

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Licenciatura em Matemática

Universidade Federal do Pará



Cálculo Diferencial e Integral

Francisco Júlio Sobreira de Araújo Corrêa

Ministério
da Educação



Universidade Federal do Pará

Faculdade de Matemática

Av. Augusto Corrêa, 01 – Cidade Universitária Prof. José Silveira Netto, Guamá – Belém, PA – CEP 66075-110

Diretor

Geraldo Mendes de Araújo

Vice-diretor

Manoel Silvino Batalha de Araújo

Material Didático

ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO

Francisco Júlio Sobreira de Araújo Corrêa

REVISÃO MATEMÁTICA

Juaci Picanço da Silva

REVISÃO ORTOGRÁFICA

José dos Anjos Oliveira

ILUSTRAÇÃO

Joelma Morbach

CAPA

Silvério Sirotheau Corrêa Neto

Ao Leitor

Que Stendhal confessasse haver escrito um de seus livros para cem leitores, cousa é que admira e consterna. O que não admira, nem provavelmente consternará é se este outro livro não tiver os cem leitores de Stendhal, nem cinqüenta, nem vinte, e quando muito, dez. Dez? Talvez cinco. (Machado de Assis em Memórias Póstumas de Brás Cubas.)

Índice

1	Motivação e o conceito de função	7
1	Introdução	7
	O problema da tangente	8
	O problema da velocidade	8
	Os problemas de extremos: máximos e mínimos	9
	O problema das áreas	10
	O problema do comprimento de curvas	11
	O problema inverso da determinação da tangente	11
	O problema da posição (o problema inverso ao da velocidade)	12
2	O que é uma função?	12
3	Exercícios resolvidos	21
4	Exercícios propostos	24
5	Respostas dos exercícios propostos	26
6	Apêndice	28
	A Matemática e suas origens	28
	Arquimedes	31
	Fermat	32
	Euclides	34
	Isaac Newton	35
2	Limites: motivações geométrica e cinemática	37
1	O problema da tangente	37
2	O problema da velocidade	44
3	Um pouco de generalidade	45
4	Exercícios resolvidos	49

5	Exercícios propostos	51
6	Respostas dos exercícios propostos	53
7	Apêndice	54
	Apolônio de Perga	54
	Arquimedes	54
	O método de Descartes para o traçado de tangentes	57
	Contradição	66
3	Limite trigonométrico fundamental e limites infinitos	67
1	Limite trigonométrico fundamental	67
2	O problema do comprimento e da área	70
3	Limites infinitos e limites no infinito	71
4	Exercícios resolvidos	76
5	Exercícios propostos	79
6	Respostas dos exercícios propostos	80
7	Apêndice	81
	Limites via ϵ e δ	81
	Leibniz	83
4	Funções contínuas	85
1	Funções contínuas: definição e exemplos	85
2	Máximos e mínimos	92
3	Exercícios resolvidos	95
	Exercícios propostos	95
	Respostas dos exercícios propostos	97
4	Apêndice	98
	Carl Friedrich Gauss	98
	Joseph-Louis Lagrange	99
	Números Complexos	99
5	A derivada	103
1	Noções preliminares	103
2	Regras básicas de derivação	108

3	Derivadas de ordem superior	112
4	Outras regras de derivação	113
5	Exercícios resolvidos	115
6	Exercícios propostos	115
7	Respostas dos exercícios propostos	117
8	Apêndice	118
	Fermat e a derivada	118
	O método dos fluxões de Newton	119
6	A derivada: propriedades e aplicações	121
1	O teorema do valor médio	121
2	Aplicações do teorema do valor médio	124
3	Extremos locais	126
4	Concavidade e pontos de inflexão	132
5	Exercícios resolvidos	134
6	Exercícios propostos	135
7	Respostas dos exercícios propostos	137
8	Apêndice	138
	Michel Rolle	138
7	Aplicações da derivada	139
1	Taxas relacionadas	139
2	Problemas de otimização	142
3	Traçado de gráficos	145
4	Exercícios resolvidos	151
5	Exercícios propostos	154
6	Respostas dos exercícios propostos	156
7	Apêndice	161
	Máximos e mínimos no ensino médio	161
8	Mais aplicações da derivada	165
1	Aproximação de funções por polinômios	165
2	Expressões indeterminadas	175

3	Regra de L'Hospital	176
	Regras práticas para levantamento de indeterminação . . .	176
4	Exercícios resolvidos	180
5	Exercícios propostos	181
6	Respostas dos exercícios propostos	183
7	Apêndice	184
	Marquês de L'Hospital	184
	Maclaurin e Taylor	186
9	A integral de Riemann: noções iniciais	189
1	Quadraturas	189
	A quadratura do retângulo	189
	A quadratura do triângulo	190
	A quadratura da lúnula	191
2	Área sob uma curva: o caso geral	197
3	A definição de integral	199
4	Área entre duas curvas	201
5	Exercícios resolvidos	207
6	Exercícios propostos	208
7	Respostas dos exercícios propostos	210
8	Apêndice	211
	A quadratura da parábola segundo Arquimedes	211
10	Cálculo de primitivas ou de antiderivadas	215
1	Regras elementares para cálculo de primitivas	215
2	Método da substituição	217
3	Integração por partes	219
4	Funções trigonométricas inversas	222
5	Exercícios resolvidos	225
6	Exercícios propostos	226
7	Respostas dos exercícios propostos	228
11	O logaritmo natural	231

1	O logaritmo natural	231
2	Derivação logarítmica	237
3	Integração por frações parciais	238
4	Exercícios resolvidos	241
5	Exercícios propostos	243
6	Respostas dos exercícios propostos	245
7	Apêndice	246
	História dos logaritmos	246
12 A função exponencial e a função logarítmica		249
1	A função exponencial	249
2	A função \exp e o número e	252
3	A função exponencial de base a	256
4	A função logarítmica de base a	258
5	Exercícios resolvidos	259
6	Exercícios propostos	261
7	Respostas dos exercícios propostos	263
8	Apêndice	266
	Como construir uma tábua de logaritmos	266
13 Aplicações da integral		269
1	Cálculo de áreas	270
	Área abaixo de gráfico	270
	Área entre gráficos	272
2	Integrais impróprias	275
3	Comprimento de arco	280
4	Volume de sólidos de revolução	282
5	Trabalho mecânico	284
6	Exercícios resolvidos	286
7	Exercícios propostos	288
8	Respostas dos exercícios propostos	290
9	Apêndice	294
	Métodos numéricos para cálculo de integrais	294

Aula 1

Motivação e o conceito de função

Objetivos

- Conhecer os principais problemas que motivaram o desenvolvimento do Cálculo.
- Estudar o conceito de função.

1 Introdução

O objetivo da disciplina Cálculo é estudar o chamado Cálculo Diferencial e Integral, conhecido em tempos idos por Cálculo Infinitesimal, de funções de uma ou mais variáveis o qual, além de sua importância histórica e pedagógica, vem a ser uma das pedras angulares do progresso científico e tecnológico. O Cálculo, cujas origens remontam ao mundo grego antigo, repousa sobre dois alicerces básicos: o conceito de função e o de limite, a partir dos quais serão desenvolvidos os de continuidade, derivabilidade, integração, etc. Grosso modo, nesta introdução, podemos dizer que o Cálculo trata de problemas em que há variações, as quais são traduzidas por meio de funções e, motivados por estas análises variacionais, somos levados a estudar vários problemas que ao longo da História determinaram o desenvolvimento da Ciência, mostrando assim um intercâmbio e uma das interdependências das mais saudáveis entre a Matemática, que é uma Ciência básica e lida com conceitos abstratos, com os mais variados ramos da Ciência Aplicada e da Tecnologia.

Enumeremos alguns problemas motivadores do desenvolvimento do Cálculo.

Matemática é uma palavra de origem grega, derivada de *Mathematikos* e que significava ‘disciplina mental’, ‘aprendizado’, principalmente aprendizado matemático. Platão, filósofo grego, achava que ninguém pode ser considerado educado se não tiver aprendizado matemático.

Cálculo é uma palavra latina que significa pequena pedra que os antigos romanos usavam para fazer contagens.

Grosso modo. Locução latina (“de modo grosseiro”), que significa “por alto”, “resumidamente”, “de modo geral”.

O problema da tangente

Determinar a reta tangente a uma curva em um dado ponto. Um exemplo concreto, que será visto com detalhes na Aula 2, é o de determinar a reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2$ em um dado ponto (x, x^2) .

Tal problema, facilmente solúvel, quando se trata, por exemplo, de uma circunferência, em que a reta tangente é aquela que a intersecta em apenas um ponto, gera interessantes questões quando tratamos com outras curvas e que nos levam ao conceito de *limite*, o qual, por sua vez nos motiva a definir o que vem a ser *derivada*. Veja as figuras 1.1(a),(b) e (c) e decida, inicialmente de maneira intuitiva, qual (ou quais) da(s) reta(s) r abaixo é tangente à respectiva curva C .

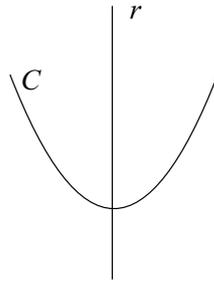


Fig. 1.1(a)

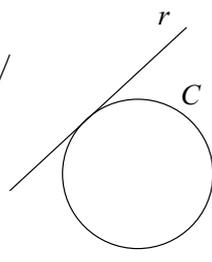


Fig. 1.1(b)

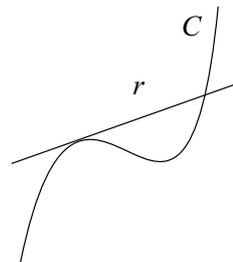


Fig. 1.1(c)

O problema da velocidade

Determinar a velocidade instantânea de um corpo em movimento.

Um caso concreto de um problema como este surge em cinemática em que a equação horária de um corpo em movimento, em alguns casos, pode ser escrita como

$$s = s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2},$$

em que $s = s(t)$ representa o deslocamento do corpo no instante t .

Aqui os métodos clássicos, entendidos como aqueles desenvolvidos antes do advento do Cálculo, mostram-se insuficientes para tratar problemas em que haja variações de velocidade, como o que ocorre com um corpo em queda livre ou quando ele se move em trajetórias curvilíneas, como é o caso dos planetas, que se deslocam segundo trajetórias elípticas. Deve-se ressaltar que o estudo das trajetórias de corpos celestes desenvolveu-se *pari*

passu com o Cálculo Diferencial e Integral, produzindo um dos capítulos mais marcantes da História da Ciência, no qual a Matemática mostra-se o instrumento mais adequado para análise e interpretação do mundo físico. Veja figura 1.2.

Pari passu. Locução latina que significa a passo igual, ao mesmo tempo, simultaneamente.

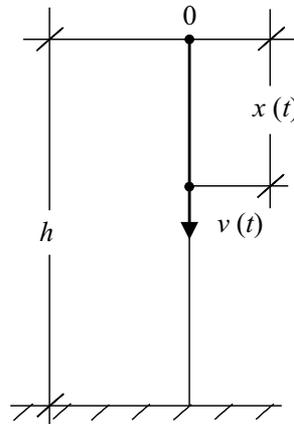


Fig. 1.2

Os problemas de extremos: máximos e mínimos

Calcular os valores máximos e mínimos de uma determinada função.

Um exemplo geométrico interessante, relacionado com este problema, é o de determinar as dimensões de um retângulo de área máxima que pode ser inscrito em um círculo de raio R .

Este problema está intimamente ligado às origens do Cálculo Diferencial. Acredita-se que Pierre de Fermat (1601-1650) - veja apêndice -, matemático francês, foi o verdadeiro criador do Cálculo Diferencial, sendo tal crença corroborada por Laplace, pois foi de sua lavra a elaboração das idéias em que se usava, ainda que de maneira embrionária, técnicas que levaram à solução, por meio de infinitésimos, do seguinte problema:

Dentre todos os retângulos de mesmo perímetro, determinar aquele de área máxima.

Este é um caso particular dos chamados *Problemas Isoperimétricos*. Vide figuras 1.3(a), (b) e (c) em que as regiões possuem áreas distintas, muito embora estejam limitadas por curvas de mesmo comprimento, daí o nome isoperimétrico.

Tal problema está ligado à fundação da cidade de Cartago. Foi prometida à Elisa, personagem Dido da Eneida de Virgílio, a extensão de terra que ela pudesse envolver com uma tira de couro feita a partir do couro de uma vaca. De todas as regiões que ela poderia envolver com tal tira, ela escolheu, de maneira correta, o círculo que é, dentre todas as figuras com mesmo perímetro, a que engloba a maior área.



Pierre Simon de Laplace (1749-1827), conhecido como o Newton da França, foi um matemático de raro talento. Publicou obras primas que marcaram época, dentre elas *Traité de Mécanique Céleste*, que compreende toda a Mecânica Celeste da época.

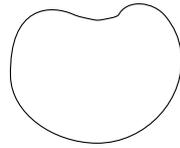


Fig. 1.3(a)

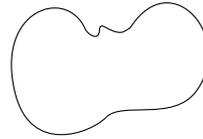


Fig.1.3(b)

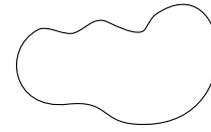


Fig.1.3(c)

O problema das áreas

Determinar a área de uma região limitada por uma curva fechada.

É o que acontece quando queremos determinar áreas de círculos, de regiões compreendidas por segmentos de parábolas, etc.

Quando trabalhamos com polígonos, isto é, figuras que podem ser decompostas em um número finito de triângulos, o problema das áreas é perfeitamente solúvel por intermédio da Geometria desenvolvida na Grécia Antiga. Euclides - vide apêndice -, em seus *Elementos*, faz a quadratura (ou seja, constrói, usando apenas régua e compasso, um quadrado com área igual à da figura dada) de figuras, usando apenas a Geometria de sua época. No entanto, quando a figura era curvilínea (lembre-se das Lúnulas, da Parábola, etc.), os métodos disponíveis na Geometria Clássica mostravam-se insuficientes. Tais questões afligiram os gregos antigos, que se viram envolvidos com problemas para alguns dos quais foram fornecidas soluções de maneira satisfatória, enquanto para outros suas soluções foram procrastinadas até o período renascentista, quando então surge o Cálculo Infinitesimal no concerto da Ciência.

Alguns matemáticos gregos tentaram, com êxito, obter a quadratura de certas figuras curvilíneas. É o caso de Hipócrates de Quios que conseguiu, usando métodos elementares, porém elegantes e criativos, efetuar a quadratura da *Lúnula ou Luna*, que é a região em forma de Lua, daí o seu nome, limitada por dois círculos não concêntricos que se intersectam. No entanto, foi Arquimedes, matemático grego - veja apêndice -, o mais afortunado nestas tentativas, pois conseguiu introduzir um método para realizar a quadratura de um segmento de parábola, e, desta feita, produziu o gérmen daquilo que, com Leibniz, Newton e vários outros matemáticos, seria o *Cálculo Integral*. Na verdade, o método descrito por Arquimedes consiste fundamentalmente em *aproximar* uma determinada figura por outras mais simples como triângulos, retângulos, etc., cujas áreas sabemos calcular, conforme figuras 1.4. Na verdade, o leitor observará que os processos de aproximação constituem o leitmotiv do Cálculo Diferencial e Integral.

Quadratura é termo originado do latim *quadratum* "quadrado". Quadratura, em sentido mais geral, significa o processo de encontrar um quadrado cuja área seja igual à de uma dada região. Na Grécia antiga a quadratura presumia o uso apenas de régua sem escala e compasso.

Hipócrates de Quios (c. 440 a.C.) matemático grego que realizou a quadratura de certas Lúnulas ou Lunas.

Leitmotiv. Pronuncia-se "leitmotif" e significa tema ou idéia sobre a qual se insiste com frequência.

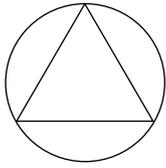


Fig.1.4(a)

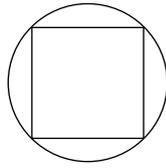


Fig 1.4(b)

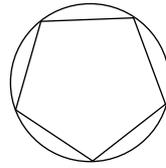


Fig.1.4(c)

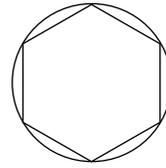


Fig.1.4(d)

...

Deve-se ressaltar que os problemas 1, 2 e 3 são típicos do Cálculo Diferencial, ao passo que o problema 4 e o 5, a seguir, estão incluídos no Cálculo Integral.

O problema do comprimento de curvas

Determinar o comprimento de uma curva descrita por uma ou mais equações.

Um exemplo típico é o de calcular o comprimento do arco de uma parábola limitado entre dois de seus pontos.

Aqui, usa-se um procedimento semelhante ao da quadratura. Mais precisamente, dada uma certa curva, cujo comprimento deve ser calculado, *aproximamo-la* por meio de segmentos de retas. Veja figuras 1.5.

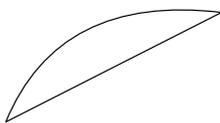


Fig. 1.5(a)

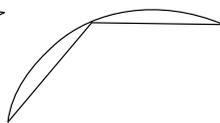


Fig.1.5(b)



Fig. 1.5(c)



Fig.1.5(d)

Observe que, à medida que o número de lados da poligonal aumenta, ela vai ficando cada vez mais próxima da curva.

Novamente temos aqui um problema do Cálculo Integral mas, devemos enfatizar, estes últimos estão intimamente ligados ao Cálculo Diferencial por meio de um resultado, chamado *Teorema Fundamental do Cálculo*, o qual torna, em um certo sentido, as operações de *derivação* e *integração* inversas uma da outra.

O problema inverso da determinação da tangente

Determinar uma curva tal que a tangente a ela em qualquer ponto esteja predeterminada por alguma condição.

Por exemplo, determinar a curva tal que em cada ponto (x, y) a sua inclinação seja igual a $2x$. Vide figura 1.6.

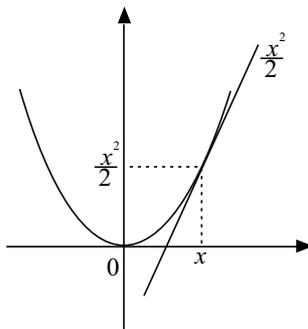


Fig. 1.6

O problema da posição (o problema inverso ao da velocidade)

Determinar a posição de um corpo sabendo-se a sua velocidade instantânea em cada instante e a sua velocidade inicial.

Os dois últimos problemas são típicos das chamadas Equações Diferenciais Ordinárias os quais, entre vários outros, serão vistos em aulas específicas.

Com os exemplos acima esperamos ter despertado a curiosidade do leitor para os cursos de Cálculo que ora iniciam.



Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) nasceu em Leipzig, Alemanha. Seu talento desenvolveu-se de maneira bastante precoce a ponto de, aos doze anos de idade, dominar toda a Matemática de sua época. Outro ponto a ser ressaltado é que as notações usuais do Cálculo Diferencial e Integral são devidas a Leibniz. Em virtude da importância de Leibniz, dedicaremos a ele um apêndice na aula 3.

2 O que é uma função?

Como dissemos rapidamente na Introdução, o Cálculo Diferencial e Integral tem como pilares básicos os conceitos de função e de limite. Nesta seção estudaremos as noções básicas de funções partindo de exemplos concretos simples. O termo função, como entidade matemática, foi usado pela primeira vez, em 1673, em uma carta escrita por Gottfried Wilhelm Leibniz, matemático e filósofo alemão, que compartilha com Isaac Newton, matemático inglês, a glória de ter criado o Cálculo Diferencial e Integral, ambos trabalhando de maneira independente um do outro. Para mais informações sobre a evolução do conceito de função o leitor poderá consultar Siu¹.

No Cálculo tradicional uma função é definida como sendo uma relação entre dois termos, chamados variáveis. Chamemo-los de x e de y . Se a cada valor de x , que pertence a um dado conjunto X , estiver associado, por meio de uma regra, um único valor y , pertencente a outro conjunto

¹Man-Keung Siu, Concept of Function - Its History and Teaching, Learn from the Masters, The Mathematical Association of America, 1995, 105-121.

Y , diz-se que está definida uma função e escreve-se $y = f(x)$, o que se lê y é função de x . Neste caso, x é chamada variável independente e y variável dependente. O conjunto ao qual x pertence é chamado domínio da função f e o conjunto de valores da forma $y = f(x)$, quando x varia em todo o domínio de f , é chamado imagem de f . A notação usual para funções como acima é dada por

$$f : X \rightarrow Y \text{ ou } X \xrightarrow{f} Y$$

Deve-se ressaltar que nem toda função é definida por meio de uma fórmula. No que se segue, estaremos interessados apenas nas chamadas funções reais de uma variável real, ou seja, aquelas cujos domínios e imagens são subconjuntos de \mathbb{R} . No entanto, para que seja ressaltado o fato de que a noção de função surge nas atividades mais comezinhas do nosso dia-a-dia, daremos exemplos de funções cujos domínios ou imagens não são necessariamente subconjuntos dos números reais.

Exemplo 1. Uma pesquisa eleitoral

A revista CartaCapital, em uma edição de julho de 2002, em pleno período eleitoral, divulgou um quadro que representava a evolução mensal de intenção de votos, de fevereiro de 2002 a junho de 2002, de um certo candidato à presidência da república, a qual podia ser representada pela tabela a seguir, em que na coluna da esquerda representam-se os meses do período acima e na da direita exprimem-se os respectivos percentuais de intenção de votos.

Fevereiro	32
Março	29
Abril	32
Maiο	43
Junho	40

Vê-se assim que temos definida uma função, cujo domínio é um conjunto de meses do ano de 2002, $\{\text{Fevereiro, Março, Abril, Maio, Junho}\}$, e tendo como imagem o subconjunto dos números reais $\{32, 29, 32, 43, 40\}$, pois a cada mês do conjunto acima está associado apenas um número, que é o percentual de eleitores que pretendem votar no referido candidato.

Exemplo 2. A função afim

O exemplo mais simples de função, que o leitor já deve ter encontrado em cursos de Geometria Analítica, é o de funções da forma $y = f(x) = ax + b$, em que a e b são constantes reais, x é a variável independente e y é a variável dependente. Claramente, o domínio de tal função, chamada *função afim*, é constituído pelo conjunto dos números reais. Se $a \neq 0$ a sua imagem também é \mathbb{R} e se $a = 0$ a função será constante, ou seja, para qualquer valor de x o y correspondente sempre valerá b .

Pode-se, graças a um procedimento introduzido pelo matemático e filósofo francês René Descartes (vide apêndice na aula 2 para mais detalhes sobre a vida e obra deste matemático), visualizar o comportamento desta função no chamado plano Cartesiano atribuindo-se valores a x , calculando-se os correspondentes de y , e marcando-se no plano acima mencionado os pontos da forma (x, y) . Como a função em estudo representa uma reta, é suficiente marcar apenas dois pontos como os descritos anteriormente para termos o seu gráfico. No entanto, tal procedimento não vale para outros casos. Veja as figuras 1.7, a seguir, que descrevem os vários perfis gráficos da função afim.



Robert Hooke (1635-1703) matemático e físico inglês mais conhecido por sua Lei da Elasticidade, mas também, entre outras coisas, inventou o pêndulo cônico e realizou pesquisas sobre a lei de atração de corpos que, somente mais tarde, foi desenvolvida por Newton.

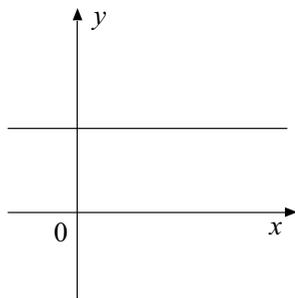


Fig. 1.7(a)

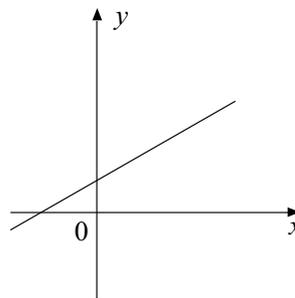


Fig. 1.7(b)

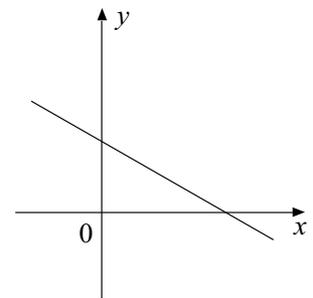


Fig. 1.7(c)

Funções deste tipo surgem em várias situações físicas e do dia-a-dia. Um dos exemplos mais conhecidos é o que ocorre em elasticidade linear, traduzida pela *Lei de Hooke*, dada por $f(x) = -kx$ em que x designa a magnitude da deformação de um corpo elástico - dentro dos limites de elasticidade - e $k > 0$ é a constante de elasticidade do corpo. As figuras 1.8(a), 1.8(b) e 1.8(c) representam um corpo elástico sendo deformado.

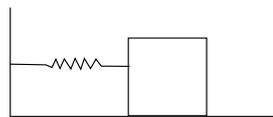


Fig. 1.8(a)

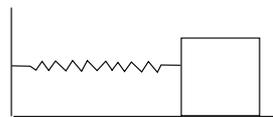


Fig. 1.8(b)

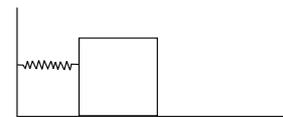


Fig. 1.8(c)

Uma outra situação interessante na qual surge uma função afim é no estudo do movimento retilíneo uniforme. Suponhamos que um corpo se desloque em uma trajetória retilínea com velocidade constante v . Designando por $x(t)$ a distância percorrida pelo referido corpo em um tempo t teremos

$$x(t) = x_0 + vt$$

em que x_0 designa a posição inicial do corpo. O gráfico da função $x(t)$ é dado pela semi-reta e é representado pela figura 1.9, na qual v , do ponto de vista geométrico, significa a inclinação da semi-reta. Deve-se observar que o gráfico da função $x(t)$ é uma semi-reta, pois a variável independente t , por representar o tempo, é maior do que ou igual a zero.

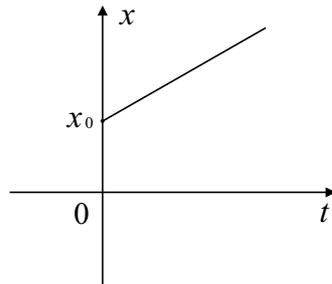


Fig. 1.9

Exemplo 3. Medida de temperatura

Nos países que adotam o sistema métrico decimal, como é o caso do Brasil, a temperatura ambiente é sempre medida em graus centígrados (ou graus Celsius) designada por $^{\circ}\text{C}$. Outros países, entre os quais os Estados Unidos, por não adotarem o sistema métrico decimal, medem a temperatura em graus Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$). Para relacionar a temperatura em graus Celsius e Fahrenheit, usa-se a expressão

$$\frac{C}{5} = \frac{F - 32}{9}$$

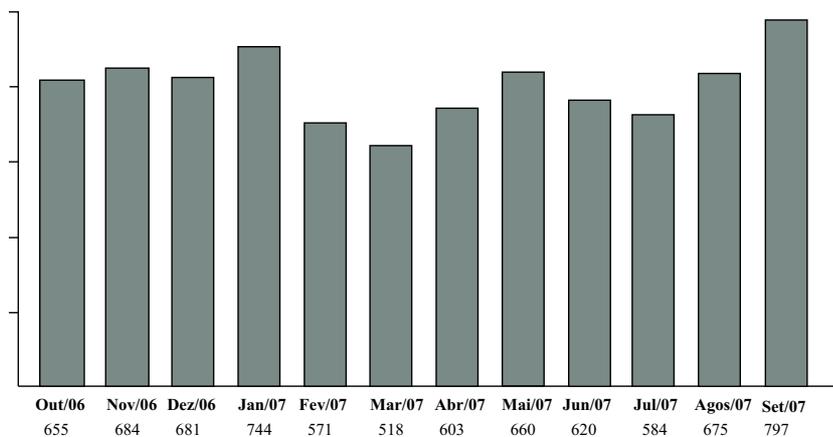
Assim,

$$C = \frac{5}{9}F - \frac{150}{9}$$

que é uma função afim.

Exemplo 4. Conta de luz

Nas contas de energia elétrica emitidas mensalmente por determinadas concessionárias, existe um quadro, designado por *histórico de consumo de energia elétrica* - kWh, o qual descreve o consumo de energia elétrica de cada residência, nos últimos doze meses. No gráfico desse quadro tem-se a figura

HISTÓRICO DE CONSUMO DE ENERGIA ELÉTRICA - kWh

MÉDIA DOS 3 ÚLTIMOS CONSUMOS DE ENERGIA 685,33 kWh

que mostra o quanto foi gasto de energia elétrica de outubro de 2006 a setembro de 2007. Assim, temos uma função do conjunto {outubro/2006, novembro/2006, dezembro/2006, janeiro/2007, fevereiro/2007, março/2007, abril/2007, maio/2007, junho/2007, julho/2007, agosto/2007, setembro/2007}. A cada um desses meses está associado um número, que é o consumo referente ao mês correspondente. Desse modo

outubro/2006	↦	655
novembro/2006	↦	684
dezembro/2006	↦	681
janeiro/2007	↦	744
fevereiro/2007	↦	571
março/2007	↦	518
abril/2007	↦	603
maio/2007	↦	660
junho/2007	↦	620
julho/2007	↦	584
agosto/2007	↦	675
setembro/2007	↦	797

o que define uma função.

Exemplo 5. Alguns exemplos de funções da Geometria

Considere um quadrado de lado x . Sua área é dada por x^2 e designando-a por $A(x)$, teremos $A(x) = x^2$, definindo, assim, uma função que nos permite calcular a área de um quadrado conhecendo-se o seu lado. Evidentemente, o domínio da função A - o conjunto de todos os possíveis valores que podem ser atribuídos à variável x - é o conjunto dos números reais positivos, haja vista que tal variável representa o lado de

um quadrado. Claramente, se x cresce a área $A(x)$ também cresce e, por este motivo, diz-se que tal função é crescente.

