UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ

CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MESTRADO EM MATEMÁTICA

Controle Aproximado para uma Equação Linear do Calor em um Domínio Limitado do $\mathbb{R}^N$

Leonardo Silva do Nascimento

Teresina - 2018

Leonardo Silva do Nascimento

Dissertação de Mestrado:

Controle Aproximado para uma Equação Linear do Calor em um Domínio Limitado do $\mathbb{R}^N$

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Isaías Pereira de Jesus.

Teresina - 2018

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Controle Aproximado para uma Equação Linear do Calor em um Domínio Limitado do $\mathbb{R}^N$

LEONARDO SILVA DO NASCIMENTO

Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 10 de Julho de 2018.

Banca Examinadora:

Isaías Pereira de Jesus
Prof. Dr. Isaías Pereira de Jesus - Presidente

Gilcênio Rodrigues de S. Neto
Prof. Dr. Gilcênio Rodrigues de Sousa Neto - membro externo

Pitágoras Pinheiro de Carvalho
Prof. Dr. Pitágoras Pinheiro de Carvalho - membro externo

Nascimento, L. S.,

Controle Aproximado para uma Equação Linear do Calor em um Domínio Limitado do $\mathbb{R}^N$ / Leonardo Silva do Nascimento - Teresina, 2018.

$62f$.

Orientador: Prof. Dr. Isaías Pereira de Jesus

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Piauí, Depto de Matemática, Teresina, 2018.

1 - Análise 2. Equações Diferenciais Parciais.

CDD 516.36

A minha familia, em especial ao meu pai Antônio Fernandes do Nascimento (in memoriam) e a minha mãe Antônia da Cruz Silva do Nascimento.

Agradecimentos

A Deus pelas conquistas realizadas, pelo dom da vida e por estar sempre ao meu lado nos momentos bons e ruins dessa jornada.

Ao meu pai Antônio Fernandes do Nascimento (in memoriam) pelo incentivo aos estudos e por sua dedicação a minha educação.

A minha mãe Antônia da Cruz Silva do Nascimento por estar sempre ao meu lado nos momentos bons e ruins da minha vida.

Aos meus irmãos Edilene Silva, Erneson Silva e Leandro Fernandes por conviverem comigo e me ajudarem em todos os momentos.

A minha namorada Savina Rocha, que nesses 6 anos sempre me apoiou e acreditou em mim em diversos momentos da minha vida.

Ao meu orientador Prof. Dr. Isaías Pereira de Jesus pela motivação, pelos ensinamentos, pela dedicação e por estar sempre presente quando precisei.

Ao professor Pitágoras Carvalho por ter dedicado parte do seu tempo a me ensinar um pouco do seu conhecimento na época que fui aluno de graduação na UESPI.

Ao professor Gilcenio Rodrigues de Sousa Neto por ter aceito participar da banca examinadora.

Aos professores de graduação e pós-graduação que tive na UESPI e UFPI, em especial, aos professores José Arimatéa, Afonso Norberto, Pedro Junior, Antônio Wilson, Franciane Vieira, Gleison Santos, Jurandir Lopes e a todos que tiveram participação direta ou indiretamente na minha formação.

Aos diversos amigos que fiz nessa jornada acadêmica.

À Capes pelo apoio financeiro.

A todos aqueles que contribuíram de forma direta ou indiretamente, meus agradecimentos.

O Senhor é o meu pastor e nada me faltará.
(Salmos 23.1).

Resumo

O objetivo desse trabalho é estudarmos a controlabilidade aproximada para uma equação linear da calor, via estratégia de Stackelberg - Nash, em um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$. Além disso, apresentaremos a existência, unicidade e regularidade de soluções para o problema proposto.

Palavras-chave: Equação do Calor, Estratégia de Stackelberg - Nash, Controlabilidade aproximada.

Abstract

The objective of this work is to study the approximate controllability for a linear heat equation, using Stackelberg - Nash strategy, in a limited domain of the $\mathbb{R}^N$. In addition, we will present the existence, uniqueness and regularity of solutions for the proposed problem.

Keywords: Heat Equation, Stackelberg - Nash Stratey, Approximate controllability.

Conteúdo

Notações e Simbologias

As simbologias abaixo são utilizadas no decorrer do texto.

- Ω denota um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^N$;
- Γ denota a fronteira de Ω suficientemente regular;
- ν denota o vetor normal exterior a Γ;
- $Q = \Omega \times (0,T) \subset \mathbb{R}^{N+1}$, onde $T > 0$ denota o cilindro do $\mathbb{R}^{N+1}$;
- $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$ denota a fronteira lateral do cilindro Q;
- $(\cdot,\cdot)$ denota o produto interno em $L^2(\Omega)$;
- $|\cdot|$ denota a norma em $L^2(\Omega)$;
- $((\cdot,\cdot))$ denota o produto interno em $H_0^1(\Omega)$;
- $||\cdot||$ denota a norma em $H_0^1(\Omega)$;
- $\langle \cdot,\cdot \rangle$ quando não especificado, denota diferentes pares de dualidades;
- $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$ denota o gradiente da função u;
- $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ denota o operador Laplaciano da função u;
- q.s. - quase sempre;
- $\hookrightarrow$ denota a imersão contínua;
- $\overset{c}{\hookrightarrow}$ denota a imersão compacta;
- C quando não especificada, é uma constante positiva e arbitrária;
- $' = \dfrac{\partial}{\partial t}$;
- $\rightarrow$ denota convergência forte;

- $\rightharpoonup$ denota convergência fraca;

- $\overset{*}{\rightharpoonup}$ denota convergência fraca estrela;

- X^* denota o dual topológico de X;

- X^{**} denota o bidual topológico de X;

- χ_ω denota a função característica de ω, onde ω é um subconjunto aberto não vazio do $\mathbb{R}^n$;

- $\mathcal{L}(X, Y)$ denota o espaço dos operadores lineares e contínuos de X em Y.

Introdução

Neste trabalho investigamos a controlabilidade aproximada para uma equação linear do calor, via estratégia de Stackelberg - Nash, em um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$.

Problemas de otimização aparecem com bastante frequência em uma série de problemas de ciências da engenharia e economia. Muitos modelos matemáticos são formulados em termos de problemas de otimização envolvendo um único objetivo, minimizar custos ou maximizar o lucro, etc. Em situações mais realistas e relevantes, diversos objetivos (em geral conflitantes) devem ser considerados.

Em um problema clássico de controle mono-objetivo para um sistema modelado por uma equação diferencial, existe um controle v, atuando na equação e tentando atingir um objetivo pré-determinado, geralmente consistindo em minimizar um funcional $J(.)$.

Em um problema de controle multiobjetivo existe mais do que um objetivo; possivelmente mais que um controle atuando sobre a equação. Agora, em contraste com o caso de um único objetivo, existem várias estratégias de forma a escolher os controles, dependendo da natureza do problema.

Estas estratégias podem ser cooperativas (quando os controles cooperam entre eles, a fim de alcançar os objetivos), não-cooperativas, hierárquicas, dentre outras. Equilíbrio de Nash define uma estratégia de otimização não-cooperativa multiobjetiva, inicialmente proposta por Nash [21]. Existem várias outras estratégias para otimização multiobjetiva, como por exemplo, a estratégia de Pareto (cooperativo) [22], a estratégia de Stackelberg (hierárquico) [26], entre outras.

Quando em 1990, durante as Jornadas Hispano-Francesas sobre Controle de Sistemas Distribuídos, Jacques Louis Lions[1] introduziu, pela primeira vez, o conceito de controlabilidade aproximada para equação linear do calor [16], criou-se assim uma imensa gama

[1] J.L.Lions 1928-2001

de problemas relacionados com o conceito de controlabilidade aproximada.

Formalizemos agora alguns desses conceitos. Consideremos a equação linear do calor

$$\left| \begin{array}{l} u' - \Delta u = h\chi_\omega \quad \text{em} \quad Q = \Omega \times (0,T), \\ u = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma = \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \end{array} \right. \tag{0.1}$$

onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2 e $T > 0$. Em (0.1), $u = u(x,t)$ é o estado a ser controlado, $h = h(x,t)$ é o controle e ω é um subconjunto aberto não vazio de Ω. Notemos que o controle atua no interior de Ω.

Assumindo que $u_0 \in L^2(\Omega)$ e $h \in L^2(Q)$, o sistema (0.1) admite uma única solução $u \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$. Consideremos o conjunto de estados admissíveis:

$$R_{NL}(T) = \big\{ u_h(T) : u_h \text{ é solução de (0.1) com } h \in L^2(Q) \big\}.$$

Alguns tipos de controlabilidade são definidas como se segue:

(i) O sistema (0.1) é dito aproximadamente controlável se $R_{NL}(T)$ é denso em $L^2(\Omega)$ para todo $u_0 \in L^2(\Omega)$.

(ii) O sistema (0.1) é dito exatamente controlável se $R_{NL}(T) = L^2(\Omega)$ para todo $u_0 \in L^2(\Omega)$.

(iii) O sistema (0.1) é dito nulo controlável ou controlável a zero se $0 \in R_{NL}(T)$ para todo $u_0 \in L^2(\Omega)$.

O sistema (0.1) é aproximadamente controlável para todo subconjunto aberto não vazio ω de Ω e $T > 0$. Para mostrarmos isso, existem diversas maneiras. Por exemplo, pode-se aplicar um argumento de densidade (ver teorema 1.5 na seção de Preliminares a seguir) decorrente do Teorema de Hahn-Banach, ou pode-se seguir uma abordagem variacional, como desenvolvida em Lions [16]. Em ambos os casos, a controlabilidade aproximada é reduzida a uma propriedade de continuação única para o sistema adjunto de (0.1):

$$\left| \begin{array}{l} -\varphi_t - \Delta\varphi = 0 \quad \text{em} \quad Q, \\ \varphi(x,t) = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \times (0,T), \\ \varphi(x,T) = \varphi^0 \quad \text{em} \quad \Omega. \end{array} \right. \tag{0.2}$$

Mais precisamente, a controlabilidade aproximada vale para o sistema (0.1) se, e somente se, a seguinte propriedade de unicidade é verdadeira: Se φ é solução de (0.2) e $\varphi = 0$ em $\omega \times (0,T)$ então, necessariamente, $\varphi \equiv 0$ em $\Omega \times (0,T)$, isto é, $\varphi^0 = 0$.

Os teoremas de continuação única dependem da natureza do problema estudado. Muitos autores tem conseguido teoremas de continuação única para diversos problemas, entre as quais pode-se citar, teorema da continuação de Mizohata [20], quando os coeficientes do operador que aparecem no sistema são analíticos. Quando os coeficientes do operador são funções limitadas e mensuráveis, a controlabilidade aproximada foi investigada, entre outros autores, por C. Fabre [8], onde se prova a propriedade de continuação única para equações relacionadas com o sistema de Navier-Stokes. A mesma generalização da continuação única de Mizohata pode ser encontradas em Saut-Scheurer [25].

Desde a publicação do artigo de Lions [16], a controlabilidade aproximada tem sido motivo de estudo de muitos autores, entre os quais podemos citar : Fabre-Lebeau [9], Fabre [8], Fabre-Puel-Zuazua [10], Cara-Zuazua [11], Zuazua [27].

Nosso trabalho é baseado no trabalho de Díaz-Lions [5], onde os autores estudam o controle hierárquico para um sistema distribuído (no qual o estado é definido pela solução de uma equação de difusão). Eles admitem que se pode agir sobre o sistema por uma hierarquia de controles. Existe um controle global v, o qual é chamado de líder e existem N controles locais $w_1, \ldots, w_N$ que são os seguidores. Os seguidores, assumindo que o líder fez a escolha de sua estratégia, procuram um equilíbrio de Nash de suas funções custos e então o líder v faz sua escolha final para todo o sistema, procurando atingir um estado ideal u^T num tempo T por meio de um controle aproximado. Essa é a conhecida estratégia de Stackelberg-Nash.

Em resumo, o trabalho está dividido da seguinte forma:

No capítulo 1 apresentamos alguns resultados clássicos ao desenvolvimento do nosso trabalho.

No capítulo 2 investigamos a controlabilidade aproximada e provamos a existência e unicidade do equilíbrio de Nash sobre certas condições. Resultados de existência, unicidade e regularidade de soluções também são apresentados.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos alguns resultados necessários para que o leitor possa ter uma melhor compreensão dos conteúdos abordados no capítulo posterior.

1.1 Tópicos de Análise Funcional

1.1.1 Convergência Fraca e Fraca Estrela

Definição 1.1 ***(Convergência Fraca)*** *Sejam E um espaço de Banach e $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma sequência de E. Então $u_\nu \rightharpoonup u$ se, e somente se, $\langle \varphi, u_\nu\rangle \to \langle \varphi, u\rangle$, para todo $\varphi \in E^*$.*

Definição 1.2 ***(Convergência Fraca Estrela)*** *Sejam E um espaço de Banach, $\varphi \in E^*$ e $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma sequência de E^*. Dizemos que $\varphi_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$ se, e somente se, $\langle \varphi_\nu, u\rangle \to \langle \varphi, u\rangle$, para todo $u \in E^*$.*

Proposição 1.1 *Sejam E um espaço de Banach e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em E. Então:*

(i) *Se $x_n \rightharpoonup x$ na topologia $\sigma(E, E^*)$, então $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall f \in E^*$;*

(ii) *Se $x_n \to x$, então $x_n \rightharpoonup x$ na topologia $\sigma(E, E^*)$;*

(iii) *Se $x_n \rightharpoonup x$ na topologia $\sigma(E, E^*)$ e se $f_n \to f$ em E^* (isto é, $\|f_n - f\|_{E^*} \to 0$), então $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.*

Demonstração: Ver Jesus, Lima e Clark ([12]). $\square$

1.1.2 Espaços Separáveis e Reflexivos

Definição 1.3 *Dizemos que um espaço métrico E é separável se existe um subconjunto $D \subset E$ enumerável e denso.*

Definição 1.4 *Sejam E um espaço de Banach e J a injeção canônica de E em E^{**}. Dizemos que E é reflexivo quando $J(E) = E^{**}$.*

Quando o espaço E é reflexivo identificamos implicitamente E e E^{**} (com ajuda do isomorfismo J).

Teorema 1.1 ***(Banach-Alaoglu-Bourbaki)****. Seja E um espaço de Banach. Então o conjunto*

$$B_{E^*} = \{f \in E^*; \|f\| \leq 1\} \quad \textit{é compacto na topologia fraca estrela.}$$

Demonstração: Ver Jesus, Lima e Clark ([12]). □

Teorema 1.2 *Seja E um espaço de Banach separável. Então o conjunto*

$$B_{E^*} = \{f \in E^*; \|f\| \leq 1\} \quad \textit{é metrizável na topologia fraca estrela.}$$

Reciprocamente, se B_{E^*} é metrizável na topologia fraca estrela, então E é separável.

