Universidade Federal do Piauí

Centro de Ciências da Natureza

Pós-Graduação em Matemática

Mestrado em Matemática

Estimativas do Primeiro Autovalor do Problema de Stekloff

José Edilson Ferreira Filho

Teresina - 2018

José Edilson Ferreira Filho

Dissertação de Mestrado:

Estimativa do Primeiro Autovalor do Problema de Stekloff

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Barnabé Pessoa Lima

Teresina - 2018

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ATA DA DEFESA PÚBLICA DE DISSERTAÇÃO

No dia cinco do mês de fevereiro do ano de dois mil e dezoito, às quinze horas, no Auditório do Departamento de Matemática, desta Universidade, reuniram-se os membros da Banca Examinadora composta pelos professores: Dr. **Barnabé Pessoa Lima** (Presidente e Orientador-UFPI), Dr. **Rondinelle Marcolino Batista** (membro interno - UFPI), Dr. **Ernani de Sousa Ribeiro Junior** (membro externo - UFC), a fim de julgar a dissertação do mestrando **José Edilson Ferreira Filho**, intitulada "*Estimativas do Primeiro Autovalor de Steklov*", para obtenção do grau de Mestre em Matemática. Aberta a sessão pelo presidente, coube ao candidato na forma regimental, expor o tema de sua dissertação dentro do tempo regulamentar. Após haver analisado o referido trabalho e arguido o candidato, os membros da Banca Examinadora deliberaram pela **APROVAÇÃO** do mesmo. Nada mais havendo a tratar, foi lavrada a presente ata, que vai assinada pelos membros da Banca Examinadora.

TERESINA, 05 DE FEVEREIRO DE 2018.

Recomendações da Banca:

Banca Examinadora:

Barnabé

Prof. Dr. Barnabé Pessoa Lima - Presidente

Rondinelle Marcolino Batista

Prof. Dr. Rondinelle Marcolino Batista - membro interno

Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Junior - membro externo

FICHA CATALOGRÁFICA
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial do CCN

F368e Ferreira Filho, José Edilson.
Estimativa do primeiro autovalor do problema de Stekloff / José Edilson Ferreira Filho. – Teresina, 2018.
42f.: il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática, 2018.
Orientador: Prof. Dr. Barnabé Pessoa Lima.

1. Geometria Diferencial. 2. Autovalor de Stekloff. I. Título

CDD 516.36

Bibliotecária : Caryne Maria da Silva Gomes - CRB3/1461

Dedico este trabalho ao meu pai José Edilson (In memoriam) e minha querida mãe Elenilda de Sousa.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela força e saúde concedida!

Aos meus familiares por todo apoio que me deram, em especial minha querida mãe Elenilda Moreira que sem ela não teria chegado até esse momento, agradeço meus irmãos Erick Wesley, Steffani de Sousa e Luna Eduarda por todo companheirismo dado para eu realizar este sonho! A Jane por toda paciência e companheirismo dado e por todas as horas que ela me aguentou, amo você!

Agradeço a cada professor do departamento de matemática da UFPI em especial ao Paulo alexandre, Jurandir Oliveira, João Xavier, Marcos Travaglia, Gleison Nascimento, José Francisco, Italo Dowell, Halyson Baltazar, Antônio Wilson, Rondinele Marcolino. Um enorme prestigio por ter tido a oportunidade de desde a iniciação cientifica ser orientado pelo professor e amigo Barnabe Pessoa!

Agradeço também ao professor Ernani Ribeiro por participar da banca e por todas as dúvidas tiradas!

Agradeço aos amigos conquistados nesses longos anos, em especial ao Danyel Rinaldo (Dan meu irmão de infância), José Marcio (Marciano), Dieme Pereira (Principe of bailout), Erisvaldo Veras (o apaixonado), João Vinicius (Baile de favela), Antônio Wesley (Lobo solitário), Júnior Amaral (Oh trombeta), Maicon Araújo (Aidético), Rodrigo Brito (Dopey Dick), Ruan Diego (esse não estuda de noite), Rafael Emanuel (Gordines meu amigo) , Sandoel Vieira, Atécio Alves, Jean Carlos, Edimilson Lopes, Antônio Aguiar(Vv), Bruno Vasconcelos, Josimauro Borges (Presidente), Kelvin Jhonson, Leonardo Silva (Pokémon GO) , Juliana Gomes, Marcos Paulo, Rafaelber Lima, Dário Severo, Thiago Mayson, Fernandes, Lucas Mendes, Luciano Ramos *(in memoriam)*, Luan Soares, Cicero Nadiel, Francimar Brito e muitos outros que participaram da minha trajetoria pela UFPI.

Obrigado a todos pela amizade levarei para toda vida!

Por fim, agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

"*Nunca existiu uma grande inteligência sem uma veia de loucura*".

Aristóteles.

Resumo

Esta dissertação, trata de estimativas do primeiro autovalor de Steklov em variedades com bordo não vazio e curvatura de Ricci não negativa, a qual possui como referência principal o artigo "Sharp bounds for the first non-zero Steklov eigenvalues" de Qiaoling Wang e Changya Xia publicado em 2009 no periódico Journal of Functional Analysis.

Em todo trabalho iremos considerar uma variedade Riemanniana (M, g) compacta com bordo o problema de Stekloff consiste em encontrar solução para a seguinte equação

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \ em \ M \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = pu \ em \ \partial M \end{cases}$$

onde $p \in \mathbb{R}$. Sua motivação física é a seguinte, a função u representa o estado da temperatura em M de modo que o fluxo na fronteira é proporcional a temperatura. Outro ploblema que será abordado é encontrar solução para a seguinte equação

$$\begin{cases} \Delta^2 u = 0 \quad \text{em } M \\ u = \Delta u - (1-\theta)k\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \ \text{ em } \partial M \end{cases}$$

O problema acima descreve a deformação u do suporte elástico de M sobre a ação transversal da força exterior $f = f(x), x \in M$. O raio de Poisson θ de um material elástico é a tenção transversal negativa dividida pela tensão axial na direção da força de alongamento. Em outras palavras, este parametro mede a expansão transversal se $\theta > 0$ quando o material é comprensado por uma força externa.

Abstract

This dissertation,treate at estimates of the first eigenvalue of Steklov on manifolds with non-empty boundary and non-negative Ricci curvature, which has as main reference the article “Sharp bounds for the first non-zero Steklov eigenvalues” by Qiaoling Wang and Changya Xia published in 2009 at Journal of Functional Analysis. In all work we will consider a Riemannian (M, g) compact manifold with Stekloff’s problem is to find a solution to the following equation:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \ em \ M \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = pu \ em \ \partial M \end{cases}$$

where $p \in \mathbb{R}$. Its physical motivation is as follows, function u represents the state of the temperature at M where the data flow is proportional to the temperature. Another which will be addressed and find a solution for the following equation

$$\begin{cases} \Delta^2 u = 0 \quad \text{em } M \\ u = \Delta u - (1-\theta)k\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \ \ \text{em } \partial M \end{cases}$$

The above problem describes the deformation of the elastic support of M on the cross-section of the external force $f = f(x), x \in M$. The Poisson radius θ of a material and the negative cross-section divided by the axial stress in the direction of the force of stretching. In other words, this parameter measures the transverse expansion if $\theta > 0$ when the material is understood by an external force.

Sumário

Capítulo 1

Noções Preliminares

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e resultados preliminares que darão suporte as demonstrações no transcorrer desta dissertação. Para alguns resultados apresentaremos provas e para outros indicaremos apenas as referências usadas. Denotaremos por M^n (ou simplesmente por M) uma variedade diferenciável de dimensão n orientável com bordo, o qual denotaremos por ∂M^{n-1} (ou simplesmente por ∂M). Indicaremos por $\mathcal{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ tangentes a M.

1.1 Noções Básicas de geometria Riemanniana

Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno $<,>$ (i.e., uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente T_pM, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p, com $\varphi(x_1, \cdots, x_n) = q \in \varphi(U)$ e $\frac{\partial}{\partial \varphi_i}(q) = d\varphi(e_i)$, então $\left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi_i}, \frac{\partial}{\partial \varphi_j} \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \cdots, x_n)$ é uma função diferenciável em U. Vamos supor daqui em diante que (M, g) é uma variedade Riemanniana, ou seja uma variedade diferenciável munida com uma métrica Riemanniana.

Definição 1. *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação*

$$\begin{aligned} \nabla : \ \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\longrightarrow \mathcal{X}(M) \\ (X, Y) &\longrightarrow \nabla_X Y \end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

i) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$;

ii) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;

iii) $\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $f, g \in \mathcal{D}(M)$, *(conjuntos das funções reais de classe* C^∞ *definidas em* M*).*

Um resultado clássico de geometria Riemanniana devido a Levi-Civita é que toda variedade Riemanniana M possui uma conexão afim ∇, denominada conexão de Levi-Civita (ou Riemannina) de M, que satisfaz as seguintes propriedades:

i) ∇ é simétrica, ou seja, $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

ii) ∇ é compatível com a métrica, ou seja, $X\big\langle Y, Z\big\rangle = \big\langle \nabla_X Y, Z\big\rangle + \big\langle Y, \nabla_X Z\big\rangle$ para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

De agora em diante M será uma variedade Riemanniana munida com uma conexão de Levi-Civita.

