Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Estimativa do primeiro autovalor do operador de estabilidade de hipersuperfícies CMC na Esfera

Josimauro Borges de Carvalho

Teresina - 2018

Josimauro Borges de Carvalho

Dissertação de Mestrado Acadêmico:

Estimativa do primeiro autovalor do operador de estabilidade de hipersuperfícies CMC na Esfera

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Antonio Wilson Rodrigues da Cunha

Teresina - 2018

FICHA CATALOGRÁFICA
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial do CCN

C331e Carvalho, Josimauro Borges de.
Estimativa do primeiro autovalor do operador de estabilidade de hipersuperfícies CMC na esfera / Josimauro Borges de Carvalho. – Teresina, 2018.
63 f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática, 2018.
Orientador: Prof. Dr. Antônio Wilson Rodrigues da Cunha.

1.Geometria Diferencial. 2. Operador de Jacobi. 3. Toro de Clifford. I. Título.

CDD 516.36

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Estimativa do primeiro autovalor do operador de estabilidade de hipersuperfícies com curvatura média constante CMC

JOSIMAURO BORGES DE CARVALHO

Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 23 de Fevereiro de 2018.

Banca Examinadora:

Antonio Wilson Rodrigues da Cunha
Prof. Dr. Antônio Wilson Rodrigues Cunha - Presidente

Kelton Silva Bezerra
Prof. Dr. Kelton Silva Bezerra - Membro interno

Eraldo Almeida Lima Júnior
Prof. Dr. Eraldo Almeida Lima Junior - Externo à Instituição

Ao meu filho Abner Saulo.

Ao amigo Luciano Ramos (In memorian).

Agradecimentos

Agradecimento a quem é devido. Agradeço ao Senhor Deus pelo fôlego de vida; à família, destacando minha irmã Marlene Borges, pelo apoio inestimável; aos colegas de trabalho do colegiado de matemática da UEA-Tefé; aos colegas de curso, sempre com disposição para ajudar, em especial ao presidente José Edilson; gratidão também ao meu orientador prof. Dr. Antonio Wilson Rodrigues da Cunha. Agradeço finalmente ao CNPq, pelo apoio financeiro.

"A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como, também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens.".

(Descartes).

Resumo

Este trabalho tem como objetivo principal abordar resultados relacionados às estimativas para o primeiro autovalor λ_1^J do operador de Jacobi J em hipersuperfícies com curvatura média H constante na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}(1)$. Preliminarmente, fizemos uma abordagem sobre as estimativas já desenvolvidas anteriormente por James Simons (1968), para hipersuperfícies mínimas não totalmente geodésicas, isto é, $\lambda_1^J \leqslant -n$ e a igualdade ocorre se, e somente se, é isomorfa a um toro. Em seguida Chuanxi Wu (1993) melhorou a estimativa para hipersuperfície não totalmente geodésica, mostrando que $\lambda_1^J \leqslant -2n$, e a igualdade ocorre se, e somente se a hipersuperfície é toro de Clifford. Perdomo (2001) prova o mesmo que Wu, mas usando um método diferente. Por último, Alias, Barros e Brasil, mostram que em hipersuperfícies com curvatura média constante, para $n = 2$, essas estimativas dependem da curvatura, da dimensão e da imersão. A essência dos resultados teve como referência principal o trabalho de Daguang Chen e Qing-Ming Cheng, onde se mostra um limite superior ótimo para o primeiro autovalor do operador de Jacobi numa hipersuperfície compacta não totalmente umbílica com curvatura média constante dependendo apenas da curvatura média e da dimensão, não sendo necessária a dependência da imersão. As equações de Gauss, Codazzi, Ricci e o Laplaciano da segunda forma fundamental são abordados preliminarmente nesse estudo.

Palavras-chave: Estimativa do primeiro autovalor do operador de Jacobi, hipersuperfície com curvatura média constante, toro de Clifford.

Abstract

This work has as main objective to approach results related to the estimates for the first eigenvalue λ_1^J of Jacobi operator J on an n-dimensional non-totally umbilical compact hypersurface with constant mean curvature H in the unit sphere $S^{n+1}(1)$. Preliminarily, we have taken an approach on the estimates already developed previously by James Simons (1968), for minimally not totally geodesic hypersurfaces, that is, $\lambda_1^J \leqslant -n$ and equality occurs if, and only if, is isomorphic to a torus. Then Chuanxi Wu (1993) improved the estimate for non-fully geodesic hypersurface, showing that $\lambda_1^J \leqslant -2n$, and equality occurs if and only if the hypersurface is Clifford's torus. Perdomo (2001) proves the same as Wu, but using a different method. Finally, Alias, Barros and Brasil, show that in hypersurfaces with curvature mean constant, for $n = 2$, these estimates depend on the curvature, the dimension and the immersion. The essence of the results had as main reference the work of Daguang Chen and Qing-Ming Cheng (2017) where they present an optimal upper bound for the first eigenvalue of Jacobi operator, on an n-dimensional non-totally umbilical compact hypersurface with constant mean curvature which only depends on the mean curvature H and the dimension n, not being dependent of the immersion. The equations of Gauss, Codazzi, Ricci and Laplacian of the second fundamental form also discussed in this study.

Sumário

Introdução

Dada φ uma hipersuperfície compacta n-dimensional na esfera unitária, consideremos uma variação de φ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ sendo $\varphi_0 = \varphi$. As hipersuperfícies aqui tratadas são as imersões isométricas com curvatura média constante (CMC), as umbílicas e também as não totalmente umbílicas. Inicialmente abordamos conceitos básicos sobre variações da área; para uma leitura aprofundada veja [3]. Algumas identidades são abordadas detalhadamente, visto que são extremamente úteis no decorrer do texto. São elas a identidade de Ricci, o lema de Cartan, e as equações de Gauss e Codazzi. Para todas elas usamos a notação do método do referencial móvel, veja [6]. O tema central é apresentar peculiaridades do operador de Jacobi ou operador de estabilidade e também mostrar estimativas para o primeiro autovalor desse operador, destacando sua importância na classificação de hipersuperfícies. O Toro de Clifford é um exemplo clássico de hipersuperfície mínima caracterizada por estimativa do primeiro autovalor do operador de Jacobi. Esse operador é definido por $Jf = -\Delta f - (S+n)f$, onde Δ denota o operador de Laplace e S denota o quadrado da segunda forma fundamental. O comportamento desse operador está diretamente ligado à instabilidade das hipersuperfícies (ver [9]). O primeiro autovalor do operador J é o número λ_1^J para o qual vale $Jf = -\lambda_1^J f$. No âmbito da Geometria Diferencial, ao longo dos tempos, muitos autores vêm buscando classificar hipersuperfícies através de estimativas do primeiro autovalor do operador de Jacobi. Em 1968, James Simons provou que se φ é uma hipersuperfície mínima, compacta e não totalmente geodésica na esfera unitária, então $\lambda_1^J \leqslant -n$. Posteriormente, em 1993, Chuanxi Wu em [13] estudou o caso da igualdade do teorema de Simons, i.e., se φ é uma hipersuperfície mínima compacta não totalmente geodésica, então $\lambda_1^J \leqslant -n$, e a igualdade ocorre se, e somente se, φ é isométrica ao toro de Clifford. Para a estimativa de Wu não há dependência da imersão, mas apenas da dimensão. Recentemente, em [10], Oscar Perdomo obteve o mesmo resultado de Wu, mas usando um método diferente. Os detalhes estão esclarecidos no capítulo

3. Esses resultados devidos a Simons, Perdomo e Wu foram obtidos para hipersuperfícies mínimas na esfera unitária. Ao se tratar de hipersuperfícies com curvatura média constante (CMC), primeiramente abordamos o trabalho de Alias, Barros e Brasil, em [9]. Eles estenderam os resultados de Wu e Perdomo para hipersuperfícies CMC, obtendo uma caracterização para o toro de Clifford. Provaram que se φ é uma hipersuperfície n-dimensional com curvatura média constante H e diferente de zero na esfera $\mathbb{S}^{n+1}(1)$, então $\lambda_1^J \leqslant -n(1+H^2)$ e φ é totalmente umbílica, ou

$$\lambda_1^J \leqslant -n(1+H^2) + \frac{n(n-2)|H|}{\sqrt{n(n-1)}} max\sqrt{S - nH^2},$$

e a igualdade existe se, e somente se, φ é o toro $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{1-r^2})$ com $r^2 > \frac{1}{n}$ para $n \geqslant 2$. De acordo com este teorema, o limite superior para o primeiro autovalor do operador de Jacobi depende da curvatura e da dimensão. Por outro lado, para $n > 3$ o termo $max\sqrt{S - nH^2}$ não se anula e consequentemente a estimativa passa a depender da curvatura, da dimensão e da imersão. Diante dessa estimativa, Cheng e Chen em [4] propuseram resolver o seguinte problema: para $n > 2$, encontrar uma estimativa ótima para o primeiro autovalor dependendo apenas da curvatura H e da dimensão n. Aliás esse é o resultado principal desse trabalho que está detalhado no texto.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Neste capítulo introduziremos alguns fatos e definições básicas de Geometria Riemanniana, bem como as notações e o significado de algumas expressões e elementos que serão utilizados ao longo do texto. Aqui fica implícito que o leitor já tenha noções de definição e propriedades de variedades diferenciáveis (veja [7]).

1.1 Tensor Curvatura

Nesta seção preliminar, espera-se que o leitor já tenha familiaridade com os conceitos básicos de Geometria Riemanniana, conexões, métrica e variedades. Denotaremos por M^n uma variedade n-dimensional e T_pM o espaço tangente em $p \in M$. ∇ denotará a conexão Riemanniana, que será compatível com a métrica $\langle , \rangle$. O conjunto dos campos de vetores diferenciáveis será denotado por $\mathfrak{X}$.

Definição 1. *A curvatura de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par de campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dada por*

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M.

Observação. Se $M = \mathbb{R}^n$, então a curvatura $R(X,Y)Z = 0$ para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. De fato, para mostrar isso, denotemos por $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ as componentes do campo Z nas coordenadas naturais do $\mathbb{R}^n$. Assim, obtemos as seguintes iguadades.

$$\nabla_Y \nabla_X Z = (X_{z_1}, X_{z_2}, \ldots, X_{z_n}) = \sum_j \nabla_X (YZ_j)\partial_j = \sum_j XYZ_j \partial_j,$$

$$\nabla_X \nabla_Y Z = (Y_{z_1}, Y_{z_2}, \dots, Y_{z_n}) = \sum_j XYZ_j \partial_j,$$

$$\nabla_{[X,Y]} Z = ([X,Y]_{z_1}, [X,Y]_{z_2}, \dots, [X,Y]_{z_n}) = \sum_k [X,Y]\, Z_k = \sum_k (XYZ_k - YXZ_k)\partial_k.$$

Logo,

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z \\ &= \sum_j XYZ_j \partial_j - \sum_j XYZ_j \partial_j + \sum_j XYZ_k \partial_k - \sum_k XYZ_k \partial_k \\ &= 0. \end{aligned}$$

Destacamos ainda que na Definição (1), se considerar-mos um sistema de coordenadas $\{x_i\}$ em torno de $p \in M$, obtemos

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_k} = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\right)\frac{\partial}{\partial x_k},$$

uma vez que $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$. A próxima proposição somatiza algumas propriedades interessantes da curvatura de Riemann.

Proposição 1. *A curvatura* R *de uma variedade Riemanniana satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) R *é bilinear em* $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$, *isto é,*

$$R\left(fX_1 + gX_2, Y_1\right) = fR\left(X_1, Y_1\right) + gR\left(X_2, Y_1\right),$$

e

$$R\left(X_1, fY_1 + gY_2\right) = fR\left(X_1, Y_1\right) + gR\left(X_1, X_2\right),$$

com $f, g \in F(M)$ *e* $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$.

(ii) *Para todo par* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, *o operador curvatura* $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ *é linear, isto é:*

$$R(X,Y)(Z+W) = R(X,Y)Z + R(X,Y)W,$$

e

$$R(X,Y)fZ = fR(X,Y)Z,$$

com $f \in F(M)$ *e* $Z, W \in \mathfrak{X}(M)$.

(iii) *Vale a Primeira Identidade de Bianchi*

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0.$$

Demonstração. Ora, R é multilinear sobre $\mathbb{R}$. De fato, para $\mathsf{f} \in \mathsf{F}(\mathsf{M})$, temos

$$\begin{aligned}
\mathsf{R}(\mathsf{X}, \mathsf{fY})\mathsf{Z} &= \nabla_{\mathsf{X}}\nabla_{\mathsf{fY}}\mathsf{Z} - \nabla_{\mathsf{fY}}\nabla_{\mathsf{X}}\mathsf{Z} - \nabla_{[\mathsf{X},\mathsf{fY}]}\mathsf{Z} \\
&= \nabla_{\mathsf{X}}\left(\mathsf{f}\nabla_{\mathsf{Y}}\mathsf{Z}\right) - \mathsf{f}\nabla_{\mathsf{Y}}\nabla_{\mathsf{X}}\mathsf{Z} - \nabla_{[\mathsf{X},\mathsf{Y}]+(\mathsf{Xf})\mathsf{Y}}\mathsf{Z} \\
&= (\mathsf{Xf})\,\nabla_{\mathsf{Y}}\mathsf{Z} + \mathsf{f}\nabla_{\mathsf{X}}\nabla_{\mathsf{Y}}\mathsf{Z} - \mathsf{f}\nabla_{\mathsf{Y}}\nabla_{\mathsf{X}}\mathsf{Z} - \mathsf{f}\nabla_{[\mathsf{X},\mathsf{Y}]}\mathsf{Z} - (\mathsf{Xf})\,\nabla_{\mathsf{Y}}\mathsf{Z} \\
&= \mathsf{fR}(\mathsf{X},\mathsf{Y})\mathsf{Z}.
\end{aligned}$$

Pela definição $\mathsf{R}(\mathsf{X},\mathsf{Y})\mathsf{Z} = -\mathsf{R}(\mathsf{Y},\mathsf{X})\mathsf{Z}$, logo, R é multilinear em X. Já na segunda parte, temos

$$\begin{aligned}
\mathsf{R}(\mathsf{X},\mathsf{Y})\mathsf{fZ} &= \nabla_{\mathsf{X}}\nabla_{\mathsf{Y}}\mathsf{fZ} - \nabla_{\mathsf{Y}}\nabla_{\mathsf{X}}\mathsf{fZ} - \nabla_{[\mathsf{X},\mathsf{Y}]}\mathsf{fZ} \\
&= \nabla_{\mathsf{X}}\left(\mathsf{f}\nabla_{\mathsf{Y}}\mathsf{Z} + (\mathsf{Yf})\mathsf{Z}\right) - \nabla_{\mathsf{Y}}(\mathsf{f}\nabla_{\mathsf{X}}\mathsf{Z} + (\mathsf{Xf})\mathsf{Z}) - [\mathsf{X},\mathsf{Y}]\,\mathsf{fZ} - \mathsf{f}\nabla\,[\mathsf{X},\mathsf{Y}]\,\mathsf{Z} \\
&= \mathsf{f}\nabla_{\mathsf{X}}\nabla_{\mathsf{Y}}\mathsf{Z} + (\mathsf{Xf})\nabla_{\mathsf{Y}}\mathsf{Z} + (\mathsf{Yf})\nabla_{\mathsf{X}}\mathsf{Z} + \mathsf{X}(\mathsf{Yf})\mathsf{Z} \\
&\quad -(\mathsf{Yf})\nabla_{\mathsf{X}}\mathsf{Z} - (\mathsf{Xf})\nabla_{\mathsf{Y}}\mathsf{Z} - \mathsf{Y}(\mathsf{Xf})\mathsf{Z} - [\mathsf{X},\mathsf{Y}]\,\mathsf{fZ} - \mathsf{f}\nabla_{[\mathsf{X},\mathsf{Y}]}\mathsf{Z} \\
&= \mathsf{fR}(\mathsf{X},\mathsf{Y})\mathsf{Z}.
\end{aligned}$$

Para provar a identidade de Bianchi, usaremos a simetria da conexão Riemanniana. Observe que, membro a membro, temos o seguinte:

$$\mathsf{R}(\mathsf{X},\mathsf{Y})\mathsf{Z} = \nabla_{\mathsf{Y}}\nabla_{\mathsf{X}}\mathsf{Z} - \nabla_{\mathsf{X}}\nabla_{\mathsf{Y}}\mathsf{Z} + \nabla_{[\mathsf{X},\mathsf{Y}]}\mathsf{Z},$$

$$\mathsf{R}(\mathsf{Y},\mathsf{Z})\mathsf{X} = \nabla_{\mathsf{Z}}\nabla_{\mathsf{Y}}\mathsf{X} - \nabla_{\mathsf{Y}}\nabla_{\mathsf{Z}}\mathsf{X} + \nabla_{[\mathsf{Y},\mathsf{Z}]}\mathsf{X},$$

$$\mathsf{R}(\mathsf{Z},\mathsf{X})\mathsf{Y} = \nabla_{\mathsf{X}}\nabla_{\mathsf{Z}}\mathsf{Y} - \nabla_{\mathsf{Z}}\nabla_{\mathsf{X}}\mathsf{Y} + \nabla_{[\mathsf{Z},\mathsf{X}]}\mathsf{Y}.$$

Somando as três expressões acima, segue que

$$\mathsf{R}(\mathsf{X},\mathsf{Y})\mathsf{Z} + \mathsf{R}(\mathsf{Y},\mathsf{Z})\mathsf{X} + \mathsf{R}(\mathsf{Z},\mathsf{X})\mathsf{Y} = 0.$$

□

Agora definimos também *tensor* em uma variedade Riemanniana. A noção de curvcatura é um caso particular da noção de tensor que é um objeto de grande utilidade na Geometria Diferencial. Apresentamos aqui a definição clássica de tensores em um avariedade Riemanniana. A ideia de tensor é uma generalização natural de campos de vetores,e o ponto importante é que, analogamente aos campos de vetores, também podemos ter a derivada covariante de um tensor.

Definição 2. *Um tensor* T *de ordem* r *em uma variedade Riemanniana é uma aplicação multilinear sobre o módulo dos campos de vetores*

$$T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}(M) \to F(M).$$

Isso significa que, dados campos $Y_1, Y_2, \ldots Y_r, \in \mathfrak{X}(M)$*, temos que* $T(Y_1, Y_2, \ldots, Y_r)$ *é uma função diferenciável em* M*, e que* T *é linear em cada entrada, isto é,*

$$T(Y_1, \ldots, fX + gY, \ldots, Y_r) = fT(Y_1, \ldots, X, \ldots, Y_r) + gT(Y_1, \ldots, Y, \ldots, Y_r)$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M), f, g \in F(M)$.

Fixado um ponto $p \in M$, seja U uma vizinhança de p em M de forma que seja possível definir campos $E_1, \ldots, E_n \in \mathfrak{X}(M^n)$, de modo que em cada $q \in U$, os vetores $E_i(q), i = 1, 2, \ldots, n$ formam uma base de T_qM. Nesse caso, diremos que $\{E_i\}$ é um *referencial móvel* em U. Com isso, dizemos que um tensor T é um objeto pontual. Expressas no referencial móvel $\{E_i\}$, as restrições a U dos campos $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$ são dadas por

$$Y_1 = \sum_{i_1} y_{i_1} E_{i_1}, Y_2 = \sum_{1_2} y_{1_2} E_{i_2}, \ldots, Y_r = \sum_{i_r} y_{i_r} E_{i_r},$$

com $i_1, \ldots i_r = 1, 2, \ldots, n$. Como T é linear, temos

$$T(Y_1, \ldots\ldots, Y_r) = \sum_{i_1 \ldots i_r} y_{i_1} \ldots y_{i_r} T(E_{i_1}, \ldots, E_{i_r}).$$

O *tensor curvatura* é a aplicação

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to F(M),$$

definida por

$$R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle,$$

para todos $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$. As componentes de R em um referencial $\{e_i\}$ são representadas por

$$R(X_i, X_j, X_k, X_l) = R(e_i, e_j, e_k, e_l) = R_{ijkl}.$$

O tensor curvatura apresenta as seguintes simetrias

Proposição 2. (i) $R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) = 0$,

(i) $R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W)$,

(i) $R(X,Y,Z,W) = -R(X,Y,W,Z)$,

(i) $R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y)$.