Demonstração: Ver Jesus, Lima e Clark ([12]). □

Corolário 1.1 *Sejam E um espaço Banach separável e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em E^*. Então existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge na topologia fraca estrela.*

Demonstração: Ver Jesus, Lima e Clark ([12]). □

Teorema 1.3 *Seja E um espaço de Banach reflexivo e suponhamos que a sequência $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ é limitada. Então existe uma subsequência $(f_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $f \in E$ tal que*

$$f_{k_j} \rightharpoonup f.$$

Demonstração: Ver Jesus, Lima e Clark ([12]). □

1.1.3 Convexidade e Otimização

Teorema 1.4 *Sejam V um espaço de Hilbert, $A \subset V$ um conjunto convexo e F uma função Gateaux-Diferenciável tal que $F' : A \to \mathbb{R}$ é um funcional linear. Então são equivalentes:*

(i) *F é estritamente convexo;*

(i) $F(v) > F(u) - \langle F'(u), v - u \rangle, \ \forall\, u, v \in A.$

Demonstração: Ver Ekeland ([6]).

Teorema 1.5 ***(Critério de Densidade)*** *Seja D um subconjunto de um espaço de Hilbert H. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) *D gera um subespaço que é denso em H;*

(ii) *Todo funcional linear contínuo f em H que se anula em D é identicamente nulo em H.*

Demonstração: Ver Aubin ([1]). □

1.2 Teoria das Distribuições Escalares

Definição 1.5 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Denomina-se* suporte *de φ ao fecho em Ω do conjunto dos pontos x tais que $\varphi(x) \neq 0$. Simbolicamente,*

$$\operatorname{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}^{\,\Omega}.$$

Definição 1.6 *Denota-se por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções contínuas e infinitamente deriváveis em Ω com suporte compacto em Ω.*

Dado Ω como acima, consideremos o espaço vetorial topológico $C_0^\infty(\Omega)$. Dizemos que uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$ quando forem satisfeitas as seguintes condições:

i) Existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que

$$\text{supp}\,(\varphi) \subset K \quad \text{e} \quad \text{supp}\,(\varphi_\nu) \subset K, \quad \forall\, \nu \in \mathbb{N}$$

ii) $D^\alpha \varphi_\nu \longrightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente em K para todo multi-índice α.

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ munido da noção de convergência definida acima será representada por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado de *espaço das funções testes*.

Denomina-se *distribuição escalar* sobre Ω a toda forma linear $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua com respeito a topologia de $\mathcal{D}(\Omega)$. Isto significa que T satisfaz as seguintes condições:

i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi)$, $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

ii) T é continua, isto é, se uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge em $\mathcal{D}(\Omega)$ para $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, então,

$$T(\varphi_\nu) \longrightarrow T(\varphi) \text{ em } \mathbb{R}.$$

O valor da distribuição T na função teste φ será representado por $\langle T, \varphi\rangle$. Equipa-se o espaço vetorial das distribuições escalares da seguinte noção de convergencia:

Considera-se o espaço de todas as distribuições sobre Ω. Neste espaço, dizemos que a sequência $(T_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge para T, quando a sucessão $(\langle T_\nu, \varphi\rangle)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge para $\langle T, \varphi\rangle$ em $\mathbb{R}$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

O conjunto das distribuições escalares sobre Ω é um espaço vetorial real, denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$, denominado *espaço das distribuições escalares* sobre Ω. Com o intuito de tratarmos de espaços de Sobolev, introduz-se o conceito de derivada distribuicional para objetos de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Dada uma distribuição T em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e dado um multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ definimos a *derivada distribucional* de ordem α de T como sendo a forma linear e contínua $D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi\rangle, \quad \text{para todo} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Segue da definição acima que cada distribuição T sobre Ω possui derivadas de todas as ordens. Notemos que a aplicação

$$D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega). \tag{1.1}$$

é linear e continua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Isto significa que se

$$\lim_{v\to\infty} T_v = T \;\text{ em }\; \mathcal{D}'(\Omega) \;\text{ então} \lim_{v\to\infty} D^\alpha T_v = D^\alpha T \;\text{ em }\; \mathcal{D}'(\Omega). \tag{1.2}$$

1.3 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Nesta seção, serão dadas algumas definições e propriedades elementares dos espaços $L^p(\Omega)$.

Definição 1.7 *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p < \infty$. Definimos*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \textit{ mensurável e } |f|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

O espaço $L^p(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$ é um espaço de Banach equipado com a norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \Big[\int_\Omega |f(x)|^p dx\Big]^{1/p}.$$

Definição 1.8 *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto. Definimos*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \textit{ mensurável e } \exists\, C \textit{constante tal que } \; |f(x)| \leq C \textit{ q.s em } \Omega\}.$$

O espaço $L^\infty(\Omega)$ é um espaço de Banach equipado com a norma

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C : \; |f(x)| \leq C \text{ q.s em } \Omega\}.$$

Teorema 1.6 ***(Desigualdade de Young)*** *Sejam $p > 1$ e $q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então,*

$$ab \leq \frac{1}{p}\, a^p + \frac{1}{q}\, b^q, \quad \forall a \geq 0 \;\; e \;\; \forall b \geq 0.$$

Demonstração: Ver Brezis ([3]). □

Teorema 1.7 ***(Desigualdade de Hölder)*** *Sejam as funções $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$ e q o expoente conjugado de p; isto é $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |fg| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver Brezis ([3]). $\square$

Definição 1.9 *Dizemos que uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é localmente integrável em Ω, quando f é integrável à Lebesgue em todo compacto $K \subset \Omega$. O espaço das funções localmente integravéis é denotado por $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Em símbolos temos que*

$$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \Leftrightarrow \int_K |f|dx < \infty, \quad \textit{para todo compacto} \quad K \subset \Omega.$$

Lema 1.3.1 ***(Du Bois Raymond)*** *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então $T_u = 0$ se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω.*

Demonstração: Ver Medeiros e Milla Miranda ([17]). $\square$

As distribuções que aparecem com mais frequência são aquelas definidas a partir de funções localmente integráveis.

Exemplo 1.1 *Seja $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e definamos $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ por*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx$$

Nestas condições T_u é uma distribução escalar sobre Ω.

De fato, não é dificil mostrarmos a linearidade de T_u, pois segue da linearidade da integral. Resta provarmos que T_u é contínua.

Seja uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções testes sobre Ω convergindo em $\mathcal{D}(\Omega)$ para uma função teste φ. Então, temos

$$\begin{aligned} |\langle T_u, \varphi_\nu \rangle - \langle T_u, \varphi \rangle| &= |\langle T_u, \varphi_\nu - \varphi \rangle| \\ &= \left| \int_\Omega u(x)(\varphi_\nu - \varphi)(x)dx \right| \\ &\leq \int_\Omega |u(x)(\varphi_\nu - \varphi)(x)|dx \\ &\leq \sup|\varphi_\nu - \varphi| \int_\Omega |u(x)|dx \to 0, \end{aligned}$$

pois $\varphi_\nu \to \varphi$ uniformemente.

A distribução T_u assim definida é dita "gerada pela função localmente integrável u" e, usando o Lema de Du Bois Raymond, tem-se que T_u é univocamente determinada por u, no seguinte sentido: $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ quase sempre em Ω. Neste sentido identificamos u com a distribuição T_u e o espaço $L^1_{loc}(\Omega)$ das funções localmente integráveis pode ser visto como parte do espaço das distribuições $\mathcal{D}'(\Omega)$

Observação 1.1 *Outro resultado interessante é que a derivada de uma função* $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$*, não é em geral uma função de* $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$*.*

Tal fato, motivará a definição de uma classe significativa de espaços de Banach de funções conhecidas sob a denominação de *Espaços de Sobolev.*

1.4 Espaços de Sobolev

Como vimos na seção anterior, toda função $u \in L^p(\Omega)$ possui derivadas distribucionais de todas as ordens. Entretanto, as derivadas de u nem sempre são também funções em $L^p(\Omega)$.

1.4.1 Os Espaços $W^{m,p}(\Omega)$

Chamaremos multi-índice a toda n-upla $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ de números naturais. Dado um multi-índice α, definimos a ordem $|\alpha|$ de α por $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$, e representamos por D^α o operador derivação

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Definição 1.10 *Sejam* Ω *um aberto do* $\mathbb{R}^n$*,* $1 \leq p \leq \infty$ *e* $m \in \mathbb{N}$*. O espaço de Sobolev que denotamos por* $W^{m,p}(\Omega)$*, é o espaço vetorial das (classes de) funções em* $L^p(\Omega)$ *cujas derivadas distribucionais de ordem* α *pertencem a* $L^p(\Omega)$*, para todo multi-índice* α *com* $|\alpha| \leq m$*. Simbolicamente escrevemos:*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para todo } \alpha \text{ tal que } |\alpha| \leq m\}.$$

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$ é um espaço de Banach equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx \Big)^{1/p}.$$

Também $W^{m,\infty}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_\Omega \text{ess} |D^\alpha u(x)|.$$

No caso $p = 2$, o espaço $W^{m,p}(\Omega)$ será representado por $H^m(\Omega)$ que é um espaço de Hilbert, cujo produto interno e a correspondente norma induzida em $H^m(\Omega)$ são dadas, respectivamente, por

$$\langle u, v\rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{e} \quad \|u\|_{H^m(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha|\leq m}\int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 dx\Big)^{1/2}.$$

Agora apresentaremos algumas desigualdades de Sobolev que nos ajudarão a alcançar objetivo proposto.

Corolário 1.2 *Sejam Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 com fronteira limitada Γ e $1 \leq p \leq \infty$. Então:*

$$\textit{Se} \quad n > pm, \quad \textit{então} \quad W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \ \textit{onde}\ q \in \Big[1, \tfrac{np}{n-mp}\Big],$$

$$\textit{Se} \quad n = pm, \quad \textit{então} \quad W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \ \textit{para todo} \ \ q \in [1, +\infty),$$

$$\textit{Se} \quad n = 1 \quad \textit{e} \quad m \geq 1, \quad \textit{então} \quad W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega),$$

sendo todas estas injeções contínuas. Além disso, se $p > n$ tem-se para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$|u(x) - u(y)| \leq C\|u\|_{W^{1,p}}|x - y|^\alpha \ \textit{q.s.}\ x, y \in \Omega,$$

onde $\alpha = 1 - (N/p)$ e C dependa apenas do Ω, p e n. Em particular $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$.

Demonstração: Ver Brezis ([3]). □

Teorema 1.8 (Rellich–Kondrachov) *Seja Ω um subconjunto limitado do $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 com fronteira Γ regular. Então:*

$$\textit{Se} \quad n > pm, \quad \textit{então} \quad W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega), \ \textit{para todo}\ q \in \Big[1, \tfrac{2n}{n-2m}\Big),$$

$$\textit{Se} \quad n = pm, \quad \textit{então} \quad W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega), \ \textit{para todo} \ \ q \in [1, +\infty),$$

Se $pm > n$, então $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\overline{\Omega})$, onde k é um inteiro não negativo tal que $k < m - (n/p) \leq k + 1$.

Em particular, $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^p(\Omega)$ com injeção compacta para todo p (e para todo n).

Demonstração: Ver Brezis ([3]). □

Teorema 1.9 *(***Gauss-Green***) Se $u \in C^1(\overline{\Omega})$, então $\displaystyle\int_\Omega u_{x_i} dx = \int_\Gamma u\nu^i d\Gamma \ \ (i = 1, 2, ..., n)$.*

Demonstração: Ver Evans ([7]). $\square$

Teorema 1.10 ***(Fórmulas de Green)*** *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ de classe C^2.*

(i) *Se $\gamma \in H^2(\Omega)$, então*

$$\int_\Omega \nabla\gamma \, \nabla u \, dx = -\int_\Omega u \, \Delta\gamma \, dx + \int_\Gamma \frac{\partial\gamma}{\partial\nu} \, u \, ds, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

(ii) *Se $u, \gamma \in H^2(\Omega)$, então*

$$\int_\Omega (u \, \Delta \, \gamma - \gamma \, \Delta u \,) \, dx = \int_\Gamma \left(u \, \frac{\partial\gamma}{\partial\nu} - \gamma \, \frac{\partial u}{\partial\nu} \right) ds.$$

Demonstração: Ver Brezis ([3]). $\square$

Teorema 1.11 ***(Representação de Riesz)*** *Sejam $1 < p < \infty$ e $\varphi \in (L^p)'$. Então existe um único $u \in L^q$ onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ tal que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int uf, \quad \forall f \in L^p.$$

Além disso, vale

$$||u||_{L^q} = ||\varphi||_{(L^p)'}.$$

Demonstração: Ver Brezis ([3]). $\square$

Definição 1.11 *Dizemos que uma forma bilinear $a : H \times H \to \mathbb{R}$ é coerciva se existe $\beta > 0$ tal que*

$$a(u, u) \geq \beta ||u||^2, \quad \forall u \in H.$$

Teorema 1.12 *(***Lax - Milgram***) Seja H um espaço de Hilbert e $B(u, v)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva. Então para toda $\varphi \in H'$ existe um único $u \in H$ tal que*

$$B(u, v) = (u, v) \quad \forall v \in H,$$

onde $(.,.)$ denota o produto interno em H.

Demonstração: Ver Brezis([3]). $\square$

1.4.2 Os Espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ e $W^{-m,q}(\Omega)$

Observemos que, embora o espaço vetorial das funções testes $u, v \in \mathcal{D}(\Omega)$ seja denso em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$, em geral, ele não é denso em $W^{m,p}(\Omega)$. Isto acontece porque a norma de $W^{m,p}(\Omega)$ é "bem maior" que a norma de $L^p(\Omega)$ e é por isso que $W^{m,p}(\Omega)$ possui menos sequências convergentes. Isto motiva a definição dos espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ como segue:

Definição 1.12 *Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Definimos*

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

No caso $p = 2$, o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ será representado por $H_0^m(\Omega)$.

Teorema 1.13 ***(Desigualdade de Poincaré)*** *Suponhamos que Ω seja um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$. Então existe uma constante C (dependendo de Ω e p) tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \text{ para todo } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração: Ver Brezis ([3]). □

Observação 1.2 *Em particular, a expressão $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ é uma norma no espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$, equivalente a norma $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. Em $H_0^1(\Omega)$ denotamos o produto interno*

$$((u, v)) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx,$$

que induz a norma $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$, equivalente à norma $\|u\|_{H^1(\Omega)}$.

Demonstração: Ver Brezis ([3]). □

Os espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ e, em particular, os espaços $H_0^m(\Omega)$, desempenham um papel fundamental na Teoria dos Espaços de Sobolev e por conseguinte na Teoria das EDP's. Se $1 \leq p < \infty$ e o número q é o expoente conjugado de p, isto é $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então representamos por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$ e por $H^{-m}(\Omega)$ o dual topológido de $H_0^m(\Omega)$. Em outras palavras, se f pertence a $H^{-m}(\Omega)$ então f é um funcional linear limitado sobre $H_0^m(\Omega)$.

