Universidade Federal do Piauí - UFPI
Centro de Ciências da Natureza - CCN
Pós-Graduação em Matemática

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Nota

Seleção do Mestrado Acadêmico
Teresina 21/11/2019

Nome:______________________________ Inscrição: ______________

1. Suponha que a sequência $(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \cdots)$ de termos não nulos esteja em *Progressão Aritmética*. Mostre que
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i a_{i+1}} = \frac{n}{a_1 a_{n+1}}.$$

2. Sejam p e q primos ímpares. Mostre que a equação $x^2 - px + q$ não possui raiz em $\mathbb{Z}$.

3. Seja $x_0 = 2$ e $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2}{2(1+x_n)}$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$. Prove que existe $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ e calcule seu valor.

4. Seja $\Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \cdots \supset \Omega_n \supset \ldots$ uma sequência decrescente de conjuntos compactos e não-vazios. Mostre que $\Omega = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ é não-vazio e compacto.

5. Prove que se $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, monótona e limitada no intervalo I, então f é uniformemente contínua em I.

6. Enuncie o Teorema do Valor Médio e, em seguida, use-o para mostrar que
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0.$$

7. Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivável com f' limitada. Prove que existe $c \neq 0$ tal que a função $h(x) = x + cf(x)$ é injetiva.

8. Seja $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável, tal que $g \geq 0$. Mostre que: se $\int_a^b g(x)dx = 0$, então $\int_a^b g(x)f(x)dx = 0$ para toda função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrável.

9. Seja $f : [0, 1] \to [0, +\infty)$ uma função contínua, tal que
$$[f(t)]^2 \leq 1 + 2\int_0^t f(s)ds, \ \forall t \in [0, 1].$$
Prove que $f(t) \leq 1 + t$, para todo $t \in [0, 1]$.

10. Dada a sequência de funções $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, definda por $f_n(x) = nx(1 - x)^n$.
    a) Prove que a sequência (f_n) converge, porém não uniformemente.
    b) Mostre que
$$\int_0^1 \Big(\lim_{n\to\infty} f_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \Big(\int_0^1 f_n\Big).$$

Bom Desempenho!