Definição 2. *A curvatura de Riemann* R *de uma variedade Riemanniana* M *é uma correspondência que associa a cada par* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *uma aplicação*

$$R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$
$$R(X,Y)Z = \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z,$$

onde $Z \in \mathfrak{X}(M)$ *e* ∇ *é a conexão Riemanniana de* M*.*

Por conveniência escreveremos $R(X,Y,Z,W) = \big\langle R(X,Y)Z, W\big\rangle$ e segue da definição de curvatura as seguintes propriedades:

i) $R(X,Y,Z,W) + R(Y,Z,X,W) + R(Z,X,Y,W) = 0$;

ii) $R(X,Y,Z,W) = -R(Y,X,Z,W)$;

iii) $R(X,Y,Z,W) = -R(X,Y,W,Z)$;

iv) $R(X,Y,Z,W) = R(Y,X,W,Z)$.

Definição 3. *Seja* (M, g) *uma variedade Riemanniana e seja* $\theta \subset T_pM$ *um plano de dimensão 2, gerado por* $\{X, Y\}$*. Então a curvatura seccional é dada por:*

$$K(\theta) = K(X, Y) = \frac{\langle R(X, Y)X, Y \rangle}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle}.$$

Definição 4. *Seja* (M, g) *uma variedade Riemanniana, e considere um referencial ortonormal* $\{e_1, \cdots, e_n\}$ *e seja* $X, Y \in \mathcal{X}(M)$*, então:*

1) O operador de Ricci é dado por:

$$\mathrm{Ric}(X) = \sum_i R(e_i, X)e_i.$$

2) A curvatura de Ricci é dada por:

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = \sum_i \langle R(e_i, X)e_i, Y \rangle.$$

Definição 5. *Seja* (M, g) *uma variedade Riemannina e* $X \in \mathcal{X}(M)$ *e* $f \in \mathcal{D}(M)$ *definimos gradiente de* f *como o campo vetorial* $\mathrm{grad}(f)$ *em* M *definido por*

$$\langle \mathrm{grad}(f), X \rangle = X(f).$$

A seguir apresentamos algumas propriedades do campo gradiente.

Proposição 1. *Se* $f, h : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *são funções suaves, então:*

a) $\mathrm{grad}(f + h) = \mathrm{grad}(f) + \mathrm{grad}(h)$

b) $\mathrm{grad}(fh) = h\mathrm{grad}(f) + f\mathrm{grad}(h)$

Demonstração. Considere $X \in \mathcal{X}(M)$ portanto temos

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{grad}(f + h), X \rangle &= X(f + h) \\ &= X(f) + X(h) \\ &= \langle \mathrm{grad}(f), X \rangle + \langle \mathrm{grad}(h), X \rangle \\ &= \langle \mathrm{grad}(f) + \mathrm{grad}(h), X \rangle. \end{aligned}$$

Agora provaremos o segunto item. De fato, note que

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{grad}(fh), X \rangle &= X(fh) \\ &= fX(h) + hX(f) \\ &= \langle f\mathrm{grad}(h), X \rangle + \langle h\mathrm{grad}(f), X \rangle \\ &= \langle f\mathrm{grad}(h) + h\mathrm{grad}(f), X \rangle. \end{aligned}$$

Isto conclui a prova da proposição. $\square$

Definição 6. *Seja* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *definimos divergência de* X *como a função* $\mathrm{div}X : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$\mathrm{div}X(p) = \mathrm{tr}\{Y(p) \longrightarrow \nabla_Y X(p)\}$$

onde $p \in M$.

Proposição 2. *Dados* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função suave, entao:*

a) $\mathrm{div}(X + Y) = \mathrm{div}X + \mathrm{div}Y$

b) $\mathrm{div}(fX) = f\mathrm{div}X + \left\langle \mathrm{grad}(f), X \right\rangle$

Demonstração. A prova do primeiro item seque do seguinte cálculo

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(X+Y) &= \mathrm{tr}\{Z \to \nabla_Z(X+Y)\} \\ &= \mathrm{tr}\{Z \to (\nabla_Z X + \nabla_Z Y)\} \\ &= \mathrm{tr}\{Z \to \nabla_Z X\} + \mathrm{tr}\{Z \to \nabla_Z Y\} \\ &= \mathrm{div}X + \mathrm{div}Y. \end{aligned}$$

Concluindo a prova do primeiro item, agora tratamos do segundo. Seja $\{e_i\}$ um referêncial, com isso temos

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(fX) &= \left\langle \nabla_{e_i} fX, e_i \right\rangle \\ &= \left\langle e_i(f)X + f\nabla_{e_i}X, e_i \right\rangle \\ &= \left\langle e_i(f)X, e_i \right\rangle + \left\langle f\nabla_{e_i}X, e_i \right\rangle \\ &= \left\langle e_i(f)e_i, X \right\rangle + f\left\langle \nabla_{e_i}X, e_i \right\rangle \\ &= \left\langle \mathrm{grad}(f), X \right\rangle + f\mathrm{div}X. \end{aligned}$$

Como queriamos demonstrar. $\square$

Definição 7. *Seja* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função suave. O Laplaciano de* f *é a função* $\Delta f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$\Delta f = \mathrm{div}(\mathrm{grad}(f)).$$

O laplaciano goza das seguintes propriedades.

Proposição 3. *Sejam* $f, h : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *funções suaves, assim temos:*

$$\Delta(fh) = f\Delta h + h\Delta f + 2\Big\langle grad(f), grad(h)\Big\rangle$$

Em particular,

$$\frac{1}{2}\Delta(f^2) = f\Delta f + |grad(f)|^2$$

Demonstração. Pelas proposição 1 e 2,

$$\begin{aligned}
\Delta(fh) &= div(grad(fh)) \\
&= div(fgrad(h) + hgrad(f)) \\
&= div(fgrad(h)) + div(hgrad(f)) \\
&= fdiv(grad(h)) + \Big\langle grad(f), grad(h)\Big\rangle + hdiv(grad(f)) + \Big\langle grad(h), grad(f)\Big\rangle \\
&= f\Delta h + h\Delta f + 2\Big\langle grad(f), grad(h)\Big\rangle.
\end{aligned}$$

Como queriamos demonstrar. □

Teorema 1 (Divergência)**.** *Sejam* M *uma variedade compacta orientável com bordo* ∂M *e* X *um campo de classe* C^k*. Então*

$$\int_M div\ X dM = \int_{\partial M} \langle X, \eta\rangle dS,$$

onde η *é um campo unitário normal à* ∂M *apontando para fora de* M*.*

Demonstração. Esse teorema é uma consequência imediata do Teorema de Stokes para variedades. A demonstração do Teorema de Stokes pode ser encontrada em [Spivak][9].

□

Corolário 1 (1ª Fórmula de Green)**.** *Sejam* $u, v : U \longrightarrow \mathbb{R}$*, funções de classe* C^k *no aberto* U*. Seja* $M \subset U$ *uma variedade orientável, compacta com bordo suave* ∂M*. Então:*

$$\int_M u.\Delta v + \langle grad(u), grad(v)\rangle dM = \int_{\partial M} u.\frac{\partial v}{\partial \eta} dS.$$

Demonstração. Segue diretamente do Teorema da divergência e da definição do div considerando o seguinte campo $X = u.grad(v)$. □

Definição 8. *Seja* $f : M \to \mathbb{R}$ *uma função suave. O Hessiano de* f *em* $p \in M$ *é o campo de operadores lineares* $(Hessf)_p : T_pM \to T_pM$ *definido para cada* $Y \in T_pM$ *por*

$$(Hessf)_p(Y) = \nabla_Y grad(f)$$

Proposição 4. *Seja* $f : M \to \mathbb{R}$ *uma função suave, então*

$$\Delta f = tr(Hessf)$$

Demonstração. Dado $Y \in T_pM$ temos o seguinte

$$\begin{aligned} \Delta f &= div(grad(f)) \\ &= tr\{Y \to \nabla_Y grad(f)\} \\ &= tr(Hessf). \end{aligned}$$

□

Na proposição a seguir mostraremos que o Hess é auto-adjunto. Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

Proposição 5. *Seja* $f : M \to \mathbb{R}$ *uma função suave e seja* $p \in M$*, então* $(Hessf)_p : T_pM \to T_pM$ *é um operador auto-adjunto.*

Demonstração. Sejam $x, y \in T_pM$ e X, Y suas extenções locais de x, y respectivamente:

$$\begin{aligned} \left\langle (Hessf)x, y \right\rangle &= \left\langle \nabla_X grad(f), Y \right\rangle \\ &= X\left\langle grad(f), Y \right\rangle - \left\langle grad(f), \nabla_X Y \right\rangle \\ &= XY(f) - \left\langle grad(f), [X, Y] + \nabla_Y X \right\rangle \\ &= YX(f) + [X, Y](f) - \left\langle grad(f), [X, Y] \right\rangle - \left\langle grad(f), \nabla_Y X \right\rangle \\ &= Y\left\langle grad(f), X \right\rangle + [X, Y](f) - [X, Y](f) - \left\langle grad(f), \nabla_Y X \right\rangle \\ &= Y\left\langle grad(f), X \right\rangle - \left\langle grad(f), \nabla_Y X \right\rangle \\ &= \left\langle \nabla_Y grad(f), X \right\rangle \\ &= \left\langle (Hessf)y, x \right\rangle. \end{aligned}$$

□

1.2 Um pouco sobre Imersões Isométricas

Definição 9. *Sejam* M^n *variedade diferenciável e* $\overline{M}^k$ *variedade Riemanniana,* $f : M \to \overline{M}$ *é uma imersão se* $df_p : T_pM \to T_{f(p)}\overline{M}$ *é injetiva para todo ponto* $p \in M$.

