Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Quando a equivalência de contato implica na $\mathcal{R}$-equivalência

Edvalter da Silva Sena Filho

Teresina - 2012

Edvalter da Silva Sena Filho

Dissertação de Mestrado:

Quando a equivalência de contato implica na $\mathcal{R}$-equivalência

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Carlos Humberto Soares Júnior

Teresina - 2012

Sena Filho, Edvalter da Silva.
Quando a equivalência de contato implica na $\mathcal{R}$-equivalência.

Edvalter da Silva Sena Filho – Teresina: 2012.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Humberto Soares Júnior.

1. Teoria de Singularidades

CDD 516.36

Dedico este trabalho aos meus pais, Edvalter Sena e Antonia Maria, fonte inesgotável de incentivo e confiança.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus, pois foi ele que me deu forças para continua nesta árdua caminhada. Sem ele, nada disso seria possivel. Jamais chegaria tão longe sem a Sua presença constante em minha vida.

Aos meus pais, Edvalter Sena e Antonia Maria, pessoas as quais nunca duvidaram do meu potencial e sempre, sempre, ... , sempre me deram total apoio e incentivo. Sabedoria e honestidade, duas plavaras que podem descrever Edvalter Sena. Cumplicidade e segurança descrevem Antonia Maria. Seres humanos dos quais tenho um orgulho imenso de poder chama-los de pai e mãe

Ao meu orientador Prof. Dr. Carlos Humberto Soares Junior, por sua generosa paciência no decorrer da dissertação. Por seu incentivo e disponibilidade, de fundamental importância para a realização deste trabalho. Obrigado mesmo!rs

Agradeço também á minha família: Minha irmã Carla, que pelo seu exemplo de vida, me ensinou a arte de: Focalizar, Acreditar e Caminhar. Meu irmão Anderson, por me mostrar o quanto podemos ser fortes. Minha irmã Cintia, minha conselheira, solução de problemas. Meu irmão Douglas, por seu sensor de humor torna tudo mais leve. Minha irmã Jaqueline, minha cúmplice, minha parceira.

Á minha namorada, Raquel. Obrigado pela força e pela atenção. Você tornou a caminhada bem mais agrádavel, bem mais prazerosa.

Á professora Liane Mendes (UFPI) e ao professor Alexandre César (UFC), por terem aceito o convite de participar da banca que avaliará este trabalho.

Aos meus amigos José Newton, Erineuda Sena, Davi Oliveira, Renato Felipe, Adriel Rosa, Carlos Junior e aos demais colegas da rua, que sempre acreditaram em mim e estiveram presente em cada etapa conquistada. Ao Gabriel Domingues, amigo de longa data, um irmão.

Aos meus amigos Ramon Soares, Kelson Vieira, Jeferson, Felipe, Samara, Renata, Franciane, Alex, Isarel, Kim Carlos e em especial a Ailton Campos, Ricardo barros e Valdir Ferreira (que me deram total suporte para o ingresso e permanência no corpo do mestrado). Obrigado a todos vocês.

Agradeço também ao CNPQ, pelo apoio financeiro e incentivo á ciência.

Resumo

Neste trabalho mostraremos noções preliminares de Anéis, Módulos e uma introdução a teoria de singularidade. O nosso objetivo é mostrar condições suficientes para que a equivalência de contato implique na equivalência á direita. Bem como, ilustrar exemplos onde essa implicacão não ocorre.

Abstract

In this work we show preliminary concepts of the Rings, Modules and an introduction about the will singularity theory . The goal is to show sufficient conditions for equivalence implies the equivalence of contact on the right. As well to ilustre the conditions under which it does not occur.

Sumário

Introdução

Seja X um espaço topológico e $x \in X$ um ponto. O conjunto $P(X)$ é formado por todos os subconjuntos de X e defina uma relação de equivalência $A \underset{X}{\sim} B \Leftrightarrow A \cap U = B \cap U$ para alguma vizinhança U de $x \in X$. A classe de equivalência da relação $\underset{X}{\sim}$ é chamada de germe do subconjunto X no ponto x.

Seja Y um conjunto e considere agora o conjunto formado pelos pares $M = \{(U, f)\}$, onde U é uma vizinhança de x em X e f é uma função $f : U \to Y$. Introduziremos a relação de equivalência em $M : (U_1, f_1) \underset{X}{\approx} (U_2, f_2)$ se, e somente se, $f_{1|U_0} = f_{2|U_0}$ para alguma vizinhança U_0 de x com $U_0 \subset U_1 \cap U_2$. A classe de equivalência da relação $\underset{X}{\approx}$ é chamada de germe da aplicação f de X em Y no ponto x. Usualmente iremos denotar a classe de equivalência de (U, f) simplesmente por f. A mais apurada notação é f_x ou (f, x) e estas serão usadas quando necessário.

Quando $X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}^p$ irmeos considerar apenas as aplicações suaves (C^∞), $f : U \to Y$, onde U é uma vizinhança no ponto $x \in X$. O conjunto formado por todos esses germes será denotado por ${}_x\mathcal{E}_{n,p}$. Quando $x = 0$, escrevemos $\mathcal{E}_{n,p}$ para tal conjunto. Além disso, quando $p = 1$, isto é, quando estivermos trabalhando com funções, nós usaremos a notação ${}_x\mathcal{E}_n$. Veremos também que $\mathcal{E}_n$ é um anel local cujo o único ideal maximal é $\mathfrak{m}_n = \{f \in \mathcal{E}_n \ / \ f(0) = 0\}$.

A k-ésima potência do ideal $\mathfrak{m}_n$ é gerada por todos os monômios de grau k, isto é, por $x^a = x_1^{a_1}...x_n^{a_n}$ com $a_1 + a_2 + ... + a_n = k$. Além disso, $\mathfrak{m}_n^k = \{f \in \mathcal{E}_n \ ; \ \frac{\partial^{|a|} f}{\partial x^a}(0) = 0, \forall \ a, \text{ com } 0 \leq |a| < k\}$.

Um ideal $I \subset \mathcal{E}_n$ tem codimensão finita (isto é, $dim(\mathcal{E}_n/I) < \infty$) se, e somente se, $I \supset \mathfrak{m}_n^k$ para um inteiro k. Denotaremos por $J^k(n,p)$ o espaço vetorial $\frac{\mathcal{E}^0_{n,p}}{\mathfrak{m}^k_m \mathcal{E}_{n,p}}$ o qual é identificado como o $\mathbb{K}$-espaço vetorial das aplicações polinomial de $\mathbb{K}^n, 0 \to \mathbb{K}^p, 0$ cujas componentes têm grau no máximo $k - 1$. Seja $j^k : \mathcal{E}^0_{n,p} \to J^k(n,p)$ a projeção canônica, isto é, dado $f \in \mathcal{E}^0_{n,p}$, $j^k f$ é o polinômio de Taylor de f de grau k na origem ($j^k f$ é chamado de o k-jato de f na origem).

Sejam G um grupo e C um conjunto qualquer. Uma ação do grupo G no conjunto C é uma aplicação $\varphi : G \times C \to C$ com $\varphi(g, c) = g.c$ tal que : $\varphi(e, c) = e.c = c, \forall\ c \in C$ e $\varphi(g_1, \varphi(g_2, c)) = \varphi(g_1.g_2, c)$, isto é, $g_1.(g_2 \cdot c) = (g_1.g_2) \cdot c$, $\forall\ c \in C$ e $\forall\ g_1, g_2 \in G$. Chamaremos de Órbita de um elemento $c \in C$ como sendo o conjunto $G.c$ de todos os elementos de C que estão relacionados com c. Isto é, $G.c = \{a \in C\ /\ \exists\ g \in G$ com $\varphi(g, c) = a\} = \{a \in C\ /\ a \sim c\} = \{\varphi(g, c)\ /\ g \in G\}$.

Denotaremos por R_n o conjunto de todos os germes de aplicações $h : \mathbb{K}^n, 0 \to \mathbb{K}^n, 0$ tal que h é um difeomorfismo quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e h é um isomorfismo analítico quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Isto é : $R_n := \{h : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^n, 0\ /\ h$ é difeomorfismo $\}$ e $R_n := \{h : \mathbb{C}^n, 0 \to \mathbb{C}^n, 0\ /\ h$ é isomorfismo analítico $\}$

A $\mathcal{R}$-equivalência ou Equivalência a direita está relacionada à ação do grupo $\mathcal{R} = R_n$, dada por: $r : R_n \times \mathcal{E}^0_{n,p} \to \mathcal{E}^0_{n,p}$ onde $r(h, f) \mapsto f \circ h^{-1}$. Dois germes $f, g \in \mathcal{E}^0_{n,p}$ estão relacionados se, e somente se, $\exists\ h \in R_n$ tal que $f \circ h^{-1} = g$. A $\mathcal{R}$-órbita de f é denotado por $\mathcal{R}f := \{g \in \mathcal{E}^0_{n,p}\ /\ g \underset{\mathcal{R}}{\sim} f\}$

O grupo $\mathcal{K}$ é formado pelos germes $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0 \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0$ tais que $\pi_1 \circ H = h \in \mathcal{R}$ e $\pi_2 \circ H(x, 0) = 0, \forall\ x$. Onde $\pi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0 \to \mathbb{R}^n, 0$ leva $(x, y) \to x$ e $\pi_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0 \to \mathbb{R}^p, 0$ leva $(x, y) \to y$. Portanto,
$\mathcal{K} = \{H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0 \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0\ /\ H(x, y) = (h(x), \varphi(x, y))$ com $\varphi(x, 0) = 0, \forall\ x\}$. Dois germes $f, g \in \mathcal{E}_n$ são $\mathcal{K}$-equivalentes se, e somente se, existe $H \in \mathcal{K}$ tal que $H(x, f(x)) = (h(x), \varphi(x, f(x)) = (h(x), g(h(x)) \Rightarrow \varphi(x, f(x)) = g(h(x))$.

O k-jato $(j^k f)$ de um germe $f \in \mathcal{E}^0_{n,p}$ é chamado $\mathcal{R}$-suficiente se qualquer germe $g \in \mathcal{E}^0_{n,p}$ com $j^k g = j^k f$ é $\mathcal{R}$-equivalente ao germe f. Isto é, $\mathcal{R}f$ contém o conjunto $\{g \in \mathcal{E}^0_n\ /\ j^k g(0) = j^k f(0)\}$. Neste caso, dizemos também que f é k-$\mathcal{R}$-determinado. O germe f é chamado finitamente $\mathcal{R}$-determinado se existir um número inteiro positivo k tal que, f é k-$\mathcal{R}$-determinado.

Um polinômio $f(x) = \sum_{a \in I} \alpha_a x_1^{a_1} ... x_n^{a_n}$ em $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ é dito quase-homogêneo de grau d com relação ao peso $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ se $w.a := w_1 a_1 + ... + w_n a_n = d, \forall\ a = (a_1, ..., a_n) \in I \subset \mathbb{N}^n$.

O objetivo principal desse trabalho é dar condições para que a equivalência de contato implique na $\mathcal{R}$-equivalência. O Teorema Principal trabalha em cima de germes finitamentes determinados. Seja f finitamente determinado. Se f for $\mathcal{K}$-equivalente a um polinômio quase-homogêneo f_0 então, f é $\mathcal{R}$-equivalente a esse polinômio quase-homogêneo f_0.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Anéis, módulos e o lema de Nakayama

1.1.1 Anéis e Domínios

Definição 1.1.1 *Um anel comutativo com unidade $(A, +, \cdot)$ é um conjunto A com pelo menos dois elementos, munido de uma operação denotada por + (chamada adição) e de uma operação denotada por $\cdot$ (chamada multiplicação) que satisfazem as condições seguintes:*

1. A adição é associativa, isto é, para quaisquer $x, y, z \in A$,

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

2. Existe um elemento neutro com respeito à adição, isto é,

$$\exists\ 0 \in A \text{ tal que}, \forall\ x \in A, 0 + x = x \text{ e } x + 0 = x.$$

3. Todo elemento de A possui um inverso com respeito a adição, isto é,

$$\forall\ x \in A, \exists\ z \in A \text{ tal que } x + z = 0 \text{ e } z + x = 0.$$

4. A adição é comutativa, isto é,

$$\forall\ x, y \in A,\ x + y = y + x.$$

5. A multiplicação é associativa, isto é,

$$\forall\ x, y, z \in A, (x.y).z = x.(y.z).$$

6. Existe um elemento neutro com respeito à multiplicação, isto é,

$$\exists\ 1 \in A \text{ talque,} \forall\ x \in A, 1.x = x \text{ e } x.1 = x.$$

7. A multiplicação é comutativa, isto é,

$$\forall\ x, y \in A, x.y = y.x.$$

8. A adição é distributiva, relativamente à multiplicação, isto é,

$$\forall\ x, y, z \in A, x.(y + z) = x.y + x.z.$$

Se todas as condições são satisfeitas, com exceção de (7), então $(A, +, \cdot)$ é chamado de anel não-comutativo.

Definição 1.1.2 *Um Anel $(D, +, \cdot)$ é chamado domínio ou domínio de integridade se ele satifaz as seguinte condição:*

- O produto de quaisquer dois elementos não nulos de D é um elemento não nulo, isto é, $\forall x, y \in D \setminus \{0\}, x \cdot y \neq 0$.

Um anel $(K, +, \cdot)$ é um corpo se ele satifaz a seguinte condição:

- Todo elemento diferente de zero de K possui um inverso com respeito à multiplicação, isto é,
  $\forall\ x \in K \setminus \{0\}, \exists\ y \in K$ tal que $x \cdot y = 1$.

Exemplo 1.1.1

1. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *é um domínio.*

2. $(\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot)$ *são corpos.*

3. *Seja* $\mathbb{Z}[i] = \{a + b_i | a, b \in \mathbb{Z}\}$. *Então* $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ *é um domínio chamado de anel dos inteiros de Gauss.*

4. *Dados dois anéis* $(A_1, +, \cdot)$ *e* $(A_2, +, \cdot)$, *podemos construir um novo anel da maneira seguinte: no conjunto* $A_1 \times A_2 := \{(a_1, a_2); a_1 \in A, a_2 \in A_2\}$, *definimos as opoerações:*
   $(a_1, a_2) + (a_1^{'}, a_2^{'}) := (a_1 + a_1^{'}, a_2 + a_2^{'})$
   $(a_1, a_2).(a_1^{'}, a_2^{'}) := (a_1 \cdot a_1^{'}, a_2 \cdot a_2^{'})$.
   É rotina verificar que $(A_1 \times A_2, +, \cdot)$ *é anel, chamado produto direto de* A_1 *com* A_2, *onde o elemento neutro com respeito à adição é* $(0, 0)$ *e o elemento neutro com respeito à multiplicação é* $(1, 1)$

5. *Seja* $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *o conjunto das matrizes* $n \times n$ *com entradas em* $\mathbb{R}$; *sejam* $+$ *adição usual de matrizes e* $\cdot$ *a multiplicação usual das matrizes. Então,* $(M_{n\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *é um anel não-comutativo se* $n \geq 2$.

Definição 1.1.3 *Seja $(A, +, \cdot)$ um anel e I um subconjunto não vazio de A. Dizemos que I é um ideal de A se*

- $x + y \in I, \forall\, x, y \in I.$
- $ax \in I, \forall\, x \in I, \forall\, a \in A.$

Um ideal $\mathfrak{m} \neq A$ do anel A chama-se maximal se, para qualquer ideal I de A, a propriedade $\mathfrak{m} \subseteq I$ implica $I = \mathfrak{m}$ ou $I = A$.

Exemplo 1.1.2

1. *Seja $n \geq 0$ um inteiro. Então o subconjunto $nZ := \{zn \mid z \in Z\}$ é um ideal do anel dos inteiros.*

2. *Mais geralemente seja $(A, +, \cdot)$ um anel e sejam $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_t$ elementos de A. Então o subconjunto $A\alpha_1 + A\alpha_2 + ... + A\alpha_t := \{a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_t\alpha_t \mid a_1, a_2, ..., a_t \in A\}$ é um ideal de $(A, +, \cdot)$, que será denotado por $(\alpha_1, ..., \alpha_t)$.*

   O conceito de ideal permite fazer uma construção totalmente análoga à construção do anel $(Z/nZ, \oplus_n, \odot_n)$ dos inteiros módulo n.

3. *(Anel quociente módulo um ideal).*

   Sejam $(A, +, \cdot)$ um anel e I um ideal de A. Sobre A, definimos a relação de congruência $(mod\ I)$: para $a, b \in A$,

   $a \equiv b(mod\ I) \;\; \Leftrightarrow \;\; a - b \in I.$

   Verifica-se que esta é uma relação de equivalência. Se $a \in A$, então por definição, sua classe de equivalência módulo I consiste no subconjunto $\{b \in A; b \equiv a(mod\ I)\}$, isto é, no subconjunto $\{a + c; c \in I\}$; ela será denotada por $\bar{a}$ ou $a + I$. Denotaremos por A/I o conjunto das classes de equivalência módulo I. Sobre este conjunto A/I, definimos duas operações $\oplus_I$ e $\odot_I$ da maneira seguinte: para $\bar{x}, \bar{y} \in A/I$,

   $\bar{x} \oplus_I \bar{y} := \overline{x + y} \quad$ *e* $\quad \bar{x} \odot_I \bar{y} := \overline{x.y}.$

As operações $\oplus_I$ e $\odot_I$ estão bem definidas e $(A/I, \oplus_I, \odot_I)$ é um anel, chamado de anel quociente de A módulo I.

Seja $\sum$ um conjunto parcialmente ordenado pela relação de inclusão c. Uma cadeia em $\sum$ é um subconjunto C de $\sum$ tal que;
dados $a, b \in C$, tem-se que $a < b$ ou $a > b$.

Lema 1.1.3 (Lema de Zorn) *Seja $\sum$ um conjunto parcialmente ordenado tal que toda cadeia em $\sum$ possui uma cota superior. Então $\sum$ contém um elemento maximal.*

Prova: Seja $(\sum, <)$ um sistema parcialmente ordenado tal que toda cadeia possui cota superior. Mostraremos que $\sum$ tem elemento maximal. Para isso, definimos o seguinte conjunto $p(x) = \{y \in \sum : x < y\} \in P(\sum)$, onde $P(\sum)$ é o conjunto das partes de $\sum$. Seja $p(\sum) = \{p(x) : x \in \sum\}$. Se $p(x) \in p(\sum)$ é vazio para algum $x \in \sum$, ou seja, não existe $y \in \sum$ tal que $x < y$, então x é o elemento maximal para $\sum$ e, portanto, o teorema está provado. Agora, suponha que $p(x) \neq \emptyset$ para qualquer $x \in \sum$, isto é, para cada $x \in \sum$, existe $y \in \sum$ que é maior do que x, o que implica no conjunto $p(\sum)$ ser não vazio.

Então, pelo Axioma da Escolha, existe uma função de escolha f em $p(\sum)$, tal que para cada $p(x)$ temos $f(p(x)) \in p(x)$. Então, pela definição do conjunto $p(x)$ segue que $x < f(p(x))$. Pela indução transfinita, definimos $f_\alpha(p(x))$ para todo ordinal α, num conjunto de índices A, da seguinte maneira:

$$f_0(p(x)) = x$$

$$f_{\alpha+1}(p(x)) = f(p(f_\alpha(p(x)))).$$

Desta forma, sempre que $i < \alpha$, $f_\alpha(p(x))$ é um limitante superior de $f_i(p(x))$, pois: $f_{\alpha+1}(p(x)) = f(p(f_\alpha(p(x)))) \in p(f_\alpha(p(x))$, o que significa que $f_\alpha(p(x)) < f(p(f_\alpha(p(x))))$, pela definição do conjunto $p(x)$. Então, $f_{\alpha+1}(p(x)) > f_\alpha(p(x))$, para todo ordinal α.