Inversamente, dado um quadrado com uma determinada área A , encontramos um único número positivo x que representa o seu lado e assim $x = \sqrt{A}$, o que nos diz que o lado de um quadrado é função de sua área. Veja as figuras 1.10 nas quais estão representados os gráficos das funções acima.

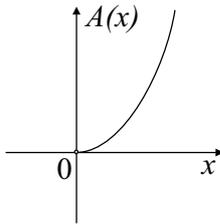


Fig. 1.10(a)

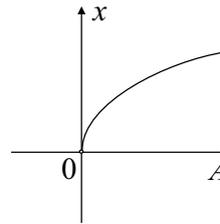


Fig. 1.10(b)

Outro exemplo geométrico de função é o da área do círculo com relação ao seu raio. Como é sabido da geometria elementar, a área de um círculo de raio r é dada por πr^2 e, designando por $S(r)$ tal área, teremos $S(r) = \pi r^2$, em que r , evidentemente, é um número maior que zero. Esta função possui um comportamento semelhante ao da que define a área do quadrado em função de seu lado.

Na verdade, os exemplos acima são casos particulares da função

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c,$$

em que a , b e c são constantes reais e x é a variável que, mais geralmente, pode assumir qualquer valor real. No entanto, nos casos específicos acima a variável independente é sempre positiva.

Exemplo 6. Forma implícita

Nos casos anteriores tivemos exemplos de funções nas quais a variável dependente y encontrava-se escrita explicitamente como função de x . Entretanto, nem sempre isto acontece. Consideremos, à guisa de exemplo, a equação $x^2 + y^2 = 4$ que, como sabemos da Geometria Analítica, descreve uma circunferência com centro no ponto $(0, 0)$ e de raio 2. Caso queiramos explicitar o valor de y em função de x teremos $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$ e assim, para cada valor admissível de x , correspondem dois valores simétricos de y , o que viola o conceito de função. Portanto, para cada valor de x pertencente ao intervalo $[-2, 2]$ teremos um valor $y = \sqrt{4 - x^2}$ e o seu simétrico $y = -\sqrt{4 - x^2}$, o que nos leva a concluir que a relação acima define duas funções que são representadas, respectivamente, pelas partes superior e pela inferior da circunferência. Em ambos os casos, o domínio é o intervalo $[-2, 2]$ e as imagens são, respectivamente, os intervalos $[0, 2]$ e $[-2, 0]$. Veja as figuras 1.11.

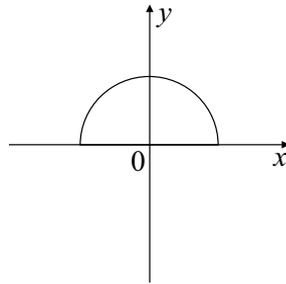


Fig. 1.11(a)

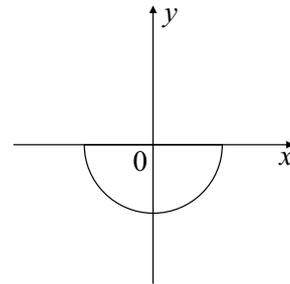


Fig. 1.11(b)

No entanto, deve-se observar que existem relações envolvendo as variáveis x e y que, por serem bastantes complicadas, não nos permitem fazer a manipulação acima para explicitar y em função de x , mesmo obtendo dois valores de y para cada x . Tente explicitar y como função de x , ou x como função de y , nas expressões abaixo:

$$x^2y + y^3x^4 + 3\sqrt{xy}^{1/3} = 9$$

ou

$$\sqrt{x + y^2 + \sqrt{x + y}} + \frac{x + y}{x^2 + y^2} = x^4.$$

Exemplo 7. Funções de várias variáveis

Um cidadão chamado Devenildo Falidus tomou um empréstimo a juros de taxa 10% ao mês. Ao final do primeiro mês, a dívida de Devenildo será de

$$\text{R\$ } 10.000,00 + 1.000,00 = \text{R\$ } 11.000,00$$

Ao final do segundo mês, supondo que a dívida tenha sido rolada por mais um mês, esta será de

$$\text{R\$ } 11.000,00 + 110,00 = \text{R\$ } 11.100,00$$

Como as finanças do Sr. Falidus continuaram em péssimas condições, a dívida foi rolada por mais um mês, de modo que, ao término do terceiro mês, sua dívida era de

$$\text{R\$ } 11.100,00 + 111,00 = \text{R\$ } 11.210,00$$

O endividado senhor, assustado com o crescimento do seu débito, resolveu aprender um pouco de Matemática Financeira e ficou pasmado com o resultado obtido. Mas precisamente, Devenildo supôs que tivesse uma dívida inicial C_0 a taxa de i , mensal. Ao final do primeiro mês sua dívida C_1 será

$$C_1 = C_0 + iC_0 = (1 + i)C_0$$

Ao final do segundo mês sua dívida C_2 será

$$\begin{aligned} C_2 &= C_1 + iC_1 \\ &= (i + i)C_0 + (1 + i)C_0 \\ &= (1 + i)(1 + i)C_0 \\ &= (1 + i)^2 C_0 \end{aligned}$$

prossequindo dessa maneira, sua dívida C_n ao final do n -ésimo mês será

$$C_n = C_0(1 + i)^n$$

ou seja, provavelmente Devenildo Falidus continuará falido.

Observemos que obtemos uma função que a cada mês nos fornece o valor da dívida contraída a taxa i com juros compostos. Da próxima vez que alguém for solicitar um empréstimo, pense no drama de Devenildo.

Exemplo 8. Funções de várias variáveis

Existem casos, que não serão estudados de imediato, mas devem ser citados, em que as funções dependem de mais de uma variável independente. Por exemplo, considerando-se um triângulo retângulo cujos catetos medem x e y , a sua hipotenusa z medirá $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, ou seja, a hipotenusa depende de duas variáveis que podem percorrer livremente todos os números reais positivos.

Se x e y representarem lados de um retângulo, a sua área z será dada por $z = xy$ e novamente temos uma função de duas variáveis. No caso em que x , y e z representarem os lados de um paralelepípedo, o seu volume V será $V = xyz$, o que nos mostra que tal volume é uma função de três variáveis.

Outros exemplos de funções deste tipo serão estudados oportunamente.

Antes de partirmos para a descrição de outros exemplos, introduziremos alguns conceitos que farão parte do nosso cotidiano.

Função injetiva ou injetora. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é dita injetiva ou injetora se $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, implicar que $f(x_1) \neq f(x_2)$.

As funções $f(x) = x^2, x \geq 0$, $g(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$ e $h(x) = ax + b$, em que a e b são constantes reais com $a \neq 0$, são típicos exemplos de funções injetivas. Tente justificar isso. Por outro lado $f_1(x) = x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$, $g_1(x) = \cos(x)$ e $h_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$ não são injetivas.

Veja as figuras a seguir em que você terá uma noção geométrica sobre a injetividade.

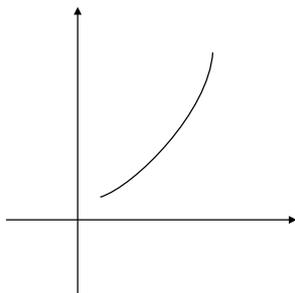


Fig. 1.12(a)

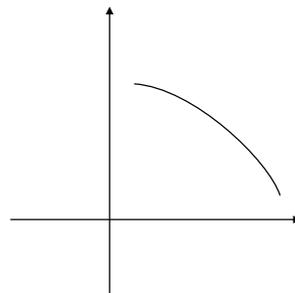


Fig. 1.12(b)

Função sobrejetiva ou sobrejetora. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é dita sobrejetiva ou sobrejetora se, para cada $y \in Y$, existir $x \in X$ tal que $y = f(x)$.

A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$, para todo $x \in \mathbb{R}$, é sobrejetiva.

A função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \cos(x)$ não é sobrejetiva. No entanto, se a considerarmos dada por $g : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ ela será sobrejetiva.

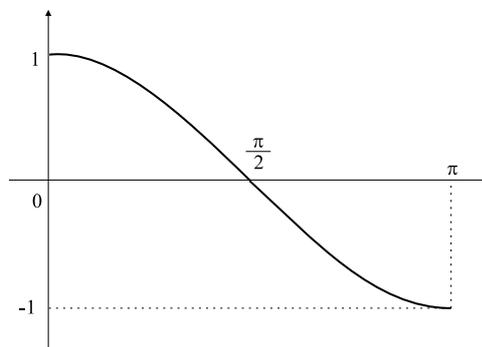


Fig. 1.13

Função bijetiva ou bijetora. Uma função $f : X \rightarrow Y$ que seja, simultaneamente, injetiva e sobrejetiva é chamada bijetiva ou bijetora (também usa-se o termo bijeção).

Este é o caso de $f(x) = x^3$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Não insistiremos mais com outros exemplos, pois eles surgirão naturalmente ao longo do curso.

Neste último caso (função bijetiva) pode-se definir uma função $f^{-1} : Y \rightarrow X$, chamada função inversa de $f : X \rightarrow Y$, da seguinte maneira:

$$x = f^{-1}(y) \text{ se, e somente se, } y = f(x).$$

Com relação ao “se, e somente se” desta definição e várias outras coisas usuais em Matemática, veja Morais Filho².

Exemplo 9. A função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x) = x^3$ é injetiva e sobrejetiva, ou seja, é uma bijeção, e sua inversa é dada por $F^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F^{-1}(x) = x^{1/3}$.

A função $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

é injetora mas não é sobrejetora.

Se considerarmos $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada pela mesma expressão acima, isto é,

$$g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

ela não será nem injetiva e nem sobrejetiva.

Observe que a função f é diferente da função g pois, mesmo sendo definidas por expressões semelhantes, seus domínios são distintos.

Tomemos, agora, a função $h : [0, +\infty) \rightarrow (0, 1]$ dada por

$$h(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

tem-se que ela é injetiva e sobrejetiva e, portanto, admite uma inversa. Determine uma expressão para tal inversa.

3 Exercícios resolvidos

1. Suponhamos que um carro esteja em movimento retilíneo uniforme com velocidade constante igual a 60km/h. Supondo que a posição do corpo no instante $t = 0$ é $x_0 = 100$ km, ache uma equação para x em função de t e faça um gráfico da posição *versus* tempo.

Solução. Desde que no instante $t = 0$ o corpo se encontra na posição $x_0 = 100$ km, segue-se que a distância percorrida pelo corpo em um tempo t será $x(t) - 100$ e, desse modo, a velocidade (constante) $v = 60$ km/h será expressa por

$$60 = \frac{x(t) - 100}{t}$$

e daí teremos

$$x(t) = 100 + 60t.$$

O gráfico desta equação é a reta esboçada na figura 1.14.

²Daniel Cordeiro de Morais Filho, Um Convite à Matemática, 2ª edição, Campina Grande, EDUFPG, 2007.

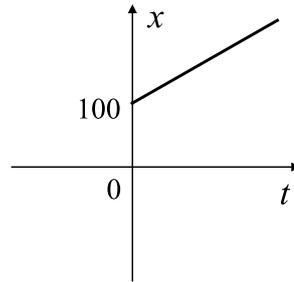


Fig. 1.14

2. Determine os domínios das funções a seguir. Deve-se observar que, ao dizermos domínio de uma função dada por uma expressão, queremos dizer, na maioria das vezes, encontrar o seu domínio maximal.

(a) $y = \sqrt{4 - x^2}$,

(b) $y = \frac{1}{x^2 - 9}$,

(c) $y = \frac{x}{x^2 + 4}$.

Solução.

- (a) Como y é um número real, $4 - x^2 \geq 0$, ou $x^2 \leq 4$. Conseqüentemente, o domínio desta função é o intervalo $-2 \leq x \leq 2$.
- (b) A função é dada por uma fração cujo denominador é $x^2 - 9$ o qual deve ser diferente de zero. Portanto, o domínio dessa função é constituído pelos valores de $x \in \mathbb{R}$ que sejam diferentes de ± 3 .
- (c) Como $x^2 + 4 \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, o domínio é o conjunto de todos os números reais.
3. Se $f(x) = x^2 + 2x$, calcule $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ e interprete o resultado.

Solução. Calculemos, inicialmente, o quociente acima:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{[(a+h)^2 + 2(a+h)] - (a^2 + 2a)}{h} = 2a + 2 + h.$$

Vejam, agora, a interpretação geométrica. Sobre o gráfico de f (veja fig. 1.15), localize os pontos P e Q cujas abscissas são, respectivamente, a e $a+h$. A ordenada de P é $f(a)$ e a de Q é $f(a+h)$.

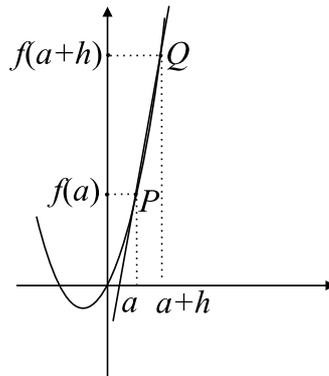


Fig. 1.15

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{\text{diferença das ordenadas}}{\text{diferença das abscissas}} \\ &= \text{inclinação da reta } PQ. \end{aligned}$$

4. De cada um dos cantos de um quadrado de papelão, de 12 cm de lado, veja figura 1.16, são removidos quadrados cujos lados possuem comprimentos iguais a x cm e, a seguir, os retângulos remanescentes são dobrados para cima de modo que seja formada uma caixa sem tampa. Expresse o volume V da caixa, em cm^3 , como uma função de x .

Solução. A caixa possui base quadrada cujo lado mede $12 - 2x$ e altura x . Veja figura 1.16.

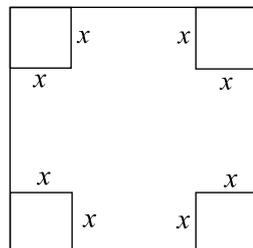


Fig. 1.16

O volume da caixa é dado por $V = x(12 - 2x)^2 = 4x(6 - x)^2$. O domínio da função $V = V(x)$ é o intervalo $0 < x < 6$, haja que vista que V deve ter sempre valor positivo. Veja figura 1.17.

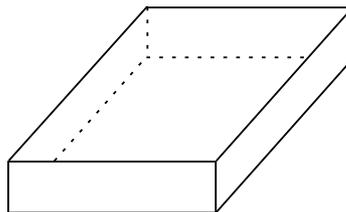


Fig. 1.17

4 Exercícios propostos

1. Em cada um dos itens abaixo, determine o domínio e a imagem da função correspondente.

(a) $f_1(x) = 4 - x^2$

(b) $f_2(x) = -2\sqrt{x}$

(c) $f_3(x) = |x - 1|$

(d) $f_4(x) = [2x] = \text{o maior inteiro } \leq 2x$

(e) $f_5(x) = |x| - 2x$

(f) $f_6(x) = \frac{|x|}{x}$

2. Em um jogo de futebol o goleiro do *Paysandu Sport Club* bate um tiro de meta. A bola sobe e desce na intermediária do time adversário. Considere a função que a cada instante (desde a batida do tiro de meta) associa a altura em que a bola se encontrava naquele instante. Tal função é injetora? Justifique sua resposta.



Fig. 1.18

3. Dada a função

$$f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$$

calcule os seus valores em $x = 0, 1, 2, -2, 1 + h, -2 + h, a/b$.

4. Dada a função

$$f(x) = \frac{x - 1}{x + 1},$$

calcule $f(\frac{1}{1+x})$, $f(\frac{1}{1-x})$, $f(-x)$, $f(\frac{1}{x})$. Mostre que $f(1/x) = -f(x)$ e $f(f(x)) = -1/x$.

5. Mostre que a função

$$y = f(x) = \frac{x + 2}{2x - 1}$$

coincide com a sua inversa.

6. Dada a função

$$y = f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}},$$

definida para todo x real, verifique que sua inversa é a função

$$x = g(y) = \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}},$$

definida para $|y| < 1$.

7. Sabendo-se que à temperatura de 25°C , o volume V (em cm^3) de certa quantidade de gás é dado pela lei: $V = \frac{36}{P}$, em que P é a pressão do gás (em atm), determine o volume de tal massa gasosa às pressões 3, 4 e 5 atm.
8. Suponhamos que em uma determinada cidade existia, no ano de 2000, 500.000 ratos e, no período 2000-2003, a população desse roedor tenha aumentado, anualmente, 40%. Considere a função que fornece tal população de ratos na dependência do tempo. Determine:
- a) a lei dessa função b) um esboço do gráfico dessa função.
9. Colocando numa panela 500g de água, inicialmente a 50°C , sua temperatura vai caindo até atingir a temperatura ambiente de 20°C . Supondo que este resfriamento seja processado de acordo com a lei

$$T = T(t) = 20 + 30 \cdot 10^{-t}$$

em que $T = T(t)$ é a temperatura da água, em $^\circ\text{C}$, t horas após o início da experiência, faça um esboço do gráfico da temperatura da água em função do tempo.

5 Respostas dos exercícios propostos

1. Exercício 1.

- (a) Domínio: \mathbb{R} . Imagem: $(-\infty, 4]$
- (b) Domínio: $[0, \infty) = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$. Imagem: $(-\infty, 0]$
- (c) Domínio: \mathbb{R} . Imagem: $[0, \infty)$
- (d) Domínio: \mathbb{R} . Imagem: \mathbb{Z}
- (e) Domínio: \mathbb{R} . Imagem: \mathbb{R}

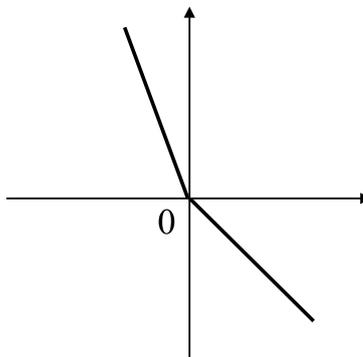


Fig. 1.19

- (f) Domínio: $\mathbb{R} - \{0\}$. Imagem: $\{-1, 1\}$

2. Exercício 2

Basta observar o gráfico da figura 1.18.

3. Exercício 3.

$$-1, 0, 1/3, 3, \frac{h}{2+h}, \frac{-3+h}{-1+h}, \frac{a-b}{a+b}$$

4. Exercício 4.

$$-\frac{x}{2+x}, \frac{x}{2-x}, \frac{-x-1}{-x+1}, \frac{1-x}{1+x}$$

5. Exercício 5.

Basta explicitar x em função de y e verificar que $x = \frac{y+2}{2y-1}$

6. Exercício 6.

Proceda como no exercício anterior.

7. Exercício 7.

12, 9, $36/5$

8. Exercício 8.

$$f(t) = 500000 \left(\frac{7}{5}\right)^{(t-2000)}$$

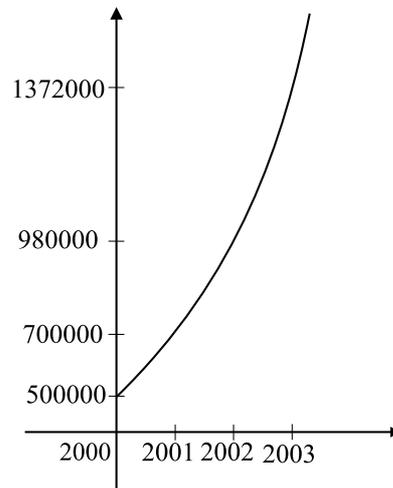


Fig. 1.20

9. Exercício 9.

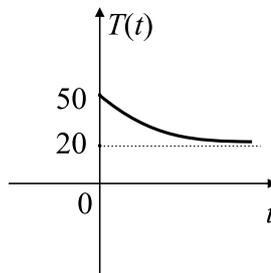


Fig. 1.21

Nesta aula você aprendeu:

- quais foram os principais problemas que motivaram o desenvolvimento do Cálculo;
- o conceito de função.

6 Apêndice

A Matemática e suas origens

A influência dos gregos antigos na sociedade ocidental é algo sobejamente conhecido. Da Filosofia ao Teatro, passando pela Matemática, Medicina, História, Mitologia, Física. Enfim, em todas as áreas do conhecimento, temos o refinamento intelectual da Grécia Antiga a inspirar o desenvolvimento das mais variadas aventuras do espírito humano. Na Matemática, em particular, a obra grega é profundamente seminal. Evidentemente, a Matemática não começou com os gregos antigos. As origens da Matemática seguramente se perdem nas brumas da aurora da humanidade. O ser humano, desde o mais primitivo, ao abrir os olhos se dá conta das diversas formas espaciais; ao deslocar-se entre duas posições, ele o faz de forma a minimizar o seu esforço, escolhendo a distância mais curta. E, assim, esse nosso ancestral estava a desenvolver uma forma primitiva de Geometria intuitiva. No entanto, a utilização da Matemática de uma forma deliberada talvez tenha sido realizada pela primeira vez associada a processos de contagem que estavam relacionados a problemas práticos. Veja Corrêa-Almeida³.

Seminal. Inspirador, profícuo, proveitoso.

Neste sentido, relacionar os elementos de uma determinada coleção ao número de dedos das mãos e dos pés pode ter sido a primeira tentativa de fazer uma contagem. Porém, se o conjunto a ser contado fosse muito grande, esse método tornar-se-ia impraticável. Nesse caso, o homem primitivo poderia valer-se de um conjunto de pedrinhas e colocá-lo em correspondência, por exemplo, com os componentes de um rebanho.

Assim fazia o personagem Polifemo, o gigante de apenas um olho da Odisséia⁴, do escritor grego Homero⁵. O gigante, morador da ilha de Cyclops, após ter sido cegado por Ulisses, postava-se todas as manhãs à entrada de uma caverna, tocando cada ovelha que dali saísse, associando-a a uma pedrinha. Ao final da tarde, cada ovelha que retornasse era novamente relacionada a uma pedrinha do conjunto obtido pela manhã; caso esse último fosse completamente exaurido, o gigante estaria seguro de que seu rebanho teria retornado integralmente à caverna.

Homero (século VIII a.C.) um poeta grego (segundo a tradição era cego) que escreveu duas obras primas da literatura: Ilíada e Odisséia. Esta última descreve as aventuras de Ulisses (em grego, Odysseus).

Esses processos precisavam ser registrados e, para isso, o homem necessitava criar símbolos de modo que os dados coletados não se perdessem. A princípio, esses registros eram efetivados fazendo marcas em bastões ou em pedaços de ossos. Sobre isso transcrevemos, a seguir, um trecho de Boyer⁶, pág 3:

³Francisco Julio S. A. Corrêa e Arthur C. Almeida, Papiro Rhind e as Frações Unitárias, Revista do Professor de Matemática-SBM, N^o 35, 1997,2-8.

⁴Homero, Odisséia, Abril Cultural, 1979.

⁵Pierce Vidal-Naquet, O Mundo de Homero, Companhia das Letras, 2002.

⁶Carl B. Boyer, História da Matemática, Edgard Blücher, 1974.

Poucos desses registros existem hoje, mas na Checoslováquia foi achado um osso de lobo com profundas incisões, em número de cinqüenta e cinco; estavam dispostas em duas séries, com vinte e cinco numa e trinta na outra, com os riscos em cada série dispostos em grupos de cinco. Tais descobertas arqueológicas fornecem provas de que a idéia de número é muito mais antiga do que progressos tecnológicos como o uso de metais ou de veículos de rodas. Precede a civilização e a escrita, no sentido usual da palavra, pois artefatos com significado numérico, tais como o osso anteriormente descrito, vêm de um período de cerca de trinta mil anos atrás.

Vê-se assim que a pré-história da Matemática recua no tempo para muito antes de Homero, cujas obras datam do século VIII a.C.

Deve-se ressaltar que o desenvolvimento da Matemática acompanha *pari passu* o da sociedade em geral. Em virtude disso é que os povos razoavelmente desenvolvidos tiveram que incrementar um aparato matemático que possibilitasse fazer face aos desafios que o progresso suscitava.

Isso foi, em particular, o que ocorreu com os antigos egípcios que desenvolveram, assim como babilônios, indianos e chineses, uma Matemática bastante sofisticada.

O historiador Heródoto, assim como outros intelectuais gregos, viajou por vários lugares, entre os quais o Egito, e, sobre um certo rei egípcio de nome Sesóstris, Heródoto nos diz:

Heródoto (C. 484 - C. 425 a.C.) foi um historiador que escreveu a obra-prima Histórias.

Esse rei realizou a partilha das terras, concedendo a cada egípcio uma porção igual, com a condição de lhe ser pago todos os anos um certo tributo; se o rio carregava alguma parte do lote de alguém, o prejudicado ia procurar o rei e expor-lhe o acontecido. O soberano enviava agrimensores ao local para determinar a redução sofrida pelo lote, passando o dono a pagar um tributo proporcional à porção restante. Eis, segundo me parece, a origem da Geometria, que teria passado desse país para a Grécia.

Platão, em sua obra *Fedro*, também atribui aos egípcios a criação da Matemática. Mais precisamente, ele diz:

Platão (428 - 347 a.C.), cujo verdadeiro nome era Aristócles, foi um filósofo grego fundador da Academia e autor da monumental *A República*.

Na cidade egípcia de Náucratis, existiu um antigo e famoso deus, cujo nome era Thoth; o pássaro chamado íbis lhe era consagrado e ele foi inventor de muitas artes, tais como a Aritmética, a arte de calcular, a Geometria, a Astronomia e os dados, mas sua maior descoberta foi o uso das letras.

Aristóteles (384/383 - 322 a.C.) foi, talvez a mente filosófica mais universal dos gregos. Dante Alighieri o definiu como o “mestre daqueles que sabem”.



Tales de Mileto

Aristóteles, por sua vez, sugere que a Matemática tenha origem egípcia como conseqüência da ascensão de uma classe sacerdotal, que dispunha de tempo suficiente para o estudo, contrastando, assim, com a tese de Heródoto, que apontava origens práticas para a Matemática.

Independentemente da finalidade com que a Matemática surgiu, Heródoto, Platão e Aristóteles localizam sua origem no Egito, embora todos concordem com a afirmação de que a prática matemática se deu antes da civilização egípcia. Porém, a Matemática egípcia, assim como de resto todas as suas contemporâneas, tinham, ao que parece, objetivos meramente pragmáticos. É o que se deduz de seus papiros ainda hoje conservados em várias bibliotecas americanas e européias. Vejamos algumas observações sobre o Papiro de Rhind ou de Ahmes.

No inverno de 1858, o jovem antiquário escocês A. Henry Rhind, de passagem por Luxor, cidade egípcia às margens do Nilo, adquiriu um papiro (30cm de altura e 5m de comprimento) que havia sido encontrado nas ruínas de uma antiga edificação em tebas. Com a morte de Rhind, ocorrida cinco anos após, vitimado por tuberculose, o seu papiro foi adquirido pelo Museu Britânico.

Esse documento, que passou a ser chamado *Papiro de Rhind*, foi escrito por volta de 1700 a.C. por um escriba chamado Ahmes, Ah-mose (sendo por isso também conhecido como *Papiro de Ahmes*), por solicitação de um certo rei Hyksos que reinou no Egito em algum período entre 1788 e 1580 a.C. Ahmes relata que o material provém de um outro manuscrito produzido em alguma época entre 2000 e 1800 a.C. Assim, o documento mais antigo da Matemática tem cerca de 4000 anos, sendo Ahmes a primeira figura da Matemática registrada na História.

O *Papiro Rhind* é uma coleção ou, mais precisamente, um manual, contendo problemas práticos de natureza aritmética, algébrica e geométrica com instruções para soluções, sem que haja vestígio de demonstrações ou formalismos, coisas só registradas muito tempo depois pelos gregos, a partir de Tales.

Tales de Mileto (c. 546 a.C.), considerado o pai da Geometria Demonstrativa, foi um dos sete sábios da antiguidade.

Tendo dedicado parte de sua vida ao ofício de mercador, tornou-se suficientemente rico para devotar-se posteriormente ao estudo e às viagens. De suas visitas ao Egito levou a Mileto os conhecimentos de Geometria adquiridos pelos egípcios, tendo conquistado o respeito de seus concidadãos não apenas como matemático mas também como estadista, conselheiro, engenheiro, homem de negócios, filósofo e astrônomo.

É conhecido como o primeiro matemático cujo nome está ligado a teoremas, por isso mesmo o seu epíteto de pai da Geometria Demonstrativa (ou dedutiva, ou sistemática) que desaguou em *Os Elementos* de Euclides,

Algumas datas são escritas como 'c. 230 a.C.', por exemplo, 'Eudoxo (c. 400-347)'. Este c. indica que a data não é exata, refere-se a um período aproximado. O c. vem da palavra latina *circa*, que quer dizer 'aproximadamente', 'por volta de'. Veja Daniel C. de Moraes Filho, Como Escrever um Texto Matemática.

Geometria é um substantivo derivado do grego e composto de geo, que significa terra, e metron que significa medida, ou seja, etimologicamente, Geometria significa medida de terras, o que vem ao encontro do que se disse previamente sobre a medida de terras efetuada pelos egípcios.

obra na qual é sistematizada a Matemática nos moldes que a conhecemos nos dias de hoje. A Tales de Mileto são creditadas as demonstrações dos seguintes resultados:

1. Qualquer diâmetro de um círculo divide-o em duas partes iguais.
2. Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
3. Ângulos opostos pelo vértice são iguais.
4. Se dois triângulos têm dois ângulos e um lado em cada um deles, respectivamente, iguais, então esses triângulos são congruentes.
5. Um ângulo inscrito num semicírculo é reto (veja figura 1.22).

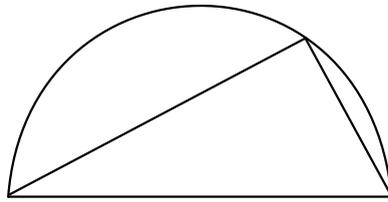
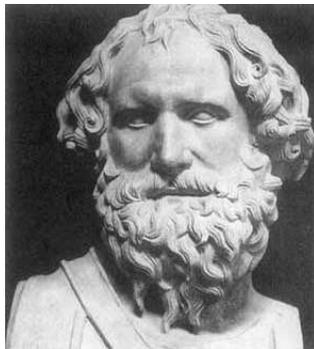


Fig. 1.22

A postura inaugurada por Tales de Mileto é uma das pedras angulares da Matemática. Observe que o resultado 1 descrito linhas atrás é extremamente óbvio. Contudo, mais importante do que o próprio resultado foi a percepção de Tales de que ele podia (ou deveria) ser demonstrado.