A métrica RiemanniAna de $\overline{M}$ induz de maneira natural uma métrica Riemanniana em M da seguinte forma: $x, y \in T_pM$ define-se $\langle x, y \rangle = \langle df_p(x), df_p(y) \rangle$. Para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p\overline{M}$ decompõe $T_p\overline{M}$ na soma direta

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp},$$

onde $(T_pM)^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. Se $\nu \in T_p\overline{M}$, podemos escrever $\nu = \nu^T + \nu^N$, $\nu^T \in T_pM$ e $\nu^N \in (T_pM)^{\perp}$.
Denotaremos a conexão Riemanniana de $\overline{M}$ por $\overline{\nabla}$, se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ então $\overline{X}, \overline{Y} \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ são extensões locais de X e Y respectivamente, definimos

$$\nabla_X Y = \left(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}\right)^T.$$

Verifica-se facilmente que esta é a conexão Riemanniana relativa a métrica induzida de M. Note que essa conexão é a projeção da conexão de $\overline{M}$ sobre o espaço tangente de M. Queremos definir a segunda forma fundamental da imersão $f : M \to \overline{M}$, usando a definição da conexão Riemanniana de M obtemos que a aplicação

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y,$$

que está bem definida, ou seja, não depende das extensões $\overline{X}, \overline{Y}$. No que se segue, indicaremos por $\mathfrak{X}(M)^{\perp}$ o espaço dos campos de vetores diferencáveis em U normais a $f(U) \approx U$.

Proposição 6. *Se* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, *a aplicação* $B : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ *dada por*

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

é bilinear e simétrica.

Demonstração. A prova dessa proposição pode ser facilmente obtida em [1]. $\square$

Definição 10. *Seja* $p \in M$ *e* $\eta \in (T_pM)^{\perp}$, *a aplicação* $H_\eta : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle$$

é uma forma bilinear simétrica. A forma quadrática II_η *definida em* T_pM *por*

$$II_\eta(x) = H_\eta(x,x)$$

é chamada a segunda forma fundamental de f *em* p *segundo o vetor* η.

À aplicação bilinear H_η fica associada uma aplicação linear auto-adjunta $S_\eta : T_pM \to T_pM$ por

$$\langle S_\eta(x), y\rangle = H_\eta(x,y) = \langle B(x,y), \eta\rangle.$$

Proposição 7. *Seja* $p \in M$, $x \in T_pM$ *e* $\eta \in (T_pM)^\perp$. *Seja* N *uma extensão local de* η *normal a* M. *Então*

$$S_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^T.$$

Demonstração. Seja $y \in T_pM$ e X, Y extensões locais de x, y respectivamente, e tangentes a M. Então $\langle N, Y\rangle = 0$ e portanto

$$\begin{aligned}\langle S_\eta(x), y\rangle &= H_\eta(x,y)\\ &= \langle B(x,y), \eta\rangle\end{aligned}$$

Pela proposição 6

$$\begin{aligned}\langle S_\eta(x), y\rangle &= \langle \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, \eta\rangle\\ &= \langle \overline{\nabla}_X Y, \eta\rangle - \langle \nabla_X Y, \eta\rangle\\ &= X\langle Y, N\rangle - \langle Y, \overline{\nabla}_X N\rangle\\ &= \langle Y, -(\overline{\nabla}_X N)^T\rangle + \langle Y, -(\overline{\nabla}_X N)^N\rangle\\ &= \langle -(\overline{\nabla}_X N)^T, Y\rangle.\end{aligned}$$

□

Definição 11. *Dada uma imersão* $\phi : M \longrightarrow \overline{M}$, *dado um campo de vetores* η *normais à* M *definimos o vetor curvatura média da imersão por* $\vec{H} = H.\eta$, *ou ainda*

$$\vec{H} = \frac{1}{n}\mathrm{tr}(S_\eta).\eta$$

Proposição 8. *Sejam* $\varphi : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ *uma imersão isométrica e* $f : \overline{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ *função suave, então:*

$$\Delta_{\overline{M}} f = \Delta_M(f \circ \varphi) - nH(f) + (\mathrm{Hess}_{\overline{M}} f)(N,N)$$

em cada $p \in M$*, onde* H *é o vetor curvatura média da imersão e* N *campo unitário normal à* M *em uma vizinhança de* p*.*

Demonstração. Denotando ∇ e $\overline{\nabla}$ as conexões de M e $\overline{M}$ respectivamente, α a segunda forma fundamental de φ. Sendo $\{e_1, ..., e_n, e_{n+1} = N\}$ referencial geodésico em uma vizinhança de $p \in M$ em $\overline{M}$, temos que em p vale

$$\begin{aligned}
\Delta_{\overline{M}} f &= \mathrm{tr}(\mathrm{Hess}_{\overline{M}} f) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \langle \overline{\nabla}_{e_i} \nabla f, e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \left(e_i \langle \nabla f, e_i \rangle - \langle \nabla f, \overline{\nabla}_{e_i} e_i \rangle \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(e_i \langle \nabla f, e_i \rangle - \langle \nabla f, \nabla_{e_i} e_i + B(e_i, e_i) \rangle \right) \\
&+ N \langle \nabla f, N \rangle - \langle \nabla f, \overline{\nabla}_N N \rangle \\
&= \Delta_M f - \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla f, B(e_i, e_i) \rangle + \mathrm{Hess}_{\overline{M}} f(N, N) \\
&= \Delta_M f - n \langle H, \nabla f \rangle + \mathrm{Hess}_{\overline{M}} f(N, N).
\end{aligned}$$

□

Teorema 2. *(Formula de Bochner) Seja* (M^n, g) *uma variedade Riemanniana, e considere* $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função suave. Então*

$$\frac{1}{2} \Delta(|\nabla f|^2) = \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f) \rangle + |\mathrm{Hess}\, f|^2.$$

Demonstração. Para simplificar notação consideraremos um sistema de coordenadas normal (x, V), onde V é a vizinhança normal de um dado $p \in M$. Esse sistema goza de uma série de propriedades, dentre elas: $\nabla_{e_i} e_j = 0$ e $g_{ij} = \delta_{ij}$, onde $\{e_1, ..., e_n\}$ é a base de $\mathfrak{X}(M)$ nesse sistema de coordenadas.

No sistema de coordenadas descrito acima, podemos escrever $\nabla f = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i$, onde $f_i = e_i(f) = \langle \nabla f, e_i \rangle$. Logo, $|\nabla f|^2 = \sum_{i=1}^{n} f_i^2$ e derivando em j obtemos

$$\frac{1}{2} (|\nabla f|^2)_j = \sum_{i=1}^{n} f_i f_{ij}.$$

Novamente derivando em j deduzimos que

$$\frac{1}{2} (|\nabla f|^2)_{jj} = \sum_{i=1}^{n} \left((f_{ij})^2 + f_i f_{ijj} \right).$$

Somando em j temos

$$\Delta(\frac{1}{2}|\nabla f|^2) = \sum_j \left(\frac{1}{2}(|\nabla f|^2)\right)_{jj} = \sum_{i,j}(f_{ij})^2 + \sum_{i,j} f_i f_{ijj}.$$

Para calcular f_{ijj}, notemos que $f_i = \langle \nabla f, e_i\rangle$, dessa forma

$$\begin{aligned} f_{ij} = \langle \nabla_{e_j}\nabla f, e_i\rangle &= \mathrm{Hess}\, f(e_j, e_i) \\ &= \mathrm{Hess}\, f(e_i, e_j) \\ &= \langle \nabla_{e_i}\nabla f, e_j\rangle. \end{aligned}$$

Assim, derivando novamente em j temos

$$\begin{aligned} f_{ijj} = \langle \nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\nabla f, e_j\rangle &= \langle R(e_i, e_j)\nabla f, e_j\rangle + \langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_j}\nabla f, e_j\rangle \\ &= \langle R(e_i, e_j)\nabla f, e_j\rangle + e_i\langle \nabla_{e_j}\nabla f, e_j\rangle. \end{aligned}$$

Portanto, denotando $e_i\langle \nabla_{e_j}\nabla f, e_j\rangle = \langle \nabla_{e_j}\nabla f, e_j\rangle_i$ temos a fórmula de Ricci

$$f_{ijj} = -\langle R(e_i, e_j)e_j, \nabla f\rangle + \langle \nabla_{e_j}\nabla f, e_j\rangle_i.$$

Então, temos

$$\Delta\big(\frac{1}{2}|\nabla f|^2\big) = \sum_{i,j}\langle \nabla_{e_i}\nabla f, e_j\rangle^2 - \sum_{i,j}\langle R(e_i, e_j)e_j, \nabla f\rangle f_i + \sum_{i,j} f_i\langle \nabla_{e_j}\nabla f, e_j\rangle_i.$$

Agora, calculemos em separado cada um dos membros da equação. De fato, teremos

$$\begin{aligned} \Delta\big(\frac{1}{2}|\nabla f|^2\big) &= \sum_{i,j}\langle \nabla_{e_i}\nabla f, e_j\rangle^2 - \sum_{i,j}\langle R(e_i, e_j)e_j, \nabla f\rangle f_i + \sum_{i,j} f_i\langle \nabla_{e_j}\nabla f, e_j\rangle_i \\ &= \sum_i \langle \nabla_{e_i}\nabla f, \sum_j \langle \nabla_{e_i}\nabla f, e_j\rangle e_j\rangle + \sum_j \langle R(\sum_i f_i e_i, e_j)\nabla f, e_j\rangle \\ &+ \sum_i f_i\left(\sum_j \langle \nabla_{e_j}\nabla f, e_j\rangle\right)_i \\ &= \sum_i \langle \nabla_{e_i}\nabla f, \nabla_{e_i}\nabla f\rangle + \sum_j \langle R(\nabla f, e_j)\nabla f, e_j\rangle + \sum_i f_i\big(\Delta f\big)_i \\ &= \sum_i |\nabla_{e_i}\nabla f|^2 + \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle \\ &= |\mathrm{Hess}\, f|^2 + \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle. \end{aligned}$$

Finalmente, obtemos a fórmula de Bochner:

$$\frac{1}{2}\Delta\big(|\nabla f|^2\big) = |\mathrm{Hess}\, f|^2 + \langle \nabla f, \nabla\big(\Delta f\big)\rangle + \mathrm{Ric}\big(\nabla f, \nabla f\big)$$

e concluimos a demonstração. □

Agora apresentaremos a Fórmula de Reilly, que será fundamental nesse trabalho.