Observação 1.3 *Em particular, as imersões do Corolário 1.2 são válidas para o espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ com um subconjunto arbitrário aberto Ω de $\mathbb{R}^n$. Analogamente, as imersões do*

Teorema 1.8 são válidas para $W_0^{1,p}(\Omega)$ com um subconjunto arbitrário Ω aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.13 *Se $f \in H^{-1}(\Omega)$ a norma é definida como sendo*

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup\{\langle f,u\rangle; \textit{para todo } u \in H_0^1(\Omega) \textit{ com } \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1\}.$$

1.5 Os Espaços $L^p(0,T;X)$

Nesta seção, estenderemos as noções de mensurabilidade e integrabilidade para funções

$$f : [0,T] \longrightarrow X,$$

onde $T > 0$ e X é um espaço de Banach real com a norma $\|.\|$.

Definição 1.14 *Denota-se por $L^p(0,T;X)$, com $1 \leq p \leq \infty$ o espaço vetorial das (classes de) funções $u : (0,T) \longrightarrow X$ fortemente mensuráveis com valores em X e tais que se $1 \leq p < \infty$ a função $t \mapsto \|u(t)\|_X^p$ é integrável à* Lesbegue *em $(0,T)$ e se $p = \infty$ a função $t \mapsto \|u(t)\|_X \in L^\infty(0,T)$.*

O espaço $L^p(0,T;X)$ é um espaço completo com a norma dada por

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt\right)^{1/p}, \text{ se } \ 1 \leq p < \infty.$$

Se $p = \infty$ a norma acima é substituída por

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{0<t<T} \operatorname{ess} \|u(t)\|_X = inf\{C > 0 : ||u(t)||_X \leq C \ \ q.s \ \text{ em } \ \Omega\}.$$

Apenas no caso em que $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0,T;X)$ é um espaço de Hilbert, cujo produto interno é dado por

$$\langle v,u\rangle_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T \langle v(t), u(t)\rangle_X \, dt.$$

Quando X é reflexivo e separável e $1 < p < \infty$, então $L^p(0,T;X)$ é um espaço reflexivo e separável, cujo dual topológico se identifica ao espaço de *Banach* $L^{p'}(0,T;X')$, onde p e p' são índices conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Mais precisamente, temos

$$\left[L^p(0,T;X)\right]' \approx L^{p'}(0,T,X').$$

A dualidade entre esses espaços é dada na forma integral por

$$\langle v,u\rangle_{L^{p'}(0,T;X')\times L^p(0,T;X)}=\int_0^T\langle v(t),u(t)\rangle_{X'\times X}\,dt.$$

No caso $p=1$, o dual topológico do espaço $L^1(0,T;X)$ se identifica ao espaço $L^\infty(0,T;X')$, ou seja,

$$\left[L^1(0,T;X)\right]'\approx L^\infty(0,T,X').$$

Definição 1.15 *Denota-se por $C([0,T];X)$, com $T>0$ o espaço de* Banach *das funções contínuas $u:[0,T]\longrightarrow X$ munido da norma da convergência uniforme*

$$\|u\|_{C([0,T];X)}=\max_{0\le t\le T}\|u(t)\|_X<\infty.$$

Teorema 1.14 *Sejam X e Y espaços de Hilbert tal que $X\hookrightarrow Y$ e $f\in L^p(0,T;X)$, $f'\in L^p(0,T;Y)$, $1\le p\le\infty$, então $f\in C^0([0,T];Y)$.*

Demonstração: Ver Medeiros ([18]).

Lema 1.5.1 *Sejam X um espaço de Banach, $f\in L^p(0,T;X)$ e $f'\in L^p(0,T;X)$ com $1\le p\le\infty$, então*

$$f\in C([0,T];X).$$

(Possivelmente redefinidas sobre um conjunto de medida nula.)

Demonstração: Ver Lions ([15]). □

Teorema 1.15 *Seja X um espaço de Hilbert e $u\in L^2(0,T;X)$. Então existe um único funcional $f\in H^{-1}(0,T;X)$ que verifica*

$$\langle f,\theta\psi\rangle=(\langle u',\theta\rangle,\psi)_X\quad\forall\quad\theta\in\mathcal{D}(0,T)\quad e\quad\psi\in X.$$

Baseado nisto, identificamos f com u'. Por esta razão, diremos que se $u\in L^2(0,T;X)$ então $u'\in H^{-1}(0,T;X)$.

Demonstração: Ver Pathak ([23])

1.6 Distribuições Vetoriais

Seja um número real $T > 0$ e X um espaço de Banach real com a norma $\|.\|$

Definição 1.16 *Uma distribuição vetorial sobre* $(0, T)$ *com valores em* X*, é uma função* $f : \mathcal{D}(0, T) \to X$ *linear e contínua. O conjunto dessas transformações lineares é chamado Espaço das Distribuições Vetoriais sobre* $(0, T)$ *com valores em* X *e é denotado por*

$$\mathcal{D}'(0, T; X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(0, T); X).$$

Definição 1.17 *Seja* $f \in \mathcal{D}'(0, T; X)$*. A* derivada *de ordem* n *é definida como sendo a distribuição vetorial sobre* $(0, T)$ *com valores em* X *dada por*

$$\left\langle \frac{d^n f}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle f, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T).$$

Observação 1.4 *Se a função* f *pertence ao espaço* $L^p(0, T; X)$ *com* $1 \leq p \leq \infty$*, então define uma distribuição que denotamos pela mesma função* f *e é dada por*

$$f(\varphi) = \int_0^T f(t)\varphi(t)dt, \ \textit{para todo } \varphi \in \mathcal{D}(0, T),$$

com valores integrales em X*.*

Demonstração: Ver Lions ([15]). □

1.7 Resultados Importantes

Nesta seção, apresentamos alguns resultados importantes que serão utilizados na obtenção dos objetivos desejados.

1.7.1 O Teorema de Carathéodory

Sejam D um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$ cujos elementos são denotados por (x, t) onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$ e $f : D \to \mathbb{R}^n$. Dizemos que f satisfaz as *condições de Carathéodory* sobre D quando:

- $f(x, t)$ é mensurável em t para cada x fixo;

- $f(x,t)$ é contínua em x para cada t fixo;
- Para cada compacto K em D existe uma função real integrável $m_K(t)$ tal que $|f(x,t)| \leq m_K(t)$ para todo $(x,t) \in K$.

Definição 1.18 *Uma solução no sentido* estendido *do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0; \end{cases}$$

é uma função $\phi(t)$ absolutamente contínua tal que para algum β real vale

i) $(\phi(t),t) \in D$ *para todo* $t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$*;*

ii) $\phi'(t) = f(t, \phi(t))$ *para todo* $t \in [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$*, exceto em um conjunto de medida de Lebesgue zero.*

Consideremos o retângulo

$$R = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1};\ |t - t_0| \leq a,\ |x - x_0| \leq b\right\},$$

com $a, b > 0$. Então, valem os seguintes resultados:

Teorema 1.16 (Carathéodory) *Seja $f : R \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre R. Então sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta$ $(\beta > 0)$ existe uma solução no sentido estendido do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x' = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0; \end{cases}$$

Demonstração: Ver Medeiros e Rivera ([19]). $\square$

Corolário 1.3 *Sejam D um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$ e f satisfazendo as condições de Carathéodory sobre D. Então o problema*

$$\begin{cases} x' = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0; \end{cases}$$

tem solução para qualquer $(t_0, x_0) \in D$.

Demonstração: Ver Medeiros e Rivera ([19]). □

Teorema 1.17 *Sejam D um subconjunto aberto limitado e conexo em $\mathbb{R}^{n+1}$, f uma função que satisfaz as duas primeiras condições de Carathéodory sobre D e suponhamos que exista uma função integrável $m(t)$ tal que $|f(t,x)| \leq m(t)$ para todo $(t,x) \in D$. Seja φ uma solução de*

$$x' = f(t,x) \text{ para quase todo } t \text{ em } I,$$

sobre o intervalo aberto (a,b). Então

i) *existe $\varphi(a+0), \varphi(b-0)$;*

ii) *se $(b, \varphi(b-0)) \in D$ então φ pode ser prolongada até $(a, b+\delta]$ para algun δ. Resultado análogo para a;*

iii) *$\varphi(t)$ pode ser prolongada até um intervalo (γ, ω) tal que $(\gamma, \varphi(\gamma+0)), (\omega, \varphi(\omega-0))$ pertencem a ∂D (∂D fronteira de D);*

iv) *se f pode estender-se a $\overline{D}$ sem que ele perca suas propriedades então $\varphi(t)$ pode ser prolongada até um intervalo $[\gamma, \omega]$ tal que $(\gamma, \varphi(\gamma+0)), (\omega, \varphi(\omega-0)) \in \partial D$.*

Demonstração: Ver Medeiros e Rivera ([19]). □

Corolário 1.4 ***(Prolongamento de Solução)*** *Sejam $D = B \times [0,T]$, com $0 < T < \infty$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq b\}$, $b > 0$ e a função f nas condições do Teorema 1.17. Seja $\phi(t)$ uma solução de*

$$\begin{cases} x' = f(x,t) \\ x(0) = x_0 \quad e \quad |x_0| \leq b. \end{cases}$$

Suponhamos que em qualquer intervalo I onde $\phi(t)$ está definida tem-se $|\phi(t)| \leq M$, para todo $t \in I$, M independente de t e $M < b$. Então ϕ tem um prolongamento até $[0,T]$.

Demonstração: Ver Medeiros e Rivera ([19]). □

1.7.2 Desigualdade de Gronwall

Lema 1.7.1 (Desigualdade de Gronwall) *Sejam $\varphi, \phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas não negativas e seja $\alpha \geq 0$. Se*

$$\varphi(t) \leq \alpha + \int_{\alpha}^{t} \varphi(s)\psi(s)ds,$$

então

$$\varphi(t) \leq \alpha \exp\left(\int_{\alpha}^{t} \psi(s)ds\right), \quad \forall t \in [a, b].$$

Demonstração: Ver Evans ([7]).

1.7.3 Um Teorema de Continuação Única para Equação do Calor

Teorema 1.18 ***(Teorema de Continuação Única)*** *Sejam Ω um subconjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^N$, $a \in L^\infty\big(\Omega \times (0, T)\big)$, $b \in (L^\infty\big(\Omega \times (0, T)\big))^N$. Seja $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$ tal que φ é solução do sistema*

$$\left|\begin{array}{l} \varphi_t - \Delta\varphi + a\varphi - div(b\varphi) = 0 \quad em \quad Q, \\ \varphi = 0 \ sobre \ \ \Sigma, \\ \varphi(T) = \varphi^0 \quad em \quad \Omega. \end{array}\right.$$

Se $\varphi = 0$ em $\omega \times (0, T)$, onde $\omega \subset \Omega$ então $\varphi^0 = 0$.

Demonstração: Ver Fabre ([8]). □

Capítulo 2

Equação Linear do Calor em um Domínio Limitado

2.1 Formulação do Problema

Sejam $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}_1$,..., $\mathcal{O}_n$ subconjuntos abertos, não-vazios e disjuntos de Ω. Dado $T > 0$, consideremos a equação linear do calor

$$\left| \begin{array}{l} u' - \Delta u = f\chi_{\mathcal{O}} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} w_i \chi_{\mathcal{O}_i} \quad \text{em} \quad Q, \\ u = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \end{array} \right. \tag{2.1}$$

onde $u_0 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2\big(\mathcal{O} \times (0,T)\big)$ e os $w_i \in L^2\big(\mathcal{O}_i \times (0,T)\big)$, $i = 1,2,\ldots,n$. O subconjunto $\mathcal{O} \subset \Omega$ é o domínio controle (que é suposto ser pequeno como desejado) e $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \ldots, \mathcal{O}_n$ são os domínios de controles secundários.

Como a solução u de (2.1) depende de $f, w_1, \ldots, w_n$, então denotaremos por $u = u(x,t,f,w_1,\ldots,w_n)$.

Estudaremos o problema de controle para (2.1) no caso de f ser independente e $w_1,\ldots,w_n$ depender de f. Mais explicitamente, o controle f é fixado, ou seja, faz uma escolha de sua estratégia e, em seguida a escolha dos estrategistas $w_1,\ldots,w_n$ depende de f. Por esse motivo, o controle f é chamado de líder e os $w_1,\ldots,w_n$ são os controles seguidores. Esse processo de controle é chamado por Lions [14] de controle hierárquico.

Para localizar a ação dos controles w_i, introduzimos as funções $\rho_i(x)$, definidas em Ω com valores reais, satisfazendo

$$\left| \begin{array}{l} \rho_i \in L^\infty(\Omega),\ \rho_i \geq 0 \\ \rho_i = 1 \text{ em } G_i \subset \Omega, \end{array} \right. \tag{2.2}$$

onde G_i é uma região onde cada w_i atua.

O objetivo é que os controles $f, w_1, , \ldots, w_n$ interfiram no sistema de forma que $u(x,t)$, solução da equação (2.1), atinja no tempo T, um estado ideal $u^T = u^T(x)$, com funcionais custos definidos por:

$$J_i(f, w_1, \ldots, w_n) = \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{O}_i} \left|w_i\right|^2 dxdt + \frac{\alpha_i}{2}\int_\Omega \left|\rho_i[u(x,T,f,\mathbf{w}) - u^T]\right|^2 dx, \tag{2.3}$$

onde $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$, $\alpha_i > 0$ são constantes.

Dessa forma, o problema de controle hierárquico fica descrito da seguinte forma: os seguidores $w_1, \ldots, w_n$ supõem que o líder f fez uma escolha para sua estratégia. Em seguida, tentam encontrar um equilíbrio de seus custos $J_1, \ldots, J_n$. Isso mostra que eles procuram controles $w_1, \ldots, w_n$ (dependendo de f), satisfazendo

$$J_i(f, w_1, \ldots, w_i, \ldots, w_n) \leq J_i(f, w_1, \ldots, \overline{w}_i, \ldots, w_n), \quad \forall\, \overline{w}_i \in L^2(\mathcal{O}_i). \tag{2.4}$$

Os controles $w_1, \ldots, w_n$, soluções do sistema de n desigualdades (2.4), são chamados de equilíbrio de Nash para os funcionais custo $J_1, \ldots, J_n$ (cf. Aubin [2]).