Arquimedes



Arquimedes, que viveu e morreu em Siracusa, cidade localizada na ilha da Sicília, atualmente pertencente à Itália, muito embora não tenha aí nascido, foi, provavelmente, o maior matemático da antiguidade clássica.

Além da Quadratura da Parábola, Arquimedes escreveu outras obras importantes, entre as quais destacamos: *Sobre a Esfera e o Cilindro*, *Sobre Espirais*, *Sobre Equilíbrio de Corpos Planos*, etc. A obra de Arquimedes que mais o aproxima do Cálculo que começaremos a estudar é a Quadratura da Parábola, na qual se encontram as raízes do Cálculo Integral, pois o que ele fez foi aproximar um segmento de parábola por triângulos nela inscritos e assim exaurindo-a de modo que os triângulos a preenchessem. É evidente que por mais que aumentemos o número de triângulos inscritos, sempre a área total da parábola será maior que a área da totalidade de triângulos inscritos e aí é que entra em cena o conceito de integral, com a sua subjacente noção de limite para justificar as passagens do número finito de triângulos para o cálculo preciso da área. Tornaremos as idéias acima mais precisas no estudo da Integral.

Com relação a Arquimedes, o matemático inglês do século XX, G. H. Hardy disse: “Arquimedes será lembrado quando Ésquilo já tiver sido esquecido, porque as línguas morrem, mas as idéias matemáticas não”. De maneira semelhante Voltaire observou: “havia mais imaginação na cabeça de Arquimedes do que na de Homero”. Veja Eves⁷.

Sobre os filósofos citados aqui, e vários outros, o leitor pode consultar a excelente obra de Reale-Antiseri⁸.

Fermat

Uma conjectura é um conjunto de idéias que, em conjunto, constitui uma hipótese. Uma conjectura pode ser falsa ou verdadeira. Um exemplo típico é o Último Teorema de Fermat que, antes de ser demonstrado, era apenas uma conjectura. Uma conjectura famosa é a chamada conjectura de Goldbach: “Todo número par maior do que 2 pode ser escrito como a soma de dois números primos”.



Pierre de Fermat (1601-1650), matemático francês, que no dizer de Laplace foi o verdadeiro inventor do Cálculo Diferencial, era advogado, formado em Toulouse, o qual, além de suas contribuições para o desenvolvimento do Cálculo e da Geometria Analítica, deixou como legado um problema, chamado *Último Teorema de Fermat*, formulado em 1630, que foi alvo da atenção de vários matemáticos, profissionais ou amadores, o

Diofanto de Alexandria (c. 250 a.C.) foi um matemático grego que escreveu três trabalhos: Aritmética, Sobre Números Poligonais e Porismas, que tiveram grande importância para o desenvolvimento da Álgebra e da Teoria dos Números.

⁷Howard Eves, Introdução à História da Matemática, 3^a Edição, Editora UNICAMP, 2002.

⁸Giovanini Reale e Dario Antiseri, História da Filosofia, vol. I, Edição Paulinas 1990.

qual foi resolvido completamente por Andrew Wiles, apenas em 1995, ou seja, mais de três séculos depois de ter sido conjecturado. Tal conjectura foi enunciada por Fermat à margem de seu exemplar da Aritmética de Diofanto, obra traduzida por Bachet, ao lado do Problem 8 do Livro II:

Dado um número quadrado, dividi-lo em dois quadrados.

Na nota marginal de Fermat lê-se,

Dividir um cubo em dois cubos, uma quarta potência ou, em geral, uma potência qualquer em duas potências da mesma denominação acima da segunda é impossível, e eu seguramente encontrei uma prova admirável desse fato, mas a margem é demasiado estreita para contê-la.

Será sempre um mistério saber se Fermat estava blefando ou não. A verdade é que tal problema foi alvo da atenção de vários eminentes matemáticos. Reproduzamos, abaixo, o que é dito por Eves⁹, em um livro escrito antes do trabalho de Andrew Wiles:

Será sempre um enigma saber se Fermat tinha ou não, realmente, uma demonstração correta de sua afirmação. O fato é que, desde então, muitos dos mais brilhantes matemáticos empenharam seu talento na resolução do problema, mas a conjectura geral ainda permanece aberta. Em algum lugar Fermat demonstrou o caso $n = 4$; e Euler forneceu uma prova (depois melhorada por outros) para $n = 3$. Por volta de 1825, Legendre e Dirichlet demonstraram independentemente o caso $n = 5$; o teorema foi provado em 1839 por Lamé para $n = 7$. O matemático alemão E. Kummer (1810-1893) empreendeu avanços significativos no estudo do problema. Em 1843 submeteu uma pretensa prova do teorema a Dirichlet que localizou nela um erro de raciocínio. Kummer retornou então ao problema com vigor renovado e, em poucos anos, depois de desenvolver um importante aliado na álgebra superior, um assunto chamado teoria dos ideais, deduziu condições de insolubilidade muito gerais para a relação de Fermat. Quase todos os progressos subseqüentes na resolução do problema basearam-se nas investigações de Kummer. Sabe-se agora que o último “teorema” de Fermat é efetivamente verdadeiro para $n < 125.000$ e para muitos outros valores especiais de n . Em 1908 o matemático alemão Paul Wolfskehl legou 100.000 marcos à Academia de Ciências de Göttingen como prêmio para

Um Porisma é uma proposição que expressa uma condição que se traduz num certo problema solúvel, tendo o problema então infinitas soluções. Vide Eves, para mais detalhes.



Andrew Wiles, matemático inglês que concluiu a demonstração do Último Teorema de Fermat, seguindo o improvável caminho inicialmente apontado pelos japoneses Yutaka Taniyama e Goro Shimura.

⁹Howard Eves, Introdução à História da Matemática, Tradução de Hygino H. Domingues, Coleção Repertórios, Editora da UNICAMP.

a primeira demonstração completa do “teorema”. O resultado foi uma avalanche de supostas provas motivadas pela glória e pelo dinheiro; inclusive, desde então, o problema tem obcecado amadores, como o da trissecção do ângulo e o da quadratura do círculo. O último “teorema” de Fermat ganhou a distinção de ser o problema matemático com maior número de demonstrações incorretas publicadas.

Euclides



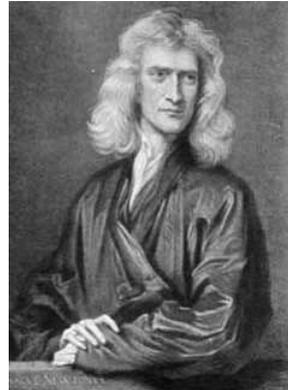
Euclides (fl. 300 a.C.), matemático grego, cuja obra principal, conhecida como Os Elementos, é uma coletânea constituída de 13 volumes que envolvem geometria plana, proporções, Aritmética, teoria das proporções e geometria espacial. Estudou em Atenas e provavelmente foi discípulo de Platão. Foi contratado como um dos matemáticos do Museum de Alexandria, se constituindo em um dos primeiros matemáticos profissionais de que se tem conhecimento sendo que o Museum deve ter sido uma das primeiras, senão a primeira, Universidade em toda a História da humanidade, pois lá cultivava-se o ensino e a pesquisa, que são atividades que caracterizam as modernas Universidades. Deve-se ressaltar que nem todos os resultados de Os Elementos são devidos a Euclides. Esta sua obra é, também, uma compilação de vários resultados obtidos até então.



Euclides em "A Escola de Atenas", detalhe de afresco pintado por Rafael.

No entanto, a obra de Euclides foi fundamental para o desenvolvimento da Matemática e ela é, depois da Bíblia, o livro mais editado em todo o mundo.

Isaac Newton



Existem alguns gigantes da Ciência sobre os quais as informações não podem se restringir a meras notas marginais. Precisamos nos alongar um pouco mais para podermos fornecer uma idéia que não seja muito imprecisa sobre suas vidas e, principalmente, suas obras. Este é o caso de Isaac Newton.

Isaac Newton nasceu, prematuramente, no dia de Natal de 1642, no mesmo ano da morte de Galileu Galilei (1564-1642), também uma das figuras mais proeminentes da Ciência, em Woolsthorpe, cerca de 90 km de Cambridge.

Newton estudou em escolas locais até os doze anos de idade, quando então deslocou-se 11km ao norte, até Grantham, onde residiu com o boticário local. Quatro anos depois, em 1658, retornou à casa materna (seu pai faleceu em outubro de 1642, antes, portanto, do nascimento de Newton).

Em 1661, aos dezoito anos de idade, matriculou-se no Trinity College, a mais famosa faculdade da Universidade de Cambridge. No verão de 1665, virtualmente quase todos abandonaram a Universidade em virtude da peste bubônica. No mês de março de 1666 a Universidade conclama estudantes e professores sob o argumento de que a peste havia sido debelada. Mas, em junho deste mesmo ano, verificou-se que este não era o caso. A praga ainda estava presente e novamente a Universidade esvaziou-se; o retorno ocorreu somente na primavera de 1667. Em particular, Newton havia partido para Woolsthorpe em agosto de 1665.

Quando retornou para Cambridge ele já havia escrito o seu tratado sobre Cálculo, o qual foi concluído em maio de 1666.

Tornou-se Professor Lucasiano (título esse em homenagem a Henry Lucas, fundador do cargo) em 29 de outubro de 1669, com apenas vinte e seis anos de idade, tendo sucedido a Isaac Barrow (1630-1677). Esse cargo forneceu a Newton segurança, independência intelectual e um bom salário. Durante os primeiros dezessete anos de seu cargo como professor,

ele depositava de três a dez trabalhos de pesquisa por ano, mas depois disso nada mais foi depositado.

Foi diretor da Casa da Moeda, dedicou-se à Alquimia e possuía um temperamento extremamente difícil, vivendo praticamente recluso. Em James Gleick¹⁰ é dito:

Descartes era um sonhador; Newton um sábio. Descartes experimentou a poesia e o amor; Newton, não. Voltaire, filósofo francês, que se encontrava em Londres por ocasião do funeral de Newton, nos diz:

”No curso de uma vida tão longa, ele não teve paixões nem fraquezas; nunca chegou perto de uma mulher. E isso me foi confirmado pelo médico e pelo cirurgião que presenciaram sua morte”.

Morreu em 1727 deixando-nos um legado, talvez o mais importante da Ciência, no qual se inclui os estudos sobre o Cálculo Diferencial e Integral, a Lei da Gravitação Universal, Ótica e vários outros que têm norteado o desenvolvimento científico e tecnológico. Afirmou certa vez que havia conseguido enxergar mais longe por ter ficado em pé sobre ombros de gigantes, frase esta não original pois em Jacques Le Goff¹¹ encontra-se a seguinte citação de Bernard de Chartres, ainda na Idade Média:

Somos anões carregados nos ombros de gigantes. Assim vemos mais longe do que eles, não porque nossa visão seja mais aguda ou nossa estatura mais elevada, mas porque eles nos carregam alto e nos levantam acima de sua altura gigantesca
...

¹⁰James Gleick, Isaac Newton, Uma Biografia, Companhia das Letras, 2003.

¹¹Jacques Le Goff, Os Intelectuais na Idade Média, José Olympio, Editores.

Aula 2

Limites: motivações geométrica e cinemática

Objetivos

- Compreender as motivações geométricas e cinemáticas para o conceito de limite.
- Calcular alguns limites simples.

O conceito formal de limite envolve um rigor que, normalmente, para o principiante não pode ser apreciado em toda a sua profundidade, pois o excesso de formalismo, em estudos iniciais, esconde aquilo que é essencial. Em virtude disso, ao introduzirmos o conceito de limite, optamos por dar ênfase às idéias, às técnicas e às aplicações pois, agindo deste modo, incutiremos no aluno neófito no estudo do Cálculo a convicção de que ele está a estudar não apenas algo importante do ponto de vista matemático, como também uma disciplina que permeia as diversas áreas do conhecimento científico e tecnológico. Essas motivações levam o estudante que está a iniciar-se no Cálculo a compreender a sua essência, com a qual poderemos partir para formalizações, após esse início intuitivo, em uma etapa em que o aluno tiver adquirido um mínimo de maturidade.

Começemos com o problema da tangente.

1 O problema da tangente

Como vimos na aula 1, um dos problemas que motivarão o estudo da derivada é o do traçado de tangentes. Tal questão já era estudada desde a Grécia Antiga conforme nos mostra Euclides no Livro III, Proposição 16, do seu Elementos¹. Nessa Proposição, Euclides nos mostra que, dado um

¹Euclid, Euclid's Elements, Great Books of the Western World, Vol. 10

círculo de centro O a reta r passando por um de seus pontos P é tangente ao círculo se o ângulo \widehat{OPT} , em que T é um ponto qualquer de r , for reto. Seu argumento é extremamente simples e será reproduzido aqui, à guisa de ilustração. Consideremos, conforme figura 2.1(a), o círculo de centro O e de um determinado raio. Temos que ou a reta r intersecta o círculo em um outro ponto, digamos, Q , ou não. No primeiro caso o segmento \overline{OQ} será igual ao segmento \overline{OP} . Se $\widehat{OPQ} = \pi/2$ e, como o triângulo $\triangle OPQ$ é isósceles, teríamos que $\widehat{OQP} = \pi/2$ e chegaríamos a uma contradição. Portanto, $P = Q$ e a reta r é tangente ao círculo no ponto P caso ela seja perpendicular ao raio OP . Veja figura 2.1(b). A partir da construção de retas tangentes pode-se traçar retas normais.

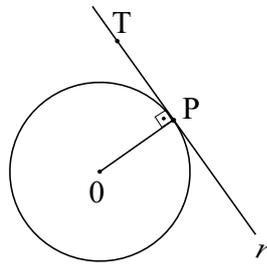


Fig. 2.1(a)

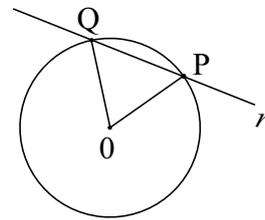


Fig. 2.1(b)

Apolônio de Perga, matemático grego que, com Euclides e Arquimedes, divide a glória de ser considerado um dos gigantes do século III a.C., era matemático notável, além de astrônomo. Sua obra mais conhecida é *Seções Cônicas*, constituída de oito livros e quatrocentas proposições, e deve-se a ele os termos elipse, parábola e hipérbole para designar as seções cônicas.

Já *Apolônio de Perga* (262-190 a.C.), em seu tratado sobre as cônicas, usa métodos similares para provar propriedades sobre as tangentes e normais à parábola, elipse e hipérbole. Também *Arquimedes* (287-212 a.C), em sua obra *Sobre Espirais*, constrói a tangente à chamada *Espiral de Arquimedes*. No entanto, todos os métodos empregados pelos matemáticos supracitados aplicavam-se a casos específicos e, pelo menos nos casos das cônicas, a reta tangente era aquela que intersectava a curva em apenas um ponto. No entanto, como o leitor pode verificar na figura 2.2(a), podemos ter uma reta intersectando uma dada curva em apenas um ponto e tal interseção processando-se de maneira, digamos, transversal. Além disso, uma dada reta poderá encontrar uma curva em mais de um ponto e ser tangente, como é o caso que acontece com a *Espiral de Arquimedes*, ou como na figura 2.2(b).

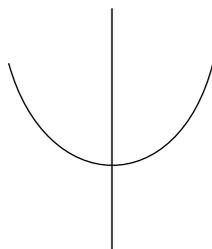


Fig. 2.2(a)

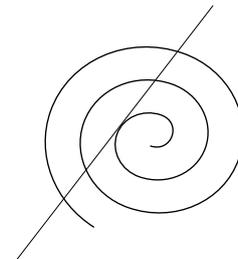


Fig. 2.2(b)

Em vista disso, faz-se mister construir um método geral para a construção de retas tangentes. É o que começaremos a fazer agora, utilizando um processo que nos permitirá introduzir, de maneira bastante ilustrativa, o conceito intuitivo de limite. Começemos, por comodidade, com um caso bastante particular, mas alertando o estudante que a essência do processo é inteiramente geral.

Exemplo 10. Consideremos a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Nosso problema consiste em determinar a inclinação da reta tangente ao gráfico de f em um ponto qualquer $P(x_0, x_0^2)$. Evidentemente, como bem destacamos na introdução, não podemos fazer uso da construção geométrica feita no caso da circunferência, haja vista que o gráfico de f é uma parábola e não temos a noção de centro, raio, etc. Em virtude disso, lançaremos mão de um processo que, a princípio, usará uma aproximação. Mais precisamente, consideremos o ponto $Q(x_0 + h, (x_0 + h)^2)$ pertencente ao gráfico de f . A reta secante determinada por tais pontos possui inclinação m_{PQ} dada por

$$m_{PQ} = \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h}$$

a qual, após as devidas simplificações, adquire a forma

$$m_{PQ} = 2x_0 + h \quad (2.1)$$

Evidentemente, tal número não medirá a inclinação daquilo que esperamos ser a reta tangente à curva no ponto P , ou seja, a reta que nas “proximidades” desse ponto toque a curva em apenas um ponto. Veja figuras 2.3.

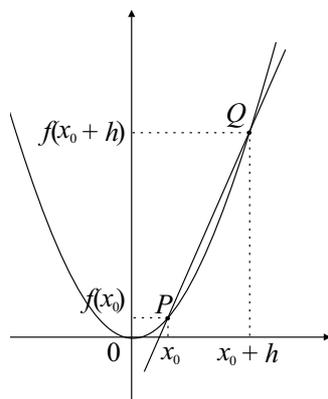


Fig. 2.3(a)

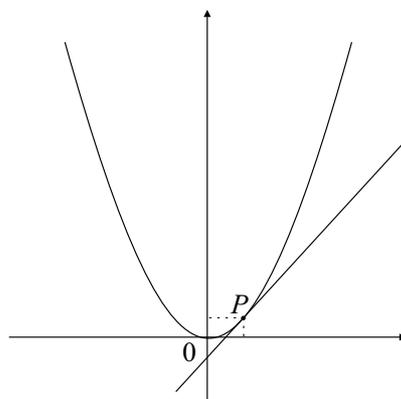


Fig. 2.3(b)

No entanto, quanto mais próximo o ponto P estiver do ponto Q , o que equivale dizer que h estará próximo de zero, a reta secante determinada por P e Q estará próxima de uma posição tangente. Contudo, por menor

que seja o valor de h haverá sempre um erro ao aproximar a reta tangente pela reta secante. Contornaremos tal problema fazendo o h tender a zero ou, como diz-se no jargão do Cálculo, *tomar o limite da expressão quando* $h \rightarrow 0$. Deste modo, a expressão na igualdade (2.1) assume valor $2x_0$, ou mais formalmente

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 2x_0 \quad (2.2)$$

a qual representa a inclinação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto $(x_0, f(x_0))$.

O objeto estranho

$$\lim_{h \rightarrow 0},$$

Com relação ao rigor, vale lembrar a citação: “Rigor é como uma roupa, fica desconfortável se muito folgada ou se muito apertada.

até então desconhecido do aluno egresso do ensino médio, e aqui introduzido de maneira bastante intuitiva, é um divisor de águas entre a Matemática Clássica e a Matemática Moderna, inaugurada por Fermat, Newton, Leibniz, entre outros. Tal objeto será estudado com mais detalhes ao longo do curso, com o rigor sendo colocado de maneira paulatina de modo a não causar traumas pedagógicos no aluno ainda pouco experiente. No entanto, o dito *objeto estranho* tornar-se-á tão íntimo do estudante de Cálculo que qualquer desconforto inicial ao tratar com ele será substituído por uma intimidade extremamente familiar.

A expressão (2.2) é escrita, também, da seguinte maneira. Façamos $x_1 = x_0 + h$ e observemos que fazer h tender a zero é equivalente a fazer o ponto x_1 se aproximar de x_0 e assim o limite expresso na igualdade (2.3) é reescrito como

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Vejam os que acontece em um caso numérico específico. No exemplo acima, faça $x_0 = 3$ de modo que $y_0 = f(x_0) = 9$ e considere valores de x_1 e seus correspondentes $y_1 = f(x_1)$. Evidentemente, tais valores atribuídos a x_1 devem estar próximos de x_0 , ou pela direita ou pela esquerda. Observemos a tabela (2.1) a seguir.

x_1	y_1	$y_1 - y_0$	$x_1 - x_0$	$(y_1 - y_0)/(x_1 - x_0)$
3,01	9,0601	0,0601	0,01	6,01
3,001	9,006001	0,006001	0,001	6,001
3,0001	9,00060001	0,00060001	0,0001	6,0001
2,5	6,25	-2,75	-0,5	5,5
2,9	8,41	-0,59	-0,1	5,9
2,99	8,9401	-0,0599	-0,01	5,99
2,999	8,994001	-0,005999	-0,001	5,999
2,9999	8,99940001	-0,00059999	-0,0001	5,9999

Infere-se dessa tabela que, à medida que x_1 se aproxima de x_0 , tanto pela direita como pela esquerda, o valor de $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ se aproxima de 6. Na notação de limites, tem-se

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 6.$$

Observemos então que obtivemos a noção de tangente por meios algébricos, sem fazer uso de construções geométricas, como os feitos por Euclides no caso da circunferência.

Deve-se observar que o procedimento que acabamos de descrever, muito embora tenha sido aplicado a um caso específico, possui um caráter geral. Mais precisamente, se tivermos uma função $y = f(x)$, definida em um certo intervalo I de \mathbb{R} , e caso queiramos determinar a inclinação da reta tangente ao seu gráfico em um ponto $P(x_0, f(x_0))$ procederemos de modo inteiramente análogo, ou seja, consideraremos um ponto $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$, em que h é um acréscimo, que poderá ser positivo ou negativo, dado à variável x . Assim, a inclinação m_{PQ} da reta secante ao gráfico de f , determinada pelos pontos P e Q , será dada por

$$m_{PQ} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Conseqüentemente, a inclinação da reta tangente será obtida quando fizermos h tender a zero, isto é,

$$m_P = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (2.3)$$

caso tal *limite*, que será chamado derivada de f no ponto x_0 , exista. Como dissemos anteriormente, poderemos reescrever a equação (2.3) da seguinte maneira

$$m_P = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Vejamos um exemplo.

Exemplo 11. Seja $f(x) = x^3$ definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Determinaremos a equação da reta tangente ao gráfico de f em um dado ponto $P = (x_0, x_0^3)$. Para isso, aplicaremos a idéia desenvolvida no exemplo anterior. Com efeito, seja $Q = (x_0 + h, (x_0 + h)^3)$ um ponto do gráfico de f obtido efetuando-se um acréscimo na variável x , e assim teremos a reta que passa por P e Q , secante ao gráfico de f , conforme figuras 2.4.

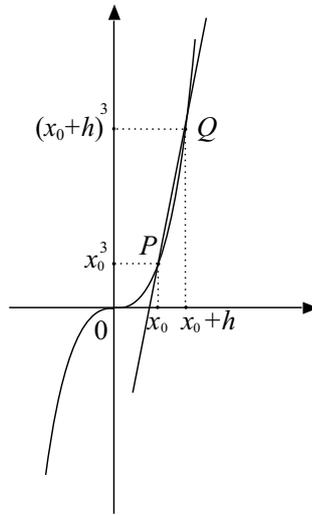


Fig. 2.4(a)

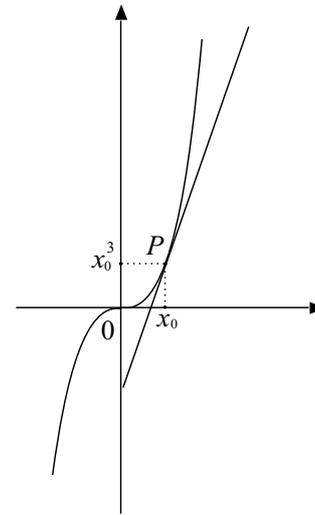


Fig. 2.4(b)

Sua inclinação m_{PQ} será dada por

$$m_{PQ} = \frac{(x_0 + h)^3 - x_0^3}{h} = 3x_0^2 + 3x_0h + h^2. \quad (2.4)$$

Ora, como vimos antes, por menor que seja o valor do acréscimo h , obteremos sempre uma reta secante que, no entanto, tenderá a uma posição limite quando h tender a zero, devendo-se ressaltar que o h acima pode ser positivo ou negativo, ou seja, a existência do limite pressupõe que podemos nos aproximar do ponto em questão, tanto pela direita como pela esquerda do ponto x_0 . Portanto, em virtude da expressão em (2.4), a reta tangente ao gráfico de f no ponto P terá inclinação

$$m_P = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 3x_0^2.$$

De posse desta inclinação e do ponto $P = (x_0, x_0^3)$ encontrar-se-á facilmente a equação da reta tangente. O leitor está convidado a mostrar que a equação de tal reta tangente é dada por

$$y = 3x_0^2x - 2x_0^3.$$

Exemplo 12. Consideremos a função $f(x) = \sqrt{x}$ que está definida apenas para valores de x maiores do que ou iguais a zero. Determine a inclinação da reta tangente ao gráfico de f em um ponto qualquer $P(x_0, \sqrt{x_0})$, $x_0 > 0$.

Solução. Supondo $x_0 > 0$, daremos o acréscimo h para obter o ponto $Q(x_0+h, \sqrt{x_0+h})$ ainda sobre o gráfico de f . A inclinação da reta secante que passa por P e Q é dada por

$$m_{PQ} = \frac{\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}}{h}. \quad (2.5)$$

Como queremos obter a inclinação da reta tangente, devemos fazer o acréscimo tender a zero na expressão acima. No entanto, se assim procedermos, seremos levados a uma expressão indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$. Em vista disso, devemos *levantar a indeterminação*², o que será feito por métodos puramente algébricos, já de conhecimento do leitor. Procedamos da seguinte maneira: multipliquemos numerador e denominador na expressão em (2.5) por $\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}$ para obtermos

$$m_{PQ} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}}.$$

Nesta última expressão podemos fazer o h tender a zero e assim obter a inclinação m da reta tangente ao gráfico de f no ponto P , ou seja,

$$m = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

Observemos que o acréscimo h pode ser tanto positivo como negativo desde que, neste último caso, o seu módulo seja suficientemente pequeno, de modo que $x_0 + h$ ainda seja um número positivo.

Feito isso, podemos imediatamente determinar a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, \sqrt{x_0})$, pois já conhecemos a sua inclinação. Um cálculo elementar nos mostra que tal equação é

$$y = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}x + \frac{\sqrt{x_0}}{2}.$$

Conseqüentemente a equação da reta normal ao gráfico de f , no mesmo ponto, será

$$y = -2\sqrt{x_0}x + \sqrt{x_0}(1 + 2x_0)$$

O leitor está convidado a analisar o problema quando $x_0 = 0$.

Esperamos que o leitor tenha percebido o processo que consistiu em considerar acréscimos e seus quocientes e depois fazer o acréscimo *tender a zero*. Em um dos Apêndices desta aula reproduziremos algumas observações sobre o método de Descartes para o traçado de tangentes.

Antes de continuarmos, façamos um parêntese para introduzir uma noção inicial sobre *indeterminação*. Notemos que a expressão $\frac{0}{0}$ é desprovida de sentido matemático. Da definição de divisão, $\frac{a}{b} = c$ significa que $a = bc$. Portanto, se escrevêssemos $\frac{0}{0} = x$, essa igualdade significaria que

²Observemos que isto ocorreu nos exemplos anteriores. No entanto, como podíamos colocar o h em evidência, no numerador, ele podia ser cancelado com o h do denominador, de modo que a *indeterminação* era levantada automaticamente.

$0x = 0$. Ora, todo número x é tal que $0x = 0$, por isso se diz que $\frac{0}{0}$ é uma “expressão indeterminada”. O mesmo acontece com a expressão 0^0 . Veja Lima³ para mais informações sobre o assunto.

2 O problema da velocidade

Nosso objetivo nesta seção é mostrar a relação que há entre o problema da determinação da reta tangente, vista na seção anterior, com o de calcular a velocidade instantânea, entendida como aquela que o velocímetro de um carro registra a cada instante de seu movimento. Para tal, suponhamos que um móvel esteja se deslocando ao longo de uma reta regido pela equação horária

$$s = s(t) = 3t^2 - 5t + 2$$

em que $s = s(t)$ representa a distância percorrida pelo corpo no tempo t , sendo s medida em metros e t em segundos. Desejamos dar um sentido à noção de velocidade em um determinado instante t . Sabe-se da Física que a velocidade média de uma partícula em um certo lapso de tempo é o quociente entre a distância percorrida e o intervalo de tempo gasto em percorrê-la. Portanto, a velocidade média v_m do móvel no intervalo $[t, t + \Delta t]$ será dada por

$$v_m = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = 6t - 5 + 3\Delta t.$$

Evidentemente, esse valor poderá ser bastante diferente do da velocidade que desejamos determinar se o valor Δt for grande. No entanto, à medida que fizermos o intervalo de tempo usado na experiência bem pequeno, o valor v_m obtido acima ficará cada vez mais próximo do da velocidade instantânea no tempo t . O valor preciso será obtido quando fizermos $\Delta t \rightarrow 0$, o que se lê Δt *tende a zero*. Portanto, a velocidade $v(t)$ no instante t será

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = 6t - 5.$$

Como o leitor pode verificar, o procedimento usado neste segundo exemplo segue os mesmos caminhos daqueles percorridos na resolução do problema da tangente, isto é, na impossibilidade de tratarmos diretamente com o problema proposto, faz-se inicialmente uma aproximação à custa de conceitos previamente conhecidos e daí, por um processo de *passagem ao limite*, obtemos o resultado procurado.