Teorema 3. *(Fórmula de Reilly) Sejam* $(\overline{M}^{n+1}, \overline{g})$ *e* (M^n, g) *variedades Riemannianas e* $f : \overline{M}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função suave então*

$$\int_{\overline{M}} \Big((\overline{\Delta} f)^2 - |\mathrm{Hess}_{\overline{M}} f|^2 - \mathrm{Ric}(\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f) \Big) d\overline{M} = \int_M \Big(\Big(2\Delta f - nH.f_\nu \Big).f_\nu - \alpha(\nabla f, \nabla f) \Big) dM,$$

onde barra superior indica que o cálculo é feito em $\overline{M}^{n+1}$, $f_\nu = \langle \nabla f, \nu \rangle = \frac{\partial f}{\partial \nu}$, α *representa a segunda forma fundamental da inclusão* $i : M \longrightarrow \overline{M}$ *e* H *a curvatura média.*

Demonstração. Integrando a fórmula de Bochner, obtemos que

$$\frac{1}{2} \int_{\overline{M}} \overline{\Delta}\big(|\overline{\nabla} f|^2\big) d\overline{M} = \int_{\overline{M}} \big(|\mathrm{Hess}_{\overline{M}} f|^2 + \langle \overline{\nabla} f, \overline{\nabla}\big(\overline{\Delta} f\big) \rangle + \mathrm{Ric}\big(\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f\big) \big) d\overline{M}.$$

Pelo Teorema da divergência deduzimos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_{\overline{M}} \overline{\Delta}\big(|\overline{\nabla} f|^2\big) d\overline{M} &= \frac{1}{2} \int_{\overline{M}} \mathrm{div}_{\overline{M}} \Big(\overline{\nabla}\big(|\overline{\nabla} f|^2\big) \Big) d\overline{M} \\
&= \frac{1}{2} \int_M \langle \nu, \overline{\nabla}\big(|\overline{\nabla} f|^2\big) \rangle dM \\
&= \frac{1}{2} \int_M \nu\big(|\overline{\nabla} f|^2\big) dM \\
&= \int_M \langle \overline{\nabla}_\nu \overline{\nabla f}, \overline{\nabla} f \rangle dM \\
&= \int_M \big(\mathrm{Hess}_{\overline{M}} f\big)\big(\nu, \overline{\nabla} f\big) dM.
\end{aligned}$$

Por outro lado, desde que $\mathrm{div}_{\overline{M}}\big((\overline{\Delta} f).\overline{\nabla} f\big) = \langle \overline{\nabla}(\overline{\Delta} f), \overline{\nabla} f \rangle + (\overline{\Delta} f)^2$ obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\overline{M}} \langle \overline{\nabla} f, \overline{\nabla}(\overline{\Delta} f) \rangle d\overline{M} &= \int_{\overline{M}} \mathrm{div}_{\overline{M}}\big((\overline{\Delta} f).\overline{\nabla} f\big) d\overline{M} - \int_{\overline{M}} \big(\overline{\Delta} f\big)^2 d\overline{M} \\
&= \int_M \langle \big(\overline{\Delta} f\big) \overline{\nabla} f, \nu \rangle dM - \int_{\overline{M}} \big(\overline{\Delta} f\big)^2 d\overline{M} \\
&= \int_M f_\nu (\overline{\Delta} f) dM - \int_{\overline{M}} \big(\overline{\Delta} f\big)^2 d\overline{M}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, segue que

$$\begin{aligned}
\int_{\overline{M}} \big(\overline{\Delta} f\big)^2 d\overline{M} &= \int_{\overline{M}} \big(|\mathrm{Hess}_{\overline{M}} f|^2 + \mathrm{Ric}\big(\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f\big) \big) d\overline{M} \\
&- \int_M \big(\mathrm{Hess}_{\overline{M}} f\big)(\nu, \overline{\nabla} f) dM + \int_M f_\nu \big(\overline{\Delta} f\big) dM.
\end{aligned}$$

Agora, pela Proposição 8 temos

$$\begin{aligned} f_\nu\overline{\Delta}f &= f_\nu\big(\Delta_M f - \langle nH\nu, \nabla f\rangle + \mathrm{Hess}_{\overline{M}} f(\nu,\nu)\big) \\ &= f_\nu \Delta f - nHf_\nu^2 + f_\nu(\mathrm{Hess}_{\overline{M}} f)(\nu,\nu), \end{aligned}$$

como $\nabla f = \big(\overline{\nabla} f\big)^t$, podemos escrever $\nabla f = \big(\overline{\nabla} f\big) - \langle \overline{\nabla} f, \nu\rangle\nu$ e assim

$$\overline{\nabla} f = \nabla f + f_\nu \nu.$$

Usando o fato que $\mathrm{Hess} f$ é bilinear e simétrico, teremos

$$\begin{aligned} \mathrm{Hess}_{\overline{M}}(\nu, \overline{\nabla} f) &= \mathrm{Hess}_{\overline{M}} f(\nu, f_\nu\nu + \nabla f) \\ &= f_\nu\big(\mathrm{Hess}_{\overline{M}} f\big)(\nu,\nu) + \big(\mathrm{Hess}_{\overline{M}} f\big)(\nabla f, \nu) \\ &= f_\nu\big(\mathrm{Hess}_{\overline{M}} f\big)(\nu,\nu) + \langle \overline{\nabla}_{\nabla f}\overline{\nabla} f, \nu\rangle \\ &= f_\nu\big(\mathrm{Hess}_{\overline{M}} f\big)(\nu,\nu) + \langle \overline{\nabla}_{\nabla f}\nabla f, \nu\rangle \\ &+ f_\nu\langle \overline{\nabla}_{\nabla f}\nu, \nu\rangle + \langle \nabla f(f_\nu)\nu, \nu\rangle \\ &= f_\nu\big(\mathrm{Hess}_{\overline{M}} f\big)(\nu,\nu) + \langle \overline{\nabla}_{\nabla f}\nabla f, \nu\rangle \\ &+ f_\nu \frac{1}{2}\nabla f\langle \nu,\nu\rangle + \langle \nabla f, \nabla\big(f_\nu\big)\rangle \\ &= f_\nu\big(\mathrm{Hess}_{\overline{M}} f\big)(\nu,\nu) + \langle B(\nabla f, \nabla f), \nu\rangle + \langle \nabla f, \nabla\big(f_\nu\big)\rangle. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} f_\nu\big(\overline{\Delta} f\big) - \big(\mathrm{Hess}_{\overline{M}} f\big)(\nu, \overline{\nabla} f) &= f_\nu\Delta f - nHf_\nu^2 + f_\nu\big(\mathrm{Hess}_{\overline{M}} f\big)(\nu,\nu) \\ &- f_\nu\big(\mathrm{Hess}_{\overline{M}} f\big)(\nu,\nu) - \langle B(\nabla f, \nabla f), \nu\rangle \\ &- \langle \nabla f, \nabla(f_\nu)\rangle \\ &= f_\nu\Delta f - nHf_\nu^2 - \langle \nabla f, \nabla(f_\nu)\rangle - \langle B(\nabla f, \nabla f), \nu\rangle. \end{aligned}$$

Como $\mathrm{div}_M(f_\nu\nabla f) = \langle \nabla f, \nabla(f_\nu)\rangle + f_\nu\Delta f$, obtemos que

$$f_\nu(\overline{\Delta} f) - \big(\mathrm{Hess}_{\overline{M}} f\big)(\nu, \overline{\nabla} f) = 2f_\nu\Delta f - \mathrm{div}_M(f_\nu\nabla f) - nHf_\nu^2 - \langle B(\nabla f, \nabla f), \nu\rangle.$$

Além disso, desde que $\partial M = \emptyset$, temos que $\int_M \mathrm{div}_M(f_\nu\nabla f)dM = 0$. Agora, usando que

$$\langle B(\nabla f, \nabla f), \nu\rangle = \alpha(\nabla f, \nabla f),$$

obtemos a fórmula de Reilly

$$\int_{\overline{M}}\Big((\overline{\Delta} f)^2 - |\mathrm{Hess}_{\overline{M}} f|^2 - \mathrm{Ric}(\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f)\Big)d\overline{M} = \int_M \Big(\Big(2\Delta f - nH.f_\nu\Big).f_\nu - \alpha(\nabla f, \nabla f)\Big)dM,$$

que conclui a demonstração. □

1.3 Alguns Problemas de Autovalores

Modelos matemáticos para os problemas de autovalores em Geometria Riemanniana surgiram das aplicações físicas em diversas áreas como: acústica, ondulatória, elasticidade, calor e etc. tais problemas vêm sendo estudado desde o seculo XVIII e são divididos em dois tipos: problemas diretos e problemas inversos.
O problema direto o qual é o nosso interrese neste trabalho, busca informações sobre autovalores e autofunções do problema correspondente em termos da geometria da variedade Riemanniana, embora saibamos que nem sempre é possivel determinar tais autofunções e autovalores.
No problema inverso assume-se que um dos autovalores do problema é conhecido e busca-se obter informações sobre a variedade Riemanniana como, curvatura, topologia e etc. Exemplos importantes de problemas de autovalores:

