Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Existência e Unicidade de solução para a equação de Schrödinger com derivadas via regularização parabólica

Lucas Cassiano de Sene Sousa

Teresina - 2018

Lucas Cassiano de Sene Sousa

Dissertação de Mestrado:

Existência e Unicidade de solução para a equação de Schrödinger com derivadas via regularização parabólica

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Gleison do Nascimento Santos
Co-Orientador:
Prof. Dr. Roger Peres de Moura

Teresina - 2018

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Existência e unicidade de solução para a equação de Schrödinger com derivadas via regularização parabólica

LUCAS CASSIANO DE SENE SOUSA

Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 29 de Agosto de 2018.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Gleison do Nascimento Santos - Presidente

Prof. Dr. Roger Peres de Moura - membro externo ao Programa

Ailton Campos do Nascimento
Prof. Dr. Ailton Campos do Nascimento - membro externo à Instituição

FICHA CATALOGRÁFICA
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial do CCN

S725e Sousa, Lucas Cassiano de Sene.
Existência e unicidade de solução para a equação de Schrödinger com derivadas via regularização parabólica / Lucas Cassiano de Sene Sousa. – Teresina, 2018.
59 f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática, 2018.
Orientador: Prof. Dr. Gleison do Nascimento Santos.
Co-orientador: Prof. Dr. Roger Peres de Moura.

1. Análise Matemática. 2. Equações Diferenciais Parciais. 3. Espaços de Sobolev. I. Título.

CDD 515.353

Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes – CRB3/1461

Aos meus pais Luis Estácio de Sousa Filho
e Conceição de Maria Cassiano de Sene.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me proporcionar o dom da vida e me guiar pelos caminhos que me conduziram para a conclusão deste trabalho.

Agradeço ainda a meus familiares pela presença em minha vida e constante apoio os quais foram fundamentais para minha saúde emocional. Em especial, um agradacimento de grande afeto a meus avós maternos Benedito José de Sene e Alice Cassiano de Sene e a meus avós paternos Luis Estácio de Sousa e Jovelina Bezerra de Sousa. Também não posso deixar de agradecer a todas as minhas tias em especial a Gardene Maria de Sousa e Alice Maria Cassaino de Sene as quais foram exemplos para mim e também pelo apoio financeiro e espiritual.

Agradeço a meus colegas de curso das turmas de Lincenciatura em Matemática de 2009, de Bacharelado em Matemática de 2014 e de Mestrado em Matemática de 2016. Vale ressaltar o imenso carinho e gratidão a todas as pessoas que conheci durante a minha vida acadêmica, em especial durante o mestrado, os quais compartilhei minhas vitórias e derrotas, alegrias e frustrações. Um agradecimento fraterno aos amigos Edilson, Márcio, Kelvin, Juliana, Josimauro, Luan, Marcos Paulo, Edmilson, Cícero e Ronyer. Também não posso deixar de agradecer ao meu grupo de estudo intitulado de "A volta dos que não foram"(Thiago Mayson, Ramon Soares, Hyon Cordeiro, Pablo Rêgo, Emerson Matos, Lucas Emanuel). Não posso deixar de agradecer a amizade e o carinho dado pela colega de estudo e de vida Dalila Freitas (sweetheart) a qual me ensinou muitas lições, Maria do Carmo (uma pedra preciosa) a qual construi uma amizade verdadeira, Kasia Yara (Irmã Margarida) cujo abraço me faz falta, Maria dos Remédios (doidinha) pelo seu respeito e Ysnara Kelly (little girl) a qual foi um presente divino. Meus singelos agradecimentos a Rayane Borges (meu jardim) que esteve ao meu lado nos meus momentos mais difíceis e ao meu colega Rafael (o salvador), pois sem ele eu não conseguiria concluir minha dissertação.

Não posso deixar de mencionar e agradecer aos caros Professores do departamento de Matemática da Universidade Federal do Piauí (UFPI), em especial aos Professores Roger Peres de Moura, Gleison do Nascimento Santos, Barnabé Pessoa Lima, João Xavier da Cruz Neto, Marcondes Rodriges Clark e Mario Gomes (Paizão). Agradeço também ao meu professor do ensino médio Marcos Nery (um grande pensador) e ao Mauro Sérgio o meu eterno professor, amigo e um grande influenciador da minha jornada acadêmica a qual sem ele não teria sentido estudar Matemática.

Agradeço com todo carinho o meu irmão Luis Estácio de Sousa Neto por sua força e presença em minha vida, pois na falta do meu pai ele conseguiu suprir.

Agradeço imensamente aos citados acima e, aos outros que não foram citados, peço perdão pela minha péssima memória. A todos dedico também a conclusão desta dissertação e a mais uma etapa da minha vida.

Agradeço (a CAPES, ao CNPq, a FAPEPI) pelo apoio financeiro, o qual foi fundamental para a conclusão deste trabalho.

"*Se tu podes crer, tudo é possível ao que crer*".

A Bíblia (Mc 9:23)

Resumo

Neste trabalho provaremos a existência e unicidade de soluções para o problema de valor inicial associado à equação de Schrödinger com derivadas com dados iniciais em espaços de Sobolev de índice $s > \frac{3}{2}$. Utilizamos e estudamos o método da regularização parabólica devido a Kato 1972. Esse método consiste em acrescentar um termo parabólico à equação original e obter uma família a um parâmetro $\mu > 0$ de equações que são mais simples de se estudar. A ideia é provar a convergência dessa família de soluções quando μ tende a zero e que a função limite é a solução da equação original.

Abstract

In this work we prove the existence and uniqueness of solution for the initial value problem associated to the Derivative Nonlinear Schrödinger Equation with initial data in weigted Sobolev spaces of index $s > \frac{3}{2}$. The method we used to prove such result is the parabolic regularization method due to Kato in 1972. This method consist in adding a parabolic term to the original equation in order to obtain a one parameter family of equations wich are easier to study. Then the idea is to prove the convergence of this family of solutions when the parameter tends to zero and that the limite function is solution of the original equation.

Conteúdo

Introdução

Nesse trabalho estudaremos o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u + i\lambda|u|^2\partial_x u = 0, \\ u(\cdot, 0) = u_0. \end{cases} \tag{1}$$

onde $u = u(x,t)$ é uma função a valores complexos definida em $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, e λ é um parâmetro real.

A equação (1) é conhecida como equação de Schrödinger com derivadas (DNLS). Em Física ela aparece como um modelo que descreve a propagação de ondas Alfvén em plasma (para mais informações ver [17], [18] e [20]).

Uma questão matemática de grande relevância teórica é o problema da boa colocação. Dizemos que um PVI é localmente bem posto num certo espaço de Banach X se a cada dado inicial $u_0 \in X$ corresponder uma única solução $u \in C([0,T];X)$ que satisfaça o PVI. Além disso espera-se que as soluções correspondentes a dados iniciais próximos permaneçam próximas durante seu tempo de existência. Em geral procura-se estabelecer resultados de boa colocação em espaços $X = H^s(\mathbb{R})$ com o ínidice s menor possível.

Vários trabalhos em matemática têm sido dedicados ao estudo da equação em (1). Um dos primeiros resultados sobre existência e unicidade de soluções foi obtido por [23] Tsutsumi e Fukuda em 1980. Eles empregaram a técnica de regularização parabólica, para provar a existência e unicidade de soluções para o PVI (1) com dados iniciais em espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$, com $s > \frac{3}{2}$. N. Hayashi em 1991 provou a boa-colocação para dados iniciais $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ satisfazendo uma condição sobre o tamanho do dado inicial:

$$\|u_0\|_{L^2} < \sqrt{2\pi}. \tag{2}$$

Usando uma transformação adequada e técnicas refinadas de transformada de Fourier H. Takaoka [22] em 1999 obteve boa-colocação em $H^s(\mathbb{R})$ para todo $s \geqslant 1/2$. O ídice $s = 1/2$

é o melhor que podemos esperar para boa colocação. De fato H. Biagioni e F. Linares em [2] provaram que (1) não é bem posto em $H^s(\mathbb{R})$ para todo $s < 1/2$.

Nesse trabalho provaremos que o seguinte resultado:

Teorema 0.0.1. *Para* $s > \frac{3}{2}$, *se* $u_0 \in H^s$ *então existem um* $T(\|u_0\|) > 0$ *e uma úinica função* $u \in C([0,T]; H^s)$ *solução da equação integral*

$$u(t) = E(t)u_0 - \lambda \int_0^t E(t-\tau)(|u|^2 \partial_x u)(\tau) d\tau, \tag{3}$$

onde $E(t) = e^{-4\pi^2 \xi^2 it}$.

A técnica que utilizamos para provar o teorema acima foi o método da regularização parabólica o qual é devido a Kato em 1972. Também conhecido como argumento da viscosidade, tal método consiste no seguinte:
Primeiro provamos que para cada parâmetro positivo μ (viscosidade) o problema de valor inicial

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u + i\lambda|\mu|^2 \partial_x u = i\mu \partial_x^2 u, \\ u(\cdot, 0) = u_0 \end{cases} \tag{4}$$

tem uma, e somente uma, solução u_μ defnida num intervalo $[0, T_\mu]$. O segundo passo é provar que a família de soluções u_μ converge quando μ tende a zero e o limite resolve (1). O primeiro passo é simples devido a presença do termo parabólico $i\mu\partial_x^2 u$. Como é usual podemos obter solução $u_\mu \in C([0, T_\mu]; H^s(\mathbb{R})) \cap C^1((0,T), H^s)$, com $T_\mu = \frac{\mu}{\|u_0\|_{H^s}}$, em algum espaço de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$. A maior dificuldade está no segundo passo. Mas antes de considerarmos o problema de convergência temos que argumentar que todas as soluções podem ser estendidas para o mesmo intervalo de tempo. Esta extensão uniforme será possível se provarmos que a família $(u_\mu)_{\mu>0}$ satisfaz uma estimativa uniforme do tipo

$$\sup_{\mu>0} \sup_{t\in[0,T_\mu]} \|u_\mu\|_{H^s_x} < +\infty. \tag{5}$$

A estimativa (5) permitirá estender todas as soluções para um intervalo de tempo $[0, T]$ independente de μ. Portanto, teremos uma grande chance de sucesso com a regularização parabólica se podermos provar a estimativa uniforme (5).
Em [8], R. Iório e V. Iório mostraram que uma estimativa como em (5) pode ser obtida em $H^s(\mathbb{R})$, $s > \frac{3}{2}$ para uma não linearidade do tipo $u^m \partial_x u$, $m \in \mathbb{N}$. Neste trabalho obtemos uma estimativa uniforme do tipo (5) para a equação DNLS em $H^s(\mathbb{R})$, com $s > \frac{3}{2}$.
Este trabalho é organizado da seguinte forma:

No Capítulo 1, listamos uma série de resultados que serão utilizados ao longo do trabalho.
No Capítulo 2, consideramos a equação regularizada

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u + i\lambda|u|^2\partial_x u = i\mu\partial_x^2 u, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{6}$$

Para provarmos que (6) tem solução seguiremos o conhecido método do ponto fixo para contração que consiste em considerar um operador para o qual a solução de (6) é ponto fixo.
No Capítulo 3, estudaremos a equação DNLS. Discutiremos que todas as soluções do P.V.I (6) acima podem ser estendidas para o mesmo intervalo de tempo, em seguida provaremos que tais extensões são uniformemente limitadas. Daí argumentamos sobre a convergência da família (u_μ) e encontraremos um candidato u à solução. Feito isso, apresentamos a demonstração do Teorema 0.0.1.
Por fim, no Capítulo 4 terminamos nosso trabalho com breves comentários sobre a DNLS e algumas generalizações.
Esta dissertação teve suporte financeiro da agência CAPES de fomentos.

Notação.

- Denotamos $\langle x\rangle = (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$

- Para $s \in \mathbb{R}$, J^s é o potencial de Bessel de ordem $-s$, dada via transformada de Fourier pelas fórmula
$$\widehat{J^s f} = \langle \xi\rangle^s \widehat{f}.$$

- $D^s(\cdot) = (|\xi|^s \widehat{\cdot})^{\vee}$ representa o potencial de Bessel de ordem $-s$.

- Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(f)$ representa a parte real e $\mathrm{Im}(f)$ a imaginária de f.

- $L^p(\mathbb{R}) = \Big\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mensurável tal que $\|f\|_{L^p} := \Big\{ \Big(\int_{\mathbb{R}} |f|^p \, dx \Big)^{\frac{1}{p}} < +\infty \Big\} \Big\}$.

- Denotaremos para $f = f(x,t)$, com $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T]$
$$\|f\|_{L^q_t L^p_x} = \left(\int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x,t)|^p \, dx \right)^{\frac{p}{q}} dt \right)^{\frac{1}{q}}$$
e
$$\|f\|_{L^q_t H^s_x} = \left(\int_0^T \|f(\cdot,t)\|^q_{H^s} \, dt \right)^{\frac{1}{q}} = 0.$$

Capítulo 1

Noções Preliminares

Para dar maior comodidade ao leitor, enunciaremos neste capítulo as definições e os resultados que serão essencias para uma boa compreensão do texto.

1.1 Análise Funcional

Enunciaremos aqui alguns resultados de Análise funcional que serão úteis no decorrer do nosso trabalho.

Definição 1.1.1. *Seja X um espaço métrico completo não vazio com uma métrica* d. *Uma aplicação $f : X \longrightarrow X$ é dita uma contração uniforme, se existir uma constante λ com $0 \leqslant \lambda < 1$ tal que:*

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \beta d(x, y), \quad \forall x, y \in X$$

Definição 1.1.2 (Ponto fixo)**.** *Seja $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ um operador (não necessariamente linear) onde $\mathcal{H}$ é o espaço de Hilbert. Diremos que $x \in \mathcal{H}$ é um ponto fixo de T, se $T(x) = x$.*

Teorema 1.1.1 (Teorema do Ponto Fixo de Banach)**.** *Considere (M, d) um espaço métrico completo e uma contração $f : M \longrightarrow M$. Então f possui um único ponto fixo.*

Demonstração. Ver referência [13]. □

Proposição 1.1.1. *Toda sequência limitada num espaço de Hilbert possui uma subsequência convergente*

Demonstração. Ver referência [13]. □

Teorema 1.1.2 (Desigualdade de Gronwall). *Sejam* $\alpha, \beta, \delta \in C([a,b], \mathbb{R})$, *tais que* $\beta \geqslant 0$ *e*

$$\delta(x) \leqslant \alpha(x) + \int_{x_0}^{x} \beta(s)\delta(s)ds.$$

Então,

$$\delta(x) \leqslant \alpha(x) + \int_{x_0}^{x} \beta(s)\alpha(s)e^{\int_{s}^{x} \beta(u)du} ds.$$

Em particular, se $\alpha(x) = K$ *constante, temos*

$$\delta(x) \leqslant Ke^{\int_{x_0}^{x} \beta(s)ds}.$$

1.2 Os espaços de Lebesgue L^p

Nesta parte estudaremos os espaços L^p de Lebesgue, os quais são espaços de Banach cujas normas são definidas em termos de integrais.