Então, podemos facilmente construir uma função injetiva de A em $\sum$ dada por $g(\alpha) = f_\alpha(p(x))$ para qualquer $x \in \sum$ arbitrário. De fato, como a classe A dos ordinais é bem ordenada, podemos afirma que se $\alpha < \beta$, então $\alpha \neq \beta$. Agora, temos que $g(\alpha) = f_\alpha(p(x))$ que é menor que $g(\beta) = f_\beta(p(x))$ sempre que $\alpha < \beta$. Assim, para todo $\alpha \neq \beta$ teremos $g(\alpha) \neq g(\beta)$, o que define uma função injetiva.

Como g é injetiva e tem como domínio o conjunto A de ordinais (que é uma classe própria) então, a cardinalidade de $\sum$ é no mínimo igual à cardinalidade de A. Portanto, $\sum$ é também uma classe própria, o que contradiz o fato de $\sum$ ser um conjunto. Desta forma, não se pode ter tal função de escolha e, assim, o conjunto $\sum$ admite um elemento maximal. $\square$

Definição 1.1.4 *O radical de Jacobson de um anel A é definido como sendo a interseção de todos os ideais maximais de A, isto é,*

$$JacA := \bigcap_{\mathfrak{m} \subset A} \mathfrak{m}, \text{ onde } \mathfrak{m} \text{ é um ideal maximal.}$$

Teorema 1.1.4 *Seja A um anel comutativo com unidade 1. Então, se $x \in A$ não for invertível existirá um ideal maximal $\mathfrak{m}$ tal que $x \in \mathfrak{m}$.*

Demonstração: Seja $\sum$ o conjunto de todos os ideais própios de A, que contém x. Então $\sum$ com a inclusão c é parcialmente ordenado e $I = \bigcup I_\alpha$, onde $I_\alpha \subset \sum$, é uma cota superior de $\sum$. I é um ideal. Além disso, como $x \in I_\alpha, \forall\alpha \Rightarrow x \in I$.

Logo, pelo lema de Zorn, temos que $\sum$ tem um elemento maximal $\mathfrak{m}$. Este ideal $\mathfrak{m}$ é um ideal maximal e $x \in \mathfrak{m}$. Finalizando então nossa demonstração. $\square$

Exemplo 1.1.5 *: Mostre que $x \in JacA \Rightarrow 1 - xy$ é invertível em A, $\forall y \in A$. Em particular $1 - x$ é invertível.*

Demonstração: De fato, se $1 - xy$ não fosse invertível então existiria um ideal maximal $\mathfrak{m}$ tal que $1 - xy \in \mathfrak{m}$ (pelo Teorema anterior). Neste caso, como $x \in JacA \subset \mathfrak{m} \Rightarrow xy \in \mathfrak{m}, \forall\ y \in A$. Logo, teríamos $1 \in \mathfrak{m}$, e consequentemente que $\mathfrak{m} = A$, uma contradição. Assim, $1 - xy$ é invertível, $\forall\ y \in A$.

Em particular, $1 + x$ também é invertível. $\square$

1.1.2 Anéis de polinômios

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Um polinômio numa variável sobre A é uma sequência $(a_0, a_1, ..., a_n, ...)$, onde $a_i \in A$ para todo índice e onde $a_i \neq 0$ somente para um número finito de índices.

Seja $\mathbf{A}$ =$\{$ polinômios numa variável sobre A$\}$. No conjunto $\mathbf{A}$, definimos as operações seguintes:

$$\begin{array}{rccc} \oplus : & \mathbf{A} \times \mathbf{A} & \rightarrow & \mathbf{A} \\ & ((a_0, a_1, ...), (b_0, b_1, ...)) & \mapsto & (a_0 + b_0, a_1 + b_1, ...) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \odot : & \mathbf{A} \times \mathbf{A} & \rightarrow & \mathbf{A} \\ & ((a_0, a_1, ...), (b_0, b_1, ...)) & \mapsto & (c_0, c_1, ...) \end{array}$$

onde

$$\begin{cases} c_0 = a_0b_0 \\ c_1 = a_1b_0 + a_0b_1 \\ c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 \quad a_2b_0 \\ \quad\vdots \\ c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \cdots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0 \\ \quad\vdots \end{cases}$$

Observe que $(\mathbf{A}, \oplus, \odot)$ sera um anel onde:

- o elemento neutro de $\oplus$ é o elemento $(0, 0, 0, ...)$
- o elemento neutro de $\odot$ é o elemento $(1, 0, 0, ...)$
- o inverso de $(a_0, a_1, ..., a_n, ...)$ com respeito a operação $\oplus$ é o elemento $(-a_0, -a_1, ..., -a_n, ...)$.

Observe que a multiplicação de **A** é comutativa pois a multiplicação de A é comutativa. Vai ser conveniente representar o elemento $(a_0, a_1, ..., a_n, 0, ...)$ pela expressão $a_0 + a_1X + a_2X + ... + a_nX$; então

$$\mathbf{A} = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mid n \in N \; e \; a_i \in A \right\}$$

e as operações deste anel são simplesmente as operações com as quais todo mundo está acostumado. Vamos denotar o anel $(\mathbf{A}, +, \cdot)$ por $A[X]$, e chamá-lo de *anel de polinômios numa variável sobre A.*

Definição 1.1.5 *Seja A um anel e seja* $f(X) := a_0 + a_1X + ... + a_nX^n \in A[X]$ *com* $a_n \neq 0$*. O inteiro n se chama grau de* $f(X)$*. O coeficiente* a_n *se chama o coeficiente líder de* $f(X)$*. Quando o coeficiente líder for igual a 1, o polinômio é dito mônico.*

Observe que não definimos a noção de grau para o polinômio nulo.

Sejam A um anel e $f(X), g(X), \in A[X] \setminus \{0\}$. Afirmamos que:

1. Se A é um domínio, então

   $\text{grau}(f(X).g(X)) = \text{grau } f(X) + \text{grau } g(X)$.

2. $A[X]$ será um domínio se e somente se A for um domínio.

Por indução, podemos definir o *anel de polinômios* em k variáveis sobre o anel A de modo seguinte:

$$A[X_1, ..., X_k] = (A[X_1, ..., X_{k-1}])[X_k].$$

Olhamos mais de perto o caso $K = 2$. Por definição, $A[X_1, X_2] = (A[X_1])[X_2]$; logo um elemento qualquer do anel $A[X_1, X_2]$ é do tipo

$$((a_{00}, a_{01}, ..., 0, ...), ..., (a_{n0}, a_{n1}, ..., 0, ...), (0, 0, ...), ...)$$

com $a_{ij} \in A, \forall i, j$. Note que o elemento $((0, 1, 0, ...), (0, 0, ...), ...)$ é representado po X_1 e o elemento $((0, 0, ...), (1, 0, ...), (0, 0, ...), ...)$ é representado por X_2. Não é mais um luxo utilizar esses símbolos X_1 e X_2. Com eles, o elemento qualquer acima se escreve como

$$a_0(X_1) + a_1(X_1).X_2 + ... + a_n(X_1).X_2^n,$$

onde

$$\begin{cases} a_0(X_1) & = & a_{01}X_1 + a_{02}X_1^2 + \cdots \\ a_1(X_1) & = & a_{10}X_1 + a_{11}X_1^2 + \cdots \\ & \vdots & \\ a_1(X_1) & = & a_{n0}X_1 + a_{n1}X_1^2 + \cdots \end{cases}$$

Utilizando a comutatividade e a distributividade no anel $A[X_1, X_2]$, podemos escrever um mesmo elemento de diversas maneiras. Por exemplo:

$$(1 + X_1^2) + (3 + 2X_1 + 2X_1^3)X_2 + (X_1 - 2X_1^3)X_2 + (X_1 - 2X_1^2)X_2^2$$

$$= (1 + 3X_2) + (2X_2 + X_2^2)X_1 + (1 - 2X_2^2)X_1^2 + (2X_2)X_1^3$$

$$= (1) + (3X_2) + (X_1^2 + 2X_1X_2) + (X_1X_2^2) + (2X_1^3X_2 - 2X_1^2X_2^2).$$

Observe que na primeira linha os termos estão arranjados de modo a ter potências de X_2 com coeficientes em $\mathbf{A}[X_1]$; na segunda linha, eles estão arranjados de modo a ter potências de X_1 com coeficientes em $\mathbf{A}[X_2]$; na terceira linha, os termos de mesmo grau estão agrupados (o grau de um termo $X_1^iX_2^j$ é definido como sendo $i + j$). Dependendo do problema considerado, pode ser mais conveniente usar uma ou outra das representações.

Observação 1.1.6 *Dado um polinômio $f(X) = \sum_{i=0}^n a_iX^i \in A[X]$, podemos considerar a função polinomial associada $\widetilde{f}(\alpha) = \sum_{i=0}^n a_i\alpha^i$. É bom observa que um polinômio diferente de zero pode ter a função identicamente nula como função polinomial associada; esse é o caso com $f(X) := \bar{1}.X + \bar{1}.X^2 \in (Z/2Z)[X]$ pois*

$$\widetilde{f}(\bar{0}) = \bar{1}\ .\ \bar{0} + \bar{1}.\bar{0}^2 = \bar{0}.$$

$$\widetilde{f}(\bar{1}) = \bar{1}\ .\ \bar{0} + \bar{1}.\bar{0} = \bar{1}^2.$$

1.2 Grupos

Definição 1.2.1 *Um conjunto G com uma operação*

$$G \times G \to G$$

$$(a, b) \to a.b$$

é um grupo se as condições seguintes são satisfeitas:

i) A operação é associativa, isto é,

$$a.(b.c) = (a.b).c, \forall\ a, b, c \in G.$$

ii) Existe um elemento neutro, isto é,

$$\exists\ e \in G \text{ tal que } e.a = a, \forall\ a \in G.$$

iii) Todo elemento possui um elemento inverso, isto é,

$$\forall\ a \in G, \exists\ b \in G \text{ tal que } a.b = b.a = e.$$

O grupo é abeliano ou comutativo se:

iv) A operação é comutativa, isto é,

$$a.b = b.a, \forall\ a, b \in G.$$

Da definição de grupos obtemos que:

1. O elemento neutro é único. De fato, se e, $e^{'} \in G$ são elementos neutros de G, então
$$\begin{aligned} e &= e.e^{'} \quad \text{pois } e^{'} \text{ é elemento neutro,} \\ &= e^{'} \quad \text{pois } e \text{ é elemento neutro.} \end{aligned}$$

2. O elemento inverso é único. De fato, sejam $a \in G$ e $b, b^{'} \in G$ dois elementos inversos de a; temos:
$$\begin{aligned} b &= b.e \\ &= b.(a.b^{'}) \quad \text{pois } b^{'} \text{ é inverso de } a, \\ &= (b.a).b^{'} \\ &= e.b^{'} \\ &= b^{'} \quad \text{pois } b \text{ é inverso de } a. \end{aligned}$$
Denotaremos o único inverso de a por a^{-1}.

3. Da unicidade do inverso de um elemento $a \in G$, obtém-se o fato mais geral seguinte:

   Se $a, b \in G$, então a equação $X.a = b$ tem uma única solução em G, a saber $b.a^{-1}$.

   De fato, se c é uma solução $X.a = b$, então temos $c.a = b$, logo $c.a.a^{-1} = b.a^{-1}$. Por outro lado, $b.a^{-1}$ é claramente uma solução.

   De maneira similar, obtém-se que a equação $a.X = b$ tem uma única solução em G, a saber $a^{-1}.b$.

4. Em decorrência da Observação 3), para mostrar que um elemento $f \in G$ é igual ao elemento neutro do grupo, basta mostrar que $f.a = a$ para algum elemento $a \in G$.

5. $(a.b)^{-1} = b^{-1}.a^{-1}$

   Observe que: $(a.b).(b^{-1}.a^{-1}) = e$, pela unicidade do inverso de um elemento em G, obtêm-se que: $b^{-1}.a^{-1} = (a.b)^{-1}$.

Nota: Muitas vezes deixaremos de indicar a operação do grupo, escrevendo G para denotar um grupo $(G, .)$

Exemplo 1.2.1 *1.* $(\mathbb{Z}, +)$ *é um grupo abeliano infinito.*

2. $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \oplus)$ *é um grupo abeliano finito com n elementos.*

3. $(\mathbb{Q},+),(\mathbb{R},+),(\mathbb{C},+)$ *são grupos (aditivos) abelianos.*

4. $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},.),(\mathbb{R}\setminus\{0\},.),(\mathbb{C}\setminus\{0\},.)$ *são grupos (multiplicativos) abelianos. Se p é um número primo, $((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\setminus\{0\},\odot)$ é um grupo abeliano.*

1.2.1 Subgrupos

Definição 1.2.2 *Seja $(G,.)$ um grupo. Um subconjunto não vazio H de G é um subgrupo de G (denotamos $H<G$) quando, com a operação de G, o conjunto H é grupo, isto é, quando as condições seguintes são satisfeitas:*

i) $h_1.h_2 \in H, \forall\ h_1,h_2 \in H$.

ii) $h_1.(h_2.h_3)=(h_1.h_2).h_3, \quad \forall\ h_1,h_2,h_3 \in H$.

iii) $\exists\ e_H \in H$ *tal que* $e_H.h=h.e_H=h, \forall\ h \in H$.

iv) Para cada $h \in H, \exists\ k \in H$ *tal que* $h.k=k.h=e_H$.

Observação 1.2.2 *1. A condição ii) é sempre satisfeita, pois a igualdade $g_1(g_2.g_3)=(g_1.g_2).g_3$ é válida para todos os elementos de G.*

2. O elemento neutro $e_H \in H$ é necessariamente igual ao elemento neutro e de G. De fato, tomando $a \in H \subseteq G$, temos $e_H.a=a$; multiplicando os dois lados por a^{-1} á direita, obtemos $e_H=e$.

3. Dado $h \in H$, o inverso de h em H é necessariamente igual ao inverso de h em G. De fato, se k é o inverso de h em H, então $h.k=k.h=e_H$, logo $h.k=k.h=e$ pois $e_H=e$, e portanto k é o inverso de h em G.

Proposição 1.2.3 *Seja H um subconjunto não-vazio do grupo G. Então H é um sugrupo de G se, e somente se, as duas condições seguintes são satisfeitas:*

1. $h_1.h_2 \in H, \forall\ h_1,h_2 \in H$.
2. $h^{-1} \in H, \forall\ h \in H$.

Demonstração: Suponhamos que H seja subgrupo de G. A condição 1) é então claramente satisfeita. Agora, seja $h \in H$; sendo H um grupo, h possui um inverso em H; mas, pela observação anterior, tal inverso é necessariamente igual ao inverso de h em G, isto é, é necessariamente igual a h^{-1}; logo $h^{-1} \in H$, e a condição 2) é satisfeita. Reciprocamente, suponhamos que as duas condições 1) e 2) sejam satisfeitas. Então a condição i) da definição anterior é claramente satisfeita. Como observamos, a condição ii) sempre é satisfeita. Para ver que a iii) é satisfeita, basta que $e \in H$; isto de fato acontece pois, tomando $h \in H$, temos $h^{-1} \in H$ pela condição 2) e logo $e=h^{-1}.h \in H$ pela condição 1). Finalmente, que a condição iv) é satisfeita decorre da condição 2) ser satisfeita.□

1.3 Módulos

Definição 1.3.1 *Seja A um anel. Um conjunto M é um módulo sobre A, ou um A-módulo se existem operações*

$$+ : M \times M \to M \quad e \quad \cdot : A \times M \to M$$

tais que:

$(M, +)$ *é um grupo abeliano e* $\forall\ a, b \in A, m, n, \in M$ *e são satisfeitas as condições abaixos*

1. $(a + b).m = a.m + b.m$ e $a.(m + n) = a.m + a.n$;
2. $(a.b).m = a.(b.m)$;
3. $1.m = m$.

Exemplo 1.3.1

1. *Seja A um anel. Então* $M = A^n$ *é um módulo sobre A.*
2. *Seja* $\varphi : A \to B$ *um homomorfismo de anéis. O anel B pode ser considerado um A-modulo com a multiplicação* $a.b = \varphi(a).\varphi(b)$*. Nesta situação B é denominado uma A-álgebra.*

Definição 1.3.2 *Sejam A um anel e M um A-módulo. Um subgrupo N de M é um A-submódulo se a multiplicação escalar de M preserva N, isto é, se* $a.n \in N$, $\forall\ a \in A$ *e quaisquer* $n \in N$.

Seja M um A-módulo, $t \in \mathbb{N}$ *e* $m_1, m_2, ..., m_t$ *elementos de M. Consideramos o seguinte subconjunto N de M:*

$$N = Am_1 + Am_2 + ... + Am_t = \{a_1m_1 + a_2m_2 + ... + a_tm_t / a_i \in A\}.$$

Este conjunto N é um submódulo de M e é chamado de submódulo gerado por $m_1, m_2, ..., m_t$*. O módulo M é dito finitamente gerado quando existe um número finito de elementos* $m_1, m_2, ..., m_t$ *de M tais que*

$$M = Am_1 + Am_2 + ... + Am_t.$$

Neste caso, dizemos que $m_1, m_2, ..., m_t$ é um conjunto de geradores para o módulo M. O módulo M é cíclico se pode ser gerado por um elemento, isto é, se $M = Am$, para algum $m \in M$.

Definição 1.3.3 *Sejam M e* $M^{'}$ *dois A-módulos. Uma aplicação* $f : M \to M^{'}$ *é um homomorfismo de A-módulos ou um A-homomorfismo se :*

a) f é um homomorfismo de grupos aditivos, isto é,

$f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2), \forall\, m_1, m_2 \in M.$

b) $f(a.m) = a.f(m), \forall\, a \in A$ *e* $\forall\, m \in M$.

Dizemos também que a aplicação f é A-linear, ou que f é um operador A-linear. Um homomorfismo de A-módulos é um isomorfismo de A-módulos se ele for bijetivo.

Definição 1.3.4 *Sejam A um anel e $(M, +)$ um A-módulo. Seja N um submódulo de M. Então, em particular, $(N, +)$ é um subgrupo de $(M, +)$ e podemos considerar o grupo quociente $(M/N, +)$, isto é, o conjunto $\{m + N \mid m \in M\}$ das classes laterais de N em M munido da adição.*

$$+ : M/N \times M/N \to M/N$$

$$(m_1 + N, m_2 + N) \to (m_1 + m_2) + N.$$

Sobre este grupo $(M/N, +)$, podemos definir a seguinte multiplicação escalar:

$$A \times M/N \to M/N$$

$$(a, m + N) \to am + N.$$

Verifica-se que esta operação esta bem definida e que M/N é um A-módulo, chamado de A-módulo quociente de M por N.

Definição 1.3.5 *Um subconjunto $N \subset M$ de um A-módulo M é um submódulo se for fechado nas operações de M, isto é, se $m, n \in N$ e $a \in A$ então $m + n \in N$ e $am \in N$.*

Se $\varphi : M \to N$ é um homomorfismo de A-módulos, definimos

$$ker(\varphi) = \{m \in M \mid \varphi(m) = 0\},$$

e

$$Im(\varphi) = \{\varphi(m) \in N \mid m \in M\}.$$

Observe, pela definição, que $ker(\varphi) \subset M$ e $Im(\varphi) \subset N$ são submódulos. Se $N \subset M$, definimos o módulo quociente

$$M/N = \{[m] = m + N \mid m \in M\},$$

a coleção das classes de equivalência pela relação $[m] = [m'] \Leftrightarrow m - m' \in N$. Com as operações induzidas por M temos que M/N é um A-módulo. Veremos que para anéis e ideais, temos que se $\varphi : M \to N$ é um homomorfismo de A-módulos, então

$$\frac{M}{ker(\varphi)} \cong Im(\varphi).$$

Em particular, φ é injetiva se e somente se $ker(\varphi) = \langle 0 \rangle$. Um quociente de módulos muito importante ganha um nome especial : Se $\varphi : M \to N$ é um homomorfismo de A-módulos, definimos

$$coker(\varphi) = \frac{N}{Im(\varphi)}$$

Teorema 1.3.2 (Teorema dos isomorfismo) *Seja* $f : (A, +, \cdot) \to (B, +, \cdot)$ *um homomorfismo de anéis. Então, a aplicação* $\bar{f}$ *abaixo é um homomorfismo de anéis:*

$$\bar{f} : (A/kerf, +, \cdot) \to (Imf, +, \cdot)$$

$$\bar{a} \mapsto f(a)$$

Demonstração: Primeiramente mostraresmo que $\bar{f}$ é uma função bem definida, isto é , se $a_1, a_2 \in A$ são tais que $\bar{a_1} = \bar{a_2}$, então $f(a_1) = f(a_2)$. E de fato se $\bar{a_1} = \bar{a_2}$, então temos $a_1 - a_2 \in kerf$, logo $f(a_1 - a_2) = 0$; além do mais $f(a_1 - a_2) = f(a_1) - f(a_2)$, pois f é um bom homomorfismo; portanto, $f(a_1) = f(a_2)$.