É conveniente escrever esses elementos em um sistema de coordenadas (U,φ) em torno de um ponto do ponto $p \in M$. Fazendo

$$\langle R(X_i,X_j)X_k,X_s\rangle = \sum_l R^l_{i,j,k} g_{ls} = R_{ijks}$$

podemos escrever as identidades da proposiçao anterior da seguinte forma

$$R_{ijks} + R_{jkis} + R_{kijs} = 0,$$

$$R_{ijks} = -R_{jiks},$$

$$R_{ijks} = -R_{ijsk},$$

$$R_{ijks} = R_{ksij}.$$

Agora vamos estender a noção de derivada covariente em tensores.

Definição 3. *Seja* T *um tensor de ordem* r. *A diferencial covariante* ∇T *de* T *é um tensor de ordem* $(r+1)$ *dada por*

$$\nabla T(Y_1,\ldots,Y_r,Z) = Z(T(Y_1,\ldots,Y_r)) - T(\nabla_Z Y_1,\ldots,Y_r) - \cdots - T(Y_1,\ldots,Y_{r-1},\nabla_Z Y_r).$$

Assim, para cada $Z \in \mathfrak{X}(M)$, definimos a *derivada covariante* $\nabla_Z T$ *de T em relação* a Z a ser um tensor de ordem r dado por

$$\nabla_Z T(Y_1,\ldots,Y_r) = \nabla T(Y_1,\ldots,Y_r,Z).$$

Convenientemente ainda temos o *tensor de Ricci*, que é definido por

$$Ric(X,Y) = tr(Z \to R(X,Z)Y).$$

Dado um referencial ortonormal local $\{e_i\}$, temos

$$Ric(X,Y) = \sum \langle R(e_i,X)Y,e_i\rangle.$$

O número $Ric(X,Y)$ é chamado *curvatura de Ricci* na direção de X. Se $X = e_i$ e $Y = e_j$, temos que as componentes do tensor de Ricci no referencial $\{e_1,\ldots,e_n\}$ são dadas por

$$R_{ij} = \sum_k \langle R(e_k,e_i)e_j,e_k\rangle.$$

Pelas simetrias do tensor curvatura, temos que o tensor de Ricci é simétrico com respeito a X, Y. Sendo $\{e_i\}$ uma base ortonormal de T_pM, definimos ainda a *curvatura escalar* de M em p dada por

$$R(p) = \sum_i Ric(e_i, e_i) = \sum_{i,j} \langle R(e_j, e_i)e_i, e_j \rangle,$$

ou seja, o traço do tensor de Ricci é igual a curvatura escalar. A próxima proposição permite definir um outro objeto geométrico denominado por *curvatura seccional.*

Proposição 3. *Seja* $\sigma \subset T_pM$ *um subespaço bidimensional e sejam* $X, Y \in \sigma$ *dois vetores linearmente independentes. Então*

$$K(X, Y) = \frac{R(X, Y, X, Y)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2}$$

não depende da escolha dos vetores $X, Y \in \sigma$.

Com isso, o número $K(X, Y)$ está intimamente associado ao plano σ de T_pM, e assim, definimos

$$K(p, \sigma) = K(X, Y)$$

como sendo a *curvatura seccional* de M em p ao longo de σ. Diz-se que uma variedade Riemanniana M possui curvatura constante se $K_p(\sigma)$, onde $\sigma \subset T_pM$, não depende da escolha do ponto p e do subespaço bi-dimensional σ. Um exemplo clássico desse tipo de variedade é a esfera $\mathbb{S}^{n+1}(1)$.

1.2 O operador Laplaciano

Nesta seção vamos revisitar algumas defições e notações importantes que precisaremos no teorema principal. Para um aprofundamento veja [5] e [3].

Definição 4. *Seja* $f : M \to \mathbb{R}$ *uma função suave ou diferenciável. O gradiente de* f *é o único campo vetorial suave* ∇f *definido sobre* M *que satisfaz a seguinte condição:*

$$X(f) = \langle \nabla f, X \rangle,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Segue da defnição que se f e g são funções suaves, então

(i) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$,

(ii) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$.

Assim como para o espaço Euclidiano, temos as seguintes proposições válidas em variedades Riemannianas. Por completude, faremos a demonstração das mesmas.

Proposição 4. *Seja* $f : M \to \mathbb{R}$ *uma função suave. Se* p *é um ponto de máximo ou mínimo local de* f*, então* $\nabla f(p) = 0$.

Demonstração. Dado $v \in T_pM$, seja $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ uma curva suave com $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Note que 0 é ponto crítico da função $f \circ \gamma$. Assim,

$$(\frac{d}{dt})f \circ \gamma \,|_{t=t_0} = (X(f))(p) = \langle \nabla f(p), v \rangle = 0,$$

onde X é a extensão de γ. Como a relação acima é válida para todo $v \in T_pM$, segue que $\nabla f(p) = 0$. □

Proposição 5. *Seja* M *uma variedade Riemanniana conexa e* $f : M \to \mathbb{R}$ *uma função suave. Se* $\nabla f = 0$*, então* f *é constante em* M.

Demonstração. Fixado $p \in M$, seja $C = \{q \in M; f(q) = f(p)\}$. Como f é suave, segue que f é contínua e, assim, o conjunto C é fechado em M. Por outro lado, C também é aberto de M. De fato, dado $q \in M$, seja U_q uma vizinhança coordenada conexa de q. Assim, dado $p' \in U$ existe uma curva suave $\gamma : [0,1] \to U$ com $\gamma(0) = q$ e $\gamma(1) = p'$. Agora, note que $\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = \langle \nabla f, \gamma'(t) \rangle_{\gamma(t)} = 0$. Assim a função $f \circ \gamma$ é constante e daí

$$f(p) = f \circ \gamma(0) = f(q) = f \circ \gamma(1) = f(q').$$

Donde $U_q \subset C$. Segue que C é aberto. Como M é conexa e $C \neq \varnothing$, segue que $M = C$, logo f é constante. □

A próxima definição nos dá a noção de divergência em variedades.

Definição 5. *Seja* $X \in \mathfrak{X}(M)$. *A divergência de* X *é a função suave* $\mathrm{div}X : M \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$\mathrm{div}X(p) = \mathrm{tr}\{v \to \nabla_v X\},$$

onde $v \in T_pM$.

Segue da definição que se, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e f é uma função suave então:

(i) $\operatorname{div}(X+Y) = \operatorname{div}X + \operatorname{div}Y$,

(ii) $\operatorname{div}(fX) = f\operatorname{div}X + \langle \nabla f, X\rangle$.

Podemos ainda obter um teorema de grande importância em Geometria Diferencial que é o seguinte.

Teorema 1. *(Teorema da divergência) Seja* M *uma variedade Riemanniana compacta com bordo e* $X \in \mathfrak{X}(M)$. *Então*

$$\int_M \operatorname{div}X dM = \int_{\partial M} \langle X, \nu\rangle dS,$$

onde ν *é um campo unitário normal a* ∂M *apontando para fora de* M.

Observe que caso M não tenha bordo, então

$$\int_M \operatorname{div}X dM = 0.$$

No que segue apresentaremos o operador que será muito importante neste trabalho e que através dele definimos e faremos o estudo do operador de estabilidade de uma imersão isométrica.

Definição 6. *Seja* $f : M \to \mathbb{R}$ *uma função suave. O Laplaciano de* f *é a função suave* $\Delta f : M \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\Delta f = \operatorname{div}\nabla f.$$

Em termos de hipersuperfícies, o estudo primeiro autovalor do Laplaciano nos dá muita informação geométrica da mesma. Falaremos um pouco mais nisso mais adiante quando introduzirmos o operador de estabilidade. A partir das propriedades do divergente e do gradiente temos que se $f, g : M \to \mathbb{R}$ são funções suaves, então

(i) $\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g$,

(ii) $\Delta(f \cdot g) = f\Delta f + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle$.

Em particular $\frac{1}{2}\Delta(f^2) = f\Delta f + \mid \nabla f \mid^2$. Novamente como no espaço Euclidiano, podemos definir o *hessiano* de uma função

Definição 7. *Seja* $f : M \to \mathbb{R}$ *uma função suave. O hessiano de* f *no ponto* p *é o operador linear* $\operatorname{Hess}f_p : T_pM \to T_pM$ *definido por*

$$\operatorname{Hess}f_p(\nu) = \nabla_\nu \nabla f.$$

Segue das propriedades de conexão Riemanniana que, se X é uma extensão local de ν então $\mathrm{Hess}f_p(X) = \nabla_X \nabla f(p)$. A seguinte proposição relaciona o Laplaciano e o Hessiano de uma função.

Proposição 6. *Se* $f : M \to \mathbb{R}$ *é uma função suave, então para todo* $p \in M$ *vale a igualdade*

$$\Delta f(p) = \mathrm{tr}(\mathrm{Hess}f_p).$$

Demonstração. Seja $\nu_1, \ldots, \nu_n$ uma vase ortonormal de T_pM, então temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\mathrm{Hess}f_p) &= \langle (\mathrm{Hess}f)_p(\nu_i), \nu_i \rangle \\
&= \langle \nabla_{\nu_i} \nabla f, \nu_i \rangle_p \\
&= \mathrm{div} \nabla f(p) \\
&= \Delta f(p).
\end{aligned}$$

□

Com isto finalizamos esta seção e para maiores detalhes sugerimos ao leitor ver [3].

Capítulo 2

Hipersuperfícies de curvatura média constante

Neste Capítulo, baseados em [5], trataremos de imersões isométricas de variedades Riemannianas M^n em variedades Riemannianas $\overline{M}^{n+k}$. A relação entre a métrica Riemanniana de $\overline{M}^{n+k}$ e a métrica induzida em M^n se exprime por meio da equação de Gauss que exprime a diferença entre as curvaturas por meio de expressões construídas a partir da segunda forma fundamental. Utilizando a fórmula de Gauss, daremos uma interpretação geométrica da curvatura seccional. Trataremos ainda das equações de Codazzi e a identidade de Ricci que, junto com a equação de Gauss constituem as equações fundamentais da teoria local das imersões isométricas.

2.1 Imersões Mínimas e CMC

Sejam $\left(\overline{M}^{k=m+n}, \langle , \rangle, \overline{\nabla}\right)$, uma variedade Riemanniana, M^n uma variedade suave n-dimensional.

Definição 8. *Sejam* M^n *e* $\overline{M}^{k=m+n}$ *variedades Riemannianas. Uma aplicação suave* $f : M \to \overline{M}$ *é uma imersão se* $df_p : T_pM \to T_{f(p)}\overline{M}$ *é injetiva para todo* $p \in M$.

Dada uma imersão f como acima, a métrica Riemanniana de $\overline{M}$ induz de maneira natural uma métrica Riemanniana em M através da definição

$$\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)},$$

para todo $p \in M$ e todos $u, v \in T_pM$. Quando M está munida desta métrica, a aplicação f é dita uma *imersão isométrica*. Seja $f : M^n \to \overline{M}^{k=m+n}$ uma imersão. Então para cada $p \in M$ existe uma vizinhana $U \subset M$ tal que $f(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade de $\overline{M}$. Portanto existem uma vizinhança $\overline{U}$ de $f(p)$ e um difeomorfismo $\Phi : \overline{U} \to V \subset \mathbb{R}^k$ em um aberto $V \in \mathbb{R}^k$, tais que Φ aplica difeomorficamente $f(U) \cap \overline{U}$ em um aberto do subespaço $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^k$. Identificaremos U com $f(U)$ e cada vetor $v \in T_qM$, $q \in U$ com o vetor $df_q(v) \in T_{f(q)}\overline{M}$. Assim, para cada $p \in M$ o produto interno em $T_p\overline{M}$ decompõe $T_p\overline{M}$ na soma direta

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp},$$

onde $(T_pM)^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. Se $v \in T_p\overline{M}$, $p \in M$, podemos escrever

$$v = v^{\top} + v^{\perp},$$

onde $v^{\top} \in T_pM, v^{\perp} \in (T_pM)^{\perp}$. Denominamos por $v^{\top}$ a *componente tangencial* de v e $v^{\perp}$ a *componente normal* de v. Se X e Y são campos locais de vetores em M e $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ são extensões locais a $\overline{M}$, definimos $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ por

$$\nabla_X Y = \left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}\right)^{\top}.$$

Verifica-se que esta é a conexão Riemanniana relativa à métrica induzida de M por f.

Definição 9. *Sejam* $f : M \to \overline{M}$ *uma imersão isométrica,* $U \subset M$ *uma vizinhança de* $p \in M$ *tal que* $f(U) \subset \overline{M}$ *é uma subvariedade de* $\overline{M}$ *e* $N \in \mathfrak{X}(\overline{U})$ *um campo local em* $\overline{M}$*, com* $\overline{U} \subset \overline{M}$ *aberto e* $f(U) \subset \overline{U}$*. O campo* N *diz-se normal a* M *se* $N(p) =\in (T_pM)^{\perp}$ *para todo* $p \in U$.

Assim, segue da definição acima, que

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

é um campo local em $\overline{M}$ normal a M. É possível provar que $B(X, Y)$ está bem definida, ou seja, $B(X, Y)$ não depende das extensões $\overline{X}$ e $\overline{Y}$. Indicaremos por $\mathfrak{X}(U)^{\perp}$ o espaço dos campos de vetores diferenciáveis em U normais a U.

Proposição 7. *Se* $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$*, a aplicação* $B : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to \mathfrak{X}(U)$ *dada por*

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

é bilinear e simétrica.

Para uma prova veja [5].

De acordo com [5], o fato principal relacionado a esta proposição é que exprimindo B em um sistema de coordenadas, verifica-se que o valor de $B(X,Y)(p)$ depende apenas de $X(p)$ e $Y(p)$. Sejam $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$ e a aplicação $H_\eta : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(x,y) = \langle B(x,y), \eta \rangle \; x, y \in T_pM.$$

Pela proposição anterior, a aplicação acima é uma forma bilinear e simétrica.

Definição 10. *A forma quadrática* II_η *definida em* T_pM *por*

$$II_\eta(x) = H_\eta(x,x) = \langle B(x,x), \eta \rangle$$

é denominada de segunda forma fundamental de M *em* p *segundo o vetor normal* η.

Às vezes se utiliza também a expressão segunda forma fundamental para designar a aplicação B. Associada à aplicação II_η temos a aplicação linear auto adjunta $A_\eta : T_pM \to T_pM$ definida por

$$\langle A_\eta(x), y \rangle = H_\eta(x,y) = \langle B(x,y), \eta \rangle.$$

Proposição 8. *Sejam* $p \in M, x \in T_pM$ *e* $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. *Seja* N *uma extensão local de* η *normal a* M. *Então*

$$A_\eta(x) = -\left(\overline{\nabla}_x N\right)^{\top}.$$

Demonstração. Sejam $y \in T_pM$ e X, Y extensões locais de x, y respectivamente. Então $\langle N, Y \rangle = 0$, donde concluímos que em M

$$\begin{aligned}
\langle A_\eta(x), y \rangle &= \langle B(x,y)(p), N \rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, N \rangle(p) \\
&= \langle \overline{\nabla}_X Y, N \rangle(p) \\
&= -\langle Y, \overline{\nabla}_X N \rangle(p) \\
&= \langle -\overline{\nabla}_x N, y \rangle \\
&= \langle -(\overline{\nabla}_x N)^{\top}, y \rangle,
\end{aligned}$$

pois y é tangente, para todo $y \in T_pM$. Portanto, $A_\eta(x) = -\left(\overline{\nabla}_x N\right)^{\top}$, uma vez que x e y são arbitrários. $\square$

Agora consideremos o caso particular em que a codimensão da imersão é 1, ou seja, $f : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ é uma imersão isométrica. Nesse caso, $f(M) \subset \overline{M}$ é dita uma *hipersuperfície* imersa. Aqui uma hipersuperfície será denotada por φ. Sejam φ uma hipersuperfície, $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$ com $|\eta| = 1$. Como $A_\eta : T_pM \to T_pM$ é auto-adjunta, existe uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de T_pM formada por autovetores $e_1, e_2, \cdots, e_n$ com autovalores associados $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, isto é, $A_\eta(e_i) = \lambda_i e_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Neste caso, os e_i serão chamados as direções principais e os λ_i de curvaturas principais da imersão. Supondo que M e $\overline{M}$ são orientáveis e estão orientadas, então o vetor η fica univocamente determinado. Se escolhermos uma base $\{e_1, \dots, e_n\}$ na orientação de M, então $\{e_1, \dots, e_n, \eta\}$ é uma base da orientação de $\overline{M}$. A aplicação A_η é chamada de *Operador de Weingarten* associado à segunda forma fundamental. Além disso, vale a igualdade

$$A_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^{\top} = -\overline{\nabla}_x N.$$

Se $f : M \to \overline{M}^{n+1}$ é uma imersão isométrica, um referencial ortonormal $\{\overline{e_1}, \dots, \overline{e}_{n+1}\}$ em um aberto $\overline{U} \subset \overline{M}$ é dito adaptado à imersão se as restrições de $\overline{e_1}, \dots, \overline{e}_n$ a $U = \overline{U} \cap M$ formarem um referencial em U. Sendo II_η a segunda forma fundamental de f e $e_1, \dots, e_n.\eta$ a restrição de um referencial adaptado a um aberto $U \subset M$, considere o campo

$$\overrightarrow{H} = \frac{1}{n} \sum_i H_\eta(e_i, e_i)\eta \in \mathfrak{X}(U)^{\perp},$$

e a igualdade

$$H_\eta(e_i, e_i) = \langle B(e_i, e_i), \eta \rangle \eta.$$

Assim, temos

$$\overrightarrow{H} = \frac{1}{n} \sum_j \operatorname{tr}(A_\eta)\eta.$$

Assim, obtemos um campo $H \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$, sendo seu valor em $p \in M$ conhecido como o *vetor curvatura média* de f em p. As duas definições a seguir serão de extrema importância neste trabalho, uma vez que o teorema principal trata de hipesuperfícies de curvatura média constante e não totalmente umbílicas.

Definição 11. *Uma imersão isométrica* $f : M \to \overline{M}^{n+k}$ *é dita mínima se* $H \equiv 0$*, e é dita CMC (curvatura média constante) se* H *for uma constante, não necessariamente nula.*

Exemplo: A esfera $\mathbb{S}^n(r), r > 0$.

Definição 12. *Uma imersão isométrica* $f : M \to \overline{M}^{n+1}$ *é umbílica em* $p \in M$ *se, para* $\eta \in T_pM^{\top}\backslash\{0\}$ *existir um número real* λ *tal que*

$$A_\eta = \lambda Id_{T_pM}.$$

A imersão f *é totalmente umbílica se é umbílica para todo* p *em* M.

Exemplo: A inclusão $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ é uma imersão umbílica.