Definição 1.2.1. *Seja* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *um domínio e seja* $0 < p < \infty$. *Dada* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) *mensurável, definamos*

$$\|f\|_{L^p(X)} = \left(\int_X |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.1}$$

e

$$L^p(\Omega) = \left\{f : X \longrightarrow \mathbb{C} \;\; \text{e} \;\; \|f\|_{L^p(X)} < \infty\right\}$$

que é chamado de espaço $L^p(\Omega)$ *de Lebesgue.*

Proposição 1.2.1 (Desigualdade de Hölder). *Sejam* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $X \subset \mathbb{R}$ *um conjunto mensurável e* $f \in L^p$ *e* $g \in L^q$ *funções mensuráveis. Então,* $fg \in L^1$ *e vale a desigualdade*

$$\int_X fg\, dx \leqslant \left(\int_X |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Demonstração. Ver referência [1] □

Proposição 1.2.2 (Desigualdade de Minkowski). *Se* $1 \leqslant p < \infty$ *e* $f, g \in L^p$, *então*

$$\|f + g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} .$$

Demonstração. Ver referência [3] □

Proposição 1.2.3 (Desigualdade de Minkowski para Integrais). *Sejam* (X, μ) *e* (Y, ν) *espaços de medida* σ*-finitos e seja* $f : X \times T \to \mathbb{R}$ *uma função mensurável. Se* $f(\cdot, y) \in L^p(X, \mu)$ *para quase todo* $y \in Y$*, então* $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y) \in L^p(X, \mu)$ *e*

$$\left\| \int_Y f(\cdot, y) d\nu(y) \right\|_{L^p} \leqslant \int_X \| f(\cdot, y) \|_{L^p} \, d\nu(y)$$

Demonstração. Ver referência [3] □

Proposição 1.2.4 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue). . *Sejam* $\{f_n\}_{n \geqslant 1}$ *uma sequência de funções integráveis que converge em quase todo parte para uma função real mensurável* f*. Se existir uma função integrável* g *tal que* $|f_n| \leqslant g$*, para todo* n*, então* f *é integrável e*

$$\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu.$$

Demonstração. Consultar teorema 5.6 de [1]. □

Vamos agora obter condições para que valha a fórmula da "derivação dentro do sinal da integral"

$$\frac{d}{dy} \int_\Omega F(x, y) d\mu(x) = \int_\Omega \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) d\mu(x). \tag{1.2}$$

Proposição 1.2.5. *Seja* J *um intervalo em* $\mathbb{R}$ *e seja* $F : \Omega \times J \to \mathbb{R}^m$ *ou* $\mathbb{C}$ *uma função tal que:*

(i) Para todo $y \in J$ *fixado a função* $x \mapsto F(x, y)$*, definida em* Ω*, é integrável relativamente a* μ*;*

(ii) Em todo ponto de $\Omega \times J$ *existe a derivada parcial* $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)$*;*

(iii) Existe uma função integrável $g : \Omega \to [0, +\infty]$ *tal que*

$$g(x) \geqslant \left| \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right|, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall y \in J.$$

Então:

- *a função* $y \mapsto \displaystyle\int_\Omega F(x, y) d\mu(x)$ *é diferêncivél em* J*;*
- *para cada* $y \in J$ *fixado a função* $x \mapsto \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)$*, definida em* Ω*, é integrável relativamente a* μ*.*
- *vale a fórmula* (1.2) *acima.*

Demonstração. Ver referência [9]. □

1.3 Transformada de Fourier em L^1

Falaremos aqui da transformada de Fourier e algumas de suas propriedades. A transformada de Fourier é uma ferramenta muito útil no estudo da série de Fourier. Nesse estudo, funções complicadas porém periódicas são escritas como o somatório de ondas simples matematicamente representadas por senos e cossenos.

Definição 1.3.1. *Sendo $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definimos a transformada de Fourier de f sendo a função $\widehat{f}$ dada por*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{1.3}$$

onde $\xi \cdot x = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \cdots + x_n\xi_n$.

Observação 1.3.1. *Note que a transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n)$ está bem definida pois,*

$$|f(x)e^{-2\pi i \xi \cdot x}| = |f(x)| \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Exemplo 1.3.1. *Considere por exemplo a função característica $f(x) = \chi_{(a,b)}(x)$. Pela definição temos*

$$\begin{aligned} \widehat{\chi}_{(a,b)}(\xi) &= \int_a^b e^{-2\pi i x \xi} dx \\ &= -\frac{e^{-2\pi b \xi} - e^{-2\pi i a \xi}}{2\pi i \xi} \\ &= -e^{-\pi i (b+a)\xi} \frac{e^{-\pi i (b-a)\xi} - e^{\pi i (b-a)\xi}}{2\pi i \xi}. \end{aligned}$$

Prosseguimos listando algumas propriedades básicas da transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 1.3.1. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, temos que:*

(1). $\widehat{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ *é uma função contínua;*

(2). $\widehat{(\tau_h f)}(\xi) = e^{-2\pi i h \cdot \xi} \widehat{f}(\xi)$, *onde* $\tau_h f(x) = f(x - h)$;

(3). $\lim\limits_{|\xi| \to \infty} \hat{f}(\xi) = 0$ *(Riemann-Lebesgue).*

(4). $(\widehat{e^{2\pi i x \cdot h} f})(\xi) = \tau_h \widehat{f}(\xi)$

(5). Dado $a > 0$, $(\widehat{f(a\cdot)})(\xi) = a^{-n}\widehat{f}(a^{-1}\xi)$;

(6). $\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$;

(7). $\displaystyle\int \widehat{f} g \, d\xi = \int f \widehat{g} \, d\xi$;

Demonstração. Uma demonstração dessas propriedades pode ser encontrada em [3]. □

1.4 Transformada de Fourier no espaço de Schwartz

Primeiro iremos apresentar um espaço de funções testes para estudar a transformada de Fourier, chamado de espaço de Schwartz.

Definição 1.4.1. *Chamamos de espaço de funções $C^\infty(\mathbb{R})$ de decrescimento rápido, também conhecido como espaço de Schwartz, ao espaço,*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) : \|\varphi\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| < \infty, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \right\},$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ *e* $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ *e* $|\beta| = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$

Exemplo 1.4.1. *Exemplos clássicos de funções de* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *são* $\varphi(x) = e^{-\pi|x|^2}$, $\varphi_\alpha(x) = x^\alpha e^{-\pi|x|^2}$ *e suas translações.*

Observação 1.4.1. *O espaço* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *é denso em* $L^p(\mathbb{R}^n)$*. Em outras palavras, dada uma função* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *existe uma sequência* $\varphi_k \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^s)$ *tal que* $\|\varphi_k - f\|_{L^p} \to 0$*. Uma demonstração desse fato pode ser visto em [8].*

O espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ possui uma noção de convergência de sequências da seguinte forma

Definição 1.4.2. *Dizemos que uma sequência* $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ *de funções de* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *converge para uma função* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*, quando* $\lim_{j \to \infty} \|\varphi_j - \varphi\|_{\alpha,\beta} = 0$*, para quaisquer multi-índices* $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.

Proposição 1.4.1. *Se* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*, então*

(1). $\widehat{\partial^\alpha \varphi}(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \, \widehat{\varphi}(\xi)$;

(2). $\left((\widehat{-2\pi i \xi)^\alpha \varphi}\right)(\xi) = \partial^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)$;

Demonstração. Ver referência [8] □

A proposição anterior é uma das propriedades mais importantes da transformada de Fourier. Ela mostra que o operador diferencial agindo em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é transformado no operador de multiplicação por $2\pi i\xi$. Como veremos, isso nos permitirá transformar equações diferenciais lineares com coeficientes constantes em equações algébricas.

Proposição 1.4.2. *Sejam $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, vale a fórmula da inversão*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi\cdot x}d\xi, \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.4}$$

Demonstração. Ver referência [8] □

Proposição 1.4.3 (Identidade de Parseval)**.**

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\widehat{g} = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}g. \tag{1.5}$$

Demonstração. Ver referência [8] □

A proposição 1.4.2 nos permite definir a inversa da transfomada de Fourier. Podemos definí-la como sendo a aplicação

$$\mathcal{G} \ : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

dada por

$$\mathcal{G}(f) := \check{f},$$

onde,

$$\check{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)e^{2\pi i\xi\cdot x}d\xi, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Agora podemos anunciar a Proposição seguinte:

Proposição 1.4.4. *A restrição da transformada de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é um isomorfismo e sua inversa é dada por*

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)e^{2\pi i\xi\cdot x}d\xi, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração. Ver referência [8]. □

1.5 Transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n)$

Em geral, dada uma função $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, a expressão

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

não faz sentido. Por exemplo, a função

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \in (-\infty, 1] \\ \dfrac{1}{x}, x \in (1, \infty) \end{cases}$$

está em $L^2(\mathbb{R}^n)$ mas não em $L^1(\mathbb{R}^n)$, com $n = 1$. Para definir a transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n)$ precisaremos do seguinte resultado:

Proposição 1.5.1 (Igualdade de Plancherel em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$)**.** *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então vale a igualdade*

$$\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2}.$$

Demonstração. Tomando na igualdade (1.5) da porposição (1.4.1), $\widehat{g} = \overline{f}$, temos

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}^n} f\widehat{g} \\ &= \|\widehat{f}\|_{L^2}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

□

Definição 1.5.1 (Transformada de Fourier em L^2)**.** *Seja $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Definimos a transformada de Fourier de f, e a sua transformada inversa por*

$$\widehat{f} = \lim_{k\to\infty} \widehat{f_k} \quad e \quad \check{f} = \lim_{k\to\infty} \check{f_k},$$

onde $\{f_k\}$ é uma sequência qualquer em Schwartz convergindo a f em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Observação 1.5.1. *$\widehat{f}$ e $\check{f}$ estão bem definidas, ou seja, independe da sequência $f_k \longrightarrow f$.*

Exemplo 1.5.1. *Seja $f(x) = e^{-\pi x^2}$. Então, derivando f obtemos $f'(x) = -2\pi x f(x)$, e portanto, f satisfaz a equação*

$$f'(x) = -i(2\pi i x f(x)) = 0.$$

Aplicando a transformada de Fourier a esta equação e usando a Proposição 1.4.1, obtemos:

$$2\pi i\xi\widehat{f}(\xi) + i\frac{d}{d\xi}\widehat{f}(\xi) = 0$$

e portanto,

$$\widehat{f}(\xi) = \widehat{f}(0)e^{-\pi\xi^2}.$$

Usando coordenadas polares vemos que

$$\widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = 1,$$

e consequentemente,

$$\widehat{f}(\xi) = e^{-\pi\xi^2}.$$

Proposição 1.5.2. *A transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n)$, definida como acima, é um operador unitário.*

Demonstração. Ver referência [8]. □

Observemos que a Proposição 1.5.2 estende a identidade de Plancherel do espaço de Schwartz para $L^2(\mathbb{R}^n)$.

1.6 Transformada de Fourier em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Consideremos $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ o dual topológico de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, isto é, o conjunto dos funcionais lineares e contínuos sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Mais precisamente, uma aplicação linear $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ está em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se,

$$\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}} 0 \ \text{ implicar em } \ \lim_{k\to\infty} T(\varphi_k) = 0.$$

Um elemento de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é também chamado de distribuição temperada.

Notação. : Dada $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é comun denotar $T(\varphi)$ por $\langle T, \varphi \rangle$.

Exemplo 1.6.1. *Seja $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Podemos definir a distribuição $T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$.*

Exemplo 1.6.2. *Dado $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, definimos o ponto (ou medida) de massa centrado na origem, comumente chamado de função delta de Dirac, por:*

$$\delta = \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \quad \textit{para} \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \tag{1.7}$$

δ define uma distribuição.

Observação 1.6.1. *Pode-se provar que não existe $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tal que $\delta = T_f$. Em outras palavras, a distribuição δ não provém de nenhuma função $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.*

Para definir a transformada de Fourier, olhamos para a distribuição do exemplo 1.6.1. Observe que para cada $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} T_f(\widehat{\varphi}) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)\varphi(\xi)dx \\ &= T_{\widehat{f}}(\varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Baseado nisso, definiremos a transformada de Fourier de uma distribuição temperada da seguinte forma:

Definição 1.6.1. *(Transformada de Fourier em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$). Seja $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. A transformada de Fourier de f é a distribuição temperada $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$ dada por*

$$\widehat{f}(\varphi) = f(\widehat{\varphi}), \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

De modo similar, definimos a transformada de Fourier inversa.

Definição 1.6.2. *Dada $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, define a transformada inversa de f, denotada por $\check{f}$, como sendo o funcional dado por*

$$\check{f}(\varphi) = f(\check{\varphi}), \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Proposição 1.6.1. *A trasformada de Fourier*

$$\wedge := \mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

é um isomorfismo cuja inversa é dada pela transformada inversa $\vee$. Além disso é contínua com inversa contínua no sentido que se $f_k \xrightarrow{\mathcal{S}'} f$, então

$$\widehat{f_k} \xrightarrow{\mathcal{S}'} \widehat{f} \quad \text{e} \quad \check{f_k} \xrightarrow{\mathcal{S}'} \check{f}.$$

Demonstração. Ver referência [8]. □

Definição 1.6.3. *Seja $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dizemos que Φ é de crescimento lento quando, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, existir uma constante $C(\alpha)$ e um número natural $N(\alpha)$ tais que*

$$|\partial^\alpha \Phi| \leqslant C(\alpha)(1 + |x|^2)^{N(\alpha)},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ com $|x|$ suficientemente grande. Denotaremos o conjunto das funções de decrescimento lento por $Q(\mathbb{R}^n)$.

Sejam $\Phi \in Q(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Observando que, para qualquer $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\partial^\alpha(\Phi\varphi)(x)|$ é limitado superiormente por uma combinação linear finita de termos da forma

$$C(1+|x|^2)^N \partial^\beta \varphi(x).$$

Concluimos que $\Phi\varphi$ está no espaço de Schwartz. Isto nos permite dar a próxima definição.

Exemplo 1.6.3. *Exemplo de funções de crescimento lento são os polinômios.*

Definição 1.6.4. *Sejam $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. A derivada $\partial^\alpha f$ de f é o funcional*

$$\varphi \ :\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longmapsto (-1)^\alpha f(\partial^\alpha \varphi).$$

Definição 1.6.5. *Sejam $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\Phi \in Q(\mathbb{R}^n)$. Definimos a distribuição*

$$\Phi T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C},$$

chamada de produto da distribuição T com a função Φ, por

$$\Phi T(\varphi) = T(\Phi\varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Proposição 1.6.2. *A transformada de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}'$ satisfaz as seguintes propriedades:*

(1). $(\partial^\alpha F)^\wedge(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{F}(\xi)$, *para qualquer multi-índice* $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

(2). $((-2\pi i x)^\alpha F)^\wedge(\xi) = \partial^\alpha_\xi \widehat{F}(\xi)$.