1) **Problema de autovalor de Dirichlet:** Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta, conexa e com bordo. Encontrar todos os números reais ν para os quais existe uma solução $\varphi \in C^2(M) \cap C^0(\overline{M})$ satisfazendo

$$\begin{cases} \Delta\varphi + \nu\varphi = 0 \text{ em } M, \\ \varphi = 0 \text{ em } \partial M. \end{cases}$$

Segue da 1ª formula de Green uma caracterização para os autovalores do problema de Dirichlet, a saber

$$\int_M (-\nu\varphi^2 + |\nabla\varphi|^2) \;=\; 0,$$

$$\nu = \frac{\displaystyle\int_M |\nabla\varphi|^2}{\displaystyle\int_M \varphi^2}.$$

2)**Problema de autovalor de Neumann:** Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta, conexa e com bordo. Encontrar todos os números reais ν para os quais existe uma solução $\varphi \in C^2(M) \cap C^0(\overline{M})$ satisfazendo

$$\begin{cases} \Delta\varphi + \nu\varphi = 0 \text{ em } M, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta} = 0 \text{ em } \partial M. \end{cases}$$

onde η é normal unitário exterior em ∂M.

Novamente pela 1ª formula de Green, obtemos uma caracterização para os autovalores do problema de Neumann, dada por

$$\int_M (-\nu\varphi^2 + |\nabla\varphi|^2) \;=\; 0,$$

$$\nu = \frac{\displaystyle\int_M |\nabla\varphi|^2}{\displaystyle\int_M \varphi^2}.$$

3)**Problema de autovalor de Steklov:** Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta, conexa e com bordo. Encontrar todos os números reais ν para os quais existe uma solução $\varphi \in C^2(M) \cap C^0(\overline{M})$ satisfazendo

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 \text{ em } M, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta} = \nu\varphi \text{ em } \partial M. \end{cases}$$

onde η é normal unitário exterior em ∂M.

Pela 1ª Formula de Green, obtemos uma caracterização para os autovalores do problema de Stekloff, dada por

$$\int_M |\nabla\varphi|^2 = \int_{\partial M} \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}$$

$$\nu = \frac{\displaystyle\int_M |\nabla\varphi|^2}{\displaystyle\int_{\partial M} \varphi^2}$$

Como nosso principal objetivo neste trabalho é estimar os autovalores do problema de Steklov, concentraremos neste objetivo desde já.

Teorema 4. *Seja* (M, g) *uma variedade Riemanniana compacta com bordo. O conjunto de autovalores do problema de Steklov consiste de uma seqüência*

$$0 \leqslant \nu_1 \leqslant \nu_2 \leqslant \cdots \uparrow \infty$$

e cada um dos seus auto-espaços associados possui dimensão finita. Além disso, o espaço vetorial gerado por todos os auto-espaços é denso em $L^2(M)$.

Demonstração. Veja [5]. $\square$

Teorema 5. *(Quociente de Rayleigh-Ritz) Seja* (M, g) *uma variedade Riemanniana compacta com bordo. Existe um mínimo para o problema variacional*

$$\nu_1 = \min_{f \in A} \frac{\displaystyle\int_M |\nabla f|^2}{\displaystyle\int_{\partial M} f^2},$$

onde $A = \{f \in C^\infty(M)\ ;\ \displaystyle\int_{\partial M} f = 0\}$*. O mínimo satisfaz o problema de Steklov.*

Demonstração. Veja [5]. □

Capítulo 2

Preliminares

Com base nas referências [7] e [8], iremos apresentar neste capítulo alguns resultados que serão utilizados na demonstração do teorema pricipal deste trabalho. Iniciaremos com um resultado de álgebra linear.

Teorema 6. *Seja* E^n *um espaço vetorial de dimensão* n *munido de um produto interno e* $T : E \to E$ *um operador linear auto-adjunto, então:*

$$|T|^2 \geqslant \frac{1}{n}(\mathrm{tr}T)^2$$

e a igualdade ocorre se e somente se T *é multiplo da identidade. Em particular, se tivermos* $T = \mathrm{Hess}f$ *então*

$$|\mathrm{Hess}f|^2 \geqslant \frac{1}{n}(\Delta f)^2$$

.

Demonstração. Primeiramente, note que

$$\begin{aligned}
|T - \frac{1}{n}(\mathrm{tr}T)\mathrm{Id}|^2 &= \langle T - \frac{1}{n}(\mathrm{tr}T)\mathrm{Id}, T - \frac{1}{n}(\mathrm{tr}T)\mathrm{Id}\rangle \\
&= |T|^2 - \frac{1}{n}(\mathrm{tr}T)\langle T, \mathrm{Id}\rangle - \frac{1}{n}(\mathrm{tr}T)\langle T, \mathrm{Id}\rangle + \frac{1}{n^2}(\mathrm{tr}T)^2\langle \mathrm{Id}, \mathrm{Id}\rangle \\
&= |T|^2 - \frac{2}{n}(\mathrm{tr}T)^2 + \frac{1}{n}(\mathrm{tr}T)^2 \\
&= |T|^2 - \frac{1}{n}(\mathrm{tr}T)^2.
\end{aligned}$$

Como $|T - \frac{1}{n}(\mathrm{tr}T)\mathrm{Id}|^2 \geqslant 0$ segue

$$|T|^2 \geqslant \frac{1}{n}(\mathrm{tr}T)^2.$$

Como queriamos demonstrar. □

Teorema 7. *(Princípio do Máximo) Seja* M *uma variedade Riemanniana com o operador de Laplace* Δ*, e seja* $u \in C^2(M)$ *satisfazendo*

$$\Delta u \geqslant 0$$

em M*. Se existe um* $x_0 \in M$ *para qual*

$$u(x_0) = \sup_M u$$

então $u(x) = u(x_0)$ *para todo* $x \in M$*.*
Além disso, se $u \in C^2(M) \cap C^1(\overline{M})$ *e* $\Delta u \geqslant 0$ *em todo ponto de* M*, e* $\partial M \neq \emptyset$ *com* $x_0 \in M$ *satisfazendo* $u(x_0) = \sup_M u$*, então*

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) > 0.$$

Demonstração. Veja [6]. □

Teorema 8. *Seja* (M^n, g) *uma variedade Riemanniana compacta, conexa e orientada com bordo não vazio e suponha que* M *admita uma função* $f : M \to \mathbb{R}$ *e uma constante* L *diferente de zero satisfazendo:*

a) $\mathrm{Hess} f = Lg$*;*

b) $f|_{\partial M} = \mathrm{constante}$*.*

Então M *é isometrico a uma bola Euclidiana.*

Demonstração. Sem perda de generalidade suponha que $L = 1$ e o valor máximo de f em M seja zero. Pelo item (a) f assume maximo em cada ponto do interior de M, como $f|_{\partial M} = \mathrm{constante}$, pelo Principio do Maximo teorema 7, temos $f|_{\partial M} = 0$ e $f < 0$ em cada ponto do interior de M. Seja $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco, isto é, $g(\lambda'(s), \lambda'(s)) = 1$ onde $\lambda(0) = q$ e considere $h(s) = f(\lambda(s))$ como $L = 1$ temos:

$$h'(s) = \langle \mathrm{grad} f(\lambda(s)), \lambda'(s) \rangle$$

$$\begin{aligned} h''(s) &= \langle \nabla^{gradf(\lambda(s))}_{\lambda'(s)}, \lambda'(s)\rangle + \langle gradf(\lambda(s)), \nabla^{\lambda'(s)}_{\lambda'(s)}\rangle \\ &= Hessf(\lambda'(s), \lambda'(s)) \end{aligned}$$

como temos $Hessf = g$, tem-se:

$$h''(s) = g(\lambda'(s), \lambda'(s)) = 1$$

Com isso $h(s)$ deve ser um polinômio quadratico na variável s, isto é, $h(s) = \frac{s^2}{2} + as + b$. Como $f(\lambda(0)) = f(q) = \frac{-R^2}{2}$ e $\overline{\nabla} f(q) = 0$. Obtemos $h(s) = \dfrac{s^2 - R^2}{2}$ daí λ pode ser extendido até atingir a fronteira $\partial M = f^{-1}(0)$, e $f \leqslant 0$ em M. Vemos que cada uma dessas geodésicas pode ser definida para $0 \leqslant s \leqslant R$, e não para $s > R$. Como exp_q : $B_R(0) \subset T_q M \to M$ é um difeomorfismo e:

$$f(p) = \frac{(d(p,q)^2 - R^2)}{2}$$

onde d é a distância em M. Para finalizar usaremos o lema a seguir para mostrar que a métrica em M é flat. □