³Elon Lages Lima, *Meu Professor de Matemática e outras histórias*, Coleção Fundamentos da Matemática Elementar, SBM, 1997.

3 Um pouco de generalidade

Utilizando a idéia desenvolvida anteriormente, vejamos agora um procedimento um pouco mais geral, no sentido de que consideraremos uma função qualquer $y = f(x)$ e desejamos verificar o que acontece com os valores de $f(x)$ à medida que x se aproxima de um dado número b . Começemos com um exemplo específico.

Exemplo 13. Consideremos a função quadrática $f(x) = x^2$ e analisemos o que acontece com os valores de $f(x)$ quando x se aproxima de 2, ou, usando o linguajar matemático, *desejamos calcular o limite de $f(x)$ quando x tende ao valor 2*. Simbolicamente, este fato é traduzido por

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x).$$

Para ver o que acontece com este procedimento dinâmico analisemos a tabela abaixo e à esquerda:

x	$f(x) = x^2$
1,5	2,25
1,6	2,56
1,7	2,89
1,8	3,24
1,9	3,61
1,99	3,9601
1,999	3,996001
1,9999	3,99960001
1,99999	3,99996
1,999999	3,999996
1,9999999	3,9999996

x	$f(x) = x^2$
2,5	6,25
2,4	5,76
2,3	5,29
2,2	4,84
2,1	4,41
2,05	4,2025
2,04	4,1616
2,03	4,1209
2,02	4,0804
2,01	4,0401
2,001	4,004001

Observemos que à medida em que x se aproxima de 2, por valores menores que 2, $f(x)$ fica cada vez mais próximo de 4. Vejamos a tabela à direita em que x se aproxima de 2 por valores maiores do que 2.

Nesse caso também tem-se que os valores de $f(x)$ se aproximam de 4 quando x tende a 2 por valores maiores do que 2. Observando que $f(2) = 4$ somos tentados a concluir que

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4 = f(2).$$

Isto é o que acontece com quase todas as funções com as quais temos trabalhado até agora. Observemos que o universo das funções conhecidas pelo leitor, embora seja rico, é constituído por funções *bem comportadas*, entre as quais destacamos os polinômios, as funções trigonométricas, a função exponencial, etc. Para esta classe de funções tal fenômeno sempre se verifica, ou seja, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Exemplo 14. Consideremos o caso em que $f(x) = x^2 - 7x^3 + 5$ e observemos que

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 7x^3 + 5) = 1^2 - 7(1^3) + 5 = -1 = f(1).$$

No entanto, nem sempre isto ocorre. Vejamos os seguintes exemplos. Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = -x^2 + 6x - 5,$$

$$g(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x - 5 & \text{se } x \neq 3, \\ 1 & \text{se } x = 3. \end{cases}$$

Claramente, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = 4$. No entanto, $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 4 \neq 1 = g(3)$. Observemos que o gráfico de f é traçado de modo contínuo, ao passo que o de g possui um determinado salto. Veja figuras 2.5(a) e 2.5(b) a seguir.

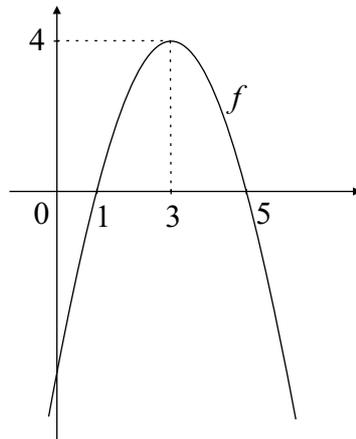


Fig. 2-5(a)

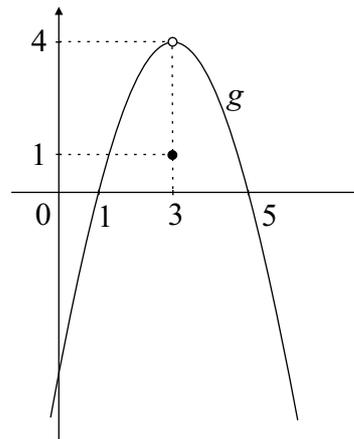


Fig. 2-5(b)

Esses exemplos mostram que é preciso ser bastante cuidadoso ao tratarmos com o conceito de limite. Isso ficará gradativamente claro ao analisarmos determinados exemplos bastante típicos de certos fenômenos. Confira o exemplo a seguir.

Exemplo 15. Consideremos a função dada por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Como $x = 1$ não pertence ao domínio de f , caso queiramos calcular $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, não podemos, como no caso anterior, atribuir a x o valor 1, pois assim teríamos uma expressão do tipo $\frac{0}{0}$, que é chamada indeterminação, pois não possui valor matemático definido. Contudo, não há motivo para

desesperarmos, pois, se $x \neq 1$, pode-se reescrever a expressão da função como

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1},$$

o que nos fornece

$$f(x) = x + 1, \quad x \neq 1.$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

Neste exemplo, fica evidente que para calcularmos o limite de uma função em determinado ponto, não é necessário que a função esteja definida nele, ou seja, não há a necessidade de que tal ponto pertença ao domínio da função. Basta que a função esteja definida em uma *vizinhança* do referido ponto. No decorrer das lições, outras indeterminações surgirão, entre as quais algumas que não poderão ser levantadas por procedimentos puramente algébricos como o do problema anterior. Um exemplo típico é o da função $\frac{\text{sen } x}{x}$ quando x tende a zero. Tal limite, que é um dos limites fundamentais do cálculo, é dado por

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

e será estudado com detalhes na aula 3.

Nos casos anteriores a função f aproximava-se sempre do mesmo valor, independente da maneira como x tendia ao número a . No entanto, esse não é o caso geral, ou seja, como dissemos anteriormente, a análise das questões relacionadas com limites deve ser tratada de maneira bastante cuidadosa, pois elas estão freqüentemente reservando-nos surpresas. Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 16. Consideremos a função dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ 1, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

a qual surge em aplicações práticas como em eletricidade, mecânica, etc. Analisemos o comportamento dessa função quando x estiver próximo de zero. Ora, x pode aproximar-se de zero tanto pela sua direita como pela sua esquerda. Indicaremos tais fatos, respectivamente, por $x \rightarrow 0^+$ e $x \rightarrow 0^-$. À direita de 0 a função é constante e igual a 1 e assim diremos que o limite da função f quando x se aproxima de 0 pela direita - *limite lateral à direita* - é igual a 1, e escreve-se

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1.$$

De maneira análoga, teremos o *limite lateral à esquerda* dado por

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0.$$

Quando tal fato acontecer - limites laterais existem mas são distintos - diremos que o limite não existe.

Não esqueçamos a seguinte observação:

O limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe se, e somente se, os limites laterais $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ existirem e forem iguais.

Observação 1. Deve-se ressaltar que em algumas situações pode-se apenas calcular um dos limites laterais. É o que acontece se a função f estiver definida em intervalos tais como $[a, b]$, (a, b) , $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$, etc. No ponto a há sentido apenas em falar em limite lateral à direita, enquanto que no ponto b há sentido apenas em falar em limite lateral à esquerda. Veja o que acontece com as funções $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, $\ln x$, etc.

Exemplo 17. Consideremos um exemplo um pouco mais trabalhoso, pois em Matemática, como de resto em todos os aspectos da vida, nem tudo são flores.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{se } x < 3, \\ x^2 - 12, & \text{se } x \geq 3. \end{cases}$$

Analisemos alguns limites dessa função.

(a) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$?

Para $x \geq 3$, tem-se que $f(x) = x^2 - 12$, e assim

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 12) = 4 = f(4).$$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$?

Para $x < 3$, tem-se que $f(x) = 1/x$, e assim

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (1/x) = 1/2 = f(2).$$

(c) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$?

Para $x \geq 3$, temos que $f(x) = x^2 - 12$, e assim

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} = -3 = f(3).$$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$?

Para $x < 3$, tem-se $f(x) = 1/x$, e assim

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} = 1/3.$$

Observemos que esse limite não é afetado pelo valor da função no ponto $x = 3$. Portanto, como o estudante já deve ter observado em exemplos anteriores, o limite de uma função em um certo ponto nem sempre está relacionado com o valor da função neste ponto.

(e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$?

O leitor está convidado a dar uma resposta a essa pergunta!

4 Exercícios resolvidos

1. Calcule $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{x^2 - x - 12}$.

Solução. Observemos inicialmente que no cálculo de limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ a variável x se aproxima de a mantendo-se sempre diferente de a . Se tentássemos substituir simplesmente x por 4, chegaríamos a uma indeterminação. No entanto, se $x \neq 4$ podemos realizar os seguintes cálculos

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{x^2 - x - 12} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x + 3)(x - 4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x + 3} = \frac{1}{7}.$$

2. Dada $f(x) = x^2 - 3x$, calcule $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$.

Solução. Como $f(x) = x^2 - 3x$, temos que $f(x + h) = (x + h)^2 - 3(x + h)$ e

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2hx + h^2 - 3x - 3h) - (x^2 - 3x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2hx + h^2 - 3h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h - 3) \\ &= 2x - 3 \end{aligned}$$

O leitor deve observar que em um determinado ponto dos cálculos acima nós levantamos uma indeterminação.

3. Dada $f(x) = \sqrt{5x + 1}$, determine $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$, quando $x > -\frac{1}{5}$.

Solução. Inicialmente o estudante deve perguntar-se o porquê da imposição $x > -1/5$. Passemos ao cálculo do limite.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5x + 5h + 1} - \sqrt{5x + 1}}{h}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5x+5h+1} - \sqrt{5x+1}}{h} \frac{\sqrt{5x+5h+1} + \sqrt{5x+1}}{\sqrt{5x+5h+1} + \sqrt{5x+1}} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(5x+5h+1) - (5x+1)}{h(\sqrt{5x+5h+1} + \sqrt{5x+1})} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5}{\sqrt{5x+5h+1} + \sqrt{5x+1}} \\
&= \frac{5}{2\sqrt{5x+1}}.
\end{aligned}$$

A pergunta acima já foi respondida? Pode-se calcular o limite acima quando $x = -\frac{1}{5}$? Justifique sua resposta.

Exemplo 18. Consideremos a função dada por $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ e observemos que o valor $x = 2$ não pertence ao domínio da função. No entanto, podemos analisar o comportamento de f quando x se aproxima de 2. Ora, quando x gradualmente se aproxima de 2, o valor de $(x-2)^2$ se aproxima cada vez mais de zero, por valores positivos, e assim a fração $\frac{1}{(x-2)^2}$ assume valores cada vez maiores, tornando-se *infinitamente grande*. Designa-se tal fato escrevendo-se

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty.$$

Foi John Wallis(1616-1703), matemático inglês, quem primeiro introduziu o símbolo ∞ para representar infinito.

Devemos enfatizar que ∞ não é um número. Ele é um símbolo usado para designar algo que se torna maior do que qualquer valor real sempre que x se aproxima de um ponto que poderá, ou não, pertencer ao domínio da função.

Exemplo 19. Relacionado com o que aconteceu no exemplo anterior, mas com uma certa diferença, temos a função

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

cujo domínio é constituído pela totalidade dos números reais exceto o 0. Analisemos o que acontece com o comportamento da função próximo do valor zero. Observemos que x pode se aproximar de zero tanto por valores positivos como por valores negativos.

Suponhamos que $x \rightarrow 0^+$, ou seja, x se aproxima de zero por valores positivos. Para tornar a exposição mais clara, admitamos que x assuma valores iguais a $\frac{1}{n}$ em que n varia no conjunto dos números naturais \mathbb{N} . Evidentemente, $\frac{1}{n}$ se aproxima de zero por valores positivos e $f(\frac{1}{n}) = n$ que se torna infinitamente grande e este fato traduz-se, em termos de limite, como

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

Suponhamos, agora, que x se aproxime de zero pela esquerda, isto é, por valores negativos. Nesse caso, podemos considerar x assumindo valores da forma $x = -\frac{1}{n}$, e assim $f(-\frac{1}{n}) = -n$ que tende para $-\infty$. Traduzindo tal fato em termos de limite, obtém-se

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty.$$

Estudaremos, com mais detalhes, tais tipos de limites na aula 3.

5 Exercícios propostos

1. Em cada um dos itens a seguir, determine os pontos $x = a$ para os quais cada denominador é zero. Verifique o que acontece quando $x \rightarrow a^+$ e quando $x \rightarrow a^-$.

(a) $f(x) = \frac{3}{x}$

(b) $f(x) = \frac{x}{x-1}$

(c) $f(x) = \frac{x-2}{(x-1)(x-3)}$

(d) $f(x) = \frac{x-2}{(x-1)^2}$

2. Calcule $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h+3} - \sqrt{3}}{h}$.

3. Calcule $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - x - 12}{x - 4}$.

4. Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 3x^3 - 13x^2 - 27x + 36}{x^2 + 3x - 4}$ caso ele exista.

5. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right).$$

6. Encontre os limites abaixo, caso eles existam:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} |x|$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x|}{x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$

7. A função

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ 2x & \text{se } 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

possui limite no ponto $x = 1$? E no ponto $x = 2$?

6 Respostas dos exercícios propostos

1. (a) $a = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{x} = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{x} = -\infty$
 - (b) $a = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1} = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x-1} = -\infty$
 - (c) $a = 1$ ou $a = 3$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-2}{(x-1)(x-3)} = +\infty$,
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-2}{(x-1)(x-3)} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-2}{(x-1)(x-3)} = +\infty$ e
 $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-2}{(x-1)(x-3)} = -\infty$
 - (d) $a = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-2}{(x-1)^2} = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-2}{(x-1)^2} = -\infty$
2. $\frac{1}{2\sqrt{3}}$
 3. 7
 4. -8
 5. $\frac{1}{4}$
 6. (a) 0
 (b) 1
 (c) 1
 (d) 0
 (e) 1 se $x \rightarrow 0^+$ e -1 se $x \rightarrow 0^-$
 7. O limite não existe em $x = 1$, pois

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \neq 2 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

Em $x = 2$ a função tem limite e $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$.

Nesta aula você aprendeu:

- quais foram as motivações geométricas e cinemáticas do Cálculo;
- a calcular alguns limites simples.

7 Apêndice

Apolônio de Perga

Apolônio (262-190 a.C.) escreveu um tratado, *As Cônicas*, constituído de oito livros. Juntamente com *Os Elementos* de *Euclides* são considerados as melhores obras da antiguidade em seus campos.

Arquimedes

Pier Daniele Napolatini⁴, professor de História da Matemática da Universidade de Pisa, refere-se a Arquimedes com palavras que refletem a importância do matemático siracusano para o desenvolvimento da Matemática. Ele nos diz:

Explicar Arquimedes em poucas páginas é uma tarefa difícil. Será preciso considerar o inventor, o defensor de Siracusa, a genialidade de suas técnicas matemáticas e inserir tudo isso no contexto da ciência helenística e das Guerras Púnicas. Mas ainda não basta. A vida de Arquimedes estendeu-se bem além dos 75 anos que passou neste mundo: se sua figura se tornou um mito, sua obra é uma das raízes mais profundas de nossa Ciência. Aspectos que também precisamos considerar.

E há outro problema. Arquimedes foi um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Era, porém, um matemático grego e, embora a Matemática grega seja a precursora da nossa, é profundamente diversa daquela que praticamos. Assim, não podemos dar uma idéia de sua obra traduzindo os resultados para a nossa linguagem: uma tradução desse tipo transformaria nossa narrativa em um insosso elenco de resultados facilmente dedutíveis mediante o cálculo infinitesimal. Para reconstruir as contribuições de Arquimedes é preciso mergulhar na sua Matemática.

O objetivo deste apêndice é o motivar o leitor a mergulhar na obra do Sábio de Siracusa. Arquimedes nasceu na cidade de Siracusa (c. 287 a.C.), sul da Itália, que, na época, pertencia ao mundo grego, e morreu (c. 212 a.C.) durante o ataque de tropas romanas a Siracusa, comandado pelo general romano Marco Cláudio Marcelo que, segundo consta, por ser profundo admirador de Arquimedes, teria dado ordens expressas para que o poupassem durante a invasão. No entanto, a ordem de Marcelo não foi

⁴Pier Daniele Napolitani, Gênios da Ciência, Arquimedes Pioneiro da Matemática, Scientific American, Nº 7.

cumprida e Arquimedes acabou assassinado por um soldado romano, fato este narrado por Plutarco⁵.

Acredita-se que ele tenha estado na Universidade de Alexandria, local onde trabalharam Euclides, Eratóstenes, Aristarco de Samos e Apolônio de Perga, entre outros. Vários de seus trabalhos chegaram até nós e existem suspeitas de que outros se perderam ao longo dos tempos. Tais trabalhos arquimedianos são verdadeiras obras-primas de elegância e rigor matemático e estão coletados, com tradução de Sir Thomas L. Heath, no Volume 10 do *Great Books of the Western World*. São as seguintes as obras de Arquimedes preservadas até hoje:

1. Sobre a Esfera e o Cilindro.
2. A Medida do Círculo.
3. Sobre Conóides e Esferóides.
4. Sobre as Espirais.
5. Sobre o Equilíbrio dos Planos.
6. O Contador de Areia.
7. A Quadratura da Parábola.
8. Sobre Corpos Flutuantes.
9. O Método.
10. Livro dos Lemas.

Em particular, Arquimedes orgulhava-se de sua obra *Sobre a Esfera e o Cilindro* a ponto de querer que sobre a lápide de seu túmulo ficasse gravada uma esfera inscrita em um cilindro; no que foi atendido pelo general Marcelo, seu adversário, mas admirador.

O túmulo do gênio de Siracusa foi encontrado, em 1965, durante as escavações para a construção de um hotel em Siracusa, no qual surgia a esfera inscrita no cilindro. No trabalho preferido de Arquimedes é demonstrado que se um cone estiver inscrito em um hemisfério, que por sua vez estiver inscrito em um cilindro, os volumes dos sólidos estarão na razão $1 : 2 : 3$.

Para chegar a tal conclusão, Arquimedes deveria conhecer o volume da esfera, algo então desconhecido naquele tempo. Como, então, Arquimedes

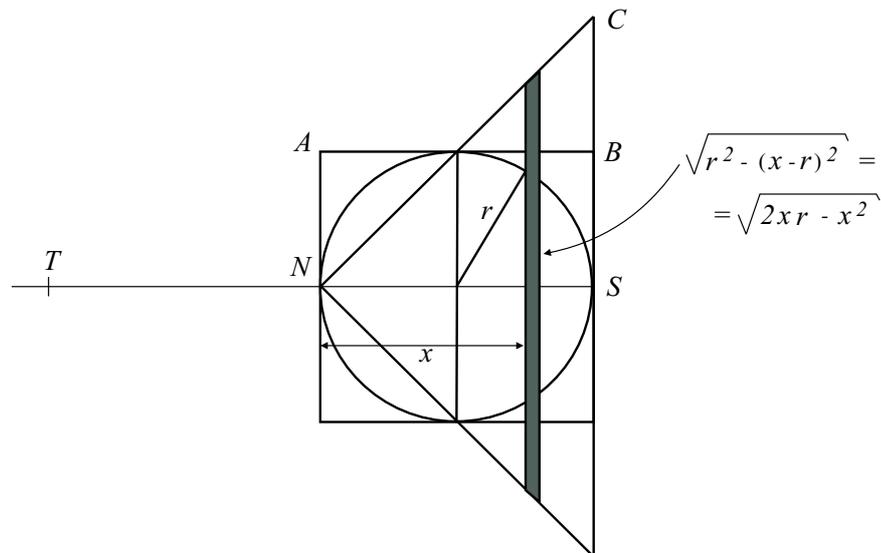
⁵ The Lives of the Noble Grecians and Romans, Vol. 13, The Dryden Translation, *Great Books of the Western World*.

Palimpsesto. Manuscrito sobre pergaminho que os copistas da Idade Média apagaram, para sobre ele traçarem nova escrita, debaixo da qual a arte tem modernamente conseguido fazer reaparecer em parte os primitivos caracteres. Tal palavra vem de Palimpsestos, de *palin*(de novo) + *psestos*(raspado).

deduziu a fórmula correta do volume da esfera? Isto permaneceu envolto em mistério até 1906 quando o filólogo dinamarquês Johan Ludvig Heiberg, examinando um antigo manuscrito em uma biblioteca de um mosteiro em Constantinopla, hoje Istambul, Turquia, verificou que era um palimpsesto, no qual o texto matemático original havia sido parcialmente apagado.

Análises cuidadosas de tal documento revelaram que ele era um dos trabalhos perdidos de Arquimedes, chamado *O Método*, no qual ele explicava seu procedimento para descobrir o volume da esfera. Para atingir tal desiderato Arquimedes procedeu como se segue, no qual usa-se o moderno linguajar matemático. Veja Eves⁶.

Seja r o raio da esfera e a situemos de modo que o seu diâmetro horizontal coincida com o eixo ox , com o pólo norte na origem, conforme figura a seguir



Construa o cilindro e o cone de revolução obtido pela rotação do retângulo $NABS$, cuja área é $2r \times r$, e o triângulo NCS em torno do eixo ox . Agora cortemos os três sólidos em fatias verticais a uma distância x de N e com espessura Δx . Os volumes destas fatias são, aproximadamente,

$$\text{Volume da fatia na esfera: } \pi x(2r - x)\Delta x,$$

$$\text{Volume da fatia no cilindro: } \pi r^2 \Delta x,$$

$$\text{Volume da fatia no cone: } \pi x^2 \Delta x,$$

⁶Howard Eves, *Great Moments in Mathematics Before 1650*, Mathematical Association of America, Dolciani Mathematical Exposition N^o 5(1983).

Relembremos que o momento de um corpo em relação a um ponto é o produto do volume do corpo pela distância do ponto, com relação ao qual estamos calculando o momento, ao centróide do corpo.

Assim, tomemos as correspondentes fatias da esfera e do cone e as penduremos em uma balança virtual com seus centros em T , onde $TN = 2r$. O momento resultante destes dois corpos com relação a N é

$$[\pi x(2r - x)\Delta x + \pi x^2\Delta x]2r = 4\pi r^2 x\Delta x.$$

Observemos que isto é quatro vezes o momento da fatia do cilindro quando a fatia é deixada no lugar em que ela se encontra originalmente. Adicionando um grande número de fatias colocadas justapostas encontramos

$$2r[\text{Volume da Esfera} + \text{Volume do Cone}] = 4r[\text{Volume do Cilindro}]$$

ou, equivalentemente,

$$2r \left[\text{Volume da Esfera} + \frac{8\pi r^3}{3} \right] = 8\pi r^4,$$

ou

$$\text{Volume da Esfera} = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

Este foi o método descrito por Arquimedes para descobrir o volume da esfera. Contudo, a consciência matemática de Arquimedes não permitia que ele considerasse tal procedimento como sendo uma demonstração. Posteriormente ele forneceu uma demonstração usando o *Método de Exaustão*, que é a essência do método de integração conhecido do Cálculo Integral que será visto na aula 9.

O método de Descartes para o traçado de tangentes

O Cálculo Diferencial e Integral, denominado em priscas eras Cálculo Infinitesimal, tem como personagens principais gigantes como Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz que, independentes um do outro, desenvolveram grande parte daquilo que se estuda nos cursos de Cálculo de Uma Variável. No entanto, o Cálculo não se originou nem se exauriu com Newton e Leibniz. Na verdade, seus pontos basilares, a derivada e a integral, repousam sobre problemas que remontam à Grécia Antiga, relacionados, respectivamente, com traçados de tangentes e cálculos de áreas, a chamada quadratura dos gregos de antanho.

No concernente à determinação de tangentes, normalmente aprende-se nos cursos elementares que a reta tangente a uma curva é aquela que a interseca em apenas um ponto. Tal fato é verdadeiro se, por exemplo, a curva considerada for uma circunferência. Veja figura 2.6(a). No entanto, de maneira geral, tal assertiva não é verdadeira, conforme indicam as figuras 2.6(b) e 2.6(c).

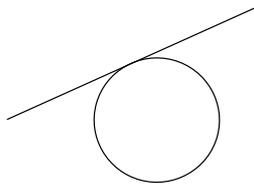


Fig. 2.6(a)

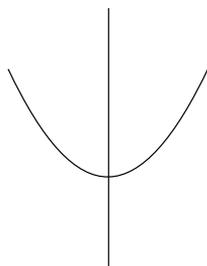


Fig. 2.6(b)

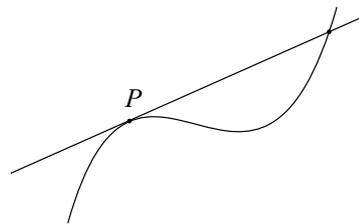


Fig. 2.6(c)

Na figura 2.6(b) a posição da reta não condiz com aquilo que se espera de uma reta tangente, muito embora ela intersecte a curva em apenas um ponto. Já na figura 2.6(c) a reta intersecta a curva em dois pontos mas ela *tangencia* a curva em P .

Portanto, faz-se mister definir de maneira precisa o que vem a ser reta tangente a uma curva por um dado ponto, a fim de evitar dubiedades como as expostas acima. Vários esforços foram feitos neste sentido, no entanto, somente com o advento do Cálculo Diferencial e seu subjacente conceito de limite, conseguiu-se tal desiderato.

Nosso objetivo neste apêndice é o de descrever o procedimento de Descartes para o traçado de tangentes. Antes, porém, façamos a devida apresentação do astro principal deste episódio da História da Matemática.

René Descartes(1596-1650)

René du Perron Descartes nasceu a 31 de março de 1596 em La Haye (atualmente La Haye-Descartes), França, uma pequena cidade a 250 km de Paris. Aos oito anos de idade ingressou em uma escola Jesuíta em La Flèche onde recebeu uma educação moderna em Matemática e Física, incluindo-se aí recentes descobertas astronômicas realizadas por Galileu. Posteriormente, graduou-se em Direito pela Universidade de Poitier em 1616, aos vinte anos de idade, mas nunca chegou a exercer a profissão de advogado preferindo, ao longo de dez anos, viajar pela Europa. Neste período ele teve suas primeiras idéias sobre a *ciência maravilhosa* que veio a tornar-se a Geometria Analítica.

Descartes mudou-se para a Holanda em 1628, lugar onde viveu durante 20 anos. Lá, por volta de 1634, completou um trabalho científico intitulado *Le Monde*. Em 1637 apareceu a sua obra maior, o *Discours de La Méthode*, que continha como apêndices *La Dioptrique*, *Les Meteores* e *La Géometrie*. Em 1649 foi à Suécia, convidado que fora pela Rainha Cristina, ambiciosa patrona das artes, que cultivava o sestro de manter em sua corte prestigiosos intelectuais e homens de ciência. No entanto, tal rainha, no vigor de seus 23 anos de idade, tinha o singularíssimo costume

de receber as lições do mestre Descartes às 5h da manhã em uma fria biblioteca cujas janelas eram mantidas abertas. A frágil saúde de Descartes não resistiu a tal intempérie; alguns meses depois, o consagrado autor da *La Géométrie* foi abatido por uma pneumonia que ceifou sua vida a 11 de fevereiro de 1650.

Descartes e o Método da Subnormal

Como dissemos na introdução, um problema central nos cursos iniciais de Cálculo é o do traçado de tangentes a curvas descritas por equações. No século XVII tais problemas não eram descritos desta maneira pois as equações de retas não eram tópicos ainda plenamente desenvolvidos. Tal problema era rephraseado da seguinte maneira:

Encontrar a subnormal por um dado ponto de uma curva, isto é, o comprimento do segmento sobre o eixo x entre a abscissa de um ponto sobre a curva e a intersecção da normal com o eixo x

Na figura 2.7 a subnormal mede $v - x$.

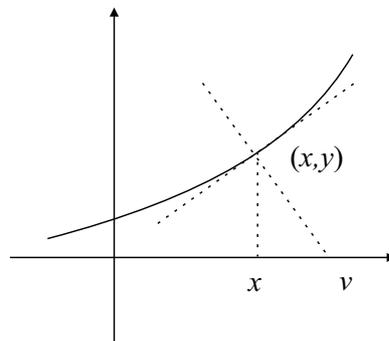


Fig. 2.7

Apresentaremos a seguir o método introduzido por Descartes para encontrar a subnormal. Por questões meramente didáticas consideraremos o caso específico da parábola $y^2 = 2x$, muito embora o procedimento seja válido para outras curvas.

Suponhamos que na figura 2.8 a curva seja a parábola de equação $y^2 = 2x$ e queiramos traçar a reta tangente a ela pelo ponto $C = (x_0, y_0)$. Evidentemente tal tangente ficará determinada caso saibamos traçar a normal à curva no ponto C .

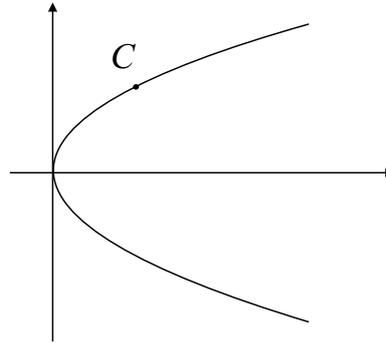


Fig. 2.8

Consideremos o círculo com centro $P = (v, 0)$ e raio $r > 0$ que passa pelo ponto (x_0, y_0) pertencente à parábola e cuja equação é dada por

$$(v - x)^2 + y^2 = r^2.$$

Desde que (x_0, y_0) pertence à parábola temos que $y_0^2 = 2x_0$ e assim obtém-se

$$(v - x_0)^2 + 2x_0 = r^2,$$

donde

$$x_0^2 + 2(1 - v)x_0 + v^2 - r^2 = 0.$$

que é uma equação do 2º grau em x_0 . Dependendo do valor de r , tal equação poderá ter uma ou duas soluções. Observemos que para cada solução $x_0 \neq 0$ há dois valores de y_0 associados, pois $y_0 = \pm\sqrt{2x_0}$. Vide figuras 2.9(a) e 2.9(b).