(3). $(\tau_h F)^\wedge(\xi) = e^{-2\pi i h\cdot\xi}\widehat{F}(\xi)$.

(4). $(e^{2\pi i x\cdot h}F)^\wedge(\xi) = \tau_h \widehat{F}(\xi)$.

(5). Se $F \in \mathcal{S}'$ *e* $\psi \in \mathcal{S}$, *então*

$$\widehat{F * \psi} = \widehat{F}\widehat{\psi},$$

onde $\widehat{F}\widehat{\psi} \in \mathcal{S}'$ *é defido como*

$$\widehat{F}\widehat{\psi}(\varphi) = \widehat{F}(\widehat{\psi}\varphi).$$

Demonstração. Ver referência [8]. □

1.7 Transformada de Fourier aplicada ao estudo da equação de Schrödinger linear.

Vamos mostrar como a transformada de Fourier pode ser útil na resolução de equações diferenciais parciais lineares de evolução com coeficientes constantes. Consideremos como exemplo o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \partial_t u - i\partial_x^2 u = f(x,t) \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{1.8}$$

onde $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ e $u = u(x,t)$ é uma função complexa tal que $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Nosso objetivo é exibir a solução de (1.8).

Apliquemos então a transformada de Fourier em (1.8) :

$$\widehat{\partial_t u}(\xi) - \widehat{i\partial_x^2 u}(\xi) = \widehat{f(x,t)}(\xi).$$

Usando as propriedades da transformada de Fourier, obtemos:

$$\frac{d}{dt}\widehat{u(\cdot,t)}(\xi) - i(2\pi i\xi)^2\widehat{u(\cdot,t)}(\xi) = \widehat{f(x,t)}(\xi).$$

Daí,

$$\frac{d}{dt}\widehat{u(\cdot,t)}(\xi) + (4\pi^2 i\xi^2)\widehat{u(\cdot,t)}(\xi) = \widehat{f(x,t)}(\xi).$$

Multipliquemos esta última equação por $e^{4\pi^2\xi^2 t}$ obtemos

$$\frac{d}{dt}\left[e^{4\pi^2 i\xi^2 t}\widehat{u(\cdot,t)}(\xi)\right] = e^{4\pi^2 i\xi^2 t}\widehat{f(x,t)}(\xi). \tag{1.9}$$

Vamos integrar de 0 a t a última equação (1.9):

$$\int_0^t \frac{d}{ds}\left[e^{4\pi^2 i\xi^2 t}\widehat{u(\cdot,t)}(\xi)\right] ds = \int_0^t e^{4\pi^2 i\xi^2 s}\widehat{f(\cdot,s)}(\xi)ds.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos:

$$e^{4\pi^2 i\xi^2 t}\widehat{u(\cdot,t)}(\xi) = \widehat{u_0(\cdot)}(\xi) + \int_0^t e^{4\pi^2 i\xi^2 t}\widehat{f(\cdot,s)}(\xi)ds.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \widehat{u(\cdot,t)}(\xi) &= e^{-4\pi^2 i\xi^2 t}\widehat{u_0(\cdot)}(\xi) + e^{-4\pi^2 i\xi^2 t}\int_0^t e^{4\pi^2 i\xi^2 s}\widehat{f(\cdot,s)}(\xi)ds \\ &= e^{-4\pi^2 i\xi^2 t}\widehat{u_0(\cdot)}(\xi) + \int_0^t e^{-4\pi^2 i\xi^2(t-s)}\widehat{f(\cdot,s)}(\xi)ds. \end{aligned}$$

Agora definamos o seguinte operador:

$$\mathsf{E}(t)\varphi = \{\mathsf{F}(t,\cdot)\widehat{\varphi}\}^{\vee}, \quad \text{onde} \quad \mathsf{F}(t,\xi) = e^{-4\pi^2 i\xi^2 t}. \tag{1.10}$$

Portanto,

$$\widehat{u(\cdot,t)}(\xi) = \mathsf{F}(t,\xi)\widehat{u_0(\cdot)}(\xi) + \int_0^t \mathsf{F}(t-s,\xi)\widehat{f(\cdot,s)}(\xi)ds,$$

o que implica em

$$\widehat{u(\cdot,t)}(\xi) = \mathsf{E}\widehat{(t)u_0}(\cdot)(\xi) + \int_0^t \mathsf{E}(t\widehat{-s)f}(\cdot,s)(\xi)ds. \tag{1.11}$$

Utilizando o teorema de Fubini na parte integral da equação (1.11), obtemos:

$$\widehat{u(\cdot,t)}(\xi) = \mathsf{E}\widehat{(t)u_0}(\cdot)(\xi) + \mathcal{F}\Big(\int_0^t \mathsf{E}(t-s)f(\cdot,s)ds\Big)(\xi). \tag{1.12}$$

Aplicando a transformada de Fourier inversa e usando sua linearidade, obtemos:

$$u(x,t) = \mathsf{E}(t)u_0(x) + \int_0^t \mathsf{E}(t-s)f(x,s)ds, \tag{1.13}$$

onde $\mathsf{E}(t)$ é dado por (1.10).

1.8 Espaços de Sobolev

Abordaremos nesta seção os espaços de Sobolev do tipo $L^2(\mathbb{R})$ de ordem $s \in \mathbb{R}$ através da transformada de Fourier em $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Definição 1.8.1. *(Espaços de Sobolev na reta). Dado $s \in \mathbb{R}$ definimos o espaço de Sobolev de ordem s como sendo*

$$\mathsf{H}^s(\mathbb{R}) := \Big\{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}); (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{f} \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R})\Big\}. \tag{1.14}$$

Definimos em $\mathsf{H}^s(\mathbb{R})$ a seguinte norma

$$\|f\|_{H^s} := \Big(\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^s|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Observamos que $H^s(\mathbb{R}) \subset H^r(\mathbb{R})$ para $r \leqslant s$, e usando a Igualdade de Plancherel em L^2,

$$H^0(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R}). \tag{1.15}$$

Exemplo 1.8.1. *A distribuição* $\delta_0 : S'(\mathbb{R}) \longrightarrow S'(\mathbb{R})$ *(Definida em* (1.7)*, acima) pertence a* $H^s(\mathbb{R})$*, para qualquer* $s < -\frac{1}{2}$.

Proposição 1.8.1. *Para cada* $s \in \mathbb{R}$ *o espaço de Sobolev* $H^s(\mathbb{R})$ *é um espaço de Hilbert quando munido do produto interno*

$$\langle f, g\rangle_s := \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\xi|^2)^s \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}d\xi.$$

Proposição 1.8.2. *Sejam* $s, k \in \mathbb{R}$, *com* $k > 0$, *e* $f \in H^s(\mathbb{R})$. *Então* $\partial^\alpha f \in H^{s-k}(\mathbb{R})$ *para todo natural* α *tal que* $\alpha < k$.

Demonstração. Seja $\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha < k$. Então

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (1+\xi^2)^{s-k}|\widehat{f^{(\alpha)}}(\xi)|^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+\xi^2)^{s-k}\xi^{2\alpha}|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} (1+\xi^2)^{s-k+\alpha}|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} (1+\xi^2)^{s}|\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.
\end{aligned}$$

logo $f^{(\alpha)} \in H^{s-k}(\mathbb{R})$. □

A próxima Proposição diz que o índice de Sobolev está relacionado às propriedades de suavidade da função f.

Proposição 1.8.3. *(Imersão de Sobolev). Se* $s > \frac{1}{2}$, *então* $H^s(\mathbb{R}) \subseteq C^0_\infty(\mathbb{R})$ *e vale a desigualdade*

$$\|f\|_{L^\infty} \leqslant C\|f\|_{H^s},$$

onde $C^0_\infty(\mathbb{R})$ *é a coleção das funções contínuas* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tais que* $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0$.

Em outras palavras, temos que se $s > k + \frac{1}{2}$, *onde* $k \in \mathbb{N}$, *então* $H^s(\mathbb{R})$ *está imerso continuamente em* $C^k_\infty(\mathbb{R})$, *o espaço das funções com* k *derivadas contínuas tais que*

$$\lim_{|x|\to\infty} f^{(\alpha)}(x) = 0, \forall \alpha \in \{0, 1, \dots, k\},$$

munido da norma

$$\|f\|_{\infty,k} := \max_{\alpha \leqslant k} \|f^{(\alpha)}\|.$$

Além disso, vale

$$\|f\|_{L^\infty} \leqslant C_s\|f\|_{H^s}.$$

Demonstração. Ver referência [15]. □

A Proposição seguinte mostra que se $s > \frac{1}{2}$, então $H^s(\mathbb{R})$.

Proposição 1.8.4. *Se* $s > \frac{1}{2}$ *então* $\|fg\|_{H^s} \leqslant c\|f\|_{H^s}\|g\|_{H^s}$ *para todo* $f, g \in H^s(\mathbb{R})$.

Demonstração. Ver referência [15]. □

Proposição 1.8.5. *Se* $s_1 \leqslant r \leqslant s_2$ *e* $\theta \in [0,1]$ *é tal que* $r = (1-\theta)s_1 + \theta s_2$ *então vale:*

$$\|f\|_{H^r} \leqslant \|f\|_{H^{s_1}}^{1-\theta}\|f\|_{H^{s_2}}^{\theta}.$$

Demonstração. Ver referência [15]. □

A seguir enunciaremos algumas desigualdades envolvendo derivadas de ordem fracionária. Estas serão de grande importância em nosso trabalho.

Proposição 1.8.6 (Regra de Leibniz)**.** *(i). Seja* $\alpha \in (0,1)$. *Seja* $p \in (1,\infty)$, $f = f(x)$, $g = g(x)$, *então*

$$\|D^\alpha(fg) - fD^\alpha g\|_{L^p} \leqslant \|g\|_\infty \|D^\alpha f\|_{L^p}.$$

(ii). Seja $\alpha \in (0,1)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,\alpha]$ *com* $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. *Sejam* $p, q, p_1, p_2, q_2 \in (1,\infty)$, $q_1 \in (0,\infty]$ *tais que*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \quad e \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}.$$

Sejam $f = f(x,t)$ *e* $g = g(x,t)$. *Então*

$$\|D_x^\alpha(fg) - fD_x^\alpha g - gD_x^\alpha f\|_{L_x^p L_T^q} \leqslant \|D_x^{\alpha_1} f\|_{L_x^{p_1} L_T^{q_1}} \|D_x^{\alpha_2} g\|_{L_x^{p_2} L_T^{q_2}}.$$

Além disso, para $\alpha_1 = 0$ *o valor de* $q_1 = \infty$ *é aceito.*

A demonstração da proposição anterior se encontra na referência: [12].

Proposição 1.8.7 (Estimativa de comutador de kato-Ponce)**.** *Para* $s \geqslant 1$ *temos*

$$\|J^s(gf) - gJ^s f\|_{L^2} \leqslant c(\|\nabla g\|_{L^\infty}\|J^{s-1}f\|_{L^2} + \|f\|_\infty \|J^s g\|_{L^2}).$$

Demonstração. Ver referência [12]. □

Capítulo 2

O Método da Regularização Parabólica

Nosso principal argumento será baseado no método da regularização parabólica devido ao matemático Tosio Kato em 1972. Mais precisamente, introduziremos uma viscosidade artificial $\mu > 0$ e resolveremos o problema de valor inicial para a equação:

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u + i\lambda|u|^2\partial_x u = i\mu\partial_x^2 u, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{2.1}$$

Onde $u = u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0,\infty)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

2.1 A solução do problema linear e suas propriedades

Nesta seção estudaremos algumas propriedades das soluções do problema linear associado a (2.1). mas precisamente estudaremos o seguinte P.V.I.,

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u - i\mu\partial_x^2 u = 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{2.2}$$

Usando a transformada de Fourier e prosseguindo como no sistema de equações (1.8), achamos a solução:

$$u(x,t) = \left\{e^{-4\pi^2\xi^2(i+\mu)t}\widehat{u_0}\right\}^{\vee}(x)$$

que denotaremos por $E_\mu(t)u_0$. Agora vejamos algumas propriedades da família de operadores $E_\mu(t)$, $\mu > 0$.

Proposição 2.1.1. *Dado* $\mu > 0$, *a família de operadores* $\{E_\mu(t)\}_{t\geqslant 0}$ *satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $E_\mu(0) = i_d$.

2. $E_\mu(t+\tau) = E_\mu(t)E_\mu(\tau)$.

3. $\|E_\mu(t)f\|_{H^{s+\lambda}} \leqslant \left(1 + \frac{k}{2\pi(\sqrt{\mu t}^\lambda)}\right)\|f\|_{H^s}$.

4. $f \in L^2(\mathbb{R})$ *então* $E_\mu(t)f \in C^0((0,T]; H^r(\mathbb{R}))$ *para todo* $r > 0$.

5. Se $f \in H^2(\mathbb{R})$ *então* $E_\mu(t)f \in C^1((0,T]; L^2(\mathbb{R}))$ *e além disso vale*

$$\partial_t E_\mu(t)f = (i+\mu)\partial_x^2 E_\mu(t)f.$$

Demonstração. 1. Dada f temos

$$E_\mu(0)f = \left\{e^{-4\pi^2\xi^2\mu.0}\widehat{f}\right\}^\vee = \left\{e^0\widehat{f}\right\}^\vee = f.$$

2. Pela definição de $E_\mu(t)$ temos que para cada f

$$E_\mu(t+\tau)f = \left\{e^{-4\pi^2\xi^2\mu(t+\tau)}\widehat{f}\right\}^\vee = \left\{e^{-4\pi^2\xi^2\mu t}e^{-4\pi^2\xi^2\mu\tau}\widehat{f}\right\}^\vee = E_\mu(t)E_\mu(\tau)f.$$

Logo

$$E_\mu(t+\tau)f = E_\mu(t)E_\mu(\tau)f$$

para todo f.