Observação 2.1 *Em outras palavras, se o líder f faz uma escolha então seus seguidores $w_i(f)$ fazem uma escolha que torna mínimo o custo J_i, isto é,*

$$J_i(f, w_1, \ldots, w_i, \ldots, w_n) = \inf_{\overline{w}_i \in L^2(\mathcal{O}_i)} J_i(f, w_1, \ldots, \overline{w}_i, \ldots, w_n). \tag{2.5}$$

Isso é equivalente as desigualdades (2.4). *Esse processo é chamado de estratégia de Stackelberg-Nash (ver Díaz e Lions [5]).*

O problema de controle que será considerado é o seguinte: encontrar controles $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ cujo estado associado u, solução de (2.1) verifique o equilíbrio de Nash definidos em (2.3), sujeito à seguinte condição de controlabilide aproximada

$$u(x,T,f,\mathbf{w}) \in B_{L^2(\Omega)}(u^T, \alpha), \tag{2.6}$$

onde $B_{L^2(\Omega)}(u^T, \alpha)$ denota a bola de $L^2(\Omega)$ com centro em u^T e raio $\alpha > 0$ dado, isto é, se

$$\left| \begin{array}{l} u(x,T,f,\mathbf{w}) \text{ descreve um subconjunto denso de um dado espaço quando} \\ f \text{ abrange o conjunto de todos os controles disponíveis para o líder.} \end{array} \right. \tag{2.7}$$

Para detalharmos o problema proposto, iremos dividí-lo nos seguintes sub-problemas:

Problema 1: A existência da solução $w_1(f), \ldots, w_n(f)$ para as desigualdades (2.4), isto é, a existência do equilíbrio de Nash.

Problema 2: Assumindo a existência e unicidade do equilíbrio de Nash $w_1(f), \ldots, w_n(f)$, mostrar que quando f varia em $L^2\big(\mathcal{O}\times(0,T)\big)$, as soluções $u\big(x,t,f,w_1(f),\ldots,w_n(f)\big)$ da equação (2.1), avaliadas em $t = T$, isto é, $u\big(x,T,f,w_1(f),\ldots,w_n(f)\big)$, geram um subconjunto denso em $L^2(\Omega)$. Isso permite aproximar u^T.

2.2 Controlabilidade Aproximada

Nesta seção estudaremos a controlabilidade aproximada para o sistema (2.1), assumindo que existência e unicidade do equilíbrio de Nash $\mathbf{w} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ foi provada (vide seção 2.3). Antes, daremos a seguinte definição:

Definição 2.1 *Dizemos que o sistema* (2.1) *é aproximadamente controlável no tempo* $T > 0$ *se, para todo* $\varepsilon > 0$ *e para todo* $u^T \in L^2(\Omega)$, *existe* $f \in L^2(\Omega)$, *tal que a solução* $u = u(x,t,f,\mathbf{w})$ *do sistema (2.1) satisfaz a condição*

$$|u(x,T,f,\mathbf{w}) - u^T| < \varepsilon. \tag{2.8}$$

De acordo com a definição acima, para provarmos que o sistema (2.1) é aproximadamente controlável, basta mostrarmos que quando f varia em $L^2\big(\mathcal{O}\times(0,T)\big)$, as soluções $u(x,t,f,\mathbf{w})$ do sistema (2.1), avaliadas em $t = T$, isto é, $u(x,T,f,\mathbf{w})$, geram um subconjunto denso em $L^2(\Omega)$.

Observação 2.2 *Seja* $h = f\chi_{\mathcal{O}} + \sum_{i=1}^n w_i\chi_{\mathcal{O}_i}$. *Se* $h \in L^2(\Omega\times(0,T))$ *e* $u_0 \in L^2(\Omega)$ *então o sistema* (2.1) *admite única solução* $u \in L^2\big(0,T;H_0^1(\Omega)\big) \cap C\big([0,T];L^2(\Omega)\big)$ *(cf. Seção* 2.4, *Teorema* 2.3). *Em particular, os funcionais custos* J_i, *com* $1 \le i \le n$, *estão bem definidos.*

Observação 2.3 *Graças a linearidade do sistema* (2.1), *podemos assumir, sem perda de generalidade, que* $u(x,0) = u_0(x) = 0$ *em* Ω. *Com efeito, se* $u_0 \neq 0$, *o problema de controlabilidade aproximada para sistema* (2.1) *pode ser transformado em um outro problema equivalente mas com* $u_0 = 0$.

Lema 2.2.1 *Tem-se a equação* (2.4) *se, e somente se,*

$$\int_0^T \int_{\mathcal{O}_i} w_i \widehat{w}_i dxdt + \alpha_i \int_\Omega \rho_i^2(x) \left[u(x,T,f,\mathbf{w}) - u^T(x)\right] \widehat{u}_i(T)dx = 0, \tag{2.9}$$

para todo $\widehat{w}_i \in L^2(\mathcal{O}_i)$, *onde* $\widehat{u}_i$ *é solução de*

$$\left| \begin{array}{l} \widehat{u}_i' - \Delta\widehat{u}_i = \widehat{w}_i \chi_{\mathcal{O}_i} \quad em \quad Q, \\ \\ \widehat{u}_i = 0 \quad sobre \quad \Sigma, \\ \\ \widehat{u}_i(0) = 0 \quad em \quad \Omega. \end{array} \right. \tag{2.10}$$

Demonstração: Como cada J_i, com $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, é estritamente convexo (vide seção 2.3), então $w_1, \ldots, w_n$ é um equilíbrio de Nash se, e somente se, satisfaz a equação de Euler-Lagrange

$$J_i'(f, w_1, \ldots, w_i, \ldots, w_n)\widehat{w}_i = 0 \qquad \forall\, \widehat{w}_i \in L^2(\mathcal{O}_i).$$

Observação 2.4 *Como o sistema* (2.1) *é linear, para qualquer escolha de controles* f, w_i, *sua única solução no tempo* t *pode ser escrita como sendo*

$$u(t) = Q_0(t)f + \sum_{i=1}^n Q_i(t)w_i, \quad 0 \leq t \leq T,$$

onde Q_i *são operadores lineares contínuos dependendo dos controles. No tempo* $t = T$, *temos*

$$u(T) = L_0 f + \sum_{i=1}^n L_i w_i,$$

onde L_i *são também operadores lineares contínuos.*

Por fim, observemos que

$$
\begin{aligned}
0 &= J_i'(f, w_1, \ldots, w_i, \ldots, w_n) = \frac{d}{d\lambda} J_i(f, w_1, \ldots, w_i + \lambda \widehat{w}_i, \ldots, w_n)\Big|_{\lambda=0} \\
&= \frac{d}{d\lambda}\left\{ \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{O}_i} (w_i + \lambda \widehat{w}_i)^2 dxdt + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\alpha_i}{2}\int_\Omega \rho_i^2(x)\big[u(x, T, f, w_1, \ldots, w_i + \lambda\widehat{w}_i, \ldots, w_n) - u^T\big]^2 dx \right\}\Bigg|_{\lambda=0} \\
&= \frac{d}{d\lambda}\left\{ \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{O}_i} (w_i + \lambda \widehat{w}_i)^2 dxdt + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\alpha_i}{2}\int_\Omega \rho_i^2(x)\big[L_0 f + L_1 w_1 + \cdots + L_i(w_i + \lambda\widehat{w}_i) + \cdots + L_n w_n - u^T\big]^2 dx \right\}\Bigg|_{\lambda=0} \\
&= \frac{d}{d\lambda}\left\{ \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{O}_i} (w_i^2 + 2\lambda w_i \widehat{w}_i + \lambda^2 \widehat{w}_i^2) dxdt + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\alpha_i}{2}\int_\Omega \rho_i^2(x)\big[L_0 f + L_1 w_1 + \cdots + L_i w_i + \lambda L_i \widehat{w}_i + \cdots + L_n w_n - u^T\big]^2 dx \right\}\Bigg|_{\lambda=0} \\
&= \left\{ \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{O}_i} \frac{d}{d\lambda}(w_i^2 + 2\lambda w_i \widehat{w}_i + \lambda^2 \widehat{w}_i^2) dxdt + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\alpha_i}{2}\int_\Omega \rho_i^2(x)\frac{d}{d\lambda}\big[L_0 f + L_1 w_1 + \cdots + L_i w_i + \lambda L_i \widehat{w}_i + \cdots + L_n f_n - u^T\big]^2 dx \right\}\Bigg|_{\lambda=0} \\
&= \left\{ \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{O}_i} (2 w_i \widehat{w}_i + 2\lambda \widehat{w}_i^2) dxdt + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\alpha_i}{2}\int_\Omega \rho_i^2(x) 2\big[L_0 f + L_1 w_1 + \cdots + L_i w_i + \lambda L_i \widehat{w}_i + \cdots + L_n w_n - u^T\big] L_i \widehat{w}_i dx \right\}\Bigg|_{\lambda=0} \\
&= \int_0^T \int_{\mathcal{O}_i} w_i \widehat{w}_i dxdt \ + \alpha_i \int_\Omega \rho_i^2(x)\big[L_0 f + L_1 w_1 + \cdots + L_i w_i + \cdots + L_n w_n - u^T\big] L_i \widehat{w}_i dx \\
&= \int_0^T \int_{\mathcal{O}_i} w_i \widehat{w}_i dxdt \ + \alpha_i \int_\Omega \rho_i^2(x) \left[\left(L_0 f + \sum_{i=1}^n L_i w_i\right) - u^T\right] L_i \widehat{w}_i dx \\
&= \int_0^T \int_{\mathcal{O}_i} w_i \widehat{w}_i dxdt + \alpha_i \int_\Omega \rho_i^2(x) \left[u(x, T, f, \mathbf{w}) - u^T\right] \widehat{u}_i(T) dx,
\end{aligned}
$$

onde

$$L_i \widehat{w}_i = \widehat{u}_i(T).$$

sendo $\widehat{u}_i$ solução de (2.10). □

Teorema 2.1 *Suponhamos que* $f \in L^2\big(\mathcal{O} \times (0,T)\big)$ *e que exista um único equilíbrio de Nash* $\mathbf{w} = \{w_1, \ldots, w_n\}$, *dependendo de* f, *dado pelas desigualdades* (2.4). *Então, o conjunto das soluções* $u\big(x,t,f,w_1(f),\ldots,w_n(f)\big)$ *de* (2.1), *avaliadas no tempo* $t = T$, *é denso em* $L^2(\Omega)$.

Demonstração: A prova será feita em duas etapas. Inicialmente, encontraremos o sistema adjunto e o sistema otimizado. Em seguida, provaremos a controlabilidade aproximada por meio de um argumento de análise funcional (cf. Teorema 1.5) e uma propriedade de continuação única (cf. Teorema 1.18).

Etapa 1 : Suponhamos que exista o equilíbrio de Nash $w_1, \ldots, w_n$, dependendo de f, para os funcionais $J_1, \ldots, J_n$ definidos por (2.3). Isto implica que $w_1, \ldots, w_n$ é a solução da equação de Euler-Lagrange (2.9), condicionado ao sistema linear parabólico (2.10). Para obtermos um sistema otimizado, precisamos do sistema adjunto relacionado a (2.10).

Para tal, multiplicamos $(2.10)_1$ por p_i e integramos em $\Omega \times (0,T)$:

$$\begin{aligned} &\int_\Omega p_i(T)\widehat{u}_i(T)dx - \int_\Omega p_i(0)\widehat{u}_i(0)dx - \int_0^T\int_\Omega p_i'\widehat{u}_i dxdt \\ &-\int_0^T\int_\Omega \Delta\widehat{u}_i p_i dxdt = \int_0^T\int_\Omega p_i\widehat{w}_i\chi_{\mathcal{O}_i}dxdt. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Pela primeira fórmula de Green, temos

$$-\int_\Omega \Delta\widehat{u}_i\, p_i\, dx = \int_\Omega \nabla\widehat{u}_i\nabla p_i\, dx - \int_\Gamma \frac{\partial\widehat{u}_i}{\partial\nu}\, p_i\, d\Gamma. \tag{2.12}$$

Usando novamente a primeira fórmula de Green, obtemos

$$\int_\Omega \nabla\widehat{u}_i\nabla p_i\, dx = -\int_\Omega \widehat{u}_i\Delta p_i\, dx + \int_\Gamma \widehat{u}_i\, \frac{\partial p_i}{\partial\nu}\, d\Gamma. \tag{2.13}$$

Substituindo (2.13) em (2.12) e em seguida integrando de 0 a T, segue que

$$\begin{aligned} -\int_0^T\int_\Omega \Delta\widehat{u}_i\, p_i\, dxdt = &-\int_0^T\int_\Omega \widehat{u}_i\Delta p_i\, dxdt + \int_\Sigma \widehat{u}_i\, \frac{\partial p_i}{\partial\nu}\, d\Gamma dt \\ &-\int_\Sigma \frac{\partial\widehat{u}_i}{\partial\nu}\, p_i\, d\Gamma dt. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Substituindo (2.14) em (2.11) e usando $(2.10)_2$ e $(2.10)_3$, resulta que

$$\int_\Omega p_i(T)\widehat{u}_i(T)dx - \int_0^T \int_\Omega \widehat{u}_i p_i' dxdt - \int_0^T \int_\Omega \widehat{u}_i \Delta p_i \, dxdt - \int_\Sigma \frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial \nu} p_i \, d\Gamma dt$$
$$= \int_0^T \int_\Omega p_i \widehat{w}_i \chi_{\mathcal{O}_i} dxdt.$$

isto é,

$$\begin{aligned} &\big(\widehat{u}_i(T), p_i(T)\big)_{L^2(\Omega)} + \int_0^T \int_\Omega [-p_i' - \Delta p_i]\, \widehat{u}_i dxdt - \int_\Sigma \frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial \nu} p_i \, d\Gamma dt \\ &= \int_0^T \int_\Omega p_i \widehat{w}_i \chi_{\mathcal{O}_i} dxdt. \end{aligned} \tag{2.15}$$

De (2.15), é natural definirmos o **sistema adjunto** por

$$\left| \begin{array}{l} -p_i' - \Delta p_i = 0 \quad \text{em} \quad Q, \\ p_i = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma, \\ p_i(x,T) = \rho_i^2(x)[u(x,T,f,\mathbf{w}) - u^T(x)] \quad \text{em} \quad \Omega. \end{array} \right. \tag{2.16}$$

Como $\rho_i^2(x)[u(x,T,f,\mathbf{w}) - u^T(x)] \in L^2(\Omega)$, temos que o sistema (2.16) admite exatamente uma solução na classe $p_i \in L^2\big(0,T;H_0^1(\Omega)\big) \cap C\big([0,T];L^2(\Omega)\big)$ (vide Seção 2.4, Teorema 2.3).

A condição para $p_i(x,T)$ em (2.16) é motivada do equilíbrio de Nash (2.9).