Lema 1. *Seja* (M^n, g) *uma variedade Riemanniana compacta, conexa e orientada com bordo não vazio e suponha que* M *admita uma função* $f : M \to \mathbb{R}$ *e uma constante* L *diferente de zero satisfazendo:*

a) $Hessf = Lg$

b) $f|_{\partial M} = 0$

Então a métrica de M *é flat.*

Demonstração. Pelo teorema anterior, temos que f assume um mínimo em $\frac{-R^2}{2}$ em cada ponto ligando por uma geodésica passando por q e $f(p) = \frac{d(p,q)^2 - R^2}{2}$. Agora introduzindo coordenadas em M temos $f_{ij} = g_{ij}$ e derivando covariamente

$$\begin{aligned} f_{ijk} &= e_k \langle \nabla_{e_j} \overline{\nabla} f, e_i\rangle \\ &= \langle \nabla_{e_k} \nabla_{e_j} \overline{\nabla} f, e_i\rangle + \langle \nabla_{e_j} \overline{\nabla} f, \nabla_{e_k} e_i\rangle \end{aligned}$$

Como $R(e_k, e_j)\overline{\nabla} f = \nabla_{e_k}\nabla_{e_j}\overline{\nabla} f - \nabla_{e_j}\nabla_{e_k}\overline{\nabla} f - \nabla_{[e_k,e_j]}\overline{\nabla} f$ temos:

$$\begin{aligned} f_{ijk} &= \langle R(e_k, e_j)\overline{\nabla} f, \nabla_{e_i}\rangle + \langle \nabla_{e_j}\nabla_{e_k}\overline{\nabla} f, e_i\rangle \\ &= \langle R(e_k, e_j)\overline{\nabla} f, e_i\rangle + e_j\langle \nabla_{e_k}\overline{\nabla} f, e_i\rangle - \langle \nabla_{e_k}\overline{\nabla} f, \nabla_{e_j} e_i\rangle \end{aligned}$$

Assim temos o seguinte:

$$0 = f_{ijk} - f_{ikj} = \langle R(e_k, e_j)\overline{\nabla} f, e_i\rangle$$

combinando com a) temos:

$$0 = R_{rikj} + \langle R(e_k, e_j)\overline{\nabla} f, e_i\rangle$$

Permutando i com r e j com k e usando a simetria do tensor curvatura junto com a desigualdade de Bianchi obtemos:

$$R_{tikj} + R_{rtkj} + R_{irkj} = 0$$

temos o seguinte

$$0 = 2R_{rikj} + \langle R(e_k, e_i)\overline{\nabla} f, e_j\rangle$$

como $\overline{\nabla} f(q) = 0$ obtemos $R_{rikj}(q) = 0$. Para $p \in M$ onde $p \neq q$, exite uma (unica) geodésica $\lambda(s)$, $0 \leqslant s \leqslant d(p, q)$ ligando p a q.
Em coordenadas normais ($g_{ij} = \delta_{ij}$ e, $\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} = 0$ em cada ponto de λ). A equação $0 = 2R_{rikj} + \langle R(e_k, e_i)\overline{\nabla} f, e_j\rangle$ podemos escrever da forma $h(s) = (R_{rikj} \circ \lambda)(s)$ e satisfaz a seguinte equação diferencial ordinaria.

$$0 = 2h(s) + sh'(s) \ ; \ 0 \leqslant s \leqslant d(p, q)$$

cuja solução é Cs^{-2} onde $C \in \mathbb{R}$(constante), em particular para $s = 0$ temos $h \equiv 0$ assim $R_{rikj} = 0$ em todo ponto de M, logo M é flat. □

Com isso temos a demonstração do Teorema 8 concluida.

Teorema 9. *Seja* $(\Omega^{n+1}, <, >)$ *uma variedade Riemanniana compacta, conexa com bordo* $\partial\Omega = M$ *e curvatura de Ricci não-negativa. Seja* H *a curvatura média de* M*. Se* H *é positiva para todo ponto, então*

$$\int_M \frac{1}{H} dA \geqslant (n+1)V, \tag{2.1}$$

onde V *é o volume de* Ω*.E a igualdade ocorre se, e somente se,* Ω *é isométrico a uma bola Euclidiana.*

Demonstração. Seja $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ solução do problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} \overline{\Delta} f = 1 & \text{em } \Omega, \\ f|_{\partial\Omega} = z = 0 & \text{em } \partial\Omega = M. \end{cases}$$

Pelo Teorema da divergência e fazendo $u =< \overline{\nabla} f, \eta >$, onde η é um vertor normal unitário em M, obtemos

$$V = \int_\Omega 1 dV = \int_\Omega \overline{\Delta} f dV = -\int_M < \overline{\nabla} f, \eta > dA = -\int_M u dA,$$

isto é,

$$V = -\int_M u dA. \tag{2.2}$$

Aplicando o teorema (6) obtemos

$$(\overline{\Delta} f)^2 \leqslant (n+1)|\mathrm{Hess} f|^2. \tag{2.3}$$

Além disso, pela formula de Reilly deduzimos

$$\int_\Omega [(\overline{\Delta} f)^2 - |\mathrm{Hess} f|^2 - \mathrm{Ric}(\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f)] dV = \int_M [-2(\Delta z) u + nHu^2 + \alpha_M(\nabla z, \nabla z)] dA. \tag{2.4}$$

Portanto, como por hipotese temos $\nabla z = 0$ e $\alpha_M(\nabla z, \nabla z) = 0$, substituindo em (2.4) obtemos

$$\int_\Omega [(\overline{\Delta} f)^2 - |\mathrm{Hess} f|^2 - \mathrm{Ric}(\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f)] = \int_M nHu^2 dA.$$

pela equação (2.3) concluimos que

$$\int_\Omega [(\overline{\Delta} f)^2 - \frac{(\overline{\Delta} f)^2}{n+1} - \mathrm{Ric}(\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f)] dV \geqslant \int_M nHu^2 dA$$

$$\int_\Omega [\frac{n}{n+1}(\overline{\Delta} f)^2 - \mathrm{Ric}(\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f)] dV - \int_M nHu^2 dA \geqslant 0$$

$$\int_\Omega \frac{n}{n+1}(\overline{\Delta} f)^2 dV - \int_M nHu^2 dA \geqslant \int_\Omega \mathrm{Ric}(\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f) dV.$$

Usando que o $\mathrm{Ric}(X, Y) \geqslant 0$ para quaisquer X, Y tangente a Ω,

$$\int_\Omega \frac{n}{n+1}(\overline{\Delta} f)^2 dV - \int_M nHu^2 dA \geqslant 0,$$

ou equivalentemente,

$$\int_\Omega \frac{n}{n+1}(\overline{\Delta} f)^2 dV \geqslant \int_M nHu^2 dA.$$

Como f é solução do problema de Dirichlet, temos $\overline{\Delta} f = 1$, e portanto

$$\frac{V}{n+1} \geqslant \int_M Hu^2 dA. \tag{2.5}$$

Por (2.2), pelo fato de $H > 0$ para todo ponto e usando Cauchy-Schwarz, deduzimos que

$$\begin{aligned} V^2 &= \left(\int_M u dA\right)^2 = \left(\int_M (uH^{1/2})H^{-1/2}\right)^2 \\ &\leqslant \int_M u^2 H dA. \int_M \frac{1}{H} dA \\ &\leqslant \frac{V}{n+1} \int_M \frac{1}{H} dA. \end{aligned}$$

Assim obtemos a primeira parte do teorema, isto é,

$$(n+1)V \leqslant \int_M \frac{1}{H} dA.$$

Suponhamos agora que vale a igualdade, assim teremos

$$\begin{cases} \text{Hess} f = \frac{1}{n+1} g, \\ z = f|_{\partial M} = 0. \end{cases}$$

Daí pelo Teorema 8 e pelo Lema 1 segue que Ω é isométrico a uma bola Euclidiana. Isto finaliza a demonstração. $\square$

Capítulo 3

Estimativas do Primeiro Autovalor do Problema de Steklov

Nesta seção demonstraremos os resultados principais baseado no artigo do Qiaoling Wang e Changyu Xia, publicado no Journal of Functional Analysis no ano de 2009.

Teorema 10. *Seja* $(M^n, <,>)$*,* $n \geqslant 2$*, uma variedade Riemanniana compacta conexa com curvatura de Ricci nao-negativa e* $\partial M \neq \varnothing$ *e seja* η *um vetor normal unitário apontando para fora de* ∂M*. Assumindo que as curvaturas principais de* ∂M *são limitadas por uma constante positiva* c*. Denote por* λ_1 *o primeiro autovalor do Laplaciano agindo sobre funções em* ∂M*. Então o primeiro autovalor não nulo* p_1 *do problema de Steklov*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & em\ M, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} - pu = 0 & em\ \partial M, \end{cases} \tag{3.1}$$

satisfaz

$$p_1 \leqslant \frac{\sqrt{\lambda_1}}{(n-1)c}\left(\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_1 - (n-1)c^2}\right).$$

E a igualdade ocorre se, e somente, se M *é isométrica a uma bola Euclidiana de raio.*

Demonstração. Seja $f \in C^\infty(\overline{M})$ solução do problema:

$$\begin{cases} \Delta f = 0 & \text{em } M, \\ f|_{\partial M} = z & \text{em } \partial M, \end{cases}$$

onde z é a primeira autofunção de ∂M correspondente a λ_1, ou seja, $\Delta z + \lambda_1 z = 0$. Pondo

