = \dfrac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \\ F = \langle X_u, X_v \rangle = pq & f = \langle X_{uv}, N \rangle = \dfrac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \\ G = \langle X_v, X_v \rangle = 1 + q^2 & g = \langle X_{vv}, N \rangle = \dfrac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \end{array}$$

Por (1.4) e (1.5) temos

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2}$$

e

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{Ge - 2fF + Eg}{EG - F^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{r(1+q^2) - 2spq + t(1+p^2)}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}\right),$$

assim a relação de Weingarten equivale a Equação Diferencial Parcial de segunda ordem para z, dada por:

$$\psi(p,q,r,s,t) = a\frac{r(1+q^2) - 2spq + t(1+p^2)}{2(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} + b\frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2} - c = 0 \quad (1.7)$$

cujo discriminante é calculado por:

$$\Delta_0 = \psi_r \psi_t - \frac{1}{4}\psi_s^2.$$

Vamos analizar como o discriminante Δ_0 se relaciona com os coeficientes a, b e c. Seja $y = 1 + p^2 + q^2$, derivando (1.7) em relação a r, s e t, respectivamente, obtemos

$$\psi_r = a\frac{(1+q^2)}{2y^{\frac{3}{2}}} + b\frac{t}{y^2}$$

$$\psi_t = a\frac{(1+p^2)}{2y^{\frac{3}{2}}} + b\frac{r}{y^2}$$
$$\frac{1}{2}\psi_s = -a\frac{pq}{2y^{\frac{3}{2}}} - b\frac{s}{y^2}$$

Daí, Δ_0 se expressa por

$$\begin{aligned}
\Delta_0 &= \psi_r\psi_t - \left(\frac{1}{2}\psi_s^2\right)\\
&= \left(a\frac{(1+q^2)}{2y^{\frac{3}{2}}} + b\frac{t}{y^2}\right)\left(a\frac{(1+p^2)}{2y^{\frac{3}{2}}} + b\frac{r}{y^2}\right) - \left(a\frac{-pq}{2y^{\frac{3}{2}}} + b\frac{-s}{y^2}\right)^2\\
&= a^2\frac{(1+q^2)(1+p^2)}{4y^3} + ab\frac{r(1+q^2)}{2y^2y^{\frac{3}{2}}} + ab\frac{t(1+p^2)}{2y^2y^{\frac{3}{2}}} + b^2\frac{rt}{y^2y^2}\\
&\quad - \left(a^2\frac{p^2q^2}{4y^3} + 2ab\frac{spq}{2y^2y^{\frac{3}{2}}} + b^2\frac{s^2}{y^2y^2}\right)\\
&= \frac{1}{y^2}\left[a^2\frac{(1+q^2)(1+p^2) - p^2q^2}{4y} + ab\frac{1}{2}\frac{r(1+q^2) - 2spq + t(1+p^2)}{y^{\frac{3}{2}}} + b^2\frac{rt-s^2}{y^2}\right]\\
&= \frac{1}{y^2}\left[\frac{a^2}{4} + b(aH + bK)\right]\\
&= \frac{1}{y^2}\left[\frac{a^2+4bc}{4}\right].
\end{aligned}$$

Dizemos que uma solução $z = z(u,v)$ de (1.7) é

Elíptica, se $\Delta_0 > 0$.

Hiperbólica, se $\Delta_0 < 0$.

Como consequência, temos as seguintes definições

Definição 17. *Uma imersão $X : M \to \mathbb{R}^3$ de Weingarten linear satisfazendo $aH+bK = c$ é dita hiperbólica (elíptica), se o discriminante $\Delta = a^2+4bc < 0$ ($\Delta = a^2+4bc > 0$).*

1.5 Superfícies de Rotação na Esfera Euclidiana (n+1)-dimensional $\mathbb{S}^{n+1}$

Neste capítulo definiremos superfície de rotação M^n na esfera euclidiana unitária (n+1)-dimensional $\mathbb{S}^{n+1}$. Seja $\mathbb{R}^{n+2}$ com a métrica euclidiana usual $g_{ij} = \delta_{ij}$. Consideremos a esfera unitária euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}$, com a métrica induzida, como uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^{n+2}$, caracterizada por,

$$\mathbb{S}^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+2}; |x| = 1\}$$

Definição 18. *Uma aplicação $f : M \to N$ é dita uma isometria se para todo $p \in M$ a diferencial $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ satisfaz*

$$\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)}$$

para todo u, v em T_pM.

Definição 19. *Uma transformação U em $\mathbb{R}^{n+2}$ é dita ortogonal se é uma aplicação linear que preserva a métrica g, ou seja,*

$$\langle U(p), U(q)\rangle = \langle p, q\rangle$$

para quaisquer p e q em $\mathbb{R}^{n+2}$.

As tranformações ortogonais de $\mathbb{R}^{n+2}$ induzem, por restrição, todas as isometrias de $\mathbb{S}^{n+1}$. Denotaremos por P^k um subespaço k-dimensional de $\mathbb{R}^{n+2}$ passando pela origem e por $O(P^k)$ o conjunto das transformações ortogonais de $\mathbb{R}^{n+2}$ com determinante positivo que preservam P^k fixo.

Definição 20. *Escolha P^2 e $P^3 \supset P^2$, tal que, $P^3 \cap \mathbb{S}^{n+1} \neq \emptyset$. Seja γ uma curva regular em $P^3 \cap \mathbb{S}^{n+1} = \mathbb{S}^2$ que não intersecta P^2. A órbita de γ sobre* *a ação de $O(P^2)$ é chamada de* ***hiperfície de rotação*** $M^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$ ***gerada por*** γ ***em torno de*** P^2*.*

Provemos então que M^n, definida acima é, de fato, uma hiperfície de $\mathbb{S}^n$. Para isto, precisamos primeiramente de uma descrição de $O(P^2)$.

Escolhamos uma base ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^{n+2}$ de $\mathbb{R}^{n+2}$, tal que, as seguintes condições são satisfeitas:

1. $P^2 = [e_{n+1}, e_{n+2}]$ o subespaço gerado por e_{n+1} e e_{n+2}.

2. $P^3 = [e_1, e_{n+1}, e_{n+2}]$ o subespaço gerado por e_1, e_{n+1} e e_{n+2}.

Seja $P^3 \supset P^2$, parametrizemos a curva γ por $\gamma(s) = (x_1(s), x_{n+1}(s), x_{n+2}(s))$ em $P^3 \cap \mathbb{S}^{n+1}$. Fixando $s = s_0$ e analisando o cojunto $U(s_0) = \mathbb{S}^{n+1} \cap P(s_0, n)$, onde $P(s_0, n)$ é o plano afim n-dimensional passando por $(0, \dots, 0, x_{n+1}(s_0), x_{n+2}(s_0))$ e é paralelo a $[e_1, \dots, e_n]$. Afirmamos que $O(P^2)$ é o grupo das isometrias de $U(s_0)$. De fato, seja $p \in U(s_0)$ e $o \in O(P^2)$ temos que $p = (p_1, \dots, p_n, x_{n+1}(s_0), x_{n+2}(s_0)) \in P(s_0, n)$, assim, $o(p) = (\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n, x_{n+1}(s_0), x_{n+2}(s_0)) \in P(s_0, n)$ e além disso, $|o(p)| = |p| = 1$. Portando $o(p) \in P(s_0, n) \cap \mathbb{S}^{n+1} = U(s_0)$, que por sua vez é a órbita do ponto $(x_1(s_0), 0, \dots, 0, x_{n+1}(s_0), x_{n+2}s_0)$ sob a ação de $O(P^2)$, isto é, $U(s_0)$ é um paralelo de M^n passando por este ponto. Uma parametrização de M^2 pode ser obtida tomando uma parametrização do paralelo $U(s_0)$ e variando s_0.