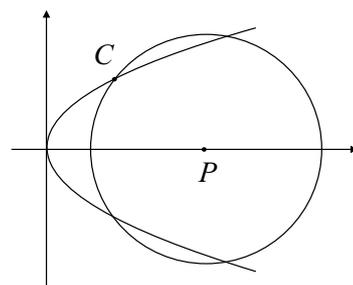


Fig. 2.9(a)

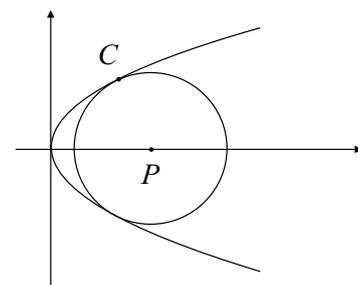


Fig. 2.9(b)

Se o seu discriminante for positivo, a circunferência intersecará a parábola em quatro pontos, conforme figura 2.9(a). Como estamos interessados em obter a subnormal, devemos impor a condição de que o discriminante seja nulo, isto é, a raiz da equação será dupla e a interseção da circunferência com a parábola dar-se-á em apenas dois pontos. Teremos então

$$v - x_0 = 1$$

o que nos diz que a subnormal de uma parábola é constante, fato esse bem conhecido entre os matemáticos contemporâneos de Descartes. Para construir a normal passando por $C = (x_0, y_0)$ projetamos tal ponto sobre o eixo ox e deslocamos uma unidade para a direita para obter $v = x_0 + 1$. A reta passando por $C = (x_0, y_0)$ e $P = (x_0 + 1, 0)$ é normal à parábola por C e daí podemos facilmente construir a reta tangente.

Como é dito por Rickey⁷, Descartes orgulhava-se bastante por ter produzido este resultado, sobre o qual ele diz:

Eu utilizei um método geral para desenhar uma linha reta fazendo ângulos retos com uma curva em um ponto arbitrariamente escolhido sobre ela. E ousou dizer que esse não apenas é o mais útil e mais geral problema em Geometria que eu conheço, mas também o que eu mais fazia questão de saber⁸.

Evidentemente o método de Descartes não é o mais geral, coisa que ocorreu somente com o advento do Cálculo Diferencial (a primeira manifestação realmente clara do método diferencial é encontrada em idéias de Fermat, expostas em 1629⁹). No entanto, a técnica descrita acima mostra-se particularmente interessante pela elegância e criatividade demonstrada por Descartes, como também pelo fato de que ela pode ser apresentada no ensino médio, haja vista que ela pressupõe apenas o domínio de tópicos elementares tais como equações do 2º grau, Geometria Analítica, etc. Isso mostra que tópicos historicamente relevantes podem, e devem, ser apresentados desde os níveis mais elementares do ensino da Matemática, contribuindo para diminuir o marasmo e a mesmice que com muita frequência submete o ensino da Matemática a um mero receituário de fórmulas, o que incentiva o trabalho puramente mecânico em detrimento da criatividade, que é (ou deveria ser) o fio condutor da relação ensino-aprendizagem.

O Método Axiomático

Pode-se dizer que a evolução do pensamento matemático possui duas fases distintas, a saber:

Na primeira delas temos a descoberta, em que a intuição desempenha um papel fundamental, na qual os fenômenos são, digamos, descobertos.

⁷V. Frederic Rickey, Isaac Newton: Man, Myth and Mathematics, College Mathematics Journal, 60, Nov. 1987, 362-389.

⁸René Descartes, The Geometry, Great Books of the Western World, Encyclopaedia Britannica, INC., 1996.

⁹ Howard Eves, Introdução à História da Matemática, Editora da UNICAMP, 3ª Edição, 2002.

Admite-se, guiados pela experiência, imaginação, intuição, etc., que determinados fatos são verdadeiros. Isto foi feito, por exemplo, por egípcios, babilônios, chineses e indianos, assim como é feito no dia-a-dia, nos processos pedagógicos e científicos. No entanto, ficaríamos apenas no campo da especulação, no talvez, se não pudéssemos comprovar que tais conjecturas sejam verdadeiras. Aí, devemos passar para a próxima etapa.

Na segunda etapa do pensamento matemático surge a demonstração, que é a construção lógica das verdades, vislumbradas pelos processos descritos anteriormente. Demonstrar uma proposição é deduzi-la, aplicando princípios da lógica formal, de outras proposições já admitidas.

Em *A Experiência Matemática*¹⁰ é feita a seguinte colocação:

Diz-se que a primeira demonstração na história da Matemática foi dada por Tales de Mileto (c. 600 a.C.). Ele demonstrou que o diâmetro de um círculo o divide em duas partes iguais. Ora, isso é uma afirmativa tão simples que parece evidente por si própria. A genialidade, nesse caso, foi perceber que uma demonstração mais do que simples pedantismo é possível e necessária. O que torna uma demonstração mais do que simples pedantismo são suas aplicações a situações onde as afirmativas são muito menos transparentes. Na opinião de alguns, o nome do jogo da Matemática é demonstração; sem demonstração, nada de Matemática.

Alguns autores costumavam - e há alguns que ainda costumam - empregar as iniciais C. Q. D. no final das demonstrações, o que significa Como Queríamos Demonstrar. Em latim as iniciais são Q. E. D. o que significa Quod Erat Demonstrandum. Atualmente, há a tendência de usar os símbolos ■ ou □ ao final de uma demonstração.

A demonstração tem por fim estabelecer uma cadeia entre os postulados e os teoremas, mediante um cálculo do qual se exclui qualquer arbitrariedade.

Uma teoria dedutiva consiste, em suma, do seguinte esquema: na base, um grupo de símbolos primeiros, ligados entre si por um grupo de proposições primeiras; partindo desse corpo de premissas, um mecanismo lógico que extrai as conseqüências chamadas teoremas.

Muito embora Tales seja considerado o primeiro matemático ao qual se atribui uma demonstração, coube a Euclides de Alexandria, em seus *Elementos* (composto por treze volumes), construir o primeiro sistema lógico-dedutivo aplicado inicialmente na Matemática, e posteriormente usado em outros ramos da Ciência. Os seis primeiros livros de *Os Elementos* são sobre Geometria plana elementar, os três seguintes sobre teoria dos números, o Livro X sobre incomensuráveis e os três últimos versam principalmente sobre geometria no espaço. Não há introdução ou preâmbulo, e o primeiro livro começa abruptamente com uma lista de vinte e três definições. A deficiência, aqui, é que algumas definições não definem, pois não há um

¹⁰Philip J. Davis e Reuben Hersch, *A Experiência Matemática*, 3ª Edição, Francisco Alves, 1986.

conjunto prévio de elementos não-definidos em termos dos quais os outros sejam definidos. Como exemplo, vejamos algumas destas definições:

1. Definição 1. Um ponto é aquilo que não tem partes.
2. Definição 2. Uma reta é um comprimento sem largura.
3. Definição 5. Uma superfície é aquilo que possui somente comprimento e largura.

Com relação à impossibilidade de definir certas coisas, lembremos da canção “Ontem ao luar”, de Catulo da Paixão Cearense (1863-1946), na qual tem-se o seguinte verso: “Como definir o que só sei sentir?”

Assim, as “definições” acima realmente não definem, pois uma definição deve ser expressa em termos de coisas estabelecidas previamente que sejam mais bem conhecidas do que as coisas definidas. Outra falha no sistema de Euclides é a circularidade das definições. Mais precisamente, vejamos o que acontece nos exemplos a seguir. A Definição 3 estabelece:

As extremidades de uma reta são pontos.

Enquanto que na Definição 4, Euclides nos diz:

Uma linha reta é uma linha que jaz igualmente com os pontos sobre ela.

Como se vê, além do aspecto confuso da Definição 4, temos que para definir reta ele usa a noção de ponto, e na Definição 3 ele usa o conceito de reta, que não foi definido previamente.

Em seguida às definições, Euclides fornece uma lista de cinco postulados (ou axiomas) e cinco noções comuns. Vejamos alguns exemplos.

POSTULADOS

Seja postulado o seguinte

1. Traçar uma reta de qualquer ponto a outro ponto.
2. Prolongar uma reta finita continuamente em uma linha reta.
3. Descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio.
4. Que todos os ângulos retos são iguais.
5. Que, se uma reta cortando duas retas faz ângulos interiores de um mesmo lado menores que dois ângulos retos, as duas retas, se prolongadas indefinidamente, se encontram desse lado em que os ângulos são menores do que dois ângulos retos.

NOÇÕES COMUNS

1. Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais entre si.
2. Se iguais são somados a iguais, os totais são iguais.
3. Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
4. O todo é maior do que a parte

A partir daí ele possui condições de demonstrar algumas Proposições ou Teoremas. Citemos alguns exemplos.

Proposição 1. Livro I. Sobre um dado segmento de reta construir um triângulo equilátero.

Proposição 10. Livro I. Dividir um segmento de reta ao meio.

Proposição 5. Livro III. Se dois círculos se intersectam, eles não possuem o mesmo centro.

Como se viu acima, muito embora o sistema de Euclides apresentasse uma revolução na Matemática, havia falhas naquilo que ele se propôs a fazer e que foram, ao longo dos tempos, corrigidas. Aceita-se, desse modo, um sistema lógico-dedutivo como sendo composto por:

1. Noções não-definidas ou primitivas.
2. Definições.
3. Postulados ou axiomas.
4. Proposições ou teoremas.

Deve-se ressaltar que esta estrutura tem sido usada em áreas fora da Matemática, como Física e Filosofia. Em Física, Newton a usou em seu *Principia Mathematica* que começa com uma lista de definições.

Definição I. A quantidade de matéria é a medida desta, oriunda conjuntamente de sua densidade e grandeza.

Definição II. A quantidade de movimento é a medida desta, provinda conjuntamente da velocidade e da quantidade de matéria.

Definição V. A força centrípeta é aquela pela qual o corpo é atraído ou impelido ou sofre tendência a algum ponto, como o centro.

Em seguida às definições vem um escólio e logo depois alguns axiomas ou leis do movimento.

Escólio. 1. Comentário destinado a tornar inteligível um autor clássico; esclarecimento. 2. Explicação ou interpretação de um texto.

Lei I. Todo corpo permanece em seu estado de repouso ou de movimento uniforme em linha reta, a menos que seja obrigado a mudar seu estado por forças impressas nele.

Lei II. A mudança do movimento é proporcional à força motriz impressa nele, e se faz segundo a linha reta pela qual se imprime essa força.

Temos as Proposições como:

Proposição 2. Todo corpo que se move em qualquer linha curva descrita em um plano, e por um raio que tenha por referência um ponto que esteja imóvel ou movendo-se de maneira retilínea e uniforme, descreve sobre esse ponto áreas proporcionais ao tempo e é influenciado por uma força centrípeta direcionada para esse ponto.

Já em Filosofia, Baruch Spinoza, em sua *Ética*, usa o método axiomático para fazer a sua exposição. Vejamos, como exemplo, alguns conceitos por ele abordados.

Definição II. Diz-se que uma coisa é finita no seu gênero quando pode ser limitada por outra coisa da mesma natureza.

Por exemplo: Um corpo diz-se que é finito porque sempre podemos conceber outro que lhe seja maior.

Definição III. Por substância entendo o que existe em si e por si é concebido, isto é, aquilo cujo conceito não carece de outra coisa do qual deva ser formado.

Definição V. Por modo entendo as afecções da substância, isto é, o que existe noutra coisa pela qual também é concebido.

Definição VI. Por Deus entendo o ente absolutamente, isto é, uma substância que consta de infinitos atributos, cada um dos quais exprime uma essência eterna e infinita.

Axioma I. Tudo o que existe, existe em si ou noutra coisa.

Proposição I. A substância é por natureza anterior às suas afecções.

Demonstração. É evidente pelas definições 2 e 3.

Proposição XI. Deus, ou, por outras palavras, a substância que consta de infinitos atributos, cada um dos quais exprime uma essência eterna e infinita, existe necessariamente.

Demonstração. Se negas isto, concebe, se te for possível, que Deus não existe e, portanto (Axioma 7), a sua essência não envolve a existência. Ora, isto (Proposição 7) é absurdo; por conseguinte, Deus existe. □

Vejam que a demonstração de Spinoza é por contradição!

Outra demonstração de Spinoza é

Proposição XLV. O ódio nunca pode ser bom.

Contradição

A princípio, um teorema é uma sentença matemática condicional ‘Se P , então Q ’ ou implicativa ‘ $P \implies Q$ ’ cuja validade é garantida por uma demonstração. Chamamos P de hipótese e Q de tese. Dentre os vários tipos de demonstração temos a demonstração por contradição ou por redução ao absurdo que consiste na seguinte equivalência

$$(P \implies Q) \iff ((P \wedge \sim Q) \implies (R \wedge \sim R))$$

em que $\sim R$ é a negação de R . Observemos que $R \wedge \sim R$ é um absurdo, isto é, em Matemática uma afirmação e sua negação não podem acontecer simultaneamente.

Aula 3

Limite trigonométrico fundamental e limites infinitos

Objetivos

- Estudar o limite trigonométrico fundamental $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x}$.
- Estudar os limites infinitos.
- Estudar os limites no infinito.

Esta aula será dedicada ao estudo de alguns limites importantes, chamados limites fundamentais, e limites envolvendo o infinito.

1 Limite trigonométrico fundamental

Analisaremos, inicialmente, o comportamento da função

$$\frac{\text{sen } x}{x}$$

nas proximidades do ponto $x = 0$, observando que tal ponto não pertence ao seu domínio. Caso tentemos substituir o valor $x = 0$ na expressão que a define obtemos a indeterminação $\frac{0}{0}$. Assim, para *levantarmos* a indeterminação, ou seja, para avaliarmos precisamente o comportamento da função acima para valores de x próximos de zero, lançaremos mão de conceitos elementares de *Geometria* e de *Trigonometria*, os quais são do conhecimento do estudante desde os níveis fundamental e médio.

Consideremos a figura 3.1 em que construímos um sistema cartesiano de eixos ortogonais e o círculo trigonométrico. Nesta figura, o valor de x é a medida, em radianos, do ângulo central \widehat{AOP} . Observemos que a área do triângulo $\triangle OPA$ é menor do que a área do setor circular $\sphericalangle OPA$ que, por sua vez, é menor que a área do triângulo $\triangle OTA$.

Não sei o que pareço aos olhos do mundo, mas, para mim, fui apenas um garoto brincando na praia, entretido em descobrir de vez em quando um pedregulho mais liso ou uma concha mais bonita que o normal, enquanto o grande oceano da verdade estendia-se à minha frente totalmente desconhecido. (Isaac Newton)

Trigonometria é uma palavra formada por dois componentes gregos. O primeiro, *trigon*, significa triângulo, a segunda é *metron*, que significa medida. Assim, literalmente, Trigonometria significa medida de triângulos.

Radiano (rad) é uma unidade de medida de ângulo e corresponde, em um círculo, ao ângulo central subtendido por um arco de comprimento igual ao raio do círculo.

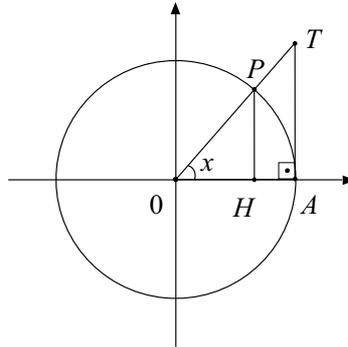


Fig.3.1

Na figura ao lado, as medidas dos segmentos de reta OH e HP são respectivamente o cosseno e o seno do ângulo x .

A área S_1 do triângulo $\triangle OPA$ é $S_1 = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{PH}}{2}$, em que H é a projeção ortogonal do ponto P sobre o eixo x . Mas, $\text{sen } x = \frac{\overline{PH}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{PH}}{\overline{OA}}$ e assim $\overline{PH} = \overline{OA} \cdot \text{sen } x$, o que implica $S_1 = \frac{\overline{OA}^2 \cdot \text{sen } x}{2}$. A área do setor circular $\sphericalangle OPA$ é $S_2 = \frac{x}{2} \cdot \overline{OA}^2$, a área do triângulo $\triangle OTA$ é $S_3 = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{TA}}{2}$ e, pelo fato de $\text{tg } x = \frac{\overline{TA}}{\overline{OA}}$, teremos $\overline{TA} = \overline{OA} \cdot \text{tg } x$, o que implica

$$S_3 = \frac{\overline{OA}^2 \cdot \text{tg } x}{2}.$$

Como $S_1 < S_2 < S_3$, teremos $\frac{\overline{OA}^2 \cdot \text{sen } x}{2} < \frac{x}{2} \cdot \overline{OA}^2 < \frac{\overline{OA}^2 \cdot \text{tg } x}{2}$. Dividindo cada um dos membros da desigualdade acima por \overline{OA}^2 e multiplicando por dois, teremos,

$$\text{sen } x < x < \text{tg } x$$

e admitindo que x seja positivo, obteremos:

$$\frac{1}{\text{sen } x} > \frac{1}{x} > \frac{1}{\text{tg } x}$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{1}{\text{sen } x} > \frac{1}{x} > \frac{\cos x}{\text{sen } x}.$$

Como dissemos acima, estamos considerando x positivo e como pretendemos estudar o comportamento da função próximo de $x = 0$, podemos supor $0 < x < \frac{\pi}{2}$, o que acarreta $\text{sen } x > 0$. Multiplicando cada membro da desigualdade acima por $\text{sen } x$, teremos:

$$\cos x < \frac{\text{sen } x}{x} < 1$$

Ora, quando x se aproxima de zero, o valor de $\cos x$ se aproxima de 1, pois $\cos 0 = 1$.

Este é um fato que pode ser provado rigorosamente mas, devido aos objetivos de um curso inicial de Cálculo, admiti-lo-emos como intuitivamente óbvio.

Assim, o valor de $\frac{\text{sen } x}{x}$ fica limitado entre $\cos x$, que tende a 1, e o valor constante 1. Deste modo, podemos concluir que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1.$$

Todo o procedimento acima poderá ser desenvolvido, com as devidas modificações, se os valores de x forem negativos, o que mostrará que $\frac{\text{sen } x}{x}$ também tenderá a 1 sob estas circunstâncias. No primeiro caso (quando x se aproxima de zero por valores positivos) indica-se o limite por

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

e no segundo por

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

os quais são chamados, respectivamente, de limite lateral à direita e limite lateral à esquerda. Já que eles são iguais, diremos simplesmente limite e omitiremos os sinais $+$ e $-$.

Exemplo 20. A partir do limite fundamental, vamos calcular um outro limite, a saber

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0. \quad (3.1)$$

Para isto, procedamos da seguinte maneira. Consideremos a expressão $\frac{1 - \cos x}{x}$ e multipliquemos o seu numerador e o seu denominador por $1 + \cos x$ para obtermos

$$\frac{1 - \cos x}{x} = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x} = \frac{1 - \cos^2 x}{x} = \frac{\text{sen}^2 x}{x} = \frac{\text{sen } x}{x} \cdot \text{sen } x$$

Ora, o último termo da expressão acima é o produto de dois fatores, um dos quais tende a 1 e o outro tende a zero. Antecipando que o *limite do produto é produto dos limites*, teremos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$$

Caso o leitor tenha apreendido a essência do que foi exposto até agora, poderá partir para os exemplos que serão listados a seguir. Caso contrário, deverá repassar o conteúdo desta lição para dirimir as dúvidas que porventura persistirem.

2 O problema do comprimento e da área

Nos exemplos relacionados com o traçado de tangentes e com a velocidade instantânea estudamos casos que nos levaram, diretamente, à definição de derivada. Abordaremos a seguir um caso de limite que servirá para motivar o conceito de integral. Muito embora esta última venha a ser estudada somente na aula 8, acreditamos que o desenvolvimento a seguir será bastante ilustrativo.

O termo integral é proveniente do Latim *integrare*, que significa “produzir o total”. Como veremos, calcular uma integral é, *grosso modo*, calcular uma área a partir da soma de infinitas parcelas, cada uma delas representando a área de uma figura conhecida.

Suponhamos que queiramos calcular o comprimento de uma circunferência de raio R . Considerando que estamos a trabalhar com uma figura curvilínea e até o momento sabemos apenas fazer medidas de figuras retilíneas, faremos uma aproximação do círculo por polígonos nele inscritos e que *tendam* a ele. Mais precisamente, consideremos as figuras 3.2 nas quais estão esboçados círculos de raio R dividido em três, quatro, cinco, seis, ... partes iguais.

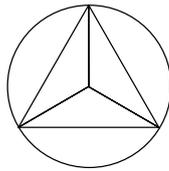


Fig. 3.2(a)

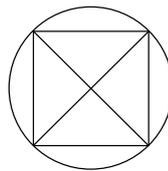


Fig.3.2(b)

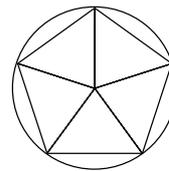


Fig.3.2(c)

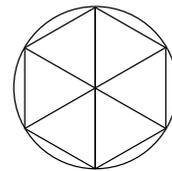


Fig.3.2(d)

...

Admitamos então que o círculo esteja dividido em n partes por meio de um polígono regular de n lados. Cada lado desse polígono determina um ângulo central de que mede $\frac{2\pi}{n}$ e assim cada lado do polígono medirá

$$2R \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{n} \right)$$

o que nos leva a

$$L_n = 2Rn \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{n} \right)$$

como sendo o perímetro do polígono regular inscrito no círculo. Evidentemente, qualquer que seja o valor de n , e por maior que ele seja, o valor de L_n sempre será menor do que o comprimento da circunferência. No entanto, à medida que o número de lados n cresce, o polígono *tende* à circunferência, de modo que, quando n *tender ao infinito*, o comprimento L_n *tenderá ao comprimento da circunferência*. Observemos que nesse caso cada lado do polígono terá seu comprimento tendendo a zero.

Notemos que

$$L_n = 2\pi R \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{n} \right)}{\left(\frac{\pi}{n} \right)}.$$

Considerando que $\frac{\pi}{n}$ tende a zero quando n tende ao infinito e usando o limite fundamental estudado anteriormente, obteremos o comprimento L da circunferência como sendo

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = 2\pi R \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\text{sen} \left(\frac{\pi}{n} \right)}{\left(\frac{\pi}{n} \right)} = 2\pi R$$

em virtude do limite fundamental $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$.

Assim, obtivemos o comprimento do círculo à custa de comprimentos de polígonos obtidos por meio da Geometria Euclidiana Elementar, juntamente com um processo de limite que fez com que o círculo fosse exaurido por polígonos regulares. Essa é a essência do método de integração que teve suas bases lançadas na Grécia Antiga por Arquimedes.

Um procedimento semelhante pode ser usado para calcular a área do círculo. Com as notações introduzidas para determinar o comprimento do polígono inscrito no círculo, tem-se que a área do polígono de n lados inscrito no círculo é dada por

$$S_n = \pi R^2 \cdot \frac{\text{sen} \left(\frac{\pi}{n} \right)}{\frac{\pi}{n}} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{n} \right).$$

Agora, observemos que $\frac{\pi}{n} \rightarrow 0$ se $n \rightarrow +\infty$, de modo que

$$\frac{\text{sen} \left(\frac{\pi}{n} \right)}{\frac{\pi}{n}} \rightarrow 1.$$

Também,

$$\cos \left(\frac{\pi}{n} \right) \rightarrow 1$$

pois $\frac{\pi}{n} \rightarrow 0$.

Argumentando como no caso do cálculo do comprimento, tem-se que a área do círculo é obtida fazendo-se o número de lados do polígono inscrito tender para o infinito ($n \rightarrow +\infty$). Desse modo, designando por S a área do círculo, teremos

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \pi R^2 \cdot \lim_{\frac{\pi}{n} \rightarrow 0} \frac{\text{sen} \left(\frac{\pi}{n} \right)}{\frac{\pi}{n}} \cdot \lim_{\frac{\pi}{n} \rightarrow 0} \cos \left(\frac{\pi}{n} \right) = \pi R^2.$$

Na aula 2 aprendemos algumas noções básicas sobre limites nos quais os termos envolvidos eram sempre finitos. Veremos, a seguir, situações em que há tendência ao infinito.

3 Limites infinitos e limites no infinito

Começemos com um exemplo proveniente da Física.

Robert Boyle (1627-1691) foi um físico e matemático irlandês. Ele fez importantes contribuições à Física e à Química, sendo mais conhecido por sua lei (também chamada Lei de Mariotte) que descreve o comportamento de um gás perfeito, e que apareceu em um apêndice escrito em 1662 para o seu trabalho *New Experiments Physio-Mechanicall, Touching the Spring of the Air and Its Effects* (1660).

Edme Mariotte (1620-1684) foi um físico francês que ingressou na carreira eclesiástica. No entanto, sua fama é decorrente da lei dos gases perfeitos, publicada em um ensaio sobre a natureza do ar, em 1676.

Exemplo 21. Sob temperatura constante, o volume de certa massa de gás é função da pressão a que está submetido. Mais precisamente, temos uma lei, descoberta pelo físico e filósofo inglês Boyle, em 1662, comprovada e aperfeiçoada pelo físico francês Mariotte, em 1676, cujo enunciado é:

O volume de uma certa massa gasosa é inversamente proporcional à pressão a que ele está submetido, isto é, o produto da pressão pelo volume é constante, quando sua temperatura permanece constante.

Temos, assim, que a Lei de Boyle-Mariotte pode ser expressa matematicamente por $P \cdot V = k$ em que P é a pressão a que o gás está submetido, V é o seu volume e k é a constante de proporcionalidade, desde que a temperatura seja mantida constante.

Essa lei pode ser mais bem apreciada se a visualizarmos em um gráfico cartesiano em que no eixo horizontal marcam-se os valores de P e no eixo vertical indicam-se os valores correspondentes de V , conforme figura 3.3.

Para isso, escreve-se a expressão acima na forma $V = \frac{k}{P}$

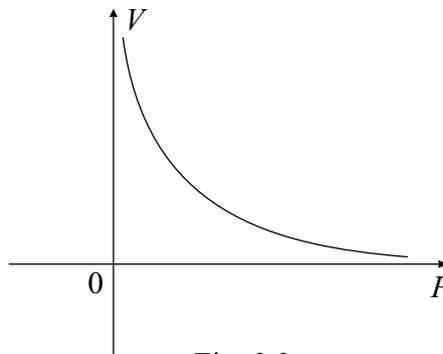


Fig. 3.3

na qual, evidentemente, os valores de P (e conseqüentemente os de V) são sempre positivos, haja vista que ele representa os valores da pressão exercida sobre o gás. Assim, V é função de P e com relação a ela temos duas questões a serem esclarecidas:

1. O que se pode dizer sobre o comportamento de V quando P se aproxima de zero?
2. O que acontece com V quando P se torna *muito grande*? O que (no linguajar matemático) é traduzido como P *tende ao infinito*.

No tocante à primeira pergunta, temos que quando P diminui, *tendendo a zero*, escrevemos $P \rightarrow 0^+$ para indicar que a aproximação é feita

por valores positivos, ou seja, pela direita, o valor de V se torna tão grande quanto se queira. Se, por exemplo, o valor de k for igual a um, teremos a seguinte tabela para os valores de V correspondentes aos de P .

P	V
1	1
0,1	10
0,01	10^2
0,001	10^3
0,0001	10^4
0,00001	10^5
0,000001	10^6
0,0000001	10^7
0,00000001	10^8

Portanto, à medida que $P \rightarrow 0^+$, os valores de V tendem ao infinito e escreve-se:

$$\lim_{P \rightarrow 0^+} V = \lim_{P \rightarrow 0^+} \frac{1}{P} = +\infty.$$

Devemos observar que $+\infty$ não é um número; ele indica que o valor de $\frac{1}{P}$ torna-se arbitrariamente grande sempre que P tender a zero.

No que se refere ao segundo questionamento, nota-se que ele é a antítese do primeiro. De fato, supondo ainda $k = 1$, podemos construir a seguinte tabela

P	V
1	1
10	0,1
10^2	0,01
10^3	0,001
10^4	0,0001
10^5	0,00001
10^6	0,000001
10^7	0,0000001
10^8	0,00000001

Destarte, quando $P \rightarrow +\infty$, teremos que $V \rightarrow 0$, e escreve-se

$$\lim_{P \rightarrow +\infty} \frac{1}{P} = 0.$$

Nos casos acima, diz-se que os eixos x e y são assíntotas do gráfico de $V = \frac{k}{P}$.

Vejam os outros exemplos em que podemos visualizar os conceitos introduzidos acima.

Exemplo 22. Consideremos uma lente delgada, convergente, de distância focal f (nas lentes convergentes, $f > 0$). Seja e o eixo principal desta lente. Vide figura 3.4.