Agora, substituindo (2.16) em (2.15), obtemos

$$\Big(\widehat{u}_i(T), \rho_i^2(x)[u(x,T,f,\mathbf{w}) - u^T(x)]\Big)_{L^2(\Omega)} = \int_0^T \int_\Omega p_i \widehat{w}_i \chi_{\mathcal{O}_i} dxdt,$$

ou seja,

$$\int_\Omega \rho_i^2(x)[u(x,T,f,\mathbf{w}) - u^T(x)]\widehat{u}_i(T)dx = \int_0^T \int_\Omega p_i \widehat{w}_i \chi_{\mathcal{O}_i} dxdt.$$

Multiplicando ambos os membros da expressão acima por $\alpha_i > 0$, temos

$$\alpha_i \int_\Omega \rho_i^2(x)[u(x,T,f,\mathbf{w}) - u^T(x)]\widehat{u}_i(T)dx = \alpha_i \int_0^T \int_\Omega p_i \widehat{w}_i \chi_{\mathcal{O}_i} dxdt. \tag{2.17}$$

Agora, notemos que

$$\int_0^T \int_\Omega p_i \widehat{w}_i \chi_{\mathcal{O}_i} dxdt = \int_0^T \int_{\mathcal{O}_i} p_i \widehat{w}_i \chi_{\mathcal{O}_i} \, dyds + \int_0^T \int_{\Omega\backslash\mathcal{O}_i} p_i \widehat{w}_i \chi_{\mathcal{O}_i} \, dxdt$$

isto é,

$$\int_0^T \int_\Omega p_i \widehat{w}_i \chi_{\mathcal{O}_i} dxdt = \int_0^T \int_{\mathcal{O}_i} p_i \widehat{w}_i dxdt. \tag{2.18}$$

Substituindo (2.9) e (2.18) no lado esquerdo e no lado direito de (2.17), respectivamente, obtemos

$$-\int_0^T \int_{\mathcal{O}_i} w_i \widehat{w}_i dxdt = \alpha_i \int_0^T \int_{\mathcal{O}_i} p_i \widehat{w}_i dxdt,$$

isto é,

$$\int_0^T \int_{\mathcal{O}_i} \big(w_i + \alpha_i p_i\big) \widehat{w}_i dxdt = 0, \quad \forall \widehat{w}_i \in L^2(\mathcal{O}_i \times (0,T).$$

Pelo Lema 1.3.1, segue que

$$w_i = -\alpha_i p_i \quad \text{em} \quad \mathcal{O}_i \times (0,T).$$

Portanto, se $\mathbf{w} = \{w_1, \dots, w_n\}$ é um equilíbrio de Nash para os funcionais custos $J_1, \dots, J_n$ o qual está associado a equação (2.4), então temos o **sistema otimizado**

$$\left| \begin{array}{l} u' - \Delta u + \displaystyle\sum_{i=1}^n \alpha_i p_i \chi_{\mathcal{O}_i} = f \chi_{\mathcal{O}} \quad \text{em} \quad Q, \\ -p_i' - \Delta p_i = 0 \quad \text{em} \quad Q, \\ u(0) = 0, \;\; p_i(x,T) = \rho_i^2(x) \left[u(x,T; f, \mathbf{w}) - u^T(x) \right] \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0, \;\; p_i = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma. \end{array} \right. \tag{2.19}$$

Etapa 2 : Suponhamos, no momento, a existência de um par $\{u, p_i\}$ solução de (2.19).

Para simplificar os cálculos, assumamos que $u^T \equiv 0$, pois o sistema é linear (é suficiente usar um argumento de translação).

De fato, decompomos a solução (u, p_i) de (2.19) como sendo

$$\left| \begin{array}{l} u = U + V \\ p_i = P_i + q_i, \end{array} \right. \tag{2.20}$$

onde (U, P_i) é solução do sistema

$$\left| \begin{array}{l} U' - \Delta U + \displaystyle\sum_{i=1}^n \alpha_i P_i \chi_{\mathcal{O}_i} = f \chi_{\mathcal{O}} \quad \text{em} \quad Q, \\ -P_i' - \Delta P_i = 0 \quad \text{em} \quad Q, \\ U(0) = 0, \;\; P_i(x,T) = \rho_i^2(x) \left[U(x,T; f, \mathbf{w}) - U^T(x) \right] \;\; \text{em} \;\; \Omega, \\ U = 0 = P_i \quad \text{sobre} \quad \Sigma. \end{array} \right. \tag{2.21}$$

e (V, q_i) é solução do sistema

$$\left|\begin{array}{l} V' - \Delta V + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i \chi_{\mathcal{O}_i} = 0 \quad \text{em} \quad Q \\ -q_i' - \Delta q_i = 0 \quad \text{em} \quad Q, \\ V(0) = 0, \;\; q_i(x,T) = \rho_i^2(x) V(x,T;f,\mathbf{w}) \;\; \text{em} \;\; \Omega, \\ V = 0 = q_i \quad \text{sobre} \quad \Sigma. \end{array}\right. \tag{2.22}$$

Observemos que a soma dos sistemas (2.21) e (2.22) nos dá o sistema otimizado (2.19). Assim, controlar o sistema (2.19) é equivalente a controlar o sistema (2.22), visto que se $V(.,T,f,\mathbf{w})$ $\big($note que V é solução do sistema (2.22) com $V^T(x) = 0\big)$ descreve um conjunto denso em $L^2(\Omega)$, então

$$u(x,T,f,\mathbf{w}) = U(x,T,f,\mathbf{w}) + V(x,T,f,\mathbf{w})$$

com U fixado, também descreve um conjunto denso em $L^2(\Omega)$.

Agora, dado $\xi \in L^2(\Omega)$, suponhamos que

$$(u(.,T;f,\mathbf{w}(f)),\xi)_{L^2(\Omega)} = 0, \qquad \forall f \in L^2\big(\mathcal{O} \times (0,T)\big).$$

Mostraremos que $\xi \equiv 0$. Esse argumento implica na densidade de $u\big(.,T,f,\mathbf{w}(f)\big)$ em $L^2(\Omega)$ para toda $f \in L^2\big(\mathcal{O} \times (0,T)\big)$. Isto é uma consequência do Teorema 1.5.

Motivados por (2.19), como $u^T \equiv 0$, consideramos a solução $\{\varphi, \psi_1, \ldots, \psi_n\}$ do sistema adjunto ao sistema (2.19)

$$\left|\begin{array}{l} -\varphi' - \Delta\varphi = 0 \quad \text{em} \quad Q, \\ \psi_i' - \Delta\psi_i = -\alpha_i \varphi \chi_{\mathcal{O}_i} \quad \text{em} \quad Q, \\ \varphi(T) = \xi + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \psi_i(T)\rho_i^2 \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \psi_i(0) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \varphi = 0, \quad \psi_i = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma. \end{array}\right. \tag{2.23}$$

Multiplicando $(2.23)_1$ por u e integrando o resultado em $\Omega \times (0,T)$, obtemos

$$-\int_0^T \int_\Omega \varphi' u dx dt - \int_0^T \int_\Omega \Delta\varphi u dx dt = 0. \tag{2.24}$$

Fazendo um cálculo análogo como em (2.11) – (2.14), de (2.24) resulta que

$$-\int_\Omega \varphi(T)u(T)dx + \int_\Omega \varphi(0)u(0)dx + \int_0^T \int_\Omega \varphi u' dxdt - \int_0^T \int_\Omega \varphi \Delta u dxdt = 0.$$

Como $u(0) = 0$ em Ω, da última igualdade acima, segue que

$$-\int_\Omega \varphi(T)u(T)dx + \int_0^T \int_\Omega \varphi u' dxdt - \int_0^T \int_\Omega \varphi \Delta u dxdt = 0. \tag{2.25}$$

Sendo

$$\int_\Omega \varphi(T)u(T)dx = \big(\varphi(T), u(T)\big)_{L^2(\Omega)}$$

e como $\varphi(T) = \xi + \sum_{i=1}^{n} \psi_i(T){\rho_i}^2$ em Ω $\big($equação $(2.23)_3\big)$, então de (2.25), obtemos

$$-\big(\xi, u(T)\big)_{L^2(\Omega)} - \sum_{i=1}^{n} \big(\psi_i(T)\rho_i^2, u(T)\big)_{L^2(\Omega)} + \int_0^T \int_\Omega \varphi\left(u' - \Delta u\right) dxdt = 0. \tag{2.26}$$

Por outro lado, multiplicando $(2.23)_2$ por p_i, integrando o resultado em $\Omega \times (0, T)$, notando que $\psi_i(0) = 0$ em Ω e $-p_i' - \Delta p_i = 0 \quad$ em $\ \Omega \times (0, T)$, obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} \big(\psi_i(T), p_i(T)\big)_{L^2(\Omega)} + \int_0^T \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi p_i \chi_{\mathcal{O}_i} dxdt = 0. \tag{2.27}$$

Com efeito, temos

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \psi_i(T)p_i(T)dx - \int_\Omega \psi_i(0)p_i(0)dx - \int_0^T \int_\Omega \psi_i p_i' dxdt - \int_0^T \int_\Omega \psi_i \Delta p_i dxdt \\ &= -\int_0^T \int_\Omega \alpha_i \varphi p_i \chi_{\mathcal{O}_i} dxdt.\end{aligned}$$

Como $\psi_i(0) = 0$ em Ω, a última expressão acima torna-se

$$\int_\Omega \psi_i(T)p_i(T)dx - \int_0^T \int_\Omega \psi_i p_i' dxdt - \int_0^T \int_\Omega \psi_i \Delta p_i dxdt = -\int_0^T \int_\Omega \alpha_i \varphi p_i \chi_{\mathcal{O}_i} dxdt,$$

ou seja,

$$\big(\psi(T), p_i(T)\big)_{L^2(\Omega)} + \int_0^T \int_\Omega \psi_i \underbrace{(-p_i' - \Delta p_i)}_{=0} dxdt = -\int_0^T \int_\Omega \alpha_i \varphi p_i \chi_{\mathcal{O}_i} dxdt,$$

isto é,

$$\big(\psi_i(T), p_i(T)\big)_{L^2(\Omega)} + \int_0^T \int_\Omega \alpha_i \varphi p_i \chi_{\mathcal{O}_i} dxdt = 0.$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^{n}\big(\psi_i(T),p_i(T)\big)_{L^2(\Omega)}+\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_\Omega \alpha_i\varphi p_i\chi_{\mathcal{O}_i}dxdt=0.$$

Como

$$\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\int_\Omega \alpha_i\varphi p_i\chi_{\mathcal{O}_i}dxdt=\int_0^T\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi p_i\chi_{\mathcal{O}_i}dxdt,$$

então da última equação resulta, que

$$\sum_{i=1}^{n}\big(\psi_i(T),p_i(T)\big)_{L^2(\Omega)}+\int_0^T\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi p_i\chi_{\mathcal{O}_i}dxdt=0$$

e portanto segue (2.27).

Como $u^T(x)=0$ segue de $(2.19)_3$ que

$$p_i(T)=\rho_i^2(x)u(T). \tag{2.28}$$

Substituindo (2.28) em (2.27), temos

$$\sum_{i=1}^{n}\big(\psi_i(T),\rho_i^2(x)u(T)\big)_{L^2(\Omega)}+\int_0^T\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi p_i\chi_{\mathcal{O}_i}dxdt=0. \tag{2.29}$$

Somando (2.26) e (2.29), resulta que

$$\begin{aligned}&-\underbrace{\big(\xi,u(T)\big)}_{=0}{}_{L^2(\Omega)}-\sum_{i=1}^{n}\big(\psi_i(T)\rho_i^2,u(T)\big)_{L^2(\Omega)}+\int_0^T\int_\Omega\varphi\left(u'-\Delta u\right)dxdt\\&+\sum_{i=1}^{n}\big(\psi_i(T),\rho_i^2(x)u(T)\big)_{L^2(\Omega)}+\int_0^T\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi p_i\chi_{\mathcal{O}_i}dxdt=0,\end{aligned}$$

donde

$$\int_0^T\int_\Omega\varphi\underbrace{\left(u'-\Delta u+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i p_i\chi_{\mathcal{O}_i}\right)}_{=f\chi_{\mathcal{O}}}dxdt=0.$$

Por $(2.19)_1$, a expressão acima fica como sendo

$$\int_0^T\int_\Omega\varphi f\chi_{\mathcal{O}}dxdt=0,\qquad\forall\, f\in L^2\big(\mathcal{O}\times(0,T)\big).$$

Notemos que,

$$0=\int_0^T\int_\Omega\varphi f\chi_{\mathcal{O}}dxdt=\int_0^T\int_{\mathcal{O}}\varphi f\chi_{\mathcal{O}}dxdt+\int_0^T\int_{\Omega\backslash\mathcal{O}}\varphi f\chi_{\mathcal{O}}dxdt,$$

ou seja,

$$\int_0^T \int_{\mathcal{O}} \varphi f \, dxdt = 0, \qquad \forall\, f \in L^2\big(\mathcal{O} \times (0,T)\big),$$

donde pelo lema de Du Bois Raymond temos:

$$\varphi = 0 \;\text{ em }\; \mathcal{O} \times (0,T).$$

Pelo Teorema 1.18, segue que

$$\varphi = 0 \;\text{ em }\; \Omega \times (0,T). \tag{2.30}$$

Substituindo (2.30) em $(2.23)_2$ e de $(2.23)_4$ e $(2.23)_5$, obtemos

$$\left|\begin{array}{l} \psi_i' - \Delta\psi_i = 0 \;\text{ em }\; Q, \\ \\ \psi_i(0) = 0 \;\text{ em }\; \Omega, \\ \\ \psi_i = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma. \end{array}\right.$$

Portanto, pela unicidade de soluções, concluímos que

$$\psi_i = 0 \;\text{ em }\; \Omega \times (0,T). \tag{2.31}$$

Substituindo (2.30) e (2.31) em $(2.23)_3$, obtemos

$$\xi = 0,$$

e assim pelo Teorema 1.5, o Teorema 2.1 está concluído. □

2.3 Existência e Unicidade do Equilíbrio de Nash

Consideremos os funcionais custos J_i definidos por (2.3) correspondentes a equação (2.1).

Inicialmente reescrevemos (2.9). Para isso consideremos os espaços funcionais

$$\left|\begin{array}{l} \mathcal{H}_i = L^2\big(\mathcal{O}_i \times (0,T)\big) \\ \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \times \ldots \times \mathcal{H}_n, \end{array}\right. \tag{2.32}$$

e os operadores (resolvente) $L_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_i, L^2(\Omega))$ definido como (vide Seção 2.2) $L_i w_i = u_i(T)$, solução do problema

$$\left| \begin{array}{l} u_i' - \Delta u_i = w_i \chi_{\mathcal{O}_i} \quad \text{em} \quad Q, \\ \\ u_i = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma, \\ \\ u_i(0) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega. \end{array} \right. \tag{2.33}$$

Pelo Teorema 2.4 (vide Apêndice), temos que $u_i \in C^0(0,T; H_0^1(\Omega)$ o que nos garante a boa definição do operador L_i.