Tomemos $\varphi(t_1, ..., t_{n-1}) = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$ uma parametrização ortogonal da esfera unitária de $[e_1, ..., e_n]$, definamos $f : \mathbb{R}^n \to M^n$ por

$$f(t_1, ..., t_{n-1}, s) = (x_1(s)\varphi_1, ..., x_1(s)\varphi_n, x_{n+1}(s), x_{n+2}(s)), \qquad (1.8)$$

onde

$$\varphi_i = \varphi_i(t_1, ..., t_{n-1}), \;\; \varphi_1^2 + ... + \varphi_n^2 = 1.$$

Temos que f é uma parametrização da hiperfície de rotação gerada pela curva $\gamma(s) = (x_1(s), x_{n+1}(s), x_{n+2}(s))$ em torno de $P^2 = [e_{n+1}, e_{n+2}]$. Podemos escolher o parâmetro s como sendo o comprimento de arco da curva γ, obtendo

$$x_1^2(s) + x_{n+1}^2(s) + x_{n+2}^2(s) = 1, \;\; \dot{x}_1^2(s) + \dot{x}_{n+1}^2(s) + \dot{x}_{n+2}^2(s) = 1, \qquad (1.9)$$

onde $\dot{u}$ denota a derivada com respeito a s. Assim podemos obter $x_{n+1}(s)$ e $x_{n+2}(s)$ como funções de $x_1(s)$. De fato, temos que a primeira equação de (1.9) é equivalente a:

$$\frac{x_{n+1}^2(s) + x_{n+2}^2(s)}{1 - x_1^2(s)} = 1,$$

assim, podemos escrever

$$\frac{x_{n+1}^2(s)}{1 - x_1^2(s)} = \mathrm{sen}^2\phi(s) \;\; \text{e} \;\; \frac{x_{n+2}^2(s)}{1 - x_1^2(s)} = \cos^2\phi(s).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} x_{n+1}(s) &= \sqrt{1 - x_1^2(s)}\mathrm{sen}\phi(s) && (1.10)\\ x_{n+2}(s) &= \sqrt{1 - x_1^2(s)}\cos\phi(s). && (1.11) \end{aligned}$$

Além disso podemos obter uma expressão para ϕ em função de x_1. De fato, das expressões acima, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{x}_{n+1} &= \sqrt{1 - x_1^2}\cos\phi(s)\dot{\phi}(s) - \frac{x_1\dot{x}_1\mathrm{sen}\phi(s)}{\sqrt{1 - x_1^2}} && (1.12)\\ \dot{x}_{n+2} &= -\sqrt{1 - x_1^2}\mathrm{sen}\phi(s)\dot{\phi}(s) - \frac{x_1\dot{x}_1\cos\phi(s)}{\sqrt{1 - x_1^2}}. && (1.13) \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \dot{x}_{n+1}^2 &= (1 - x_1^2)\cos^2\phi(s)\dot{\phi}(s)^2 - 2x_1\dot{x}_1\mathrm{sen}\phi(s)\cos\phi(s)\dot{\phi}(s) + \frac{x_1^2\dot{x}_1^2\mathrm{sen}^2\phi(s)}{1 - x_1^2}\\ \dot{x}_{n+2}^2 &= (1 - x_1^2)\mathrm{sen}^2\phi(s)\dot{\phi}(s)^2 - 2x_1\dot{x}_1\cos\phi(s)\mathrm{sen}\phi(s)\dot{\phi}(s) + \frac{x_1^2\dot{x}_1^2\cos^2\phi(s)}{1 - x_1^2}, \end{aligned}$$

substituindo as expressões acima em (1.9) segue que,

$$1 = \dot{x}_1^2(s) + \dot{x}_{n+1}^2(s) + \dot{x}_{n+2}^2(s) = \dot{x}_1^2 + (1 - x_1^2)\dot{\phi}(s)^2 + \frac{x_1^2\dot{x}_1^2}{1 - x_1^2},$$

logo,

$$\dot{\phi}(s) = \frac{\sqrt{1 - x_1^2 - \dot{x}_1^2}}{1 - x_1^2}, \tag{1.14}$$

portanto,

$$\phi(s) = \int_0^s \frac{\sqrt{1 - x_1^2 - \dot{x}_1^2}}{1 - x_1^2} d\sigma.$$

Lema 1. *(Dajczer-do Carmo). Seja M^n uma superfície de rotação de $\mathbb{S}^{n+1}$. Então as direções dos parâmetros descritos em (1.8) são direções principais, as curvaturas principais ao longo das curvas coordenadas t_i são iguais e dadas por*

$$\lambda = -\frac{\sqrt{1 - x_1^2 - \dot{x}_1^2}}{x_1}$$

e a curvatura principal ao longo da curva coordenada s é

$$\mu = \frac{\ddot{x}_1 + x_1}{\sqrt{1 - x_1^2 - \dot{x}_1^2}}.$$

Demonstração. De (1.8) ,temos

$$f_s = (\dot{x}_1\varphi_1, ..., \dot{x}_1\varphi_n, \dot{x}_{n+1}, \dot{x}_{n+2})$$

$$f_{t_j} = \left(x_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_j}, \ldots, x_1\frac{\partial\varphi_n}{\partial t_j}, 0, 0\right).$$

Como φ é uma parametrização ortogonal, obtemos

$$\langle f_s, f_s\rangle = 1, \quad \langle f_s, f_{t_j}\rangle = 0, \quad \langle f_{t_i}, f_{t_j}\rangle = \sum_k \frac{\partial\varphi_k}{\partial t_i}\frac{\partial\varphi_k}{\partial t_j}x_1^2. \tag{1.15}$$

Um campo normal unitário em M é dado por

$$N = (\varphi(\dot{x}_{n+1}x_{n+2} - \dot{x}_{n+2}x_{n+1}), (\dot{x}_{n+2}x_1 - \dot{x}_1x_{n+2}), (\dot{x}_1x_{n+1} - \dot{x}_{n+1}x_1)). \quad (1.16)$$

De fato, observe que

$$\begin{aligned}
\langle f_s, N\rangle &= \dot{x}_1(\dot{x}_{n+1}x_{n+2} - \dot{x}_{n+2}x_{n+1})(\varphi_1 + \ldots + \varphi_n) + \dot{x}_{n+1}(\dot{x}_{n+2}x_1 - \dot{x}_1x_{n+2}) + \\
&\quad + \dot{x}_{n+2}(\dot{x}_1x_{n+1} - \dot{x}_{n+1}x_1) = 0 \\
\langle f_{t_j}, N\rangle &= x_1(\dot{x}_{n+1}x_{n+2} - \dot{x}_{n+2}x_{n+1})\left(\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_j} + \ldots + \varphi_n\frac{\partial\varphi_n}{\partial t_j}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Logo, N é normal a T_pM, ademais

$$\begin{aligned}
\langle f, N\rangle &= x_1(\dot{x}_{n+1}x_{n+2} - \dot{x}_{n+2}x_{n+1})(\varphi_1 + \ldots + \varphi_n) + x_{n+1}(\dot{x}_{n+2}x_1 - \dot{x}_1x_{n+2}) + \\
&\quad + \dot{x}_{n+2}(\dot{x}_1x_{n+1} - \dot{x}_{n+1}x_1) = 0,
\end{aligned}$$

concluindo assim que $N \in T_p\mathbb{S}^{n+1}$, portanto N é um campo normal em M, como superfície de $\mathbb{S}^{n+1}$.

Mostremos que o campo N é unitário.

$$\begin{aligned}
\langle N, N\rangle &= (\varphi_1^2 + \ldots + \varphi_n^2)(\dot{x}_{n+1}x_{n+2} - \dot{x}_{n+2}x_{n+1})^2 + (\dot{x}_{n+2}x_1 - \dot{x}_1x_{n+2})^2 + \\
&\quad + (\dot{x}_1x_{n+1} - \dot{x}_{n+1}x_1)^2 \\
&= \dot{x}_{n+1}^2x_{n+2}^2 - 2\dot{x}_{n+1}\dot{x}_{n+2}x_{n+1}x_{n+2} + \dot{x}_{n+2}^2x_{n+1}^2 + \dot{x}_{n+2}^2x_1^2 - 2\dot{x}_{n+2}\dot{x}_1x_{n+2}x_1 + \\
&\quad + \dot{x}_1^2x_{n+2}^2 + \dot{x}_1^2x_{n+1}^2 - 2\dot{x}_1\dot{x}_{n+1}x_1x_{n+1} + \dot{x}_{n+1}^2x_1^2 \\
&= (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_{n+1}^2 + \dot{x}_{n+2}^2)(x_1^2 + x_{n+1}^2 + x_{n+2}^2) - 2\dot{x}_{n+1}\dot{x}_{n+2}x_{n+1}x_{n+2} - \\
&\quad - 2\dot{x}_{n+2}\dot{x}_1x_{n+2}x_1 - 2\dot{x}_1\dot{x}_{n+1}x_1x_{n+1} - \dot{x}_1^2x_1^2 + \dot{x}_{n+1}^2x_{n+1}^2 + \dot{x}_{n+2}^2x_{n+2}^2 \\
&= 1 - (\dot{x}_1x_1 + \dot{x}_{n+1}x_{n+1} + \dot{x}_{n+2}x_{n+2})^2 \\
&= 1 - \langle\gamma, \dot{\gamma}\rangle^2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

De (1.15) temos que a matriz da primeira forma (g_{ij}) é diagonal, assim a matriz do operador de Weingarten é diagonal, desde que a mesma é obtida pelo produto da inversa de (g_{ij}) pela matriz da segunda forma, portanto a base $\{f_s, f_{t_1}, \ldots, f_{t_{n-1}}\}$ é uma base de autovetores, segue-se que as curvas coordenadas são linhas de curvaturas. Desde que N_{t_j} é dado por

$$N_{t_j} = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_j}(\dot{x}_{n+1}x_{n+2} - \dot{x}_{n+2}x_{n+1}), \ldots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_j}(\dot{x}_{n+1}x_{n+2} - \dot{x}_{n+2}x_{n+1}), 0, 0\right)$$

e $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ é uma parametrização ortogonal, temos

$$\langle f_{t_j}, f_{t_j}\rangle = x_1^2$$

$$\begin{aligned} \langle N_{t_j}, f_{tj}\rangle &= x_1(\dot{x}_{n+1}x_{n+2} - \dot{x}_{n+2}x_{n+1})\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_j}^2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_j}^2\right) \\ &= x_1(\dot{x}_{n+1}x_{n+2} - \dot{x}_{n+2}x_{n+1}), \end{aligned}$$