(3) Dada $f \in H^s(\mathbb{R})$, usando a definição de $\|\cdot\|_{H^{s+\lambda}}$,

$$\begin{aligned}
\|E_\mu(t)f\|_{H^{s+\lambda}} &= \|(1+\xi^2)^{\frac{s+\lambda}{2}}\widehat{E_\mu(t)f}\|_{L^2} \\
&= \|(1+\xi^2)^{\frac{s+\lambda}{2}}e^{-4\pi^2\xi^2(i+\mu)t}\widehat{f}\|_{L^2} \\
&\leqslant \|(1+\xi^2)^{\frac{\lambda}{2}}e^{-4\pi^2\xi^2\mu t}\|_{L^\infty}\|(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{f}\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Note que,

$$\begin{aligned}
(1+\xi^2)^{\frac{\lambda}{2}}e^{-(2\pi\sqrt{\mu t}\xi)^2} &\leqslant (1+|\xi|^\lambda)e^{-(2\pi\sqrt{\mu t}\xi)^2} \\
&\leqslant 1+|\xi|^\lambda e^{-(2\pi\sqrt{\mu t}\xi)^2} \\
&= 1+\frac{1}{(2\pi\sqrt{\mu t})^\lambda}(2\pi\sqrt{\mu t})^\lambda|\xi|^\lambda e^{-(2\pi\sqrt{\mu t}\xi)^2}.
\end{aligned}$$

Como $\left\{|x|^\lambda e^{-x^2}, x \in \mathbb{R}\right\}$ é limitado, segue que

$$(1+\xi^2)^{\frac{\lambda}{2}}e^{-(2\pi\sqrt{\mu t}\xi)^2} \leqslant 1+\frac{k}{(\sqrt{\mu t})^\lambda}.$$

Logo,

$$\|E_\mu(t)f\|_{H^{s+\lambda}} \leqslant \Big(1+\frac{k}{(\sqrt{\mu t})^\lambda}\Big)\|f\|_{H^s}.$$

(4) Para obter o resultado da continuidade assumimos, sem perda de generalidades que $t>\tau$. Usando a definição do E_μ e o Teorema de Plancherel temos que

$$\|E_\mu(t)f - E_\mu(\tau)f\|^2_{H^r} = \int_{\mathbb{R}} \langle\xi\rangle^{2r} |e^{-4\pi^2\xi^2(i+\mu)t}|^2 |e^{-4\pi^2\xi^2(i+\mu)(t-\tau)} - 1|^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi. \quad (2.3)$$

Notando que o integrando é limitado por uma função integrável e usando o Teorema da Convergência Dominada segue o resultado. Isto prova o ítem 4.

(5) Para a demonstração do ítem 5 fixe $t>0$. Se $|h|\ll 1$ tal que $t+h>0$. Considere

$$g_h(\xi,t,\mu) := \frac{e^{-4\pi^2\xi^2(i+\mu)(t+h)} - e^{-4\pi^2\xi^2(i+\mu)t}}{h} + 4\pi^2\xi^2(i+\mu)e^{-4\pi^2\xi^2(i+\mu)t}.$$

Observe que

$$|g_h(\xi,t,\mu)| \leqslant 8\pi^2\xi^2(1+\mu). \quad (2.4)$$

Usando a transformada de Fourier temos que

$$\left\|\frac{E_\mu(t+h)f - E_\mu(t)f}{h} - (i+\mu)\partial_x^2 E_\mu(t)f\|_{L^2} = \|g_h(\xi,t,\mu)\widehat{f}(\xi)\right\|_{L^2}.$$

Desde que

$$|g_h(\xi,t,\mu)\widehat{f}(\xi)| \leqslant C_\mu \langle\xi\rangle^2 |\widehat{f}(\xi)|$$

e que $\langle\xi\rangle^2\widehat{f}(\xi)\in L^2(\mathbb{R})$ segue do Teorema da Convergência Dominada que

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\left\|\frac{E_\mu(t+h)f - E_\mu(t)f}{h} - (i+\mu)\partial_x^2 E_\mu(t)f\right\|_{L^2} &= \|g_h(\xi,t,\mu)\widehat{f}(\xi)\|_{L^2} \\
&= \|\lim_{h\to 0} g_h(\xi,t,\mu)\widehat{f}(\xi)\|_{L^2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Agora, estudaremos o problema não-homogêneo

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u - i\mu\partial_x^2 u = F(x,t), \\ u(x,0) = u_0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Proposição 2.1.2. *Se* u *é solução de* (2.5), *então* u *satisfaz a equação*

$$u(x,t) = E_\mu(t)u_0(x) - i\int_0^t E_\mu(t-\tau)F(\cdot,\tau)d\tau. \quad (2.6)$$

Demonstração. Apliquemos a transformada de Fourier à equação (2.5) e usemos a condição inicial:

$$i\frac{d}{dt}\widehat{u(\cdot,t)}(\xi) + (2\pi i\xi)^2\widehat{u(\cdot,t)}(\xi) - i\mu(2\pi i\xi)^2\widehat{u(\cdot,t)}(\xi) = \widehat{F(\cdot,t)}(\xi).$$

O que é o mesmo que,

$$i\frac{d}{dt}\widehat{u(\cdot,t)}(\xi) - 4\pi^2\xi^2\widehat{u(\cdot,t)}(\xi) + i\mu 4\pi^2\xi^2\widehat{u(\cdot,t)}(\xi) = \widehat{F(\cdot,t)}(\xi),$$

simplificando, obtemos

$$i\frac{d}{dt}\widehat{u(\cdot,t)}(\xi) + 4\pi^2\xi^2(-1+i\mu)\widehat{u(\cdot,t)}(\xi) = \widehat{F(\cdot,t)}(\xi).$$

Consequentemente,

$$\frac{d}{dt}\widehat{u(\cdot,t)}(\xi) + 4\pi^2\xi^2(i+\mu)\widehat{u(\cdot,t)}(\xi) = -i\widehat{F(\cdot,t)}(\xi).$$

Então,

$$\frac{d}{dt}\left[e^{4\pi^2\xi^2(i+\mu)t}\widehat{u(\cdot,t)}(\xi)\right] = -i[e^{4\pi^2\xi^2(i+\mu)t}\widehat{F(\cdot,t)}(\xi).$$

Integrando de 0 a t,

$$\int_0^t \frac{d}{dt}\left[e^{4\pi^2\xi^2(i+\mu)\tau}\widehat{u(\cdot,t)}(\xi)\right]d\tau = -i\int_0^t e^{4\pi^2\xi^2(i+\mu)\tau}\widehat{F(\cdot,t)}(\xi)d\tau.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos:

$$\widehat{u(\cdot,t)}(\xi)e^{4\pi^2\xi^2(i+\mu)t} - \widehat{u(\cdot,0)}(\xi) = -i\int_0^t e^{4\pi^2\xi^2(i+\mu)\tau}\widehat{F(\cdot,t)}(\xi)d\tau.$$

Portanto,

$$\widehat{u(\cdot,t)}(\xi) = e^{-4\pi^2\xi^2(i+\mu)t}\widehat{u(\cdot,0)}(\xi) - i\int_0^t e^{4\pi^2\xi^2(i+\mu)(t-\tau)}\widehat{F(\cdot,t)}d\tau.$$

Usando o teorema de Fubini na parte integral como fizemos em (1.12) e em seguida aplicando a transformada de Fourier inversa e usando sua linearidade, obtemos (2.6)

$$u(x,t) = E_\mu(t)u_0(x) - i\int_0^t E_\mu(t-\tau)F(x,\tau)d\tau.$$

□

2.2 A solução do problema regularizado

Nesta seção estudaremos o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u + i\lambda|u|^2\partial_x u = i\mu\partial_x^2 u, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{2.7}$$

Usando a Proposição 2.1.2, sabemos que se u for solução de (2.7) então u satisfará

$$u(x,t) = E_\mu(t)u_0(x) - \lambda\int_0^t E_\mu(t-\tau)|u|^2\partial_x u(x,\tau)d\tau. \tag{2.8}$$

Mostraremos que a cada dado inicial $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ com $s > \frac{3}{2}$ existe um $T = T(\|u_0\|, \mu) > 0$ e uma única função $u \in C([0,T]\,; H^s(\mathbb{R}))$ satisfazendo (2.8). Para tanto, considere $X_T = C([0,T]\,; H^s(\mathbb{R}))$ tal que $\|u\|_{X_T} = \sup\limits_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{H^s}$ e definamos

$$\Psi(u) = E_\mu(t)u_0(x) + \lambda\int_0^t E_\mu(t-\tau)|u|^2\partial_x u(x,\tau)d\tau.$$

Observe que (2.8) equivale a dizer que u é ponto fixo da aplicação Ψ. Para provar que Ψ tem um ponto fixo faremos as seguinte etapas:

1) Existe um certo $T > 0$ conveniente tal que

$$u \in X_T, \quad \text{logo} \quad \Psi(u) \in X_T. \tag{2.9}$$

2) A aplicação

$$\Psi : X_T \longrightarrow X_T. \tag{2.10}$$

é uma contração. Daí segue do Teorema do ponto fixo de Banach que φ terá um, e somente um, ponto fixo em X_T.

ETAPA 1: Dado $u \in X_T$, para provar (2.8) deveremos estimar a norma H^s de $\Psi(u)$. A estimativa da parte linear de $\Psi(u)$ segue do fato que

$$\|E_\mu(t)u_0\|_{H^s} \leqslant \|u_0\|_{H^s}. \tag{2.11}$$

Quanto à parte integral, usamos a desigualdade de Minkowski para integrais e depois o ítem 3 da Proposição 2.1.1 para obter

$$\begin{aligned}
\|\lambda\int_0^t E_\mu(t-\tau)|u|^2\partial_x u(x,\tau)d\tau\|_{H^s} &\leqslant |\lambda|\int_0^t \|E_\mu(t-\tau)|u|^2\partial_x u(x,\tau)\|_{H^s}d\tau \\
&= |\lambda|\int_0^t\Big(1+\frac{k}{\sqrt{\mu(t-\tau)}}\Big)\||u|^2\partial_x u\|_{H^{s-1}}d\tau. \\
&\leqslant |\lambda|\sup_{t\in[0,T]}\||u|^2\partial_x u\|_{H^{s-1}}\int_0^t(1+\frac{k}{\sqrt{\mu(t-\tau)}}\Big)d\tau \\
&\leqslant k|\lambda|\Big(T+\frac{\sqrt{T}}{\sqrt{\mu}}\Big)\sup_{t\in[0,T]}\|u\bar{u}\partial_x u\|_{H^{s-1}}.
\end{aligned}$$

Assumindo que $s > \frac{3}{2}$ temos que $s-1 > \frac{1}{2}$ e portanto pela Proposição 1.8.4 segue que

$$\begin{aligned}\|u\overline{u}\partial_x u\|_{H^{s-1}} &\leqslant c\|u\|_{H^s}\|\overline{u}\|_{H^s}\|\partial_x u\|_{H^{s-1}}\\ &\leqslant c\|u\|_{H^s}^2\|\partial_x u\|_{H^{s-1}}.\end{aligned}$$

Observando que

$$\|\partial_x u\|_{H^{s-1}} = 2\pi\|u\|_{H^s}.$$

Concluímos que

$$\|u\overline{u}\partial_x u\|_{H^{s-1}} \leqslant c\|u\|_{H^s}^3.$$

Sendo assim,

$$\|\lambda\int_0^t U_\mu(t-\tau)|u|^2\partial_x u(x,\tau)d\tau\|_{H^s} \leqslant k|\lambda|\Big(T+\frac{\sqrt{T}}{\sqrt{\mu}}\Big)\sup_{t\in[0,T]}\|u\|_{H^s}^3. \tag{2.12}$$

Portanto, de (2.11) e (2.12) segue que

$$\|\varphi(u)\|_{H^s} \leqslant \|u_0\|_{H^s} + k|\lambda|\Big(T+\frac{1}{\sqrt{\mu}}\sqrt{T}\Big)\sup_{t\in[0,T]}\|u\|_{H^s}^3. \tag{2.13}$$

Isso prova (2.9). Definamos para cada $R, T > 0$ o conjunto

$$B_{R,T} = \{u \in X_T; \|u\|_{X_T} \leqslant R\}.$$

Vejamos que para T apropriado vale $\varphi(u) \in B_{R,T}$ para todo $u \in B_{R,T}$. Com efeito, tomando o supremo em t na desigualdade (2.13) e considerando que $s > \frac{3}{2}$, concluímos

$$\|\varphi(u)\|_{X_T} \leqslant \|u_0\|_{H^s} + k|\lambda|\Big(T+\frac{1}{\sqrt{\mu}}\sqrt{T}\Big)\|u\|_{X_T}^3. \tag{2.14}$$

Tomando $R \geqslant 2\|u_0\|_{H^s}$ e T tal que

$$T+\frac{\sqrt{T}}{\sqrt{\mu}} \leqslant \frac{1}{2k|\lambda|R^2},$$

teremos,

$$\|\varphi(u)\|_{X_T} \leqslant \frac{R}{2}+\frac{R}{2} = R.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\varphi\ :\ B_{R,T} &\longrightarrow B_{R,T}\\ u &\longmapsto \varphi(u),\end{aligned}$$

Agora mostremos que φ é contração com respeito à norma de X_T. Para isto, tomamos $u, v \in B_{R,T}$. Então, usando a desigualdade de Minkowiski para integrais seguida da Proposição 2.1.1 obtemos,

$$\begin{aligned}
\|\varphi(u)-\varphi(v)\|_{X_T} &= \|\lambda\int_0^t U_\mu(t-\tau)(|u|^2\partial_x u-|v|^2\partial_x v)d\tau\|_{H^s}\\
&\leqslant k|\lambda|\int_0^t\Big(1+\frac{1}{\sqrt{\mu}\sqrt{t-\tau}}\Big)\||u|^2\partial_x u-|v|^2\partial_x v\|_{H^{s-1}}d\tau\\
&\leqslant k|\lambda|\Big(T+\frac{\sqrt{T}}{\sqrt{\mu}}\Big)\sup_{t\in[0,T]}\||u|^2\partial_x u-|v|^2\partial_x v\|_{H^{s-1}}.
\end{aligned}$$

Agora escrevemos a diferença $|u|^2\partial_x u-|v|^2\partial_x v$ da seguinte forma

$$|u|^2\partial_x u-|v|^2\partial_x v=\Big(|u|^2-|v|^2\Big)\partial_x u+|v|^2\partial_x(u-v).$$

Daí, segue que,

$$\begin{aligned}
\||u|^2\partial_x u-|v|^2\partial_x v\|_{H^{s-1}} &\leqslant \|(|u|^2-|v|^2)\partial_x u\|_{H^{s-1}}+\||v|^2\partial_x(u-v)\|_{H^{s-1}}\\
&= \||u|^2\partial_x u-\bar{v}u\partial_x u+u\bar{v}\partial_x u-|v|^2\partial_x u\|_{H^{s-1}}+\|v\bar{v}\partial_x(u-v)\|_{H^{s-1}}\\
&= \|u\bar{u}\partial_x u-\bar{v}u\partial_x u+u\bar{v}\partial_x u-v\bar{v}\partial_x u\|_{H^{s-1}}+\|v\bar{v}\partial_x(u-v)\|_{H^{s-1}}\\
&= \|(\bar{u}-\bar{v})u\partial_x u+(u-v)\bar{v}\partial_x u\|_{H^{s-1}}+\|v\bar{v}\partial_x(u-v)\|_{H^{s-1}}\\
&\leqslant c_s\|u-v\|_{H^{s-1}}\|u\|_{H^{s-1}}\|\partial_x u\|_{H^{s-1}}+c_s\|u-v\|_{H^{s-1}}\|\bar{v}\|_{H^{s-1}}\|\partial_x u\|_{H^{s-1}}\\
&\quad +c_s\|v\|_{H^{s-1}}\|\bar{v}\|_{H^{s-1}}\|\partial_x(u-v)\|_{H^{s-1}}.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade triangular e depois a Proposição (1.8.4) temos,

$$\begin{aligned}
\||u|^2\partial_x u-|v|^2\partial_x v\|_{H^{s-1}} &\leqslant C\Big(\|u-v\|_{H^s}\|u\|_{H^s}\|u\|_{H^s}+\|u-v\|_{H^s}2\|v\|_{H^s}\|u\|_{H^s}\\
&+ \|v\|_{H^s}\|v\|_{H^s}\|u-v\|_{H^s}\Big)\\
&\leqslant C\|u-v\|_{H^s}\Big(\|u\|^2_{H^s}+2\|u\|_{H^s}\|v\|_{H^s}+\|v\|^2_{H^s}\Big)\\
&= C\|u-v\|_{H^s}\left(\|u\|_{H^s}+\|v\|_{H^s}\right)^2.
\end{aligned}$$