2.2 A primeira e a segunda variações da área

Nesta seção vamos lidar com equações básicas de imersões. Iremos definir o que seria uma variação de uma imersão e alguns conceitos básicos a respeito de tais variações. Vamos definir os funcionais área e volume da imersão e calcular as fórmulas da primeira variação dos mesmos. Para uma leitura aprofundada veja [3].

Definição 13. *Seja* $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ *uma hipersuperfície. Uma variação de* φ *é uma aplicaçao diferenciável*

$$F : M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \overline{M},$$

satisfazendo as seguintes condiçeõs:

(i) *A aplicação* $F(\cdot, t) : M \to \overline{M}$ *é uma imersão para todo* $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ *e* $F(\cdot, 0) = \varphi$*;*

(ii) $F(\cdot, t)_{|\partial M} = \varphi_{|\partial M}$ *para todo* $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

O campo de vetores $W = dF\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\Big|_{t=0}$ em M é chamado de *campo variacional* associado à variação F. O *funcional área* $A : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ associado à variação F é dado por

$$A(t) = \int_M dM_t,$$

em que dM_t denota o elemento de volume da métrica induzuda em M por F_t. Podemos notar que se a orientação de M coincide com a orientação induzida por $\overline{M}$ então $dM_0 = dM$ e $A(0) = A$. O seguinte teorema é conhecido na literatura como a primeira variação da área. Por completude faremos a prova.

Teorema 2. *Seja* $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ *uma hipersuperfície com vetor curvatura média* H. *Se* $F : M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \overline{M}^{n+1}$ *é uma variação de* φ*, então*

$$\left.\frac{dA(t)}{dt}\right|_{t=0} = -\int_M nHf dM, \tag{2.1}$$

em que $f = \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{t=0}, N \right\rangle$ *e que num ponto* p *tem-se* $f(t,p) = \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,p), N(t,p) \right\rangle$.

Demonstração. Seja $p \in M$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial móvel em uma vizinhança de $p \in M$ geodésico em p, e $e_i(t) = dF_t(e_i)$ com $i = 1, 2, \ldots, n$. A métrica induzida por $F_t = \varphi(\cdot, t)$ em que $\overline{M}^{n+1}$ é dada, nesse sistema de coordenadas, por $g_{ij}(t) = \langle e_i(t), e_j(t) \rangle$. Definimos o elemento $V(t) = \sqrt{\det(g_{ij}(t))\det(g^{ij}(0))}$, donde g^{ij} é a matriz inversa de g_{ij}. Então temos

$$A(t) = \int_M dM_t, \tag{2.2}$$

onde dM_t é a forma volume em M induzida pela imersão f_t. Considerando uma base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $\chi(M)$ em uma vizinhança de um ponto $p \in M$, $\{du_1, \ldots, du_n\}$ sua respectiva base dual e $g(t)$ a métrica de M induzida por F_t cuja matriz é $(g_{ij}(t)) = (\langle dF_t(e_i), dF_t(e_j) \rangle)$ temos que

$$dM_t = \sqrt{\det(g_{ij}(t))}du_1 \wedge \ldots \wedge du_n.$$

Derivando ambos os membros em (2.2), temos

$$\frac{dA(t)}{dt} = \int_M \frac{d}{dt}\sqrt{\det(g_{ij}(t))}du_1 \wedge \ldots \wedge du_n. \tag{2.3}$$

Observe que sendo $\sqrt{\det(g_{ij}(t))}\Big|_{t=0} = 1$, e que

$$\begin{aligned}
\det(A(t)) &= \sum_k \frac{d}{dt}\det(A_1(0); \ldots A_k^{'}(0); \ldots\ldots; A_n(0)) \\
&= \sum_k a_{kk}^{'}(0) \\
&= tr(A^{'}(0) = tr(g_{ij}^{'}(0)),
\end{aligned}$$

onde

$$A_i(t) = \begin{bmatrix} a_{1i}(t) \\ a_{2i}(t) \\ \vdots \\ a_{ki}(t) \\ \vdots \\ a_{ni}(t) \end{bmatrix},$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\sqrt{\det(g_{ij}(t))}\Big|_{t=0} &= \frac{1}{2}\sqrt{\det(g_{ij}(t))}\frac{d}{dt}\det(g_{ij}(t)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\det(g_{ij}(t))\Big|_{t=0} \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{tr}(g_{ij}^{'}(t))\Big|_{t=0} \\
&= \frac{1}{2}\sum_k \frac{d}{dt}g_{kk}(t)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{1}{2}\sum_k \frac{d}{dt}\langle e_k, e_k\rangle\Big|_{t=0}.
\end{aligned}$$

Portanto, usando a simetria e a compatibilidade da métrica , obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\sqrt{\det(g_{ij}(t))}\Big|_{t=0} &= \frac{1}{2}\sum_k \left[\left\langle \frac{De_k}{dt}, e_k\right\rangle + \left\langle e_k, \frac{De_k}{dt}\right\rangle\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_k 2\langle \nabla_E e_k, e_k\rangle \\
&= \sum_k \langle \nabla_{e_k} E, e_k\rangle \\
&= \sum_k -\langle E, \nabla_{e_k} e_k\rangle + e_k\langle E, e_k\rangle \\
&= -\sum_k \langle E, \sum_k \nabla_{e_k} e_k\rangle + \sum_k e_k\langle E, e_k\rangle,
\end{aligned}$$

onde $E = \frac{dF}{dt}$. Uma vez que podemos escrever $E = \left(\frac{dF}{dt}\right)^N + \left(\frac{dF}{dt}\right)^\top$, obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_k e_k\langle E, e_k\rangle &= \sum_k e_k \left\langle \left(\frac{dF}{dt}\right)^N + \left(\frac{dF}{dt}\right)^\top, e_k\right\rangle \\
&= \sum_k e_k \left\langle \left(\frac{dF}{dt}\right)^N, e_k\right\rangle + \sum_k e_k \left\langle \left(\frac{dF}{dt}\right)^\top, e_k\right\rangle \\
&= \mathrm{div}\left(\left(\frac{dF}{dt}\right)^\top\right).
\end{aligned}$$

Agora usando que em p (é referencial geodésico)

$$(\nabla_{e_k} e_k)(p) = (\nabla_{e_k} e_k)^N(p) + (\nabla_{e_k} e_k)^\top(p) = (\nabla_{e_k} e_k)^N(p) = \langle \nabla_{e_k} e_k, N\rangle N,$$

segue que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\sqrt{\det(g_{ij}(t))}\Big|_{t=0} &= -\left\langle \frac{dF}{dt}, \langle \nabla_{e_k} e_k, N\rangle N\right\rangle + \mathrm{div}\left(\left(\frac{dF}{dt}\right)^\top\right) \\
&= \left\langle \frac{dF}{dt}, N\right\rangle \langle \nabla_{e_k} e_k, N\rangle + \mathrm{div}\left(\left(\frac{dF}{dt}\right)^\top\right).
\end{aligned}$$

Note ainda que

$$\langle A(e_i), e_k\rangle = \langle \sum_j a_{ij} e_j, e_k\rangle = \sum_j a_{ij}\cdot g_{jk}.$$

Isolando o termo a_{ij}, temos

$$a_{ij} = \sum_k \langle A(e_i), e_k\rangle \cdot g^{kj}.$$

Usando as duas igualdades acima, temos

$$\begin{aligned} nH = tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} &= \sum_{ik} \langle A(e_i), e_k\rangle \cdot g^{ki} \\ &= \sum_{ik} \langle -\nabla_{e_i} N, e_k\rangle g^{ki} \\ &= \sum_{ik} \langle \nabla_{e_i} e_k, N\rangle g^{ki}. \end{aligned}$$

Na expressão acima, temos $g^{ki} = \delta_{ij} = 1$ e $A(e_i) = -\nabla_{e_i} N$ é o operador de Weingarten (veja Proposição 8). Assim, segue que

$$\frac{d}{dt}\sqrt{\det(g_{ij}(t))} = -fnH + div\left(\left(\frac{dF}{dt}\right)^{\top}\right).$$

Temos

$$\int_M div\left(\left(\frac{dF}{dt}\right)^{\top}\right) = 0,$$

pois $\frac{dF}{dt} = 0$ em ∂M. Voltando à igualdade inicial

$$\begin{aligned} \frac{dA(t)}{dt} &= \int_M \frac{d}{dt}\sqrt{\det(g_{ij}(t))} du_1 \wedge \ldots \wedge du_n \\ &= \int_M -nHf dM + \int_M div\left(\left(\frac{dF}{dt}\right)^{\top}\right) \\ &= -\int_M nHf dM. \end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração do teorema. □

Agora estudemos a segunda variação da área de uma hipersuperfície mínima, denotando por H a curvatura média e $f = \left\langle \frac{\partial F}{\partial t}, N\right\rangle$. Pelo Teorema 2 sabemos que a primeira variação da área é dada por

$$\left.\frac{dA(t)}{dt}\right|_{t=0} = -\int_M nHf dM = -\int_M \left.\langle nH, \frac{\partial F}{\partial t}\rangle dM\right|_{t=0}. \tag{2.4}$$

Uma vez tendo a primeira variação da área, agora o nosso objetivo é obter a segunda variação da área. Para isto, derivando ambos os lados da igualdade (2.4) acima, obtemos,

$$\left.\frac{d^2A(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = -\int_M \frac{d}{dt}\langle nH, \frac{\partial F}{\partial t}\rangle dM \tag{2.5}$$

Seja R o operador curvatura de M e seja $U \subset M$ um aberto, domínio de um referencial ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ dado por

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z.$$

Seja ainda $V = \frac{\partial F}{\partial t}\big|_{t=0} \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$, o qual significa que $R(V) = (R(V,e_i)e_i)^{\perp} \in \mathfrak{X}(U)^{\perp}$. Denote por $\alpha : \chi(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ a segunda forma fundamental de φ e defina a seção $B : \mathfrak{X}(M)^{\perp} \to \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ do fibrado por

$$B(\eta) = \langle \eta, \alpha(e_i, e_j)\rangle \alpha(e_i, e_j)$$

para todo $\eta \in \mathfrak{X}(M^{\perp})$. Sendo A_η o operador de Weingarten de φ na direção de η, temos

$$\begin{aligned}
\langle B(\eta), \eta\rangle &= \langle\langle \eta, \alpha(e_i, e_j)\rangle\alpha(e_i, e_j), \eta\rangle \\
&= \langle \eta, \alpha e_i, e_j)\rangle\langle \eta, \alpha e_i, e_j)\rangle \\
&= \langle A_\eta(e_{i)}, e_j\rangle\langle A_\eta(e_{i)}, e_j\rangle \\
&= tr|A_\eta^2| = |A_\eta|^2.
\end{aligned}$$

Por outro lado, baseado em [3] necessitamos do seguinte teorema.

Teorema 3. *Seja* M^n *uma variedade Riemanniana orientada e* $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ *uma imersão mínima. Se* $F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M^n \to \overline{M}^{n+k}$ *é uma variação própria de* φ *com o campo variacional* $V \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$*, então*

$$\left.\frac{d^2A(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \int_M \langle -\nabla^2 V - R(V) - B(V), V\rangle dM,$$

onde $\nabla^2 : \mathfrak{X}(M)^{\perp} \to \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ *é o traço Laplaciano de* $TM^{\perp}$.

Demonstração. Precisamos mostrar que

$$\left.\frac{d}{dt}\langle nH, \frac{\partial F}{\partial t}\rangle\right|_{t=0} = \langle \nabla^2 V + R(V) + B(V), V\rangle.$$

Para provarmos esta igualdade, fixemos $p \in M$ e um referencial $\{e_1, \dots, e_n\}$ numa vizinhanca $U \subset M$ de p, tal que esse referencial seja ortonormal em relação à métrica induzuda em M por φ e geodésico em p. Também sejam $e_i(t) = dF(e_i)$ e

$g_{it}(t) = \langle e_i(t), e_j(t)\rangle$. Sendo $\{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n\}$ um referencial numa vizinhança $\overline{U}$ de $F(p)$ em $F(M)$, ortonormal em relação à métrica induzida por $\overline{M}$ e na mesma orientação de $\{e_1(t), \ldots, e_n(t)\}$, tome funções $h_{ij} : \overline{U} \to \mathbb{R}$ tais que

$$e_i(t) = h_{ik}\overline{e}_k(t),$$

onde $A(t) = (h_{ij}(t))$ tem determinante positivo. Denotando por $A(t)^{-1} = (h^{ij}(t))$ e $(g_{ij}(t))^{-1} = g^{ij}(t)$ temos

$$\overline{e}_i(t) = h^{ik}(t)e_k(t) \text{ e } (g_{ij}(t)) = AA^T.$$

Com essas notações, segue que

$$\begin{aligned}
nH = \langle n\overrightarrow{H}, N\rangle &= \langle \alpha(\overline{e}_i(t), \overline{e}_i(t)), N\rangle \\
&= \sum_i \langle \overline{\nabla}_{\overline{e}_i(t)}\overline{e}_i(t), N\rangle \\
&= \sum_{ikl} \langle \overline{\nabla}_{h^{ik}e_k(t)} h^{il}(t)e_{l(t)}, N\rangle \\
&= \sum_{ikl} h^{ik}h^{il}\langle \overline{\nabla}_{e_k(t)}e_l(t), N\rangle \\
&= \sum_{kl} (A^{-1})^T(A^{-1})_{kl}\langle \overline{\nabla}_{e_k(t)}e_l(t), N\rangle \\
&= \sum_{kl} (AA^T)^{-1}_{kl}\langle \overline{\nabla}_{e_k(t)}e_l(t), N\rangle \\
&= \sum_{kl} g^{kl}(t)\langle \overline{\nabla}_{e_k(t)}e_l(t), N\rangle \\
&= \sum_{kl} g^{kl}(t)\langle \overline{\nabla}_{e_k(t)}e_l(t))^{\perp}, N\rangle.
\end{aligned}$$

Logo

$$n\overrightarrow{H} = \sum_{kl} g^{kl}(t)\overline{\nabla}_{e_k(t)}e_l(t))^{\perp}$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned}
\left\langle n\overrightarrow{H}, \frac{\partial F}{\partial t}\right\rangle &= \left\langle \sum_{kl} g^{kl}(t)\left(\overline{\nabla}_{e_k(t)}e_l(t)\right)^{\perp}, \frac{\partial F}{\partial t}\right\rangle \\
&= g^{kl}(t)\left\langle \overline{\nabla}_{e_k(t)}e_l(t), \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^{\perp}\right\rangle.
\end{aligned}$$

Derivando em t e fazendo $t = 0$, temos

$$\frac{d}{dt}\left\langle nH, \frac{\partial F}{\partial t}\right\rangle = \frac{d}{dt}g^{kl}(0)\left\langle \overline{\nabla}_{e_k(0)}e_{l(0)}, \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^{\perp}\right\rangle + g^{kl}(0)\frac{d}{dt}\left\langle \overline{\nabla}_{e_k(0)}e_{l(0)}, \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^{\perp}\right\rangle. \tag{2.6}$$

Lembre que $\{e_1(t),\ldots,e_n(t)\}$ é um referencial geodésico em p, o qual significa que $g^{kl}(0)=\delta_{kl}$, $g_{kl}=\langle e_{k(t)},e_{l(t)}\rangle$, $\left[\frac{\partial F}{\partial t},e_k\right]=0$ e

$$\sum_j g^{kj}(t)g_{jl}(t)=\delta_{kl}. \tag{2.7}$$

Derivando a igualdade (2.7) em relação a t e fazendo $t=0$, temos

$$\sum_{jkl}\frac{d}{dt}g^{kl}(t)g_{jl}(t)\Big|_{t=0}+\sum_{jkl}g^{kl}(t)\frac{d}{dt}g_{jl}(t)\Big|_{t=0}=0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}g^{kl}(0)=-\frac{d}{dt}g_{jl}(0) &= -\frac{d}{dt}\langle e_j(0),e_l(0)\rangle\\
&= -\langle\overline{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial t}}e_k(0),e_l(0)\rangle-\langle e_k(0),\overline{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial t}}e_l(0)\rangle\\
&= -\langle\overline{\nabla}_{e_k(0)}\frac{\partial F}{\partial t},e_l(0)\rangle-\langle\overline{\nabla}_{e_l(0)}\frac{\partial F}{\partial t},e_k(0)\rangle\\
&= -\langle\overline{\nabla}_{e_k(0)}V,e_l(0)\rangle-\langle\overline{\nabla}_{e_l(0)}V,e_k(0)\rangle\\
&= 2\langle\alpha(e_k(0),e_l(0)),V\rangle.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Nas equações seguintes, por comodidade de notação, escrevemos e_k e e_l ao invés de $e_k(t)$ e $e_l(t)$, respectivamente. Uma vez que φ é mínima temos $H_0=0$. Sendo $V\in\mathfrak{X}(M)^\perp$, temos, substiuindo (2.8) em (2.6) segue que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left\langle nH,\frac{\partial F}{\partial t}\right\rangle\Big|_{t=0} &= 2\langle\alpha(e_k,e_l),V\rangle\langle\overline{\nabla}_{e_k}e_l,V\rangle+\frac{d}{dt}\langle\overline{\nabla}_{e_k}e_l,\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^\perp\rangle\Big|_{t=0}\\
&= 2\langle\langle\alpha(e_k,e_l),V\rangle\alpha(e_k,e_l),V\rangle+\sum_k\left\langle\overline{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial t}}\overline{\nabla}_{e_k}e_k,\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^\perp\right\rangle\Big|_{t=0}\\
&\quad+\sum_k\left\langle\overline{\nabla}_{e_k}e_k,\overline{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial t}}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^\perp\right\rangle\Big|_{t=0}\\
&= 2\langle\langle\alpha(e_k,e_l),V\rangle\alpha(e_k,e_l),V\rangle+\sum_k\left\langle\overline{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial t}}\overline{\nabla}_{e_k}e_k,\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^\perp\right\rangle\Big|_{t=0}\\
&\quad+\sum_k\left\langle nH_0,\overline{\nabla}_{\frac{d}{dt}}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^\perp\Big|_{t=0}\right\rangle\\
&= 2\langle B(V),V\rangle+\left\langle\overline{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial t}}\overline{\nabla}_{e_k}e_k\Big|_{t=0},V\right\rangle.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Desenvolvendo a segunda parcela do lado direito da igualdade (2.9), temos

$$\begin{aligned}
\left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial t}} \overline{\nabla}_{e_k} e_k, V \right\rangle &= \left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial t}} \overline{\nabla}_{e_k} e_k, V \right\rangle - \left\langle \overline{\nabla}_{e_k} \overline{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial t}} e_k, V \right\rangle - \left\langle \overline{\nabla}_{\left[\frac{\partial F}{\partial t}, e_k\right]} e_k, V \right\rangle + \left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial t}} \overline{\nabla}_{e_k} e_k, V \right\rangle \\
&= \langle R\left(\frac{\partial F}{\partial t}, e_k\right) e_k, V\rangle + \langle \overline{\nabla}_{e_k} \overline{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial t}} e_k, V\rangle \\
&= \langle R\left(\frac{\partial F}{\partial t}, e_k\right) e_k, V\rangle + \langle \overline{\nabla}_{e_k} \overline{\nabla}_{e_k} \frac{\partial F}{\partial t}, V\rangle \\
&= \langle R\left(V, e_k\right) e_k, V\rangle + \langle \overline{\nabla}_{e_k} \overline{\nabla}_{e_k} \frac{\partial F}{\partial t}, V\rangle \\
&= \langle R(V), V\rangle + \langle \overline{\nabla}_{e_k} \left(\overline{\nabla}_{e_k} \frac{\partial F}{\partial t}\right)^{\top}, V\rangle + \langle \overline{\nabla}_{e_k} \left(\overline{\nabla}_{e_k} \frac{\partial F}{\partial t}\right)^{\perp}, V\rangle \\
&= \langle R(V), V\rangle + \left\langle \alpha\left(e_k, \left(\overline{\nabla}_{e_k} \frac{\partial F}{\partial t}\right)^{\top}\right), V\right\rangle + \left\langle \overline{\nabla}_{e_k} \left(\overline{\nabla}_{e_k} \frac{\partial F}{\partial t}\right)^{\perp}, V\right\rangle
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Observe que em (2.10), em $t = 0$ temos

$$\begin{aligned}
\left(\overline{\nabla}_{e_k} \frac{\partial F}{\partial t}\right)^{\top} &= \left(\overline{\nabla}_{e_k} \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^{\top} + \overline{\nabla}_{e_k} \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^{\perp}\right)^{\top} \\
&= \nabla_{e_k} \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^{\top} - A_{\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^{\perp}} e_k \\
&= \nabla_{e_k} (V)^{\top} - A_V e_k \\
&= -A_V e_k,
\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}
\left(\overline{\nabla}_{e_{k(t)}} \frac{\partial F}{\partial t}\right)^{\perp} &= \left(\overline{\nabla}_{e_{k(t)}} \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^{\top} + \left(\overline{\nabla}_{e_{k(t)}} \frac{\partial F}{\partial t}\right)^{\perp}\right)^{\perp} \\
&= \alpha\left(e_k(t), \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^{\top}\right) + \nabla^{\perp}_{e_{k(t)}} \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^{\perp} \\
&= \alpha\left(e_k(t), V^{\top}\right) + \nabla^{\perp}_{e_{k(t)}} V^{\perp} \\
&= \nabla^{\perp}_{e_k} V.
\end{aligned}$$