$\forall j \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Assim, as curvaturas principais ao londo das curvas coordenadas t_j são iguais e pela Proposição 5 satisfazem (1.1), pois as mesmas são linhas de curvatura, temos então

$$N_{t_j} = k f_{t_j}, \tag{1.17}$$

segue que

$$\langle N_{t_j}, f_{t_j}\rangle = k\langle f_{t_j}, f_{t_j}\rangle, \tag{1.18}$$

onde $-k$ é a curvatura (principal) da curva coordenada t_j. de (1.18) obtemos

$$x_1(\dot{x}_{n+1}x_{n+2} - \dot{x}_{n+2}x_{n+1}) = kx_1^2$$

o que implica que k é dado por

$$kx_1 = (\dot{x}_{n+1}x_{n+2} - \dot{x}_{n+2}x_{n+1}) \tag{1.19}$$

usando (1.10), (1.11), (1.12), (1.13) e (1.14) calculamos,

$$\begin{aligned} kx_1 &= (1-x_1^2)\text{sen}^2\phi\cdot\dot{\phi} + x_1\dot{x}_1\cos\phi\text{sen}\phi + (1-x_1^2)\cos^2\phi\cdot\dot{\phi} - x_1\dot{x}_1\cos\phi\text{sen}\phi \\ &= (1-x_1^2)\dot{\phi} \\ &= \sqrt{1-x_1^2-\dot{x}_1^2}, \end{aligned}$$

Logo a curvatura (principal) da curva coordenada t_j é dada por

$$\lambda = -k = -\frac{\sqrt{1-x_1^2-\dot{x}_1^2}}{x_1}.$$

Calculemos agora a curvatura (principal) ao longo da curva coordenada s. Primeiramente observemos que

$$N_s = (\varphi(\ddot{x}_{n+1}x_{n+2} - \ddot{x}_{n+2}x_{n+1}), (\ddot{x}_{n+2}x_1 - \ddot{x}_1 x_{n+2}), (\ddot{x}_1 x_{n+1} - \ddot{x}_{n+1}x_1)),$$

desde que a curva coordenada s é uma linha de curvatura satisfaz (1.1), assim $N_s = \tilde{k}f_s$, ou seja, $\langle N_s, f_s\rangle = \tilde{k}\langle f_s, f_s\rangle$, pelas expressões de N_s e f_s, obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= \dot{x}_1(\ddot{x}_{n+1}x_{n+2} - \ddot{x}_{n+2}x_{n+1}) + \dot{x}_{n+1}(\ddot{x}_{n+2}x_1 - \ddot{x}_1 x_{n+2}) + \dot{x}_{n+2}(\ddot{x}_1 x_{n+1} - \ddot{x}_{n+1}x_1) \\ &= \ddot{x}_1(\dot{x}_{n+2}x_{n+1} - \dot{x}_{n+1}x_{n+2}) + \dot{x}_1(\ddot{x}_{n+2}x_{n+1} - \ddot{x}_{n+1}x_{n+2}) + x_1(\ddot{x}_{n+1}\dot{x}_{n+2} - \ddot{x}_{n+2}\dot{x}_{n+1}). \end{aligned}$$

Utilizando (1.12), (1.13) e (1.14), obtemos

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{n+1} &= \frac{-\cos\phi x\dot{x}_1 - \dot{x}_1\ddot{x}_1\cos\phi}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_1^2-\dot{x}_1^2)}} - \frac{\text{sen}\phi(1-x_1^2-\dot{x}_1^2)}{(1-x_1^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{-\dot{x}_1^2\text{sen}\phi - x_1\ddot{x}\text{sen}\phi}{\sqrt{(1-x_1^2)}} - \\ &\quad -\frac{x_1^2\dot{x}_1^2\text{sen}\phi}{(1-x_1^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \ddot{x}_{n+2} &= \frac{\text{sen}\phi x_1\dot{x}_1 + \dot{x}_1\ddot{x}_1\text{sen}\phi}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_1^2-\dot{x}_1^2)}} - \frac{\cos\phi(1-x_1^2-\dot{x}_1^2)}{(1-x_1^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{-\dot{x}_1^2\cos\phi - x_1\ddot{x}\cos\phi}{\sqrt{(1-x_1^2)}} - \\ &\quad -\frac{x_1^2\dot{x}_1^2\cos\phi}{(1-x_1^2)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned}\ddot{x}_{n+1}x_{n+2} &= \frac{(-x_1\dot{x}_1-\dot{x}\ddot{x})\cos^2\phi}{\sqrt{1-x_1^2-\dot{x}_1^2}}-\frac{\mathrm{sen}\phi\cos\phi(1-x_1^2-\dot{x}_1^2+x_1^2\dot{x}_1^2)}{1-x_1^2}-\\&-\mathrm{sen}\phi\cos\phi(\dot{x}_1^2+\ddot{x}_1x_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{x}_{n+2}x_{n+1} &= \frac{(x_1\dot{x}_1+\dot{x}\ddot{x})\mathrm{sen}^2\phi}{\sqrt{1-x_1^2-\dot{x}_1^2}}-\frac{\mathrm{sen}\phi\cos\phi(1-x_1^2-\dot{x}_1^2+x_1^2\dot{x}_1^2)}{1-x_1^2}-\\&-\mathrm{sen}\phi\cos\phi(\dot{x}_1^2+\ddot{x}_1x_1)\end{aligned}$$

logo,

$$\ddot{x}_{n+2}x_{n+1}-\ddot{x}_{n+1}x_{n+2}=-\frac{x_1\dot{x}_1+\dot{x}_1\ddot{x}_1}{\sqrt{1-x_1^2-\dot{x}_1^2}},$$

temos ainda,

$$\begin{aligned}\ddot{x}_{n+2}\dot{x}_{n+1} &= \frac{\mathrm{sen}\phi\cos\phi(x_1+\ddot{x}_1)\dot{x}_1-\sqrt{1-x_1^2-\dot{x}_1^2}\cos^2\phi(\dot{x}_1^2+x_1\ddot{x}_1)}{1-x_1^2}+\\&+\frac{\cos\phi\,\mathrm{sen}\phi(\dot{x}_1^2+x_1\ddot{x}_1)x_1\dot{x}_1}{1-x_1^2}+\frac{\mathrm{sen}\phi\cos\phi((1-x_1^2-\dot{x}_1^2)x_1\dot{x}_1+x_1^3\dot{x}_1^3)}{(1-x_1^2)^2}-\\&-\frac{\cos^2\phi\big((1-x_1^2-\dot{x}_1^2)^{\frac{3}{2}}+x_1^2\dot{x}_1^2\sqrt{1-x_1^2-\dot{x}_1^2}\big)}{(1-x_1^2)^2}-\frac{\mathrm{sen}^2\phi(x_1+\ddot{x}_1)\dot{x}_1^2x_1}{\sqrt{1-x_1^2-\dot{x}_1^2}(1-x_1^2)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{x}_{n+1}\dot{x}_{n+2} &= \frac{\mathrm{sen}\phi\cos\phi(x_1+\ddot{x}_1)\dot{x}_1+\sqrt{1-x_1^2-\dot{x}_1^2}\mathrm{sen}^2\phi(\dot{x}_1^2+x_1\ddot{x}_1)}{1-x_1^2}+\\&+\frac{\cos\phi\,\mathrm{sen}\phi(\dot{x}_1^2+x_1\ddot{x}_1)x_1\dot{x}_1}{1-x_1^2}+\frac{\mathrm{sen}\phi\cos\phi((1-x_1^2-\dot{x}_1^2)x_1\dot{x}_1+x_1^3\dot{x}_1^3)}{(1-x_1^2)^2}-\\&+\frac{\mathrm{sen}^2\phi\big((1-x_1^2-\dot{x}_1^2)^{\frac{3}{2}}+x_1^2\dot{x}_1^2\sqrt{1-x_1^2-\dot{x}_1^2}\big)}{(1-x_1^2)^2}+\frac{\cos^2\phi(x_1+\ddot{x}_1)\dot{x}_1^2x_1}{\sqrt{1-x_1^2-\dot{x}_1^2}(1-x_1^2)}\end{aligned}$$

finalmente,

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_{n+2}\dot{x}_{n+1} - \ddot{x}_{n+1}\dot{x}_{n+2} &= -\frac{(1-x_1^2-\dot{x}_1^2)^{\frac{3}{2}} + x_1^2\dot{x}_1^2\sqrt{1-x_1^2-\dot{x}_1^2}}{(1-x_1^2)^2} - \\
&\quad -\frac{\dot{x}_1^2 x_1(x_1+\ddot{x}_1)}{\sqrt{1-x_1^2-\dot{x}_1^2}(1-x_1^2)} - \frac{\sqrt{1-x_1^2-\dot{x}_1^2}(\dot{x}_1^2+x_1\ddot{x}_1)}{1-x_1^2} \\
&= -\frac{(1-x_1^2-\dot{x}_1^2)^2 + \dot{x}_1^2 x_1(1-x_1^2)(x_1+\ddot{x}_1) + x_1^2\dot{x}_1^2}{\sqrt{1-x_1^2-\dot{x}_1^2}(1-x_1^2)^2} \\
&\quad -\frac{x_1^2\dot{x}_1^2(-x_1^2-\dot{x}_1^2) + (1-x_1^2-\dot{x}_1^2)(1-x_1^2)(\dot{x}-1^2+x_1\ddot{x}_1)}{\sqrt{1-x_1^2-\dot{x}_1^2}(1-x_1^2)^2} \\
&= \frac{2x_1^2+2\dot{x}_1^2-x_1^4-2\dot{x}_1^2x_1^2+x_1^4\dot{x}_1^2-\dot{x}_1^2-x_1\ddot{x}_1+2x_1^3\ddot{x}_1}{\sqrt{1-x_1^2-\dot{x}_1^2}(1-x_1^2)^2} \\
&\quad -\frac{x_1^5\ddot{x}_1+1}{\sqrt{1-x_1^2-\dot{x}_1^2}(1-x_1^2)^2}.
\end{aligned}$$