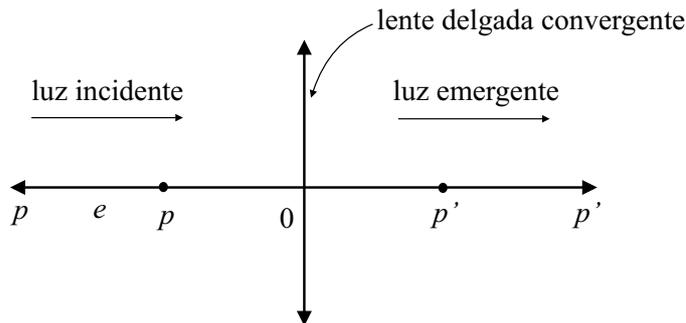


Fig. 3.4

Consideremos um objeto P situado em e , e seja P' a sua imagem através da lente. As abscissas p de P e p' de P' , tomadas em relação ao centro óptico O da lente, são relacionadas por meio da *Lei de Gauss*:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$$

donde se segue que

$$p' = \frac{f}{p - f}.$$

Daí

$$p' = \frac{fp}{1 - \frac{f}{p}}$$

é uma função cujo comportamento em muito se assemelha à do exemplo anterior. No presente caso existe uma diferença, pois o valor da variável p não pode assumir apenas o valor igual a f , o qual é positivo. Por isso podemos fazer p tender a f tanto por valores que lhe sejam menores como também por aqueles que lhe são maiores. Portanto, faz sentido falar em limite lateral à esquerda ou à direita de f , assim como se pode fazer p tender a $-\infty$. O leitor deve analisar o gráfico na figura 3.5, que fornece uma descrição do comportamento de p' como função de p . Temos então os seguintes limites:

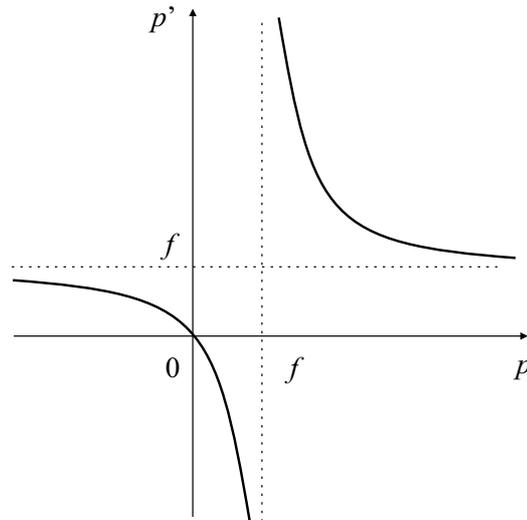


Fig. 3.5

$$\lim_{p \rightarrow -\infty} \frac{f}{1 - \frac{f}{p}} = f$$

$$\lim_{p \rightarrow f^+} \frac{f}{1 - \frac{f}{p}} = +\infty$$

e

$$\lim_{p \rightarrow f^-} \frac{f}{1 - \frac{f}{p}} = -\infty.$$

Neste caso o eixo horizontal $p' = 0$ é uma assíntota horizontal, ao passo que a reta $p = f$ é uma assíntota vertical¹.

De maneira geral, usa-se a notação

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

para indicar que, quando x se aproxima de a , o valor de $f(x)$ torna-se menor do que qualquer valor negativo dado.

Analogamente,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

para designar o fato de que, quando x se aproxima de a , o valor de $f(x)$ torna-se maior do que qualquer valor positivo dado.

Estas observações podem ser estendidas para limites laterais, de maneira óbvia.

¹F. Trotta, L. M. P. Imenes e J. Jakuboric, Matemática Aplicada, Vol. 3, Editora Moderna LTDA (1980).

De maneira similar, a notação

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$$

é usada para designar que $f(x)$ se aproxima de A quando $x \rightarrow +\infty$. O leitor está convidado a dar uma interpretação para $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$

Devemos deixar claro que todos os conceitos envolvendo limites, que até agora foram introduzidos de maneira bastante intuitiva, haja vista os objetivos imediatos do curso, podem ser abordados de maneira rigorosa, conforme é feito no Apêndice desta aula. Um estudo sistemático de limites será realizado nas aulas dedicadas à Análise Real.

Os exemplos e exercícios resolvidos, descritos a seguir, servirão para o leitor fixar mais firmemente as noções de limite. Procuraremos abordar as diversas situações relacionadas com o processo de limites no infinito e limites infinitos.

4 Exercícios resolvidos

1. Calcule $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x-3)^2}$.

Solução. Quando $x \rightarrow 3$, tanto pela direita quanto pela esquerda, o valor $(x-3)^2$ permanece positivo e se aproxima de zero. Portanto,

$\frac{1}{(x-3)^2}$ torna-se maior que qualquer valor positivo dado e, assim,

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x-3)^2} = +\infty.$$

2. Determine, se possível, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}$.

Solução. Observemos inicialmente que, ao contrário do que aconteceu no caso anterior, o denominador $x-1$ poderá ser positivo ou negativo conforme x se aproxime de 1 pela direita ou pela esquerda. Se x se aproximar de 1 pela direita, teremos que $x-1$ se aproxima de zero por valores positivos e assim $\frac{1}{x-1}$ torna-se infinitamente grande. Designa-se tal fato por

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty.$$

Caso contrário, ou seja, se x se aproxima de 1 pela esquerda, o valor $x-1$ se aproxima de zero por valores negativos, de modo que a fração $\frac{1}{x-1}$ torna-se menor do que qualquer valor negativo pré-fixado. Traduz-se este fenômeno escrevendo-se

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty.$$

3. Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^5 - 3x^4 + 7x^3 + 8x^2 - 15x + 3)$.

Solução. Observemos que

$$2x^5 - 3x^4 + 7x^3 + 8x^2 - 15x + 3 = x^5 \left(2 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2} + \frac{8}{x^3} - \frac{15}{x^4} + \frac{3}{x^5} \right).$$

Mas $\frac{3}{x}$, $\frac{7}{x^2}$, $\frac{8}{x^3}$, $\frac{15}{x^4}$ e $\frac{3}{x^5}$ tendem a zero quando $x \rightarrow +\infty$ e daí teremos que $\left(2 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2} + \frac{8}{x^3} - \frac{15}{x^4} + \frac{3}{x^5} \right)$ se aproxima de 2. Ora, como x^5 tende a $+\infty$ quando $x \rightarrow +\infty$ concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^5 - 3x^4 + 7x^3 + 8x^2 - 15x + 3) = +\infty.$$

O que acontece quando $x \rightarrow -\infty$?

4. Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+5}{x^2-7x+1}$.

Solução. Observemos que numerador e denominador tendem a $+\infty$, de modo que teríamos uma indeterminação do tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$.

Como levantar tal indeterminação? Dividamos numerador e denominador por x^2 , a mais alta potência do denominador de modo a obtermos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}}{1 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2}} &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x} \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{x^2} \right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{7}{x} \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)} \\ &= \frac{0+0}{1-0+0} \\ &= \frac{0}{1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

5. Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 4x + 5}{3x^3 + 5}$.

Solução. Inicialmente observemos que numerador e denominador tendem para $+\infty$. Dividamos por x^3 o numerador e o denominador dessa expressão. Assim

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 4x + 5}{3x^3 + 5} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \left(\frac{4}{x^2}\right) + \left(\frac{5}{x^3}\right)}{3 + \left(\frac{5}{x^3}\right)} \\
&= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{x^2}\right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{x^3}\right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{x^3}\right)} \\
&= \frac{2 - 0 + 0}{3 + 0} \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

6. Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^5 - 1}{3x^3 + 7}$.

Solução. Tanto o numerador como o denominador tendem para $+\infty$, logo temos uma indeterminação. Vamos levantar a indeterminação como segue

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^5 - 1}{3x^3 + 7} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 \left(4 - \frac{1}{x^5}\right)}{x^3 \left(3 + \frac{7}{x^3}\right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \frac{4 - \frac{1}{x^5}}{3 + \frac{7}{x^3}}.
\end{aligned}$$

Como, quando $x \rightarrow +\infty$, x^2 tende para $+\infty$ e $\frac{4 - \frac{1}{x^5}}{3 + \frac{7}{x^3}}$ tende para

$$\frac{4}{3}, \text{ temos que } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^5 - 1}{3x^3 + 7} = +\infty.$$

7. Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{x - 2}$.

Solução. Quando x tende a 2 pela direita ($x \rightarrow 2^+$), $x - 2$ se aproxima de zero e é positivo; portanto, $\frac{3}{x - 2}$ tende a $+\infty$. Contudo, quando x tende a 2 pela esquerda ($x \rightarrow 2^-$), $x - 2$ tende a zero por valores negativos e assim $\frac{3}{x - 2}$ tende a $-\infty$. Nesse caso dizemos que o

limite $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{x - 2}$ não existe.

5 Exercícios propostos

1. Calcule os limites.

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + 2x^2 - 3x - 4)$

(c) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$

2. Calcule os limites.

(a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^4 - x^2 + x - 7)$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+5}{x^2-7x+3}$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3-4x+2}{7x^3+5}$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^5-1}{3x^3+7}$

(e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x-1}{\sqrt{x^2+2}}$

(f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x-1}{\sqrt{x^2+2}}$

(g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x-4}{\sqrt{x^3+5}}$

(h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3+2}{\sqrt{x^4-2}}$

(i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+5}}{3x^2-2}$

(j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{4x-5}$

(l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+1}{6+x-3x^2}$

(m) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2+5}$

6 Respostas dos exercícios propostos

1. (a) -4
(b) 0
(c) $3x^2$
(d) 2
(e) 0
2. (a) $+\infty$
(b) 0
(c) $\frac{3}{4}$
(d) $+\infty$
(e) 4
(f) -4
(g) 0
(h) $-\infty$
(i) 0
(j) $\frac{1}{2}$
(l) $-\frac{2}{3}$
(m) 0

Nesta aula você aprendeu:

- a calcular os limites $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$;
- a calcular limites infinitos e limites no infinito.

7 Apêndice

Limites via ϵ e δ

As noções sobre limites, introduzidas previamente de maneira bastante intuitiva, podem ser formalizadas da seguinte maneira, em que supomos as funções sempre definidas em intervalos, a fim de evitar adentrar em conceitos como o de ponto de acumulação.

Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida em um certo intervalo I da reta real \mathbb{R} . Diz-se que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, em que a pertence ao intervalo I ou é uma de suas extremidades, se, dado um número positivo ϵ , normalmente considerado bem pequeno, existir um número positivo δ (que em geral depende de a e de ϵ), tal que $|f(x) - l| < \epsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$. Escolhido ϵ , encontra-se um δ tal que sempre que $x \neq a$, $x \in I$ está no intervalo $(a - \delta, a + \delta)$, então $f(x)$ está no intervalo $(f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon)$. Observemos que o ponto a não precisa pertencer ao domínio I de f . Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 23. Mostremos, usando ϵ e δ , que

$$\lim_{x \rightarrow 2} (4x - 5) = 3.$$

Para isso, tomemos ϵ um número positivo arbitrário. Devemos encontrar um $\delta > 0$ tal que, $|(4x - 5) - 3| < \epsilon$ sempre que $0 < |x - 2| < \delta$. Inicialmente notemos que $|(4x - 5) - 3| = |4x - 8| = 4|x - 2|$. Tomando $\delta = \frac{\epsilon}{4}$ e se tivermos $0 < |x - 2| < \delta$, obteremos

$$|(4x - 5) - 3| = 4|x - 2| < 4\delta = \epsilon$$

o que mostra que $\lim_{x \rightarrow 2} (4x - 5) = 3$.

Observemos que quando $x \rightarrow a$ esta aproximação pode ser feita tanto pela direita como pela esquerda, ou seja, tanto por valores maiores do que a como por valores menores do que a . Para que o limite exista, o valor do qual $f(x)$ se aproxima deve ser independente destas aproximações laterais, ressaltando o caso em que a é um extremo do intervalo I , situação essa em que existe apenas uma possibilidade de aproximação por valores pertencentes a I . Estudemos o exemplo abaixo.

Exemplo 24. A função $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ possui o intervalo $-3 \leq x \leq 3$ como seu domínio. Se a for qualquer número no intervalo $(-3, 3)$, então $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{9 - x^2}$ existe e é igual a $\sqrt{9 - a^2}$. Considere agora $a = 3$. Tomemos x se aproximando de 3 pela esquerda; então $\lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{9 - x^2} = 0$. Para $x > 3$, $\sqrt{9 - x^2}$ não está definida. Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{9 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{9 - x^2} = 0$$

Analogamente,

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \sqrt{9 - x^2} = \lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{9 - x^2} = 0.$$

No caso em que tivermos limite infinito, ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

temos a seguinte definição em termos rigorosos.

Diz-se que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

se, e somente se, dado qualquer número positivo M , existe $\delta > 0$ tal que, $f(x) > M$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$. Analogamente, define-se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty.$$

Exemplo 25. Usemos ϵ e δ para mostrar que $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x) = 10$.

Seja $\epsilon > 0$. Observemos que $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$, e assim $x^2 + 3x - 10 = (x-2)^2 + 7x - 14 = (x-2)^2 + 7(x-2)$. Logo $|(x^2 + 3x) - 10| = |(x-2)^2 + 7(x-2)| \leq |x-2|^2 + 7|x-2|$. Tomando δ como sendo o mínimo entre 1 e $\frac{\epsilon}{8}$, então $\delta^2 \leq \delta$. Portanto, $0 < |x-2| < \delta$ implica $|(x^2 + 3x) - 10| < \delta^2 + 7\delta \leq \delta + 7\delta = 8\delta \leq \epsilon$ e assim

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x) = 10.$$

Exemplo 26. Mostremos que se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B \neq 0$, existe um número positivo δ tal que $0 < |x - a| < \delta$ implica que $|f(x)| > \frac{|B|}{2}$.

Seja $\epsilon = \frac{|B|}{2}$. Obtemos um número $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta$ implica $|f(x) - B| < \frac{|B|}{2}$. Agora, se $0 < |x - a| < \delta$ teremos

$$|B| = |f(x) + (B - f(x))| \leq |f(x)| + |B - f(x)| < |f(x)| + \frac{|B|}{2}$$

e, portanto,

$$\frac{|B|}{2} < |f(x)|$$

Deixemos a cargo do leitor as seguintes tarefas.

1. Para $f(x) = 5x - 6$, encontre $\delta > 0$ tal que, sempre que $0 < |x - 4| < \delta$, então $|f(x) - 14| < \epsilon$, quando $\epsilon = \frac{1}{2}$ e quando $\epsilon = 0,001$.

2. Use ϵ e δ para mostrar que

$$(a) \lim_{x \rightarrow 3} 5x = 15$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 5) = 3$$

Leibniz

Como já tivemos ocasião de citar, o Cálculo Diferencial e Integral tem como personagens principais Newton e Leibniz. Sobre Newton já tivemos a oportunidade de falar. Façamos algumas observações sobre Leibniz.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) foi um matemático alemão nascido em Leipzig. Aos quinze anos entrou para a Universidade de Leipzig para estudar Direito tendo obtido o seu doutorado aos vinte anos de idade. Após a conclusão do seu doutorado em Direito, Leibniz viajou por vários países - França, Inglaterra, Holanda, etc - tendo contato com um mundo que fervilhava de idéias em todos os campos do conhecimento. Leibniz relacionou-se com vários dos seus contemporâneos que se mantinham na linha de frente das revoluções que se processavam, em particular, em Matemática e Física. Manteve intercâmbio com Huygens e correspondia-se com Newton.

Ao chegar a Paris, em 1672, seus conhecimentos matemáticos eram apenas rudimentares, incluindo-se aí partes da obra de Euclides mas, sob a orientação de Huygens, iniciou-se em Matemática de nível superior que o levou à criação do Cálculo Diferencial e Integral.

Na verdade, Leibniz foi o primeiro a publicar um trabalho em Cálculo Diferencial de maneira inteligível e com notações até hoje usadas, coisa que o coloca mais próximo de nós do que Newton. Tal trabalho apareceu no jornal *Acta Eruditorum* em um artigo intitulado *Um Novo Método para Máximos e Mínimos assim como para Tangentes, e que não é restrito para quantidades fracionais ou irracionais, e um notável tipo de Cálculo para isso*. Leibniz publicou uma exposição concisa do seu Cálculo Diferencial que ele diz ser datada de 1676. Apesar de alguns pontos obscuros e alguns descuidos, tal trabalho se mostrou um marco no desenvolvimento do Cálculo que estava a nascer. Várias das notações e regras para cálculo de derivadas, que até hoje são usadas, estavam contidas nesse artigo. Apenas para dar uma ligeira noção do conteúdo desse trabalho de Leibniz, vejamos alguns exemplos de regras de derivação deduzidas por ele, e que serão estudadas na aula 5:

Acta Eruditorum foi um jornal fundado em 1682 por Leibniz e Otto Mencke, do qual Leibniz foi editor-chefe.

1. Se a for uma constante, então $da = 0$.
2. $d(ax) = adx$.
3. $d(w - y + z) = dw - dy + dz$.
4. $d(x^n) = nx^{n-1}dx$ em que n é um número natural.
5. $d\left(\frac{1}{x^n}\right) = -\frac{ndx}{x^{n+1}}$.
6. $d(\sqrt[b]{x^a}) = \frac{a}{b}\sqrt[b]{x^{a-b}}dx$.
7. $d(uv) = u dv + v du$.
8. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$.

Aula 4

Funções contínuas

Objetivos

- Estudar o conceito de funções contínuas.
- Estudar máximos e mínimos de funções contínuas.

Nas aulas anteriores tivemos a oportunidade de deparar funções cujos comportamentos eram os mais diversos possíveis. Em alguns casos os gráficos podiam ser traçados sem que a caneta fosse tirada do papel, ou seja, o desenho era feito de maneira *contínua*. Em outras situações o traçado do gráfico tinha de ser feito de modo que a caneta, em um ou mais pontos, tinha que ser momentaneamente erguida do papel a fim de que o traçado pudesse continuar. Em alguns exemplos, o comportamento tornava-se mais grave, de tal maneira que o salto da caneta tinha de ser ilimitado. Na presente aula introduziremos um pouco de rigor nessas afirmações.

1 Funções contínuas: definição e exemplos

A não-existência de *saltos* nos traçados dos gráficos de certas funções é traduzida na linguagem dos matemáticos como continuidade, sendo este fato expresso da seguinte maneira:

Definição 1. Uma função $f(x)$ é *contínua* em um ponto $x = a$ se:

1. $f(a)$ é definida, ou seja, pode-se calcular o valor de f no ponto $x = a$;
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe;
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Vejam os que estas condições significam.

- Condição (1) significa que o ponto que está sendo considerado pertence ao domínio da função. Se, por exemplo, considerarmos a função $f(x) = \sqrt{x}$ não se pode falar em continuidade, por exemplo, no ponto $x = -4$.
- Condição (2) implica que os limites laterais, caso os dois possam ser calculados, existem e são iguais.
- Condição (3) nos diz que se aproximarmos x de a o valor de $f(x)$ se aproximará de $f(a)$.

Devemos enfatizar que em todos os exemplos considerados neste texto as funções sempre têm como domínio um intervalo ou uma união de intervalos.

Vejam alguns exemplos nos quais uma ou mais das condições acima podem falhar.

Exemplo 27. Consideremos a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ 1, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

O leitor pode verificar facilmente que as condições que definem a continuidade são inteiramente satisfeitas em todos os pontos $x \neq 0$. No entanto os limites laterais em zero existem mas são distintos, o que viola a condição (2). De fato,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 = f(0).$$

Veja a figura 4.1 na qual é esboçado o gráfico desta função.

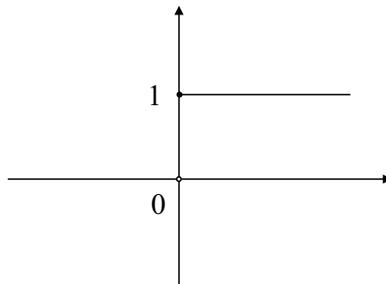


Fig. 4.1

Exemplo 28. Consideremos a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{se } x < 1, \\ x - 1, & \text{se } x > 1, \\ 1, & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Claramente, a função f é contínua em todos os pontos $x \neq 1$. No entanto,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \neq 1 = f(1),$$

ou seja, muito embora o limite no ponto $x = 1$ exista, ele é diferente do valor da função neste ponto e assim a condição (3) não é satisfeita. Observemos a figura 4.2, em que está representado o gráfico desta função.

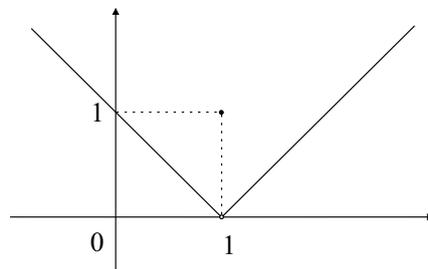


Fig.4.2

Outros exemplos serão discutidos ao final da lição. As funções usuais, que o leitor conhece desde os tempos do ensino fundamental e do médio, tais como funções polinomiais, \sin , \cos , \ln , \exp , etc. são todas contínuas, além de combinações *bem comportadas* destas funções. Devemos, porém, tomar cuidados quando considerarmos o quociente de funções, pois quando o denominador se anula poderemos ter problemas com a existência do limite assim como com a continuidade. No caso em que tivermos uma função de forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

em que $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios, diz-se que f é uma função racional e não estará definida nos pontos que são raízes de $q(x)$. O mesmo ocorre com funções trigonométricas cujas definições envolvam quocientes. É o que ocorre com tg , sec , cotg , cossec , etc.

Observação 2. De acordo com a definição 1, falar em continuidade somente faz sentido em pontos que pertençam ao domínio da função. Contudo, existem casos em que, consagrados pelo uso na literatura matemática, pode-se falar em descontinuidade mesmo em pontos que não pertençam ao domínio da função considerada. Isso é o que acontece, por exemplo, com as funções

$$\frac{|x|}{x} \text{ e } \frac{1}{x}.$$

No primeiro caso, diz-se que a função possui uma descontinuidade de salto e no segundo, a função *explode* em $x = 0$ e dizemos também que tal função é descontínua neste ponto. Veja as figuras 4.3(a) e (b).

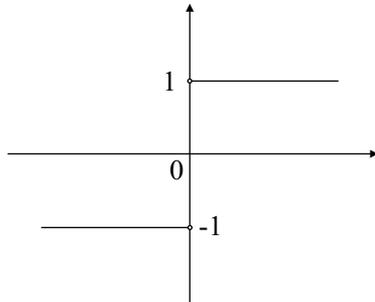


Fig. 4.3(a)

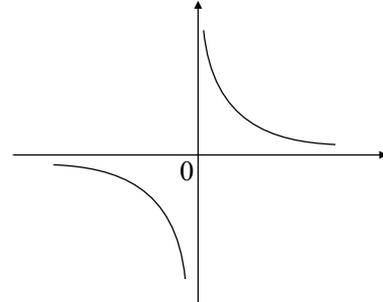


Fig. 4.3(b)

Exemplo 29. Consideremos a função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq -1, \\ x + 1, & \text{se } -1 < x \leq 0, \\ x^2, & \text{se } 0 < x < 1, \\ 1, & \text{se } x = 1, \\ \frac{1}{2-x}, & \text{se } 1 < x \end{cases}$$

cujo gráfico está representado na figura 4.4. Essa função é definida em todos os pontos de \mathbb{R} , exceto em $x = 2$, em virtude da presença do termo $\frac{1}{2-x}$. As funções usadas na definição de f , 0 , $x + 1$, x^2 e $\frac{1}{2-x}$ são todas contínuas nos pontos em que estão definidas. À vista disso, devemos estudar a continuidade de $f(x)$ somente naqueles pontos em que há mudanças na expressão de tal função, ou seja, em $x = -1, 0$ e 1 .

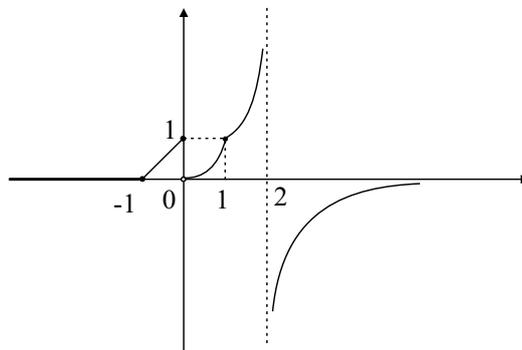


Fig. 4.4

Em $x = -1$,

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} 0 = 0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x + 1) = -1 + 1 = 0$$

Dessa forma, os limites laterais são iguais, o que acarreta a existência do limite em $x = -1$. Além disso, o valor da função em $x = -1$ é zero implicando que

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0 = f(-1)$$

o que nos mostra que a função $f(x)$ satisfaz as três condições exigidas para a continuidade no ponto $x = -1$.

Em $x = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 1) = 1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0.$$

Verifica-se, então, que ambos os limites laterais existem mas são distintos. Segue-se que o limite em $x = 0$ não existe, o que nos leva a concluir que a função não é contínua neste ponto.

Vejamos o comportamento de $f(x)$ em $x = 1$. Observemos que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{2 - x} = 1.$$

Decorre então que os limites laterais existem e são iguais. Logo $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ existe e é igual a 1. Além disso, $f(1) = 1$. Assim, a função $f(x)$ é contínua em todos os pontos de \mathbb{R} , exceto em $x = 0$ e $x = 2$.

Exemplo 30. Analisemos a continuidade da função

$$f(x) = \frac{|x - 2|}{x - 2}.$$

Observemos que há um problema em $x = 2$, ou seja, a função não é aí definida. Além disso, ela pode ser reescrita na forma

$$\frac{|x - 2|}{x - 2} = \begin{cases} \frac{x - 2}{x - 2} & \text{se } x - 2 > 0 \\ \frac{-(x - 2)}{x - 2} & \text{se } x - 2 < 0 \end{cases}$$

a qual, simplificada mais uma vez, fornecerá

$$\frac{|x - 2|}{x - 2} = \begin{cases} 1 & \text{se } x - 2 > 0 \\ -1 & \text{se } x - 2 < 0 \end{cases}$$

Conseqüentemente tal função será contínua em todos os pontos de $\mathbb{R} - \{2\}$ e terá uma descontinuidade em $x = 2$, onde ela dá um salto, ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x - 2|}{x - 2} = -1$$

enquanto

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x - 2|}{x - 2} = 1$$

o que nos diz que o salto em $x = 2$ é de duas unidades. Veja a figura 4.5.

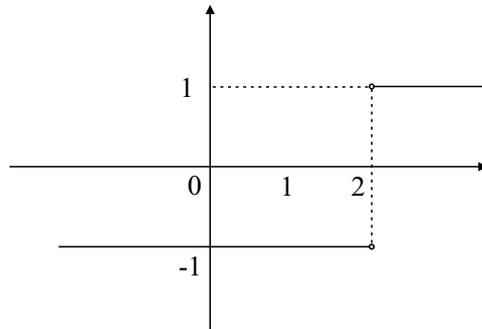


Fig. 4.5

Observação 3. As funções contínuas podem ser operadas algebricamente e tais operações são governadas pelas seguintes regras:

Se as funções $f(x)$ e $g(x)$ são ambas contínuas em um ponto x_0 de seu domínios, então a soma $f(x) + g(x)$, a diferença $f(x) - g(x)$, o produto $f(x)g(x)$ e o quociente $\frac{f(x)}{g(x)}$, desde que $g(x) \neq 0$ no caso do quociente, são funções contínuas em x_0 .

Exemplo 31. Todo polinômio

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

é contínuo, pois cada uma das funções a_kx^k , $k = 1, \dots, n$ é contínua.

Exemplo 32. Toda função racional

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n}$$

é contínua nos pontos em que a função $Q(x)$ seja diferente de zero.

Um problema central no Cálculo Diferencial e Integral é o do estudo de máximos e mínimos de funções contínuas definidas em intervalos, o qual, combinado com a noção de derivada, constitui um capítulo marcante da Matemática. Vejamos um dos teoremas mais importante do Cálculo cuja demonstração foge ao escopo de um curso inicial de Cálculo, mas será feita com detalhes em aulas referentes à Análise.

Teorema 1. *Se f for uma função contínua em um intervalo fechado $I = [a, b]$, então a imagem de f é um intervalo.*

Esse teorema afirma que o conjunto de valores atingidos por $f(x)$ quando x varia em todo o I é também um intervalo.

No caso em que f é constante o intervalo imagem de f se reduz a um ponto. Se o intervalo I for aberto a sua imagem por meio de uma função contínua pode ser qualquer outro tipo de intervalo, conforme mostram os exemplos a seguir.

Exemplo 33. Consideremos a função $f(x) = \cos x$ definida no intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. A imagem por f deste intervalo é o intervalo fechado $[-1, 1]$.

Considerando agora a restrição de \cos ao intervalo aberto $(0, \frac{\pi}{2})$, sua imagem é o intervalo aberto $(-1, 1)$.

Tomando ainda uma restrição de \cos ao intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, temos que sua imagem é o intervalo semi-aberto $(0, 1]$.

Exemplo 34. Consideremos o polinômio cúbico

$$p(x) = x^3 - x.$$

Ao tomarmos x restrito ao intervalo aberto $(-1, 1)$ verifica-se que a imagem de tal intervalo pelo polinômio p é o intervalo fechado $[-\frac{2\sqrt{3}}{9}, \frac{2\sqrt{3}}{9}]$. Se considerarmos o intervalo fechado $[-1, 1]$, a sua imagem por p também é o intervalo fechado $[-\frac{2\sqrt{3}}{9}, \frac{2\sqrt{3}}{9}]$. Confira estas afirmações e teste outros intervalos.

Veja as figuras abaixo nas quais são dadas visualizações geométricas de várias situações que podem ocorrer.

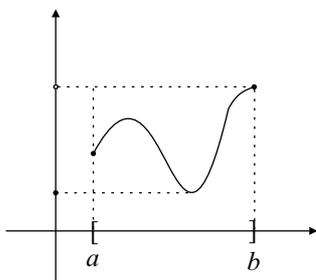


Fig. 4.6(a)

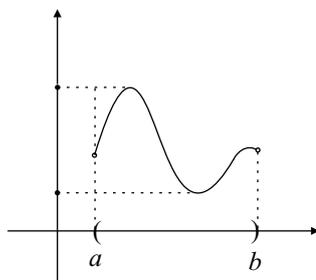


Fig. 4.6(b)

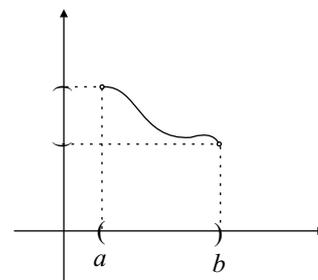


Fig. 4.6(c)

2 Máximos e mínimos

Seja f uma função definida em um intervalo I , e suponhamos que exista um ponto $p \in I$ tal que $f(x) \leq f(p)$, para todo $x \in I$. Então $f(p)$ é chamado *máximo* de f em I , e dizemos que f *atinge máximo* no ponto p . Analogamente, suponhamos que exista um ponto $q \in I$ tal que $f(x) \geq f(q)$ para todo $x \in I$. Então $f(q)$ é chamado *mínimo* de f em I e diz-se que f *atinge mínimo* no ponto q . Observemos que f pode atingir máximo ou mínimo em vários pontos de I . Veja as figuras abaixo, nas quais várias situações são ilustradas.