Portanto, reescrevendo (2.10) obtemos

$$\begin{aligned}
\left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial t}} \overline{\nabla}_{e_k} e_k, V \right\rangle &= \langle R(V), V\rangle - \langle \alpha(e_k, A_V e_k), V\rangle + \langle \nabla^{\perp}_{e_k} \nabla^{\perp}_{e_k} V, V\rangle \\
&= \langle R(V), V\rangle - \langle \langle A_V e_k, e_l\rangle \alpha(e_k, e_l), \rangle + \langle \nabla^2 V, V\rangle \\
&= \langle R(V), V\rangle - \langle \langle V, \alpha(e_k, e_l)\langle \alpha(e_k, e_l), V\rangle + \langle \nabla^2 V, V\rangle \\
&= \langle R(V), V\rangle - \langle B(V), V\rangle + \langle \nabla^2 V, V\rangle.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\langle nH, \frac{\partial F}{\partial t}\right\rangle\Big|_{t=0} &= 2\langle B(V), V\rangle + \langle R(V), V\rangle - \langle B(V), V\rangle + \langle \nabla^2 V, V\rangle \\ &= \langle B(V), V\rangle + \langle R(V), V\rangle + \langle \nabla^2 V, V\rangle.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{d^2A(t)}{dt^2} = \int_M \langle B(V), V\rangle + \langle R(V), V\rangle + \langle \nabla^2 V, V\rangle dM$$

o que conclui o que queríamos. □

2.3 Referenciais móveis

Nesta seção, seguindo [6] iremos revisitar grande parte das definições e resultados apresentados até aqui sob o ponto de vista do método do referencial móvel. Ao longo do texto, todas as variedades são assumidas diferenciáveis e conexas sem bordo. Iniciamos apresentando um resultado que será bastante útil em nosso estudo. Sejam M uma variedade Riemanniana de dimensão n, $p \in M$,e $U \subset M$ uma vizinhança de p onde estão definidos campos de vetores deferenciáveis $e_1, e_2, \dots, e_n$ tais que $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$. O conjunto $\{e_i\}$ é denominado um referencial (ortonormal, móvel) em U. Chamaremos de coreferencial associado a $\{e_i\}$ à família de formas diferenciais $\{\omega_i\}$ definidas por $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$.

Iniciemos com o seguinte lema muito conhecido na literatura, do qual faremos a prova por completude.

Lema 1. *(Cartan) Seja V um espaço vetorial de dimensão n. Sejam $\omega_1, \dots, \omega_r : V \to \mathbb{R}$, $r \leqslant n$ formas lineares de V linearmente independentes. Suponhamos que existam formas lineares $\theta_1, \dots, \theta r : V \to \mathbb{R}$ satisfazendo a seguinte condição:*

$$\sum_{i=1}^{r} \omega_i \wedge \theta_i = 0.$$

Então

$$\theta_i = \sum_j h_{ij}\omega_j,$$

com $i, j = 1, \dots, r$ e $h_{ij} = h_{ji}$.

Demonstração. Completemos as formas $\omega_1, \dots, \omega_r$ em uma base do espaço dual V^* $\omega_1, \dots, \omega_r, \omega_{r+1}, \dots, \omega_n$ e escrevamos

$$\theta_i = \sum_j h_{ij}\omega_j + \sum_l b_{il}\omega_l,$$

com $l = r+1, \dots, n$. Por hipótese $\sum_{i=1}^{n} \omega_i \wedge \theta_i = 0$, logo

$$\begin{aligned} 0 = \sum_i \omega_i \wedge \theta_i &= \sum_i \omega_i \wedge \left(\sum_j h_{ij}\omega_j + \sum_l b_{il}\omega_l \right) \\ &= \sum_i \omega_i \wedge \sum_j h_{ij}\omega_j + \sum_i \omega_i \wedge \sum_{l=r+1}^{n} b_{il}\omega_l \\ &= \sum_{i,j} h_{ij}\omega_i\omega_j + \sum_{i,l} b_{il}\omega_i\omega_l \\ &= \sum_{i<j} h_{ij}\omega_i\omega_j + \sum_i h_{ii}\omega_i\omega_i + \sum_{i>j} h_{ij}\omega_i\omega_j + \sum_{i,l} b_{il}\omega_i\omega_l. \end{aligned}$$

Usando o fato que $\omega_i \wedge \omega_i = 0$ e permutando os índices i e j em $\sum_{i>j} h_{ij}\omega_i\omega_j$, temos

$$\begin{aligned} 0 = \sum_i \omega_i \wedge \theta_i &= \sum_{i<j} h_{ij}\omega_i\omega_j - \sum_{i>j} h_{ij}\omega_j\omega_i + \sum_{i,l} b_{il}\omega_i\omega_l \\ &= \sum_{i<j} h_{ij}\omega_i\omega_j - \sum_{i<j} h_{ji}\omega_i\omega_j + \sum_{i,l} b_{il}\omega_i\omega_l \\ &= \sum_{i<j} (h_{ij} - h_{ji})\omega_i\omega_j + \sum_{i,l} b_{il}\omega_i\omega_l. \end{aligned}$$

Desde que $\omega_m \wedge \omega_k, k < m$ são L.I, temos que

$$\sum_{i<j} (h_{ij} - h_{ji})\omega_i\omega_j = 0,$$

e também

$$\sum_{i,l} b_{il}\omega_i\omega_l = 0.$$

Assim, conluímos que

$$h_{ij} = h_{ji},$$

e

$$b_{il} = 0.$$

Portanto, $\theta_i = \sum_j h_{ij}\omega_j$, concluindo a prova do lema. □

O próximo lema garante uma expressão para a diferencial dos ω_i.

Lema 2. *Escolhido um referencial* $\{e_i\}$ *em um aberto* $U \in M$ *de uma variedade Riemanniana* M, *existe em* U *um único conjunto de formas diferenciais* ω_{ij} *que são anti-simétricas* $(\omega_{ij} = -\omega_{ji})$ *e satisfazem* $d\omega_i = \sum_j \omega_j \wedge \omega_{ji}$.

Para uma prova veja [6].

Em particular, quando a variedade Riemanniana é o $\mathbb{R}^n$, temos algumas equações adicionais dadas por

$$de_i = \sum_j \omega_{ij} e_i, \tag{2.11}$$

e

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ij} \wedge \omega_{kj}. \tag{2.12}$$

As formas ω_{ij} são chamadas as *formas da conexão* de M no referencial $\{e_i\}$, e as equações $d\omega_i = \sum_j \omega_j \wedge \omega_{ji}$ são chamadas as *equações de estrutura* de M. O interesse geométrico das formas da conexão é que elas permitem definir uma notação de derivação para campos de vetores em M. É importante notar que se X e Y são campos suaves de vetores em M e $\{e_i\}$ um referencial em um aberto $U \subset M$, suponhamos que $Y = \sum_i y_i e_i$ e façamos

$$\nabla_X Y = \sum_j \{dy_i(X) + \sum_i \omega_{ij}(X) y_i\} e_i.$$

Então $\nabla_X Y$ é independente do referencial $\{e_i\}$ e, portanto, globalmente definido em M. A expressão $\nabla_X Y$ é chamada de derivada covariante de Y em relação a X. A derivação covariante permite interpretar geometricamente as formas da conexão. A saber, da definição de derivada covariante segue que para todo campo X

$$\langle \nabla_X e_i, e_i \rangle = \omega_{ij}(X).$$

Agora, introduziremos a curvatura em uma variedade Riemanniana sob o ponto de vista do método do referncial móvel. Considere o conjunto de formas Ω_{ij}, definidas como segue:

$$\Omega_{ij} = d\omega_{ij} - \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}. \tag{2.13}$$

As formas Ω_{ij} são chamadas as *formas de curvatura* de M no referencial de $\{e_i\}$. É importante notar que para cada $p \in M$ e cada par de veores $X, Y \in T_pM$, a matriz $\{\omega_{ij}(p)(X, Y)\}$ é a matriz de uma aplicação linear $R(X, Y_p) : T_pM \to T_pM$ que independe do referencial móvel $\{e_i\}$. A aplicação $R(X, Y)$ é chamado o operador curvatura de M. Como $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$, segue que $\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$ e, além disso, Ω_{ij} é uma forma bilinear alternada. Assim, valem as seguintes identidades para o operador curvatura (ver [5]) . Se X, Y, Z, W são campos suaves de vetores em M, então

$$\langle R_{XY} Z, W \rangle = -\langle R_{YX} Z, W \rangle,$$

e

$$\langle R_{XY}Z, W\rangle = -\langle R_{XY}W, Z\rangle.$$

Derivando exteriormente a equação (2.12) obtemos a *Primeira Identidadede Bianchi*, que é dada por $\sum_i \omega_i \wedge \Omega_{ij} = 0$. Derivando ainda a equação (2.13) obtemos a *Segunda Identidade de Bianchi*, que é dada por

$$0 = d\Omega_{ij} + \sum_k \Omega_{ik} \wedge \omega_{kj} - \sum_k \omega_{ik} \wedge \Omega_{kj}.$$

Como as formas Ω_{ij} são de grau dois, elas podem ser escritas da seguinte forma:

$$\Omega_{ij} = -\frac{1}{2}\sum_{kl} R_{ijkl}\omega_k\omega_l = -\sum_{k<l} R_{ijkl}\omega_k\omega_l. \tag{2.14}$$

Além disso, temos a seguinte igualdade que será bastante usada mais na frente.

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} \omega_{i\alpha} \wedge \omega_{\alpha j} &= -\sum_i \left(\sum_k h_{ik}\omega_k\right) \wedge \left(\sum_l h_{jl}\omega_l\right) \\ &= \sum_{k<l}\left(\sum_{i,j,k,l} h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}\right)\omega_l \wedge \omega_k. \end{aligned} \tag{2.15}$$

As igualdades (2.14) e (2.15) acima são chamadas de *equações de estrutura* de M. A curvatura média e a segunda forma fundamental da hipersuperfície φ são definidas, respectivamente por

$$H = \frac{1}{n}\sum_i h_{ii}, \tag{2.16}$$

e por

$$II = \sum_i \omega_i \otimes \omega_{i\alpha} = \sum_i \left(\sum_{ij} h_{ij}^{\alpha}\omega_j\right)\omega_i = \sum_{ij} h_{ij}\omega_i \otimes \omega_j. \tag{2.17}$$

Vimos que a curvatura $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ é definida por $R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W\rangle$, e que em termos de componentes, podemos escrever

$$\langle R(X, Y)Z, W\rangle = R_{ijkl} = \langle R(e_i, e_j)e_k, e_l\rangle = \Omega_{lk}(e_i, e_j). \tag{2.18}$$

A partir desses elementos exibiremos a *fórmula de Gauss*, que é de grande importância nessa seção. Destacamos que as componentes da curvatura de M^n estão relacionadas com as componentes tangentes de $\overline{M}^{n+1}$ e o referencial tomado é adaptado à imersão

$f : M \to \overline{M}$. Assm, a partir de (2.14), temos

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\sum_{kl} R_{ijkl}\omega_k \wedge \omega_l &= \Omega_{ij} \\
&= d\omega_{ij} - \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} \\
&= -\omega_{in+1} \wedge \omega_{n+1j} + \overline{\Omega}_{ij} \\
&= -\sum_k h_{ik}\omega_k \wedge \sum_l h_{jl}\omega_l - \frac{1}{2}\sum_{k,l} \overline{R}_{ijkl}\omega_k \wedge \omega_l \\
&= -\sum_{k,l} h_{ik}h_{jl}\omega_k \wedge \omega_l - \frac{1}{2}\sum_{k,l} \overline{R}_{ijkl}\omega_k \wedge \omega_l,
\end{aligned}$$

isto é,

$$R_{ijkl} = \overline{R}_{ijkl} + (h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}). \tag{2.19}$$

Pela definição de curvatura, temos

$$\langle \overline{R}(X, Y, Z)W\rangle = \langle X, W\rangle\langle Y, Z\rangle - \langle X, Y\rangle\langle Y, W\rangle,$$

que é escrito em componentes por

$$\overline{R}_{ijkl} = \delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jl}. \tag{2.20}$$

Assim, reescrevendo (2.19) obtemos

$$R_{ijkl} = (\delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jl}) + (h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}), \tag{2.21}$$

que é a *fórmula de Gauss*. A partir desses resultados, escrevemos o que chamamos de *curvatura escalar normalizada*, que é uma função diferenciável sobre M^n obtida a partir do tensor de Ricci, isto é,

$$Ric_p(x) = \frac{1}{n-1}\sum_i \langle R(x, z_i), z_i\rangle,$$

com $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Se $e_1, \ldots, e_n$ é uma base ortormal de campos locais sobre M, temos que

$$\begin{aligned}
R(p) = \frac{1}{n}\sum Ric_p(x) &= \frac{1}{n(n-1)}\sum_i \langle R(z_i, z_j)z_i, z_j\rangle \\
&= \frac{1}{n(n-1)}\sum_i Ric_p(e_i, e_i) \\
&= \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i,j} R_{ijij} \\
&= \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i,j} R_{ij},
\end{aligned}$$

i.e.,

$$R(p)(n(n-1)) = \sum_i R_{ij}. \tag{2.22}$$

Agora, usando a equação (2.21), note que

$$\sum_{i,j} R_{ij} = \sum_{i,j,k} R_{ikjk} = (\delta_{ij}\delta_{kk} - \delta_{ik}\delta_{kj}) - (h_{ij}h_{kk} - h_{ik}h_{kj}).$$

Somando em k, obtemos

$$Ric(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^{n-1} R_{ikjk} = \sum_{k=1}^{n-1}(\delta_{ij}\delta_{kk} - \delta_{ik}\delta_{kj}) - \sum_{k=1}^{n-1}(h_{ij}h_{kk} - h_{ik}h_{kj}).$$

Desde que $\delta_{kk} = 1$ e $\sum_{k=1}^{n-1} \delta_{ik}\delta_{kj} = 0$ com $i = k$ e $j \neq k$ ou $j = k$ e $i \neq k$, e que $\sum_{k=1}^{n-1} h_{ij}h_{kk} = h_{ij}\sum_{k}^{n-1} h_{kk} = h_{ij} \cdot n \cdot H$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_i R_{ii} &= \sum_{i=1}^{n}(n-1)\delta_{ii} + \sum_{i=1}^{n} nHh_{ii} - \sum_i h_{ii}h_{ii} \\
&= n(n-1)\delta_{ii} + nH\sum_i h_{ii} - \sum_i h_{ii}^2 \\
&= n(n-1) + n^2H^2 - S. \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

Assim, reescrevendo (2.22) obtemos

$$n(n-1)R = \sum_i R_{ii} = n(n-1) + n^2H^2 - S,$$

onde $S = \sum_{i,j} h_{ij}^2$ denota o quadrado da norma da segunda forma fundamental de M^n. Lembre que a segunda forma fundamental $h = \sum_{i,j} h_{ij}\omega_i \otimes \omega_j e_{n+1}$ e que as derivadas covariantes de h_{ik} satisfazem

$$dh_{ij} = \sum_k h_{ijk}\omega_k - \sum_k h_{ik}\omega_{kj} - \sum_k h_{kj}\omega_{kj}, \tag{2.24}$$

$$\sum_k h_{ijk}\omega_k = dh_{ij} + \sum_k h_{kj}\omega_{ki} + \sum_k h_{ik}\omega_{kj}, \tag{2.25}$$

$$\sum_l h_{ijkl} = d(h_{ijk}) + \sum_l h_{jjk}\omega_{li} + \sum_l h_{ilk}\omega_{lj} + \sum_l h_{ijl}\omega_{lk}. \tag{2.26}$$

Como consequência dessas expressões temos as *equações de Codazzi* dadas por

$$h_{ijk} = h_{ikj}. \tag{2.27}$$

De fato, pelo Lema de Cartan, existem funções diferenciáveis h_{ij} tais que

$$\omega_{in+1} = \sum_{i,j} h_{ij}\omega_j, h_{ij} = h_{ji}, \tag{2.28}$$

e

$$d\omega_{in+1} = \sum_{i,k} \omega_{ik} \wedge \omega_{kn+1} + \Omega_{in+1}. \tag{2.29}$$

Derivando a equação (2.28), temos

$$\begin{aligned}
d\omega_{in+1} &= d\left(-\sum_j h_{ij}\omega_j\right) \\
&= -\sum_j \left(dh_{ij} \wedge \omega_j + h_{ij} d\omega_i\right) \\
&= -\sum_{jk} h_{ijk}\omega_k \wedge \omega_j + \sum_{jk} h_{kj}\omega_{ki} \wedge \omega_j \\
&\quad + \sum_{jk} h_{ik}\omega_{kj} \wedge \omega_j - \sum_{jk} h_{ij}\omega_{jk} \wedge \omega_k \\
&= -\sum_{jk} h_{ijk}\omega_k \wedge \omega_j + \sum_{jk} h_{kj}\omega_{ki} \wedge \omega_j. \qquad (2.30)
\end{aligned}$$

Por outro lado, em $\overline{M}$ a curvatura seccional é constante, isso implica em $\Omega_{in+1} = 0$, assim, reescrevendo (2.29), temos

$$\begin{aligned}
d\omega_{in+1} &= \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kn+1} + 0 \\
&= \sum_k \omega_{ik} \wedge \left(-\sum_j h_{kj}\omega_j\right) \\
&= -\sum h_{kj}\omega_{ik} \wedge \omega_j. \qquad (2.31)
\end{aligned}$$