Agora, $\bar{f}$ é claramente uma aplicação sobrejetora e é um homomorfismo pois, para elementos, $a_1, a_2 \in A$, temos :

- $\bar{f}(\bar{a_1} + \bar{a_2}) = \bar{f}(\overline{a_1 + a_2}) = f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2) = \bar{f}(\bar{a_1}) + \bar{f}(\bar{a_2})$
- $\bar{f}(\bar{a_1} \cdot \bar{a_2}) = \bar{f}(\overline{a_1 \cdot a_2}) = f(a_1 \cdot a_2) = f(a_1) \cdot f(a_2) = \bar{f}(\bar{a_1}) \cdot \bar{f}(\bar{a_2})$

Finalmente, temos que $ker\bar{f} = \{ \ \bar{a} \in (A/kerf); f(a) = 0 \ \} = \{ \ \bar{a} \in (A/kerf); \ a \in kerf\} = \{\bar{0}\}$; logo $\bar{f}$ é injetiva. $\square$

Proposição 1.3.3 *Se* $N \subset M \subset L$ *então*

$$\frac{L/N}{M/N} \cong L/M.$$

Demonstração: Tome o homomorfismo

$$\pi : L/N \to L/M,$$

$$\pi(l + N) = l + M.$$

Como $N \subset M, \pi$ está bem definido e é sobrejetor. Então $l + M = M \Leftrightarrow l \in M$, ou seja, $ker(\pi) = M/N$. $\square$

Proposição 1.3.4 *Se* $N_1, N_2 \subset M$ *são A-módulos, então*

$$\frac{N_1 + N_2}{N_1} \cong \frac{N_2}{N_1 \cap N_2}.$$

Demonstração: Tome o homomorfismo

$$\psi : N_2 \to (N_1 + N_2)/N_1,$$

$$\psi(n_2) = n_2 + N_1.$$

Temos que ψ é sobrejetor. E $n_2 \in ker(\psi)$ se, e somente se, $n_2 \in N_1$, ou seja, $ker(\psi) = N_1 \cap N_2$. □

Definição 1.3.6 *Um A-módulo M é dito Noetheriano se todo submódulo $N \subset M$ for finitamente gerado.*

Exemplo 1.3.5 *Sejam $N \subset M$ A-módulo. Então M é noetheriano se, e somente se, N e M/N forem noetherianos.*

Demonstração:$\lfloor\Leftarrow$ Suponha que N e M/N sejam noetheriano. Tome $L \subset M$ um submódulo. Provaremos que L é finitamente gerado. Com efeito, tome seguinte homomorfismo

$$\psi : L \to (L + N)/N,$$

$$\psi(l) = l + N.$$

É fácil ver que ψ é sobrejetor. E $l \in ker(\psi)$ se, e somente se, $l \in N$, ou seja, $ker(\psi) = L \cap N$. Aplicando o teorema dos isomorfismos, temos que : $L/L \cap N \cong (L + N)/N \subset M/N$ que é finitamente gerado, digamos
$L/L \cap N =< [g_1], ..., [g_k] >, g_i \in L$. Daí, $L =< g_1, ..., g_k > +L \cap N$. Como N é noetheriano, $L \cap N$ também é finitamente gerado, e consequentemente L sera noetheriano.

$\Rightarrow\rfloor$ Recíprocamente, seja M é noetheriano. Seja $H \subset N$ um submódulo. Logo, H é um submódulo de M. Portanto, pela definição de noetheriano, temos que H é finitamente gerado. Provando então, que N é noetheriano.

Seja agora M/N. Sabe-se que, $M/N = m + N \subset M$. Caíndo no caso já provado anteriormente. □

1.4 Lema de Nakayama

Teorema 1.4.1 (Lema de Nakayama) *Seja $I \subset A$ um ideal contido no radical de Jacobson de A. Seja M um A-módulo finitamente gerado e $N \subset M$ um submódulo tal que $M = IM + N$. Então $M = N$.*

Demonstração: Sejam $a_1, a_2, ..., a_n$ geradores de M. A hipótese garante que existe $b_j \in N$ e $\delta_{ij} \in I$ tais que $a_i = b_i + \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} a_j$. Defina agora $\lambda = (\delta_{ij})$, como sendo a matriz $n \times n$ formada pelos elementos δ_{ij}.

Sejam $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ e $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$. Como $a_i = b_i + \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} a_j$, temos que $A = B + \lambda A$. Isto implica que, $(I - \lambda)A = B$. Observe que:

$$det(I-\lambda) = det\begin{bmatrix} 1-\delta_{11} & -\delta_{12} & -\delta_{13} & \cdots & -\delta_{1n} \\ -\delta_{21} & 1-\delta_{22} & -\delta_{23} & \cdots & -\delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\delta_{n1} & -\delta_{n2} & -\delta_{n3} & \cdots & 1-\delta_{nn} \end{bmatrix} = 1+\alpha, \text{ com}$$

$\alpha \in I$. Ja sabemos que $1+\alpha$ sera inverível, logo $det(I-\lambda)$ é invertível. $\square$

Capítulo 2

Introdução a Teoria de Singularidades

2.1 Germes de conjuntos e aplicações

Seja X um espaço topológico e $x \in X$ um ponto. O conjunto $P(X)$ é formado por todos os subconjuntos de X e defina uma relação de equivalência

$$A \underset{X}{\sim} B \Leftrightarrow A \cap U = B \cap U$$

para alguma vizinhança U de $x \in X$.

Definição 2.1.1 *A classe de equivalência da relação* $\underset{X}{\sim}$ *é chamada de germe do subconjunto X no ponto x.*

Seja Y um conjunto e considere agora o conjunto formado pelos pares $M = \{(U, f)\}$, onde U é uma vizinhança de x em X e f é uma função $f : U \to Y$. Introduziremos a relação de equivalência em $M : (U_1, f_1) \underset{X}{\approx} (U_2, f_2)$ se, e somente se, $f_{1|U_0} = f_{2|U_0}$ para alguma vizinhança U_0 de x com $U_0 \subset U_1 \ \cap U_2$.

Definição 2.1.2 *A classe de equivalência da relação* $\underset{X}{\approx}$ *é chamada de germe da aplicação que vai de X a Y e tem o ponto x. Usualmente iremos denotar a classe de equivalência de* (U, f) *simplesmente por f. A mais apurada notação é* f_x *ou* (f, x) *e esta são usadas quando necessário.*

Iremos introduzir as classes de germes de aplicações suaves que são muito importantes na teoria de Singularidade.

2.1.1 Germes de aplicações suaves

Quando $X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}^p$ iremos considerar apenas as aplicações suaves (C^∞), $f : U \to Y$, onde U é uma vizinhança no ponto $x \in X$. O conjunto formado por todos esses germes sera denotado por ${}_x\mathcal{E}_{n,p}$. Quando $x = 0$, escrevemos $\mathcal{E}_{n,p}$ para tal conjunto.

Além disso, quando $p = 1$, isto é, quando tratamos com funções, nós usaremos a notação ${}_x\mathcal{E}_n$ e, respectivamente , $\mathcal{E}_n$.

2.1.2 Germes de aplicações analíticas complexas

Quando $X = \mathbb{C}^n$ e $Y = \mathbb{C}^p$ iremos considere apenas as aplicações $f : U \to Y$ que são analíticas (holomorfas), isto é, que podem ser escritas como séries de potências convergentes nas proximidades de um ponto em U.

A notação ${}_x\mathcal{E}_{n,p}, \mathcal{E}_{n,p}, {}_x\mathcal{E}_n$ e $\mathcal{E}_n$ serão também usado no contexto:

$$\mathcal{E}_{n,p} := \{f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p / f \text{ é germe}\}$$

Seja $\mathcal{E}^0_{n,p}$ o conjunto denotado aos germes $f \in \mathcal{E}_{n,p}$ com $f(0) = 0$. Tal germe também sera denotado por $f : K^n, 0 \to K^p, 0$ onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de acordo com o contexto.

2.1.3 Propriedades básicas do anel local $\mathcal{E}_n$

Primeiramente, iremos considerar as propriedades que coincidem em ambos os casos (funções reais e análiticos complexos).

Proposição 2.1.1

i) $\mathcal{E}_n$ é anel local e o único ideal maximal é $\mathfrak{m}_n = \{f \in \mathcal{E}_n; f(0) = 0\}$;

ii) A k-ésima potência do ideal $\mathfrak{m}_n$ é gerada por todos os monômios de grau k, isto é, por $x^a = x_1^{a_1}...x_n^{a_n}$ com $a_1 + a_2 + ... + a_n = k\}$.

Além disso, $\mathfrak{m}_n^k = \{f \in \mathcal{E}_n; \frac{\partial^{|a|} f}{\partial x^a}(0) = 0, \forall a,$ com $0 \leq |a| < k\}$.

iii) Um ideal $I \subset \mathcal{E}_n$ tem codimensão finita (isto é, $dim(\mathcal{E}_n/I) < \infty$, onde $dim\mathcal{E}_n/I$ é a dimensão de $\mathcal{E}_n/I$ como um $\mathbb{K}$-espaço vetorial) se, e somente se, $I \supset \mathfrak{m}_n^k$ para um inteiro k.

Demonstração:

i) $\mathfrak{m}_n$ é um ideal. De fato: Sejam $f, g \in \mathfrak{m}_n$.

Portanto $(f + g)(0) = f(0) + g(0) = 0 \Rightarrow f + g \in \mathfrak{m}_n$. Tome agora $f \in \mathfrak{m}_n$ e $g \in \mathcal{E}_n$. Portanto, $(g.f)(0) = g(0).f(0) = g(0).0 = 0 \Rightarrow g.f \in \mathfrak{m}_n$. Logo, $\mathfrak{m}_n$ é um ideal.

Suponha que $\mathfrak{m}_n$ não seja maximal. Então, existe um ideal $J \subset \mathcal{E}_n$, tal que $\mathfrak{m}_n \subset J \subset \mathcal{E}_n$, onde $\mathfrak{m}_n \neq J$ e $J \neq \mathcal{E}_n$. Como $\mathfrak{m}_n \neq J$, então temos uma $f \in J$, tal que $f \notin \mathfrak{m}_n$, logo $f(0) \neq 0$. Portanto f tem inversa multiplicativa, $\frac{1}{f}$, que também é um germe em $\mathcal{E}_n$. Logo, $1 = f.(\frac{1}{f}) \in J \Rightarrow J = \mathcal{E}_n$. Gerando um absurdo.

Suponha que m_n não é único. Então existe um outro ideal maximal J, onde $J \neq \mathcal{E}_n$ e $J \neq m_n$. Faça $N = J \cup m_n$. Mostraremos que N é um ideal.

Com efeito, suponha $f \in J$ (no caso em que $f \in \mathfrak{m}_n$ segue de maneira analoga). Temos $g.f \in J$, $\forall\ g \in \mathcal{E}_n$, portanto, $g.f \in N = J \cup m_n$.

Agora suponha, por absurdo, que exista uma $f \in J$ e uma $g \in \mathfrak{m}_n$ tal que $f + g \notin N$. Logo $(f+g)(0) \neq 0$, portanto $f(0) \neq 0$ mostrando então que f tem inversa multiplicativa $\frac{1}{f}$, que também é um germe em $\mathcal{E}_n$. Logo, $1 = f.(\frac{1}{f}) \in J \Rightarrow J = \mathcal{E}_n$. Absurdo, pois $J \neq \mathcal{E}_n$. Portanto N é um ideal. Ora, mais $\mathfrak{m}_n \subset N$, contrariando a maximalidade de $\mathfrak{m}_n$. Portanto $\mathfrak{m}_n$ é único.

ii) Faremos a provar para $k = 1$ e o restante da prova segue por indução.

Seja $f \in \mathfrak{m}_n$, em seguida, tome um disco pequeno $D_r = \{x \in \mathbb{K}^n;\ |x| < r\}$ e um representante do germe f (denotado também por f) definido no disco D_r.

Para todo $x \in D_r$ temos a seguinte fórmula

$$f(x) = \int_0^1 \frac{df}{dt}(tx).dt = \sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)dt.$$

Logo as funções $g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)dt$ estão definidas em $\mathcal{E}_n$. Temos então que $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x)$. Portanto, f pertence ao ideal gerado pelos monômios $x_1, ..., x_n$.

O restante da prova segue por indução. Observe que $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$.

iii) $\lfloor\Leftarrow$ Suponha que $\mathfrak{m}_n^k \subset I$ para algum $k \in \mathbb{N}$.

Considere a seguinte aplicação:

$$\varphi : \mathcal{E}_n/\mathfrak{m}_n^k \to \mathcal{E}_n/I$$

$$f + \mathfrak{m}_n^k \mapsto f + I.$$

Provaremos que φ é um homomorfismo sobrejetivo.

Com efeito, primeiramente mostraremos que φ está bem definida:

1. $f + \mathfrak{m}_n^k = g + \mathfrak{m}_n^k \Rightarrow (f-g) \in \mathfrak{m}_n^k \subset I \Rightarrow f \equiv g\ mod(I) \Rightarrow f + I = g + I;$

2. $\varphi((f+\mathfrak{m}_n^k)+(g+\mathfrak{m}_n^k)) = \varphi((f+g)+\mathfrak{m}_n^k) = (f+g)+I = (f+I)+(g+I) = \varphi(f+\mathfrak{m}_n^k) + \varphi(g+\mathfrak{m}_n^k);$

3. $\varphi((f+\mathfrak{m}_n^k)(g+\mathfrak{m}_n^k)) = \varphi(f.g+\mathfrak{m}_n^k) = f.g + I = (f+I).(g+I) = \varphi(f+\mathfrak{m}_n^k).\varphi(g+\mathfrak{m}_n^k).$

Portanto, φ é um homomorfismo sobrejetivo $\Rightarrow \varphi$ é uma transformação linear sobrejetiva $\Rightarrow dim\mathcal{E}_n/I \leq dim\mathcal{E}_n/\mathfrak{m}_n^k$, onde $\mathfrak{m}_n^k =<$ monômios de grau k $>$. Portanto, $\mathcal{E}_n/\mathfrak{m}_n^k$ pode ser identificado como o conjunto dos polinômios de grau $< k$, o qual tem dimensão finita. Ou seja:

$dim\mathcal{E}_n/\mathfrak{m}_n^k < +\infty \Rightarrow dim\mathcal{E}_n/I < +\infty.$

$\Rightarrow\rfloor$ Suponha que $cod\ I < +\infty \Rightarrow dim\ \mathcal{E}_n/I < +\infty$. Veja que:

$$\mathcal{E}_n \supset I + \mathfrak{m}_n \supset I + \mathfrak{m}_n^2 \supset ... \supset I + \mathfrak{m}_n^k \supset ...$$

A sequência se estabiliza, porquê do contrário, teríamos:

$\mathcal{E}_n \underset{\neq}{\supset} I + \mathfrak{m}_n \underset{\neq}{\supset} I + \mathfrak{m}_n^2 \underset{\neq}{\supset} ... \underset{\neq}{\supset} I + \mathfrak{m}_n^k \underset{\neq}{\supset} ...$

E consequentemente:

$\mathcal{E}_n/I \underset{\neq}{\supset} (I + \mathfrak{m}_n)/I \underset{\neq}{\supset} (I + \mathfrak{m}_n^2)/I \underset{\neq}{\supset} ... \underset{\neq}{\supset} (I + \mathfrak{m}_n^k)/I \underset{\neq}{\supset} ...$

Mostrando que:

$dim(\mathcal{E}_n/I) > dim((I+\mathfrak{m}_n)/I) > dim((I+\mathfrak{m}_n^2)/I) > ... > dim((I+\mathfrak{m}_n^k)/I) > dim((I + \mathfrak{m}_n^{k+1})/I)... \quad \Rightarrow dim(\mathcal{E}_n/I) = +\infty$. O que é uma contradição.

Portanto, a sequência estabiliza. Logo existe um $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(I+\mathfrak{m}_n^k)/I = (I + \mathfrak{m}_n^{k+1})/I,\ \forall\ k \geq k_0$. Aplicando o Lema de Nakayama, temos $\mathfrak{m}_n^k \subset I$. Provando então o nosso resultado. $\square$

Qualquer ideal $I \subset \mathcal{E}_n$ de funções analíticas corresponde á um subconjunto de germes em $\mathbb{C}^n$ na origem, a saber

$$V(I) = \{x \in \mathbb{C}^n; f(x) = 0\ \forall f \in I\}.$$

Este é chamado de germe de conjunto analítico ou Variedade local definida por I.

Se o anel $\mathcal{E}_n$ é Noetheriano o ideal I tem um sistema finito de geradores $f_1, ..., f_p$.

Qualquer subconjunto de germes A em $\mathbb{C}^n$, na origem, corresponde um ideal em $\mathcal{E}_n$, a saber,

$$I(A) = \{f \in \mathcal{E}_n; f_{|A} = 0\},$$

o ideal de todos os germes de função que se anula em A.

Se I é um ideal no anel $\mathcal{E}_n$, então definimos o radical $\sqrt{I}$ da seguinte maneira

$$\sqrt{I} = \{f \in \mathcal{E}_n; f^k \in I \text{ para um inteiro positivo k }\}.$$

Além disso, se o anel for Noetheriano, então existe um inteiro positivo p tal que $(\sqrt{I})^{P} \subset I$.

Teorema 2.1.2 (Hilbert Nullstellensatz)

i) $V(I(A)) = A$, *para todo germe analítico* A *na origem de* $\mathbb{C}^n$.

ii) $I(V(J)) = \sqrt{J}$ *para todo ideal* $J \subset \mathcal{E}_n$.

Demonstração: Ver [9]

Observação 2.1.3 *:*

1. f *é dita suave se* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *e* f *é dita analítica se* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
2. $\mathcal{E}^0_{n,p} := \{f : \mathbb{K}^n, 0 \rightharpoonup \mathbb{K}^p, 0 \ / \ f$ *é germe*$\} = \mathfrak{m}_n.\mathcal{E}_{n,p}$.

Definição 2.1.3 *: Denotaremos por* $J^k(n,p)$ *o espaço vetorial* $\frac{\mathcal{E}^0_{n,p}}{\mathfrak{m}^k_m \mathcal{E}_{n,p}}$ *o qual é identificado como o* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial das aplicações polinomial de* $\mathbb{K}^n, 0 \to \mathbb{K}^p, 0$ *, cujas componentes têm grau no máximo k.*

Definição 2.1.4 *: Seja* $j^k : \mathcal{E}^0_{n,p} \to J^k(n,p)$ *a projeção canônica, isto é, dado* $f \in \mathcal{E}^0_{n,p}$, $j^k f$ *é o polinômio de Taylor de* f *de grau* k *na origem.*

- $j^k f$ é chamado de o k-jato de f na origem.

Exemplo 2.1.4 *: Dados* $f, g \in \mathcal{E}^0_{n,p}$, *têm-se que*

$$j^k f = j^k g \Leftrightarrow \frac{\partial^r f}{\partial x_1^{r_1} \cdots \partial x_n^{r_n}}(0) = \frac{\partial^r g}{\partial x_1^{r_1} \cdots \partial x_n^{r_n}}(0),$$

$\forall \ r = r_1 + r_2 + \cdots + r_n$, *com* $1 \le r \le k$.

- *O espaço* $J^k(n,p)$ *é chamado de o espaço dos k-jatos do tipo* (n,p).