Daí, substituindo na desigualdade acima,

$$\begin{aligned}
\|\varphi(u)-\varphi(v)\|_{H^s} &\leqslant C(\|u\|_{X_T}+\|v\|_{X_T})^2\|u-v\|_{X_T}\Big(T+\frac{\sqrt{T}}{\sqrt{\mu}}\Big)\\
&\leqslant 4CR^2\Big(T+\frac{\sqrt{T}}{\sqrt{\mu}}\Big)\|u-v\|_{X_T}.
\end{aligned}$$

Logo φ será uma contração em X_T se

$$\Big(T+\frac{\sqrt{T}}{\sqrt{\mu}}\Big)\leqslant\frac{1}{8CR^2}. \tag{2.15}$$

Tomando $R = 2\|u_0\|_{H^s}$ e $T > 0$ satisfazendo (2.15), temos então que

$$\|\varphi(u) - \varphi(v)\|_{H^s} \leqslant \frac{1}{2}\|u - v\|_{X_T}.$$

Observe que para $R = 2\|u_0\|_{H^s}$, $0 < \mu < 1$ e $0 < T < 1$ existe $c > 0$ dependendo de λ tal que

$$T \leqslant c\frac{\mu}{\|u_0\|^4_{H^s}}$$

implica em

$$\Big(T + \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{\mu}}\Big) \leqslant \frac{1}{8CR^2}.$$

Com isto, obtemos a seguinte Proposição:

Proposição 2.2.1. *Dados* $s > \frac{3}{2}$, $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ *e* $0 < \mu < 1$, *existe uma única* $u_\mu \in C^0([0, T_\mu]; H^s(\mathbb{R}))$ *solução da equação integral* (2.8) *onde* T_μ *é da forma*

$$T_\mu = c\frac{\mu}{\|u_0\|^4_{H^s}},$$

para alguma constante $c > 0$ *independente de* μ.

Agora faremos duas proposições essênciais para o nosso trabalho.

Proposição 2.2.2. *Seja* u_μ *a solução regularizada, dada por*

$$u_\mu = E_\mu(t)u_0 - \lambda\int_0^t E_\mu(t-\tau)F_\mu(t)d\tau,$$

onde $F_\mu = |u_\mu|^2\partial_x u_\mu$, $v_\mu = -\lambda\int_0^t E_\mu(t-\tau)F_\mu(\tau)d\tau$ *e* $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ *com* $s > \frac{3}{2}$. *Então temos* $u_\mu \in C^0((0, T]; H^r(\mathbb{R})), \forall \;\; 0 < r < s+1$.

Demonstração. Fixemos $r \in (0, s+1)$. Já sabemos da Proposição 2.1.1 ítem 4 que

$$E_\mu(t)u_0 \in C((0, T]; H^r(\mathbb{R})).$$

Provemos a continuidade em t de v_μ. Seja $r' \in (r, s+1)$. Provemos que

$$v_\mu \in L^\infty([0, T]; H^{r'}(\mathbb{R})) \tag{2.16}$$

Para isso, notemos primeiro que $F_\mu \in L^\infty([0, T]; H^{s-1}(\mathbb{R}))$. De fato, como $u_\mu \in C^0([0, T]; H^s(\mathbb{R}))$ e $s - 1 > \frac{1}{2}$ temos

$$\begin{aligned} \|F_\mu\|_{H^{s-1}_x} &\leqslant c\||u_\mu|^2\|_{H^{s-1}_x}\|\partial_x u_\mu\|_{H^{s-1}_x} \\ &\leqslant \tilde{c}\|u_\mu\|^2_{H^{s-1}_x}\|u_\mu\|_{H^s_x}. \end{aligned}$$

Daí obtemos $F_\mu \in L^\infty([0,T];H^{s-1}(\mathbb{R}))$ e além disso,

$$\|F_\mu\|_{L^\infty_T H^{s-1}_x} \leqslant c\|u_\mu\|^3_{L^\infty_T H^s_x}.$$

Em seguida usamos o ítem 3 da Proposição 2.1.1 para obter o seguinte:

$$\|v_\mu\|_{H^{r'}_x} \leqslant |\lambda| \int_0^t \Big(1 + \frac{k}{[\mu(t-\tau)]^{\frac{r'-s+1}{2}}}\Big)\|F_\mu(\tau)\|_{H^{s-1}} d\tau.$$

Como $r' \in (r, s+1)$ temos que $\frac{r'-s+1}{2} < 1$ e portanto,

$$|\lambda| \int_0^t \Big(1 + \frac{k}{[\mu(t-\tau)]^{\frac{r'-s+1}{2}}}\Big) d\tau \leqslant C_{r',s,\lambda}\Big(T + \sqrt{\frac{T}{\mu}}\Big).$$

Logo,

$$\|v_\mu(t)\|_{H^{r'}} \leqslant C_{r',s,\lambda}\|F_\mu\|_{L^\infty_T H^{s-1}_x}\Big(T + \sqrt{\frac{T}{\mu}}\Big), \forall t \in [0, T_\mu].$$

Daí concluímos (2.16). Para provar a continuidade de v_μ note que

$$v_\mu \in C^0([0,T];L^2(\mathbb{R})) \tag{2.17}$$

pois $v_\mu = u_\mu - E_\mu(t)u_0$ e ambos $u_\mu, E_\mu(t)u_0 \in C^0([0,T];L^2(\mathbb{R}))$. Consideremos $\theta \in (0,1)$ tal que $\theta r' = r$, isto é, $\theta = \frac{r}{r'}$, segue da Proposição 1.8.5 que

$$\|\cdot\|_{H^r} \leqslant \|\cdot\|^{1-\theta}_{L^2}\|\cdot\|^\theta_{H^{r'}}. \tag{2.18}$$

Assim, dado $t \in (0, T_\mu]$ temos, para h suficientemente pequeno

$$\begin{aligned} \|v_\mu(t+h) - v_\mu(t)\|_{H^r} &\leqslant \|v_\mu(t+h) - v_\mu(t)\|^{1-\theta}_{L^2}\|v_\mu(t+h) - v_\mu(t)\|^\theta_{H^{r'}} \\ &\leqslant \Big(2\|v_\mu\|_{L^\infty_T H^{r'}_x}\Big)^\theta \|v_\mu(t+h) - v_\mu(t)\|_{L^2}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Tendo em vista (2.17) segue de (2.19) que

$$\lim_{h\to 0} \|v_\mu(t+h) - v_\mu(t)\|_{H^r} = 0.$$

Isso conclui a demonstração da Proposição 2.2.2. □

Proposição 2.2.3. *A derivada* $\frac{\partial}{\partial_t}u_\mu(t)$ *existe na topologia de* $H^{-1}(\mathbb{R})$ *para todo* $t \in (0, T_\mu]$. *Além disso,*

$$\partial_t u_\mu = (i+\mu)\partial_x^2 u_\mu - i\lambda|u_\mu|^2\partial_x u_\mu.$$

Em outras palavras,

$$\lim_{h\to 0} \|\frac{u_\mu(t+h,\cdot) - u_\mu(t,\cdot)}{h} - (i+\mu)\partial_x^2 u_\mu(t) + i\lambda|u_\mu(t)|^2\partial_x u_\mu(t)\|_{H^{-1}} = 0.$$

Demonstração. □

Capítulo 3

Estudo da equação DNLS

No Capítulo anterior provamos que a cada $\mu > 0$, existe $T = T_\mu > 0$ e uma única solução u_μ do P.V.I (2.7) definida no intervalo $[0, T_\mu]$. Neste capítulo, discutiremos que todas as soluções podem ser extendidas para o mesmo intervalo de tempo. Como veremos no Corolário 1 esta extensão uniforme dependerá do seguinte fato

$$\sup_{\mu>0} \sup_{0 \leqslant t \leqslant T_\mu} \|u_\mu(t)\|_{H^s} < \infty. \tag{3.1}$$

A estimativa (3.1) permite estender todas as soluções para um menor intervalo de tempo $[0, T_0]$, independente de μ e a extensão ainda satisfaz $\sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant T_0} \|u_\mu(t)\|_{H^s} \leqslant \infty$. Analisaremos a convergência de $(u_\mu(t))$ quando $\mu \to 0$. Então, encontraremos uma função limite u. Esta u será o candidato para ser solução. Portanto teremos uma grande chance de sucesso com a regularização parabólica se pudermos provar a estimativa uniforme (3.1).

3.1 Estimativa uniforme para a solução do problema regularizado

Mostramos que se $s > \frac{3}{2}$, então dado $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$, existe $T > 0$ dependendo de μ, $\|u_0\|_{H^s}$, λ e uma única solução $u_\mu \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R}))$ da equação integral

$$u_\mu(t) = E_\mu(t)u_0 + \lambda \int_0^t E_\mu(t-\tau)(|u_\mu|^2 \partial_x u_\mu)(\tau) d\tau.$$

Gostariamos de obter uma limitação para u_μ do tipo

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T_0} \|u_\mu(t)\|_{H^s} \leqslant M$$

para algum M que seja independente do parâmetro μ.

De acordo com a Proposição 2.2.3 sabemos que

$$i\partial_t u_\mu + \partial_x^2 u_\mu + i\lambda|u_\mu|^2\partial_x u_\mu = i\mu\partial_x^2 u_\mu. \tag{3.2}$$

Daí,

$$i\partial_t u_\mu = (i\mu - 1)\partial_x^2 u_\mu - i\lambda|u_\mu|^2\partial_x u_\mu.$$

Então,

$$\partial_t u_\mu = (\mu + i)\partial_x^2 u_\mu - \lambda|u_\mu|^2\partial_x u_\mu. \tag{3.3}$$

Desejamos

$$\|J^s u_\mu(t)\|_{L^2} \leqslant c \tag{3.4}$$

independente de μ, onde $J^s = (1 + \xi^2)^{\frac{s}{2}}$. Veja que

$$\frac{d}{dt}\|J^s u_\mu(t)\|_{L^2}^2 = 2\mathrm{Re}\,\langle J^s\partial_t u_\mu, J^s u_\mu\rangle_{L^2}, \tag{3.5}$$

pois

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left\langle J^s u_\mu(t), \overline{J^s u_\mu(t)}\right\rangle_{L^2} &= \left\langle \partial_t J^s u_\mu(t), \overline{J^s u_\mu(t)}\right\rangle + \left\langle J^s u_\mu(t), \overline{\partial_t J^s u_\mu(t)}\right\rangle \\
&= \left\langle \partial_t J^s u_\mu(t), \overline{J^s u_\mu(t)}\right\rangle + \overline{\left\langle \overline{J^s u_\mu(t)}, \partial_t J^s u_\mu(t)\right\rangle} \\
&= \left\langle \partial_t J^s u_\mu(t), \overline{J^s u_\mu(t)}\right\rangle + \overline{\left\langle \partial_t J^s u_\mu(t), \overline{J^s u_\mu(t)}\right\rangle} \\
&= 2\mathrm{Re}\,\langle \partial_t J^s u_\mu(t), J^s u_\mu(t)\rangle_{L^2} \\
&= 2\mathrm{Re}\,\langle J^s \partial_t u_\mu(t), J^s u_\mu(t)\rangle_{L^2}.
\end{aligned}$$

Substituindo (3.3) em (3.5), teremos

$$\langle J^s\partial_t u_\mu(t), J^s u_\mu(t)\rangle_{L^2} = (\mu + i)\left\langle J^s\partial_x^2 u_\mu, J^s u_\mu\right\rangle_{L^2} - \lambda\left\langle J^s(|u_\mu|^2)\partial_x u_\mu), J^s u_\mu\right\rangle_{L^2}. \tag{3.6}$$

Veja que

$$\begin{aligned}
\left\langle J^s\partial_x^2 u_\mu, J^s u_\mu\right\rangle_{L^2} &= \int(\partial_x^2 J^s u_\mu)\overline{J^s u_\mu}dx \\
&= \int \partial_x(\partial_x J^s u_\mu)\overline{J^s u_\mu}dx.
\end{aligned}$$

Integrando por partes, obtemos:

$$\begin{aligned}
\int \partial_x(\partial_x J^s u_\mu)\overline{J^s u_\mu}dx &= \partial_x J^s u_\mu \overline{J^s u_\mu}\Big|_{\infty}^{\infty} - \int \partial_x J^s u_\mu \partial_x \overline{J^s u_\mu}dx \\
&= -\int \partial_x J^s u_\mu \partial_x \overline{J^s u_\mu}dx \\
&= -\langle \partial_x J^s u_\mu, \partial_x J^s u_\mu\rangle_{L^2}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\left\langle J^s\partial_x^2 u_\mu, J^s u_\mu\right\rangle_{L^2} = -(\mu + i)\left\langle \partial_x J^s u_\mu, \partial_x J^s u_\mu\right\rangle_{L^2} - \lambda\left\langle J^s(|u_\mu|^2)\partial_x u_\mu), J^s u_\mu\right\rangle_{L^2}.$$

Então,

$$\mathrm{Re}\left\langle J^s\partial_x^2 u_\mu, J^s u_\mu\right\rangle_{L^2} = -\mu\left\langle \partial_x J^s u_\mu, \partial_x J^s u_\mu\right\rangle_{L^2} - \lambda \mathrm{Re}\left\langle J^s(|u_\mu|^2)\partial_x u_\mu), J^s u_\mu\right\rangle_{L^2}.$$

Daí,

$$2\mathrm{Re}\left\langle J^s\partial_x^2 u_\mu, J^s u_\mu\right\rangle_{L^2} < -2\mathrm{Re}\left\langle J^s(|u_\mu|^2)\partial_x u_\mu), J^s u_\mu\right\rangle_{L^2}.$$

Ou seja,

$$\frac{d}{dt}\|J^s u_{mu}(t)\|_{L^2}^2 \leqslant -2\lambda\mathrm{Re}\left\langle J^s(|u_\mu|^2)\partial_x u_\mu), J^s u_\mu\right\rangle_{L^2}. \tag{3.7}$$

Resta-nos controlar

$$-2\lambda\mathrm{Re}\left\langle J^s(|u_\mu|^2)\partial_x u_\mu), J^s u_\mu\right\rangle_{L^2}$$

em termos de $\|J^s u_\mu\|_{L^2}$.