Utilizando as equações acima calculemos $\tilde{k}$ em função de x_1,$\dot{x}_1$ e $\ddot{x}_1$.

$$\begin{aligned}
\tilde{k} &= -\ddot{x}_1\sqrt{1-x_1^2-\dot{x}_1^2} - \frac{\dot{x}_1^2x_1+\dot{x}_1^2\ddot{x}_1}{\sqrt{1-x_1^2-\dot{x}_1^2}} + \frac{2x_1^3+2\dot{x}_1^2x_1-x_1^5-2\dot{x}_1^2x_1^3+x_1^5\dot{x}_1^2-\dot{x}_1^2x_1}{\sqrt{1-x_1^2-\dot{x}_1^2}(1-x_1^2)^2} + \\
&\quad +\frac{-x_1^2\ddot{x}_1+2x_1^4\ddot{x}_1-x_1^6\ddot{x}_1-x_1}{\sqrt{1-x_1^2-\dot{x}_1^2}(1-x_1^2)^2} \\
&= -\frac{x_1+\ddot{x}_1}{\sqrt{1-x_1^2-\dot{x}_1^2}}.
\end{aligned}$$

Portanto a curvatura (principal) da curva coordenada s é dada por

$$\mu = -\tilde{k} = \frac{x_1+\ddot{x}_1}{\sqrt{1-x_1^2-\dot{x}_1^2}}$$

o que conclui a demonstração do lema. $\square$

Capítulo 2

Superfícies de Weingarten Lineares Rotacionais na Esfera Eucidiana $\mathbb{S}^3$

2.1 Resultados Básicos

No que segue denotaremos superfíes de Weingarten lineares rotacionais por SWLR. Consideremos a curva perfil γ que descreve a superfície desejada. Primeiramente, parametrizemos a curva perfil γ em $\mathbb{S}^2$ por $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$, com $x(s) \geq 0$. Se escolhermos $\phi(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ como um ponto de $O(2)$ a superfície de rotação gerada por γ é parametrizada como segue

$$\begin{aligned} \psi : M^2 &\hookrightarrow \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4 \\ (s,t) &\mapsto (x(s)\cos t, x(s)\mathrm{sen}\, t, y(s), z(s)). \end{aligned}$$

Além disso, podemos escolher o parâmetro s como sendo o comprimento de arco da curva γ. Usando tal parametrização, obtemos

$$x(s)^2 + y(s)^2 + z(s)^2 = 1, \;\; \dot{x}(s)^2 + \dot{y}(s)^2 + \dot{z}(s)^2 = 1$$

A partir de agora tomaremos o discriminante $\Delta \neq 0$ e $a > 0$. O caso em que $a < 0$ se obtem de maneira análoga. Iniciaremos esta seção provando um lema que estabelece uma relação fundamental para as $SWRL$ em $\mathbb{S}^3$.

Lema 2. *A superfície $M^2 \subset \mathbb{S}^3$ é uma SWLR se, e somente se, satisfaz a seguinte equação diferencial:*

$$\frac{a}{2}x\sqrt{1 - x^2 - \dot{x}^2} + \frac{b}{2}(x^2 + \dot{x}^2) + \frac{c}{2}x^2 = \alpha, \tag{2.1}$$

onde α é uma constante.

Demonstração. Pelo Lema 1 temos que as curvaturas principais de M^2 são dadas por:

$$k_1 = -\frac{\sqrt{1 - x^2 - \dot{x}^2}}{x} \;\; \text{e} \;\; k_2 = \frac{\ddot{x} + x}{\sqrt{1 - x^2 - \dot{x}^2}}.$$

Calculando as curvaturas Gaussiana e média, respectivamente, temos:

$$K = -\frac{\sqrt{1 - x^2 - \dot{x}^2}}{x} . \frac{\ddot{x} + x}{\sqrt{1 - x^2 - \dot{x}^2}} = -\frac{\ddot{x} + x}{x}$$

e

$$H = \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{1 - x^2 - \dot{x}^2}}{x} + \frac{\ddot{x} + x}{\sqrt{1 - x^2 - \dot{x}^2}} \right).$$

Como M^2 satisfaz a expressão $aH + bK = c$, obtemos a expressão,

$$\frac{a}{2}\left(-\frac{\sqrt{1-x^2-\dot{x}^2}}{x}+\frac{\ddot{x}+x}{\sqrt{1-x^2-\dot{x}^2}}\right)-b\cdot\frac{\ddot{x}+x}{x}=c \tag{2.2}$$

Agora, note que

$$-\frac{d}{ds}\left(\frac{a}{2}x\sqrt{1-x^2-\dot{x}^2}+\frac{b}{2}(x^2+\dot{x}^2)\right)=$$

$$-\frac{a}{2}\left(\dot{x}\sqrt{1-x^2-\dot{x}^2}+x\left(\frac{1}{2\sqrt{1-x^2-\dot{x}^2}}\right)\cdot(-2x\dot{x}-2\dot{x}\ddot{x})\right)-\frac{b}{2}(2x\dot{x}+2\dot{x}\ddot{x})=$$

$$-\frac{a}{2}\left(\dot{x}\sqrt{1-x^2-\dot{x}^2}-\frac{x^2\dot{x}-x\dot{x}\ddot{x}}{\sqrt{1-x^2-\dot{x}^2}}\right)-b(x\dot{x}+\dot{x}\ddot{x})=$$

$$x\dot{x}\left[\frac{a}{2}\left(\frac{-\sqrt{1-x^2-\dot{x}^2}}{x}+\frac{\ddot{x}+x}{\sqrt{1-x^2-\dot{x}^2}}\right)-b\cdot\frac{\ddot{x}+x}{x}\right]$$

Temos que se M^2 satisfaz (2.1), multiplicando por -1 e derivando em relação a s, obtemos (2.2), logo M^2 é $SWLR$.

Por outro lado, se M^2 é $SWLR$ satisfaz (2.2), multiplicando por $x\dot{x}$ e tomando a primitiva em relação a s da expressão obtida concluimos que M^2 satisfaz (2.1) o que completa a demonstração. $\square$

Este lema apresenta a relação fundamental que caracteriza as $SWLR$ na esfera euclidiana $\mathbb{S}^3$. Denotaremos por M_α a $SWLR$ associada a função x, solução de (2.1), e ao parâmetro α. Além disso, consideremos um valor especial $\alpha_0 = \dfrac{\sqrt{a^2+(b+c)^2}}{4}+\dfrac{b+c}{4}$.

Definição 21. *Uma solução de* (2.1) *é completa se a função x está definida para todo $s \in \mathbb{R}$ ou se o par $(x, \dot{x})$ admite apenas $(0, \pm 1)$ como valores de aderência.*

Quando $(x, \dot{x})$ possui $(0,1)$ ou $(0,-1)$ como valores de aderência, deduzimos que a curva perfil encontra ortogonalmente os eixos de rotação. Assim, soluções completas de (2.1) dão origem a definição de $SWLR$ completas.

Para descrever o comportamento das soluções de (2.1) primeiramente notemos que a solução local de x emparelhada com sua primeira derivada $(x, \dot{x})$ está contida em uma curva de nível da função $F : D \to \mathbb{R}$ definida por:

$$F(x, \dot{x}) = F(u, v) = \frac{a}{2}u\sqrt{1 - u^2 - v^2} + \frac{b}{2}(u^2 + v^2) + \frac{c}{2}u^2,$$

onde $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u \geq 0 \text{ e } u^2 + v^2 \leq 1\}$.

O próximo lema caracteriza os pontos críticos da função F no interior do conjunto D em função dos coeficientes a, b e c.

Lema 3. *Seja* $\mathcal{P} := \{(u, v) \in int(D); \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = 0\}$ *o conjunto dos pontos críticos de* F *contidos no interior de* D*. Então, temos:*

(i) $\mathcal{P} = \{(u_+, 0)\} \Longleftrightarrow b + c \geq 0$*;*

(ii) $\mathcal{P} = \{(u_-, 0)\} \Longleftrightarrow b + c \leq 0$*;*

onde $u_{\pm}^2 = \frac{1}{2}\Big(1 \pm \sqrt{\frac{(b+c)^2}{a^2 + (b+c)^2}}\Big)$.