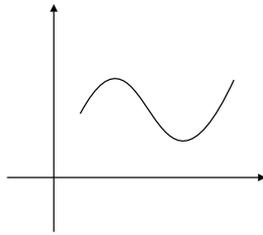


Fig. 4.7(a)

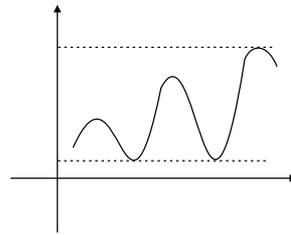


Fig. 4.7(b)

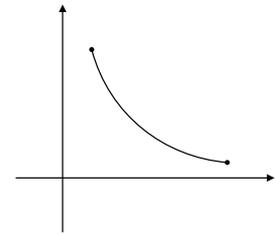


Fig. 4.7(c)

A palavra *extremo* refere-se tanto a máximo como a mínimo e o termo *valor extremo* refere-se tanto ao valor máximo como ao valor mínimo.

Exemplo 35. Consideremos $I = [-1, 1]$ e a função $f(x) = x^2$ definida nele. Neste caso o valor máximo de f em I é igual a 1, sendo que ele é atingido nos pontos $x = -1$ e $x = 1$. Por outro lado, o seu valor mínimo é igual a 0 e é atingido em $x = 0$.

No mesmo intervalo, a função $g(x) = x^3$ possui máximo igual a 1, atingido em $x = 1$ e valor mínimo igual a -1 , atingido em $x = -1$.

A função constante $h(x) = k$ possui máximo e mínimo igual a k atingidos em todos os pontos de seu domínio.

Já a função $l(x) = x$, definida no intervalo aberto $(0, 1)$, não atinge nem máximo nem mínimo.

Nos exercícios, outros exemplos serão desenvolvidos.

Temos o seguinte teorema, cuja demonstração será omitida em virtude dos objetivos do curso.

Teorema 2. Se f for uma função contínua em um intervalo fechado $I = [a, b]$, então I contém pontos p e q tais que

$$f(q) \leq f(x) \leq f(p), \text{ para todo } x \in I.$$

Em outras palavras, esse teorema afirma que f atinge máximo e mínimo em I , nos pontos p e q , respectivamente.

Suponhamos que f seja como no teorema 2. Sejam M o máximo de f em I e m o mínimo de f em I . O teorema acima nos diz que o gráfico de f atinge o seu valor mais alto no ponto $P = (p, M)$ e o ponto mais baixo no ponto $Q = (q, m)$. Veja a figura 4.8.

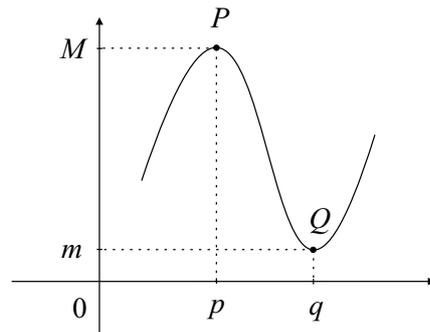


Fig.4.8

Um dos teoremas mais importantes no estudo de funções contínuas é o chamado *Teorema do Valor Intermediário de Lagrange*, enunciado abaixo:

Teorema 3. *Se f for uma função contínua definida em um intervalo I , que não necessita ser fechado, e se f assume diferentes valores $f(\alpha)$ e $f(\beta)$ em dois pontos α e β de I , então f atinge todos os valores entre $f(\alpha)$ e $f(\beta)$, correspondentes a pontos entre α e β .*

Mais precisamente, suponhamos que $f(\alpha) < f(\beta)$. Se $f(\alpha) < y < f(\beta)$, então o teorema anterior afirma que existirá $x \in I$ tal que $f(x) = y$. Conclusão análoga será verdadeira se $f(\alpha) > f(\beta)$.

Tal teorema em geral é enunciado em uma forma um pouco diferente, mas equivalente, daquela exposta no Teorema 3, conforme podemos ver a seguir.

Teorema 4. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(a) < 0 < f(b)$ ou $f(a) > 0 > f(b)$. Então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*

Aplicação 1. Como uma aplicação simples, mas importante, do Teorema do Valor Intermediário vejamos a questão da existência de raízes de polinômios de grau ímpar. Consideremos o polinômio de grau ímpar

$$p(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \cdots + a_1x + a_0$$

em que $a_{2n+1} \neq 0$. Consideremos o caso em que $a_{2n+1} > 0$. Se $a_{2n+1} < 0$, o procedimento será análogo. Reescrevamos o polinômio $p(x)$, para $x \neq 0$, da seguinte maneira

$$p(x) = x^{2n+1} \left(a_{2n+1} + a_{2n} \frac{x^{2n}}{x^{2n+1}} + \cdots + a_1 \frac{x}{x^{2n+1}} + a_0 \frac{1}{x^{2n+1}} \right)$$

Joseph Louis Lagrange (1736-1813) nasceu em Turim, Itália. Matemático da mais alta estirpe, a ponto de Napoleão Bonaparte tê-lo cunhado com a frase: *Lagrange é a pirâmide mais alta das ciências matemáticas*. Trabalhou em Análise, Teoria dos Números, Álgebra, Mecânica Analítica etc., tendo publicado obras primas da Matemática tais como *Théorie des Fonctions Analytiques Contenant les Principes du Calcul Différentiel*, *Traité de Résolution des Équations Numériques de Tous Degrés e Mécanique Analytique*. Veja apêndice ao final desta aula em que se vê mais detalhes sobre a vida de Lagrange. Foi um dos matemáticos da Revolução Francesa e um dos membros de uma comissão formada pela Académie de Sciences para a reforma do sistema de pesos e medidas.

donde

$$p(x) = x^{2n+1} \left(a_{2n+1} + a_{2n} \frac{1}{x} + \cdots + a_1 \frac{1}{x^{2n}} + a_0 \frac{1}{x^{2n+1}} \right).$$

Suponhamos que $x \rightarrow +\infty$. Assim, os termos $a_{2n} \frac{1}{x}, \dots, a_1 \frac{1}{x^{2n}}, a_0 \frac{1}{x^{2n+1}}$ tenderão a zero. Como $x^{2n+1} \rightarrow +\infty$ teremos $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty$. Raciocinando de maneira análoga, e como $x^{2n+1} \rightarrow -\infty$ quando $x \rightarrow -\infty$, teremos que $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$. Conseqüentemente, existem $a < b$ tais que

$$f(a) < 0 < f(b).$$

Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Observação 4. A aplicação precedente é apenas um caso particular de um teorema bastante geral chamado *Teorema Fundamental da Álgebra*, cujo enunciado é o seguinte e cuja primeira demonstração é devida a Gauss:

Teorema 5. *Todo polinômio de grau n possui n raízes reais ou complexas.*

Tornemos mais preciso o que afirma o *Teorema Fundamental da Álgebra*. Consideremos o polinômio

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

em que os coeficientes $a_j, j = 1, 2, \dots, n$ são números complexos com $a_n \neq 0$ e a variável z também é complexa. Relembremos que um número complexo é uma expressão da forma $z = a + ib$ em que $a, b \in \mathbb{R}$ e i é a unidade imaginária definida por $i^2 = -1$ ou $i = \sqrt{-1}$. O número a é chamado parte real de z , designado por $a = \operatorname{Re} z$, e b é chamado parte imaginária de z , designada por $b = \operatorname{Im} z$. Veja Apêndice sobre números complexos. Sejam z_1, z_2, \dots, z_n as raízes do polinômio p cujas existências são garantidas pelo *Teorema Fundamental da Álgebra*. Temos, então, uma decomposição de p dada por

$$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

em que algumas das raízes podem ser repetidas. Deve-se ressaltar que a demonstração deste importante teorema é usualmente vista em cursos de *Variáveis Complexas* e uma demonstração dele pode ser encontrada em Knop¹. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 36.

- (a) O polinômio $p(x) = x^2 - 5x + 6$ possui duas raízes reais e distintas dadas por 2 e 3 sendo decomposto na forma $p(x) = (x - 2)(x - 3)$.

¹ Konrad Knop, *Theory of Functions, Part I, Elements of the General Theory of Analytic Functions*, Dover Publications.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) foi um dos mais geniais matemáticos que a história já registrou. Seus trabalhos são fundamentais em todas as áreas da Matemática. Suas contribuições se espraiaram pela Análise, Álgebra, Geometria Diferencial, Teoria dos Números, etc. Dedicaremos parte do apêndice a ele, ao final desta Aula.

- (b) O polinômio $p(x) = x^2 - 2x + 1$ possui duas raízes reais e iguais a 1 e sua decomposição é $p(x) = (x - 1)(x - 1) = (x - 1)^2$.
- (c) O polinômio $p(z) = z^2 + 1$ não possui raízes reais, mas possui duas raízes complexas que são i e $-i$, sendo decomposto como $p(z) = (z - i)(z + i)$.
- (d) O polinômio $p(z) = z^3 - 2z^2 + 2z$ possui as raízes $0, 1 - i$ e $1 + i$ e sua decomposição é

$$p(z) = z(z - (1 + i))(z - (1 - i))$$

3 Exercícios resolvidos

1. Encontre os extremos, caso existam, da função $f(x) = \frac{1}{x}$ no intervalo:

- (a) $(0, 1)$

Solução. Observemos que a função $f(x) = \frac{1}{x}$ é decrescente e tende para $+\infty$ quando $x \rightarrow 0^+$. Portanto, f não atinge máximo. Além disso, ela decresce se aproximando de 1 quando $x \rightarrow 1^-$. Em virtude disso, f também não atinge mínimo.

- (b) $(0, 1]$

Solução. No intervalo $(0, 1]$ a função não possui máximo pelo mesmo motivo do caso (a). Como 1 pertence ao intervalo ao intervalo $(0, 1]$ temos que o mínimo de f é atingido em $x = 1$, pois f é decrescente, e assim seu mínimo é $f(1) = 1$.

- (c) $[1, 2]$

Solução. Como a função f é decrescente e o intervalo acima contém suas extremidades, o valor máximo de f é atingido em $x = 1$ e vale $f(1) = 1$ e o seu valor mínimo é atingido em $x = 2$ e vale $f(2) = \frac{1}{2}$.

- (d) $(0, \infty)$

Solução. A função f não atinge máximo em $(0, \infty)$ e não atinge mínimo pois $f(x) > 0$, para todo $x > 0$, e $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

Exercícios propostos

1. Que escolha para $f(0)$ fará com que a função

$$f(x) = \frac{5x^2 - 3x}{2x} \quad (x \neq 0)$$

seja contínua em $x = 0$?

2. A função

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

é contínua no intervalo $0 \leq x \leq 2$? E no intervalo $0 \leq x \leq 1$? E em $0 < x < 2$?

3. Encontre os extremos, caso existam, da função $f(x) = [x]$, em que $[x]$ representa o maior inteiro menor do que ou igual a x , nos intervalos:

(a) $(0, 1)$; (b) $(0, 1]$; (c) $(-1, 0]$; (d) $(0, \infty)$; (e) $(-\infty, \infty)$.

4. Verifique que, se uma função f é crescente em um intervalo fechado $I = [a, b]$, então f possui extremos globais em I , mesmo que f seja descontínua. Localize os pontos onde f atinge os extremos. O que se pode dizer se f for decrescente?

5. Se f é contínua em um intervalo I e se f atinge valores $f(\alpha)$ e $f(\beta)$ com sinais opostos, em dois pontos α e β de I , então f é igual a zero em algum ponto entre α e β . Tal afirmação é verdadeira ou falsa? Justifique.

6. A função

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ x - 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

é contínua? Ela aplica o intervalo fechado $-1 \leq x \leq 1$ em um intervalo fechado?

7. Dê exemplo de uma função contínua definida em um intervalo limitado, mas que sua imagem seja um intervalo não-limitado.

8. Dê exemplo de uma função contínua, definida em um intervalo não-limitado, cuja imagem seja um intervalo limitado.

9. Dê um exemplo de uma função contínua definida em um intervalo aberto e cuja imagem seja:

(a) Um intervalo aberto; (b) Um intervalo semi-aberto; (c) Um intervalo fechado.

Respostas dos exercícios propostos

1. $-\frac{3}{2}$
2. A função não é contínua em nenhum dos intervalos mencionados.
3. (a) 0
(b) 0 e 1
(c) -1 e 0
(d) 0
(e) não existem extremos.
4. Se f é crescente em $[a, b]$, então $f(a)$ é o valor mínimo de f em $[a, b]$ e $f(b)$ é o valor máximo de f em $[a, b]$. Se é decrescente em $[a, b]$, então $f(a)$ é o valor máximo de f em $[a, b]$ e $f(b)$ é o valor mínimo de f em $[a, b]$.
5. Verdadeira, em virtude do teorema do valor intermediário.
6. A resposta para as duas perguntas é *não*.
7. $f(x) = \operatorname{tg} x$ definida em $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$.
8. $f(x) = \operatorname{sen} x$ definida em $[0, +\infty)$
9. (a) $f(x) = x$ definida em $(0, 1)$.
(b) $f(x) = x^2$ definida em $(-1, 1)$.
(c) $f(x) = \operatorname{sen} x$ definida em $(0, 2\pi)$.

Nesta aula você aprendeu:

- o que é uma função contínua;
- a identificar máximos e mínimos de funções contínuas.

4 Apêndice

Carl Friedrich Gauss

Carl Friedrich Gauss nasceu em 1777 em Brunswick, Alemanha, e morreu em 1855, aos setenta e oito anos, após uma profícua vida dedicada, principalmente, à Matemática, que ele intitulava como *A Rainha de todas as Ciências*. Filho de um jardineiro e pedreiro, seu pai desejava que ele fosse um pedreiro, também. No entanto, semelhante a Mozart na Música, de quem se diz que escreveu o seu primeiro minueto aos quatro anos de idade, Gauss mostrou-se um menino prodígio desde tenra idade, o que fez com que se desviasse do desígnio profissional ideado por seu pai. Diz-se que, aos três anos de idade, chegou a apontar um erro de cálculo cometido pelo seu pai. Outro episódio interessante ocorreu no colégio em que estudava quando, para manter a criançada ocupada durante alguns minutos, o professor determinou que cada estudante, entre eles Gauss, calculasse a soma de todos os números naturais de 1 até 100. Sem muita delonga, Gauss apresentou o resultado para o mestre-escola enquanto os seus condiscípulos debruçavam-se sobre suas carteiras em cálculos demorados. O que Gauss deve ter feito? Observemos que a soma

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + 46 + 47 + 48 + 49 + 50 + \\ 51 + 52 + 53 + 54 + 55 + \cdots + 96 + 97 + 98 + 99 + 100$$

pode ser escrita na forma

$$(1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + (4 + 97) + (5 + 96) + \cdots + \\ (46 + 55) + (47 + 54) + (48 + 53) + (49 + 52) + (50 + 51)$$

de modo que cada termo entre parênteses é igual a 101 e existem cinqüenta parcelas deste tipo. Então a soma requerida pelo professor do garoto Gauss é $50 \times 101 = 5050$. O talento mostrado por Gauss chamou a atenção do Duque de Brunswick que, mesmo sob protestos dos pais do garoto, enviou-o para o *Collegium Carolinum* e, em 1795, para *Göttingen*, local este destinado a um futuro glorioso. Inicialmente indeciso entre Filologia e Matemática, enfim decidiu-se, para sorte nossa, por essa última. Iniciou sua carreira acadêmica em Brunswick e após recusar a oferta de uma posição na Academia de São Petersburgo, Gauss foi indicado, em 1807, como o primeiro diretor do novo Observatório de Göttingen, local onde permaneceu, sempre dedicado aos estudos, com uma vida simples, feliz, abençoado com uma boa saúde, até o seu falecimento aos 78 anos.

Sua obra matemática é bastante volumosa, comparável à de Euler. No entanto, enquanto Euler era prolixo em seus escritos, Gauss caracterizava-se pela austeridade com que escrevia seus trabalhos. Em sua tese de doutorado, publicada em 1799, Gauss provou o *Teorema Fundamental da*

Álgebra, já citado nesta aula, cuja demonstração havia sido perseguida por matemáticos da estirpe de D'Alembert, Euler, Lagrange e Laplace. Muito embora suas criações permeiem todas as áreas da Matemática, na *Teoria dos Números*, ao que parece, ele encontrava um prazer maior do que nas outras áreas, chegando a dizer *Matemática, a Rainha das Ciências, e Aritmética, a Rainha da Matemática*, sendo que a sua obra central nesta área é a *Disquisitiones Arithmeticae*. Enveredou, também, pela Astronomia tendo publicado, em 1809, um trabalho central intitulado *Theoria Motus Corporum Coelestium*. Em Geometria Diferencial também teve papel destacado, principalmente com sua obra *Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas*, publicada em 1827, que foi motivada pelos seus estudos sobre geodésicas na superfície terrestre. Para mais detalhes sobre a vida e obra de Gauss, o leitor pode acessar o excelente site www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Gauss.html.

Joseph-Louis Lagrange

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), muito embora tenha nascido em Turim, era descendente de uma ilustre família parisiense, tendo ele mesmo se tornado um cidadão de Paris. Iniciou sua vida em Turim, posteriormente mudou-se para Berlim e, finalmente, estabeleceu-se em Paris, onde sua fama se consolidou. Sua genialidade revelou-se desde cedo, sendo que na escola já mostrava refinamento intelectual mostrando interesse por clássicos da literatura como Homero e Virgílio. Aos dezesseis anos de idade tornou-se Professor de Matemática da Escola Real de Artilharia de Turim. Aos dezenove anos resolveu o famoso problema isoperimétrico, já citado na aula 1, e, ao mesmo tempo, criava o *Cálculo das Variações*, uma das mais nobres áreas da Análise Matemática e objeto de intensa atividade de pesquisa até os nossos dias, que consiste, *grosso modo*, em determinar máximos e mínimos de funções cujos domínios são constituídos de funções. Sua obra fundamental foi *Mécanique Analytique*, produzida em Berlim mas publicada em Paris, na qual unificou a Mecânica Geral e a transformou, no dizer de Hamilton, outro eminente matemático, *em uma espécie de poema científico*.

“Tenho sempre observado que as pretensões das pessoas são inversamente proporcionais aos seus méritos; este é um dos axiomas da moral.”
Joseph-Louis Lagrange

Números Complexos

A evolução dos conjuntos numéricos é um dos capítulos mais marcantes da Matemática. O ser humano, em seu estágio mais primitivo, usava, de maneira inconsciente, a noção de número natural para efetuar contagem. Em um estágio mais evoluído, os nossos ancestrais necessitavam não apenas contar mas também medir. Daí surge o conceito de número racional que são, essencialmente, as frações que conhecemos desde o ensino fundamental. No entanto, na evolução da Matemática e de suas aplicações

surtem problemas em que o conjunto dos números racionais são insuficientes, fato este que já era do conhecimento dos pitagóricos nos idos do século VI a.C. O problema com o qual os pitagóricos se defrontaram era de (tentar) encontrar um número racional r tal que $r^2 = 2$. Como veremos na aula 1 de Análise, não existe tal número racional e daí construiu-se o conjunto dos números reais, mais precisamente o Corpo dos Números Reais, que é um conjunto numérico, munido com as operações de adição e multiplicação tão conhecidas do leitor, que está em correspondência biunívoca com a reta, que é um ente geométrico. Porém, o conjunto dos números reais ainda é insuficiente e daí surge o conceito de *Número Complexo*. Não nos deteremos nas motivações históricas das origens dos números complexos, remetendo o leitor ao excelente capítulo do livro, não mais editado, de Imenes-Trotta-Jakubovic.²

Inicialmente, introduz-se a unidade imaginária definida como sendo o número i definido por

$$i^2 = -1.$$

Claramente, essa unidade imaginária não é nenhum dos números reais que conhecemos.

Chamaremos de números complexos aos números da forma $z = a + bi$, em que $a, b \in \mathbb{R}$ e i é unidade imaginária. O conjunto dos números complexos será designado por \mathbb{C} .

O número real a é chamado parte real do número complexo z , designado por $a = \text{Re}(z)$, e o número real b é chamado parte imaginária do número complexo z , designado por $b = \text{Im}(z)$.

Dados dois números complexos $z_1 = a_1 + b_1i$ e $z_2 = a_2 + b_2i$, diz-se que $z_1 = z_2$ se $a_1 = a_2$ e $b_1 = b_2$.

Da mesma maneira com o que acontece com os números reais, podemos introduzir duas operações (adição e multiplicação) no conjunto dos números complexos, da seguinte maneira.

Dados dois números complexos $z_1 = a_1 + b_1i$ e $z_2 = a_2 + b_2i$, define-se a operação de adição como sendo aquela que a tais números complexos associa um terceiro número complexo $z_1 + z_2$, chamado soma de z_1 e z_2 , dado por

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i.$$

Define-se a operação de multiplicação como sendo aquela que a tais números complexos associa um outro número complexo $z_1 z_2$, chamado produto de z_1 e z_2 , dado por

$$z_1 z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$$

² L.M.P. Imenes, J. Jakubovic e F. Trotta, Matemática Aplicada, Vol. 3, Editora Moderna LTDA.

Tais operações possuem propriedades semelhantes às da adição e multiplicação dos números reais, quais sejam, comutatividade, associatividade, distributividade, existência de zero, existência de inverso, etc.

À custa da operação de multiplicação, podemos definir divisão de números complexos. Mais precisamente, dados dois números complexos z_1 e z_2 , $z_2 \neq 0$ como acima, define-se o quociente $\frac{z_1}{z_2}$ como sendo o número complexo $z = a + bi$ dado por

$$z_1 = z z_2.$$

Vejamos um exemplo. Consideremos o quociente $\frac{3-i}{5-2i}$ e vejamos como proceder. Multiplicando numerador e denominador deste quociente por $5 + 2i$, que é chamado complexo conjugado de $5 - 2i$, obtemos

$$\frac{3-i}{5-2i} = \frac{3-i}{5-2i} \cdot \frac{5+2i}{5+2i} = \frac{17+i}{29} = \frac{17}{29} + \frac{1}{29}i.$$

Outra operação importante é a radiciação, que consiste no seguinte: Dado um número complexo ω , encontrar os números complexos z tais que $z^n = \omega$. Neste caso escreve-se $z = \sqrt[n]{\omega}$.

Existe uma representação geométrica para o conjunto dos números complexos \mathbb{C} que consiste no seguinte. Dado um número complexo $z = a + bi$ associamos a ele o par ordenado (a, b) , que é um elemento do plano cartesiano \mathbb{R}^2 . Reciprocamente, dado um ponto (a, b) do plano, associamos a ele o número complexo $z = a + bi$. Deste modo, existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto \mathbb{C} dos números complexos e o plano cartesiano \mathbb{R}^2 que, assim, é a representação geométrica dos números complexos.

Aula 5

A derivada

Objetivos

- Estudar o conceito de derivada de uma função.
- Calcular a derivada de algumas funções elementares.
- Estudar as regras de derivação.

Nesta aula introduziremos os conceitos básicos relacionados com a *derivada*, os quais, de maneira introdutória, foram esboçados na aula 2.

1 Noções preliminares

Consideremos uma função $y = f(x)$ definida em um dado intervalo I , e escolhamos um ponto x_0 que não seja uma de suas extremidades. Tomemos um número positivo h tal que $x_0 + h$ ainda esteja em I , de modo que podemos calcular o valor de f em $x_0 + h$ e assim formar o chamado *quociente de Newton*

$$q(x) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Se

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existir, dir-se-á que f é *derivável à direita* em x_0 e o limite acima será chamado *derivada lateral à direita* de f em x_0 , sendo designada por $f'_+(x_0)$. Assim,

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Quando o acréscimo h é negativo e se $x_0 + h$ ainda estiver em I , constrói-se o quociente de Newton, como feito acima, e caso o limite

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existir, diremos que f é *derivável à esquerda* em x_0 , sendo tal limite chamado *derivada lateral à esquerda* de f em x_0 e designado por $f'_-(x_0)$, ou seja,

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Caso as derivadas laterais de f em x_0 existam e sejam iguais, diremos que f é *derivável* neste ponto, sendo o limite acima chamado *derivada* de f em x_0 , e designado por $f'(x_0)$. Portanto,

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

A derivada também poderá ser apresentada da seguinte maneira. Façamos $x_0 + h = x$ e observemos que $h \rightarrow 0$ se, e somente se, $x \rightarrow x_0$, de modo que

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

O leitor também encontrará, ao longo dos seus estudos, as seguintes notações para a derivada da função $y = f(x)$ no ponto x_0 :

$$\frac{df}{dx}(x_0), \quad \frac{dy}{dx}(x_0), \quad y'(x_0)$$

ou, quando não houver necessidade de enfatizar o ponto no qual estamos calculando a derivada, escreveremos simplesmente

$$\frac{df}{dx}, \quad \frac{dy}{dx}, \quad y'.$$

A notação $\frac{dy}{dx}$ é devida ao matemático alemão Leibniz (ver aula 1 e apêndice da Aula 3), por isso é conhecida como a *notação de Leibniz para derivada*.

Em algumas situações pode-se apenas falar em derivada lateral à direita ou à esquerda. É o que acontece quando a função estiver definida em intervalos tais como $[a, b]$, $[a, b)$, $[a, \infty)$, $(a, b]$, $(-\infty, b]$. Nos três primeiros casos pode-se apenas calcular em a a derivada lateral à direita e nos primeiro, quarto e quinto casos é possível somente calcular em b a derivada lateral à esquerda.

Neste ponto, o leitor deverá reportar-se à aula 2 e verificar que, ao definirmos derivada, fizemos, essencialmente, uma mera repetição daquilo que foi a motivação da noção de limite por meio do traçado de retas tangentes e velocidade instantânea. Dessa forma, f é derivável em um certo ponto x_0 se pudermos traçar uma tangente não-vertical ao gráfico

de f , no ponto $(x_0, f(x_0))$ e temos que $f'(x_0)$ representa a inclinação de tal reta tangente, ou seja,

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \theta$$

em que θ é o ângulo formado pelo eixo x com a reta tangente, no sentido anti-horário. Deste modo, a derivada de uma função mede, em cada ponto, a sua taxa de crescimento ou de decrescimento, ou seja, quanto maior for a derivada, maior será o crescimento da função. Interprete as figuras 5.1(a), (b) e (c) esboçadas a seguir.

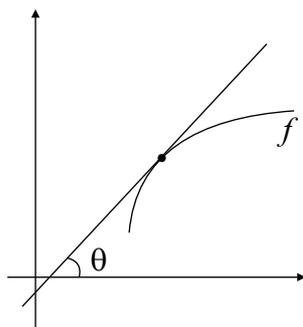


Fig. 5.1(a)

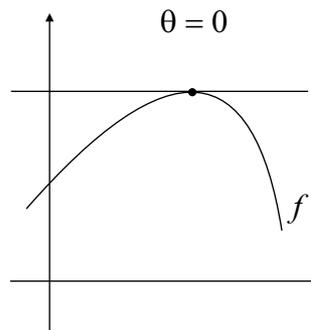


Fig. 5.1(b)

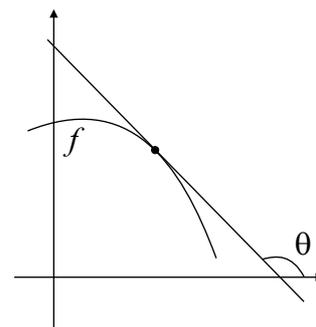


Fig. 5.1(c)

Para tornar o conceito mais claro, consideremos a situação descrita no seguinte exemplo.

Exemplo 37. Suponhamos que uma pessoa esteja a caminhar sobre uma montanha cujo perfil está esboçado na figura 5.2 e que ele seja o gráfico de uma função.

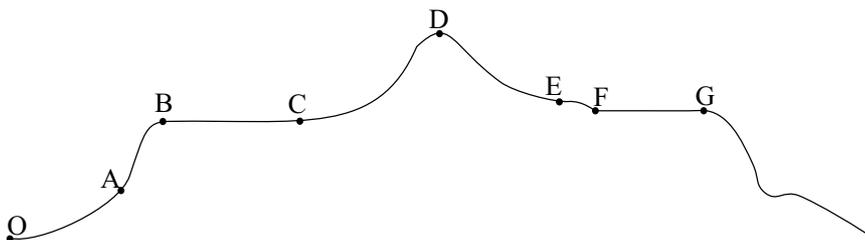


Fig. 5.2

No trecho \widetilde{OA} a pessoa subirá sem muito esforço, pois nesta parte a subida não é muito íngreme, ou seja, a derivada é positiva mas não é muito grande. A partir do ponto A , e até o ponto B , o montanista será submetido a um esforço maior pois a declividade aumentou, isto é, a derivada tornou-se maior. Já em BC a caminhada efetuar-se-á horizontalmente e assim a derivada será zero nestes pontos em virtude de a inclinação

ser nula. De C até D o esforço recomeçará a ser grande em virtude de a inclinação voltar a aumentar. No ponto D o atleta atingiu o pico da montanha, isto é, nesta altura ele momentaneamente descansará, pois a inclinação - e conseqüentemente a derivada - será zero.

A partir daí ele começará a descer pelo lado oposto da montanha. De D até E a descida será suave e assim teremos derivadas negativas cujos módulos serão pequenos. Em F inicia-se novamente um platô que se estende até G , no qual a derivada novamente se anula. Prosseguindo assim, poderemos analisar as situações que ocorrem nos outros trechos.

Vejam os mais alguns exemplos nos quais é possível calcular explicitamente as derivadas.

Exemplo 38. Se $f(x) = C$, para todo x pertencente ao domínio de f , em que C é uma constante, então sua derivada será sempre igual a zero pois não há variação na função. Vejamos isso usando a definição:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{C - C}{h} = 0.$$

Como o quociente de Newton é sempre nulo, segue-se que $f'(x) = 0$ sempre que a função f for constante, pois a derivada mede a taxa de variação.