Multiplicando $(2.33)_1$ por u_i e integrando em Ω, obtemos

$$\int_\Omega u_i' u_i dx - \int_\Omega \Delta u_i u_i dx = \int_\Omega w_i u_i \chi_{\mathcal{O}_i} dx,$$

ou seja,

$$(u_i', u_i) + (-\Delta u_i, u_i) = (w_i \chi_{\mathcal{O}_i}, u_i).$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e o fato do operador Δ ser coercivo na última igualdade acima, segue que

$$\alpha ||u_i||^2_{H_0^1(\Omega)} \leq |w_i \chi_{\mathcal{O}_i}|_{L^2(\Omega)} |u_i|_{L^2(\Omega)} \leq \beta |w_i|_{\mathcal{H}_i} ||u_i||_{H_0^1(\Omega)}, \tag{2.34}$$

onde $\alpha > 0$ e β é a constante de imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$.

De (2.34), resulta que

$$||u_i(t)||_{H_0^1(\Omega)} \leq C |w_i|_{\mathcal{H}_i},$$

ou seja,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} ||u_i(t)||_{H_0^1(\Omega)} \leq C |w_i|_{\mathcal{H}_i},$$

donde

$$|u_i|_{C^0(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C |w_i|_{\mathcal{H}_i}, \tag{2.35}$$

isto é,

$$||L_i w_i||_{H_0^1(\Omega)} \leq C |w_i|_{\mathcal{H}_i}. \tag{2.36}$$

Como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, a expressão (2.36) nos conduz a desigualdade

$$|L_i w_i|_{L^2(\Omega)} \leq C |w_i|_{\mathcal{H}_i}, \tag{2.37}$$

e assim $L_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_i; L^2(\Omega))$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Fixado $f \in L^2\big(\mathcal{O} \times (0,T)\big)$, poderemos escrever

$$u(x,T,f,\mathbf{w}) = z^T(x) + \sum_{i=1}^{n} L_i w_i(x,T),$$

onde $z^T(x)$ é fixo.

De fato, lembremos que, na definição de J_i, dado em (2.3), $u(x,T,f,\mathbf{w})$ é a única solução do problema (2.1) cujo lado direito é dado por

$$f(x,t)\chi_{\mathcal{O}} + \sum_{i=1}^{n} w_i(x,t)\chi_{\mathcal{O}_i} \quad \text{em} \quad Q.$$

Portanto, para $f \in L^2\big(\mathcal{O}\times(0,T)\big)$ fixado, consideramos $z \in C^0\big([0,T]; L^2(\Omega)\big)$ como única solução do problema

$$\left| \begin{array}{l} z' - \Delta z = f(x,t)\chi_{\mathcal{O}} \quad \text{em} \quad Q, \\ \\ z = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma, \\ \\ z(x,0) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega. \end{array} \right. \tag{2.38}$$

Assim, de (2.33) e (2.38), segue que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i + z$ é também solução de (2.1). Pela unicidade da solução, a solução $u(x,T,f,\mathbf{w})$ de (2.1) pode ser escrita como sendo

$$u(x,t,f,\mathbf{w}) = z(x,t,f) + \sum_{i=1}^{n} u_i(x,t,\mathbf{w}).$$

Em $t = T$, temos

$$u(x,T,f,\mathbf{w}) = z(x,T,f) + \sum_{i=1}^{n} u_i(x,T,\mathbf{w}) = z^T(x) + \sum_{i=1}^{n} L_i w_i(x,T) \tag{2.39}$$

conforme queríamos.

De (2.39) o funcional J_i, dado em (2.3), pode ser reescrito como sendo

$$J_i(f, w_1, \dots, w_i, \dots, w_n) = \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{O}_i} w_i^2 dxdt + \frac{\alpha_i}{2}\int_\Omega \rho_i^2(x) \left(\sum_{i=1}^{n} L_i w_i + z^T(x) - u^T(x) \right)^2 dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{O}_i} w_i^2 dxdt + \frac{\alpha_i}{2}\int_\Omega \rho_i^2(x) \left(\sum_{i=1}^{n} L_i w_i - \big(u^T(x) - z^T(x)\big) \right)^2 dx$$
$$= \frac{1}{2}|w_i|^2_{\mathcal{H}_i} + \frac{\alpha_i}{2}\left|\rho_i \left(\sum_{i=1}^{n} L_i w_i - \eta^T(x) \right)\right|^2_{L^2(\Omega)},$$

onde $\eta^T(x) = u^T(x) - z^T(x)$.

Afirmação: Para cada $1 \leq i \leq n$, o funcional J_i dado em (2.3) é estritamente convexo.

Com efeito, sejam $\lambda \in (0,1)$, $w_i \neq \tilde{w}_i$ e $u \neq \tilde{u}$. Escrevemos

$$J_i(w) = \hat{J}_i(w) + \tilde{J}_i(u),$$

onde

$$\hat{J}_i(w) = \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{O}_i} w_i^2 dxdt$$

e

$$\tilde{J}_i(u) = \frac{\alpha_i}{2}|\rho_i(u(T) - u^T)|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Agora para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, vale

$$\begin{aligned}
\hat{J}_i(\lambda w_i + (1-\lambda)\tilde{w}_i) &= \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{O}_i} \big[\lambda w_i + (1-\lambda)\tilde{w}_i\big]^2 dxdt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{O}_i} \big[\lambda^2 w_i^2 + 2\lambda(1-\lambda)w_i\tilde{w}_i + (1-\lambda)^2\tilde{w}_i^2\big] dxdt \\
&< \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{O}_i} \big[\lambda^2 w_i^2 + \lambda(1-\lambda)w_i^2 + \lambda(1-\lambda)\tilde{w}_i^2 + (1-\lambda)^2\tilde{w}_i^2\big] dxdt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathcal{O}_i} \big[\lambda w_i^2 + (1-\lambda)w_i^2\big] dxdt \\
&= \lambda\hat{J}_i(w_i) + (1-\lambda)\hat{J}_i(\tilde{w}_i),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\hat{J}_i(\lambda w_i + (1-\lambda)\tilde{w}_i) < \lambda\hat{J}_i(w_i) + (1-\lambda)\hat{J}_i(\tilde{w}_i). \tag{2.40}$$

Por outro lado, reescrevendo $u^T = \lambda u^T + (1-\lambda)u^T$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_i(\lambda u + (1-\lambda)\tilde{u}) &= \frac{\alpha_i}{2}\int_\Omega \rho_i^2\Big[\lambda(u - u^T) + (1-\lambda)(\tilde{u} - u^T)\Big]^2 dx \\
&= \frac{\alpha_i}{2}\int_\Omega \rho_i^2\Big[\lambda^2(u - u^T)^2 + 2\lambda(1-\lambda)(u - u^T)(\tilde{u} - u^T) \\
&+ (1-\lambda)^2(\tilde{u} - u^T)^2\Big] dx \\
&< \frac{\alpha_i}{2}\int_\Omega \rho_i^2\Big\{\lambda^2(u - u^T)^2 + \lambda(1-\lambda)[(u - u^T)^2 + (\tilde{u} - u^T)^2] \\
&+ (1-\lambda)^2(\tilde{u} - u^T)^2\Big\} dx \\
&= \lambda\tilde{J}_i(u) + (1-\lambda)\tilde{J}_i(u),
\end{aligned}$$

isto é,

$$\tilde{J}_i(\lambda u + (1-\lambda)\tilde{u}) < \lambda\tilde{J}_i(u) + (1-\lambda)\tilde{J}_i(u). \tag{2.41}$$

Portanto, de (2.40) e (2.41), segue a afirmação.

Assim, pelo teorema 1.4 podemos concluir, da afirmação acima, que a condição de mínimo para os funcionais J_i é satisfeita. Portanto, $\mathbf{w} = \{w_1, \ldots, w_n\} \in \mathcal{H}$ é um equilíbrio de Nash para os funcionais J_i se, e somente se, a derivada de Gateaux é zero, ou seja,

$$\frac{d}{d\lambda} J_i(f, w_1, \ldots, w_i + \lambda \widehat{w}_i, \ldots, w_n)\Big|_{\lambda=0} = 0,$$

isto é,

$$\big(w_i, \widehat{w}_i\big)_{\mathcal{H}_i} + \alpha_i \left(\rho_i \left(\sum_{i=1}^{n} L_i w_i - \eta^T(x), \rho_i L_i \widehat{w}_i \right) \right)_{L^2(\Omega)} = 0, \quad \forall\, \widehat{w}_i \in L^2(\mathcal{O}_i), \tag{2.42}$$

ou equivalentemente,

$$w_i + \alpha_i L_i^* \left(\rho_i^2 \sum_{i=1}^{n} L_i w_i \right) = \alpha_i L_i^* (\rho_i^2 \eta^T(x)), \tag{2.43}$$

sendo $i \in \{1, \ldots, n\}$, onde $L_i^* \in \mathcal{L}\big(L^2(\Omega); \mathcal{H}_i\big)$ é a adjunta de L_i.

Mostremos (2.42) e (2.43). Temos

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{d\lambda} J_i(f, w_1, \ldots, w_i + \lambda \widehat{w}_i, \ldots, w_n)\Big|_{\lambda=0} \\
&= \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{1}{2} |w_i + \lambda \widehat{w}_i|^2_{\mathcal{H}_i} + \frac{\alpha_i}{2} \left| \rho_i \left(\sum_{i=1}^{n} L_i (w_i + \lambda \widehat{w}_i) - \eta^T(x) \right) \right|^2_{L^2(\Omega)} \right] \Bigg|_{\lambda=0} \\
&= \frac{1}{2} \frac{d}{d\lambda} \big((w_i + \lambda \widehat{w}_i), (w_i + \lambda \widehat{w}_i) \big) \Big|_{\lambda=0} + \\
&+ \frac{\alpha_i}{2} \frac{d}{d\lambda} \left(\rho_i \left(\sum_{i=1}^{n} L_i w_i + \lambda L_i \widehat{w}_i - \eta^T \right), \rho_i \left(\sum_{i=1}^{n} L_i w_i + \lambda L_i \widehat{w}_i - \eta^T \right) \right) \Bigg|_{\lambda=0} \\
&= \frac{1}{2} 2 \big((w_i + \lambda \widehat{w}_i), \widehat{w}_i \big) \Big|_{\lambda=0} + \frac{\alpha_i}{2} 2 \left(\rho_i \left(\sum_{i=1}^{n} L_i w_i + \lambda L_i \widehat{w}_i - \eta^T \right), \rho_i L_i \widehat{w}_i \right) \Bigg|_{\lambda=0},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\big(w_i, \widehat{w}_i\big)_{\mathcal{H}_i} + \alpha_i \left(\rho_i \left(\sum_{i=1}^{n} L_i w_i - \eta^T, \rho_i L_i \widehat{w}_i \right) \right)_{L^2(\Omega)} = 0$$

e portanto, segue (2.42).

Agora, sendo L_i^* a adjunta de L_i, de (2.42) temos que

$$\big(w_i, \widehat{w}_i\big)_{\mathcal{H}_i} + \alpha_i \left(L_i^* \rho_i^2 \left(\sum_{i=1}^{n} L_i w_i - \eta^T, \widehat{w}_i \right) \right)_{\mathcal{H}_i} = 0$$

$$\big(w_i, \widehat{w}_i\big)_{\mathcal{H}_i} + \left(\alpha_i L_i^* \left(\rho_i^2 \sum_{i=1}^{n} L_i w_i \right) - \alpha_i L_i^* \big(\rho_i^2 \eta^T\big), \widehat{w}_i \right)_{\mathcal{H}_i} = 0$$

$$\left(w_i + \alpha_i L_i^* \left(\rho_i^2 \sum_{i=1}^{n} L_i w_i \right) - \alpha_i L_i^* \left(\rho_i^2 \eta^T \right), \widehat{w}_i \right)_{\mathcal{H}_i} = 0 \qquad \forall\, \widehat{w}_i \in L^2(\mathcal{O}_i).$$

Então,

$$w_i + \alpha_i L_i^* \left(\rho_i^2 \sum_{i=1}^{n} L_i w_i \right) - \alpha_i L_i^* \left(\rho_i^2 \eta^T \right) = 0,$$

isto é,

$$w_i + \alpha_i L_i^* \left(\rho_i^2 \sum_{j=1}^{n} L_j w_j \right) = \alpha_i L_i^* \left(\rho_i^2 \eta^T \right)$$

e portanto segue (2.43).

Para uma melhor formulação do sistema linear (2.43), consideramos a notação

$$\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\},$$

com $\xi_i = \alpha_i L_i^* \big(\rho_i^2 \eta^T\big)$, e consideramos também um operador $\mathfrak{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ definido por $\mathfrak{L}\mathbf{w}$ com n componentes

$$(\mathfrak{L}\mathbf{w})_i = w_i + \alpha_i L_i^* \left(\rho_i^2 \sum_{i=1}^{n} L_i w_i \right).$$

Então (2.43) pode ser escrito como

$$\mathfrak{L}\mathbf{w} = \xi \qquad \text{em} \qquad \mathcal{H}. \tag{2.44}$$

Portanto, provaremos que a equação linear (2.44) tem uma única solução $\mathbf{w} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ em $\mathcal{H}$ para cada $\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ em $\mathcal{H}$. A solubilidade de (2.44) será estabelicida como aplicação do teorema de Lax-Milgran com restrições sobre α_i e ρ_i.

Teorema 2.2 *Suponhamos que $\alpha_i = \alpha$ para todo i e que $\alpha||\rho_i - \rho_j||_{L^\infty(\Omega)}||\rho_i||_{L^\infty(\Omega)}$ é suficientemente pequeno para quaisquer $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Então $\mathfrak{L}$ é um operador invertível. Em outras palavras, existe um único equilíbrio de Nash $\mathbf{w} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ para J_i.*

Demonstração: Para todo $\xi \in \mathcal{H}$, motivados nos argumentos mencionados acima, seja

$$\left| \begin{array}{l} \mathfrak{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}), \\ ((\mathfrak{L}\mathbf{w})_i, \tilde{w}) = (\xi, \tilde{w}), \\ (\mathfrak{L}\mathbf{w})_i = w_i + \alpha_i L_i^* \left(\rho_i^2 \sum_{i=1}^{n} L_i w_i \right). \end{array} \right. \tag{2.45}$$

Provaremos que (2.45) admite uma única solução $\mathbf{w} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ em $\mathcal{H}$ para cada $\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ em $\mathcal{H}$, o que implicará na existência e unicidade do equilíbrio de Nash.

(i) $\mathfrak{L}$ é **linear,** pois o operador $\alpha L_i^*(\rho_i^2 \eta^T)$ é linear.

(ii) $\mathfrak{L}$ é **contínuo,** visto que o operador $\alpha L_i^*(\rho_i^2 \eta^T)$ é contínuo.