Demonstração. Calculando as derivadas parciais de F, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) &= \frac{a}{2}\sqrt{1 - u^2 - v^2} - \frac{a}{2}\frac{u^2}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}} + (b + c)u \\
\frac{\partial F}{\partial v}(u, v) &= -a\frac{uv}{2\sqrt{1 - u^2 - v^2}} + bv \\
&= \Big(-a\frac{u}{2\sqrt{1 - u^2 - v^2}} + b\Big)v
\end{aligned}$$

Agora mostremos que para $(u, v) \in \mathcal{P}$ tem-se $-a\dfrac{u}{2\sqrt{1 - u^2 - v^2}} + b \neq 0$. Supondo por absurdo que ocorra o contrário, teríamos $b = a\dfrac{u}{2\sqrt{1 - u^2 - v^2}}$.

De $\frac{\partial F}{\partial u}(u,v)=0$, segue que

$$\frac{a}{2}\sqrt{1-u^2-v^2}-\frac{a}{2}\frac{u^2}{\sqrt{1-u^2-v^2}}+bu+uc=0,$$

ou seja,

$$\frac{a}{2}\sqrt{1-u^2-v^2}+u\left(-a\frac{u}{2\sqrt{1-u^2-v^2}}+b\right)+uc=0.$$

Logo,

$$\frac{a}{2}\sqrt{1-u^2-v^2}+uc=0,$$

e portanto,

$$c=-a\frac{\sqrt{1-u^2-v^2}}{2u}.$$

Dessa forma

$$\begin{aligned}\Delta &= a^2+4bc\\ &= \left[a^2+4\left(a\frac{u}{2\sqrt{1-u^2-v^2}}\right)\left(-a\frac{\sqrt{1-u^2-v^2}}{2u}\right)\right]=0\end{aligned}$$

gerando assim um absurdo, pois temos por hipótese $\Delta\neq 0$. Assim, se (u,v) é ponto crítico de F temos $v=0$, analisando a expressão de $\frac{\partial F}{\partial u}(u,0)$, obtemos

$$\frac{a}{2}\sqrt{1-u^2}-\frac{a}{2}\frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}}+(b+c)u=0. \tag{2.3}$$

Multiplicando a igualdade acima por $\sqrt{1-u^2}$ temos

$$\frac{a}{2}(1-2u^2)+\sqrt{1-u^2}(b+c)u=0,$$

ou seja, (2.3) é equivalente a

$$\frac{a}{2}(1-2u^2)=-2\sqrt{1-u^2}(b+c)u. \tag{2.4}$$

Note que,

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{a}{2}(1-2u^2)\right)^2 = (-2\sqrt{1-u^2}(b+c)u)^2 &\iff \\
a^4 + 4a^2(u^4-u^2) = 4(u^2-u^4)(b+c)^2 &\iff \\
\frac{a^2}{4} + (u^4-u^2)((b+c)^2+a^2) = 0 &\iff
\end{aligned}
$$

$$
u^4 - u^2 + \frac{a^2}{4(a^2+(b+c)^2)} = 0. \tag{2.5}
$$

Assim as soluções de (2.3) também são soluções de (2.5), que é uma equação biquadrada na variável u onde as soluções são dadas por:

$$
\begin{aligned}
u_{\pm}^2 &= \frac{1}{2}\left(-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\left(\frac{a^2}{4(a^2+(b+c)^2)}\right)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{a^2}{(a^2+(b+c)^2)}\right)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{\left(\frac{(b+c)^2}{(a^2+(b+c)^2)}\right)}\right),
\end{aligned}
$$

logo,

$$
u_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \pm \frac{|b+c|}{2\sqrt{a^2+(b+c)^2}}. \tag{2.6}
$$

A seguir utilizaremos o seguinte fato

$$
\sqrt{1-u_{\pm}^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2} \pm \frac{|b+c|}{2\sqrt{a^2+(b+c)^2}}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2} \mp \frac{|b+c|}{2\sqrt{a^2+(b+c)^2}}} = u_{\mp}.
$$

Calculemos $\frac{\partial F}{\partial u}(u_\pm, 0)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial u}(u_\pm, 0) &= \frac{a}{2}\sqrt{1-u_\pm^2} - \frac{a}{2}\frac{u_\pm^2}{\sqrt{1-u_\pm^2}} + (b+c)u_\pm \\
&= u_\pm\left(\frac{a}{2}\frac{\sqrt{1-u_\pm^2}}{u_\pm} - \frac{a}{2}\frac{u_\pm}{\sqrt{1-u_\pm^2}} + (b+c)\right) \\
&= u_\pm\left(\frac{a}{2}\left(\frac{\sqrt{1-u_\pm^2}}{u_\pm} - \frac{u_\pm}{\sqrt{1-u_\pm^2}}\right) + (b+c)\right) \\
&= u_\pm\left(\frac{a}{2}\left(\frac{u_\mp}{u_\pm} - \frac{u_\pm}{u_\mp}\right) + (b+c)\right) \\
&= u_\pm\left(\frac{a}{2}\left(\frac{u_\mp^2 - u_\pm^2}{u_\pm u_\mp}\right) + (b+c)\right).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u_\pm, 0) = u_\pm\left(\frac{a}{2}\left(\frac{u_\mp^2 - u_\pm^2}{u_\pm u_\mp}\right) + (b+c)\right). \tag{2.7}$$

Substuindo $u_\pm$ em (2.7), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial u}(u_\pm, 0) &= u_\pm\left(\frac{a}{2}\left(\mp\frac{|b+c|}{\sqrt{a^2+(b+c)^2}}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{|b+c|}{2\sqrt{4(a^2+(b+c)^2)}}}\right)^{-1} + (b+c)\right) \\
&= u_\pm\left(\frac{a}{2}\left(\mp\frac{|b+c|}{\sqrt{a^2+(b+c)^2}}\right)\left(\sqrt{\frac{a^2}{4(a^2+(b+c)^2)}}\right)^{-1} + (b+c)\right) \\
&= u_\pm\left(\frac{a}{2}\left(\mp\frac{|b+c|}{\sqrt{a^2+(b+c)^2}}\right)\left(\frac{a}{2\sqrt{a^2+(b+c)^2}}\right)^{-1} + (b+c)\right) \\
&= u_\pm(\mp|b+c| + (b+c)).
\end{aligned}$$

Portanto,

$\frac{\partial F}{\partial u}(u_+, 0) = 0$ se, e somente se, $b+c \geq 0$ e;

$\frac{\partial F}{\partial u}(u_-, 0) = 0$ se, e somente se, $b+c \leq 0$;

o que completa a demonstração do lema.

□

Obs 1. *Note que poderíamos concluir o lema anterior usando (2.4) diretamente, pois o sinal da expressão*

$$-2\sqrt{1-u^2}(b+c)u$$

depende apenas do sinal de $b+c$, uma vez que $u \geq 0$, assim, $b+c \geq 0$ se, e somente se,

$$\frac{a}{2}(1-2u^2) \leq 0.$$

Como $a > 0$ obtemos que $u^2 \geq \frac{1}{2}$, de (2.6) obtemos que $u = u_+$,portanto $\frac{\partial F}{\partial u}(u_+, 0) = 0$. Analogamente, conclui-se que $b+c \leq 0$ se, e somente se, $\frac{\partial F}{\partial u}(u_-, 0) = 0$.

De agora em diante denotaremos por $C_\alpha = \{(u,v) \in D; F(u,v) = \alpha\}$ as curvas de nível F, assim como, $\alpha_\pm := F(u_\pm, 0)$. Calculemos o valor de F nos pontos $(u\pm, 0)$:

$$\begin{aligned}
F(u_\pm, 0) &= \frac{a}{2}u_\pm\sqrt{1-u_\pm^2} + \frac{b}{2}(u_\pm^2) + \frac{c}{2}u_\pm^2 \\
&= \frac{a}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{2} \pm \frac{|b+c|}{2\sqrt{a^2+(b+c)^2}}\right)\left(\frac{1}{2} \mp \frac{|b+c|}{2\sqrt{a^2+(b+c)^2}}\right)} + \\
&\quad \frac{b}{2}\left(\frac{1}{2} \pm \frac{|b+c|}{2\sqrt{a^2+(b+c)^2}}\right) + \frac{c}{2}\left(\frac{1}{2} \pm \frac{|b+c|}{2\sqrt{a^2+(b+c)^2}}\right) \\
&= \frac{a}{2}\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{|b+c|}{4(a^2+(b+c)^2)}} + \frac{b+c}{4}\left(1 \pm \frac{|b+c|}{\sqrt{a^2+(b+c)^2}}\right) \\
&= \frac{a}{2}\sqrt{\frac{a^2}{4(a^2+(b+c)^2)}} + \frac{b+c}{4}\left(1 \pm \frac{|b+c|}{\sqrt{a^2+(b+c)^2}}\right) \\
&= \frac{a^2}{4\sqrt{(a^2+(b+c)^2)}} + \frac{b+c}{4}\left(1 \pm \frac{|b+c|}{\sqrt{a^2+(b+c)^2}}\right).
\end{aligned}$$