Escrevamos

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left\langle J^s(|u_\mu|^2)\partial_x u_\mu), J^s u_\mu\right\rangle_{L^2} &= \mathrm{Re}\left\langle J^s(|u_\mu|^2)\partial_x u_\mu) - |u_\mu|^2 J^s\partial_x u_\mu, J^s u_\mu\right\rangle_{L^2} \\ &\quad + \mathrm{Re}\left\langle |u_\mu|^2 J^s\partial_x u_\mu, J^s u_\mu\right\rangle_{L^2}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Chamemos de (I) e (II) a primeira e a segunda parcela do lado direito da equação (3.8). Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz em (I), teremos:

$$(\mathrm{I}) \leqslant \|J^s(|u_\mu|^2)\partial_x u_\mu) - |u_\mu|^2 J^s\partial_x u_\mu\|_{L^2}\|J^s u_\mu\|_{L^2}.$$

Agora, usando a desigualdade de Kato-Ponce, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &\leqslant c\||u_\mu|^2\|_{H^s}\|\partial_x u_\mu\|_{H^{s-1}}\|J^s u_\mu\|_{L^2} \\ &\leqslant c\|u_\mu\|_{H^s}^2\|u_\mu\|_{H^s}\|u_\mu\|_{H^s} \\ &= c\|u\|_{H^s}^4. \end{aligned}$$

Analisando (II),

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\left\langle J^s(|u_\mu|^2)\partial_x J^s u_\mu), J^s u_\mu\right\rangle_{L^2} &= \mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}} |u|^2\partial_x(J^s u_\mu)\overline{J^s u_\mu}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |u|^2\partial_x(J^s u_\mu)\overline{J^s u_\mu}dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \overline{|u|^2\partial_x(J^s u_\mu)}J^s u_\mu dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |u_\mu|^2\left[\partial_x(J^s u_\mu)\overline{J^s u_\mu} + \overline{|u|^2\partial_x(J^s u_\mu)}J^s u_\mu\right]dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |u_\mu|^2\partial_x(J^s u_\mu\overline{J^s u_\mu})dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |u_\mu|^2\partial_x(|J^s u_\mu|^2)dx. \end{aligned}$$

Integrando por partes, teremos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left\langle J^s(|u_\mu|^2)\partial_x J^s u_\mu), J^s u_\mu\right\rangle_{L^2} &= \frac{1}{2}|u_\mu|^2|J^s u_\mu|^2\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |J^s u_\mu|^2 \partial_x(|u|^2)dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \partial_x(|u|^2)|J^s u_\mu|^2 dx.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder, temos:

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \partial_x(|u|^2)|J^s u_\mu|^2 dx \leqslant \|\partial_x(|u_\mu|^2)\|_{L^\infty}\|J^s u_\mu\|_{L^2}^2.$$

Usando a imersão de Sobolev, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\partial_x(|u_\mu|^2)\|_{L^\infty}\|J^s u_\mu\|_{L^2}^2 &\leqslant c\|\partial_x(|u_\mu|^2)\|_{H^{s-1}}\|u_\mu\|_{H^s}^2 \\
&\leqslant c\||u_\mu|^2\|_{H^s}\|u_\mu\|_{H^s}^2 \\
&\leqslant c\|u_\mu\|_{H^s}^2\|u_\mu\|_{H^s}^2 \\
&= c\|u_\mu\|_{H^s}^4.
\end{aligned}$$

Portanto, de (I) e (II),

$$\mathrm{Re}\left\langle J^s(|u_\mu|^2)\partial_x J^s u_\mu), J^s u_\mu\right\rangle_{L^2} \leqslant c\|u_\mu\|_{H^s}^4. \tag{3.9}$$

Logo, para cada $\mu > 0$, a solução de

$$i\partial_t u_\mu + \partial_x^2 u_\mu + i\lambda|u_\mu|^2\partial_x u_\mu = i\mu\partial_x^2 u_\mu.$$

satisfaz:

$$\frac{d}{dt}\left(\|u_\mu(t)\|_{H^s}^2\right) = c|\lambda|\|u_\mu(t)\|_{H^s}^4 \quad \forall \quad s > \frac{3}{2}. \tag{3.10}$$

Lema 3.1.1. *Seja* φ *uma função positiva que satisfaz*

$$\varphi' \leqslant c|\lambda|\varphi^2$$

então

$$\varphi(t) \leqslant 2\varphi(0), \quad \forall \quad t \in \left[0, \frac{1}{2c|\lambda|\varphi(0)}\right).$$

Demonstração. A desigualdade é óbvia para t tal que $\varphi(t) = 0$. Seja $L = \{t > 0; \varphi(t) \neq 0\}$. Para $t \in L$ temos:

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)^2} \leqslant c|\lambda|.$$

Daí, integrando em ambos os menbros de 0 a t, teremos

$$\int_0^t \left[-\frac{1}{\varphi(\tau)}\right]' d\tau \leqslant c|\lambda|t.$$

Logo,

$$-\frac{1}{\varphi(t)}+\frac{1}{\varphi(0)}\leqslant c|\lambda|t.$$

Então,

$$\varphi(t)\leqslant\frac{\varphi(0)}{1-c|\lambda|\varphi(0)t},$$

isto é,

$$\varphi(t)\leqslant 2\varphi(0),$$

sempre que $0<t<\dfrac{1}{2c|\lambda|\varphi(0)}$. □

Aplicando o lema acima à função

$$\varphi(t)=\|u_\mu(t)\|^2_{H^s},$$

obtemos

$$\|u_\mu\|^2_{H^s}\leqslant 2\|u_0\|^2_{H^s},\quad\forall\ \ t\in\left[0,\frac{1}{2c|\lambda|\|u_0\|^2_{H^s}}\right],$$

Logo concluímos que

$$\|u_\mu(t)\|_{H^s}\leqslant\sqrt{2}\|u_0\|_{H^s},\tag{3.11}$$

para todo $t\in\left[0,\frac{1}{2c|\lambda|\|u_0\|^2_{H^s}}\right]$. Com isso, demonstramos a seguinte proposição.

Proposição 3.1.1. *Seja* $s>\frac{3}{2}$. *Existe* $c>0$ *tal que qualquer solução de*

$$\begin{cases} i\partial_t u+\partial_x^2 u+i\lambda|u|^2\partial_x u=i\mu\partial_x^2 u,\\ u(x,0)=u_0(x).\end{cases}\tag{3.12}$$

definida em $[0,T]$ *com* $T\leqslant\dfrac{1}{2c|\lambda|\|u_0\|^2_{H^s}}$ *satisfaz*

$$\|u_\mu(t)\|_{H^s}\leqslant\sqrt{2}\|u_0\|_{H^s},\quad\forall\ \ t\in[0,T].\tag{3.13}$$

Corolário 3.1.1. *Dado* $s>\frac{3}{2}$, $u_0\in H^s(\mathbb{R})$ *existe* $c=c(s)>0$ *tal que todas as soluções de*

$$\begin{cases} i\partial_t u+\partial_x^2 u+i\lambda|u|^2\partial_x u=i\mu\partial_x^2 u,\\ u(x,0)=u_0(x).\end{cases}\tag{3.14}$$

podem ser estendidas até o intervalo $\left[0,\frac{1}{2c|\lambda|\|u_0\|^2_{H^s}}\right]$ *e, além disso,*

$$\|u_\mu(t)\|_{H^s}\leqslant\sqrt{2}\|u_0\|_{H^s},\quad\forall\ \ t\in\left[0,\frac{1}{2c|\lambda|\|u_0\|^2_{H^s}}\right],\quad\forall\mu>0.$$

Demonstração. Denotemos

$$T_* = \frac{1}{2c|\lambda|\|u_0\|_{H^s}^2},$$

o tempo maximal de existência de solução como na Proposição 3.1.1. Pela Proposição 2.2.1 existe $\tilde{c}$ tal que a solução da equação integral (2.8) está definida no intervalo $[0,\delta]$ onde

$$\delta = \tilde{c}\frac{\mu}{\|u_0\|_{H^s}^4}.$$

Usando novamente a Proposição 2.2.1 concluímos que o P.V.I.

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u + i\lambda|u|^2\partial_x u = i\mu\partial_x^2 u, \\ u(\cdot,0) = u_\mu(\cdot,\delta). \end{cases} \tag{3.15}$$

possui uma solução $\tilde{u}_\mu$ definida num intervalo de tempo de tamanho pelo menos,

$$\tilde{c}\frac{\mu}{\|u_\mu(\cdot,\delta)\|_{H^s}^4}.$$

Pela Proposição 3.1.1 sabemos que

$$\tilde{c}\frac{\mu}{\|u_\mu(\cdot,\delta)\|_{H^s}^4} \geqslant \tilde{c}\frac{\mu}{\|u_0\|_{H^s}^4} =: \delta.$$

Daí, concluímos $\tilde{u}_\mu$ esta definida pelo menos no intervalo $[\delta, 2\delta]$. Com isso concluímos que u_μ se estende ao intervalo $[0,2\delta]$. Repetindo o mesmo raciocínio concluímos que a solução u_μ se estende aos intervalos $[0,2\delta]$, $[0,3\delta]$, ..., $[0,k\delta]$, sempre que $K\delta \leqslant T_*$.
Esse processo de extensão é finito pois $k\delta > T_*$ para algum K. Com isso concluímos que u_μ pode ser estendida a todo o intervalo $[0,T_*]$. □

3.2 Demonstração do Teorema Principal

Provamos na seção passada que dado $s > \frac{3}{2}$ e $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ existe $T = T(\|u_0\|_{H^s}) > 0$ tal que o PVI

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u + i\lambda|u|^2\partial_x u = i\mu\partial_x^2 u, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{3.16}$$

possui uma e somente uma solução $u_\mu \in C([0,T];H^s(\mathbb{R}))$. Além disso, existe $K > 0$ (dependendo apenas de $\|u_0\|_{H^s}$) tal que

$$\sup_{\mu>0}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_\mu(t)\|_{H^s} \leqslant K \tag{3.17}$$

Nossa ideia é analisar a convergência de (u_μ) quando $\mu \to 0$. Esperamos com isso obter um candidato a solução.

3.2.1 Convergência forte em L^2

Nesta seção provaremos que a família de soluções $(u_\mu(t))_{\mu>0}$ definidas em $[0,T]$ converge em $C^0([0,T];L^2(\mathbb{R}))$ a uma função u. Tal função u será uma candidata a solução do P.V.I. (1).

Proposição 3.2.1. *Sejam* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $s > \frac{3}{2}$. *Dada* $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ *considere* $(u_\mu)_{\mu>0}$ *a família de soluções definidas em* $[0,T]$. *Então,*

$$\lim_{\mu,\nu\to 0} \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \|u_\mu(t) - u_\nu(t)\|_{L^2} = 0.$$

Em outras palavras, $(u_\mu)_{\mu>0}$ *é uma sequência de Cauchy em* $C^0([0,T];L^2(\mathbb{R}))$.

Demonstração. Fixemos $\mu,\nu > 0$. Denotemos $\omega = \omega_{\mu,\nu} := u_\mu - u_\nu$. Tomando a diferença entre as equações

$$i\partial_t u_\mu + (1-i\mu)\partial_x^2 u_\mu + i\lambda|u_\mu|^2\partial_x u_\mu = 0$$

e

$$i\partial_t u_\nu + (1-i\nu)\partial_x^2 u_\nu + i\lambda|u_\nu|^2\partial_x u_\nu = 0$$

teremos:

$$i\partial_t(u_\mu - u_\nu) + (1-i\mu)\partial_x^2 u_\mu - (1-i\nu)\partial_x^2 u_\nu + i\lambda|u_\mu|^2\partial_x u_\mu - i\lambda|u_\nu|^2\partial_x u_\nu = 0.$$

O que é equivalente a

$$i\partial_t\omega + (1-i\mu)\partial_x^2 u_\mu - (1-i\mu)\partial_x^2 u_\nu + (1-i\mu)\partial_x^2 u_\nu - (1-i\nu)\partial_x^2 u_\nu + i\lambda|u_\mu|^2\partial_x u_\mu - i\lambda|u_\nu|^2\partial_x u_\nu = 0.$$

Daí,

$$\begin{aligned} &i\partial_t\omega + (1-i\mu)\partial_x^2(u_\mu - u_\nu) + i(\nu-\mu)\partial_x^2 u_\nu + i\lambda|u_\mu|^2\partial_x u_\mu \\ &-i\lambda|u_\nu|^2\partial_x u_\mu + i\lambda|u_\nu|^2\partial_x u_\mu - i\lambda|u_\nu|^2\partial_x u_\nu = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$i\partial_t\omega + (1-i\mu)\partial_x^2\omega + i(\nu-\mu)\partial_x^2 u_\nu + i\lambda(|u_\mu|^2 - |u_\nu|^2)\partial_x u_\mu + i\lambda|u_\nu|^2\partial_x\omega = 0. \quad (3.18)$$

Tomando o conjugado em (3.18) vemos que $\overline{\omega}$ satisfaz

$$-i\partial_t\overline{\omega} + (1+i\mu)\partial_x^2\overline{\omega} - i(\nu-\mu)\partial_x^2\overline{u_\nu} - i\lambda(|u_\mu|^2 - |u_\nu|^2)\partial_x\overline{u_\mu} - i\lambda|u_\nu|^2\partial_x\overline{\omega} = 0. \quad (3.19)$$

Multipliquemos (3.18) por $\overline{\omega}$ e (3.19) por ω. Daí,

$$i\partial_t\omega\overline{\omega} + (1-i\mu)\partial_x^2\omega\overline{\omega} + i(\nu-\mu)\partial_x^2 u_\nu\overline{\omega} + i\lambda(|u_\mu|^2 - |u_\nu|^2)\partial_x u_\mu\overline{\omega} + i\lambda|u_\nu|^2\partial_x\omega\overline{\omega} = 0$$

e

$$-i\partial_t\overline{\omega}\omega + (1+i\mu)\partial_x^2\overline{\omega}\omega - i(\nu-\mu)\partial_x^2\overline{u_\nu}\omega - i\lambda(|u_\mu|^2 - |u_\nu|^2)\partial_x\overline{u_\mu}\omega - i\lambda|u_\nu|^2\partial_x\overline{\omega}\omega = 0.$$