Exemplo 2.1.5 *: Se* $k_1 > k_2$, *então a projeção*

$$j^{k_1,k_2} : J^{k_1}(n,p) \to J^{k_2}(n,p)$$

$$j^{k_1} f \mapsto j^{k_2} f$$

é tal que $j^{k_1,k_2}(j^{k_1}) \equiv j^{k_2}$.

Capítulo 3

Ação de grupo

Definição 3.0.5 *Sejam G um grupo e C um conjunto qualquer. Uma ação do grupo G no conjunto C é uma aplicação*

$$\varphi : G \times C \to C$$

$$(g, c) \mapsto \varphi(g, c) = g.c$$

tal que:

1. $\varphi(e, c) = e.c = c, \forall\ c \in C$;

2. $\varphi(g_1, \varphi(g_2, c)) = \varphi(g_1.g_2, c)$, *isto é,* $g_1.(g_2 \cdot c) = (g_1.g_2) \cdot c, \forall\ c \in C$ *e* $\forall\ g_1, g_2 \in G$.

Definição 3.0.6 *: Dados $c_1, c_2 \in C$, definimos a relação: $c_1 \sim c_2 \Leftrightarrow \exists\ g \in G$ tal que $\varphi(g, c_1) = c_2$, isto é, $g.c_1 = c_2$.*

Exemplo 3.0.6 *: Afirmamos que $\sim$ é uma relação de equivalência, pois*

I) $c_1 \sim c_1$
Tome $h = e$. Portanto, $\varphi(e, c_1) = e.c_1 = c_1$. Logo, $c_1 \sim c_1$.

II) $c_1 \sim c_2 \Rightarrow c_2 \sim c_1$
Como $c_1 \sim c_2 \Rightarrow \exists\ h \in G$ tal que, $\varphi(h, c_1) = c_2 \Rightarrow h.c = c_2$.
Queremos encontrar uma $g \in G$ tal que; $\varphi(g, c_2) = c_1$. Portanto,
$\varphi(g, \varphi(h, c_1)) = c_1 \Rightarrow \varphi(g.h, c_1) = c_1 \Rightarrow g.h.c_1 = c_1 \Rightarrow g.h = e \Rightarrow g = h^{-1}$.

III) $c_1 \sim c_2$ *e* $c_2 \sim c_3 \Rightarrow c_1 \sim c_3$.
Como $c_1 \sim c_2 \Rightarrow \exists\ h \in G$ tal que $\varphi(h, c_1) = c_2$.
Como $c_2 \sim c_3 \Rightarrow \exists\ g \in G$ tal que $\varphi(g, c_2) = c_3$.
Por outro lado, como $\varphi(g, c_2) = c_3 \Rightarrow \varphi(g, \varphi(h, c_1)) = \varphi(g.h, c_1) = c_3$.
Mostrando que $c_1 \sim c_3$. $\square$

Definição 3.0.7 *: Chamaremos de Órbita de um elemento $c \in C$ como sendo o conjunto $G.c$ de todos os elementos de C que estão relacionados com c. Isto é,*

$$\begin{aligned} G.c &= \{a \in C \ / \ \exists\ g \in G \ com \ \varphi(g,c) = a\} \\ &= \{a \in C \ / \ g.c = a\} \\ &= \{a \in C \ / \ a \sim c\} \\ &= \{g.c \ / \ g \in G\} \\ &= \{\varphi(g,c) \ / \ g \in G\}. \end{aligned}$$

Exemplo 3.0.7 *: Seja $C = Ł(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ o conjunto das transformações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^p$ e G o grupo $Gl_n \times Gl_p$ formado por pares de operadores lineares invertíveis (A,B) com $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $B : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$. Definimos*

$$\varphi : G \times C \to C$$

$$((A,B),T) \mapsto B.T.A^{-1}$$

Observe que, $\varphi((I_n, I_p), T) = I_p \circ T \circ {I_n}^{-1} = T$; *e*

$$\begin{aligned} \varphi((A_1,B_1),\varphi((A_2,B_2),T)) &= B_1 \circ (B_2 \circ T \circ {A_2}^{-1}) \circ {A_1}^{-1} \\ &= (B_1 \circ B_2) \circ T \circ (A_1 \circ A_2)^{-1} \\ &= \varphi((A_1 \circ A_2, B_1 \circ B_2), T) \end{aligned}$$

Exemplo 3.0.8 *Duas transformações lineares $T, S \in Ł(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) = C$ são equivalentes se $\varphi((A,B),T) = S$ (sendo $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $B : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ operadores invertíveis e $\varphi((A,B),T) = B^{-1}.T.A$) se, e somente se, T e S têm o mesmo posto.*

Solução: $\Rightarrow \rfloor$ Duas transformações lineares $T, S \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) = C$ são equivalentes se $\exists\ (A,B) \in G$ tal que $\varphi((A,B),T) = S$. Com $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $B : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ operadores invertíveis.

Logo $\varphi((A,B),T) = S \Rightarrow B^{-1}.T.A = S$.

Tome α e β bases de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^p$ respectivamente, e $[A]^\alpha_\alpha$ e $[B]^\beta_\beta$ será associado como sendo a matriz da transformações lineares de A e B respectivamente.

$[T]^\alpha_\beta$ e $[S]^\alpha_\beta$ como sendo a matriz dos operadores lineares T e S respectivamente.

Nosso objetivo: Provar que $posto[T]^\alpha_\beta = posto[S]^\alpha_\beta$.

Observe que; $S = B^{-1}.T.A \Rightarrow [S]^\alpha_\beta = [B^{-1}.T.A]^\alpha_\beta = [B^{-1}]^\beta_\beta.[T.A]^\alpha_\beta$.

Observações:

1. $posto[A]^{\alpha}_{\alpha} = n$.

2. $posto[B^{-1}]^{\beta}_{\beta} = p$.

3. $posto[S]^{\alpha}_{\beta} \leq min\{p, n\}$.

4. $posto[T]^{\alpha}_{\beta} \leq min\{p, n\}$.

Sabemos que, $[S]^{\alpha}_{\beta} = [B^{-1}]^{\beta}_{\beta}.[T.A]^{\alpha}_{\beta}$. Portanto, usando as propriedades do posto;

$posto[S]^{\alpha}_{\beta} \leq min\{posto[B^{-1}]^{\beta}_{\beta}, posto[T]^{\alpha}_{\beta}, posto[A]^{\alpha}_{\alpha}\}$

$posto[S]^{\alpha}_{\beta} \leq posto[T]^{\alpha}_{\beta}$.

De modo análogo temos;

$posto[T]^{\alpha}_{\beta} \leq posto[S]^{\alpha}_{\beta}$.

Portanto; $posto[S]^{\alpha}_{\beta} = posto[T]^{\alpha}_{\beta}$.

$\lfloor\Leftarrow$ Suponha agora que as duas operações lineares T e S tenham o mesmo posto.

Tome α e β bases de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^p$ respectivamente. Portanto, $posto[T]^{\beta}_{\alpha} = posto[S]^{\beta}_{\alpha} = r$. Onde $r \leq min\{n, p\}$.

Reindexando as coordenadas de T, podemos assumir que $posto\left|\frac{\partial T_i}{\partial x_j}(x)\right| = r$ onde $i, j = 1, ..., r, \forall\ x$.

Seja $q : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^r$ a projeção das r primeiras coordenadas. Então, $q \circ T(x) = (T_1(x), ..., T_r(x))$ é uma submersão.

Pelo teorema da Forma Local das Submersões, existe um difeomorfismo g tal que $q \circ T \circ g^{-1} = (x_1, ..., x_r)$. Portanto, $T \circ g^{-1} = (x_1, ..., x_r, \bar{T}_1(x), ..., \bar{T}_{p-r}(x))$ onde $\bar{T}_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

A constância do posto de T e portanto $T \circ g^{-1}$, implica que $\frac{\partial \bar{T}_i}{\partial x_j}(x) = 0, \forall\ i = 1, ..., p-r$, $\forall j = r+1, ..., p$ e $\forall x \in U$. Portanto $\bar{T}_j$ depende somente de $x_1, ..., x_r$.

Definimos $h : \mathbb{R}^p, 0 \to \mathbb{R}^p, 0$ tal que $h(y_1, ..., y_p) = (y_1, ..., y_r, y_{r+1} - \bar{T}_1(\bar{y}), ..., y_p - \bar{T}_{p-r}(\bar{y}))$ em que $\bar{y} = (y_1, ..., y_r)$. Então, $h \circ T \circ g^{-1}(x) = (x_1, ..., x_r, 0, ..., 0)$.

De modo análogo temos que $\beta \circ S \circ \alpha^{-1} = (x_1, ..., x_r, 0, ..., 0)$. Logo, $T = (\beta^{-1} \circ h)^{-1} \circ S \circ (\alpha^{-1} \circ g)$. □

Segue-se do exercício anterior que dado $T \in C$, tomando $k = postoT$, tem-se que T é equivalente a

$$T_k \in C, \text{ em que } T_k(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_k, 0, ..., 0).$$

Em particular, existem exatamente $min\{n, p\} + 1$ órbitas em $C = Ł(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.

Definição 3.0.8 *: Seja G um grupo agindo em um conjunto C. Fixado $a \in C$, denotamos por $G_a = E(a) = \{g \in G \ / \ \varphi(g, a) = a\}$ chamado de o* **Subgrupo de isotropia de a** *ou* **Estabilizador de a**.

Exemplo 3.0.9 *: O estabilizador de a é um subgrupo de G. Ou seja, $G_a < G$.*

Definição 3.0.9 *Denotaremos por R_n o conjunto de todos os germes de aplicações $h : \mathbb{K}^n, 0 \to \mathbb{K}^n, 0$ tal que h é um difeomorfismo para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e h é um isomorfismo analítico para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Isto é :*

$$R_n := \{h : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^n, 0 \ / \ h \text{ é difeomorfismo } \} \quad e$$

$$R_n := \{h : \mathbb{C}^n, 0 \to \mathbb{C}^n, 0 \ / \ h \text{ é isomorfismo analítico } \}$$

Exemplo 3.0.10 *: R_n com a operação de composição é um grupo.*

Agora iremos definir relações de equivalências canônicas em Teoria de Singularidade no espaço de germes $\mathcal{E}^0_{n,p}$.

3.1 Relações de Equivalência

3.1.1 A $\mathcal{R}$-Equivalência ou Equivalência a direita

Esta relação de equivalência está relacionada à ação do grupo $\mathcal{R} = R_n$, dada por:

$$r : R_n \times \mathcal{E}^0_{n,p} \to \mathcal{E}^0_{n,p}$$
$$(h, f) \mapsto f \circ h^{-1}$$

Dois germes $f, g \in \mathcal{E}^0_{n,p}$ estão relacionados se, e somente se, $\exists \ h \in R_n$ tal que $f \circ h^{-1} = g$, isto é, o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n, 0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, leftrightarrow, "h"'] & \mathbb{R}^p, 0 \\ \mathbb{R}^n, 0 \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Exemplo 3.1.1 *: Pelo teorema da Forma Local das Submersões (ver [7]), se $f : \mathbb{R}^{n+k}, 0 \to \mathbb{R}^n, 0$ é tal que $f^{'}(0)$ é sobrejetora, então existe um germe $h \in R_{n+k}$ tal que;*

$$f \circ h(x, y) = x, \qquad \forall \ (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, \ \textit{isto é, } f \underset{\mathcal{R}}{\sim} Id_{\mathbb{R}^n}.$$

3.1.2 A $\mathcal{L}$-Equivalência ou Equivalência a esquerda

Esta relação de equivalência está relacionada à ação do grupo $\mathcal{L} = R_p$, dada por:

$$l : \mathbb{R}_p \times \mathcal{E}^0_{n,p} \to \mathcal{E}^0_{n,p}$$

$$(h, f) \mapsto h \circ f$$

Dados dois germes $f, g \in \mathcal{E}^0_{n,p}$, dizemos que $f \underset{\mathcal{L}}{\sim} g$ se, e se somente se, existe $h \in \mathcal{L} = R_p$ tal que $h \circ f = g$. Isto é, o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n, 0 \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \mathbb{R}^p, 0 \arrow[d, "h"] \\ & \mathbb{R}^p, 0 \end{tikzcd}$$

Exemplo 3.1.2 *: Pelo teorema da Forma local das imersões (ver [7]), se* $f : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^{n+k}, 0$ *é tal que* $f^{'}(0)$ *é injetiva, então existe um germe* $h \in R_{n+k}$ *tal que:*

$$h \circ f(x) = (x, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, \text{ isto é, } f \underset{\mathcal{L}}{\sim} Id_{\mathbb{R}^n \times \{0\}}.$$

3.1.3 A $\mathcal{A}$-Equivalência ou Equivalência a direita e esquerda.

Esta relação de equivalência está associada à ação do grupo $\mathcal{R} \times \mathcal{L}$ dada por:

$$a : (\mathcal{R}, \mathcal{L}) \times \mathcal{E}^0_{n,p} \to \mathcal{E}^0_{n,p}$$

$$((h_1, h_2), f) \to h_2 \circ f \circ h_1^{-1}$$

Dois germes $f, g \in \mathcal{E}^0_{n,p}$ são $\mathcal{A}$-equivalente se, e somente se, existir $(h_1, h_2) \in \mathcal{A} = \mathcal{R} \times \mathcal{L}$ tal que $h_2 \circ f \circ h_1^{-1} = g$, isto é, o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n, 0 \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^p, 0 \\ \mathbb{R}^n, 0 \arrow[u, "h_2"] \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}^p, 0 \arrow[u, "h_1"'] \end{tikzcd}$$

De forma mais simploria, dizemos que $f \underset{\mathcal{A}}{\sim} g$ quando os germes f e g coincidem, a menos de uma mudança de coordenadas na *fonte* (Domínio) e na *meta* (Crontra-Domínio).

Teorema 3.1.3 (Posto constante) *: Seja* $U \subset \mathbb{R}^n$ *uma vizinhança aberta da origem e* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *uma aplicação* C^∞ *tal que* $f(0) = 0$. *Assuma que o posto* $f^{'}(a)$ *é constante,* $\forall\ a \in U$, *isto é,* $posto f^{'}(a) = posto f^{'}(b), \forall a, b \in U$.

Então o germe $f \in \mathcal{E}^0_{n,p}$ é $\mathcal{A}$-equivalente ao germe da transformação linear $T : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^p, 0$ dada por $T(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_k, 0, ..., 0)$ onde $k = postof^{'}(a)$, e $a \in U$.

Demonstração: Substituindo U com uma vizinhança V do 0 e reindexando as coordenadas, assumindo que *posto* $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right| = m \ \ i, j = 1, ..., m, \forall\ x \in V$.

Seja $q : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^m$ denotando a projeção das primeiras m coordenadas. Então, $q \circ f$ é uma submersão e pelo Teorema de Submersão (ver [4]) existe um difeomorfismo g tal que $q \circ f \circ g^{-1}$ é igual a projeção linear

$$(x_1, ..., x_n) \mapsto (x_1, ..., x_m).$$

Isto mostra que $f \circ g^{-1}$ é dado por

$$x \mapsto (x_1, ..., x_m, \bar{f}_{m+1}(x), ..., \bar{f}_p(x))$$

para funções $\bar{f}_j$ (que são definida de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ no caso real e no caso e em uma bola B no caso complexo).

A condição de posto constante de f (e, consequentemente, $f \circ g^{-1}$) implica que

$$\frac{\partial \bar{f}_j}{\partial x_k}(x) = 0, \quad \forall\ j = m+1, ..., p; k = m+1, ..., n \text{ e } \forall\ x \in V.$$

Então as funções $\bar{f}_j$ depende somente de $x_1, ..., x_m$. Definamos o germe $h \in \mathcal{L} = \mathbb{R}_p$ por

$$h(y) = (y_1, ..., y_m, y_{m+1} - \bar{f}_{m+1}(\bar{y}), ..., y_p - \bar{f}_p(\bar{y}))$$

onde $\bar{y} = (y_1, ..., y_m)$.

$$\begin{array}{rcc} \text{Então, } h \circ g^{-1}(x) & = & h(x_1, x_2, ..., x_m, \bar{f}_{m+1}(x), ..., \bar{f}_p(x)) \\ & = & (x_1, ..., x_m, \bar{f}_{m+1}(x) - \bar{f}_{m+1}(x), ..., \bar{f}_p(x) - \bar{f}_p(x)) \\ & = & (x_1, ..., x_m, 0, ..., 0) \end{array}$$

Portanto, claramente $h \circ f \circ g^{-1}$ coincide com o operador linear T. Logo, $f \underset{\mathcal{A}}{\sim} T$. □

3.2 Grupos

3.2.1 O grupo $\mathcal{C}$ e a $\mathcal{C}$-Equivalência

O grupo $\mathcal{C}$ é formado pelos germes de difeomorfismo

$$H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0 \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0$$

tais que

$$\pi_1 \circ H(x, y) = x \text{ e } \pi_2 \circ H(x, 0) = 0 \text{ em que}$$

$$\pi_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0 \to \mathbb{R}^n, 0$$

$$(x, y) \to x$$

$$\pi_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0 \to \mathbb{R}^p, 0$$

$$(x, y) \to y$$

Isto é,

$$\mathcal{C} = \{H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0 \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \ / \ H(x, y) = (x, \varphi(x, y)) \text{ e } \varphi(x, 0) = 0, \forall\ x\}$$

Dois germes $f, g \in \mathcal{E}_n$ são ditos $\mathcal{C}$-equivalentes se, e somente se, existir $H \in \mathcal{C}$ tal que $H(x, f(x)) = (x, \varphi(x, f(x))) = (x, g(x))$.

Lema 3.2.1 (De Hadamard) *Sejam U uma vizinhança convexa de $0 \in \mathbb{R}^n$ e $f : U \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável que se anula em $0 \times \mathbb{R}^q$, isto é, $f(0, y) = 0, \forall\ y \in \mathbb{R}^q$. Então existem funções difenciáveis $f_1, ..., f_n : U \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ tais que*

$$f(x, y) = x_1 f_1(x, y) + ... + x_n f_n(x, y) \qquad \textit{onde } x = (x_1, ..., x_n).$$

Demonstração: Pelo Teorema fundamental do cálculo temos:

$$f(x, y) = f(x, y) - f(0, y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(tx_1, ..., tx_n, y)dt = \int_o^1 \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx, y).x_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \left[x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx, y)dt \right] = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x, y), \text{ onde } g_i(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx, y)dt.$$

$\square$

Teorema 3.2.2 (Critério algébrico para $\mathcal{C}$-equivalência) *Sejam $f, g \in \mathcal{E}^0_{n,p}$. São equivalentes:*

i) f e g são $\mathcal{C}$-equivalentes;

ii) Os ideais I_f e I_g são isomorfos

iii) Existe uma matriz invertível $p \times p$ com coordenadas $a_{ij} \in \mathcal{E}_n$ tais que $f_i(x) = \sum_{j=1}^p a_{ij}(x) g_i(x), i = 1, ..., p.$

Demonstração: $i) \Rightarrow ii)$ Seja $f \underset{\mathcal{C}}{\sim} g \Rightarrow \ H \in \mathcal{C}$ tal que $H(x, g(x)) = (x, \varphi(x, g(x))) = (x, f(x))$ e $\varphi(x, 0) = 0, \forall\, x$. Como $\varphi(x, y) = (\varphi_1(x, y), ..., \varphi_p(x, y))$ e $\varphi(x, 0) = 0\ \forall\ x$, temos $\varphi_j(x, 0) = 0, \forall\ j$.

Pelo lema de Hadamard, para cada $i = 1, ..., p$ podemos escrecer

$$\varphi_j(x, y) = \sum_{k=1}^p y_k \varphi_{jk}(x, y), \quad \varphi_{jk} \in \mathcal{E}_n.$$

Logo, $f_j(x) = \varphi_j(x, g(x)) = \sum_{k=1}^{p} g_k(x).\varphi_{jk}(x, g(x)) \Rightarrow f_j(x) \in I_g, \forall\ j$. Isto mostra que $I_f \subset I_g$. A outra inclusão segue-se de maneira análoga. Portanto, $I_f = I_g$.