$h = \dfrac{\partial f}{\partial \eta}|_{\partial M}$ e $\mathrm{grad} f = \overline{\nabla} f$, e segue do quociente de Rayleigh que

$$\begin{cases} p_1 \leqslant \dfrac{\displaystyle\int_M |\overline{\nabla} f|^2}{\displaystyle\int_{\partial M} z^2}, \\ \\ p_1 \leqslant \dfrac{\displaystyle\int_{\partial M} h^2}{\displaystyle\int_M |\overline{\nabla} f|^2}. \end{cases} \tag{3.2}$$

a primeira desigualdade de (3.2) segue diretamente do Teorema 5, vejamos a segunda desigualdade de (3.2)

$$\begin{aligned} p_1 &\leqslant \frac{\displaystyle\int_M |\overline{\nabla} f|^2}{\displaystyle\int_{\partial M} z^2} \\ &= \frac{-\displaystyle\int_M f\Delta f + \int_{\partial M} f\frac{\partial f}{\partial \eta}}{\displaystyle\int_{\partial M} z^2} \\ &= \frac{\displaystyle\int_{\partial M} f\frac{\partial f}{\partial \eta}}{\displaystyle\int_{\partial M} z^2} \\ &= \frac{\displaystyle\int_{\partial M} f\frac{\partial f}{\partial \eta}}{\displaystyle\int_{\partial M} z^2}\cdot\frac{\displaystyle\int_M |\overline{\nabla} f|^2}{\displaystyle\int_M |\overline{\nabla} f|^2} \\ &= \frac{\left(\displaystyle\int_{\partial M} f\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2}{\displaystyle\int_M |\overline{\nabla} f|^2}\cdot\frac{1}{\displaystyle\int_{\partial M} z^2} \\ &\leqslant \frac{\left(\displaystyle\int_{\partial M} f^2\right)\left(\displaystyle\int_{\partial M} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2\right)}{\left(\displaystyle\int_M z^2\right)\left(\displaystyle\int_M |\overline{\nabla} f|^2\right)} \\ &= \frac{\displaystyle\int_{\partial M} h^2}{\displaystyle\int_M |\overline{\nabla} f|^2} \end{aligned}$$

o que implica

$$p_1^2 \leqslant \frac{\displaystyle\int_{\partial M} h^2}{\displaystyle\int_{\partial M} z^2} \tag{3.3}$$

Além disso, como por hipótese as curvaturas principais de ∂M são limitadas inferiormente por c temos que

$$\alpha_{\partial M}(\overline{\nabla} z, \overline{\nabla} z) \geqslant c|\overline{\nabla} z|^2 \text{ onde } H \geqslant c.$$

Aplicando a fórmula de Reilly para f e a não negatividade da curvatura de Ricci, temos que

$$\int_M [(\Delta f)^2 - |\mathrm{Hess} f|^2 - \mathrm{Ric}(\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f)] = \int_{\partial M} [(n-1)Hh + 2\Delta z]h + \alpha_{\partial M}(\overline{\nabla} z, \overline{\nabla} z)$$

e assim conseguimos mostrar que

$$\begin{aligned} 0 &\geqslant \int_M (\Delta f)^2 - |\mathrm{Hess} f|^2 - \mathrm{Ric}(\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f) \\ &= \int_M [(n-1)Hh + 2\Delta z]h + \alpha_{\partial_M}(\overline{\nabla} z, \overline{\nabla} z). \end{aligned}$$

Como $|\mathrm{Hess} f|^2 \leqslant \frac{1}{n}(\Delta f)^2$, $H \geqslant c$ e $\Delta z = -\lambda_1 z$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\geqslant \int_M (\Delta f)^2 - |\mathrm{Hess} f|^2 - \mathrm{Ric}(\overline{\nabla} f, \overline{\nabla} f) \\ &\geqslant (n-1)\int_{\partial_M} ch^2 - \int_{\partial_M} \left(2\lambda_1 zh - c|\overline{\nabla} z|^2\right) \end{aligned}$$

$$\geqslant (n-1)c\int_M h^2 - 2\lambda_1 \int_{\partial M} zh + c\int_{\partial_M} \lambda_1 z^2, \tag{3.4}$$

onde usamos o fato que $\int_{\partial M} |\overline{\nabla} z|^2 = \int_{\partial M} \lambda_1 z^2$. Da desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$\int_{\partial_{M]}} zh \leqslant \left(\int_{\partial_M} z^2\right)^{1/2} \left(\int_{\partial_M} h^2\right)^{1/2}, \tag{3.5}$$

substituindo (3.5) em (3.4) obteremos

$$0 \geqslant \overbrace{(n-1)c}^{a} \underbrace{\int_{\partial M} h^2}_{y^2} - \overbrace{2\lambda_1 \left(\int_{\partial_M} z^2\right)^{1/2}}^{b} \underbrace{\left(\int_{\partial_M} h^2\right)^{1/2}}_{y} + \overbrace{c\lambda_1 \int_{\partial_M} z^2}^{c} \tag{3.6}$$

que define uma equação de segundo grau em $y = \left(\int_{\partial M} h^2\right)^{1/2}$.

Segue de (3.6) que $y \leqslant \dfrac{b^2 + \sqrt{\Delta}}{2a}$. Por outro lado

$$\begin{aligned}\Delta &= \int_{\partial M} 4z^2\lambda_1^2 - 4c\lambda_1 \int_{\partial M} z^2(n-1)c \\ &= 4\lambda_1 \int_{\partial M} z^2\Big(\lambda_1 - (n-1)c^2\Big) \\ \sqrt{\Delta} &= 2\sqrt{\lambda_1}\Big(\int_{\partial M} z^2\Big)^{1/2}\sqrt{\lambda_1 - (n-1)c^2},\end{aligned}$$

daí

$$y \leqslant \frac{2\lambda_1\Big(\int_{\partial M} z^2\Big)^{1/2} + 2\sqrt{\lambda_1}\Big(\int_{\partial M} z^2\Big)^{1/2}\sqrt{\lambda_1 - (n-1)c^2}}{2(n-1)c}$$

isto é,

$$y \leqslant \frac{\sqrt{\lambda_1}}{(n-1)c}\Big(\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_1 - (n-1)c^2}\Big)\Big(\int_{\partial M} z^2\Big)^{1/2}.$$

Substituindo o valor de y temos o seguinte

$$\Big(\int_{\partial M} h^2\Big)^{1/2} \leqslant \frac{\sqrt{\lambda_1}}{(n-1)c}\Big(\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_1 - (n-1)c^2}\Big)\Big(\int_{\partial M} z^2\Big)^{1/2} \tag{3.7}$$

ou equivalentemente,

$$\frac{\Big(\int_{\partial M} h^2\Big)^{1/2}}{\Big(\int_{\partial M} z^2\Big)^{1/2}} \leqslant \frac{\sqrt{\lambda_1}}{(n-1)c}\Big(\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_1 - (n-1)c^2}\Big).$$

Pela equação (3.3) obtemos

$$p_1 \leqslant \frac{\sqrt{\lambda_1}}{(n-1)c}\left(\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_1 - (n-1)c^2}\right).$$

e concluimos a primeira parte do teorema. Assumindo que vale a igualdade

$$p_1 = \frac{\sqrt{\lambda_1}}{(n-1)c}\Big(\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_1 - (n-1)c^2}\Big),$$

teremos por (3.7) que

$$\Big(\int_{\partial M} h^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\lambda_1}}{(n-1)c}\Big(\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_1 - (n-1)c^2}\Big)\Big(\int_{\partial M} z^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Assim ocorre a igualdade em (3.6)

$$0 = (n-1)c\int_{\partial M} h^2 - 2\lambda_1\Big(\int_{\partial M} h^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{\partial M} z^2\Big)^{\frac{1}{2}} + c\lambda_1\int_{\partial M} z^2,$$

daí

$$\begin{cases} \mathrm{Hess} f = 0 \\ (H-c)h = 0 \\ h = \dfrac{\sqrt{\lambda_1}}{(n-1)c}\Big(\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_1 - (n-1)c^2}\Big)z \end{cases}$$

Seja $\{e_i\}$ uma base ortonormal tangente a ∂M

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{Hess} f(e_i, e_i) \\ &= \Delta z + (n-1)Hh \\ &= -\lambda_1 z + (n-1)c\frac{\sqrt{\lambda_1}}{(n-1)c}\Big(\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_1 - (n-1)c^2}\Big)z, \end{aligned}$$

o que implica $\lambda_1 = (n-1)c^2$. Pelo Teorema 9 concluimos que M é isométrico a uma bola euclidiana. $\square$

Teorema 11. *Seja* $(M^n, <,>)$ *com* $n \geqslant 2$, *uma variedade Riemanniana compacta e conexa com bordo não vazio, e Curvatura de Ricci não-negativa* ($\mathrm{Ric} \geqslant 0$). *Denotando* ν *o campo normal unitário de* ∂M *apontando para fora, e assumindo que a curvatura média de* M *é limitada inferiormente por* c, *isto é,* $H \geqslant c$. *Seja*q_1 *o primeiro autovalor associado ao problema de Steklov:*

$$\begin{cases} \Delta^2 u = 0 & \text{em } M, \\ u = \Delta u - q\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{em } \partial M. \end{cases} \tag{3.8}$$

Então $q_1 \geqslant nc$ *com a igualdade ocorrendo se, e somente se,* M *é isométrica a uma bola Euclidiana.*

Demonstração. Seja ω uma autofunção associada ao primeiro autovalor q_1 de (3.8), ou seja

$$\begin{cases} \Delta^2 \omega = 0 & \text{em } M, \\ \omega = \Delta \omega - q_1\dfrac{\partial \omega}{\partial \nu} = 0 & \text{em } \partial M. \end{cases}$$

Seja $\eta = \dfrac{\partial \omega}{\partial \nu}\Big|_{\partial M}$, assim pelo quociente de Rayleigh-Ritz

$$q_1 = \frac{\displaystyle\int_M (\Delta\omega)^2}{\displaystyle\int_{\partial M} \eta^2} \tag{3.9}$$