Façamos agora a diferença dessas duas últimas equações. Obtemos assim,

$$\begin{aligned}
&i\partial_t\omega\overline{\omega} + i\partial_t\overline{\omega}\omega + (1-i\mu)\partial_x^2\omega\overline{\omega} - (1+i\mu)\partial_x^2\overline{\omega}\omega \\
&+i(\nu-\mu)\partial_x^2 u_\nu\overline{\omega} + i(\nu-\mu)\partial_x^2\overline{u_\nu}\omega + i\lambda(|u_\mu|^2 - |u_\nu|^2)\partial_x u_\mu\overline{\omega} \\
&+i\lambda(|u_\mu|^2 - |u_\nu|^2)\partial_x\overline{u_\mu}\omega + i\lambda|u_\nu|^2\partial_x\omega\overline{\omega} + i\lambda|u_\nu|^2\partial_x\overline{\omega}\omega = 0.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Daí concluímos que,

$$\begin{aligned}
i(\partial_t\omega\overline{\omega} + \partial_t\overline{\omega}\omega) + (1-i\mu)\partial_x^2\omega\ \overline{\omega} & -(1+i\mu)\partial_x^2\overline{\omega}\omega \\
&= -i(\nu-\mu)(\partial_x^2 u_\nu\overline{\omega} + \partial_x^2\overline{u_\nu}\omega) \\
&\quad -i\lambda(|u_\mu|^2 - |u_\nu|^2)(\partial_x u_\mu\overline{\omega} + \partial_x\overline{u_\mu}\omega) \\
&\quad -i\lambda|u_\nu|^2(\partial_x\omega\overline{\omega} + \partial_x\overline{\omega}\omega)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Integrando (3.21) e usando integração por partes obtemos que

$$i\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}}|\omega|^2 dt - (1-i\mu)\int_{\mathbb{R}}|\partial_x\omega|^2 dx + (1+i\mu)\int_{\mathbb{R}}|\partial_x\omega|^2 dx$$

é igual a

$$\begin{aligned}
2i(\mu-\nu)\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\overline{\omega}\partial_x^2 u_\nu dx \quad &+ \quad 2i\lambda\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}(|u_\nu|^2 - |u_\mu|^2)\overline{\omega}\partial_x u_\mu dx \\
&- \quad i\lambda\int_{\mathbb{R}}|u_\nu|^2\overline{\omega}\partial_x\omega dx - i\lambda\int_{\mathbb{R}}|u_\nu|^2\omega\partial_x\overline{\omega}dx.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Usaremos integração por partes nas duas últimas parcelas de (3.22):

$$\begin{aligned}
-i\lambda\int_{\mathbb{R}}|u_\nu|^2\overline{\omega}\partial_x\omega dx - i\lambda\int_{\mathbb{R}}|u_\nu|^2\omega\partial_x\overline{\omega}dx &= -i\lambda\int_{\mathbb{R}}|u_\nu|^2\overline{\omega}\partial_x\omega dx + i\lambda\int_{\mathbb{R}}\partial_x(|u_\nu|^2\omega)\overline{\omega}dx \\
&= -i\lambda\int_{\mathbb{R}}|u_\nu|^2\overline{\omega}\partial_x\omega dx + i\lambda\int_{\mathbb{R}}|u_\nu|^2\partial_x\omega\overline{\omega}dx \\
&\quad +i\lambda\int_{\mathbb{R}}\partial_x(|u_\nu|^2)|\omega|^2 dx \\
&= i\lambda\int_{\mathbb{R}}\partial_x(|u_\nu|^2)|\omega|^2 dx.
\end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} i\frac{d}{dt}\Big(\|\omega(\cdot,t)\|_{L^2}^2\Big) + 2i\mu\|\partial_x\omega(\cdot,t)\|_{L^2}^2 &= 2i(\mu-\nu)\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}} \overline{\omega}\partial_x^2 u_\nu dx \\ &+2i\lambda\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}(|u_\nu|^2-|u_\mu|^2)\overline{\omega}\partial_x u_\mu dx \\ &+i\lambda\int_{\mathbb{R}}\partial_x(|u_\nu|^2)|\omega|^2dx. \end{aligned}$$

Por comodidade, denotaremos:

$$\mathrm{I} := 2i(\mu-\nu)\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}} \overline{\omega}\partial_x^2 u_\nu dx;$$

$$\mathrm{II} := 2i\lambda\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}(|u_\nu|^2-|u_\mu|^2)\overline{\omega}\partial_x u_\mu dx$$

e

$$\mathrm{III} := i\lambda\int_{\mathbb{R}}\partial_x(|u_\nu|^2)|\omega|^2dx.$$

Segue de (3.23) que

$$\Big|\frac{d}{dt}\Big(\|\omega(\cdot,t)\|_{L^2}^2\Big)\Big| \leqslant |\mathrm{I}| + |\mathrm{II}| + |\mathrm{III}|.$$

Agora, vamos estimar cada um dos termos I, II e III.

- I : Usando integração por partes e depois a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned} \Big|\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\overline{\omega}\partial_x^2 u_\nu(x,t)dx\Big| &= \Big|\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\partial_x\overline{\omega}\partial_x u_\nu(x,t)dx\Big| \\ &\leqslant \|\partial_x\omega(\cdot,t)\|_{L^2}\|\partial_x u_\nu(\cdot,t)\|_{L^2} \\ &\leqslant (\|u_\mu\|_{X_T}+\|u_\nu\|_{X_T})^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$|\mathrm{I}| \leqslant 2|\lambda||\mu-\nu|(\|u_\mu\|_{X_T}+\|u_\nu\|_{X_T})^2. \tag{3.23}$$

- II :

Notemos que

$$|\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}(|u_\nu|^2-|u_\mu|^2)\overline{\omega}\partial_x u_\mu dx \leqslant \int_{\mathbb{R}}(|u_\mu|+|u_\nu|)|u_\mu-u_\nu||\omega||\partial_x u_\mu|dx.$$

Daí,

$$|\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}(|u_\nu|^2-|u_\mu|^2)\overline{\omega}\partial_x u_\mu dx \leqslant \int_{\mathbb{R}}(|u_\mu|+|u_\nu|)|\omega|^2|\partial_x u_\mu|dx. \tag{3.24}$$

Usando a desigualdade de Hölder, segue que (3.24) é menor que

$$(\|u_\mu\|_{L^\infty} + \|u_\nu\|_{L^\infty})\|\partial_x u_\mu\|_{L^\infty}\|\omega\|_{L^2}^2 \tag{3.25}$$

Usando a imersão de Sobolev segue que (3.25) pode ser limitada por

$$c(\|u_\mu\|_{X_T} + \|u_\nu\|_{X_T})^2\|\omega\|_{L^2}^2,$$

para alguma constante c.

Portando,

$$|II| \leqslant |\lambda| c(\|u_\mu\|_{X_T} + \|u_\nu\|_{X_T})^2\|\omega\|_{L^2}^2 \tag{3.26}$$

- III :

Usando a desigualdade de Hölder, temos

$$\left|\int_{\mathbb{R}} \partial_x(|u_\nu|^2)|\omega|^2 dx\right| \leqslant \|\partial_x(|u_\nu|^2)\|_{L^\infty}\|\omega\|_{L^2}^2$$

Como,

$$\begin{aligned} \|\partial_x(|u_\nu|^2)\|_{L^\infty} &\leqslant 2\|u_\nu \partial_x \overline{u_\nu}\|_{L^\infty} \\ &\leqslant 2\|u_\nu\|_{L^\infty}\|\partial_x u_\nu\|_{L^\infty} \\ &\leqslant 2\|u_\nu\|_{H^s}\|\partial_x u_\nu\|_{H^{s-1}} \\ &\leqslant 2\|u_\nu\|_{X_T}^2, \end{aligned}$$

segue, novamente, a estimativa

$$|III| \leqslant |\lambda| c(\|u_\mu\|_{X_T} + \|u_\nu\|_{X_T})^2\|\omega\|_{L^2}^2. \tag{3.27}$$

Juntando as estimativas (3.23), (3.26) e (3.27), concluímos que

$$\frac{d}{dt}\left(\|\omega(\cdot,t)\|_{L^2}^2\right) \leqslant 2|\lambda|(\|u_\mu\|_{X_T} + \|u_\nu\|_{X_T})^2(|\mu-\nu| + c\|\omega(\cdot,t)\|_{L^2}^2)$$

Sendo K a constante dada em (3.17), temos

$$\frac{d}{dt}\left(\|\omega(\cdot,t)\|_{L^2}^2\right) \leqslant 8K^2|\lambda||\mu-\nu| + 8k^2 c|\lambda|\|\omega(\cdot,t)\|_{L^2}^2 \tag{3.28}$$

para todo $t \in [0,T]$.

Usando a desigualdade de Gronwall segue que

$$\begin{aligned} \|\omega(\cdot,t)\|_{L^2}^2 &\leqslant e^{8|\lambda|k^2 ct}\int_0^t 8|\lambda|k^2|\mu-\nu| dt \\ &= \tilde{c}Te^{\tilde{k}T}|\mu-\nu|, \end{aligned} \tag{3.29}$$

ou seja, existem constantes $\tilde{c}, \tilde{k} > 0$, independentes de μ e ν, tais que

$$\|u_\mu(\cdot, t) - u_\nu(\cdot, t)\|_{L^2} \leqslant \tilde{c} T e^{\tilde{k} T} |\mu - \nu|, \tag{3.30}$$

para todo $t \in [0, T]$. Segue daí que

$$\lim_{\mu,\nu \to 0} \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u_\mu(t) - \|u_\nu(t)\|_{L^2} = 0.$$

□

3.2.2 Existência de solução

Até o momento temos uma família $(u_\mu)_{\mu>0}$ onde cada u_μ é a única solução do P.V.I

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u + i\lambda |u|^2 \partial_x u = i\mu \partial_x^2 u, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

em $C([0, T]; H^s(\mathbb{R}))$. Já provamos os seguintes fatos:

1. $(u_\mu)_{\mu>0}$ é uniformemente limitada em $L^\infty([0, T]; H^s(\mathbb{R}))$;

2. A família $(u_\mu)_{\mu>0}$ é de Cauchy em $C([0, T]; L^2(\mathbb{R}))$.

O segundo fato nos permite concluir que existe uma função $u \in C([0, T]; L^2(\mathbb{R}))$ tal que

$$\lim_{\mu \to 0} \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u_\mu(\cdot, t) - u(\cdot, t)\|_{L^2} = 0.$$

Antes de proseguir, convém observar o seguinte:

Proposição 3.2.2. $u \in C([0, T]; H^{s'}(\mathbb{R}))$, *para qualquer* $0 < s' < s$, *e além disso* $u_\mu \to u$ *em* $C([0, T]; H^s(\mathbb{R}))$.

Demonstração. Usando a Proposição 1.8.5 com $s_1 = 0$, $s_2 = s$, $r = s'$ obtemos

$$\|u_\mu(t) - u_\nu(t)\|_{H^{s'}} = \|u_\mu(t) - u_\nu(t)\|_{L^2}^{1-\theta} \|u_\mu(t) - u_\nu(t)\|_{H^s}^{\theta}, \tag{3.31}$$

onde $\theta = \frac{s'}{s}$. Tomando o supremo em t em (3.31) e tomando K como em (3.17) obtemos,

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u_\mu(t) - u_\nu(t)\|_{H^{s'}} \leqslant (2K)^\theta \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u_\mu(t) - u_\nu(t)\|_{L^2}^{1-\theta}.$$

Daí segue que

$$\lim_{\mu,\nu \to 0} \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u_\mu(t) - u(t)\|_{H^{s'}} = 0.$$

Logo existe $v \in C([0,T]; H^{s'}(\mathbb{R}))$ tal que

$$u_\mu \to v \ \ em \ \ L^\infty([0,T]; H^{s'}(\mathbb{R})).$$

Como

$$u_\mu \to u \ \ em \ \ L^\infty([0,T]; L^2(\mathbb{R})),$$

segue que $u = v$. Portanto,

$$u \in C([0,T]; H^{s'}(\mathbb{R})).$$

$\square$

Agora iremos usar algumas propriedades para mostrar que u é solução da equação integral

$$u(t) = E(t)u_0 - \int_0^t E(t-\tau)(|u|^2\partial_x u)(\tau)d\tau.$$

A ideia é tomar o limite quando $\mu \to 0$ na equação integral

$$u_\mu(t) = E_\mu(t)u_0 - i\lambda\int_0^t E_\mu(t-\tau)(|u_\mu|^2\partial_x u_\mu)(\tau)d\tau.$$

Primeiro olhamos a convergência da parte linear. Usando o teorema de Plancherel, temos

$$\begin{aligned} \|E_\mu(t)u_0 - E(t)u_0\|_{L^2}^2 &= \int |e^{-4\pi^2 t(i+\mu)\xi^2} - e^{-4\pi^2 ti\xi^2}|^2 |\widehat{u_0}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leqslant \int |e^{-4\pi^2\mu t\xi^2} - 1|^2 |\widehat{u_0}(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Usando o teorema da convergência dominada, concluímos que esta última integral vai para zero quando μ tende a zero. Então para cada $t \in [0,T]$, temos

$$\lim_{\mu\to 0} \|E_\mu(t)u_0 - E(t)u_0\|_{L^2} = 0. \tag{3.32}$$

Para investigar a convergência da parte não-linear, denotemos

$$v(x,t) = -\lambda\int_0^t E(t-\tau)F(\tau)d\tau$$

onde $F(x,t) = |u|^2\partial_x u$ e similarmente

$$v_\mu(x,t) = -\lambda\int_0^t E_\mu(t-\tau)F_\mu(\tau)d\tau$$

onde $F_\mu(x,t) = |u_\mu|^2\partial_x u_\mu$. Então,

$$\begin{aligned}
\|v - v_\mu\|_{L^2} &\leqslant |\lambda|\|\int_0^t E(t-\tau)(F-F_\mu)(\tau)d\tau\|_{L^2} \\
&+|\lambda|\|\int_0^t [E(t-\tau) - E_\mu(t-\tau)](F_\mu)(\tau)d\tau\|_{L^2} \\
&\leqslant |\lambda|\int_0^t \|F(\tau) - F_\mu(\tau)\|_{L^2}d\tau \\
&+|\lambda|\int_0^t \|\left(e^{-4\pi^2 i(t-\tau)\xi^2} - e^{-4\pi^2(i+\mu)(t-\tau)\xi^2}\right)\widehat{F_\mu(\tau)}\|_{L^2}d\tau \\
&\leqslant |\lambda|T\|F - F_\mu\|_{L^\infty L^2} \\
&+|\lambda|\int_0^t \|\left(1 - e^{-4\pi^2\mu(t-\tau)\xi^2}\right)(\widehat{F_\mu(\tau)} - \widehat{F(\tau)})\|_{L^2}d\tau \\
&+|\lambda|\int_0^t \|\left(1 - e^{-4\pi^2\mu(t-\tau)\xi^2}\right)\widehat{F(\tau)}\|_{L^2}d\tau \\
&\leqslant 3T|\lambda|\|F - F_\mu\|_{L^\infty L^2} + |\lambda|\int_0^t \|(1 - e^{-4\pi^2\mu(t-\tau)\xi^2})\widehat{F(\tau)}\|_{L^2}d\tau.
\end{aligned}$$

Considere a função

$$g_\mu(\tau) = \|1 - e^{-4\pi^2\mu(t-\tau)\xi^2}\widehat{F(\tau)}\|_{L^2}.$$

Veja que g_μ é limitada pela função

$$g_\tau = 2\|F(\tau)\|_{L^2}.$$

Esta por sua vez é integrável em relação a τ.

$$\begin{aligned}
\|\widehat{F(\tau)}\|_{L^1_tL^2_x} &= \||u|^2\partial_x u\|_{L^1_tL^2_x} \\
&\leqslant T\|u\|^2_{L^\infty_tL^\infty_x}\|\partial_x u\|_{L^\infty_tL^2_x} \\
&\leqslant T\|u\|^3_{L^\infty_tH^s_x}.
\end{aligned}$$