Igualando (2.30) e (2.31), temos

$$0 = \sum_{jk} h_{ijk}\omega_k \wedge \omega_j = \sum_{j<k} \left(h_{ijk} - h_{ikj}\right) \omega_k \wedge \omega_j,$$

donde

$$h_{ijk} = h_{ikj}.$$

Uma segunda identidade importante em nosso estudo é a *identidade de Ricci*, a saber

$$h_{ijkl} - h_{ijlk} = \sum_m h_{mj}R_{mikl} + \sum_m h_{im}R_{mjkl}.$$

Para provarmos essa identidade primeiro precisamos derivar a seguinte igualdade

$$\sum_k h_{ijk}\omega_k = dh_{ij} + \sum_k h_{kj}\omega_{ki} + \sum_k h_{ik}\omega_{kj}. \tag{2.32}$$

Derivando o lado esquerdo de (2.32), temos

$$\begin{aligned}
d\left(\sum_k h_{ijk}\omega_k\right) &= \sum_k (dh_{ijk}\wedge\omega_k + h_{ijk}d\omega_k)\\
&= \sum_k (h_{ijkl}\omega_l - h_{ljk}\omega_{li} - h_{ilk}\omega_{lj} - h_{ijl}\omega_{lk})\wedge\omega_k + \sum_k h_{ijk}\omega_{kl}\wedge\omega_l\\
&= \sum_{k,l} h_{ijkl}\omega_l\wedge\omega_k - \sum_{k,l} h_{ljk}\omega_{li} - \sum_{k,l} h_{ilk}\omega_{lj}\wedge\omega_k k\\
&\quad -\sum_{k,l} h_{ijl}\omega_{lk}\wedge\omega_k + \sum_{k,l} h_{ijk}\omega_{kl}\wedge\omega_l. \qquad (2.33)
\end{aligned}$$

Agora, derivando o lado direito de (2.32), obtemos

$$\begin{aligned}
&d\left(dh_{ij} + \sum_k h_{kj}\omega_{ki} + \sum_k h_{ik}\omega_{kj}\right)\\
= \;& d(dh_{ij}) + \sum_k d_{kj}\omega_{ki} + \sum_k h_{kj}d\omega_{ki} + \sum_k dh_{ik}\omega_{kj} + \sum_k h_{ik}d\omega_{kj}\\
= \;& \sum_{k,l} (h_{kjl}\omega_l - h_{lj}\omega_{lk} - h_{kl}\omega_{lj})\wedge\omega_{ki} + \sum_{k,l} h_{kj}\omega_{kl}\wedge\omega_{li} + \sum_k h_{kj}\Omega_{ki}\\
&+\sum_{k,l} (h_{ikl}\omega_l - h_{lk}\omega_{lk} - h_{il}\omega_{lk})\wedge\omega_{kj} + \sum_{k,l} h_{ik}\omega_{kl}\wedge\omega_{lj} + \sum_k h_{ik}\Omega_{kj}\\
= \;& \sum_{k,l} h_{kjl}\omega_l\wedge\omega_{ki} - \sum_{k,l} h_{lj}\omega_{lk}\wedge\omega_{ki} - \sum_{kl} h_{kl}\omega_{lk}\wedge\omega_{ki}\\
&+\sum_{kl} h_{kj}\omega_{kl}\wedge\omega_{li} + \sum_k h_{kj}\Omega_{ki}\\
&+\sum_{k,l} h_{ikl}\omega_l\wedge\omega_{kj} - \sum_{k,l} h_{lk}\omega_{li}\wedge\omega_{kj} - \sum_{kl} h_{il}\omega_{lk}\wedge\omega_{kj}\\
&+\sum_{k,l} h_{ik}\omega_{kl}\wedge\omega_{lj} + \sum_k h_{ik}\Omega_{kj}. \qquad (2.34)
\end{aligned}$$

Comparando (2.33) com (2.34) e cancelando alguns termos, restam apenas

$$\sum_{k,l} h_{ijkl}\omega_l\wedge\omega_k = \sum_k h_{kj}\Omega_{ki} + \sum_k h_{ik}\Omega_{kj},$$

e

$$\sum_{k,l} (h_{ijkl} - h_{ijlk})\,\omega_l\wedge\omega_k = \sum_m h_{kj}\Omega_{mi}(e_l, e_k) + \sum_m h_{im}\Omega_{mj}(e_l, e_k). \qquad (2.35)$$

Para concluir, ainda usaremos as seguintes igualdades

$$\Omega_{mi}(e_l, e_k) = -\frac{1}{2}\sum_{r,s} R_{mirs}\omega_r\wedge\omega_s(e_l, e_k) = R_{mikl}, \qquad (2.36)$$

e

$$\Omega_{mj}(e_l, e_k) = -\frac{1}{2}\sum_{r,s} R_{mjrs}\omega_r\wedge\omega_s(e_l, e_k) = R_{mjkl}. \qquad (2.37)$$

Substituindo (2.36) e (2.37) em (2.35), segue finalmente que

$$h_{ijkl} - h_{ijlk} = \sum_{m} h_{mj} R_{mikl} + \sum_{m} h_{im} R_{mjkl}, \tag{2.38}$$

que é a *identidade de Ricci.*

Capítulo 3

Classificação de Hipersuperfícies Mínimas na esfera

Neste capítulo apresentamos peculiaridades do operador de estabilidade ou operador de Jacobi. Também mostraremos as estimativas para o primeiro autovalor desse operador, destacando sua importância na classificação de hipersuperfícies. Daremos atenção para a esfera unitária e o toro de Clifford. Iniciemos nosso estudo com um exemplo bem conhecido na literatura de uma hipersuperfície mínima na esfera, o qual será o alicerce do teorema princial deste trabalho a ser contemplado no próximo capítulo.

3.1 O operador de estabilidade

Considere uma hipersuperfície $\varphi : M \to \mathbb{S}^{n+1}(1)$ compacta n-dimensinal na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ de dimensão $n+1$. Considere $V_\varphi : M \to \mathbb{S}^{n+1}(1)$ uma *variação da hipersuperfície* $\varphi : M \to \mathbb{S}^{n+1}(1)$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Exemplo 1. *Seja* $\mathbb{S}^1(r)$ *o círculo de raio* r *em* $\mathbb{R}^2$ *definido por*

$$\mathbb{S}^1(r) = \{r(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta); 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}.$$

Então o toro de Clifford em $\mathbb{R}^4$ *é definido por*

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \mathbb{S}^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, \cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi); 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\right\}.$$

Uma parametrização desta variedade é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \ &: \ [0,2\pi]\times[0,2\pi] \to \mathbb{R}^4 \\ & (\theta,\varphi) \to \frac{1}{\sqrt{2}}(cos\theta, sen\theta, cos\varphi, sen\varphi). \end{aligned}$$

Podemos notar que $\mathbf{x}([0,2\pi]\times[0,2\pi]) \subset \mathbb{S}^3(1)$, pois para todo $(\theta,\varphi) \in [0,2\pi]\times[0,2\pi]$, tem-se

$$\| \mathbf{x}(\theta,\varphi) \|^2 = \frac{1}{2}(cos^2\theta + sen^2\theta + cos^2\varphi + sen^2\varphi) = 1. \tag{3.1}$$

Seja g a métrica do toro de Clifford, induzida para a métrica canônica de $\mathbb{S}^3$. Seja $\mathbf{x} : [0,2\pi]\times[0,2\pi] \to \mathbb{T}^2$ a parametrização anterior, definida por

$$\mathbf{x}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(cos\theta, sen\theta, cos\varphi, sen\varphi).$$

Temos que as derivadas parciais de $\mathbf{x}$ em relação a θ e em relação a φ são

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-sen\theta, cos\theta, 0, 0),$$

e

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, -sen\varphi, cos\varphi).$$

Daí calculamos os elementos da matriz g_{ij}, a saber

$$g_{11} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} \right\rangle = \frac{1}{2}(cos^2\theta + sen^2\theta) = \frac{1}{2},$$

$$g_{12} = g_{21} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} \right\rangle = 0,$$

e

$$g_{22} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} \right\rangle = \frac{1}{2}(cos^2\varphi + sen^2\varphi) = \frac{1}{2}.$$

Com esses resultados, apresentamos a métrica do *Toro de Clifford* dada por

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Podemos também calcular o volume do toro

$$\begin{aligned} vol(\mathbb{T}^2) &= \int_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} \sqrt{det(g_{ij}} d\theta d\varphi \\ &= \int_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} \frac{1}{2} d\theta d\varphi = 2\pi^2. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que o Toro *de Clifford* está imerso na esfera unitária $\mathbb{S}^3(1) \subset \mathbb{R}^4$, e que essa imersão é mínima. A partir das derivadas parciais temos que

$$\left[\mathbf{dx}_{(\theta,\varphi)}\right] = \begin{bmatrix} \frac{-sen\theta}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{cos\theta}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{-sen\varphi}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{cos\varphi}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Notemos que as funções seno e cosseno nunca se anulam simultaneamente, assim as colunas de $\left[\mathbf{dx}_{(\theta,\varphi)}\right]$ são linearmente independentes, assim $\mathbf{dx}_{(\theta,\varphi)}$ é injetiva e, portanto, a inclusão do Toro em $\mathbb{S}_3$ é uma imersão. Agora vamos mostrar que a imersão é mínima. Ora, como $\mathbf{x}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{T}^2$ temos que

$$T_p\mathbb{S}^3 = T_p\mathbb{T}^2 + (T_p\mathbb{T}^2)^{\perp}, \;\; p \in \mathbb{T}^2$$

Agora, considere os vetores

$$e_1 = (-sen\theta, cos\theta, 0, 0),$$

$$e_2 = (0, 0, -sen\varphi, cos\varphi),$$

$$n_1 = \frac{1}{2}(cos\theta, sen\theta, cos\varphi, sen\varphi),$$

e

$$n_2 = \frac{1}{2}(-cos\theta, -sen\theta, cos\varphi, sen\varphi).$$

Veja que e_1 e e_2 formam uma base ortonormal do espaço tangente de $\mathbb{T}^2$ e os vetores n_1 e n_2 formam uma base ortogonal do espaço normal a $T_p\mathbb{T}^2$ em $\mathbb{R}^4$. Podemos notar ainda que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}(\theta,\varphi), n_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\langle (cos\theta, sen\theta, cos\varphi, sen\varphi), (-cos\theta, -sen\theta, cos\varphi, sen\varphi)\rangle \\ &= \frac{1}{2}(-1+1) = 0. \end{aligned}$$

Isso significa que $n_2 \in T_p\mathbb{S}^3$, o que implica que $(T_p\mathbb{T}^2)^{\perp} = [n_2]$ em $T_p\mathbb{S}^3$, i.e., é o subespaço gerado por n_2. Logo, dado $n \in (T_p\mathbb{T}^2)^{\perp}$, segue que $n = \alpha \cdot n_2$, i.e., $S_n = \alpha \cdot S_{n_2}$, o que implica em $tr(S_n) = \alpha \cdot tr(S_{n_2}) = 0$ em que S_n é uma aplicação linear auto-adjunta associada à segunda forma fundamental. Portanto, a imersão do toro $\mathbb{T}^2$ na esfera $\mathbb{S}^3(1)$ é mínima.

O exemplo acima será muito importante para o que segue, uma vez que estamos interessados em estimar o primeiro autovalor do operador de Jocobi (ou operador de estabilidade) e classificar o caso da igualdade como sendo um toro de Clifforf.

Agora vamos introduzir o operador que será de interesse no restante deste trabalho para provarmos o teorema principal.

Dada uma hipersuperfície mínima compacta $\varphi : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}(1)$ na esfera unitária de dimensão $n+1$. O operador de Jacobi ou *operador de estabilidade* da imersão é definido por

$$Jf = \Delta f + (S+n)f, \tag{3.2}$$

onde Δ denota o operador de Laplace e S denota o quadrado da segunda forma fundamental. O comportamento desse operador está diretamente ligado à instabilidade das hipersuperfícies (ver [9]). O *primeiro autovalor* do operador J é o número λ_1^J para o qual vale

$$Jf = -\lambda_1^J f.$$

O espectro desse operador J consiste numa sequência crescente de autovalores λ_k com multiplicidades finitas m_k dadas por

$$Spec(J) = \{\lambda_1 < \lambda_2 < ...\}$$

tal que $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$. Como J é um operador elíptico, podemos usar a caracterização min-max de λ_1^J que é dado por

$$\lambda_1^J = min\left\{\frac{\int_M fJ(f)dA}{\int_M f^2 dA}; f \in C^\infty(M), f \not\equiv 0\right\}.$$

Em geometria diferencial muitos autores ao longo dos tempos vêm buscando classificar hipersuperfícies através de estimativas do primeiro autovalor do operador de Jacobi. Em 1968, James Simons [12], provou o seguinte resultado.

Teorema 4 (Simons, 1968)**.** *Seja $\varphi : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}(1)$ uma hipersuperfície mínima compacta e não totalmente geodésica na esfera unitária. Então*

$$\lambda_1^J \leqslant -2n,$$

Se M^n é totalmente geodésica, então $\lambda_1^J = -n$.

Para uma prova veja [12].

Posteriormente em 1993 Chuanxi Wu em [13] provou o caso não totalmente geodésico do teorema de Simons, i.e., ele provou o seguinte

Teorema 5 (Wu, 1993)**.** *Seja* $\varphi : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}(1)$ *uma hipersuperfície mínima compacta não totalmente geodésica. Então*

$$\lambda_1^J \leqslant -2n,$$

e temos $\lambda_1^J = -2n$ *se, e somente se,* $\varphi : M \to \mathbb{S}^{n+1}(1)$ *é o toro de Clifford* $\mathbb{S}^{n-k}\left(\sqrt{\frac{n-k}{n}}\right) \times \mathbb{S}^k\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right)$ *para* $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Para uma prova veja [13]. Observe que no teorema de Wu a estimativa é ótima e não depende da imersão, mas apenas da dimensão.

Recentemente, em [10] Perdomo obteve o teorema acima usando um método diferente do método usado por Wu. Uma vez que Wu faz estimativas para o autovalor do operador de Schrödinger que é dado por $L_1 = -\Delta - S$, estima para dimensão $n+p$. No seu método, usou as equações de esTrutura em referenciais geodésicos, o lema de Cartan, e o fato de que $|\nabla S|^2 \leqslant \frac{4n}{n+2} S |\nabla h|^2$. Por outro lado Perdomo faz estimativa para hipersuperfícies de dimensão $n+1$, na prova, usou a expressão $f = \rho^{-1} ||A||$, em que, pelo princípio do máximo, mostra-se que $f : M \to \mathbb{R}$ é constante, A é o operador forma e ρ é uma autofunção do operador de estabilidade. Usou também as equações de Codazzi, e finalmente o lema $\Delta ||A|| \geqslant (n-1)||A|| - ||A||^3$ onde vale a igualdade se, e somente se, para todo vetor $v \in T_pM$, implica que $D_v A = \beta(v) A$ em que D denota a derivada covariante e β é um funcional linear.

Capítulo 4

Caracterização de Hipersuperfícies CMC na esfera como toro de Clifford

Neste capítulo apresentamos os principais resultados deste trabalho. Trataremos de uma estimativa devido a Chen e Cheng (veja [4]) para o primeiro autovalor λ_1^J do operador de Jacobi em uma hipersuperfície n-dimensional compacta, não totalmente umbílica, com curvatura média H constante na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}(1)$. Denotaremos por $\phi = A - HI$ o operador sem traço, em que $|\phi|^2 = \mathrm{tr}(\phi^2) = |A|^2 - nH^2 \geqslant 0$ e a igualdade ocorre se, e somente se, a imersão é totalemnte umbílica. $|A|^2 = S$ denota o quadrado da segunda forma fundamental. Para iniciarmos lembremos que dada uma variação da hipersuperfície, a área da variação é dada por

$$A(t) = \int_M dA(t),$$

e o volume da variação é definido como sendo

$$V(t) = \frac{1}{n}\int_M \langle V_\varphi, N(t)\rangle dA(t),$$

em que $N(t)$ denota o normal unitário de V_φ. Salientamos o caso em que para todo t, se $V(t) = V(0)$, então dizemos que V_φ preserva volume. Dadas essas informações, podemos ter uma relação entre a curvatura média H e a variação V_φ pelo funcional área, isto é, se o vetor variacional for $\left.\frac{\partial V_\varphi}{\partial t}\right|_{t=0} = fN$ para uma função f diferenciável, então a variação é dita variação normal de φ. Como já mostramos em (2.1), a primeira variação do funcional área é dada por

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{t=0} = -\int_M H \cdot f \cdot dA,$$

em que $f = \left\langle \frac{V_\varphi}{\partial t}\Big|_{t=0}, N \right\rangle$. Assim, notemos que uma hipersuperfície compacta é mínima se, e somente se, $\frac{dA}{dt}\Big|_{t=0} = 0$. Como consequência, temos que hipersuperfícies mínimas compactas são pontos críticos do funcional área $A(t)$.

Vimos no Capítulo anterior estimativas para o primeiro autovalor do operador de Jacobi devido a Simons, Wu e Perdomo, onde eles consideraram hipersuperfícies mínimas na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$. De agora em diante faremos o estudo do caso de hipersuperfícies de curvatura média constante (CMC). Voltando ao operador de Jacobi, observe que podemos relacionar tal operador com a segunda variação da área, como visto em (2.5) por

$$\frac{d^2A(t)}{dt^2}\Big|_{t=0} = -\int_M f \cdot J \cdot f dA = -\int_M \frac{d}{dt}\langle nH, \frac{\partial F}{\partial t}\rangle dM,$$

em que $Jf = -\Delta f - (S+n)f$, e φ é mínima. Para o caso de hipersuperfícies de curvatura média constante, o operador de estabilidade ou de Jacobi é dado por

$$J = -\Delta - |\phi|^2 - n(1+H^2), \tag{4.1}$$

onde $|\phi|^2 = S - nH^2$. Desde que $|\phi|^2 - n(1+H^2)$ seja uma constante, o primeiro autovalor é dado por

$$\lambda_1^J = \lambda_1^\Delta - |\phi|^2 - n(1+H^2). \tag{4.2}$$

Em 2005 Alías, Barros e Brasil em [9] estenderam os resulados de Wu e Perdomo para o caso CMC obtendo caracterização de toros de Clifford. Eles provaram o seguinte.

Teorema 6 (Alias,Barros, Brasil. 2005)**.** *Se* $\varphi : M \to \mathbb{S}^{n+1}(1)$ *é uma hipersuperfície compacta n-dimensional com curvatura média* H *constante e diferente de zero na esfera unitária* $\mathbb{S}^{n+1}(1)$*, então* $\lambda_1^J \leqslant -n(1+H^2)$ *e* $\varphi : M \to \mathbb{S}^{n+1}(1)$ *é totalmente umbílica ou*

$$\lambda_1^J \leqslant -2n(1+H^2) + \frac{n(n-2)|H|}{\sqrt{n(n-1)}} \max \sqrt{S - nH^2} \tag{4.3}$$

e a igualdade existe se, e somente se, $\varphi : M \to \mathbb{S}^{n+1}(1)$ *é* $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{1-r^2})$*, com* $r^2 > \frac{1}{n}$ *para* $n \geqslant 2$*.*

De acordo com o Teorema 6 nota-se que, para $n = 2$, o limite superior para o primeiro autovalor do operador de Jacobi λ_1^J de uma hipersuperfície compacta não totalmente umbílica com curvatura média constante, depende somente da curvatura H e da dimensão. Por outro lado, para $n \geqslant 3$, o termo $\max \sqrt{S - nH^2}$ não se anula e, consequentemente, a estimativa (4.3) passa a depender da curvatura H, da dimensão n e da imersão φ.

Diante disso, em [4] Chen e Cheng propuseram o seguinte problema acerca do Teorema 6.