$ii) \Rightarrow iii)$ Dadas duas matrizes reais $p \times p$ A e B, existe uma matriz real $p \times p$ C tal que $C.(I - AB) + B$ é invertível. Usaremos esse fato para nossa prova. Suponha que $I_f = I_g$. Então podemos escrever

$$f_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} g_j \quad \text{e} \quad g_i = \sum_{k=1}^{p} b_{ik} f_k \ \text{ em que } \ a_{ij}, b_{ik} \in \mathcal{E}_n, \forall\ i, j, k.$$

Para cada x fixado, sejam A_x e B_x as matrizes $p \times p$ com coeficientes respectivamentes a_{ij} e b_{jk}. Portanto, temos que existe uma matriz $p \times p$ C, real, tal que $U_0 = C.(I - A_0.B_0) + B_0$ é invertível. Logo, para x próximo de 0, a matriz $U_x = C(I - A_x B_x) + B_x$ é também invertível.

Seja $u_{ij}(x)$ as coordenadas de U_x. Então,

$$\begin{aligned} U_x.g &= C(I - A_x B_x)g + B_x g \\ &= C(g - A_x.B_x.g) + f \\ &= C(g - A_x.f) + f \\ &= C(g - g) + f = f. \end{aligned}$$

Logo $U_x.g = f$. Portanto, $f_i = \sum_{j=1}^{p} u_{ij}.g_j$. □

$ii) \Rightarrow iii)$ Suponha que exista uma matriz (u_{ij}) $p \times p$ invertível tal que $f_i = \sum_{j=1}^{p} u_{ij}.g_j(x)$.

Defina $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0 \to \mathbb{R}^p, 0$ por $\varphi_i(x, y) = \sum_{j=1}^{p} y_j.u_{ij}(x)$.

Temos que, $\varphi(x, 0) = (\varphi_1(x, 0), ..., \varphi_p(x, 0)) = 0, \forall\ x$. Defina agora o germe $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0 \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0$ por $H(x, y) = (x, \varphi(x, y))$.

Observe que $JacH = \begin{bmatrix} I_n & A \\ 0 & B \end{bmatrix}$,

$$\text{onde } A = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x_{n+1}}(x,y) & \cdots & \frac{\partial H_1}{\partial x_{n+p}}(x,y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial H_n}{\partial x_{n+1}}(x,y) & \cdots & \frac{\partial H_n}{\partial x_{n+p}}(x,y) \end{bmatrix}_{n \times p} \quad \text{e}$$

$$B = \begin{bmatrix} u_{11}(x) & \cdots & u_{1p}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{p1}(x) & \cdots & u_{pp}(x) \end{bmatrix}_{p\times p}.$$

Logo o $det(JacH(x,y)) = detB \neq 0$ e consequentemente invertível. Portanto, $H \in \mathcal{E}^0_{n,p}$ é um difeomorfismo e $H \in \mathcal{C}$.

Observe que $H(x, g(x)) = (x, \varphi(x, g(x))) = (x, f(x))$ pois $\varphi_i(x, g(x)) = f_i(x) \Rightarrow \varphi(x, g(x)) = f(x)$.

Provando que f e g são $\mathcal{C}$-equivalentes. □

Exemplo 3.2.3 *Mostrar que* $f(x) = (x^2, 0)$ *e* $g(x) = (x^2, x^3)$ *são* $\mathcal{C}$*-equivalentes.*

Solução: Observe que $I_f =< x^2 >=< x^2, x^3 >= I_g$, portanto f e g são $\mathcal{C}$-equivalentes.

3.2.2 O grupo $\mathcal{K}$ e a $\mathcal{K}$-Equivalência (Equivalência de contato)

O grupo $\mathcal{K}$ é formado pelos germes $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0 \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0$ tais que $\pi_1 \circ H = h \in \mathcal{R}$ e $\pi_2 \circ H(x, 0) = 0, \forall\ x$. Isto é,

$$\mathcal{K} = \{H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0 \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0 \ / \ H(x,y) = (h(x), \varphi(x,y)) \text{ com } \varphi(x,0) = 0, \forall\ x.\}$$

Dois germes $f, g \in \mathcal{E}_n$ são $\mathcal{K}$-equivalentes se, e somente se, existe $H \in \mathcal{K}$ tal que

$$H(x, f(x)) = (h(x), \varphi(x, f(x)) = (h(x), g(h(x)) \Rightarrow \varphi(x, f(x)) = g(h(x)).$$

Proposição 3.2.4 *Dois germes* $f, g \in \mathcal{E}^0_{n,p}$ *são* $\mathcal{K}$*-equivalentes se, e somente se, existir um germe* $h \in \mathcal{R}$ *tal que* $f \circ h$ *e* g *são* $\mathcal{C}$*-equivalentes.*

Demonstração : $\Rightarrow\rfloor$ Seja $f, g \in \mathcal{E}^0_{n,p}$ dois germes $\mathcal{K}$-equivalentes. Então, existe $H = (h, \varphi) \in \mathcal{K}$ tal que

$$H(x, g(x)) = (h(x), \varphi(x, g(x)) = (h(x), f(h(x))) \Rightarrow \varphi(x, g(x)) = f(h(x))$$

Defina $T(x,y) = (x, \varphi(x,y)) \in \mathcal{C}$ e observe que; $T(x, g(x)) = (x, \varphi(x, g(x)) = (x, f \circ h(x)) \Rightarrow g \underset{\mathcal{C}}{\sim} f \circ h$.

$\lfloor\Leftarrow$ Seja $h \in \mathcal{R}$ tal que $g \underset{\mathcal{C}}{\sim} f \circ h$. Então, existe $T \in \mathcal{C}$ tal que

$$T(x, g(x)) = (x, \varphi(x, g(x)) = (x, f \circ h(x)), \text{ além disso, } \varphi(x, 0) = 0, \forall\ x.$$

Defina $H(x,y) = (h(x), \varphi(x,y))$, logo

$$H(x, g(x)) = (h(x), \varphi(x, g(x)) = (h(x), f \circ h(x)) \Rightarrow g \underset{\mathcal{K}}{\sim} f.$$

□

A $\mathcal{K}$-órbita de f é denotado por

$$\mathcal{K}f = \{g \in \mathcal{E}^0_{n,p} \ / \ g \underset{\mathcal{K}}{\sim} f\}.$$

Definição 3.2.1 *Dois ideais I e J de $\mathcal{E}_n$ são ditos isomorfos induzidos se existir um germe inverível $h : \mathbb{K}^n, 0 \to \mathbb{K}^n, 0$ tal que $h^*(I) = J$.*

Teorema 3.2.5 *Dois germes $f, g : \mathbb{K}^n, 0 \to \mathbb{K}^p, 0$ são $\mathcal{K}$-equivalentes se, e somente se, os ideais I_f e I_g são isomorfos induzidos.*

Solução: Sejam f e g $\mathcal{K}$-equivalentes. Então, $\exists\ h \in \mathcal{R}$, isto é, $h : \mathbb{K}^n, 0 \to \mathbb{K}^n, 0$ invertível, tal que $f \circ h$ e g são $\mathcal{C}$-equivalentes. Portanto, $I_{f \circ h} = I_g \Rightarrow < f_1 \circ h, ..., f_p \circ h > = < g_1, ..., g_p >$.

Mostraremos que $h^*(I_f) = I_{f \circ h}$. Com efeito, dado $\beta \in I_f$, logo $h^*(\beta) = h^*(\sum_{i=1}^{p} a_i f_i) = (\sum_{i=1}^{p} a_i f_i) \circ h = \sum_{i=1}^{p} a_i \circ h . f_i \circ h \in I_{f \circ h}$. Dado agora $\alpha \in I_{f \circ h}$, temos $\alpha = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i . f_i \circ h = \sum_{i=1}^{n} b_i \circ h^{-1} \circ h . f_i \circ h = h^*(\sum_{i=1}^{n} b_i \circ h^{-1} . f_i) \in h^*(I_f)$. Portanto $h^*(I_f) = I_{f \circ h}$. Logo, $h^*(I_f) = I_{f \circ h} = I_g \Rightarrow I_f$ e I_g são isomorfos induzidos.

Reciprocamente, suponha que exista $h \in \mathcal{R}$ tal que $h^*(I_f) = I_f \Rightarrow I_{f \circ h} = I_g$, portanto, $f \circ h$ e g são $\mathcal{C}$-equivalentes, implicando que, f e g são $\mathcal{K}$-equivalentes. $\square$

Exemplo 3.2.6 *Sejam $f_t : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ germes de $f_t(x, y) = x^4 + y^5 + (t + 1)x^2 y^3$, para cada $t \in \mathbb{C}$.*

Temos que I_{f_t} é $\mathbb{C}$-isomorfo a $I_{f_0}, \forall t \in \mathbb{C}$.

De fato, definamos β_α por $\beta_\alpha(x) = \alpha^5 x$ e $\beta_\alpha(y) = \alpha^4 y$, com $\alpha^2 = (t+1)^{-1}$. Então $\beta_\alpha(J_{f_t}) = J_{f_0}$. Portanto, β_α induz um isomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebra entre I_{f_t} e I_{f_0}.

Mas f_t é $\mathcal{R}$-equivalente a f_0 se, e somente se, $t = u^2 v^2 - 1$ com $u^4 = v^5 = 1$.

A prova se encontra em [1]. $\square$

Corolário 3.2.7

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R} \arrow[dr, Rightarrow] & \mathcal{C} \arrow[dr, Rightarrow] & \\
& \mathcal{A} \arrow[r, Rightarrow] & \mathcal{K} \\
\mathcal{L} \arrow[ur, Rightarrow] & &
\end{tikzcd}$$

Demonstração: Ver [4]. $\square$

3.2.3 Grupos de Lie

Um *Grupo de Lie* G é um grupo com estrutura de variedade diferenciável C^∞ tal que a multiplicação

$$* : G \times G \to G$$

$$(g,h) \mapsto g * h$$

e a inversão

$$G \to G$$

$$g \mapsto g^{-1}$$

são aplicações C^∞.

Exemplo 3.2.8 *:*

1. $S^1 = \{x + iy / x^2 + y^2 = 1\} = \{e^{i\theta} / \theta \in [0, 2\pi]\}$
   com o produto $e^{i\theta}.e^{i\alpha} = e^{i(\theta+\alpha)}$ *é um grupo de Lie.*
2. *O produto carteziano de dois grupos de Lie é um grupo de Lie.*

Definição 3.2.2 *Sejam N e M variedades suaves. Uma* **imersão** *de N em M é uma aplicação* C^∞ $f : N \to M$ *tal que* $f^{'}(x)$ *é injetora ,*$\forall x \in N$.

Definição 3.2.3 *Sejam M uma variedade suave e* $N \subset M$ *uma subvariedade. Diremos que N é uma subvariedade* **imersa** *se a inclusão* $i : N \to M$ *for uma imersão.*

Seja G um grupo de Lie agindo na variedade M. Dado $x \in M$, a órbita de x é o conjunto

$$G.x = \{\varphi(g,x) \in M \ / \ g \in G\} \subset M.$$

Teorema 3.2.9 *Seja G um grupo de Lie agindo na variadade M. Então as órbitas são subvariedades imersas de M.*

Demonstração: Ver [8] □

Teorema 3.2.10 *Seja* $\varphi : G \times M \to M$ *uma ação de um grupo de Lie G em uma variedade M. Sabemos que as órbitas são subvariedades de M. Então* $\forall\ x \in M$ *a aplicação*

$$\varphi_x : G \to G.x$$

$$g \mapsto \varphi_x(g) = \varphi(g,x)$$

é uma submersão.

Demonstração: Primeiramente, mostraremos que φ_x tem posto constante, equivalentemente mostraremos que o posto de φ_x em $h \in G$ coincide com o posto de φ_x em $e \in G$ (elemento neutro).

Consideremos as seguintes aplicações;

$$\xi : G \to G, \quad \xi(g) = h.g$$

e

$$\psi : G.x \to G.x, \quad \psi(y) = \varphi(h, y).$$

Observe que o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi_x"] \arrow[d, "\xi"'] & G.x \arrow[d, "\psi"] \\ G \arrow[r, "\varphi_x"'] & G.x \end{tikzcd}$$

De fato, $\psi \circ \varphi_x(g) = \psi(\varphi(g,x)) = \varphi(h, \varphi(g,x)) = \varphi(h.g, x) = \varphi_x(h.g) = \varphi_x \circ \xi(g), \forall\ g \in G$.

Temos que $\xi : G \to G$ e $\psi : G.x \to G.x$ são difeomorfismo C^∞.

A comutatividade do diagrama anterior implica, pela regra da cadeia, na comutatividade do diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd} T_eG \arrow[r, "\partial\varphi_x(e)"] \arrow[d, "\partial\xi(e)"'] & T_xG.x \arrow[d, "\partial\psi(x)"] \\ T_hG \arrow[r, "\partial\varphi_x(h)"'] & T_{\varphi(h,x)}G.x \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{Pois,} \quad \psi \circ \varphi_x(g) & = & \varphi_x \circ \xi(g) \\ \Rightarrow \partial(\psi \circ \varphi_x)_{|_{g=e}} & = & \partial(\varphi_x \circ \xi)_{|_{g=e}} \\ \Rightarrow \partial(\psi(\varphi_x(e)).\partial\varphi_x(e) & = & \partial\varphi_x(\xi(e)).\partial\xi(e) \\ \Rightarrow \partial\psi(x).\partial\varphi_x(e) & = & \partial\varphi_x(h).\partial\xi(e). \end{array}$$

Portanto, como $\partial\xi(e)$ e $\partial\psi(e)$ são isomorfismo, segue-se que $posto\partial\varphi_x(e) = posto\partial\varphi_x(h)$.

Pela afirmação anterior, resta-nos mostrar que φ_x é uma submersão em algum $h \in G$, mas isto é consequência do teorema de Sard (Ver [3]) que afirma que o conjunto dos valores regulares de φ_x é denso. (Valor regular é onde $\partial\varphi_x$ tem posto máximo). $\square$

Corolário 3.2.11 $T_x(G.x) = \partial\varphi_x(e).(T_eG)$.

Demonstração : $\varphi_x : G \to G.x$ é uma submersão, então $\partial\varphi_x$ é sobrejetiva $\Rightarrow \partial\varphi_x(e)(T_eG) = T_x(G.x)$. $\square$

3.3 Espaço Tangente a $\mathcal{R}$-órbita

Seja $R = \{h : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^n, 0 \ / \ h$ é difeomorfismo $C^\infty\}$. Temos que $T_{I_n}R = \{\gamma^{'}(0) \in \mathcal{E}^0_{n,n} \ / \ \gamma : \mathbb{R} \to \mathcal{E}^0_{n,n}$ é um caminho diferenciável com $\gamma(0) = I_n\}$.

Proposição 3.3.1 *:* $T_{I_n}R = \mathcal{E}^0_{n,n}$

Demonstração: I) $T_{I_n}R \subset \mathcal{E}^0_{n,n}$ pela própria definição de $T_{I_n}R$.

II) $\mathcal{E}^0_{n,n} \subset T_{I_n}R$. Seja $g \in \mathcal{E}^0_{n,n}$, defina $\gamma : \mathbb{R} \to \mathcal{E}^0_{n,n}$ o caminho $\gamma(t) = I_n + t.g$. Logo, $g(x) = \gamma^{'}(0) \Rightarrow g \in T_{I_n}R$. $\square$

Considere a ação $\quad \varphi : \mathcal{R} \times \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$

$$(h, f) \mapsto f \circ h$$

Defina $\quad \varphi_f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}f$

$$h \mapsto f \circ h$$

Sabemos que $\partial\varphi_f(I)(T_I R) = T_f(\mathcal{R}f)$, em que $\mathcal{R}f = \{g : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R} \ / \ g = f \circ h\} = \mathcal{R}$-órbitas de f.

Considere $g \in T_{I_n}R = \mathcal{E}^0_{n,n}$ onde $g = (g_1, ..., g_n)$. Seja $\gamma(t) = I_n + t.g$ e tome $\beta(t)$ a imagem da aplicação $\gamma(t)$ por φ_f, isto é, $\beta(t) = \varphi_f(\gamma(t)) = f(\gamma(t))$. Logo, $\beta^{'}(0) \in T_f(Rf)$ e além disso, como $\beta(t)(x) = f(x + t.g(x))$, tem-se que

$$\beta^{'}(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(0)).\gamma^{'}(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).g_i(x)$$

o que implica,

$$T_f(\mathcal{R}f) = \{\beta^{'}(0) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)g_i(x) \ / \ g \in \mathcal{E}^0_{n,n}\} \Rightarrow T_f(\mathcal{R}f) = \mathfrak{m}_n.J_f.$$

Portanto, $T_f\mathcal{R}f = \mathfrak{m}_n.J_f$. De modo similar, vemos que :

$T_f\mathcal{L}f = \mathfrak{m}_p.\mathcal{E}_{n,p}$

$T_f\mathcal{A}f = \mathfrak{m}_n.J_f + \mathfrak{m}_p.\mathcal{E}_{n,p}$

$T_f\mathcal{K}f = \mathfrak{m}_n.J_f + I_f.\mathcal{E}_{n,p}$,

onde $\mathfrak{m}_n =< x_1, ..., x_n >$ e $J_f :=< \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) >$. Ver [4]

Exemplo 3.3.2 *Encontre o espaço tangente a $\mathcal{R}$-órbita de f, onde $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ é dada por $f(x, y) = x^3 + y^3 + xy$.*

Solução: Pelo resultado anterior, temos que $T_f\mathcal{R}f = \mathfrak{m}_n.J_f$. Portanto,

$$T_f\mathcal{R}f =< x, y > . < 3x^2 + y, 3y^2 + x > .$$

Exercício 3.3.1 *Sejam $f, f_t : \mathbb{C}^2, 0 \to \mathbb{C}, 0$ dados por $f(x,y) = x^3 + y^3 + xy$ e $f_t(x,y) = tx^3 + ty^3 + txy$. Mostre que f é $\mathcal{K}$-equivalente a f_t $\forall$ t, mas existe um t_0, tal que para este t_0, eles não são $\mathcal{R}$-equivalentes.*

Demonstração: Temos que $f_t = \phi \circ f \circ \beta$, onde $\phi : \mathbb{C}, 0 \to \mathbb{C}, 0$ é o um isomorfismo analítico dado por $\phi(y) = ty$ e β é o germe identidade em $\mathbb{C}^2$. Assim, f é $\mathcal{A}$-equivalente a f_t, $\forall$ t, portanto são $\mathcal{K}$-equivalentes.

Mostraremos agora que existe um t_0 tal que f e f_{t_0} não são $\mathcal{R}$-equivalentes. Suponha, por absurdo, que f e f_t sejam equivalentes para todo t. Então, podemos tomar um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e um caminho α, tal que,

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{R}f$$
$$\alpha(t) = f_t$$

Portanto, $\alpha^{'}(0) \in T_f\mathcal{R}f$, ou seja, $\alpha(t)^{'}_{|t=0} = (f_t)^{'}_{|t=0} = (tf)^{'}_{|t=0} = f$. Logo, $f \in T_f\mathcal{R}f = \mathfrak{m}_nJ_f$. Pelo teorema principal, temos que: $\mu(f) = \tau(f)$, o que provaremos mais na frente que isso não acontece. Portanto, existe um t_0, tal que f e f_{t_0} não sejam $\mathcal{R}$-equivalentes. $\square$

Definição 3.3.1 *: Definimos o Espaço Tangente Extendido por*

$$J_f := (T_e)_f(Rf).$$

Definição 3.3.2 *: Seja $f \in \mathcal{E}_n$, definimos a R-codimensão de f por*

$$cod_R f = dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{E}_n}{J_f}.$$

Diremos que f tem R-codimensão finita quando $cod_R f < +\infty$.