Substituindo na formula de Reilly obtemos

$$\begin{aligned} \int_M \{(\Delta\omega)^2 - |\mathrm{Hess}\omega|^2\} &= \int_M \mathrm{Ric}(\nabla\omega, \nabla\omega) + \int_{\partial M} (n-1)H\eta^2 \\ &\geqslant 0 + \int_{\partial M} (n-1)c\eta^2 \\ &= (n-1)c\int_M \eta^2. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Pelo Teorema 6 decorre

$$|\mathrm{Hess}\omega|^2 \geqslant \frac{1}{n}(\Delta\omega)^2 \tag{3.11}$$

e ocorre a igualdade se, e somente se,

$$\mathrm{Hess}\omega = \frac{1}{n} <,> .$$

Substituindo (3.11) em (3.10), obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_M (\Delta\omega)^2 - \frac{1}{n}(\Delta\omega)^2 &\geqslant (n-1)c\int_{\partial M}\eta^2\\
\frac{(n-1)}{n}\int_M (\Delta\omega)^2 &\geqslant (n-1)c\int_{\partial M}\eta^2\\
\frac{\displaystyle\int (\Delta\omega)^2}{\displaystyle\int_{\partial M}\eta^2} &\geqslant nc.
\end{aligned}
$$

Portanto, de (3.9) teremos

$$q_1 \geqslant nc.$$

Provando assim a primeira parte do que desejavamos. Agora assumindo que $q_1 = nc$, todas as desigualdades acima serão igualdade, daí

$$
\begin{aligned}
\int_M \{(\Delta\omega)^2 - |\mathrm{Hess}\omega|^2\} &= (n-1)c\int_{\partial M}\eta^2 &\quad (3.12)\\
|\mathrm{Hess}\omega|^2 &= \frac{1}{n}(\Delta\omega)^2 &\quad (3.13)
\end{aligned}
$$

Em particular, temos

$$\mathrm{Hess}\omega = \frac{\Delta\omega}{n} <,> .$$

Seja agora um referêncial ortonormal $\{e_1, \cdots, e_{n-1}, e_n\}$ em M, onde restrito a ∂M $e_n = \nu$. Uma vez que $0 = \mathrm{Hess}\omega(e_i, e_i)$ para $i = 1, \cdots, n-1$, e $\omega|_{\partial M} = 0$, concluimos que $\eta = \rho = \mathsf{constante}$ consequentemente $\Delta\omega|_{\partial M} = q_1\eta = nc\rho$ é constante. Por (3.12) obtemos a igualdade e η é constante, logo $H \equiv c$. Concluímos também que $\Delta\omega$ é uma função harmônica em M e pelo princípio do máximo $\Delta\omega$ é constante em M, sem perda de generalidade podemos considerar $\Delta\omega = 1$ e obtemos

$$\mathrm{Hess}\omega = \frac{1}{n} <,>$$

Pelo Teorema 8 e pelo Lema 1 obtemos que M é isométrica a uma bola Euclidiana.

$\square$

Teorema 12. *Seja* $(M^n, <,>)$, $n \geqslant 2$, *uma variedade Riemanniana compacta e conexa com bordo não vazio e seja* ν *um campo normal unitário apontando para fora de* ∂M. *Denotando por* A, V, H *área de* ∂M, *volume de* M *e a curvatura média de* ∂M, *respectivamente. O primeiro autovalor* q_1 *associado ao problema de Steklof:*

$$\begin{cases} \Delta^2 u = 0 & \textit{em } M \\ u = \Delta u - q\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \textit{em } \partial M \end{cases}$$

satisfaz $q_1 \leqslant \dfrac{A}{V}$.

Além disso, se a curvatura de Ricci de M *é não-negativa e existe* $x_0 \in \partial M$ *tal que* $H(x_0) \geqslant \dfrac{A}{nV}$, *então* $q_1 = \dfrac{A}{V}$ *implica que* M *é isométrica a uma bola Euclidiana.*

Demonstração. Seja f uma solução do problema de Laplace:

$$\begin{cases} \Delta f = 1 & \text{em } M, \\ f|_{\partial M} = 0. \end{cases}$$

Pelo quociente de Rayleigh temos que

$$q_1 \leqslant \frac{\int_M (\Delta f)^2}{\int_{\partial M} g^2} = \frac{V}{\int_{\partial M} g^2},$$

onde $g = \dfrac{\partial f}{\partial \nu}\Big|_{\partial M}$. Pelo Teorema de divergência

$$\begin{aligned} V = \int_M 1 dV &= \int_M \Delta f dV \\ &= -\int_{\partial M} < \nabla f, \nu > dA \\ &= -\int_{\partial M} g dA. \end{aligned}$$

utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz para V^2 obtemos

$$\begin{aligned} V^2 &= \left(-\int_{\partial M} 1 g dA\right)^2 \\ V^2 &\leqslant \int_{\partial M} 1^2 dA \int_{\partial M} g^2 dA \\ V^2 &\leqslant A \int_{\partial M} g^2 dA, \end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{V}{\int_{\partial M} g^2 dA} \leqslant \frac{A}{V}.$$

Assim concluímos o desejado pois,

$$q_1 \leqslant \frac{V}{\int_{\partial M} g^2 dA} \leqslant \frac{A}{V}.$$

Assumindo agora que $Ric \geqslant 0$, $H(x_0) \geqslant \dfrac{A}{nV}$, para algum $x_0 \in \partial M$ e $q_1 = \dfrac{A}{V}$, neste caso toda as desigualdades acima serão igualdades, daí $g = \frac{\partial f}{\partial \nu} = \frac{V}{A}$ é constante. Considerando a seguinte função definida sobre M

$$\phi = \frac{1}{2}|\nabla f|^2 - \frac{f}{n}.$$

Usando a fórmula de Bochner, $\Delta f = 1$, teremos

$$\begin{aligned}
\Delta\phi &= \frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 - \frac{\Delta f}{n} \\
&= Ric(\nabla f, \nabla f) + < \nabla f, \nabla(\Delta f) > + |Hessf|^2 - \frac{\Delta f}{n} \\
&\geqslant |Hessf|^2 - \frac{1}{n} \\
&\geqslant \frac{1}{n}(\Delta f)^2 - \frac{1}{n} \\
&\geqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \\
&\geqslant 0.
\end{aligned}$$

Assim, ϕ é uma função subharmônica. Note que $\phi = \frac{1}{2}\left(\frac{V}{A}\right)^2$ sobre ∂M pelo princípio do máximo obtemos

$$\phi = \frac{1}{2}\left(\frac{V}{A}\right)^2 \text{ em } M,$$

ou

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu}(y) > 0 \text{ para todo } y \in \partial M.$$

Como $f|_{\partial M} = 0$, temos que

$$1 = \Delta f|_{\partial M} = (n-1)Hg + Hessf(\nu, \nu).$$

Portanto, sobre ∂M teremos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial \nu} &= gHessf(\nu,\nu) - \frac{g}{n} \\
&= g(1-(n-1)Hg) = \frac{g}{n} \\
&= \frac{V}{A}\left(1-(n-1)G\frac{V}{A}\right) - \frac{V}{nA} \\
&= \frac{V}{A}\left(1-(n-1)H\frac{V}{A} - \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{V}{A}\left(\frac{(n-1)}{n} - (n-1)H\frac{V}{A}\right)
\end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} = (n-1)\frac{V}{A}\Big(\frac{1}{n} - \frac{HV}{A}\Big).$$

Como $H(x_0) \geqslant \dfrac{A}{nV}$ para algum $x_0 \in \partial M$, então $\dfrac{\partial \phi}{\partial \nu}(x_0) \leqslant 0$. Portanto $\phi = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{V}{A}\Big)^2$ é constante sobre M, implicando $\Delta\phi = 0$. Assim como $\Delta\phi \geqslant |\mathrm{Hess} f| - \frac{1}{n}$ e do fato que $\Delta f = 1$, que

$$\mathrm{Hess} f = \frac{1}{n} <,> .$$

Portanto, pelo Teorema 8 e o Lema 1, concluímos que M é isométrico a uma bola Euclidiana e finalizamos a prova do teorema.

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] do Carmo, M. P. - *Geometria Riemanniana.* Projeto Euclides - IMPA, 2005.

[2] Escobar, J.F. - *A comparison theorem for the first non-zero Steklov eigervalue.* J. Funct. Anal. 178, 2000.

[3] Escobar, J.F. - *An isoperimetric inequality and the first Steklov eigenvalue.* J. Funct. Anal. 165, 1999.

[4] Escobar, J.F. - *The geometry os the first Steklov eigenvalue.* J. Funct. Anal. 150, 1997.

[5] Escobar, J.F. - *Topics en PDE's and Differential Geometry, XII.* Escola de Geometria Diferencial, 2002.

[6] Chavel, I. - *Eigenvalues in Riemannian Geometry.* Academic Press. Inc, 1984.

[7] Reilly, R.C. - *Geometric Applications of the Solvability of Neumann Problems on a Riemanninan Manifold.* Arc. Rational Mech. Anal. 75, 1980.

[8] Ros, A. - *Compact Hypersurfaces with Constant Highe Order Mean Curvatures.* Revista Matemática Iberoamericana, 1987.

[9] Spivak, M. - *Calculus on Manifolds.* The Advanced Book Program, 1995.

[10] Wang, Q.; Xia, C. - *Sharp bounds for the first non-zero Stekloff eigenvalues.* Journal Of Functional Analysis, 2009.