Aplicando o Teorema da Convergência Dominada concluímos que

$$\lim_{\mu\to 0}\int_0^t \|(1 - e^{-4\pi^2\mu(t-\tau)\xi^2})\widehat{F(\tau)}\|_{L^2}d\tau = 0.$$

Finalmente, inferimos sobre $\|F - F_\mu\|_{L^\infty_tL^2_x}$. Adicionando e subtraindo $|u_\mu|^2\partial_x u$ e usando a desigualdade triângular

$$\begin{aligned}
\|F - F_\mu\|_{L^\infty_tL^2_x} &= \||u|^2\partial_x u - |u_\mu|^2\partial_x u_\mu\|_{L^\infty_tL^2_x} \\
&\leqslant \|(|u|^2 - |u_\mu|^2)\partial_x u\|_{L^\infty_tL^2_x} \\
&+\||u_\mu|^2\partial_x(u - u_\mu)\|_{L^\infty_tL^2_x} \\
&\leqslant \||u|^2 - |u_\mu|^2\|_{L^\infty}\|\partial_x u\|_{L^\infty_tL^2_x} \\
&+\||u_\mu|^2\|_{L^\infty}\|\partial_x(u - u_\mu)\|_{L^\infty_tL^2_x}.
\end{aligned}$$

Usando que

$$||u|^2 - |v|^2| \leqslant c(|u| + |v|)|u - v|$$

e usando imersão de sobolev, teremos

$$\begin{aligned}
\|F - F_\mu\|_{L_t^\infty L_x^2} &\leqslant \|(|u| + |u_\mu|)|u - u_\mu|\|_{L_x^\infty L_x^\infty}\|\partial_x u\|_{L_t^\infty L_x^2} \\
&\quad + \|u_\mu\|_{L_t^\infty L_x^\infty}\|\partial_x(u - u_\mu)\|_{L_t^\infty L_x^2} \\
&\leqslant (\|u\|_{L_t^\infty H_x^s} + \|u_\mu\|_{L_t^\infty H_x^s})\|\partial_x u\|_{L_t^\infty L_x^2}\|u - u_u\|_{L_t^\infty H_x^s} \\
&\quad + \|u_\mu\|^2_{L_t^\infty H_x^s}\|\partial_x(u_\mu - u)\|_{L_t^\infty L_x^2}.
\end{aligned}$$

Como u_μ é limitado em $L_t^\infty H_x^s$ (3.13) concluímos

$$\|F - F_\mu\|_{L^\infty L^2} \leqslant c\|u - u_\mu\|_{L_t^\infty H_x^s},$$

para alguma constante $c > 0$ independente de μ. Portanto,

$$\lim_{\mu \to 0} \|v_\mu(t) - v(t)\|_{L_t^\infty L_x^2} = 0 \tag{3.33}$$

para cada $t \in [0, T]$. Segue de (3.32) e (3.33) que para todo $t \in [0, T]$

$$u(t) = \lim_{\mu \to 0} u_\mu(t) = E(t)u_0 - \int_0^t E(t - \tau)(|u|^2 \partial_x u)(\tau) d\tau,$$

onde o limite é tomado em $L^2(\mathbb{R})$.

3.2.3 Unicidade

Aqui iremos provar que a função u é a única solução da equação integral

$$u(t) = E(t)u_0 - \int_0^t E(t - \tau)(|u|^2 \partial_x u)(\tau) d\tau.$$

Sejam $u, v \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R}))$, $s > \frac{3}{2}$ satisfazendo

$$u(t) = E(t)u_0 - i\lambda \int_0^t E(t - \tau)|u|^2 \partial_x u d\tau,$$

$$v(t) = E(t)u_0 - i\lambda \int_0^t E(t - \tau)|v|^2 \partial_x v d\tau.$$

Temos

$$u(t) - v(t) = -i\lambda \int_0^t E(t - \tau)(|u|^2 \partial_x u - |v|^2 \partial_x v) d\tau.$$

Daí, usando a desigualdade de Minkowski para integrais,

$$\|u(t) - v(t)\|_{H^{s-1}} \leqslant \int_0^t \|E(t - \tau)\Big(|u|^2 \partial_x u - |v|^2 \partial_x v\Big)(\tau)\|_{H^{s-1}} d\tau. \tag{3.34}$$

Lembremos que pela Proposição 2.1.1 vale

$$\|E(t-\tau)(|u|^2\partial_x u - |v|^2\partial_x v)\|_{H^{s-1}} = \||u|^2\partial_x u - |v|^2\partial_x v\|_{H^{s-1}}.$$

Agora, escrevemos $|u|^2\partial_x u - |v|^2\partial_x v$ como

$$|u|^2\partial_x u - |v|^2\partial_x v = (|u|^2 - |v|^2)\partial_x u + |v|^2\partial_x(u-v).$$

Daí, tomando a norma H^{s-1} e usando que $s-1 > \frac{1}{2}$ obtemos

$$\||u|^2\partial_x u - |v|^2\partial_x v\|_{H^{s-1}} \leqslant c\||u|^2 - |v|^2\|_{H^{s-1}}\|\partial_x u\|_{H^{s-1}} + c\||v|^2\|_{H^{s-1}}\|\partial_x(u-v)\|_{H^{s-1}}. \quad (3.35)$$

Usando que

$$\begin{aligned}
\||u|^2 - |v|^2\|_{H^{s-1}} &= \|(u-v)\overline{u} + v(\overline{u} - \overline{v})\|_{H^s} \\
&\leqslant c\|u-v\|_{H^{s-1}}\|\overline{u}\|_{H^{s-1}} + c\|v\|_{H^{s-1}}\|\overline{u} - \overline{v}\|_{H^{s-1}} \\
&\leqslant c\Big(\|u\|_{H^{s-1}} + \|v\|_{H^{s-1}}\Big)\|u-v\|_{H^{s-1}}
\end{aligned}$$

e que

$$\||v|^2\|_{H^{s-1}} = \|\overline{v}v\|_{H^{s-1}} \leqslant c\|v\|^2_{H^{s-1}},$$

segue que,

$$\||u|^2\partial_x u - |v|^2\partial_x v\|_{H^{s-1}} \leqslant c\Big(\|u\|_{H^{s-1}} + \|v\|_{H^{s-1}}\Big)^2\|u-v\|_{H^{s-1}} \quad (3.36)$$

Substituindo (3.36) em (3.34) concluímos que

$$\begin{aligned}
\|u(t)-v(t)\|_{H^{s-1}} &\leqslant c\int_0^t \Big(\|u(\tau)\|_{H^s} + \|v(\tau)\|_{H^s}\Big)^2\|u(\tau)-v(\tau)\|_{H^{s-1}}d\tau \\
&\leqslant ct\sup_{0\leqslant\tau\leqslant T}\bigg(\Big(\|u(\tau)\|_{H^s} + \|v(\tau)\|_{H^s}\Big)^2\|u(\tau)-v(\tau)\|_{H^{s-1}}\bigg) \\
&\leqslant cT\Big(\|u\|_{X_T} + \|v\|_{X_T}\Big)^2\sup_{0\leqslant\tau\leqslant T}\|u-v\|_{H^{s-1}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)-v(t)\|_{H^{s-1}} \leqslant cT\Big(\|u\|_{X_T} + \|v\|_{X_T}\Big)^2\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(\tau)-v(\tau)\|_{H^{s-1}}.$$

Tomando T suficientemente pequeno de modo que

$$cT\Big(\|u\|_{X_T} + \|v\|_{X_T}\Big)^2 \leqslant \frac{1}{2}$$

obtemos que

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)-v(t)\|_{H^{s-1}} \leqslant \frac{1}{2}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)-v(t)\|_{H^{s-1}}$$

que implica

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \|u(t) - v(t)\|_{H^{s-1}} = 0,$$

ou seja,

$$u(t) = v(t),$$

para todo $t \in [0, T]$. Com isso finalizamos a demonstração do Teorema 0.0.1.

Capítulo 4

Comentários e resultados adicionais

Para finalizar gostaríamos de fazer alguns comentários sobre a equação DNLS e algumas de suas generalizações. Primeiro gostaríamos de observar que a técnica empregada fornece existência e unicidade de soluções para outras equações da forma

$$i\partial_t u + L(u) + i\lambda |u|^2 \partial_x u = 0,$$

onde L é um operador diferencial que satisfaz

$$\mathcal{I}m\langle Lu, u\rangle \geqslant 0. \tag{4.1}$$

De fato, como observado na introdução um passo crucial para que o argumento de regularização parabólica funcione é demonstrar que as soluções do problema regularizado são uniformemente limitadas em $H^s(\mathbb{R})$ para $s > 3/2$. De fato, assumindo que a equação regularizada

$$i\partial_t u + L(u) + i\lambda |u|^2 \partial_x u = i\mu \partial_x^2 u. \tag{4.2}$$

possui uma solução $u \in C([0, T_\mu]; H^s(\mathbb{R}))$ temos que esta satisfaz o seguinte:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle u, u\rangle_{H^s} &= 2\mathcal{R}e\langle \partial_t u, u\rangle_{H^s} \\
&= 2\mathcal{R}e\langle iL(u) + \mu\partial_x^2 u - \lambda |u|^2 \partial_x u, u\rangle_{H^s} \\
&= 2\mathcal{R}e\langle iLu, u\rangle_{H^s} + 2\mu\mathcal{R}e\langle \partial_x^2 u, u\rangle_{H^s} - 2\lambda\mathcal{R}e|u|^2\partial_x u, u\rangle_{H^s} \\
&= -2\mathcal{I}m\langle Lu, u\rangle_{H^s} - 2\mu\mathcal{R}e\langle \partial_x u, \partial_x u\rangle_{H^s} - 2\lambda\mathcal{R}e|u|^2\partial_x u, u\rangle_{H^s} \\
&\leqslant -2\lambda\mathcal{R}e\langle |u|^2\partial_x u, u\rangle_{H^s}.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

A estimativa de (4.3) segue como argumentado na seção 3.1 sempre que $s > 3/2$. Observamos que os operadores

$$L(u) = i\partial_x^3 u,$$

$$L(u) = D\partial_x u$$

satisfazem (4.1). Assim, vale o mesmo resultado de existência e unicidade para $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ com $s > 3/2$, para os PVI associado à equação de Korteweg-de Vries modificada (mKdV)

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + u^2 \partial_x u = 0, \\ u(\cdot, 0) = u_0. \end{cases} \tag{4.4}$$

e também para o PVI associado à equação de Benjamin-Ono modificada (mBO)

$$\begin{cases} \partial_t u + D\partial_x u + u^2 \partial_x u = 0, \\ u(\cdot, 0) = u_0. \end{cases} \tag{4.5}$$

Estudos recentes têm sido dedicados à boa colocação para o PVI associado à seguinte generalização da DNLS:

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u + i\lambda |u|^\alpha \partial_x u = 0,$$

com $\alpha > 0$ (gDNLS). Resultados de boa colocação têm sido obtidos de acordo com os valores de α. Para $\alpha > 5$ Hao [6] provou boa colocação em $H^s(\mathbb{R})$ para $s > 1/2$. Santos em [21] obteve boa colocação local para dado inicial em $H^{1/2}(\mathbb{R})$ suficientemente pequeno no caso $\alpha > 2$ e existência e unicidade de soluções para dados iniciais pequenos em $H^{3/2}(\mathbb{R}) \cap H^{1/2}(\langle x \rangle)$ para o caso $0 < \alpha < 1$. Recentemente [16] provaram boa colocação para $0 < \alpha < 1$ para uma certa classe de dados iniciais suficientemente regulares.

Bibliografia

[1] Bartle, Robert G.; *The Elements of integration*, John Wiley & Sons,Inc., New York, 1966.

[2] Biagioni, H., Linares, F., *Ill-posedness for the derivative Schrödinger and generalized Benjamin-Ono equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001) 3649-3659.

[3] Folland, G. B.,*Real Analysis, Modern Techniques and their Applications*, Jonh Wiley & Sons, New York, 1984.

[4] Hayashi, N., *The initial value problem for the derivative nonlinear Schödinger equation in energy space*, Nonlinear Anal. TMA 20 (1991) 823-833.

[5] Hayashi, M., Ozawa, T., *Well-posedness for a generalized derivaive nonlinear Schrödinger equation*, J. Diff. Eqs. 261 (2016), 5424-5445.

[6] Hao, C., *Well-posedness for one-dimensional derivaive nonlinear Schrödinger equation*, Comm. Pure Appl. Anal. 6 (2007), 997-1021.

[7] Iório, R.; *On the Cauchy problem for the Benjamin-Ono equations*, Comm. Partial Differential Equations 11 (1986) 1031-1081.

[8] Iorio, R.; Iorio, V. M., *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, 2001.

[9] Isnard, C., *Introdução á medida e integração*, Projeto Euclides, 1.ed. Rio de Janeiro:IMPA,2007.

[10] Kato, T.,*On nonlinear Schrödinger equations.* Ann. Inst. H. Poincaré, 46:113-129, 1987.

[11] Kato, T., *On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equation.* Studies in Appl. Math., 8:93-128, 1983.

[12] Kenig, C. E., Ponce, G. e Vega, L., *Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via contraction principle.*, Comm. on Pure and App. Math., 46:527-620, 1993.

[13] Kreyszig, E.,*Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons,New York,1978.

[14] Lima, E. L., *Espaços Métricos*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2009.

[15] Linares, F. and Ponce, G., *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations*, Springer, New York, 2009.

[16] Linares, F., Ponce, G., Santos, G.N., *On a class of solutions to the generalized derivative Schrödinger equations*, Acta Mathematica Sinica.

[17] Mio, K., Ogino, T., Minami, K., Takeda, S., *Modified nonlinear Schrödinger equation for Alfevén Waves propagating along magnectic field in cold plasma*, J. Phys. Soc. 41 (1976), 265-271.

[18] Mjolhus, E., *On the modulational instability of hydromagnetic waves parallel to the magnetic field*, J. Plasma Phys., 16 (1976), 321-334.

[19] Ponce, G., *On the global well-posedness of the Benjamin-Ono equation.* Diff. Int. Eq. 4, 527-542, 1991.

[20] Passot, T. and Sulem, P.L., *On multidimentional nodulation of Alfvén waves, Phys. Rev. E*, 48 (1993), 2966-2974.

[21] Santos, G.N., *Existence and uniqueness of solution for a generalized nonlinear derivative Schrödinger equation*, J. Differential Equations 259 (2015) 2030-2060.

[22] Takaoka, H., *Well-posedness for one dimensional nonlinear Schrödinger equation with the derivative nonlinearity*, Adv. Differential Equations. 4 (1999) 561-580.

[23] Tsutsumi, M., Fukuda, I., *On solutions of the derivatives nonlinear Schrödinger equation. Existence and uniqueness theorem*, Funkcial. Ekavac. 23 (1980) 259-277.