Teorema 3.3.3 *: Seja $f \in \mathcal{E}_n$. Então f tem R-codimensão finita se, e somente se, existir $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{m}_n^k \subset J_f$.*

Demonstração: Sabemos que um ideal $I \subset \mathcal{E}_n$ tem codimensão finita se, e somente se, $I \supset \mathfrak{m}_n^k$ para um inteiro k.

Portanto, $cod_{\mathbb{R}} f = dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{E}_n}{J_f} = cod J_f < +\infty \Leftrightarrow$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{m}_n^k \subset J_f$. Ja que J_f é um ideal em $\mathcal{E}_n$. $\square$

Exercício 3.3.2 *Calcule a codimensão de f, onde $f : \mathbb{R}^2, 0 \to \mathbb{R}$ é o dada por $f(x,y) = x^2y + y^4$.*

Solução: Veja que $J_f =< xy, x^2 + 4y^3 >$. Queremos calcular a codimensão de f, que equivalente a encontrar a quantidade de elementos que não pertence ao ideal J_f. Como J_f é gerado por termos de grau ≥ 2 temos que $x \notin J_f$ e que $y \notin J_f$. Portanto, $1, x, y \notin J_f$. Ou seja, codimensão de $f \geq 3$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \boxed{1} & & & & \\
 & & & \boxed{x} & & \boxed{y} & & & \\
 & & x^2 & & xy & & y^2 & & \\
 & x^3 & & x^2y & & xy^2 & & y^3 & \\
x^4 & & x^3y & & x^2y^2 & & xy^3 & & y^4
\end{array}$$

Como $xy \in J_f$, temos que $x^2y, xy^2, x^2y^2, ... \in J_f$, logo nos restam os seguintes casos

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \boxed{1} & & & & \\
 & & & \boxed{x} & & \boxed{y} & & & \\
 & & x^2 & & & & y^2 & & \\
 & x^3 & & & & & & y^3 & \\
x^4 & & & & & & & & y^4
\end{array}$$

Provaremos que $x^2, y^3 \notin J_f$ e que $x^3, y^4 \in J_f$ mostrando então que $1, x, y, x^2, y^2, y^3 \notin J_f$. Ou seja, que a codimensão de f é 6. Ora, J_f é gerado por elementos com termos ≥ 2 então, afim de que $x^2 \in J_f$ teriamos constantes $\alpha, \beta \in \mathcal{E}_2$ tais que $x^2 = \alpha(xy) + \beta(x^2 + 4y^3)$, gerando um absurdo. Consequentemente temos que $y^3 \notin J_f$, por que do contrário, teriamos $x^2 = (x^2 + 4y^3) - (4y^3) \in J_f$, um absurdo, pois $x^2 \notin J_f$. Por último:

$$x^3 = -4xy^3 + x^3 + 4xy^3 = -4y^2(xy) + x(x^2 + 4y^3) \in < xy, x^2 + 4y^3 >= J_f.$$

$$y^4 = -\frac{1}{4}x^2y + \frac{1}{4}x^2y + y^4 = -\frac{1}{4}x(xy) + \frac{1}{4}y(x^2 + 4y^3) \in < xy, x^2 + 4y^3 >= J_f.$$

□

Teorema 3.3.4 *Seja $f \in \mathcal{E}_n$, e suponha que J_f ou $\mathfrak{m}_n J_f$ tenha codimensão finita positiva, então temos $cod\mathfrak{m}_n J_f = n + cod J_f$.*

Demonstração ver [6].

Proposição 3.3.5 *: Seja $f \in \mathcal{E}_n$ um germe de R-codimensão finita e não-nula. Então, a origem de $\mathbb{R}^n$ é um ponto singular isolado de qualquer representante de f, isto é, existe uma vizinhança da origem da qual o zero é a unica singularidade do representante de f.*

Demonstração: Seja $f \in \mathcal{E}_n$ um germe de R-codimensão finita e não-nula. Afirmamos que 0 é um ponto singular de f. Com efeito, suponha por absurdo, que 0 seja um ponto regular de f, isto é, $\frac{\partial f}{x_i}(0) \neq 0$, para algum i. Então, pela continuidade de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, existe uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^n$ de 0 tal que $\frac{\partial f}{\partial x_i}_{|U} \neq 0$.

Logo, $J_f = < \frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} > = \mathcal{E}_n$, pois $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ é invertível, mostrando que, $cod_{\mathbb{R}} f = dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{E}_n}{J_f} = 0$. Contradição.

Como $cod_{\mathbb{R}} f < \infty$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{m}_n^k \subset J_f$. Logo $x_i^k \in \mathfrak{m}_n^k \subset J_f, \forall\ i = 1, ..., n$.

Portanto, $x_i^k = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x) \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$.

Assim, se $\bar{x} = (\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ é um ponto singular de $f \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) = 0, \forall\ j \Rightarrow \bar{x}_i^k = 0, \forall\ i = 1, ..., n. \Rightarrow \bar{x}_i = 0, \forall\ i = 1, ..., n.$

Logo $\bar{x} = 0$ é o único ponto singular de f em U. □

Observação 3.3.6 *A recíproca da proposição anterior não é verdadeira, em geral, por exemplo*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad com\ f(x, y) = (x^2 + y^2)^2$$

tem singularidade isolada na origem, pois

$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x(x^2 + y^2) = 0;$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y(x^2 + y^2) = 0$

se, e somente se $x = y = 0$.

Suponha que $cod_{\mathbb{R}} f$ *seja finita, então, pelo teorema 3.3.3 temos que existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $\mathfrak{m}_2^k \subset J_f$. *Desta forma os monômios* x^k, y^k *se escrevem como combinação linear de* $x(x^2 + y^2), y(x^2 + y^2)$ *com coeficientes em* $\mathcal{E}_2$. *Ou seja,*

$$\begin{aligned} x^k &= a(x,y)x(x^2 + y^2) + b(x,y)y(x^2 + y^2), \ com\ a(x,y), b(x,y) \in \mathcal{E}_2 \\ &= a(x,y)x^3 + a(x,y)xy^2 + b(x,y)yx^2 + b(x,y)y^3 \end{aligned}$$

Logo, $a(x, y) = x^{k-3}$ *e* $a(x, y)xy^2 + b(x, y)yx^2 + b(x, y)y^3 = 0$. *Portanto,*

$$x^{k-2}y^2 + b(x, y)yx^2 + b(x, y)y^3 = 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

$$x^{k-2}y + b(x, y)x^2 + b(x, y)y^2 = 0.$$

gerando um sistema inconsistente. Logo, $cod_{\mathbb{R}} f = +\infty$. □

Exercício 3.3.3 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x, y, z) = y^2 - z^2x^2 + z^5$ *não tem codimensão finita.*

Com efeito, as derivadas parciais de f se anulam ao longo do eixo x, portanto a origem não é um ponto singular isolado e pela proposisão 3.3.9 o germe não tem codimensão finita em $\mathcal{E}_3$. □

Exercício 3.3.4 *Um germe* $f : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}, 0$ *tem* $codf = 0 \Leftrightarrow 0$ *é um ponto regular de* f*. Neste caso,* $f \underset{\mathcal{R}}{\sim} x_1$*, isto é,* $f(x_1, ..., x_n) \underset{\mathcal{R}}{\sim} x_1$*.*

Com efeito, $codf = 0 \Leftrightarrow dim\frac{\mathcal{E}_n}{J_f} = 0 \Leftrightarrow \mathcal{E}_n = J_f =< \frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} >$. Só que, $\mathcal{E}_n = J_f \ \Leftrightarrow \ \exists \ \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \neq 0, \forall \ x$ numa vizinhança de $0 \Leftrightarrow 0$ é um ponto regular de f.

Nestas condições, sem perda de generalidade, suponha $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \neq 0$, assim, pelo teorema da Forma Local das Submersões (ver [7]) existe um difeomorfismo $h : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^n, 0$ tal que $f \circ h^{-1}(x_1, ..., x_n) = x_1$. □

Definição 3.3.3 *Seja* $U \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto aberto,* $x_0 \in U$ *um ponto e* $f : U \to \mathbb{R}$ *uma função suave. O ponto* x_0 *é chamado singularidade não-degenerado se:*

i) $df(x_0) = 0$

ii) A matriz Hessiana do ponto x_0 *não-degenerado tem posto máximo, isto é,*

posto $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right| = n.$ *Para* $i, j = 1, ..., n.$

Lema 3.3.7 (Morse) *Seja* U *uma vizinhança da origem em* $\mathbb{R}^n$ *e* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *uma função suave tal que:*

i) $f(0) = 0.$

ii) 0 é uma singularidade não-degenerada da função f*. Então existe uma vizinhança* $U_1 \subset U$ *da origem* $0 \in \mathbb{R}^n$ *e um difeomorfismo* $g : U_1 \to \mathbb{R}^n$ *tal que :*

a) $g(0) = 0.$

b) $f \circ g^{-1}(x_1, ..., x_n) = -x_1^2 - ... - x_p^2 + x_{p+1}^2 + ... + x_n^2$ *para algum inteiro* p*,* $0 \leq p \leq n$*, chamado de índice do ponto singula* x_0 *de* f*.*

Demonstração: Ver em [4] □

Definição 3.3.4 *Seja* $f \in \mathfrak{m}_n^2$ *de codimensão* ≥ 2*. Dizemos que* f *tem corank* c *se o posto da matriz Hessiana de* f *é n-c.*

Lema 3.3.8 (Splitting Lema) *Seja* $f \in \mathfrak{m}_n^2$ *um germe finitamente determinado de corank = c. Então,* f *é* $\mathcal{R}$*-equivalente ao germe*

$$g(x_1, ..., x_c) + \delta_1 x_{c+1}^2 + ... + \delta_{n-c} x_n^2 \quad e \quad g \in \mathfrak{m}_n^3, \quad \delta_i = \pm 1.$$

Demonstração: Primeiramente faremos a seguinte notação. Dado dois germes $\phi, \beta \in \mathcal{E}_n$ escrevemos $\phi \underset{k}{\sim} \beta$ quando existir um germe invertível $h : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^n, 0$ onde $\phi \circ h, \beta$ tem o mesmo k-jato. Observe que $\underset{k}{\sim}$ é uma relação de equivalência. Mostraremos por indução em k, que existe um germe $g_k \in \mathfrak{m}_c^3$, um polinômio de grau $\leq k$, tal que

$$f(x_1, ..., x_n) \underset{k}{\sim} g_k(x_1, ..., x_c) + \delta_1 x_{c+1}^2 + ... + \delta_{n_c} x_n^2.$$

i) Para $k = 2$. O 2-jato de f é uma forma quadrática de n variavéis de posto $r = n - c$, de modo equivalente (em uma mudança linear de coordenadas) a forma quadrática

$$\delta_1 x_{c+1}^2 + ... + \delta_{n-c} x_n^2, \text{ com } \delta_i = \pm 1,$$

resultado da algébra quadrátrica padrão.

ii) Para $n = k$, por hipótese de indução, verdadade.

$$f(x) \underset{k}{\sim} g_k(x_1, ..., x_c) + g(\bar{x}), \quad \text{onde } \bar{x} = (x_{c+1}, ..., x_n).$$

onde $g(\bar{x}) = \delta_1 x_{c+1}^2 + ... + \delta_{n-c} x_n^2$

iii) Mostraremos agora para $n = k + 1$. Ora,

$$j^{k+1} f(x) = j^k f(x) + H_{k+1}(x_1, ..., x_n) \underset{k}{\sim} g_k(x_1, ..., x_c)$$
$$+ g(\bar{x}) + H_{k+1}(x_1, ..., x_n)$$

onde $H_{k+1}(x)$ é polinômio homogêneo de grau $k + 1$.

$$H_{k+1}(x) = [H_{k+1}(x_1, ..., x_c, x_{c+1}, ..., x_n) - H_{k+1}(x_1, ..., x_c, 0, ..., 0)]$$
$$+ H_{k+1}(x_1, ..., x_c, 0, ..., 0).$$

Por Hadamard, $H_{k+1}(x) = h(x_1, ..., x_c) + x_{c+1}\varphi_1(x) + ... + x_n \varphi_{n-c}(x)$, onde $h(x_1, ..., x_c) = H_{k+1}(x_1, ..., x_c, 0, ..., 0)$ e temos também que h é um polinômio homogêneo de grau $(k+1)$ e $\varphi_1, ..., \varphi_{n-c}$ são polinômios homogêneos de grau k.

Portanto,

$$\begin{aligned} j^{k+1} f(x) &\underset{k}{\sim} g_k(x_1, ..., x_c) + g(\bar{x}) + H_{k+1}(x_1, ..., x_n) \\ &\underset{k}{\sim} g_k(x_1, ..., x_c) + g(\bar{x}) + h(x_1, ..., x_c) + x_{c+1}\varphi_1(x) + ... + \\ &\quad + x_n \varphi_{n-c}(x) \\ &\underset{k}{\sim} g_{k+1}(x_1, ..., x_c) + x_{c+1}\varphi_1(x) + ... + x_n \varphi_{n-c}(x) + g(\bar{x}). \end{aligned}$$

onde $g_{k+1} = g_k + h$ e $g(\bar{x}) = \delta_1 x_{c+1}^2 + ... + \delta_{n-c} x_n^2$.

Definimos o seguinte polinômio $\phi : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$, onde suas componentes serão;

$$\begin{cases} \phi_1(x_1,...,x_n) & = & x_1 & & \\ & \vdots & & & \\ \phi_c(x_1,...,x_n) & = & x_c & & \\ \phi_{c+1}(x_1,...,x_n) & = & x_{c+1} & - & \frac{\varphi_1(x)}{2\delta_1} \\ & \vdots & & & \\ \phi_n(x_1,...,x_n) & = & x_n & - & \frac{\varphi_{n-c}(x)}{2\delta_{n-c}} \end{cases}$$

Observe que $J_\phi = \begin{bmatrix} I_{c\times c} & 0 \\ A & C \end{bmatrix}$. Onde:

$$C = \begin{bmatrix} 1-(\frac{1}{2\delta_1})\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{c+1}} & (\frac{1}{2\delta_1})\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{c+2}} & \cdots & (\frac{1}{2\delta_1})\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ (\frac{1}{2\delta_2})\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_{c+1}} & 1-(\frac{1}{2\delta_2})\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_{c+2}} & \cdots & (\frac{1}{2\delta_2})\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\frac{1}{2\delta_{n-c}})\frac{\partial\varphi_{n-c}}{\partial x_{c+1}} & (\frac{1}{2\delta_{n-c}})\frac{\partial\varphi_{n-c}}{\partial x_{c+2}} & \cdots & 1-(\frac{1}{2\delta_{n-c}})\frac{\partial\varphi_{n-c}}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{(n-c)\times(n-c)}$$

Note que a matriz jacobiana de ϕ é a matriz identidade $n\times n$, logo ϕ é invertível. Substituindo $\phi_1,...,\phi_n$ por $x_1,...,x_n$ em $g_{k+1}(x_1,...,x_c)+x_{c+1}\varphi_1(x)+ ... + x_n\varphi_{n-c}(x)+g(\bar{x})$ nos obtemos

$$f(x) \underset{k+1}{\sim} g_{k+1}(x_1,...,x_c)+\delta_1 {x_{c+1}}^2+...+\delta_{n-c}{x_n}^2.$$

onde $g_{k+1}=g_k+h$. O que completa a prova de indução. □

Proposição 3.3.9 *Seja $f\in\mathfrak{m}_n^2$ de corank 1 e codimensão k. Então f é equivalente ao germe $\pm\, x_1^{k+1}\pm x_2^2...\pm x_n^2$.*

Demonstração: Pelo Splitting lema 3.3.8 temos que f é $\mathcal{R}$-equivalente ao germe $g(x_1)+\delta_1x_2^2+...+\delta_{n-1}x_n^2$ e $g\in\mathfrak{m}_1^3$, $\delta_i=\pm1$.

Como $g\in\mathfrak{m}_1^3$ tem codimensão finita e pelo lema de Hadamard temos que $g=x^{k+1}h$ para algum $h\in\mathcal{E}_1$ com $h(0)\neq0$. Então $\frac{\partial g}{\partial x}=x^k\{(k+1)h+x\frac{\partial h}{\partial x}\}$: a expressão entre chaves é $\neq 0$ quando $x=0$, logo invertível e deduz que $J_g=<x^k>=\mathfrak{m}^k$, por isso, $\mathfrak{m}J_g=\mathfrak{m}^{k+1}$. Logo g é $(k+1)$-determinado, assim $g\sim cx^{k+1}$ onde $c\neq0$. Uma mudança de coordenadas, em seguida, temos $g\sim\pm\, x^{k+1}$.

Portanto, $f\sim\pm\, x_1^{k+1}\pm x_2^2...\pm x_n^2$. □

Proposição 3.3.10 *Seja $f\in\mathfrak{m}_n^2$ um germe de codimensão finita e corank c. Então $codf\geq\frac{c(c+1)}{2}+1$.*

Demonstração: Pelo Splitting Lema 3.3.8, temos que f é $\mathcal{R}$-equivalente ao germe $g(x_1,...,x_c)+\delta_1x_{c+1}^2+...+\delta_{n-c}x_n^2$ e $g\in\mathfrak{m}_c^3$. Seja $I=J_g.\mathfrak{m}_c\subseteq\mathfrak{m}_c^3$. Ora, $codI=cod_0I+cod_1I+...$. Onde $cod_kI=dim\frac{I+\mathfrak{m}_n^k.\mathcal{E}_n}{I+\mathfrak{m}_n^{k+1}.\mathcal{E}_n}$.

Logo $cod_0 I = dim_{\mathbb{R}} \frac{I+\mathcal{E}_c}{I+\mathfrak{m}_c} = 1$.

$cod_1 I = dim_{\mathbb{R}} \frac{I+\mathfrak{m}_c}{I+\mathfrak{m}_c^2} = c$.

$cod_2 I = dim_{\mathbb{R}} \frac{I+\mathfrak{m}_c^2}{I+\mathfrak{m}_c^3} = dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathfrak{m}_c^2}{\mathfrak{m}_c^3} = \frac{c(c+1)}{2}$.

Logo, $codI \geq 1 + c + \frac{c(c+1)}{2}$. Mas, $codg = dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{E}_c}{J_g} = dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{E}_c}{J_g.\mathfrak{m}_c} - c$.

Portanto, $codg \geq \frac{c(c+1)}{2} + 1$. $\square$

3.4 Germes finitamente determinado

Daremos definições básicas no contexto da $\mathcal{R}$-equivalência. As mesmas definições podem ser feitas para os outros grupos apenas substituindo $\mathcal{R}$ por $\mathcal{L}$, $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{K}$.

Definição 3.4.1 *O k-jato $j^k f$ de um germe $f \in \mathcal{E}^0_{n,p}$ é chamado $\mathcal{R}$-suficiente se qualquer germe $g \in \mathcal{E}^0_{n,p}$ com $j^k g = j^k f$ é $\mathcal{R}$-equivalente ao germe f. Isto é $\mathcal{R}.f$ contém o conjunto $\{g \in \mathcal{E}^0_n \ / \ j^k g(0) = j^k f(0)\}$. Neste caso, dizemos também que f é k-$\mathcal{R}$-determinado. O germe f é chamado finitamente $\mathcal{R}$-determinado se existir um número inteiro positivo k tal que, f é k-$\mathcal{R}$-determinado. Neste caso, o número*

$$O_{\mathcal{R}}(f) := min\{k \in \mathbb{N}; f \text{ é k-}\mathcal{R}\text{-determinado}\}$$

é chamado de ordem de $\mathcal{R}$-determinação finita de f.