Problema 1. *Encontrar uma estimativa ótima para o primeiro autovalor do operador de Jacobi* λ_1^J *em uma hipersuperfície compacta não totalmente umbílica com curvatua média constante, dependendo apenas da curvatura média* H *e da dimensão* n*.*

Assim, chegamos ao resultado principal deste trabalho, que é uma resposta dada por Chen e Cheng (veja [4]) ao Problema 1, onde eles provaram o seguinte teorema.

Teorema 7 (Chen e Cheng, 2017)**.** *Seja* $\varphi : M \to \mathbb{S}^{n+1}(1)$ *uma hipersuperfície n-dimensional compacta não totalmente umbílica com curvatura média constante na esfera unitária* $\mathbb{S}^{n+1}(1)$*.*

(i) *Se* $2 \leqslant n \leqslant 4$ *ou* $n \geqslant 5$ *e* $n^2H^2 < \frac{16(n-1)}{n(n-4)}$, *então o primeiro autovalor do operador de Jacobi* λ_1^J *satisfaz*

$$\lambda_1^J \leqslant -n(1+H^2) - \frac{n(\sqrt{4(n-1)+n^2H^2} - (n-2)|H|)^2}{4(n-1)}, \tag{4.4}$$

onde a igualdade ocorre se, e somente se, $\varphi : M \to \mathbb{S}^{n+1}(1)$ *é isométrica a* $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{1-r^2})$ *com* $r > 0$ *satisfazendo*

$$\begin{cases} 1 > r^2 > \frac{1}{n}, & \textit{se} \quad 2 \leqslant n \leqslant 4, \\ \frac{n}{(n-2)^2} > r^2 > \frac{1}{n}, & \textit{se} \quad n \geqslant 5, \quad n^2H^2 < \frac{16(n-1)}{n(n-4)} \end{cases}$$

ou $\varphi : M \to \mathbb{S}^{n+1}(1)$ *é isométrica ao toro de Clifford* $\mathbb{S}^{n-k}\left(\sqrt{\frac{n-k}{n}}\right) \times \mathbb{S}^k\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right)$ *para* $k = 1, 2, \ldots, n-1$ *com* $H = 0$*.*

(ii) *Se* $n \geqslant 5$ *e* $n^2H^2 \geqslant \frac{16(n-1)}{n(n-4)}$, *então o primeiro autovalor* λ_1^J *do operador de Jacobi satisfaz*

$$\lambda_1^J \leqslant -2(n-1)(1+H^2) + \frac{(n-2)^4}{8(n-1)}H^2, \tag{4.5}$$

e vale a igualdade se, e somente se, $\varphi : M \to \mathbb{S}^{n+1}(1)$ *é isométrica ao* $\mathbb{S}^1\left(\frac{\sqrt{n}}{n-2}\right) \times \mathbb{S}^{n-1}\left(\frac{\sqrt{(n-1)(n-4)}}{n-2}\right)$.

Observemos os seguintes exemplos que serão úteis na prova do teorema principal.

Exemplo 2. *Para a esfera* $\mathbb{S}^n(r)$ *totalmente umbílica de raio* $r > 0$*, o primeiro autovalor é*

$$\lambda_1^J = \lambda_1^\Delta - n(1 + H^2) = -n(1 + H^2),$$

com $H = \frac{1}{r}$.

O próximo exemplo segue diretamente do Teorema 5.

Exemplo 3. *Para o Toro de Clifford* $\mathbb{S}^{n-k}\left(\sqrt{\frac{n-k}{n}}\right) \times \mathbb{S}^k\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right)$*,* $k = 1, 2, \ldots, n$ *o primeiro autovalor* $\lambda_1^J = -2n$ *com* $H = 0$.

No próximo exemplo iremos calcular o primeiro autovalor do operador de Jacobi de uma hipersuperfície em $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{1 - r^2})$.

Exemplo 4. *Para hipersuperfícies* $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{1 - r^2})$ *com* $0 < r < 1$ *as curvaturas principais são dadas por*

$$k_1 = -\frac{\sqrt{1 - r^2}}{r}, k_2 = \cdots = k_n = \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}}.$$

Para essa hipersuperfície, temos

$$nH = \frac{nr^2 - 1}{r\sqrt{1 - r^2}},$$

e

$$S = \frac{1 - 2r^2 + nr^4}{r^2(1 - r^2)}.$$

De fato, como $H = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n k_i$*, temos*

$$\begin{aligned} nH &= \sum_{i=1}^n k_i = -\frac{\sqrt{1 - r^2}}{r} + (n - 1)\frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} \\ &= \frac{-1 + r^2 + nr^2 - r^2}{r\sqrt{1 - r^2}} \\ &= \frac{nr^2 - 1}{r\sqrt{1 - r^2}}, \end{aligned} \tag{4.6}$$

e Calcular $S = ?$

$$\begin{aligned} S &= \left(-\frac{\sqrt{1 - r^2}}{r}\right)^2 + \left(\frac{r}{\sqrt{1 - r^2}}\right)^2 (n - 1) \\ &= \frac{1 - 2r^2 + nr^4}{r^2(1 - r^2)}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Agora, de (4.6)*, temos*

$$r^4 n^2(H^2 + 1) - r^2 n(nH^2 + 2) + 1 = 0.$$

Fazendo $r^2 = R$, *obtemos a seguinte equação biquadrada*

$$n^2(H^2+1)R^2 - (nH^2+2)nR + 1 = 0.$$

Daí, o dicriminante da equação acima é

$$n^2(nH^2+2)^2 - 4n^2(1+H^2) = n^2[(nH^2+2)^2 - 4(H^2+1)].$$

Portanto,

$$\begin{aligned} r^2 &= R = \frac{n(nH^2+2) \pm n\sqrt{(nH^2+2)^2 - 4(H^2+1)}}{2n^2(H^2+1)} \\ &= \frac{nH^2+2 \pm |H|\sqrt{n^2H^2+4(n-1)}}{2n(H^2+1)}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

De (4.6) *e* (4.7), *obtemos*

$$|\phi|^2 = S - nH^2 = \frac{n-1}{nr^2(1-r^2)}. \tag{4.9}$$

Substituindo (4.8) *em* (4.9), *temos*

$$|\phi|^2 = \frac{n\left(\sqrt{4(n-1)+n^2H^2} - (n-2)|H|\right)^2}{4(n-1)}.$$

Finalmente, pela definição do operador de estabilidade

$$\begin{aligned} \lambda_1^J &= \lambda_1^\Delta - |\phi|^2 - n(1+H^2) \\ &= -n(1+H^2) - \frac{n\left(\sqrt{4(n-1)+n^2H^2} - (n-2)|H|\right)^2}{4(n-1)}. \end{aligned}$$

Para $r^2 \geqslant \frac{1}{n}$, *temos que o primeiro autovalor* λ_1^J *do operador de Jacobi* J *em* $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{1-r^2})$ *satisfaz*

$$\lambda_1^J = \lambda_1^\Delta - |\phi|^2 - n(1+H^2),$$

i.e.,

$$\lambda_1^J = -n(1+H^2) - \frac{n\left(\sqrt{4(n-1)+n^2H^2} - (n-2)|H|\right)^2}{4(n-1)}. \tag{4.10}$$

Para $n \geqslant 5$ *e* $\frac{1}{n} \leqslant r^2 \leqslant \frac{n}{(n-2)^2}$, *temos que a hipersuperfície* $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{1-r^2})$ *satisfaz*

$$n^2H^2 < \frac{16(n-1)}{n(n-4)}$$

e analogamente como em (4.10)

$$\lambda_1^J = -n(1+H^2) - \frac{n\left(\sqrt{4(n-1)+n^2H^2} - (n-2)|H|\right)^2}{4(n-1)}.$$

Além disso, a hipersuperfície $\mathbb{S}^1\left(\frac{\sqrt{n}}{n-2}\right) \times \mathbb{S}^{n-1}\left(\frac{\sqrt{(n-1)(n-4)}}{n-2}\right)$ *satisfaz*

$$\lambda_1^J = -2(n-1)(1+H^2) + \frac{(n-2)^4}{8(n-1)}H^2,$$

com $n^2H^2 = \frac{16(n-1)}{n(n-4)}$,

Antes de iniciar a prova do Teorema 7, ainda necessitamos de dois resultados que serão usados na demonstração. O primeiro é uma *fórmula tipo Simons* que está relacionada ao Laplaciano da segunda forma fundamental (veja [12], [8] e [2], ou ainda [11] e [3]).

Proposição 9. *Seja* M^n *uma hipersuperfície imersa em* M^{n+1} *de curvatura seccional constante. Se* S *denota o quadrado da norma da segunda forma fundamental e a imersão tem curvatura média constante* H*, então*

$$\frac{1}{2}\Delta S = \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 + nS - n^2H^2 + nH\sum_i k_i^3 - S^2. \tag{4.11}$$

em que $k_i, i = 1, 2, \ldots, n$ *são as curvaturas principais.*

Demonstração. Para provar (4.11) usaremos essencialmente as equações de Gauss, Codazzi e a identidade de Ricci. Com estas relações e também usando o fato de que h_{ij} é simétrica em relação aos índices, temos que o Laplaciano de h_{ij} é dado por

$$\begin{aligned}
\Delta h_{ij} = \sum_k h_{ijkk} &= \sum_k h_{ikjk} \\
&= \sum_k \left(h_{ikkj} + \sum_m h_{mk}R_{mijk} + \sum_m h_{im}R_{mkjk}\right) \\
&= \sum_k h_{kkij} + \sum_{k,m} h_{mk}R_{mijk} + \sum_{k,m} h_{im}R_{mkjk}.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Observe que sendo $S = \sum_{ij} h_{ij}^2$, temos

$$\begin{aligned}
\Delta S &= \sum_{i,j} \Delta h_{ij}^2 \\
&= 2h_{ij}\Delta h_{ij} + 2 \mid \nabla h_{ij} \mid^2 .
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Agora, substituindo (4.13) em (4.12) obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta S &= h_{ij}\Delta h_{ij} + |\nabla h_{ij}|^2\\ &= h_{ij}\left(\sum_k h_{kkij} + \sum_{k,m} h_{mk}R_{mijk} + \sum_{k,m} h_{im}R_{mkjk}\right) + |\nabla h_{ij}|^2\\ &= h_{ij}\sum_k h_{kkij} + h_{ij}\sum_{k,m} h_{mk}R_{mijk} + h_{ij}\sum_{k,m} h_{im}R_{mkjk} + |\nabla h_{ij}|^2 . \quad (4.14)\end{aligned}$$

Calculando separadamente cada uma das parcelas do lado direito de (4.14), temos que

$$\sum_k h_{kkij} = \sum_k d(h_{kki})(e_j) + \sum_{k,t} h_{tki}\omega_{tk}(e_j) + \sum_{k,t} h_{kti}\omega_{tk}(e_j) + \sum_{k,t} h_{kkt}\omega_{ti}(e_j), \quad (4.15)$$

onde desenvolvendo a primeira parcela de (4.15) temos ainda

$$\begin{aligned}\sum_k d(h_{kki})(e_j) &= \sum_k e_j\left(d(h_{kk})(e_i) + 2\sum_m h_{mk}\omega_{mk}(e_i)\right)\\ &= e_j(e_i\left(\sum_k h_{kk}\right)) + 2e_j\left(\sum_{k,m} h_{mk}\omega_{mk}(e_i)\right). \quad (4.16)\end{aligned}$$

Como as formas de conexão ω_{mk} são antisimétricas e h_{ij} são simétricas podemos trocar os índices k e m na segunda parcela do lado direito de (4.16) e assim

$$\sum_{k,m} h_{mk}\omega_{mk}(e_i) = \sum_{k,m} h_{km}\omega_{km}(e_i) = -\sum_{k,m} h_{mk}\omega_{mk}(e_i),$$

donde concluímos que

$$\sum_{k,m} h_{mk}\omega_{mk}(e_i) = 0.$$

Desde que $\sum_k h_{kk} = nH$ e H é constante, temos que a primeira parcela de (4.16) também se anula, donde segue que

$$\sum_k d(h_{kki})(e_j) = 0.$$

Analogamente, obtemos

$$\sum_{k,t} h_{tki}\omega_{tk}(e_j) = \sum_{k,t} h_{kti}\omega_{tk}(e_j) = 0.$$

Agora para a última parcela de (4.15), temos

$$
\begin{aligned}
\sum_{k,t} h_{kkt}\omega_{ti}(e_j) &= \sum_t \left(\sum_k h_{kkt}\omega_{ti}(e_j)\right)\\
&= \sum_k \left(d(h_{kk})(e_t) + 2\sum_m h_{mk}\omega_{mk}(e_t)\right)\omega_{ti}(e_j)\\
&= \sum_k \left((e_t)(h_{kk}) + 2\sum_m h_{mk}\omega_{mk}(e_t)\right)\omega_{ti}(e_j)\\
&= (e_t)\left(\sum_k h_{kk}\right)\omega_{ti}(e_j) + 2\left(\sum_{k,m} h_{mk}\omega_{mk}(e_t)\right)\omega_{ti}(e_j) \qquad (4.17)
\end{aligned}
$$

Usando novamente o fato de que as formas de conexão ω_{mk} são antisimétricas e h_{ij} são simétricas, e sendo $\sum_k h_{kk} = nH$, com H constante, concluímos que

$$\sum_{k,m} h_{mk}\omega_{mk}(e_t) = 0.$$

Finalmente, podemos escrever (4.17) na forma

$$
\begin{aligned}
\sum_{k,t} h_{kkt}\omega_{ti}(e_j) &= \sum_t \left(e_t\left(\sum_k h_{kk}\right)\omega_{ti}(e_j)\right)\\
&= \sum_t (e_t(nH))\omega_{ti}(e_j)\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, a primeira parcela do lado direito de (4.14) é igual a zero. Agora analisemos a segunda e terceira parcelas do lado direito de (4.14). Por abuso de notação vamos denotá-las por Q, i.e.,

$$Q = h_{ij}\sum_{k,m} h_{mk}R_{mijk} + h_{ij}\sum_{k,m} h_{im}R_{mkjk}. \qquad (4.18)$$

Como anteriormente, calculemos separadamente cada uma das parcelas do lado direito de (4.18). Usando a equação de Gauss, já mostrada em (2.21), temos

$$\sum_{k,m} h_{mk}R_{mijk} = \sum_{k,m}\left[h_{mk}\left(\delta_{mj}\delta_{ik} - \delta_{mk}\delta_{ij}\right) - h_{mk}(h_{mj}h_{ik} - h_{mk}h_{ij})\right]. \qquad (4.19)$$

Fazendo $i = j$ em (4.19), temos

$$
\begin{aligned}
\sum_{k,m} h_{mk}R_{miik} &= \sum_{k\neq m}\left[h_{mk}(\delta_{mi}\delta_{ik} - \delta_{mk}\delta_{ii})\right] + \sum_{k=m}\left[h_{mm}(\delta_{mi}\delta_{im} - \delta_{mm}\delta_{ii})\right]\\
&\quad - \sum_{k,m}\left[h_{mk}(h_{mj}h_{ik} - h_{mk}h_{ij})\right]\\
&= h_{ii} - \delta_{ii}\sum_m h_{mm} - \sum_{k,m}\left[h_{mk}(h_{mk}h_{ik} - h_{mk}h_{ij})\right].
\end{aligned}
$$

Novamente fazendo $i \neq j$ em (4.19), temos

$$
\begin{aligned}
\sum_{k,m} h_{mk} R_{mijk} &= \sum_{k \neq m} [h_{mk}(\delta_{mj}\delta_{ik} - \delta_{mk}\delta_{ij})] + \sum_{k=m} [h_{mm}(\delta_{mj}\delta_{im} - \delta_{mm}\delta_{ij})] \\
&\quad - \sum_{k,m} [h_{mk}(h_{mj}h_{ik} - h_{mk}h_{ij})] \\
&= h_{ji} - \delta_{ij} \sum_{m} h_{mm} - \sum_{k,m} [h_{mk}(h_{mj}h_{ik} - h_{mk}h_{ij})] \,.
\end{aligned}
$$

Em qualquer caso, temos que, para todo $1 \leqslant i, j \leqslant n$,

$$
\sum_{k,m} h_{mk} R_{mijk} = h_{ji} - \delta_{ij} \sum_{m} h_{mm} - \sum_{k,m} [h_{mk}(h_{mj}h_{ik} - h_{mk}h_{ij})] \,. \tag{4.20}
$$

Agora, para a segunda parcela do lado direito de (4.18), temos

$$
\begin{aligned}
\sum_{k,m} h_{im} R_{mkjk} &= \sum_{k,m} [h_{mi}(\delta_{mj}\delta_{kk} - \delta_{mk}\delta_{kj}) - h_{mi}(h_{mj}h_{kk} - h_{mk}h_{kj})] \\
&= \sum_{k \neq m} [h_{mi}(\delta_{mj}\delta_{kk} - \delta_{mk}\delta_{kj})] + \sum_{k=m} [h_{mi}(\delta_{mj}\delta_{mm} - \delta_{mm}\delta_{mj})] \\
&\quad - \sum_{k,m} [h_{mi}(h_{mj}h_{kk} - h_{mk}h_{kj})] \\
&= h_{ij}(n-1) - \sum_{k,m} [h_{mi}(h_{mj}h_{kk} - h_{mk}h_{kj})] \,. \qquad (4.21)
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
Q &= nh_{ij}^2 - \delta_{ij} \sum_{m} h_{ij}h_{mm} - \sum_{k,m} [h_{ij}h_{mk}(h_{mj}h_{ik} - h_{mk}h_{mj})] \\
&\quad - \sum_{k,m} [h_{ij}h_{mi}(h_{mj}h_{kk} - h_{mk}h_{ij})] \\
&= nh_{ij}^2 - \delta_{ij} \sum_{m} h_{ij}h_{mm} - \sum_{k,m} h_{ij}h_{mk}h_{mj}h_{ik} + \sum_{k,m} h_{ij}^2 h_{mk}^2 \\
&\quad - \sum_{k,m} h_{ij}h_{mi}h_{mj}h_{kk} + \sum_{k,m} h_{ij}h_{mi}h_{mk}h_{kj}. \qquad (4.22)
\end{aligned}
$$

Podemos mudar os índices m e k para os somatórios da terceira e sexta parcelas de (4.22) e assim obter

$$
Q = nh_{ij}^2 - \delta_{ij} \sum_{m} h_{ij}h_{mm} + \sum_{k,m} h_{ij}^2 h_{mk}^2 - \sum_{k,m} h_{kj}h_{kj}h_{mm}h_{ij}. \tag{4.23}
$$

Portanto, a igualdade (4.14) pode ser escrita como

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta S &= Q + |\nabla h_{ij}|^2 \\
&= \sum_{i,j} h_{ij}^2 - \sum_{i,j} \left(\delta_{ij} \sum_{i,j} h_{ij}h_{mm} \right) + \sum_{i,j,k,m} h_{ij}^2 h_{mk}^2 \\
&\quad - \sum_{i,j,k,m} h_{ki}h_{kj}h_{mm}h_{ij} + \sum_{i,j} |\nabla h_{ij}|^2. \qquad (4.24)
\end{aligned}
$$

Uma vez que

$$n\sum_{i,j} h_{ij}^2 = nS, \tag{4.25}$$

e

$$\sum_{i,j}\left(\delta_{ij}\sum_{i,j} h_{ij}h_{mm}\right) = \sum_{ij}(\delta_{ij}h_{ij}nH) = n^2H^2, \tag{4.26}$$

e

$$\sum_{i,j,k,m} h_{ij}^2h_{mk}^2 = \sum_{i,j}\left(h_{ij}^2\sum_{k,m} h_{mk}^2\right) = S^2, \tag{4.27}$$

e

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k,m} h_{ki}h_{kj}h_{mm}h_{ij} &= \sum_{i,j,k}\left(h_{ki}h_{kj}h_{ij}\sum_{m} h_{mm}\right)\\ &= nH\sum_{i,j,k} h_{ki}h_{kj}h_{ij} = nH\mathrm{tr}(A^3) = \sum_{i} k_i^3, \end{aligned}\tag{4.28}$$

e22 e

$$\sum_{i,j} |\nabla h_{ij}|^2 = \sum_{ij}|\sum_{k} e_k(h_{ij})e_k|^2 = \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2, \tag{4.29}$$

então substituindo (4.25), (4.26), (4.27), (**??**) e (4.29) em (4.24) segue finalmente que

$$\frac{1}{2}\Delta S = \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 + nS - n^2H^2 + nH\sum_{i} k_i^3 - S^2.$$

□

O segundo resultado é o conhecido *Lema de Okumura*, para maiores detalhes veja [1], que diz o seguinte.