Usando o lema anterior e considerando o sinal de $b+c$ em função de $u_\pm$ como pontos críticos na expressão acima, afirmamos que o valor de F nestes pontos coincide, de acordo com o sinal de $b+c$, e é igual a α_0. De fato, Se $b+c \geq 0$ então $|b+c| = b+c$ e ainda, se $b+c \leq 0$ então $-|b+c| = b+c$. Daí,

$$\begin{aligned}
F(u_\pm, 0) &= \frac{a^2}{4\sqrt{(a^2+(b+c)^2)}} + \frac{b+c}{4}\left(1 \pm \frac{|b+c|}{\sqrt{a^2+(b+c)^2}}\right) \\
&= \frac{a^2}{4\sqrt{(a^2+(b+c)^2)}} + \frac{b+c}{4}\left(1 + \frac{b+c}{\sqrt{a^2+(b+c)^2}}\right) \\
&= \frac{a^2+(b+c)^2}{4\sqrt{(a^2+(b+c)^2)}} + \frac{b+c}{4} \\
&= \frac{\sqrt{a^2+(b+c)^2}}{4} + \frac{b+c}{4} \\
&= \alpha_0.
\end{aligned}$$

O próximo lema nos permite determinar os níveis mínimos e máximos de F.

Lema 4. *Com a notação acima, temos as seguintes afirmações:*

1. *Se $b+c \leq 0$, então $\alpha \in [\frac{b}{2}, \alpha_0]$ e $F^{-1}(\alpha_0) = \{(u_-, 0)\}$;*

2. *Se $b+c \geq 0$, então $\alpha \in [\min\{0, \frac{b}{2}\}, \alpha_0]$ e $F^{-1}(\alpha_0) = \{(u_+, 0)\}$.*

Demonstração. Primeiramente analisaremos o comportamento de F na fronteira do conjunto D, ou seja, os conjuntos $X = D \cap \{u = 0\}$ e $Y = D \cap \mathbb{S}^1$. No primeiro caso, temos $F(0, v) = \frac{b}{2}v^2$, enquanto, no segundo $F(u, v) = \frac{b}{2} + \frac{c}{2}u^2$, note que se $(u, v) \in \mathbb{S}^1$ temos que $u^2 + v^2 = 1$. Analisemos o primeiro caso, $b+c \leq 0$, como $b \neq 0$ e $c \geq 0$, obtemos que $b < 0 \leq c$. Assim, para

$(u,v) \in Y$ temos $F(u,v) = \frac{b}{2} + \frac{c}{2}u^2 \leq \frac{b}{2} + \frac{c}{2} \leq 0$. Deduzindo assim que $\min\limits_{\partial D} F = \frac{b}{2}$ e $\max\limits_{\partial D} F = 0 < F(u_-,0) = \alpha_- = \alpha_0$. Além disso, pelo Lema 3 temos que $(u_-,0)$ é o único ponto crítico de F em $int(D)$. Obtemos então que $\min\limits_{D} F = \frac{b}{2}$ e $\max\limits_{D} F = \alpha_0$. Portanto $\frac{b}{2} \leq \alpha \leq \alpha_0$ e $F^{-1}(\alpha_0) = \{(u_-,0)\}$, concluindo assim a demonstração da primeira afirmação.

Por outro lado se $b+c \geq 0$, pelo Lema 3 temos que $(u_+,0)$ é o único ponto crítico de F em $int(D)$. Neste caso podemos ter $b < 0$ ou $b > 0$. No primeiro caso temos que $c > 0$, assim, $\min\limits_{\partial D} F = \frac{b}{2}$ e $\max\limits_{\partial D} F = \frac{b+c}{2} < F(u_+,0) = \alpha_+ = \alpha_0$, obtendo, $\min\limits_{D} F = \frac{b}{2}$ e $\max\limits_{D} F = \alpha_0$ e $F^{-1}(\alpha_0) = \{(u_+,0)\}$.

Quando $b > 0$, temos $F(u,v) = \frac{b}{2} + \frac{c}{2}u^2 > 0$ quando $(u,v) \in Y$ e $F(0,v) = \frac{c}{2}u^2 \geq 0$ em X. Deduzimos assim que $\min\limits_{\partial D} F = 0$ e $\max\limits_{\partial D} F = \frac{b+c}{2} < F(u_+,0) = \alpha_+ = \alpha_0$. Como $(u_+,0)$ é único ponto crítico de F em $int(D)$, concluimos que $\min\limits_{D} F = 0$ e $\max\limits_{D} F = \alpha_0$, o que completa a demonstração do lema. $\square$

Lema 5. *A derivada parcial* $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ *se anula no conjunto*

$$\Gamma = \{(u,v) \in int(D) : 1 - u^2 - v^2 = \frac{\tau^2}{a^2}u^2\}, \tag{2.8}$$

onde $\tau = \sqrt{a^2 + (b+c)^2} - (b+c)$.

Demonstração. Segue de (2.8) que o conjunto Γ pode ser escrito, equivalentemente, como

$$\Gamma = \left\{(u,v) \in int(D) : \sqrt{1-u^2-v^2} = \frac{u(\sqrt{a^2+(b+c)^2} - (b+c))}{a}\right\}. \tag{2.9}$$

Acima omitimos o sinal de menos na expressão uma vez que $\frac{\tau^2}{a^2}u^2 \geq 0$.

Tomando a expressão

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = \frac{a}{2}\sqrt{1-u^2-v^2} - \frac{a}{2}\frac{u^2}{\sqrt{1-u^2-v^2}} + (b+c)u,$$

e substituindo a expressão $\sqrt{1-u^2-v^2}$ obtida em (2.9), obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) &= \frac{a}{2}\left(\frac{u(\sqrt{a^2+(b+c)^2}-(b+c))}{a}\right) - \frac{au^2}{2}\left(\frac{a}{u(\sqrt{a^2+(b+c)^2}-(b+c))}\right) + \\
&\quad (b+c)u \\
&= u\left(\frac{\sqrt{a^2+(b+c)^2}-(b+c)}{2} - \frac{a^2}{2(\sqrt{a^2+(b+c)^2}-(b+c))} + (b+c)\right) \\
&= u\left(\frac{(\sqrt{a^2+(b+c)^2}-(b+c))^2 - a^2 + 2\sqrt{a^2+(b+c)^2}(b+c) - 2(b+c)^2}{2(\sqrt{a^2+(b+c)^2}-(b+c))}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$\square$

Geometricamente, os pontos da curva Γ são os pontos onde as curvas de nível da F possuem vetor tangente paralelo ao eixo u.

Obs 2. *Analizando os casos $b+c \leq 0$ e $b+c \geq 0$ concluímos que: $b+c \leq 0$ implica que $(u_-, 0) \in \Gamma$; enquanto que $b+c \geq 0$ implica que $(u_+, 0) \in \Gamma$.*

Lema 6. *Com a notação acima, temos:*

1. *$C_\alpha \cap \Gamma \neq \emptyset$ se, e somente se, $\frac{b}{2} < \alpha \leq \alpha_0$. Além disso, se $\alpha \in (\frac{b}{2}, \alpha_0)$, então $C_\alpha \cap \Gamma$ possui dois pontos.*

2. *$(u,v) \in C_\alpha \cap \{u = 0\}$ se, e somente se, $bv^2 = 2\alpha$.*

3. *$(u,v) \in C_\alpha \cap \mathbb{S}^1$ se, e somente se, $cu^2 = 2\alpha - b$.*

Demonstração. Se $(u, v) \in C_\alpha \cap \Gamma$ segue de (2.8) que $1 - u^2 - v^2 = \frac{\tau^2}{a^2}u^2$. Substituindo esta expressão em $F(u, v) = \alpha$ obtemos que (u, v) satisfaz

$$\frac{a}{2}u\sqrt{\frac{\tau^2}{a^2}u^2} + \frac{b}{2}\left(1 - \frac{\tau^2}{a^2}u^2\right) + \frac{c}{2}u^2 = \alpha,$$

ou seja,

$$u^2\tau + b - \frac{b}{a}\tau^2u^2 + cu^2 = 2\alpha,$$

portanto,

$$u^2\left(\tau - \frac{b}{a}\tau^2 + c\right) = 2\alpha - b. \tag{2.10}$$

Afirmamos que se $\tau = \sqrt{a^2 + (b + c)^2} - (b + c)$, então $\tau - \frac{b}{a^2}\tau^2 + c > 0$. De fato, analisando a inequação $x - \frac{b}{a^2}x^2 + c > 0$, o caso $b < 0$ segue diretamente da expressão, uma vez que $\tau > 0$, consideremos assim $b > 0$. Calculando o discriminante da equação $x - \frac{b}{a^2}x^2 + c = 0$, obtemos

$$\Delta = 1 + \frac{4bc}{a^2},$$

daí,

$$\begin{aligned}
x_\pm &= \left(1 \mp \sqrt{1 + \frac{4bc}{a^2}}\right)\frac{a^2}{2b} \\
&= \frac{a^2}{2b} \mp \sqrt{a^2 + 4bc}\frac{a}{2b} \\
&= \frac{a^2}{2b}\left(1 \mp \frac{\sqrt{a^2 + 4bc}}{a}\right).
\end{aligned}$$