Teorema 3.4.1 *Se $f \in \mathcal{E}_n$ é k-$\mathcal{R}$-finitamente determinado, então $J_f.\mathfrak{m}_n \supseteq \mathfrak{m}_n^{k+1}$.*

Demonstração Ver [6]. □

Observação 3.4.2 *A recíproca do Teorema anterior não é verdadeira em geral. Isto é, se $J_f.\mathfrak{m}_n \supset \mathfrak{m}_n^{k+1}$, em geral não se tem que f é k-$\mathcal{R}$-finitmente determinado.*

De fato, seja $f \in \mathcal{E}_2, f(x,y) = x^3 + y^3 \Rightarrow J_f.\mathfrak{m}_2 =< x^2, y^2 > . < x, y >$ $=< x^3, x^2y, xy^2, y^3 >= \mathfrak{m}_2^3$. Mas f não é 2-$\mathcal{R}$-finitamente determinado, pois $j^2 f(0) = 0$ e tomando $g(x,y) = 0 \Rightarrow j^2 g(0) = 0 = j^2 f(0)$. Mas, se $g \underset{R}{\sim} f$ implicaria que $g = f \circ h = 0$ o que daria $f \equiv 0$. Uma contradição. □

Capítulo 4

Polinômios quase-homogêneos

Seja $\mathbb{K}[x_1, x_2, ..., x_n]$ o anel de polinômios na variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$ com coeficientes no corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. A cada variável x_i associamos um número inteiro positivo w_i, chamado peso de x_i.

Definição 4.0.2 *: Um polinômio* $f(x) = \sum_{a \in I} \alpha_a x_1^{a_1} ... x_n^{a_n}$ *em* $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ *é dito* **homogêneo de grau d** *se todos seus monômios têm grau d. Isto é, se* $f(x) = \displaystyle\sum_{a \in I \subset \mathbb{N}^n} \alpha_a x_1^{a_1} ... x_n^{n}$ *então* $a_1 + ... + a_n = d, \ \forall a \in I$, *com* $\alpha_a \neq 0$.

Exemplo 4.0.3 $f(x, y) = x^3 - xy^2 + y^3$ *é homogêneo de grau 3.*

Definição 4.0.3 *: Um polinômio* $f(x) = \sum_{a \in I} \alpha_a x_1^{a_1} ... x_n^{a_n}$ *em* $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ *é dito* **quase-homogêneo de grau d** *com relação ao peso* $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ *se* $w.a := w_1 a_1 + ... + w_n a_n = d, \forall \ a = (a_1, ..., a_n) \in I \subset \mathbb{N}^n$.

Exemplo 4.0.4 *: O polinômio*

$$f(x, y, z) = x^2 y^2 + x^4 y + y^3 + xyz^3 + z^6$$

é quase-homogêno com pesos $w = (1, 2, 1)$ *e grau* $d = 6$.

Observação 4.0.5 *: Muitas vezes usamos a notação* $d = deg_w(f)$ *e outra vezes omitimos* w. *Um polinômio quase-homogêneo como na observação anterior é dito quase-homogêneo do tipo* $(w_1, ..., w_n; d)$ *ou* $(w; d)$.

Proposição 4.0.6 *: Fixado o peso* $w = (w_1, ..., w_n)$, *seja* $S_d =\{$ *polinômios quase-homogêneo de grau d com relação aos pesos* $w_1, ..., w_n\} \cup \{0\}$. *Então* S_d *é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$.

Demonstração: Dados $f(x) = \sum \alpha_a x_1^{a_1} ... x_n^{n}$ e $g(x) = \sum \beta_b x_1^{b_1} ... x_n^{b_n}$ e $r \in \mathbb{K}$, tem-se que $h(x) = f(x) + r.g(x) = \sum \alpha_a x_1^{a_1} ... x_n^{n} + \sum r \beta_b x_1^{b_1} ... x_n^{b_n}$ é claramente quase-homogêneo do tipo $(w_1, ..., w_n; d)$. Portando temos que $h \in S_d$. $\square$

Observação 4.0.7 *: Sejam $f(x)$ um polinômio quase-homogêneo do tipo $(w_1, ..., w_n; d)$. Tome $w' = MDC\{w_1, ..., w_n\}$. Então, $f(x)$ é quase-homogêneo do tipo $(\frac{w_1}{w}, ... \frac{w_n}{w}; \frac{d}{w})$.*

De fato, $a_1w_1 + ... + a_nw_n = d \Leftrightarrow a_1\frac{w_1}{w} + ... + a_n\frac{w_n}{w} = \frac{d}{w}$. □

Como consequência, podemos sempre assumir que os pesos $w_1, ..., w_n$ são primos entre si. Observe também que todo polinômio homogêneo (cujos monômios têm o mesmo grau) são quase-homogêneo com pesos $w_1 = ... = w_n = 1$.

Observação 4.0.8 *: Fixados pesos $w = (w_1, ..., w_n)$, associamos a* **ação do grupo multiplicativo** $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} - \{0\}$ *em $\mathbb{K}^n$ dado por :*

$$\mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$$

$$(t, x) \mapsto (t^{w_1}x_1, ..., t^{w_n}x_n)$$

Proposição 4.0.9 *: Um polinômio $f(x) \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ é quase-homogêne do tipo $(w_1, ..., w_n; d)$ se, e somente se, $f(tx) = f(t^{w_1}x_1, ..., t^{w_n}x_n) = t^d f(x)$, onde $(t.x) = (t^{w_1}x_1, ..., t^{w_n}x_n)$.*

Demonstração: $\Rightarrow\rfloor$ Se f é quase-homogêneo do tipo (w, d) então

$a_1w_1 + ... + a_nw_n = d, \forall\ a = (a_1, ..., a_n) \in I$. Logo :

$$\begin{aligned} f(tx) &= f(t^{w_1}x_1, ..., t^{w_n}x_n) \\ &= \sum \alpha_a (t^{w_1}x_1)^{a_1} ... (t^{w_n}x_n)^{a_n} \\ &= \sum \alpha_a t^{a_1w_1+...+a_nw_n} x_1^{a_1} ...\ x_n^{a_n} \\ &= t^d \sum \alpha_a x_1^{a_1} ...\ x_n^{a_n} \\ &= t^d f(x). \end{aligned}$$

$\lfloor\Leftarrow$

$$\begin{aligned} f(tx) &= t^d f(x) \Rightarrow \sum \alpha_a (t^{w_1}x_1)^{a_1} ... (t^{w_n}x_n)^{a_n} \\ &= t^d \sum \alpha_a x_1^{a_1} ...\ x_n^{a_n} \\ &= \Rightarrow t^{w_1a_1+...+w_na_n} \\ &= t^d, \end{aligned}$$

$\forall\ t \Rightarrow w_1a_1 + ... + w_na_n = d, \forall\ a \in I$

$\Rightarrow f(x)$ é quase-homogêneo do tipo $(w_1, ..., w_n; d)$. □

Proposição 4.0.10 *: Seja $f(x) \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ um polinômio quase-homogêneo do tipo $(w_1, ..., w_n; d)$. Então $f(x) \in \mathfrak{m}_n Jf$.*

Demonstração: Primeiramente provaremos que é valida a "fórmula de Euler"

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}(x) = d.f(x)$$

De fato, como $f(t^{w_1}x_1,...,t^{w_n}x_n) = t^d f(x)$, derivando com relação a t, obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(t^{w_1}x_1,...,t^{w_n}x_n).w_i t^{w_i-1}x_i = dt^{d-1}f(x)$$

e fazendo t = 1, tem-se

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i.\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = d.f(x).$$

Logo $f(x) \in \mathfrak{m}_n J_f$. □

No teorema seguinte, usaremos a notação $V(f)$ para designar o conjunto algébrico $\{x \in \mathbb{R}^n \ / \ f(x) = 0\}$.

Teorema 4.0.11 *:*

I) Se $f(x)$ é quase-homogêneo do tipo $(x_1,...,w_n;d)$, então $V(f)$ é invariante pela ação $tx = (t^{w_1}x_1,...,t^{w_n}x_n)$, isto é, se $x \in V(f)$ então $tx \in V(f)$.

II) No caso complexo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ vale a recíproca do item anterior.

Demonstração: i) Provaremos primeiramente para o caso real. Seja $x \in V(f)$, então $f(x) = 0 \Rightarrow f(tx) = t^d f(x) = t^d.0 = 0 \Rightarrow tx \in V(f)$.

ii) Provaremos agora o caso complexo.
$\Rightarrow\rfloor$ Segue de maneira análoga ao ítem anterior.

$\lfloor\Leftarrow$ Suponhamos que $V(f)$ seja invariante pela ação de quase-homogeneidade ($\mathbb{C}^n$-Ação).

Seja $f(x) = g_1(x)^{a_1}...g_p(x)^{a_p}$ uma decomposição de f em fatores irredutíveis em $\mathbb{K}$. Então é suficiente mostrar que g_i é quase-homogêneo com respeito ao peso $w = (w_1,...,w_n)$.

Observe que $V_i = V(g_i) = \{x \in \mathbb{C}^n \ / \ g_i(x) = 0\}$ são exatamente as componentes irredutíveis da hipersuperficie $V(f)$.

A imagem da aplicação algébrica

$$\mathbb{C}^* \times V_i \to V(f)$$

$$(t,x) \mapsto tx$$

é irredutível e contém a componente irredutível V_i. Por questão de irredutibilidade, elas coincidem (imagem da aplicação com a componente irredutível V_i).

Isto mostra que V_i é, ele próprio, um conjunto $\mathbb{C}^*$-invariante, $\forall\ i = 1,...,p$.

Em outras palavras, podemos assumir a partir de agora que o polinômio f é irredutível.

Seja $f = f_a + f_{a+1} + ... + f_b$ uma expansão de f como soma de componentes quase-homogêneas $f_k \in S_k,$ com $f_a, f_b \neq 0.$

Para $x \in V(f)$ temos ;

$$\begin{aligned} f(x) = 0 = f(tx) &= f_a(tx) + ... + f_b(tx) \\ &= t^a f_a(x) + ... + t^b f_b(x) \\ &= \sum_{k=a}^{b} t^k . f_k(x), \forall\ t \in \mathbb{C}^*. \end{aligned}$$

Com $f_k \in I(V(f))$ onde

$$I(V(f)) = \sqrt{f} = \{f \in \mathcal{E}; f^k \in (f)\}$$

$$I(V(f)) = \sqrt{(f)} = (f).$$

Esta última igualdade decorre do fato de f ser um polinômio irredutível, isto é, o ideal principal $(f),$ em $\mathbb{K}$, é primo.

Em particular, temos que $f_a = f.g$ para algum polinomial $g \in \mathbb{K}$. Analizando as componentes quase-homogêneos em ambos os lados desta equação, segue-se que a única possibilidade é $f = f_a$ e $g = 1$. Portanto, f é quase-homogêneo. $\square$

Existe também um resultado analítico local semelhante a este Algébrico global. Primeiramente precisamos de uma nova definição.

Definição 4.0.4 *: O germe de um conjunto analítico* $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$*, é chamado quase-homogêneo com respeito ao peso* w *se este for* $\mathbb{C}^*$*-invariante com respeito a ação dada por:*

$$\mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$$

$$(t, x) \mapsto (t^{w_1} x_1, ..., t^{w_n} x_n)$$

A última condição singnifica mais precisamente o seguinte : existe uma bola aberta B centrada na origem de $\mathbb{C}^n$ e um representante $\widetilde{X}$ do germe $(X, 0)$ na bola B, tal que $t.x \in \widetilde{X},\ \forall\ x \in \widetilde{X}$ e $t \in \mathbb{C}^*$ com $\mid t \mid \leq 1$.

Proposição 4.0.12 *O germe de conjunto analítico* $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ *é quase-homogêneo com respeito ao peso* w *se, e somente se, o ideal* $I = I(X) \subset \mathcal{E}_n$ *é gerado por polinômios quase-homogêneos com respeito ao peso* w*.*

Demonstração: $\lfloor\Leftarrow$ Se o ideal I for gerado por polinômios quase-homogêneos $g_1, g_2, ..., g_p$ então podemos tomar uma bola aberta $B = \{x \in \mathbb{C}^n; |x_1|^2 + ... + |x_n|^2 < r\}$ e um representante $\widetilde{X} = \{x \in B; g_1(x) = ... = g_p(x) = 0\}$. Note que $|t| \leq 1, x \in B \Rightarrow tx \in B$. Portanto $\widetilde{X}$ é $\mathbb{C}^*$-invariante.

$\Rightarrow\rfloor$ Reciprocamente, assuma agora que o germe $(X, 0)$ é quase-homogêneo. Por Hilbert Nullstellenzatz temos que o ideal I conicide com o radical $\sqrt{I}$.

Sejam $f_1, ..., f_p \in \mathcal{E}_n$ um sistema de geradores de I e B um aberto centrado na origem, em que todos os germes f_i estão definidos, e

$$\widetilde{X} = \{x \in B; f_1(x) = ... = f_p(x) = 0\}$$

o representante de $(X, 0)$ o qual é $\mathbb{C}^*$-invariante. Então, para $x \in X$ e $t \in \mathbb{C}^*, |t| \leq 1$ tem-se

$$0 = f_i(tx) = \sum_{d>0} t^d.f_{i,d}(x)$$

Aqui $f_{i,d}$ denota a componente quase-homogênea de f_i de grau d com respeito a w, isto é, f_i tem uma decomposição de soma infinita $\sum_{d>0} f_{i,d}$. Então a igualdade anterior implica que $f_{i,d} \in I$, $\forall$ i e d. Denote por J o ideal em $\mathcal{E}_n$ gerado por polinômios quase-homogêneo $f_{i,d}$. Temos que $I + \mathfrak{m}_n^k = J + m_n^k \; \forall \; k \geq 1$.

Para finalizar nossa prova, precisamos de um resultado da Álgebra Comutativa.

Teorema 4.0.13 (Krull) *Sejam E um anel local Noetheriano,* $\mathfrak{m}$ *um ideal e M um E-módulo finitamente gerado. Então* $\bigcap_{k \geq 1} (\mathfrak{m}^k.M) = I$

Demonstração : Ver [8]

Em particular, para todo ideal $I \subset E$ temos $\bigcap_{k \geq 1} (I + \mathfrak{m}^k) = I$.

Voltando a nossa demonstração, basta aplicar o Teorema de Krull para o caso $M = E/I$. Assim, teremos que $I = J$, e portanto I é gerado por polinômios quase-homogêneos.

Uma vez que $\mathcal{E}_n$ é noetheriano, qualquer conjunto de geradores de um ideal $I \subset \mathcal{E}_n$ contém um subconjunto finito que ainda gera o ideal I. $\square$

Proposição 4.0.14 *Assuma que na proposição anterior* $(X, 0)$ *seja uma singularidade interseção completa, isto é, o ideal I é gerado por* $p = n - dimX$ *elementos em* $\mathcal{E}_n$. *Se* $(X, 0)$ *é quase-homogêneo então I é gerado por p polinômios quase-homogêneos.*

Demonstração: Suponha que $(X, 0)$ seja uma singularidade de interseção completa, isto é, o ideal I é gerado por $p = n - dimX$ elementos em $\mathcal{E}_n$. Suponha também que $(X, 0)$ é quase-homogêneo. Logo, pela proposição anterior, temos que I será gerado por polinômois quase-homogêneo com respeito ao peso w.

Temos por hipótese que:

1. $I = < f_1, ..., f_p >$, onde $f_j \in \mathcal{E}_n \forall j \in (1, ..., p)$;
2. $I = < h_1, ..., h_m >$.

Por definição de singularidade de interseção completa, temos que $f_1, ..., f_p$ é um conjunto mínimo de geradores para o ideal I. Portanto, ganhamos que $p \leq m$. Nosso objetivo é mostrar que $m = p$.

Suponha que p seja estritamente menor do que m. Ou seja, $m = p + k$, com $k \in \mathbb{N}$.

Como $h_j \in I \ \forall \ j = 1, ..., m$, temos que:

$$\begin{cases} h_1 &= \alpha_{11} f_1 &+ \alpha_{12} f_2 &+ \ ... \ + &\alpha_{1p} f_p \\ h_2 &= \alpha_{21} f_1 &+ \alpha_{22} f_2 &+ \ ... \ + &\alpha_{2p} f_p \\ & \vdots & & & \\ h_p &= \alpha_{p1} f_1 &+ \alpha_{p2} f_2 &+ \ ... \ + &\alpha_{pp} f_p \\ h_{p+1} &= \alpha_{(p+1)1} f_1 &+ \alpha_{(p+1)2} f_2 &+ \ ... \ + &\alpha_{(p+1)p} f_p \\ & \vdots & & & \\ h_m &= \alpha_{m1} f_1 &+ \alpha_{m2} f_2 &+ \ ... \ + &\alpha_{mp} f_p \end{cases}$$

Este sistema linear tem $m = p+k$ equações lineares e p incógnitas. Portanto, existem $k - h_j$ que são combinações lineares dos p restantes h_i.

Podemos supor, sem perda da generalidade, que h_m é combinação linear de $h_1, ..., h_p$, ou seja, $h_m = \beta_1 h_1 + \beta_2 h_2 + ... + \beta_p h_p$, com $\beta_j \in \mathbb{K}$. Logo:

$$\begin{aligned} I &= < h_1, h_2, ..., h_{m-1}, h_m > \\ &= < h_1, h_2, ..., h_{m-1}, \beta_1 h_1 + \beta_2 h_2 + ... + \beta_p h_p > \\ &= < h_1, h_2, ..., h_{m-1}, \beta_1 h_1 > + < h_1, h_2, ..., h_{m-1}, \beta_2 h_2 > \\ & \quad + ... + < h_1, h_2, ..., h_{m-1}, \beta_p h_p > \\ &= \beta_1 < h_1, h_2, ..., h_{m-1}, h_1 > + \beta_2 < h_1, h_2, ..., h_{m-1}, h_2 > \\ & \quad + ... + \beta_p < h_1, h_2, ..., h_{m-1}, h_p > \\ &= \beta_1 < h_1, h_2, ..., h_{m-1} > + \beta_2 < h_1, h_2, ..., h_{m-1} > \\ & \quad + ... + \beta_p < h_1, h_2, ..., h_{m-1} > \\ &= (\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_p). < h_1, h_2, ..., h_{m-1} > \\ &= c_0. < h_1, h_2, ..., h_{m-1} > \\ &= < h_1, h_2, ..., h_{m-1} > \\ &= I. \end{aligned}$$

Com $\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_p = c_0 \in \mathbb{K}$.

Prosseguindo de maneira análogo, provamos que I é gerado por p polinômios quase-homogêneos, provando então, o nosso resultado. $\square$

Seja $H(w, d; \mathbb{K})$ denotado como sendo o $\mathbb{K}$-espaço vetorial de aplicações polinomiais $f : (\mathbb{K}^n, 0) \to (\mathbb{K}^p, 0)$ cujas as componentes f_i são polinômios quase-homogêneos de grau d_i com rspeito ao peso w, para $i = 1, ..., p$, onde $d = (d_1, ..., d_p)$ é chamado de *multidegree* da função f.

Proposição 4.0.15 *O conjunto $A \subset H(w, d; \mathbb{K})$ de germes de aplicações polinomiais que não são finitamente $\mathcal{K}$-determinado é um subconjunto algébrico fechado.*

Demonstração: Ver [4]. $\square$

Observação 4.0.16 *Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é dito algébrico, quando existe uma função polinomial $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $A = \{x \in \mathbb{R}^n; f(x) = 0\}$, ou seja, $A = f^{-1}(0)$.*

Introduziremos dois numerais importantes para todo germe de função finitamente determinado, em ambos os casos real e complexo.

Seja $f : (\mathbb{K}^n, 0) \to (\mathbb{K}, 0)$ um germe de função finitamente determinado.

Definição 4.0.5 *I) A $\mathbb{K}$-álgebra $M(f) = \mathcal{E}_n/J_f$ é chamada de álgebra de Milnor do germe f. Sua dimensão, $\mu(f) = dim_{\mathbb{K}} M(f)$, é chamada de número de Milnor do germe f.*

II) A $\mathbb{K}$-álgebra $T(f) = \mathcal{E}_n/(J_f + I_f)$ é chamada da álgebra de Tjuriana do germe f. Sua dimensão, $\tau(f) = dim_{\mathbb{K}} T(f)$, é chamado de número de Tjuriana do germe f.

Aqui I_f é o ideal gerado em $\mathcal{E}_n$ pelas componentes $f_1, ..., f_n$ do germe f.