Lema 3. *Sejam* μ_i *com* $i = 1, 2, \ldots, n$ *números reais tais que* $\sum_{i} \mu_i = 0$ *e* $\sum_{i} \mu_i^2 = B^2$, *com* $B = \mathrm{const} \geqslant 0$ *então*

$$-\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}B^3 \leqslant \sum_{i} \mu_i^3 \leqslant \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}B^3,$$

e a igualdade é válida se, e somente se, $(n-1)$ *dos* μ_i *são iguas a* $\frac{B}{\sqrt{n(n-1)}}$ *e* $\mu_1 = -\sqrt{\frac{n-1}{n}}B$ *ou* $(n-1)$ *dos* μ_i *são iguas a* $-\frac{B}{\sqrt{n(n-1)}}$ *e* $\mu_1 = \sqrt{\frac{n-1}{n}}B$.

Demonstração. Denotemos por $B = |\phi|^2$. Se $B^2 = 0$ nada há o que provar. Suponha que $B^2 \neq 0$ e definamos a função $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $g(\mu_1, \ldots, \mu_n) = \sum_i \mu_i^3$

tais que $\sum_i \mu_i = 0$ e $\sum_i \mu_i^2 = B^2$. Vamos usar o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar os pontos críticos de g. Sendo $\varphi_1(\mu_1, \ldots, \mu_n) = \sum_i \mu_i = 0$ e $\varphi_2(\mu_1, \ldots, \mu_n) = \sum_i \mu_i^2 = B^2$, temos

$$\begin{cases} \nabla g = \alpha \nabla \varphi_1 + \lambda \nabla \varphi_2 \\ g_{\mu_i} = \alpha \varphi_{1_{\mu_i}} + \lambda \varphi_{2_{\mu_i}} \\ 3\sum_i \mu_i^2 = \alpha + \lambda 2 \sum_i \mu_i. \end{cases}$$

Prosseguindo, temos que

$$\begin{aligned} \nabla g &= 3\alpha \nabla \varphi_1 + \frac{3}{2}\lambda \nabla \varphi_2 \\ 3(\mu_1^2, \ldots, \mu_n^2) &= 3(\alpha, \ldots, \alpha) + \frac{3}{2}(2\lambda\mu_1, \ldots, 2\lambda\mu_n) \\ (3\mu_1^2, \ldots, 3\mu_n^2) &= (3\alpha, \ldots, 3\alpha) + (3\lambda\mu_1, \ldots, 3\lambda\mu_n). \end{aligned}$$

Daí, resulta que

$$\mu_i^2 = \alpha + \lambda\mu_i,$$

o que implica em

$$\mu_i^2 - \lambda\mu_i - \alpha = 0,$$

com $i = 1, 2, \ldots, n$. Veja que o discriminante da expressão acima é $\Delta = \lambda^2 + 4\alpha$. Assim,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_i \mu_i^2 - \sum_i \lambda\mu_i - \sum_i \alpha \\ &= B^2 - n\alpha. \end{aligned}$$

Portanto $\alpha = \frac{B^2}{n} \geqslant 0$. Isto implica que $\Delta = \lambda^2 + \frac{4B^2}{n}$ é positivo, e as quações possuem duas raízes distintas, uma delas é positiva e a outra é negativa, i.e., $\mu_i = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2+4\alpha}}{2}$ e $\sqrt{\lambda^2 + 4\alpha} = \sqrt{\lambda^2 + \frac{4B^2}{n}}$. Daí, temos que os pontos críticos são dados por

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_p = s > 0,$$

e

$$\mu_{p+1} = \mu_{p+2} = \ldots = \mu_n = -t < 0.$$

em que $n+p$ denota a dimensão da variedade. Agora, utilizando as condições dadas para os pontos críticos, temos

$$B^2 = \sum_i \mu_i^2 = ps^2 + (n-p)t^2, \tag{4.30}$$

$$0 = \sum_i \mu_i = ps - (n-p)t \Rightarrow t = \frac{ps}{(n-p)}, \tag{4.31}$$

e

$$g = \sum_i \mu_i^3 = ps^3 - (n-p)t^3. \tag{4.32}$$

Isolando t em (4.31) e substituindo em (4.30) temos o seguinte.

$$\begin{aligned}
B^2 &= ps^2 + (n-p)t^2 = (n-p)ts + (n-p)t^2 = (n-p)(ts + t^2) \\
&= (n-p)t(s+t) = (n-p)\frac{ps}{(n-p)}\left(s + \frac{ps}{n-p}\right) = ps\left(\frac{s(n-p)+ps}{n-p}\right) \\
&= \frac{ps(sn - sp + ps)}{n-p} = \frac{ps^2 n}{n-p}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$s^2 = \frac{(n-p)}{pn}B^2. \tag{4.33}$$

Analogamente, isolando s em (4.31), isto é, $s = \frac{t(n-p)}{p}$ e substituindo em (4.30) temos

$$\begin{aligned}
B^2 &= p\frac{t^2(n-p)^2}{p^2} + (n-p)t^2 = t^2\left(\frac{(n-p)^2}{p} + (n-p)\right) \\
&= t^2\left(\frac{n^2 - 2np + p^2 + pn - p^2}{p}\right) = t^2\left(\frac{n^2 - pn}{p}\right).
\end{aligned}$$

Daí

$$t^2 = \frac{pB^2}{(n-p)n}. \tag{4.34}$$

Substituindo (4.33) e (4.34) em (4.32) obtemos

$$g = \sum_i \mu_i^3 = ps^3 - (n-p)t^3 = ps\frac{n-p}{pn}B^2 - (n-p)t\frac{pB^2}{(n-p)n}.$$

Isto mostra que g cresce quando p cresce. Logo, g alcança um máximo em p, e esse máximo é dado fazendo $p = 1$ e $s = (n-1)t$ em g. Fazendo isto, temos que

$$\begin{aligned}
g &= s^3 - (n-p)t^3 = [(n-1)t]^3 - (n-1)t^3 \\
&= [(n-1)^3 - (n-1)]t^3 = (n-2)n(n-1)t^3 \\
&= \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}B^3.
\end{aligned}$$

o que completa a prova do lema. □

Agora estamos em condições de provar o Teorema 7. Para a prova usaremos todos os resultados já vistos nas Seções anteriores, mas sempre que se fizer necessário, lembraremos algumas identidades.

Prova do Teorema 7. (i) Se $H = 0$, temos pelo Teorema 5 que $\lambda_i^J \leqslant -2n$ e $\lambda_i^J = -2n$ se, e somente se, $\varphi : M \to \mathbb{S}^{n+1}(1)$ é isométrica ao toro de Clifford $\mathbb{S}^{n-k}\left(\sqrt{\frac{n-k}{n}}\right) \times \mathbb{S}^k\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right)$, para $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Para $H \neq 0$, temos pela Proposição 4.11 que

$$\frac{1}{2}\Delta S = \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 + nS - n^2H^2 + nHf_3 - S^2, \tag{4.35}$$

em que $f_3 = \sum_i^n k_i^3$, e k_i denota as curvaturas princiais, $i = 1, 2, \ldots, n$. Escrevendo $\mu_i = k_i - H$, temos

$$\begin{aligned} f_3 = \sum_i^n k_i^3 &= \sum_i^n (\mu_i + H)^3 = \sum_i^n \mu_i^3 + \sum_i^n 3\mu_i^2 H + \sum_i^n 3\mu_i H^2 + \sum_i^n H^3 \\ &= \sum_i^n \mu_i^3 + 3\sum_i^n \mu_i^2 H + 3\sum_i^n \mu_i H^2 + nH^3 \\ &= \sum_i^n \mu_i^3 + 3\sum_i^n \mu_i^2 H + 3\sum_i^n (k_i - H)H^2 + nH^3 \\ &= \sum_i^n \mu_i^3 + 3\sum_i^n \mu_i^2 H + 3\left[\sum_i^n k_i - \sum_n H\right] H^2 + nH^3 \\ &= \sum_i^n \mu_i^3 + 3\sum_i^n \mu_i^2 H + 3\left[nH - nH\right] H^2 + nH^3 \\ &= \sum_i^n \mu_i^3 + 3\sum_i^n \mu_i^2 H + nH^3. \end{aligned}$$

Denotando $\sum_i^n \mu_i^3 = |\phi|_3^2$ e

$$|\phi|^2 = \sum_i^n \mu_i^2 = S - nH^2, \tag{4.36}$$

podemos escrever a expressão acima como

$$f_3 = |\phi|_3^2 + 3|\phi|^2 H + nH^3. \tag{4.37}$$

Utilizando (4.35) e o *Lema de Okumura*, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 = \frac{1}{2}\Delta S &= \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 + nS - n^2H^2 + nHf_3 - S^2 \\
&= \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 + n(|\phi|^2 + nH^2) - n^2H^2 + nH(|\phi|_3^2 + 3H|\phi|^2 + nH^3) \\
&\quad -(|\phi|^2 + nH^2)^2 \\
&= \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 + n|\phi|^2 + n^2H^2 - n^2H^2 + nH|\phi|_3^2 + nH^2|\phi|^2 + n^2H^4 \\
&\quad -(|\phi|^2)^2 - 2|\phi|^2 nH^2 - n^2H^4 \\
&= \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 + n|\phi|^2 - (|\phi|^2)^2 - |\phi|^2 nH^2 + n|\phi|_3^2 H \\
&\geqslant \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 + |\phi|^2(n - |\phi|^2 + nH^2) \\
&\quad + nH\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}(|\phi|^2)^{\frac{3}{2}}. \qquad (4.38)
\end{aligned}$$

Assim, escrevemos

$$\Delta|\phi|^2 \geqslant 2\left(\sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 + |\phi|^2(n - |\phi|^2 + nH^2) + nH\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}(|\phi|^2)^{\frac{3}{2}}\right). \qquad (4.39)$$

A partir daí, vamos considerar uma constante $\alpha > 0$ e $\epsilon > 0$ e a função

$$f_\epsilon = (|\phi|^2 + \epsilon)^\alpha,$$

que é positiva. Utilizando (4.39), exibimos o Laplaciano da função f_ϵ

$$\begin{aligned}
\Delta f_\epsilon &= \alpha(\alpha-1)(|\phi|^2+\epsilon)^{\alpha-2}|\nabla(|\phi|^2)|^2 + \alpha(|\phi|^2+\epsilon)^{\alpha-1}\Delta|\phi|^2 \\
&\geqslant \alpha(\alpha-1)(|\phi|^2+\epsilon)^{\alpha-2}|\nabla(|\phi|^2)|^2 \\
&\quad +2\alpha(|\phi|^2+\epsilon)^{\alpha-1}\left(\sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 + |\phi|^2(n - |\phi|^2 + nH^2) + nH\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}(|\phi|^2)^{\frac{3}{2}}\right).
\end{aligned}$$

Como H é constante, temos

$$\nabla_k(nH) = \nabla\left(\sum_{i=1}^n h_{ii}\right) = \sum_{i=1}^n h_{ikk} = 0.$$

Alem disso, veja que

$$\begin{aligned}
|\nabla(|\phi|^2)|^2 &= (|\phi|^2)'(|\phi|^2)' = \sum_{i=1}^n\left(2\sum_i \mu_i d\mu_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n\left(2\sum_i \mu_i h_{ikk}\right)^2 \\
&= 4\mu_i^2 h_{ikk}^2 \leqslant 4|\phi|^2\sum_{i,k=1}^n h_{ikk}^2 \\
&\leqslant 4|\phi|^2\sum_{i,k=1}^n h_{ikk}^2, \qquad (4.40)
\end{aligned}$$

e aplicando a desigualdade de Newton obtemos

$$h_{kkk}^2 \leqslant (n-1)\sum_{i\neq k} h_{iik}^2. \tag{4.41}$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned}
|\nabla(|\phi|^2)|^2 &\leqslant 4|\phi|^2\sum_{i,k=1}^{n} h_{iik}^2 \\
&= 4|\phi|^2\left(\sum_{k=1}^{n} h_{kkk}^2 + \sum_{1\neq k} h_{iik}^2\right) \\
&= 4|\phi|^2\left(\frac{n}{n+2}\sum_{i=1}^{n} h_{kkk}^2 + \frac{2}{n+2}\sum_{i=1}^{n} h_{kkk}^2 + \sum_{i\neq k} h_{iik}^2\right) \\
&= \frac{4|\phi|^2 n}{n+2}\sum_{i=1}^{n} h_{kkk}^2 + \frac{8|\phi|^2}{n+2}\sum_{i=1}^{n} h_{kkk}^2 + 4|\phi|^2\sum_{i\neq k} h_{iik}^2 \\
&\leqslant \frac{4|\phi|^2 n}{n+2}\sum_{i=1}^{n} h_{kkk}^2 + \frac{8|\phi|^2}{n+2}\sum (n-1)\sum_{i\neq k} h_{iik}^2 + 4|\phi|^2\sum_{i\neq k} h_{iik}^2 \\
&= \frac{4|\phi|^2 n}{n+2}\sum_{i=1}^{n} h_{kkk}^2 + \frac{8|\phi|^2 n}{n+2}\sum_{i\neq k} h_{iik}^2 - \frac{8|\phi|^2}{n+2}\sum_{i\neq k} h_{iik}^2 + 4|\phi|^2\sum_{i\neq k} h_{iik}^2 \\
&= \frac{4|\phi|^2 n}{n+2}\sum_{i=1}^{n} h_{kkk}^2 + \frac{8|\phi|^2 n}{n+2}\sum_{i\neq k} h_{iik}^2 - \frac{8|\phi|^2}{n+2}\sum_{i\neq k} h_{iik}^2 \\
&\quad + \frac{4|\phi|^2 n}{n+2}\sum_{i\neq k} h_{iik}^2 + \frac{8|\phi|^2}{n+2}\sum_{i\neq k} h_{iik}^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$|\nabla|\phi|^2|^2 \leqslant \frac{4|\phi|^2 n}{n+2}\left(\sum_{k=1}^{n} h_{kkk}^2 + 3\sum_{i\neq k} h_{iik}^2\right). \tag{4.42}$$

Pela definição do primeiro autovalor do operador de Jacobi temos,

$$\begin{aligned}
\lambda_1^J\int_M f_\epsilon^2 dA &\leqslant -\int_M f_\epsilon J f_\epsilon dA \\
&\leqslant -\int_M f_\epsilon\left(\Delta f_\epsilon + (S+n)f_\epsilon\right) dA \\
&= -\int_M f_\epsilon \Delta f_\epsilon dA - \int_M f_\epsilon^2 (S+n) dA.
\end{aligned}\tag{4.43}$$

Tomando uma constante qualquer β, reescrevemos (4.43)

$$\begin{aligned}
\lambda_1^J\int_M f_\epsilon^2 dA &\leqslant -\int_M f_\epsilon\Delta f_\epsilon dA + \beta\int_M f_\epsilon\Delta f_\epsilon dA - \int_M f_\epsilon^2(S+n)dA - \beta\int_M f_\epsilon\Delta f_\epsilon dA \\
&= -\beta\int_M f_\epsilon\Delta f_\epsilon dA - \int_M \left[(1-\beta)\, f_\epsilon\Delta f_\epsilon + (S+n)f_\epsilon^2\right] dA.
\end{aligned}\tag{4.44}$$

Usando a Primeira Identidade de Green, temos

$$\begin{aligned}
\lambda_1^J \int_M f_\epsilon^2 dA &\leqslant \beta \int_M |\nabla f_\epsilon|^2 dA - \int_M f_\epsilon (1-\beta) \\
&\quad \times \left[\alpha(\alpha-1)(|\phi|^2+\epsilon)^{\alpha-2}|\nabla|\phi|^2|^2 + \alpha(|\phi|^2+\epsilon)^{\alpha-1}\Delta|\phi|^2\right] dA \\
&\quad - \int_M f_\epsilon(1-\beta)(|\phi|^2+nH^2+n) f_\epsilon dA. \\
&= \beta \int_M |\nabla f_\epsilon|^2 - \int_M \left[f_\epsilon(1-\beta)\alpha(\alpha-1)(|\phi|^2+\alpha)^{\alpha-2)}|\nabla|\phi|^2|^2\right] dA \\
&\quad - \int_M \left[f_\epsilon(1-\beta)\alpha(|\phi|^2+\epsilon)^{\alpha-1}\Delta|\phi|^2 + (|\phi|^2+nH^2+n)f_\epsilon^2\right] dA. \\
&= -\alpha \int_M \left[f_\epsilon(\alpha-1-\alpha\beta-\beta)(|\phi|^2+\epsilon)^{\alpha-2}|\nabla|\phi|^2|^2\right] dA \\
&\quad - \int_M \left[\frac{f_\epsilon \alpha(1-\beta) f_\epsilon}{|\phi|^2+\epsilon}\Delta|\phi|^2 + (|\phi|^2+nH^2+n)f_\epsilon^2\right] dA. \\
&= \alpha \int_M \left[f_\epsilon(1+\alpha\beta-\alpha-\beta)(|\phi|^2+\epsilon)^{\alpha-2}|\nabla|\phi|^2|^2\right] dA \\
&\quad - \int_M f_\epsilon^2 \left\{\frac{\alpha(1-\beta)}{|\phi|^2+\epsilon}\Delta|\phi|^2 + |\phi|^2 + nH^2 + n\right\} dA.
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Para prosseguir, sejam as constantes α e β satisfazendo

$$\alpha > \frac{n-2}{4n}, \tag{4.46}$$

e

$$1-\beta = \frac{2n\alpha}{4n\alpha+2-n}. \tag{4.47}$$

Veja que de (4.47) obtemos

$$(1-\beta)4n\alpha + 2(1-\beta) - n(1-\beta) = 2n\alpha,$$

i.e.,

$$(n-2)(1-\beta) - 4n\alpha(1-\beta) + 2n\alpha = 0. \tag{4.48}$$

Desde que

$$\sum_{i,j,k=1}^{n} h_{ijk}^2 = \sum_{k=1}^{n} h_{kkk}^2 + 3\sum_{i\neq k}^{n} h_{iik}^2 + \sum_{i\neq j\neq k\neq i}^{n} h_{ijk}^2, \tag{4.49}$$

obtemos de (4.42) que

$$\begin{aligned}
&(1+2\alpha\beta-\beta-\alpha)|\nabla|\phi|^2|^2 - 2(1-\beta)(|\phi|^2+\epsilon)\sum_{i,j,k=1}^{n} h_{ijk}^2 \\
\leqslant\ & \frac{2}{n+2}|\phi|^2\left((n-2)(1-\beta) - 4n\alpha(1-\beta) + 2n\alpha\right) \\
&\times \left(\sum_{k=1}^{n} h_{kkk}^2 + 3\sum_{i\neq k} h_{iik}^2\right) = 0.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Assim, substituindo (4.50) em (4.45), podemos deduzir que

$$
\begin{aligned}
\lambda_1^J \int_M f_\epsilon^2 dA \leqslant{}& \alpha \int_M f_\epsilon (|\phi|^2+\epsilon)^{(\alpha-2)} \\
& \times \left\{ (1+2\alpha\beta-\beta-\alpha)|\nabla|\phi|^2|^2 - 2(1-\beta)(|\phi|^2+\epsilon)\sum_{i,j,k=1}^{n} h_{ijk}^2 \right\} dA \\
& - \int_M f_\epsilon^2 \frac{\alpha(1-\beta)}{|\phi|^2+\epsilon} \\
& \times \left(2\sum_{i,j,k=1}^{n} h_{ijk}^2 + |\phi|^2(n-|\phi|^2+nH^2+nH\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}(|\phi|^2)^{\frac{3}{2}} \right) dA \\
& - \int_M f_\epsilon^2 (|\phi|^2+nH^2+n) dA. \\
={}& \int_M f_\epsilon^2 \frac{|\phi|^2}{|\phi|^2+\epsilon}\left[\left(2\alpha(1-\beta)(-|\phi|^2+n+nH^2)+nH\right)\right] dA. \\
={}& -\int_M f_\epsilon^2 \frac{|\phi|^2}{|\phi|^2+\epsilon} 2\alpha(1-\beta)(n+nH^2) dA - \int_M f_\epsilon^2 \frac{|\phi|^2}{|\phi|^2+\epsilon}(n+nH^2) dA \\
& - \int_M f_\epsilon^2 \frac{|\phi|^2}{|\phi|^2+\epsilon} \\
& \times \left(|\phi|^2(1-2\alpha)(1-\beta) - nH\frac{2\alpha(1-\beta)(n-2)(|\phi|^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{n(n-1)}} + \epsilon \right) dA. \qquad (4.51)
\end{aligned}
$$