Para provar a desigualdade basta mostrar que $\tau \in (x_+, x_-)$. Temos que $\tau > 0$ e $x_+ < 0$, assim, resta provar que $\tau < x_-$, suponha que $\tau \geq x_-$, ou seja,

$$\sqrt{a^2 + (b + c)^2} - (b + c) \geq \frac{a^2}{2b} + \sqrt{a^2 + 4bc}\frac{a}{2b}$$

somando $(b+c)$ e elevando ao quadrado, obtemos

$$\begin{aligned}
a^2 &\geq \frac{a^4}{4b^2}\left(1+\frac{\sqrt{a^2+4bc}}{a}\right)^2+\frac{a^2}{b}\left(1+\frac{a^2+4bc}{a}\right)(b+c)\\
&= \frac{a^4}{4b^2}\left(1+\frac{\sqrt{a^2+4bc}}{a}\right)^2+a^2+a\sqrt{a^2+4bc}+\frac{a^2c}{b}+\frac{ac\sqrt{a^2+4bc}}{b}
\end{aligned}$$

o que implica que

$$\frac{a^4}{4b^2}\left(1+\frac{\sqrt{a^2+4bc}}{a}\right)^2+a\sqrt{a^2+4bc}+\frac{a^2c}{b}+\frac{ac\sqrt{a^2+4bc}}{b}\leq 0$$

o que é um absurdo, assim fica provada a afirmação.

Agora, por (2.10) temos $2\alpha - b > 0$, assim, $\dfrac{b}{2} < \alpha$, como α_0 é o valor máximo de F, concluímos que $\frac{b}{2} < \alpha \leq \alpha_0$. Além disso, o fato de $(u,v) \in \Gamma$ implica que $\dfrac{\partial F}{\partial u} = 0$, assim se $\alpha \in (\frac{b}{2}, \alpha_0)$ tem-se $v \neq 0$. Logo, $(u,v) \in C_\alpha \cap \Gamma$, implica $(u,-v) \in C_\alpha \cap \Gamma$, concluindo assim a demonstração do primeiro item.

Os itens (2) e (3) seguem diretamente do fato de que $(u,v) \in C_\alpha \cap \{u=0\}$ se, e somente se, $F(0,v) = \alpha$ que é equivalente a $bv^2 = 2\alpha$, e ainda, temos que $(u,v) \in \mathbb{S}^1$ se, e somente se, $u^2+v^2=1$, substuindo na expressão de F obtemos $cu^2 = 2\alpha - b$ o que completa a prova do lema. $\square$

2.2 Resutado Principal

Na proposição seguinte caracterizaremos as curvas de nível da função F.

Proposição 6. *(Curvas de Nível) As curvas de nível da função F satisfazem:*

1. *Se $\alpha \in (\min\{0, \frac{b}{2}\}, \max\{0, \frac{b}{2}\})$, então a curva de nível C_α intersecta $\{(0,v); -1 < v < 1\}$ em dois pontos diferentes. Além disso, $C_{\frac{b}{2}} \cap \{u = 0\} = \{(0, \pm 1)\}$,$C_0 \cap \{u = 0\} = \{(0,0)\}$, $b > 0$ implica que $C_0 = \{(0,0)\}$ e $b < 0$ implica que $C_{\frac{b}{2}} = \{(0, \pm 1)\}$.*

2. *Se $\alpha \in (\frac{b}{2}, \frac{b+c}{2})$, então a curva de nível C_α intersecta $\mathbb{S}^1_+ = \{(u,v); u^2 + v^2 = 1$ e $u \geq 0\} \setminus \{(0, \pm 1)\}$ em dois pontos diferentes. Além disso, $c = 0$ implica que $C_{\frac{b}{2}} = \mathbb{S}^1_+$ e $c \neq 0$ implica que $C_{\frac{b}{2}} \cap \mathbb{S}^1_+ = \{(0, \pm 1)\}$ e $C_{\frac{b+c}{2}} \cap \mathbb{S}^1_+ = \{(1,0)\}$.*

3. *Para todo nível $\alpha \in (\max\{0, \frac{b+c}{2}\}, \alpha_0)$, temos $C_\alpha \cap \{u = 0\} = \emptyset$ e $C_\alpha \cap \mathbb{S}^1_+ = \emptyset$.*

4. *Se $|b + c| = \pm(b + c)$, então $C_{\alpha_0} = \{(u\pm, 0)\}$.*

Demonstração. Se $\alpha \in (\min\{0, \frac{b}{2}\}, \max\{0, \frac{b}{2}\})$, então $\alpha = bv^2/2$, para algum $v \in (-1, 1)$, consequentemente para $-v$ também, desde que $\alpha \neq 0$ temos que $v \neq 0$, ou seja, $bv^2 = 2\alpha$, isto implica, pelo item (2) do Lema 6, que $(0, \pm v) \in C_\alpha \cap \{u = 0\}$. Pelo mesmo argumento usado anteriormente temos que se $(0, v) \in C_{\frac{b}{2}} \cap \{u = 0\}$, então $bv^2 = 2\alpha$ o que implica que $v^2 = 1$, ou seja, $v = \pm 1$. Analogamente, se $(0, v) \in C_0 \cap \{u = 0\}$, então $v^2 = 0$, logo $C_0 \cap \{u = 0\} = \{(0, 0)\}$. Além disso se $b > 0$ temos:

$$C_0 = \left\{(u,v) \in D; \frac{a}{2}u\sqrt{1 - u^2 - v^2} + \frac{b}{2}(u^2 + v^2) + \frac{c}{2}u^2 = 0\right\} = \{(0,0)\}$$

desde que estamos considerando $a > 0$ e $c \geq 0$. Por outro lado se $b < 0$, temos:

$$\begin{aligned} C_{\frac{b}{2}} &= \Big\{(u,v) \in D; \frac{a}{2}u\sqrt{1-u^2-v^2} + \frac{b}{2}(u^2+v^2) + \frac{c}{2}u^2 = \frac{b}{2}\Big\} \\ &= \Big\{(u,v) \in D; \frac{a}{2}u\sqrt{1-u^2-v^2} + \frac{b}{2}(u^2+v^2-1) + \frac{c}{2}u^2 = 0\Big\}. \end{aligned}$$

Como $u^2+v^2-1 \leq 0$, segue que $u = 0$ e $v = \pm 1$, concluindo a demonstração do item (1).

Para o item (2) observe que, se $\alpha \in (b/2, (b+c)/2)$, então podemos escrever $\alpha = (b+u^2c)/2$, com $u \in (0,1)$, segue pelo Lema 6 item (3) que existe v tal que $(u, \pm v) \in C_\alpha \cap \mathbb{S}^1_+$, pois o valor de F independe do sinal de v. Se $c = 0$, então pelo argumento anterior $\mathbb{S}^1_+ = C_{\frac{b}{2}}$. Caso contrário, temos que $(u,v) \in C_{\frac{b}{2}} \cap \mathbb{S}^1$ implica que $cu^2 = 0$, logo, $u = 0$ e $v = \pm 1$, e ainda, se $(u,v) \in C_{\frac{b+c}{2}} \cap \mathbb{S}^1$ segue que $u^2 = 1$, como $u \geq 0$ concluímos que $(u,v) = (1,0)$.

O item (3) segue por contra-positiva, se $C_\alpha \cap \{u = 0\} \neq \emptyset$ ou $C_\alpha \cap \mathbb{S}^1_+ \neq \emptyset$, então, pelo lema (6), itens (2) e (3) teremos:

$$\alpha \in \Big(\min\Big\{0, \frac{b}{2}\Big\}, \max\Big\{0, \frac{b}{2}\Big\}\Big)$$

ou

$$\alpha \in \Big(\frac{b}{2}, \frac{b+c}{2}\Big)$$

portanto,

$$\alpha \notin \Big(\max\{0, \frac{b+c}{2}\}, \alpha_0\Big).$$

O item (4) é uma consequência direta do Lema 4. $\square$

Corolário 1. *Com a mesma notação acima, os seguintes resultados abaixo são válidos:*

1. *Se* $\alpha \in (\min\{0, \frac{b}{2}\}, \max\{0, \frac{b}{2}\}) \cup (\frac{b}{2}, \frac{b+c}{2})$*, então a curva de nível* C_α *não é completa.*

2. *Se* $\alpha \in (\max\{0, \frac{b+c}{2}\}, \alpha_0)$*, então* C_α *é uma curva suave simples fechada.*

Demonstração. Se $\alpha \in (\min\{0, \frac{b}{2}\}, \max\{0, \frac{b}{2}\}) \cup (\frac{b}{2}, \frac{b+c}{2})$, então, pela Proposição 6 temos que a curva de nível C_α não está definida para todo $s \in \mathbb{R}$, pois C_α intersecta a fronteira de D. Além disso, os pontos de interseção estão no conjunto $\{u = 0\} \cup \mathbb{S}^1_+ \setminus \{(0, \pm 1)\}$, portanto C_α não é completa. Se $\alpha \in (\max\{0, \frac{b+c}{2}\}, \alpha_0)$, então pelo item (3) da Proposição 6 temos que $C_\alpha \cap \{u = 0\} = C_\alpha \cap \mathbb{S}^1_+ = \emptyset$, logo C_α é uma curva suave simples fechada. □

Teorema 1. *Seja* $M_\alpha \subset \mathbb{S}^3$ *uma SWLR com* $a > 0$ *e* $\Delta \neq 0$*. Então temos:*

1. $\alpha \in [\min\{0, \frac{b}{2}\}, \alpha_0]$.