Exercício 4.0.1 *Calcule o número de Milnor e o número de Tjuriana do germe $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ dado por $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$.*

Solução: Relembre que $\mu(f) = dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}_n/J_f$ e $\tau(f) = dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}_n/(J_f + I_f)$. Temos que $J_f =< 2x + y, 2y + x >$ e $I_f =< x^2 + y^2 + xy >$. Observe que $x, y \in J_f$, portanto apenas o $1 \notin J_f$, logo $\mu(f) = 1$. De modo análogo temos que apenas o $1 \notin J_f + I_f$, logo $\tau(f) = 1$. $\square$

Exercício 4.0.2 *Mostre que o número de Milnor e o número de Tjuriana do germe $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ dado por $f(x, y) = x^3 + y^3 + xy$ não coincidem.*

Solução: Primeiramente encontraremos o número de Tjuriana. Temos que $J_f =< 3x^2 + y, 3y^2 + x >$ e $I_f =< x^3 + y^3 + xy >$, logo $I_f + J_f =< 3x^2 + y, 3y^2 + x, x^3 + y^3 + xy >$. Mostraremos que $\tau(f) \leq 5$. Com efeito,

$$\begin{aligned} xy &= 3x^3+3y^3+3xy-3x^3-3y^3-2xy \\ &= 3(x^3+y^3+xy)-x(3x^2+y)-y(3y^2+x) \in I_f+J_f \\ 3x^3 &= 3x^3+xy-xy = x(3x^2+y)-xy \in J_f \subset I_f+J_f \\ 3y^3 &= 3y^3+yx-yx = y(3y^2+x)-yx \in J_f \subset I_f+J_f \end{aligned}$$

Logo $x^3, y^3, xy \in I_f + J_f$, dessa forma existem no máximo 5 elementos que não pertença a $I_f + J_f$, a saber, $1, x, y, x^2, y^2$. Portanto, $\tau(f) \leq 5$.

Agora mostraremos que $\mu(f) \geq 6$. Para isso, mostraremos que $xy \notin J_f$. Suponha por absurdo que $xy \in J_f$, então existem $\alpha(x,y), \beta(x,y) \in \mathcal{E}_2$ tal que $xy = \alpha(x,y)(3x^2+y) + \beta(x,y)(3y^2+x)\ \forall\ x, y \in \mathbb{C}$. Em partícular, para $x = y$. Logo

$$\begin{aligned} x^2 &= \alpha(x)(3x^2+x)+\beta(x)(3x^2+x) \\ &= (3\alpha(x)+3\beta(x))x^2+(\alpha(x)+\beta(x))x \end{aligned}$$

Chame de $f(x) = \alpha(x) + \beta(x)$, portanto,

$$\begin{aligned} x^2 &= (3\alpha(x)+3\beta(x))x^2+(\alpha(x)+\beta(x))x \\ &= 3f(x)x^2+f(x)x \end{aligned}$$

Logo, $f(x) = \frac{x^2}{3x^2+x}$, absurdo, por que f não seria analítica. Portanto $xy \notin J_f$. Temos do resultado anterior que $1, x, y, x^2, y^2 \notin J_f$, logo $\mu(f) \geq 6$. $\square$

Exercício 4.0.3 *Calcule o número de Milnor de $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, dada por $f(x_1, ..., x_n) = x_1(x_1^2 + x_2^3) + x_3^2 + ... + x_n^2$.*

Solução: Observe que $J_f =< 3x_1^2+x_2^3, x_1x_2^2, x_3, ..., x_n >$. Portanto, $\mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}/J_f$ é isomorfo a $\mathbb{C}\{x_1, x_2\}/ < 3x_1^2 + x_2^3, x_1x_2^2 >$. Então o nosso trabalho se reduz a calcular a codimensão de $< 3x_1^2 + x_2^3, x_1x_2^2 >$. Veja que;

$$\begin{aligned} x_1^3 &= \tfrac{1}{3}[x_1.(3x_1^3+x_2^3)-x_2.(x_1x_2^2)] \in < 3x_1^2+x_2^3, x_1x_2^2 > \\ x_2^5 &= x_2^2(3x_1^2+x_2^3)-3x_1(x_1x_2^2) \in < 3x_1^2+x_2^3, x_1x_2^2 > \end{aligned}$$

Portanto, nos restam as seguintes possibilidades;

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & 1 & & & & & \\ & x_1 & & & x_2 & & & & \\ x_1^2 & & & x_1x_2 & & x_2^2 & & & \\ & x_1^2x_2 & & & & & x_2^3 & & \\ & & & & & & & x_2^4 & \end{array}$$

Para não deixar a notação carregada, faremos uma mudança de notação; $x = x_1$ e $y = x_2$. Mostraremos apenas que $y^4, x^2y \notin J_f$. O restante segue de imediato. Suponha, por absurdo, que $y^4 \in J_f$, então existem $f, g \in \mathcal{E}_2$ tais que

$$I) \quad y^4 = f(x,y)(3x^2 + y^3) + g(x,y)(xy^2) \;\; \forall\, x, y \in \mathbb{C}$$

Podemos identificar $f(x,y)$ da seguinte forma:

$$II) \quad f(x,y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + R(x,y)$$

Onde $R(x,y)$ são os elementos de f cuja a ordem é ≥ 3.

Como a equação $I)$ vale $\forall\, (x,y) \in \mathbb{C}^2$, em particular, vale para $(x,0)$. Daí, tiramos que

$$f(x,0)3x^2 = 0, \forall\, x \in \mathbb{C} \Rightarrow f(x,0) = 0, \forall\, x \in \mathbb{C}$$

Portanto, $f(x,0) = a_0 + a_1x + a_3x^2 + R(x,0) = 0$. Ou seja, $a_0 = a_1 = a_3 = 0$.

Logo $f(x,y) = a_2y + a_4xy + a_5y^2 + R(x,y)$. Derivando a equação I) com relação a y, obtemos a seuinte expressão

$$III) \; 4y^3 = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}(3x^2 + y^3) + f(x,y)(3y^2) + \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}(xy^2) + g(x,y)(2xy)$$

Como a equação III) vale $\forall\, (x,y) \in \mathbb{C}^2$, em particular, vale para $(x,0)$. Daí, tiramos que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)3x^2 = 0, \forall\, x \in \mathbb{C}. \text{ Ou seja, } \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = 0. \text{ Portanto,}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = a_2 + a_4x + \frac{\partial R}{\partial y}(x,0) = 0. \text{ Ou seja, } a_2 = a_4 = 0.$$

Logo $f(x,y) = a_5y^2 + R(x,y)$.

Agora aplique $f(x,y)$ na equação I).

$$y^4 = (a_5y^2 + R(x,y))(3x^2 + y^3) + g(x,y)(xy^2) \;\; \forall\, x, y \in \mathbb{C}$$

Em particular, para $(0,y) \in \mathbb{C}^2$, logo $y^4 = a_5y^5 + R(0,y)y^3$, gerando um sistema inconsistente. Portanto, $y^4 \notin J_f$.

Suponha agora que $x^2y \in J_f$. Então, existem $h, s \in \mathcal{E}_2$ tal que

$$I) \;\; x^2y = h(x,y)(3x^2 + y^3) + s(x,y)(xy^2), \;\; \forall x, y \in \mathbb{C}.$$

De maneira analoga ao caso anterior, podemos identificar $h(x,y)$ da seguinte forma

$$II) \;\; h(x,y) = b_0 + b_1x + b_2y + b_3x^2 + b_4xy + b_5y^2 + T(x,y)$$

Onde $T(x,y)$ são os elementos de h cuja a ordem é ≥ 3.

Fazendo $y = 0$, tiramos da equação I), que

$$h(x,0)3x^2 = 0, \;\; \forall \; x \in \mathbb{C} \Rightarrow h(x,0) = 0.$$

Portanto, $h(x,0) = b_0 + b_1x + b_3x^2 + T(x,0) = 0$. Ou seja, $b_0 = b_1 = b_3 = 0$.

Logo, $h(x,y) = b_2y + b_4xy + b_5y^2 + T(x,y)$. Derivando a equação I) com relação a y, obtemos a seguinte expressão

$$III) \;\; x^2 = \frac{\partial h(x,y)}{\partial y}(3x^2 + y^3) + h(x,y)(3y^2) + \frac{\partial s(x,y)}{\partial y}(xy^2) + s(x,y)(2xy).$$

Fazendo $y = 0$, temos

$$i) \;\; x^2 = \frac{\partial h}{\partial y}(x,0)3x^2 \; \forall \; x \in \mathbb{C}. \text{ Onde } \frac{\partial h}{\partial y}(x,0) = b_2 + b_4x + \frac{\partial T}{\partial y}(x,0).$$

Substituindo ii) em i), temos

$$x^2 = 3b_2x^2 + 3b_4x^3 + 3x^2\frac{\partial T}{\partial y}(x,0). \text{ Logo,}$$

$$b_2 = \frac{1}{3} \;\text{ e }\; 3b_4x^3 + 3x^2\frac{\partial T}{\partial y}(x,0) = 0 \Rightarrow b_4 = 0 \text{ e } \frac{\partial T}{\partial y}(x,0) = 0$$

Portanto, $h(x,y) = \frac{1}{3}y + b_5y^2 + T(x,y)$. Substituindo $h(x,y)$ na equação I), obtemos

$$x^2y = (\frac{1}{3}y + b_5y^2 + T(x,y))(3x^2 + y^3) + s(x,y)(xy^2), \;\; \forall x,y \in \mathbb{C}.$$

Em particular, para $(0,y) \in \mathbb{C}^2$, logo $0 = (\frac{1}{3}y + b_5y^2 + T(0,y))y^3$, chegando em outro sistema inconsistente. Portanto, $x^2y \notin J_f$. Ora,

i) $y^4 \notin J_f \Rightarrow y^3 \notin J_f$.

ii) $y^3 \notin J_f \Rightarrow x^2 \notin J_f$. Do contrário, $y^3 = (3x^2 + y^3) - 3x^2 \in J_f$.

iii) $x^2y \notin J_f \Rightarrow xy \notin J_f$.

Como $3x^2 + y^3 \in J_f$ temos que $[3x^2]$ e $[y^3]$ são linearmente dependentes em $\frac{\mathcal{E}_n}{J_f}$. De modo analogo, temos $[x^2y]$ e $[y^4]$ são linearmente dependetes em $\frac{\mathcal{E}_n}{J_f}$.

Portanto, $\mu(f) = 7$. A saber $1, x, y, xy, x^2, y^2, x^2y \;\notin J_f$. $\square$

Proposição 4.0.17 *Se* $f \underset{\mathcal{R}}{\sim} g$, *então* $\mu(f) = \mu(g)$.

Demonstração: Como f e g são $\mathcal{R}$-equivalentes existe um germe difeomorfismo $h : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^n, 0$ onde $g = f \circ h$. Portanto h induz um isomorfismo $h^* : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$ dado por $h^*(f) = f \circ h$. Afirmamos que $h^*(J_f) = J_g$. Com efeito, da Regra da Cadeia temos:

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial x_j} \circ h) \frac{\partial h_j}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} h^*(\frac{\partial f}{\partial x_j}) \frac{\partial h_j}{\partial x_i}$$

então $J_g \subseteq h^*(J_f)$. Se considerarmos a inversa h^{-1} procedemos analogamente para obter $h^*(J_f) \subseteq J_g$. $\square$

Observação 4.0.18 *A recíproca da proposição nem sempre é verdadeira. Seja* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dado por* $f(x, y) = x^2 + y^2$ *e* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por* $g(x, y) = 2xy$.

Observe que $J_f =< 2x, 2y >=< 2y, 2x >= J_g$. *Portanto,* $\mu(f) = \mu(g)$. *Porém,* $f^{-1}(0) = \{(0, 0)\}$ *e* $g^{-1}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0 \text{ ou } y = 0\}$, *donde tiramos que* f *e* g *não são* $\mathcal{R}$*-equivalente.*

Capítulo 5

Teorema Principal

O importante papel desempenhado pela singularidade quase-homogênea vai muito além da possibilidade de se fazer alguns cálculos.

De fato, a teoria da singularidade não se preocupa com uma única classe de funções, mas geralmente com um todo $\mathcal{R}$ ou $\mathcal{K}$ classes equivalentes. Por isso é uma questão natural perguntar se para um dado germe de função f, existe ou não, um polinômio quase-homogêneo f_0 que é $\mathcal{R}$ ou $\mathcal{K}$ equivalente a f.

No caso afirmativo, é natural que se tome f_0 como uma forma natural (representante) para a órbita $\mathcal{R}f$ ou $\mathcal{K}f$ do germe f.

Uma das resposta a esta questão importante é devido a K. Saito e incorporamos ao longo do próximo resultado.

Teorema 5.0.19 *Para um germe de função analítica complexa $f \in \mathfrak{m} \subset \mathcal{E}_n$ que é finitamente determinado, os seguintes resultados são equivalentes:*

i) f é $\mathcal{R}$-equivalente a um polinômio quase-homogêneo f_0;.

ii) f é $\mathcal{K}$-equivalente a um polinômio quase-homogêneo f_0;.

iii) $\mathcal{R}f = \mathcal{K}f$;

iv) $T\mathcal{R}f = T\mathcal{K}f$;

v) $f \in \mathfrak{m}J_f$;

vi) $f \in J_f$;

vii) $\mu(f) = \tau(f)$.

Demonstração : $i) \Rightarrow ii)$

Seja f $\mathcal{R}$-equivalente a um polinômio quase-homogêneo f_0. Então existe $h \in \mathcal{R}$ tal que $f \circ h^{-1} = f_0$.

Defina $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ como sendo a projeção com relação a segunda entrada, ou seja, $\varphi(x, y) = y, \forall\ x\mathbb{R}^n$. Portanto, $\varphi(x, f(x)) = f(x) = f_0 \circ h(x)$. Defina $H(x, y) = (h(x), \varphi(x, y))$. Assim:

$$H(x, f(x)) = (h(x), \varphi(x, f(x))) = (h(x), f(x)) = (h(x), f_0 \circ h(x))$$

Logo, f é $\mathcal{K}$-equivalente a f_0.

i) $\Leftarrow$ *ii*)

Assuma que $f = A.(f_0 \circ h)$, onde $f_0 \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ é um polinômio quase-homogêneo de grau d, com respeito a um peso $w = (w_1, ..., w_n), A \in \mathcal{E}_n$ é um elemento invertível e $h \in R_n$ é um isomorfismo. Como $A(0) \neq 0$, então existe um germe $B \in \mathcal{E}_n$ tal que $B^d = A$. De fato, esta equação tem d diferentes soluções obtidas a partir de um ponto fixo, por multiplicação com d raizes da unidade.

Como $b(0) \neq 0$, então o germe

$$\bar{h} : x \mapsto B(x).h(x) = (B(x)^{w_1}.h_1(x), ..., B(x)^{w_n}.h_n(x))$$

com elementos em R_n, onde h_i denota as componenes de h. Então obviamente, se tem $f = f_0 \circ \bar{h}$, mostrando que f é $\mathcal{R}$-equivalente a f_0.

ii) $\Rightarrow$ *iii*)

Por *i*) e *ii*) temos que $\mathcal{R}f = \mathcal{R}f_0$ e $\mathcal{K}f = \mathcal{K}f_0$. Daí, temos que provar que $\mathcal{R}f_0 = \mathcal{K}f_0$. Mas as inclusões $\mathcal{K}f_0 \subset \mathcal{R}f_0$ e $\mathcal{R}f_0 \subset \mathcal{K}f_0$ foram mostrada na etapa I.

iii) $\Rightarrow$ *iv*)

Segue de imediato das definições.

iv) $\Rightarrow$ *v*)

Suponha que $T_f\mathcal{R}f = T_f\mathcal{K}f$. Portanto, $T_f\mathcal{R}f = \mathfrak{m}_n.J_f = \mathfrak{m}_n.J_f + I_f.\mathcal{E}_n = T_f\mathcal{K}f$, isto implica que, $I_f.\mathcal{E}_n \subset \mathfrak{m}_n.J_f$. Em partícular, $f \in \mathfrak{m}_n.J_f$.

v) $\Rightarrow$ *vi*)

Seja $h \in \mathfrak{m}J_f$. Então, existe $\phi \in \mathfrak{m}$ e $g = a_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + ... + a_n\frac{\partial f}{\partial x_n} \in J_f$ tal que $h = \phi.g$, onde os coeficientes $a_j \in \mathcal{E}_n, \forall j$.

Portanto,

$$h = \phi.g = \phi.(a_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + ... + a_n\frac{\partial f}{\partial x_n}) = \phi.a_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + ... + \phi.a_n\frac{\partial f}{\partial x_n}$$

com $\phi.a_j \in \mathcal{E}_n, \forall j$. Logo, $h \in J_f$. □

vi) $\Rightarrow$ *vii*)

Seja $f \in J_f$. Então, $f = a_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + ... + a_n\frac{\partial f}{\partial x_n}$ onde os coeficientes $a_j \in \mathcal{E}_n, \forall j$.

Sabemos que $\mu(f) = dim_{\mathbb{R}}\frac{\mathcal{E}_n}{J_f}$ e $\tau(f) = dim_{\mathbb{R}}\frac{\mathcal{E}_n}{J_f+I_f}$

E que $I_f =< f_1, ..., f_p >$. Como $f \in \mathcal{E}_n \Rightarrow I_f =< f >$.

Portanto, dado $g \in I_f =< f > \Rightarrow g = h.f \Rightarrow g = h.(a_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + ... + a_n \frac{\partial f}{\partial x_n}) = h.a_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + ... + h.a_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \in J_f$. Logo, $I_f \subset J_f$.

Daí, $dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{E}_n}{J_f} = dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{E}_n}{J_f + I_f}$.

$vi) \Leftarrow vii)$ Suponha que $\mu(f) = \tau(f)$. Logo $\mu(f) = dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{E}_n}{J_f} = dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{E}_n}{J_f + I_f} = \tau(f)$. Isto implica que $I_f \subset J_f$, ou seja, $(f) \subset J_f$

$vii) \Rightarrow i)$ Resultado provado em [12]. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] B. Oréfice, Equivalências de germes de funções e de hipersuperfícies e álgebras associadas. *Universidade Federal De São Carlos - USP* , 2008.

[2] J. F. Arnold, S. M. Gusein-Zade & A. N. VarchenkoSingularities of Differentiable Maps I, Birkhauser. *Basel-Boston*, 1969.

[3] M. F. Atiyah and Macdonald, Introduction to Commutative Algebra. *Addison-Wesley*, Reading-Massachusetts 1969.

[4] A. Dimca, Topics on Real and Complex Singularities. *Friedr Vieweg & Sohn*, 1987.

[5] A. Garcia & Y. Lequain, Elementos de Álgebra. *Projeto Euclides - IMPA - SBM*, Quinta edição (2008).

[6] C.G. Gibson, Singular Points of Smooth Mappings. *Pitman - London - San Francisco - Melbourne* , Primeira edição em (1979).

[7] E. L. Lima, Curso de análise volume II. *Projeto Euclides - IMPA - SBM*, Quarta edição (1991).

[8] M. Golubitsky & V. Guillemin, Stable Mappings and Their Singularities. *Springer-Verlag New York.Heidelberg.Berlin*, (1973).

[9] H. Matsumura, Commutative Ring Theory. *Cambridge Studies in Advanced Mathematics 8*, 1986, digital print 2008.

[10] H. Lamotke Regular Solids and Isolated Singularities *Vieweg Advanced Lectures in Math., Vieweg, Braunschweig*, (1986)

[11] M. J. Saia, Uma introdução á Teoria de Singularidades *ICMC-USP São Carlos*, (Abril de 2011)

[12] K. Saito Quasihomogene isolierte Singularitaten von Hyperflachen *Invent. Math. 14*, (1971)

[13] E. Yoshinaga, Topological principal part of analytic functions. *Trans. of the AMS*, 314 (1989), no 2.

[14] M. Takahashi, A Sufficient Condition that Contact Equivalence implies Right Equivalence for Smooth Function *University of Houston* (Volume 35, No 3, 2009)