Observe que para $1-2\alpha(1-\beta)>0$, temos de (4.51) que

$$
\begin{aligned}
\lambda_1^J \int_M f_\epsilon^2 dA \leqslant{}& \int_M f_\epsilon^2 \frac{|\phi|^2}{|\phi|^2+\epsilon}\left(\frac{\alpha^2(1-\beta)^2(n-2)^2}{(1-2\alpha(1-\beta))n(n-1)}(nH)^2 - \epsilon \right) dA \\
& -2\alpha(1-\beta)(n+nH^2) \\
& \times \int_M f_\epsilon^2 \frac{|\phi|^2}{|\phi|^2+\epsilon} dA - (n+nH^2)\int_M f_\epsilon^2 dA. \qquad (4.52)
\end{aligned}
$$

Como φ é não totalmente umbílica, temos de (4.36) que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_M f_\epsilon^2 dA = \lim_{\epsilon\to 0}\int_M (|\phi|^2)+\epsilon)^2 dA = \int_M (S-nH^2)^2 dA > 0.$$

Assim, fazendo $\epsilon \to 0$ em (4.52) obtemos que

$$\lambda_1^J \leqslant -(1+2\alpha(1-\beta))n(1+H^2) + \frac{\alpha^2(1-\beta)^2(n-2)^2}{(1-2\alpha(1-\beta))n(n-1)}n^2H^2. \qquad (4.53)$$

Agora, analisemos os casos para a dimensão n. De fato, se $n=2$ em (4.53), temos

$$\lambda_1^J \leqslant -(1+2\alpha(1-\beta))n(1+H^2). \qquad (4.54)$$

Assim, tomando $\beta=\frac{1}{2}$ e $0<\alpha<1$ em (4.54), obtemos

$$\lambda_1^J \leqslant -(1+2\alpha\left(1-\frac{1}{2}\right)n(1+H^2) = -\left(1+\frac{2\alpha}{2}\right)n(1+H^2) = -2n(1+H^2). \qquad (4.55)$$

Para $2 < n \leqslant 4$ ou $n \geqslant 5$ e $n^2H^2 < \frac{16(n-1)}{n(n-4)}$, observe que

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{(n-2)^2H^2}{4(n-1)+n^2H^2}}\right) > \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2n}}. \tag{4.56}$$

Voltando à igualdade (4.48), temos

$$(1-\beta)(4n\alpha + 2 - n) = 2n\alpha,$$

i.e.,

$$(n-2)(1-\beta) + 2n[\alpha - 2\alpha(1-\beta)] = 0. \tag{4.57}$$

Note que $1 - 2\alpha(1-\beta) > 0$ se, e somente se

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2n}} < \alpha < \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2n}}. \tag{4.58}$$

Agora, defina a função auxiliar

$$\omega(\alpha) = \alpha(1-\beta) = \frac{2n\alpha^2}{4n\alpha + 2 - n}.$$

Observe que $\omega(\alpha)$ é uma função crescente em α, para $\alpha > \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$. De fato,

$$\omega'(\alpha) = 1 - \beta = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0.$$

Além disso, nos pontos $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ e $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2n}}$, temos

$$\begin{aligned}\omega\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) &= \frac{2n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)^2}{4n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) + 2 - n} = \frac{\frac{n}{2} - 2 + \frac{2}{n}}{n-2} = \frac{\frac{n^2-4n+4}{2n}}{n-2} \\ &= \frac{(n-2)(n-2)}{2n(n-2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n},\end{aligned} \tag{4.59}$$

e

$$\begin{aligned}\omega\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) &= \frac{2n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right)^2}{4n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) + 2 - n} = \frac{\frac{n}{2} + \frac{2n}{\sqrt{2n}} + 1}{n + \frac{4n}{\sqrt{2n}} + 2} \\ &= \frac{2n^2 + 4n\sqrt{2n} + 4n}{4n^2 + 8n\sqrt{2n} + 8n} = \frac{1}{2}.\end{aligned} \tag{4.60}$$

Veja ainda que a existência de α tal que

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n} < \alpha < \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

segue das expressões (4.56) e (4.58). Usando que $\omega(\alpha)$ é crescente e vale (4.59) e (4.60) temos que

$$\omega\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right) < \omega(\alpha) < \omega\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right),$$

o que implica em

$$\omega(\alpha) = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{(n-2)^2H^2}{4(n-1)+n^2H^2}}\right). \tag{4.61}$$

Assim, usando a definição de $\omega(\alpha)$ obtemos

$$\omega(\alpha) = \alpha(1-\beta) = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{(n-2)^2H^2}{4(n-1)+n^2H^2}}\right),$$

i.e.,

$$1-2\alpha(1-\beta) = \sqrt{\frac{(n-2)^2H^2}{4(n-1)+n^2H^2}}. \tag{4.62}$$

Pela desigualdade (4.53), obtemos

$$\begin{aligned}\lambda_1^J \leqslant\ & -n(1+H^2)-2\alpha(1-\beta)n \\ & \times\frac{4(n-1)(1-2\alpha(1-\beta)(1+H^2-2\alpha(1-\beta)(n-2)^2H^2}{4(n-1)(1-2\alpha(1-\beta))}.\end{aligned} \tag{4.63}$$

Substituindo (4.62) no numerador do lado direito de (4.63), temos

$$\begin{aligned}& 4(n-1)(1-2\alpha(1-\beta)(1+H^2-2\alpha(1-\beta)(n-2)^2H^2 \\ = &\left\{4(n-1)(1+H^2)\sqrt{\frac{(n-2)^2H^2}{4(n-1)+n^2H^2}}-\left(1-\sqrt{\frac{(n-2)^2H^2}{4(n-1)+n^2H^2}}\right)(n-2)^2H^2\right\} \\ = &\ 4(n-1)\sqrt{\frac{(n-2)^2H^2}{4(n-1)+n^2H^2}}+4(n-1)H^2\sqrt{\frac{(n-2)^2H^2}{4(n-1)+n^2H^2}} \\ & -(n-2)^2H^2+(n-2)^2H^2\sqrt{\frac{(n-2)^2H^2}{4(n-1)+n^2H^2}}.\end{aligned}$$

i.e.,

$$\begin{aligned}
&= 4(n-1)\sqrt{\frac{(n-2)^2H^2}{4(n-1)+n^2H^2}} + 4nH^2\sqrt{\frac{(n-2)^2H^2}{4(n-1)+n^2H^2}} - 4H^2\sqrt{\frac{(n-2)^2H^2}{4(n-1)+n^2H^2}} \\
&\quad -(n-2)^2H^2 + (n^2-4n+4)H^2\sqrt{\frac{(n-2)^2H^2}{4(n-1)+n^2H^2}} \\
&= 4(n-1)\sqrt{\frac{(n-2)^2H^2}{4(n-1)+n^2H^2}} - (n-2)^2H^2 + n^2H^2\sqrt{\frac{(n-2)^2H^2}{4(n-1)+n^2H^2}} \\
&= \frac{4(n-1)\sqrt{(n-2)^2H^2} + \sqrt{(n-2)^2H^2}}{\sqrt{4(n-1)+n^2H^2}} - (n-2)^2H^2 \\
&= \frac{\sqrt{(n-2)^2H^2}(4(n-1)+n^2H^2)}{\sqrt{4(n-1)+n^2H^2}} - (n-2)^2H^2 \\
&= \sqrt{(n-2)^2H^2}\sqrt{4(n-1)+n^2H^2} - (n-2)^2H^2 \\
&= \sqrt{(n-2)^2H^2}(\sqrt{4(n-1)+n^2H^2} - \sqrt{(n-2)^2H^2}). \qquad (4.64)
\end{aligned}$$

Substituindo (4.62) e (4.64) em (4.63), obtemos

$$\begin{aligned}
\lambda_1^J &\leqslant -n(1+H^2) \\
&\quad -\frac{n\left(1-\sqrt{\frac{(n-2)^2H^2}{4(n-1)+n^2H^2}}\right)}{4(n-1)\frac{\sqrt{(n-2)^2H^2}}{\sqrt{4(n-1)+n^2H^2}}}\sqrt{(n-2)^2H^2}\left(\sqrt{4(n-1)+n^2H^2} - \sqrt{(n-2)^2H^2}\right) \\
&= -n(1+H^2) - \frac{n}{4(n-1)}\frac{\left(\frac{\sqrt{4(n-1)+n^2H^2}-\sqrt{(n-2)^2H^2}}{\sqrt{4(n-1)+n^2H^2}}\right)}{\frac{\sqrt{(n-2)^2H^2}}{\sqrt{4(n-1)+n^2H^2}}} \\
&\quad \times\sqrt{(n-2)^2H^2}\left(\sqrt{4(n-1)+n^2H^2} - \sqrt{(n-2)^2H^2}\right) \\
&= -n(1+H^2) - \frac{n}{4(n-1)}\frac{(\sqrt{4(n-1)+n^2H^2} - \sqrt{(n-2)^2H^2})}{\sqrt{(n-2)^2H^2}} \\
&\quad \times\sqrt{(n-2)^2H^2}(\sqrt{4(n-1)+n^2H^2} - \sqrt{(n-2)^2H^2}) \\
&= -n(1+H^2) - \frac{n}{4(n-1)}\left(\sqrt{4(n-1)+n^2H^2} - (n-2)|H|\right)^2. \qquad (4.65)
\end{aligned}$$

Se vale a igualdade em (4.65), sabemos que $h_{ijk} = 0$ para todo $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$. Consequentemente a segunda forma fundamental é paralela e S é constante. Portanto, $\varphi : M \to \mathbb{S}^{(n+1)}(1)$ é isométrica ao toro $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{1-r^2})$, desde que as $(n-1)$ curvaturas principais são iguais entre si (veja [14, Teorema 2]). Pelos Exemplos 3 e 4 obtemos que r satisfaz

$$\begin{cases} r^2 > \frac{1}{n}, & \text{se} \quad 2 \leqslant n \leqslant 4, \\ \frac{n}{(n-2)^2} > r^2 > \frac{1}{n}, & \text{se} \quad n \geqslant 5, \quad n^2H^2 < \frac{16(n-1)}{n(n-4)}. \end{cases}$$

Isto termina o caso (i).

(ii) Agora, se $n \geqslant 5$ e $n^2H^2 \geqslant \frac{16(n-1)}{n(n-4)}$, escolhendo $\alpha(1-\beta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$, isto é,

$$\beta = 0$$

e

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{n},$$

temos por (4.53) que

$$\begin{aligned} \lambda_1^J &\leqslant -\left(1 + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)\right) n(1+H^2) + \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)(n-2)^2}{\left(1 - 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)\right) n(n-1)} n^2H^2 \\ &= -\left(2 - \frac{2}{n}\right) n(1+H^2) + \frac{\frac{(n-2)^4 n^2 H^2}{4n^2}}{2(n-1)} \\ &= -2(n-1)(1+H^2) + \frac{(n-2)^4 H^2}{8(n-1)}. \end{aligned} \tag{4.66}$$

Se vale a igualdade na expressão (4.66) acima, temos

$$(1-2\alpha)\sqrt{|\phi|^2} = \frac{\alpha(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} nH. \tag{4.67}$$

Na expressão (4.67) elevando ao quadrado em ambos os lados e usado que $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$, obtemos

$$|\phi|^2 = \frac{(n-2)^4 n^2 H^2}{16n(n-1)}. \tag{4.68}$$

Portanto,

$$S = |\phi|^2 + nH^2 = nH^2 + \frac{(n-2)^4 n^2 H^2}{16n(n-1)}. \tag{4.69}$$

Assim, sendo H constante a expressão acima implica que S é constante. Logo,

$$-\lambda_1^J = \lambda_1^\Delta + |\phi|^2 + n(1+H^2) = |\phi|^2 + n(1+H^2) = S + n.$$

Daí, temos

$$-S - n = \lambda_1^J = -2(n-1)(1+H^2) + \frac{(n-2)^4}{8(n-1)} H^2. \tag{4.70}$$

Assim, de (4.70) temos que

$$\begin{aligned} S &= -n + 2(n-1)(1+H^2) - \frac{(n-2)^4}{8(n-1)} H^2 \\ &= -n + 2n - 2 + 2(n-1)H^2 - \frac{(n-2)^4}{8(n-1)} H^2 \\ &= n - 2 + 2(n-1)H^2 - \frac{(n-2)^4}{8(n-1)} H^2. \end{aligned} \tag{4.71}$$

Comprarando (4.69) com (4.71), temos

$$n-2+2(n-1)H^2-\frac{(n-2)^4}{8(n-1)}H^2=nH^2+\frac{(n-2)^4n^2H^2}{16n(n-1)},$$

o que implica em

$$\begin{aligned}
n-2 &= nH^2+\frac{(n-2)^4n^2H^2}{16n(n-1)}-2(n-1)H^2+\frac{(n-2)^4}{8(n-1)}H^2\\
&= \frac{16n^2(n-1)nH^2+(n-2)^4n^2H^2-32b(n-1)(n-1)H^2+2n(n-2)^4H^2}{16n(n-1)}\\
&= \frac{(n-2)^4nH^2(n+2)+16n(n-1)H^2)(2-n)}{16n(n-1)}\\
&= \frac{(n-2)^4H^2(n+2)}{16(n-1)}+H^2(2-n). \qquad (4.72)
\end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados de (4.72) por $n-2$, vem

$$1=\frac{(n-2)^3H^2(n+2)}{16(n-1)}-H^2=H^2n^2\frac{n(n-4)}{16(n-1)},$$

i.e.,

$$n^2H^2=\frac{16(n-1)}{n(n-4)}. \qquad (4.73)$$

Pela igualdade no Lema 3 as $n-1$ curvaturas principais são iguais entre si. Assim, pelo Exemplo 4, sabemos que $\varphi : M \to \mathbb{S}^{n+1}(1)$ é isométrica a $\mathbb{S}^1\left(\frac{\sqrt{n}}{n-2}\right)\times\mathbb{S}^{n-1}\left(\frac{\sqrt{(n-1)(n-4)}}{n-2}\right)$, e isso completa a prova do teorema.

□

Observação. Observe que o Teorema 7 garante resultados de não existência de hipersuperfícies tais que o primeiro autovalor do operador de Jacobi encontra-se em certos intervalos. Desde que o primeiro autovalor do operador de Jacobi numa hipersuperfície totalmente umbílica satifaça $\lambda_1^J=-n(1+H^2)$, de acordo com o Teorema 7, sabemos que para $2\leqslant n\leqslant 4$ não existe hipersuperfície n-dimensional compacta com curvatura média constante na esfera unitária tal que o primeiro autovalor do operador de Jacobi assuma valor no intervalo

$$\left(-n(1+H^2)-\frac{n(\sqrt{4(n-1)+n^2H^2}-(n-2)|H|^2)^2}{4(n-1)},-n(1+H^2)\right).$$

Para $n\geqslant 2$ não existe hipersuperfície n-dimensional compacta com curvatura média constante na esfera unitária satisfazendo $n^2H^2<\frac{16(n-1)}{n(n-4)}$ tal que o primeiro autovalor assuma valor no intervalo

$$\left(-n(1+H^2)-\frac{n(\sqrt{4(n-1)+n^2H^2}-(n-2)|H|^2)^2}{4(n-1)},-n(1+H^2)\right).$$

Referências Bibliográficas

[1] Alencar, H., e Do Carmo, M., *Hipersurfaces with constant mean curvature in spheres.*Proc. Amer. Math. Soc. 120, (1994), 1223-1229.

[2] Alias, L.J. *On the stability index of minimal and constant mean curvature hypersurfaces in spheres.*Rev. Union Mat. Argent. 47(2006), 39?61 (2007).

[3] Caminha, A. - *Notas de Geometria Diferencial.* UFC - Fortaleza, 2010.

[4] Chen, D., Cheng, Q.-M. - *Estimates for the first eigenvalue of Jacobi operator on hypersurfaces with constant mean curvature in spheres.* Calculus of Variations, Verlag Berlin Heidelberg, 2017.

[5] do Carmo, M. P. - *Geometria Riemanniana.* Projeto Euclides - IMPA, 2015.

[6] do Carmo, M. P. - *O Método do Referencial Móvel.* Publicações Matemáticas - IMPA,2008.

[7] Lee, John M. - *Riemannian Manifolds : an introduction to curvature.* Graduate texts in mathematics, Springer- New York, 2010.

[8] Li, H. - *Hypersurfaces with constant scalar curvature in space forms.* Math. Ann. 305, 665-672 (1996).

[9] Luís J, Alias, Abdênago Barros, Aldir Brasil, Jr. - *A spectral characterization of the H(r) - torus by the first stability eigenvalue.* Proceedings of the american mathematical society, volume 133, Number 3, pags 875-884, september 2004.

[10] Perdomo, O. -*First stability eigenvalue characterization of Clifford hypersurfaces.* Proc. Am. Math. Soc. 130, 3379?3384 (2002).

[11] Pereira, W. de Oliveira. - *Caracterização de hipersuperfícies tipo espaço com curvatura média constante e duas curvaturas principais no espaço anti de Sitter*. Dissertação de Mestrado em Matemática, UFC, Fortaleza, 2013.

[12] Simons, James.-*Minimal Varieties in Riemannian Manifolds*. Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 88, No. 1 (Jul., 1968), pp. 62-105.

[13] Wu, Chuanxi.-*New characterizations of the Clifford tori and the Veronese surface*. Arch. Math., Vol. 61,277-284(1993).

[14] Z. H. Hou.-*Pinching problem on submanifolds with parallel Mean curvature vector field in a sphere*.Kodai Math. J.21, 35-45, (1998.