2. *Não existe SWLR* M_α *completa imersa tal que*
$$\alpha \in \left(\min\{0, \frac{b}{2}\}, \max\{0, \frac{b}{2}\}\right) \cup \left(\frac{b}{2}, \frac{b+c}{2}\right).$$

3. *Para todo* $\alpha \in (\max\{0, \frac{b+c}{2}\}, \alpha_0)$*,* M_α *é uma SWLR completa imersa.*

4. *Se* $\alpha = \alpha_0$*, então o toro de Clifford em* $\mathbb{S}^3$ *é a única SWLR completa.*

Demonstração. Segue diretamente do Lema 4 que $\alpha \in [\min\{0, \frac{b}{2}\}, \alpha_0]$. Se a função x satisfaz $F(x, \dot{x}) = \alpha$, com $\alpha \in (\min\{0, \frac{b}{2}\}, \max\{0, \frac{b}{2}\}) \cup (\frac{b}{2}, \frac{b+c}{2})$, então, pelo item (1) do Corolário 1, temos que x não está definida para todo $s \in \mathbb{R}$. Portanto, a $SWLR$ associada não é completa. Segue do item (2) do Corolário 1 que se $F(x, \dot{x}) = \alpha$, com $\alpha \in (\max\{0, \frac{b+c}{2}\}, \alpha_0)$, então x está definida para todo $s \in \mathbb{R}$, assim, a $SWLR$ associada é completa. Finalmente, se $F(x,\dot{x}) = \alpha_0$, então $\dot{x} = 0$ e $x = u_\pm$. Portanto a SWLR associada é um toro de Clifford, desde que tal superfície é parametrizada por

$$\begin{aligned} \psi : M^2 \quad &\hookrightarrow \quad \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4 \\ (s,t) \quad &\mapsto \quad (u_\pm \cos t, u_\pm \mathrm{sen}\, t, y(s), z(s)) = \mathbb{S}^1(u_\pm) \times \mathbb{S}^1(1-u_\pm) \end{aligned}$$

onde $\mathbb{S}^1(c)$ representa a esfera 1-dimensional de raio c. Completando a demosntração do Teorema 1. $\square$

Para demonstrar o Teorema 2 usaremos o seguinte lema.

Lema 7. *Seja x uma solução de (2.1) tal que $x(s) \neq 0$ e $\dot{x}(s) \neq 0$ para $s \in \mathbb{R}$ a menos de pontos isolados. Suponha ainda que $c = 0$ e k_1 constante. Então temos que $k_1 = k_2$ e $\alpha = \frac{b}{2}$, Além disso, x é dado por*

$$x(s) = \frac{1}{\rho}\cos(\rho s - \theta),$$

onde $\rho = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{b^2}}$ e θ é constante.

Demonstração. Pelo Lema 1 temos $k_1 = -\frac{\sqrt{1-x^2-\dot{x}^2}}{x}$ e $k_2 = \frac{\ddot{x}+x}{\sqrt{1-x^2-\dot{x}^2}}$. Em particular, tem-se $-k_1 x = \sqrt{1-x^2-\dot{x}^2}$ e $-k_1 k_2 x = x + \ddot{x}$. Como k_1 é constante $(\dot{-k_1 x}) = -k_1\dot{x}$, por outro lado temos $(\dot{-k_1 x}) = (\sqrt{1-x^2-\dot{x}^2})' = \frac{-\dot{x}(x+\ddot{x})}{\sqrt{1-x^2-\dot{x}^2}}$, assim

$$k_1\dot{x} = \frac{\dot{x}(x+\ddot{x})}{\sqrt{1-x^2-\dot{x}^2}} = k_2\dot{x}. \tag{2.11}$$

Considerando que $\dot{x} \neq 0$ quase sempre, deduzimos de (2.11) que $k_1 = k_2$, isto é,

$$-\frac{\sqrt{1-x^2-\dot{x}^2}}{x} = \frac{\ddot{x}+x}{\sqrt{1-x^2-\dot{x}^2}}$$

De onde obtemos que

$$x\ddot{x} = \dot{x}^2 - 1 \tag{2.12}$$

Agora, se x é solução de (2.1) tal que $F(x,\dot{x}) = \alpha$ e $c = 0$, então

$$ax\sqrt{1-x^2-\dot{x}^2} + b(x^2+\dot{x}^2) = 2\alpha.$$

Como k_1 é constante, temos duas possibilidades: $k_1 = 0$ ou $k_1 \neq 0$. No primeiro caso temos que $x^2 + \dot{x}^2 = 1$ e assim pelo item (3) do Lema 6 tem-se $F(x,\dot{x}) = \frac{b}{2}$, e ainda, derivando a expressão acima, obtemos $2\dot{x}(x+\ddot{x}) = 0$, o que implica que $x + \ddot{x} = 0$, assim, $x(s) = \cos(s-\theta)$ para algum θ fixado. Enquanto isso, no segundo caso como $-k_1 x = \sqrt{1-x^2-\dot{x}^2}$ tem-se

$$-ak_1x^2 + b(x^2+\dot{x}^2) = 2\alpha,$$

derivando em relação a s, obtemos

$$2\dot{x}(-ak_1x + b(x+\ddot{x})) = 0,$$

ou seja,

$$2x\dot{x}(-ak_1 - bk_1k_2) = 0,$$

onde usamos o fato de $k_1k_2 = \dfrac{x+\ddot{x}}{x}$. Como $x\dot{x} \neq 0$ quase sempre, obtemos que $k_1 = k_2 = -\dfrac{a}{b}$ e, portanto,

$$\begin{aligned}
F(x,\dot{x}) &= \frac{a}{2}x\sqrt{1-x^2-\dot{x}^2} + b(x^2+\dot{x}^2) \\
&= -\frac{a}{2}k_1x^2 + \frac{b}{2}(1-k_1^2x^2) \\
&= \frac{b}{2}\left(-\frac{a}{b}k_1x^2 + 1 - k_1^2x^2\right) \\
&= \frac{b}{2}.
\end{aligned}$$

Finalmente, como $k_1 = -\dfrac{a}{b}$, temos $1 - x^2 - \dot{x}^2 = k_1^2 x^2$, logo

$$\begin{aligned} 1 - \dot{x}^2 &= \frac{a^2}{b^2}x^2 + x^2 \\ &= \left(\frac{a^2+b^2}{b^2}\right)x^2 \\ &= \rho^2 x^2 \end{aligned}$$

assim,

$$1 - \dot{x}^2 = \rho^2 x^2. \tag{2.13}$$

Agora, de (2.12) e (2.13) deduzimos que $\ddot{x} + \rho^2 x = 0$, assim,

$$x(s) = \frac{1}{\rho}\cos\theta\cos\rho s + \frac{1}{\rho}\mathrm{sen}\,\theta\mathrm{sen}\,\rho s.$$

□

Teorema 2. *Existe uma família de SWLR imersa em $\mathbb{S}^3$ que não contém superfícies isoparamétricas.*

Demonstração. Se x é solução de (2.1), tal que, $F(x,\dot{x}) = \alpha$, onde $\alpha \in (min\{0, \frac{b}{2}\}, \alpha_0)$, então segue do Corolário 1 que $(x,\dot{x})$ é uma curva suave fechada simples. Assim, $\dot{x}^{-1}(0)$ é um conjunto discreto. Além disso, a Proposição 6 implica que $x(s) \neq 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$, pois $C_\alpha \cap \{u = 0\} = \emptyset$. Portanto, pelo Lema 7, quando $c = 0$, a $SWLR$ associada a x não é isoparamétrica, pois se k_1 é constante então $k_1 = k_2$ e $\alpha = \frac{b}{2}$, o que gera uma contradição. Além disso, segue do Teorema 1 que tais superfícies são completas e imersas. □

Referências Bibliográficas

[1] Barros, A. A.; Sousa, P. A. A.; Silva, J. P. - *Rotational Linear Weingarten Surface into the Euclidian Sphere*. Israel Journal of Mathematics, 2011.

[2] do Carmo, M. P. - *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

[3] do Carmo, M. P. -*Geometria Riemmaniana*. Projeto Euclides - IMPA, 2005.

[4] do Carmo, M. P.; Dajczer, M. - *Rotation Hypersurfaces in Spaces of Constant Curvature*. Transaction of the American Mathematical Society, Vol. 277, No. 2, p. 685-709, 1983.

[5] Hopf, H. - *Differential Geometry in the Large, Lecture Notes in Math, Vol 1000* . Springer-Verlag, 1983.