(iii) $\mathfrak{L}$ é **coercivo.**

Para isso, dividiremos a prova em duas etapas:

Etapa 1: $n = 1$

Nesse caso, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$, $\alpha_i = \alpha_1$ e $\mathbf{w} = w_1$. Portanto, vale

$$\begin{aligned} (\mathfrak{L}\mathbf{w}, \mathbf{w})_1 &= \big(w_1 + \alpha_1 L_1^*(\rho_i^2 L_1 w_1), w_1\big) \\ &= \big(w_1, w_1\big)_{\mathcal{H}_1} + \big(\alpha_1 L_1^*(\rho_i^2 L_1 w_1), w_1\big) \\ &= \big(w_1, w_1\big)_{\mathcal{H}_1} + \big(\alpha_1 \rho_i^2 L_1 w_1, L_1 w_1\big) \\ &= ||w_1||_{\mathcal{H}_1}^2 + \alpha_1 |\rho_1 L_1 w_1|^2 \\ &\geq ||w_1||_{\mathcal{H}_1}^2, \end{aligned}$$

Etapa 2: $n > 1$

Temos,

$$(\mathfrak{L}\mathbf{w}, \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{n} |w_i|_{\mathcal{H}_i}^2 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Big(\rho_i \sum_{j=1}^{n} L_j w_j, \rho_i L_i w_i \Big)_{L^2(\Omega)}. \tag{2.46}$$

Notemos que $\sum_{i=1}^{n} |w_i|_{\mathcal{H}_i}^2 = \|w\|_{\mathcal{H}}^2$ e

$$\begin{aligned} \rho_i \sum_{j=1}^{n} L_j w_j \quad &= \rho_i \sum_{j=1}^{n} L_j w_j + \sum_{j=1}^{n} \rho_j L_j w_j - \sum_{j=1}^{n} \rho_j L_j w_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} (\rho_i - \rho_j) L_j w_j + \sum_{j=1}^{n} \rho_j L_j w_j. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Suponhamos que $\alpha_i = \alpha$. Portanto, vale que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Big(\rho_i \sum_{j=1}^{n} L_j w_j, \rho_i L_i w_i \Big)_{L^2(\Omega)} &= \sum_{i=1}^{n} \alpha \Big(\sum_{j=1}^{n} \rho_j L_j w_j, \rho_i L_i w_i \Big)_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} \alpha \Big(\sum_{j=1}^{n} (\rho_i - \rho_j) L_j w_j, \rho_i L_i w_i \Big)_{L^2(\Omega)} \\
&= \alpha \Big| \sum_{i=1}^{n} \rho_i L_i w_i \Big|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \alpha \sum_{i,j=1}^{n} ((\rho_i - \rho_j) L_j w_j, \rho_i L_i w_i)_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{2.48}
$$

Como L_i é contínuo e usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Young na última expressão de (2.48), segue que

$$
\begin{aligned}
&\Big| \alpha \sum_{i,j=1}^{n} (\rho_i - \rho_j) L_j w_j, \rho_i L_i w_i)_{L^2(\Omega)} \Big| \\
&\leq \alpha \sum_{i,j=1}^{n} \|\rho_i - \rho_j\|_\infty \|\rho_i\|_\infty |L_i w_i|_{L^2(\Omega)} |L_j w_j|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \alpha \max_{1 \leq i,j \leq n} \{ \|\rho_i - \rho_j\|_\infty \|\rho_i\|_\infty \} C_1 \sum_{i,j=1}^{n} |w_i|_{\mathcal{H}_i} |w_j|_{\mathcal{H}_j} \\
&\leq \alpha C_1 \max_{1 \leq i,j \leq n} \{ \|\rho_i - \rho_j\|_\infty \|\rho_i\|_\infty \} \|w\|^2_{\mathcal{H}}.
\end{aligned} \tag{2.49}
$$

Dessa forma, de (2.46), (2.48) e (2.49), temos

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{L}\mathbf{w}, \mathbf{w}) &= \|w\|^2_{\mathcal{H}} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Big(\rho_i \sum_{j=1}^{n} L_j w_j, \rho_i L_i w_i \Big)_{L^2(\Omega)} \\
&= \|w\|^2_{\mathcal{H}} + \alpha \Big| \sum_{i=1}^{n} \rho_i L_i w_i \Big|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha \sum_{i,j=1}^{n} ((\rho_i - \rho_j) L_j w_j, \rho_i L_i w_i)_{L^2(\Omega)} \\
&\geq \|w\|^2_{\mathcal{H}} + \alpha \sum_{i,j=1}^{n} ((\rho_i - \rho_j) L_j w_j, \rho_i L_i w_i)_{L^2(\Omega)} \\
&\geq \|w\|^2_{\mathcal{H}} - \alpha C_1 \max_{1 \leq i,j \leq n} \{ \|\rho_i - \rho_j\|_\infty \|\rho_i\|_\infty \} \|w\|^2_{\mathcal{H}} \\
&= \Big(1 - \alpha C_1 \max_{1 \leq i,j \leq n} \{ \|\rho_i - \rho_j\|_\infty \|\rho_i\|_\infty \} \Big) \|w\|^2_{\mathcal{H}},
\end{aligned} \tag{2.50}
$$

onde $C_1 = \max_{1 \leq i,j \leq n} \{C_i, C_j\}$, C_i, C_j constantes de continuidade de L_i, L_j respectivamente. Suponhamos que $\max_{1 \leq i,j \leq n} \{ \|\rho_i - \rho_j\|_\infty \|\rho_i\|_\infty \}$ seja suficientemente pequeno de tal forma que

$$
K = 1 - \alpha C_1 \max_{1 \leq i,j \leq n} \{ \|\rho_i - \rho_j\|_\infty \|\rho_i\|_\infty \} > 0.
$$

Daí obtemos,

$$(\mathfrak{L}\mathbf{w}, \mathbf{w}) \geq K\|w\|^2_{\mathcal{H}}.$$

Logo, de (i), (ii), (iii), o Teorema de Lax-Milgran nos diz que para cada $\xi \in \mathcal{H}'$ existe um único $\mathbf{w} \in \mathcal{H}$ tal que

$$\mathfrak{L}\mathbf{w} = \xi,$$

isto é, a equação $\mathfrak{L}\mathbf{w} = \xi$ possui única solução $\mathbf{w} \in \mathcal{H}$. □

2.4 Apêndice – Existência, Unicidade e Regularidade de Soluções

Nesta seção estudaremos a existência, unicidade e regularidade da solução para um problema associado a equação do calor.

Problema: Dados $u_0(x)$ e h, encontrar uma função numérica $u : \Omega \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo

$$\left| \begin{array}{l} u' - \Delta u = h \quad \text{em} \quad Q, \\ \\ u = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma, \\ \\ u(.,0) = u_0(x) \quad \text{em} \quad \Omega. \end{array} \right. \tag{2.51}$$

Seja $h = f\chi_{\mathcal{O}} + \sum_{i=1}^{n} w_i \chi_{\mathcal{O}_i}$. Vale o seguinte resultado para o problema (2.51).

Teorema 2.3 *Sejam $u_0 \in L^2(\Omega)$ e $h \in L^2(Q)$. Então o problema* (2.51) *possui uma única solução satisfazendo*

$$\left| \begin{array}{l} u \in L^2(0,T; H^1_0(\Omega)) \cap C^0([0,T]; L^2(\Omega)); \\ \\ \dfrac{d}{dt}(u(t), v) + ((u(t), v)) = (h, v) \quad \forall\, v \in H^1_0(\Omega)) \quad \textit{no sentido de } \mathcal{D}'(0,T); \\ \\ u(.,0) = u_0(x) \quad \textit{em} \quad \Omega. \end{array} \right. \tag{2.52}$$

Demonstração: *Para mostrarmos a existência usaremos o método de Faedo-Galerkin que consiste em três etapas:*

1. *Construção de soluções aproximadas em um espaço de dimensão finita;*

2. *Obtenção de estimativas a priori para as soluções aproximadas;*

3. *Passagem ao limite das soluções aproximadas.*

- **Existência**

Soluções Aproximadas

Como $H_0^1(\Omega)$ *é separável, então existe uma base Hilbertiana* $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *formada por vetores de* $H_0^1(\Omega)$. *Seja* $V_m = [w_i, \dots, w_m]$ *o subespaço gerado pelos* m *primeiros vetores dessa base. Consideremos o seguinte problema aproximado*

$$\left| \begin{array}{l} u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j, \\ (u_m', v) + ((u_m, v)) = (h, v), \ \forall\, v \in V_m, \\ u_m(0) = u_{0m} \longrightarrow u_0 \ \text{ em } \ L^2(\Omega). \end{array} \right. \tag{2.53}$$

Notemos que a convergência $(2.53)_3$ *faz sentido pela densidade de* V_m *em* $L^2(\Omega)$. *Por simplicidade, consideremos a base* $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *ortogonal em* $H_0^1(\Omega)$ *e ortonormal em* $L^2(\Omega)$.

Mostremos que para cada $m \in \mathbb{N}$ *fixado, o sistema* (2.53) *tem solução no intervalo* $[0, t_m]$ *com* $t_m < T$. *De fato, seja* $u_{0m} = \sum_{j=1}^{m} a_{j0m}(t) w_j$ *e* $u_m(0) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(0) w_j$. *Fazendo* $v = w_j$ *em* $(2.53)_2$, *obtemos*

$$(u_m', w_j) + ((u_m, w_j)) = (h, w_j),$$

ou seja,

$$(\sum_{j=1}^{m} g_{jm}'(t) w_j, w_j) + ((u_m, w_j)) = (h, w_j).$$

Pela linearidade do produto interno, resulta que

$$g_{jm}'(t) = -((u_m, w_j)) + (h, w_j).$$

Assim, temos

$$\left| \begin{array}{l} g_{jm}' = -((u_m, w_j)) + (h, w_j), \\ g_{jm}(0) = a_{j0m}. \end{array} \right. \tag{2.54}$$

Fixando m *e denotando*

$$z = (z_1, \dots, z_m) = (g_{1m}, \dots, g_{mm}) \quad e$$
$$z_0 = (a_{10m}, \dots, a_{m0m}),$$

então o sistema (2.54) *pode ser reescrito como sendo*

$$\left| \begin{array}{l} z' = F(t,z) \\ z(0) = z_0, \end{array} \right. \tag{2.55}$$

onde $F(t,z) = (F_1(t,z), \dots, F_m(t,z))$ *com*

$$F_i(t,z) = -((u_{m_j}, w_j)) + (h, w_j).$$

Mostremos que o sistema (2.55) *está nas condições de Carathéodory. Com efeito, seja* $D = [0,T] \times B$, *onde* $B = \{z \in \mathbb{R}^n \mid |z| \leq b\}$ *com* $b > 0$ *e* $z_0 \in B$. *Fixado* z, *o termo* $((u_{m_j}, w_j))$ *não depende de* t *e como* $h \in L^2(Q)$ *implica que* $F(t,z)$ *é mensurável para cada* $t \in [0,T]$, *com* z *fixo e* $j = 1, \dots, m$. *Agora, fixado* t *o termo* (h, w_j) *não depende de* z *e a aplicação*

$$\begin{aligned} \Lambda_0 : \;\; & \mathbb{R}^n \longrightarrow H_0^1(\Omega) \\ & z = (z_1, \dots, z_m) \mapsto \Lambda_0(z) = \sum_{j=1}^m z_j w_j \end{aligned}$$

é contínua, visto que

$$||\Lambda_0(z)||_{H_0^1(\Omega)} = ||\sum_{j=1}^m z_j w_j||_{H_0^1(\Omega)} \leq (\sum_{j=1}^m |w_j|^2)^{1/2} (\sum_{j=1}^m |z_j|^2)^{1/2} = C|z|_{\mathbb{R}^n}.$$

Também temos que a aplicação,

$$\begin{aligned} \Lambda_1 : \;\; & H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & z \in [w_1, \dots, w_m] \mapsto \Lambda_1(z) = ((u_{m_i}, w_j)) \end{aligned}$$

é contínua, pois o operador $-\Delta$ *é contínuo em seus espaços apropriados. Logo a aplicação*

$$\begin{aligned} \Lambda_1 \circ \Lambda_0 : \;\; & \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R} \\ & z \mapsto ((u_m, w_j)) \end{aligned}$$

é contínua para todo $j = 1, \dots, m$ *e* t *fixado. Assim, como* z *varia em* B *existe uma constante* $k_B > 0$ *tal que* $|(-\Delta z_m, w_j)| < k_B$. *Logo, segue que:*

$$|F_j(t,z)| \leq |((u_m, w_j))| + |(h, w_j)| \leq k_B + |(h, w_j)| = m_j(t),$$

onde $m_j(t)$ *é integrável, donde* $F_j(t,z)$ *é integrável em* $[0,T]$. *Portanto pelo corolário* (1.3), *o sistema possui solução em* $[0,t_m]$, *com* $t_m < T$, *e pelo corolário* (1.4) *essa solução pode ser estendida a todo intervalo* $[0,T]$ *como consequência da estimativa a priori que faremos a seguir.*

Estimativa *Tomando* $v = u_m \in V_m$ *em* $(2.53)_2$, *segue que*

$$(u_m', u_m) + ((u_m, u_m)) = (h, u_m),$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m|^2 + \|u_m\|^2 = (h, u_m).$$

Integrando de 0 *a* t, *temos*

$$\int_0^t \frac{1}{2}\frac{d}{ds}|u_m|^2 ds + \int_0^t \|u_m\|^2 ds = \int_0^t (h, u_m) ds, \tag{2.56}$$

o que nos dá

$$\frac{1}{2}|u_m(t)|^2 + \int_0^t \|u_m\|^2 ds = \int_0^t (h, u_m) ds + \frac{1}{2}|u_m(0)|^2.$$

Utilizando as Desigualdades de Cauchy-Schwarz e Young, segue que

$$\int_0^t |(h(s), u_m(s))| ds \le \int_0^t |h(s)||u_m(s)| ds \le \frac{1}{2}\int_0^t |h(s)|^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t |u_m(s)|^2 ds.$$

Substituindo a última desigualdade em (2.56), *obtemos*

$$\frac{1}{2}|u_m(t)|^2 + \int_0^t \|u_m\|^2 ds \le \frac{1}{2}\int_0^t |h(s)|^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t |u_m(s)|^2 ds + \frac{1}{2}|u_m(0)|^2. \tag{2.57}$$

Como $u_m(0) = u_{0m} \longrightarrow u_0$ *em* $L^2(\Omega)$ *e* $h \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, *de* (2.57), *resulta que*

$$\frac{1}{2}|u_m(t)|^2 + \int_0^t \|u_m\|^2 ds \le K + \int_0^t |u_m(s)|^2 ds, \tag{2.58}$$

onde $K > 0$ *independe de* m. *Aplicando o lema de Gronwall em* (2.58), *obtemos*

$$\frac{1}{2}|u_m(t)|^2 + \int_0^t \|u_m\|^2 ds \le C, \tag{2.59}$$

onde $C > 0$ *independe de* m. *Portanto, pelo corolário* (1.4), *podemos estender a solução para todo o intervalo* $[0,T]$.

Passagem ao limite *Por* (2.59), *segue que*

$$(u_m) \ \text{ é limitada em } \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{2.60}$$

$$(u_m) \quad \text{é limitada em} \quad L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{2.61}$$

De (2.60), (2.61) e o Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki, podemos deduzir que existe uma subsequência de $u_m(t)$, ainda denotada do mesmo modo, tal que

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{2.62}$$

$$u_m \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{2.63}$$

Multiplicando $(2.53)_2$ por $\theta(t) \in D(0,T)$ e integrando de 0 a T, temos

$$\int_0^T \frac{d}{ds}(u_m,v)\theta(t)dt + \int_0^T ((u_m,v))\theta(t)dt = \int_0^T (h(t),v)\theta(t)dt.$$

Integrando por partes na primeira integral na última expressão acima, resulta que

$$(u_m(s),v)\theta(t)|_0^T - \int_0^T (u_m,v)\theta'(t)dt + \int_0^T ((u_m,v))\theta(t)dt = \int_0^T (h(t),v)\theta(t)dt,$$

o que nos leva a

$$-\int_0^T (u_m,v)\theta'(t)dt + \int_0^T ((u_m,v))\theta(t)dt = \int_0^T (h(t),v)\theta(t)dt, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{2.64}$$

uma vez que V_m é denso em $H_0^1(\Omega)$.

Passando o limite com $m \to \infty$ em (2.64) e utilizando as convergências (2.62) e (2.63), resulta que

$$-\int_0^T (u,v)\theta'(t)dt + \int_0^T ((u,v))\theta(t)dt = \int_0^T (h(t),v)\theta(t)dt,$$

donde

$$-\Big\langle (u(t),v),\theta'(t)\Big\rangle_{D'(0,T),D(0,T)} + \Big\langle ((u(t),v)),\theta(t)\Big\rangle_{D'(0,T),D(0,T)} = \Big\langle (h(t),v),\theta(t)\Big\rangle_{D'(0,T),D(0,T)},$$

ou seja,

$$\Big\langle \frac{d}{dt}(u(t),v) + ((u(t),v)) - (h(t),v),\theta(t)\Big\rangle_{D'(0,T),D(0,T)} = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(0,T),$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}(u(t),v) + ((u(t),v)) = (h(t),v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{2.65}$$

no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$.

Condições iniciais

- $u(0) = u_0$

Para as condições iniciais devemos encontrar o espaço ao qual u' pertence para que possamos garantir que u está definida em $t = 0$ (vide Teorema 1.14). Com efeito, mostraremos que $u' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, para concluirmos que $u \in C^0([0,T];H^{-1}(\Omega))$.

De fato, em particular, tomando $v \in D(\Omega)$, então de (2.65), segue que

$$\Big\langle u'(t), v \Big\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} - \Big\langle \Delta u, v \Big\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} = \Big\langle h(t), v \Big\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)},$$

no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$, ou seja,

$$\Big\langle u'(t) - \Delta u - h(t), v \Big\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} = 0, \quad \forall v \in D(\Omega),$$

no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$.

Pelo Lema 1.3.1, resulta que

$$u' - \Delta u = h \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(Q). \tag{2.66}$$

Como $-\Delta \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$ e $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, segue que

$$-\Delta u \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{2.67}$$

De (2.66), (2.67) e como $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$, temos que

$$u' = h + \Delta u \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) + L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

Agora, como $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ e $u' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, então pelo Teorema 1.14, concluímos que $u \in C^0((0,T);H^{-1}(\Omega))$, e portanto faz sentido calcularmos u em $t = 0$. De (2.63), notemos que

$$\int_0^T (u_m(t), w(t))dt \to \int_0^T (u(t), w(t))dt, \quad \forall w \in L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.68}$$

Em particular, a convergência em (2.68) é válida para $w(t) = v(t)\theta(t)$, onde $\theta \in C^1([0,T])$ e $v \in H_0^1(\Omega)$. Desta maneira, podemos reescrever (2.68) como sendo

$$\int_0^T (u_m(t), v)\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T (u(t), v)\theta(t)dt, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ e } \theta \in C^1([0,T]),$$

com $\theta(0) = 1$ *e* $\theta(T) = 0$. *Portanto,*

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(u_m(t), v)\theta(t)dt \to \int_0^T \frac{d}{dt}(u(t), v)\theta(t)dt \tag{2.69}$$

Integrando por partes em (2.69), *resulta que*

$$-\int_0^T (u_m(t), v)\theta'(t)dt + (u_m(t), v)\theta(t)|_0^T \to -\int_0^T (u(t), v)\theta'(t)dt + (u(t), v)\theta(t)|_0^T,$$

isto é,

$$-(u_m(0), v) - \int_0^T (u_m(t), v)\theta'(t)dt \to -(u(0), v) - \int_0^T (u(t), v)\theta'(t)dt. \tag{2.70}$$

De (2.63), *a seguinte convergência é válida*

$$\int_0^T (u_m(t), v)\theta'(t)dt \to \int_0^T (u(t), v)\theta'(t)dt, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ e } \forall \theta \in C^1([0, T]),$$

e assim de (2.70), *temos que*

$$(u_m(0), v) \to (u(0), v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.71}$$

Como $u_m(0) \longrightarrow u_0$ *em* $L^2(\Omega)$ *e como* $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, *segue que*

$$(u_m(0), v) \longrightarrow (u_0, v), \quad \forall v \in L^2(\Omega). \tag{2.72}$$

Assim, de (2.71), (2.72) *e pela unicidade do limite, concluímos que*

$$(u(0), v) = (u_0, v), \quad \forall v \in L^2(\Omega),$$

donde resulta que $u(0) = u_0$.

Unicidade

Suponhamos que u *e* $\hat{u}$ *sejam soluções do problema* (2.51). *Seja* $w = u - \hat{u}$. *Então temos que* $w \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, $w' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ *e satisfaz o sistema*

$$\left| \begin{array}{l} w' - \Delta w = 0 \quad \text{em} \quad Q, \\ \\ w = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma, \\ \\ w(0) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega. \end{array} \right. \tag{2.73}$$

Mostraremos que $w = 0$.

Com efeito, multiplicando $(2.73)_1$ *por* w *e integrando em* Ω, *obtemos*

$$\int_\Omega w(s)w'(s)ds - \int_\Omega \Delta w(s)w(s)ds = 0 \tag{2.74}$$

Agora, notemos que:

$$\int_\Omega w(s)w'(s)ds = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\int_\Omega |w(s)|^2 ds = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}|w(s)|^2. \tag{2.75}$$

De $(2.73)_2$, *temos que*

$$-\int_\Omega \Delta w(s)w(s)ds = \int_\Omega \nabla w(s)\nabla w(s)ds = \int_\Omega |\nabla w(s)|^2 ds = ||w(s)||^2. \tag{2.76}$$

Substituindo (2.75) *e* (2.76) *em* (2.74) *e integrando de* 0 *a* t, *segue que*

$$\frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{ds}|w(s)|^2 ds + \int_0^t ||w(s)||^2 ds = 0,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}|w(t)|^2 + \int_0^t ||w(s)||^2 ds = 0,$$

donde resuta que $w = 0$, *e por conseguinte* $u = \hat{u}$, *conforme queríamos.* $\square$

Teorema 2.4 *Sejam* $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ *e* $h \in L^2(Q)$. *Então o problema* (2.51) *possui uma única solução satisfazendo*

$$\left|\begin{array}{l} u \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \cap C^0([0,T]; H_0^1(\Omega)) \\ \\ \dfrac{d}{dt}(u(t),v) + ((u(t),v)) = (h,v) \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)) \quad \textit{no sentido de } \mathcal{D}'(0,T); \\ \\ u(.,0) = u_0(x) \quad \textit{em} \quad \Omega. \end{array}\right. \tag{2.77}$$

Demonstração: *A demonstração é feita de modo análogo ao que foi demonstrado no teorema* 2.3.

2.5 Considerações Finais

Em se tratando de domínios ilimitados, existem problemas interessantes que podemos tratar de maneira similar ao que foi feito nesse trabalho ou estudá-los em outro contexto.

- **Sistema Parabólico Geral Linear**

Usando as técnicas desenvolvidas em [5], é possível estender os resultados obtidos aqui para o seguinte sistema

$$\left|\begin{array}{l} u' - \Delta u + a(x,t)u + b(x,t)\nabla u = f\chi_{\mathcal{O}} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} w_i \chi_{\mathcal{O}_i} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \times (0,T), \\ u(x,0) = 0 \quad \text{em} \ \ \mathbb{R}^N, \end{array}\right. \tag{2.78}$$

onde $a(x,t) \in L^\infty\big(\mathbb{R}^N \times (0,T)\big)$ e $b(x,t) \in L^\infty\big(\mathbb{R}^N \times (0,T)\big)^N$.

Vale ressaltar que devido a falta de compacidade de imersões de Sobolev em $\mathbb{R}^N$, para superar as dificuldades encontradas, os autores em [13] trabalham com espaços de Sobolev com peso de Escobedo e Kavian para resolver o sistema (2.78).

- **Operador Fortemente Elíptico**

Para domínios limitados, os resultados obtidos nesse trabalho podem ser estendidos para o operador fortemente elíptico

$$A : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$$

dado por

$$A\varphi = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}) + \sum_{i,j=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + a_0(x)\varphi. \tag{2.79}$$

Notemos que quando $a_0(x) = 0$, $b_i(x) = 0$ e $i = j$, então o operador dado em (2.79) torna-se

$$A\varphi = -\Delta\varphi.$$

- **Alguns Resultados Numéricos - Computacionais**

Resultados numéricos e computacionais fogem da abordagem e objetivo do presente trabalho, mas são muito importantes para melhor visualização e aplicação da teoria até aqui desenvolvida.

Alguns resultados numéricos-computacionais associados a problemas de controle hierárquico multiobjetivo para a equação do calor são desenvolvidos em [4] e [24].

Em [4], os autores apresentam resultados numéricos associado ao controle hierárquico multiobjetivo para a equação do calor fazendo uso da estratégia de Stackelberg-Nash.

Por outro lado, em [24], os autores apresentam solução numérica de problemas de controle multiobjetivo associado a estratégia do equilíbrio de Nash.

Bibliografia

[1] AUBIN, J.P., *Applied Functional Analysis, Pure and Applied Mathematics*, John Wiley & Sons, Second Edition, 2000.

[2] AUBIN, J.P., *L'analyse non Linéaire et ses Motivations Economiques*, Masson, Paris, 1984.

[3] BREZIS, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, New York: Springer, 2011.

[4] CARVALHO, P. P.; FERNÁNDEZ-CARA, E., *On the numerical hierarchical control of parabolic equations.* In preparation.

[5] DÍAZ, J.; LIONS, J.–L., On the approximate controllability of Stackelberg–Nash strategies, in: J.I. Díaz (Ed). *Ocean Circulation and Pollution Control Mathematical and Numerical Investigations*, Springer, 2005.

[6] EKELAND, I.; TEMAN, R., *Convex Analysis and Variational Problems*, Classics in Applied Mathematics 28, SIAM, 1999.

[7] EVANS, L. C., *Partial Differential Equations*, Second edition. Graduate Studies in Mathematics, v. 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[8] FABRE, C., Uniqueness results for Stokes equations and their consequences in linear and nonlinear control problems, *ESAIM: COCV*, v.1, p.267–302, 1996.

[9] FABRE, C.; LEBEAU, G., Prolongemente unique des solutions de l'equation de Stokes.*Communications in Partial Differential Equations*, 21(3&4), p. 573–596, 1996.

[10] FABRE, C.; PUEL, J.–P; ZUAZUA, E., Approximate controllability of the semilinear heat equations,*Proc. Royal Soc. Edinburgh*, v. 125A, p.31–61, 1995.

[11] FERNÁNDEZ–CARA, E.; ZUAZUA, E., Approximate controllability of the semilinear heat equation involving gradient terms,*Departament of Mathematics.* Prepint 2 University of Cantabria, Spain, 1997.

[12] JESUS, I. P., LIMA, O. A, CLARK, M. R., *Análise Funcional: Uma introdução*, 1ª. ed. Teresina: EDUFPI, 2018.

[13] JESUS, I. P., MENEZES, S. D., On the approximate controllability of Stackelberg-Nash strategies for linear heat equations in $\mathbb{R}^N$ with potentials, *Aplicable Analysis,* v. 94, p. 780-799, 2015.

[14] LIONS, J.–L., Hierarchic control, *Proc. Indian Academic Science Mathematical Science*, v. 104, nº 1, p.295–304, 1994.

[15] LIONS, J.– L., *Quelques Méthodes de Résolutions des Problèmes aux Limites non Linéaires*, Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[16] LIONS, J.–L., *Remarks sur la controlabilite approchee.* Jornadas Hispano-Francesas sobre Controle de Sitemas Distribuídos, Octubre 1990.

[17] MEDEIROS, L. A.; MILLA MIRANDA, M., *Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos)*, 5a. edição. Rio de Janeiro: Editora IM-UFRJ, 2006.

[18] MEDEIROS, L. A., *Tópicos em Equações Diferenciais Parciais.* Parte I. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 2006.

[19] MEDEIROS, L. A.; RIVERA, P. H., *Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais, Textos de Métodos Matemáticos,* Instituto de Matemática-UFRJ, n. 9, 1975.

[20] MIZOHATA, S., Unicité du prolongement des solutions pour quelques opérateurs diférentiels paraboliques. : *Mem. Coll. Sc. Univ. Kyoto* Ser. A31, p. 219–239, 1958.

[21] NASH, J., Noncooperative games. *Annals of Mathematics*, v.54, p.286-295, 1951.

[22] PARETO, V., *Cours d'économie politique, Rouge, Laussane*, Switzerland, 1896.

[23] PATHAK, R.S., *A Course in Distribution Theory and Applications.* New Delhi, Narosa, 2009.

[24] RAMOS, A.; GLOWINSKI, R.; PERIAUX, J., Nash equilibria for the multi-objective control of linear partial differential equations, *Journal of Optimization Theory and Applications,* v. 112, p. 457–498, 2002.

[25] SAUT, J.C.; SHEURER, B., Unique continuation for some Evavolution Equations.*J. Differential Equations*, v.66, p.118–139, 1987.

[26] STACKELBERG, H. von., *Marktform un Gleichgewicht*, Springer, Berlin, Germany, 1934.

[27] ZUAZUA, E., Finite Dimensional Null Controllability for the Semilinear Heat Equation. *J. Math. Pures Appl.*, v. 76, p.237–264, 1997.