Exemplo 39. Consideremos a função $f(x) = ax + b$ em que a, b são constantes. Como é bem sabido, tal função descreve retas não-verticais cujas inclinações são determinadas pela constante a . Calculemos sua derivada. Para isto tomemos o seu quociente de Newton em um ponto x de \mathbb{R} :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a(x+h) + b - (ax + b)}{h} = \frac{ah}{h} = a.$$

Usando o fato de que limite de constante é a própria constante, obteremos

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a$$

o que era de se esperar pois a reta possui inclinação (derivada) constante em todos os seus pontos.

Exemplo 40. Consideremos a função $f(x) = x^2$. Para calcular a sua derivada em um ponto qualquer x , procede-se de modo análogo ao desenvolvido na aula 2 e obteremos

$$f'(x) = 2x.$$

O procedimento feito no exemplo acima pode ser aplicado a qualquer função da forma $f(x) = x^n$ em que n é um número natural arbitrário.

Nesse caso deve-se usar a fórmula do *Binômio de Newton* para obter $f'(x) = nx^{n-1}$. Vejamos como proceder. Inicialmente, observemos que

$$f(x+h) = (x+h)^n = x^n + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} h^j x^{n-j}$$

em que $\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$ são os coeficientes binomiais. Calculando o quociente de Newton

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = nx^{n-1} + \sum_{j=2}^n \binom{n}{j} h^{j-1} x^{n-j}$$

e fazendo $h \rightarrow 0$ obtemos a fórmula desejada

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

para todo $n = 1, 2, \dots$

Exemplo 41. Estudaremos, agora, a derivada da função $f(x) = \sin x$. Para isto, comecemos com o quociente de Newton

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}$$

em que na igualdade acima utilizamos uma identidade trigonométrica usual.

Usando os limites fundamentais relacionados com as funções \sin e \cos , introduzidos na aula 3, teremos

$$(\sin)' x = \cos x$$

Por um procedimento análogo pode-se provar que

$$\cos' x = -\sin x$$

Vejamos agora um importante teorema que relaciona os conceitos de derivação e de continuidade de funções.

Teorema 6. *Toda função derivável é contínua.*

Demonstração. Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em um ponto x_0 pertencente ao intervalo I . Devemos mostrar que f é contínua em x_0 , ou seja, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Observe que, dado $x \in I, x \neq x_0$, tem-se que $x = x_0 + h$ para algum $h \in \mathbb{R}$, de modo que $x \rightarrow x_0$ é equivalente a $h \rightarrow 0$. Lembremos, também, que f ser derivável significa que

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Assim,

$$f(x) = f(x) - f(x_0) + f(x_0) = \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) (x - x_0) + f(x_0)$$

e usando os fatos de que o limite da soma é a soma dos limites e o limite do produto é o produto dos limites, obtém-se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f'(x_0) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) + f(x_0) = f(x_0)$$

e isso mostra que f é contínua em x_0 . □

Observação 5. A recíproca do Teorema 6, não é verdadeira, como mostra o exemplo a seguir. Seja $f(x) = |x|$ em que $|x|$ representa o módulo do número real x . Assim, a função f é dada por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Claramente f é contínua. No entanto, f não é derivável em 0. De fato, suponhamos, inicialmente, $h > 0$ e consideremos o quociente de Newton

$$\frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

e daí

$$f'_+(0) = 1$$

Supondo $h < 0$, teremos

$$\frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \frac{-h}{h} = -1$$

donde

$$f'_-(0) = -1$$

Conclusão: f não é derivável em 0, pois as derivadas laterais de f em 0, mesmo existindo, são distintas.

2 Regras básicas de derivação

Pelos exemplos desenvolvidos até agora verifica-se que calcular a derivada de funções é algo trabalhoso e tedioso caso tenhamos que sempre usar a definição. Em vista disso, nesta lição, acrescentaremos algumas regras, além das vistas anteriormente, que serão indispensáveis para o desenvolvimento do Cálculo.

Regra 1. A derivada da soma é a soma das derivadas.

Para tornar mais precisa tal afirmação, sejam f e g duas funções, definidas em um mesmo domínio de modo que elas sejam deriváveis em um dado ponto x pertencente ao domínio comum de f e g . Observando que $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, o quociente de Newton da função soma é dado por

$$\frac{(f + g)(x + h) - (f + g)(x)}{h} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h} + \frac{g(x + h) - g(x)}{h}$$

e usando o fato de que o limite da soma é a soma dos limites teremos

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Regra 2. Sejam f uma função derivável em um certo ponto x de seu domínio e λ um número real. Então a função λf é derivável em x e sua derivada é dada por

$$(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x).$$

Vejamos como isto é feito. O quociente de Newton de λf é escrito como

$$\frac{\lambda f(x + h) - \lambda f(x)}{h} = \lambda \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

e usando o fato de que o limite de uma constante vezes uma função é igual à constante vezes o limite da função, teremos a fórmula desejada.

Muito embora a derivada da soma seja a soma das derivadas, devemos enfatizar que a derivada do produto não é o produto das derivadas. Com efeito, como a função produto fg é definida por $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$, determinaremos a derivada de fg .

Calculando o quociente de Newton da função fg teremos

$$\frac{(fg)(x + h) - (fg)(x)}{h} = \frac{f(x + h)g(x + h) - f(x)g(x)}{h}$$

e vê-se facilmente que o procedimento não é tão direto como no caso da Regra 1. Executaremos um procedimento muito comum no Cálculo, ou seja, já que os quocientes de Newton de f e g não aparecem diretamente, deveremos usar de uma estratégia de modo que tais quocientes apareçam. Para isto, subtrairemos e adicionaremos o termo $f(x)g(x + h)$ no numerador da expressão acima e fazendo as devidas simplificações obteremos

$$\frac{(fg)(x + h) - (fg)(x)}{h} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h} g(x + h) + f(x) \frac{g(x + h) - g(x)}{h}$$

o que nos leva a

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

e assim temos a regra:

Regra 3. Se f e g são duas funções deriváveis em um certo ponto x , então a função produto $f \cdot g$ é derivável em x e sua derivada é dada por

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Regra 4. Se f e g são duas funções deriváveis em um certo ponto x e se $g(x) \neq 0$, então a função quociente $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ é derivável e sua derivada é dada por

$$F'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\ &= \frac{\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}}{h} \\ &= \frac{[f(x+h)g(x) - f(x)g(x)] - [f(x)g(x+h) - f(x)g(x)]}{hg(x+h)g(x)} \\ &= \frac{\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) \right] - \left[f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right]}{g(x+h)g(x)} \end{aligned}$$

Considerando que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existe e é igual a $f'(x)$ e

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

também existe e é igual a $g'(x)$, teremos

$$F'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

O leitor atento deve ter observado que impusemos a hipótese de que $g(x) \neq 0$, mas usamos também o fato de que $g(x+h) \neq 0$, haja vista que ele aparece no denominador. Isto pode ser feito em virtude de que, sendo g derivável em x , g é contínua em x . Como consequência disso, e como $g(x) \neq 0$, temos que $g(x+h) \neq 0$, para todo h suficientemente pequeno.

Usemos as regras de derivação nos exemplos a seguir.

Exemplo 42. Calcule a derivada do polinômio

$$P(x) = x^2 + 3x + 2.$$

Solução. Observemos que a derivada da soma é a soma das derivadas, qualquer que seja o número de parcelas. Assim, a derivada de P é a soma da derivada de x^2 , que é $2x$, de $3x$, que é 3 e da derivada de 2 , que é zero. Portanto,

$$P'(x) = 2x + 3.$$

Exemplo 43. Calcule a derivada da função

$$f(x) = (\cos x)(x^3 + 2x^2 + 4x + 3).$$

Solução. Devemos usar a regra do produto. Assim,

$$f'(x) = (\cos' x)(x^3 + 2x^2 + 4x + 3) + (\cos x)(3x^2 + 4x + 4)$$

e usando $\cos' = \text{sen}$ teremos

$$f'(x) = (\text{sen } x)(x^3 + 2x^2 + 4x + 3) + (\cos x)(3x^2 + 4x + 4).$$

Exemplo 44. Calcule a derivada de

$$f(x) = \frac{x + 1}{x + 2}.$$

Solução. Usaremos a regra do quociente. Portanto,

$$f'(x) = \frac{(x + 1)'(x + 2) - (x + 1)(x + 2)'}{(x + 2)^2}$$

e daí

$$f'(x) = \frac{1(x + 2) - (x + 1)1}{(x + 2)^2},$$

ou seja,

$$f'(x) = \frac{1}{(x + 2)^2}.$$

Exemplo 45. Calculemos a derivada da função $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$. Usando a Regra do Quociente, obtemos

$$\text{tg}'x = \frac{\text{sen}'x \cos x - \text{sen } x \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

3 Derivadas de ordem superior

Seja $f(x)$ uma função derivável em um intervalo I , com derivada $f'(x)$, e suponhamos que $f'(x)$ seja também derivável em I . Então a função

$$\frac{df'}{dx}(x) = (f')'(x)$$

é chamada a *segunda derivada* de $f(x)$, escrita como $f''(x)$ ou $f^{(2)}(x)$. Analogamente, se $f''(x)$ for derivável em I , a função

$$\frac{df''}{dx}(x) = (f'')'(x)$$

é chamada a *terceira derivada* (ou derivada de ordem três) de $f(x)$, escrita como $f'''(x)$ ou $f^{(3)}(x)$. Mais geralmente, a derivada de ordem n de $f(x)$ (ou a *n-ésima derivada* de $f(x)$), designada por $f^{(n)}(x)$ é a função

$$\frac{df^{(n-1)}}{dx}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$$

admitindo que a derivada $f^{(n-1)}(x)$ de ordem $n - 1$ exista e seja derivável em I . Também escrevemos

$$f(x) = f^{(0)}(x)$$

isto é, $f(x)$ é a derivada de ordem zero de f .

É usual também a notação para $f^{(n)}(x)$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}(x)$$

ou, se $y = f(x)$, temos

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x), \quad y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = f''(x), \dots, \quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x).$$

Exemplo 46. Se $y = x^4$, então

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(4x^3) = 12x^2,$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d}{dx}(12x^2) = 24x,$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{d}{dx}(24x) = 24,$$

$$\frac{d^5 y}{dx^5} = \frac{d}{dx}(24) = 0.$$

4 Outras regras de derivação

Na aula 1 introduzimos o conceito de função inversa. A próxima regra nos mostra como expressar a derivada da função inversa em termos da função original.

Teorema 7. *Seja f uma função inversível com inversa $g = f^{-1}$. Suponhamos que f seja derivável em x , com derivada $f'(x) \neq 0$, e suponhamos que g seja contínua em $y = f(x)$. Então g é derivável em y , com derivada*

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Na notação de Leibniz a expressão da derivada da inversa toma as seguintes formas

$$\frac{dg}{dy}(y) = \frac{df^{-1}}{dy}(y) = \frac{1}{\frac{df}{dx}(x)}$$

ou mais concisamente

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Daí

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1.$$

Exemplo 47. A função

$$y = f(x) = x^2$$

é injetiva, e derivável em qualquer intervalo da forma $[a, b]$, com $a \geq 0$. Na verdade sua imagem é o intervalo $[a^2, b^2]$. Observe, também, que f é crescente. Sua inversa é dada por

$$x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

estando definida no intervalo $[a^2, b^2]$ sendo aí contínua. Usemos o Teorema 1 para calcular a derivada de \sqrt{y} . Assim,

$$\frac{d}{dy}\sqrt{y} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Na aula 1 introduzimos o conceito de função composta. O próximo resultado nos permitirá calcular a derivada da composta de duas funções deriváveis.

Teorema 8. (Regra da Cadeia) *Sejam f e g duas funções tais que f é derivável em x e g é derivável em $f(x)$. Então a função composta $g \circ f$, dada por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ é derivável em x e sua derivada é dada por*

$$g \circ f(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Na notação de Leibniz a Regra da Cadeia toma a seguinte forma: fazendo $y = f(x)$ e $z = g(y)$ teremos

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Se tivermos a composição de três funções, digamos

$$F(x) = h(g(f(x)))$$

e se f for derivável em x , g for derivável em $f(x)$ e h for derivável em $g(f(x))$, a Regra da Cadeia assumirá a seguinte forma

$$F'(x) = h'(g(f(x)))g'(f(x))f'(x)$$

ou, usando a notação de Leibniz, tem-se

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

em que $y = f(x)$, $z = g(y)$ e $u = g(z)$.

Exemplo 48. Calculemos a derivada de

$$F(x) = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{101}$$

Neste caso $g(y) = y^{101}$ e $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$. Portanto, $g'(y) = 101y^{100}$ e $f'(x) = -2x^{-3}$. Usando a Regra da Cadeia, obtemos

$$\begin{aligned} F'(x) &= (g \circ f)'(x) \\ &= g'(f(x)) \cdot f'(x) \\ &= 101 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{100} \cdot (-2x^{-3}) \\ &= -\frac{202}{x^3} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{100}. \end{aligned}$$

Exemplo 49. Dada a função $y = f(x)$, calculemos a derivada de y^n . Usando a notação de Leibniz, teremos

$$\frac{dy^n}{dx} = \frac{dy^n}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = ny^{n-1} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Portanto, se quisermos calcular a derivada de $f(x) = (x^2 + 3x + 1)^{50}$, teremos

$$f'(x) = 50(x^2 + 3x + 1)^{49}(2x + 3).$$

5 Exercícios resolvidos

1. Mostre que

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x^n} = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

Solução. Usemos a regra do quociente. Dessa maneira,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{1}{x^n} &= \frac{x^n \frac{d}{dx} 1 - 1 \frac{d}{dx} x^n}{x^{2n}} \\ &= -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} \\ &= -\frac{n}{x^{n+1}}. \end{aligned}$$

2. Calcule a derivada de $f(x) = \sqrt{x}$.

Solução. Usemos a definição. Para isso suporemos que $x > 0$. Assim,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}.$$

Multiplicando numerador e denominador do membro direito da expressão acima por $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \end{aligned}$$

e daí

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}.$$

Fazendo h tender a zero, obtemos

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

6 Exercícios propostos

1. Calcule as derivadas de:

(a) $x^4 + 3x^2 - 6$ (b) $2ax^3 - bx^2 + c$, a e b constantes (c) $x - \frac{1}{x}$
 (d) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$

2. Calcule as derivadas de:

- (a) $(x - a)(x - b)$
 (b) $x(x - a)(x - b)$
 (c) $(1 + 4x^2)(1 + 2x^2)$
 (d) $(2x - 1)(x^2 - 6x + 3)$

3. Calcule as derivadas de:

(a) $\frac{x - a}{x + a}$, a constante (b) $\frac{2x}{1 - x^2}$ (c) $\frac{x^2 - 5x}{x^3 + 3}$ (d) $\frac{x^3 + 1}{x^2 - x - 2}$

4. A derivada de uma função racional é também uma função racional. Falso ou verdadeiro?

Observação: Uma função racional é o quociente de dois polinômios:

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_Nx^N}.$$

5. A n -ésima derivada de um polinômio de grau n é uma função constante não-nula. Falso ou verdadeiro.

6. Calcule as n primeiras derivadas da função $\frac{1}{x}$.

7. Dadas duas funções f e g , deriváveis até a ordem 3, calcular $(fg)'''$.

8. Seja $y = x(2x - 1)^2(x + 3)^3$. Encontre $y^{(6)}$ e $y^{(7)}$ com o mínimo de trabalho possível.

9. Calcule as derivadas de

(a) $(x + 1)(x + 2)^2(x + 3)^3$ (b) $\frac{(x + 4)^2}{x + 3}$ (c) $\frac{(2 - x)(3 - x)}{(1 - x)^2}$

10. Calcule as derivadas de

(a) $\sqrt{x^2 + a^2}$, a constante (b) $\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$ (c) $\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, a constante

7 Respostas dos exercícios propostos

1. (a) $4x^3 + 6x$ (b) $6ax^2 - 2bx$ (c) $1 + \frac{1}{2x^2}$ (d) $-\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3} - \frac{9}{x^4}$
2. (a) $2x - a - b$
 (b) $3x^2 - 2(a + b)x + ab$
 (c) $32x^2 + 12x$
 (d) $6x^2 - 26x + 12$
3. a) $\frac{2a}{(x - a)^2}$ (b) $\frac{2(1 + x^2)}{(1 - x^2)^2}$ (c) $-\frac{x^4 - 10x^3 - 6x + 15}{(x + 3)^2}$
 (d) $\frac{x^2 - 4x + 1}{(x - 2)^2}$
4. Verdadeiro.
5. Verdadeiro.
6. $(-1)^{n+1} \frac{n!}{x^{n+1}}$
7. $f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$
8. $y^{(6)} = 4$ e $y^{(7)} = 0$. Observe que $y = x(2x - 1)^2(x + 3)^3$ é um polinômio.
9. (a) $(x + 2)^2(x + 3)^3 + 2(x + 1)(x + 2)(x + 3)^3 + 3(x + 1)(x + 2)^2(x + 3)^2$
 (b) $\frac{(x + 4)(x + 2)}{(x + 3)^2}$ (c) $\frac{-7 + 3x}{(-1 + x)^3}$
10. (a) $\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ (b) $\frac{1}{(x - 1)^2 \sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}}}$ (c) $\frac{a^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}$

Nesta aula você aprendeu:

- o que é a derivada de uma função;
- a calcular derivadas de certas funções elementares;
- a calcular derivada utilizando as regras de derivação.

8 Apêndice

Fermat e a derivada

A Integração, entendida nas suas origens como o cálculo de áreas, tem suas raízes no mundo grego com Eudoxo, e seu *Método da Exaustão*, e Arquimedes, com a sua *Quadratura da Parábola*. No entanto, somente no século XVII foram dados os primeiros passos para a criação do *Cálculo Diferencial*. Um dos matemáticos que mais se destacaram nestes esforços iniciais foi Fermat - personagem já destacado na aula 1 - que estabeleceu as bases do cálculo de derivadas sempre relacionando-as com o traçado de tangentes. A idéia desenvolvida por Fermat consistia, em notação moderna, no seguinte. Seja $y = f(x)$ uma dada função e fixemos um certo ponto p de seu domínio no qual f atinja um máximo ou mínimo, ou seja, $f(p) \geq f(x)$ ou $f(p) \leq f(x)$, para todo x pertencente ao domínio de f . Ora, se e for um número próximo de zero, os valores $p + e$ e p são próximos um do outro de modo que $f(p + e) \cong f(p)$. Assim, a igualdade $f(p + e) = f(p)$ somente será verdadeira se $e = 0$. Os zeros da equação resultante forneceriam os valores de x para os quais f atingiria máximo ou mínimo.

Fermat usou esta técnica para resolver o seguinte problema:

Dentre todos os retângulos com mesmo perímetro P , qual o que possui maior área?

Observemos que, se x e y forem as dimensões de um retângulo de perímetro P , teremos $2x + 2y = P$ e sua área S será dada por $S = xy$. Como $y = \frac{P - 2x}{2}$, $S = S(x)$ será

$$S(x) = \frac{P}{2}x - x^2$$

em que $0 < x < \frac{P}{2}$. O método de Fermat consiste no seguinte. Tomemos $e \in \mathbb{R}$ de modo que $S(x + e) = S(x)$, o que implica

$$\frac{P}{2}(x + e) - (x + e)^2 = \frac{P}{2}x - x^2$$

e daí

$$\frac{P}{2}e - 2ex - e^2 = 0$$

Dividindo ambos membros da expressão acima por e obtemos

$$\frac{P}{2} - 2x - e = 0$$

Fazendo $e = 0$ obtemos o valor de x como sendo $x = \frac{P}{4}$, donde $y = \frac{P}{4}$ e o retângulo de área máxima é o quadrado.

Evidentemente, o processo de Fermat possui falhas matemáticas graves, pois, se por um lado ele divide ambos os membros de uma equação por e , deve-se ter $e \neq 0$. Por outro lado, no final do processo ele faz $e = 0$. Contudo, estas idéias continham o germen do cálculo de derivadas. De fato, suponhamos que se queira calcular a inclinação da reta tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ em um certo ponto $(x, f(x))$ de seu gráfico. Se e for um número real não nulo, o quociente

$$\frac{f(x+e) - f(x)}{e}$$

fornece a inclinação de uma reta secante ao gráfico da função, passando pelos pontos $(x, f(x))$ e $(x+e, f(x+e))$. Mas, se e for próximo de zero, teremos que

$$\frac{f(x+e) - f(x)}{e} \cong f'(x)$$

Assim, a igualdade

$$\frac{f(x+e) - f(x)}{e} = f'(x)$$

somente será válida se $e = 0$ e isto, no moderno linguajar matemático, é dado por

$$\lim_{e \rightarrow 0} \frac{f(x+e) - f(x)}{e} = f'(x)$$

Apliquemos tal método à função $f(x) = x^2$ para obter

$$\frac{(x+e)^2 - x^2}{e} = f'(x)$$

de modo que

$$2x + e = f'(x)$$

A igualdade será verdadeira quando $e = 0$ e daí obtemos que a inclinação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2$, no ponto (x, x^2) , é $2x$, o que é exatamente o resultado obtido no exemplo 4 da presente aula. Para mais informações históricas sobre Fermat e o início do Cálculo Diferencial, o leitor interessado poderá consultar Simmons¹ e Eves².

O método dos fluxões de Newton

Em 1671 Isaac Newton, inspirado em idéias de seus predecessores, em particular de John Wallis e Isaac Barrow, produz uma técnica de derivação

¹George F. Simmons, Cálculo com Geometria Analítica, Vol. 1, McGraw-Hill.

²Howard Eves, Great Moments in Mathematics, Before 1650, Mathematical Association of America.

introduzida em *Method of Fluxions* na qual ele considera uma curva como sendo a trajetória de um ponto em movimento. Newton chamou a quantidade que varia de *fluente* e sua taxa de variação de *fluxão* do fluente. Se o fluente for representado por y , então o seu fluxão será representado por \dot{y} , que, em termos modernos, é o nosso conhecido $\frac{dy}{dt}$.

Vejam como o método funciona para a função $y = 3x^2 + 2x$. Considere-se a variável x e dá-se um acréscimo pequeno que, na notação antiga, era designada por $\dot{x}O$, e que produz um acréscimo $\dot{y}O$ correspondente na variável y , de modo que o que era x passa a ser $x + \dot{x}O$ e o que era y passa a ser $y + \dot{y}O$. Substituindo-se na função em estudo, obtemos

$$y + \dot{y}O = 3(x + \dot{x}O)^2 + 2(x + \dot{x}O).$$

Dessa maneira,

$$y + \dot{y}O = 3x^2 + 6x(\dot{x}O) + (\dot{x}O)^2 + 2x + 2(\dot{x}O).$$

Ora, Newton então argumentava, $\dot{x}O$ é um infinitésimo, ou seja, algo infinitamente pequeno, de modo que $(\dot{x}O)^2 = 0$. Além disso, $y = 3x^2 + 2x$. Usando esses fatos na última expressão, chegamos a

$$\dot{y}O = 6x(\dot{x}O) + 2(\dot{x}O)$$

e daí

$$\dot{y}O = (6x + 2)(\dot{x}O)$$

donde

$$\frac{\dot{y}O}{\dot{x}O} = 6x + 2$$

que em forma moderna é o nosso conhecidíssimo

$$\frac{dy}{dx} = 6x + 2.$$

Para mais detalhes sobre Newton e sua obra, veja Frederick Rickey ³.

³V. Frederick Rickey, Isaac Newton: Man, Myth, and Mathematics, College Mathematics Journal 60, Nov., 1987, 362-389.

Aula 6

A derivada: propriedades e aplicações

Objetivos

- Estudar o teorema do valor médio e algumas aplicações.
- Estudar a concavidade e pontos de inflexão de uma função.

Na aula 5 estudamos as propriedades básicas da derivada. Nesta aula introduziremos alguns resultados que nos permitirão fazer aplicações importantes, como o estudo de máximos e mínimos de funções, que constituem um dos aspectos essenciais do Cálculo Diferencial, entre outras. Veremos a relação entre máximos e mínimos de funções deriváveis em intervalos, relacionando-os com os resultados obtidos na aula 4.

1 O teorema do valor médio

Os resultados centrais desta aula serão os Teorema de Rolle e o Teorema do Valor Médio e alguns fatos deles decorrentes. Veja no Apêndice alguns fatos sobre a vida e obra de Rolle. Começemos com o

Teorema 9. (Teorema de Rolle) *Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b) . Suponhamos que $f(a) = f(b) = k$. Então existe um ponto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demonstração. Inicialmente relembremos que, sendo f contínua no intervalo $[a, b]$, ela atingirá máximo e mínimo nesse intervalo. Se f for constante, então $f'(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$ e o teorema está demonstrado. Suponhamos que f não seja constante. Então existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) > k$ ou $f(x_0) < k$. Se $f(x_0) > k$, a função f atingirá máximo

em um ponto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) > k$. Portanto, $f(c+h) \leq f(c)$ para todo h tal que $c+h \in [a, b]$. Suponhamos $h > 0$. Assim,

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

e daí

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

Analogamente, considerando $h < 0$, obtém-se

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

e pela unicidade da derivada concluímos que $f'(c) = 0$.

O outro caso, em que temos $f(x_0) < k$, é demonstrado de maneira análoga. \square

Este teorema possui uma interpretação geométrica simples e interessante. Ele nos diz que, se os pontos extremos do gráfico da função

$$y = f(x), \quad a \leq x \leq b$$

possuem as mesmas ordenadas, ou seja, $f(a) = f(b)$, então a inclinação da reta tangente a esta curva é igual a zero em algum ponto do intervalo (a, b) , isto é, em tal ponto a reta tangente ao gráfico é horizontal. Esta situação é ilustrada nas figuras 6.1(a), 6.1(b) e 6.1(c).

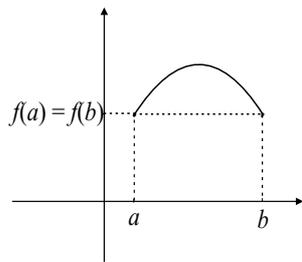


Fig.6.1(a)

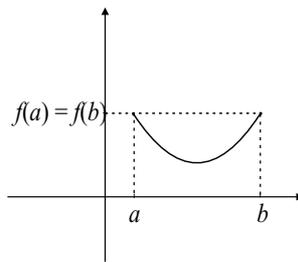


Fig. 6.1(b)

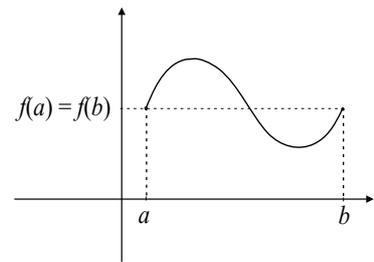


Fig. 6.1(c)

Seja f uma função definida em um certo intervalo aberto I . Se f for derivável em $c \in I$ e $f'(c) = 0$, então diz-se que c é *ponto crítico* de f . Em alguns textos, os pontos em que a função deixa de ser derivável também são chamados críticos.

- (a) A função $f(x) = x^2$ possui derivada $f'(x) = 2x$ e 0 é o único ponto no qual f' se anula, ou seja, 0 é o único ponto crítico de f .
- (b) A função $f(x) = ax + b, a \neq 0$ não possui pontos críticos, pois $f'(x) = a \neq 0$.

- (c) A função $f(x) = x^3$ possui apenas 0 como ponto crítico, pois é o único ponto que anula a derivada $f'(x) = 3x^2$ de f .
- (d) A função $f(x) = \cos x$ possui uma infinidade de pontos críticos em \mathbb{R} , pois sendo $\cos'(x) = -\text{sen } x$ tem-se que $\text{sen } x$ se anula em qualquer valor $x = n\pi$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Quando $f(a) \neq f(b)$ não podemos afirmar que em algum ponto de (a, b) a reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ seja horizontal. No entanto, pode-se concluir que em algum ponto intermediário do gráfico de $y = f(x)$ a reta tangente possui inclinação igual à da corda que liga os pontos $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$, isto é, a reta tangente em algum ponto gráfico da referida função possui inclinação igual a

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

conforme mostram as figuras 6.2(a) e 6.2(b).

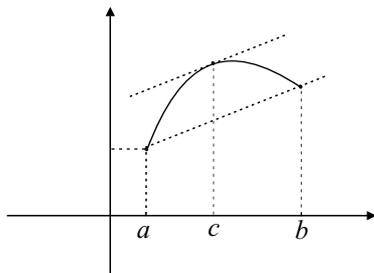


Fig.6.2(a)

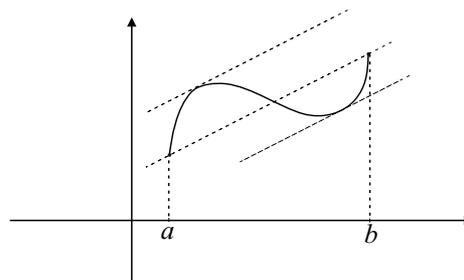


Fig. 6.2(b)

Traduzimos formalmente tal fato por meio do teorema a seguir.

Teorema 10. (Teorema do valor médio de Lagrange) *Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b) . Então existe um ponto $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstração. Consideremos a função $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) - f(a)$$

que é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) pois é a soma de funções contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b) . Além disso, é fácil ver que $g(a) = g(b) = 0$. Pode-se então usar o *Teorema de Rolle* para garantir a existência de $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$. Como

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

tem-se que $g'(c) = 0$ é equivalente a

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

o que conclui a demonstração do teorema. \square

2 Aplicações do teorema do valor médio

1. Se f for uma função derivável em um intervalo I e se sua derivada se anula em todos os pontos de I , então f será constante em I .

De fato, seja x_0 um ponto arbitrário, porém fixado, de I . Seja x um ponto qualquer de I e consideremos o intervalo cujos extremos sejam x_0 e x . Aplicando o *teorema do valor médio* a f neste intervalo, obteremos

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$$

para algum ponto c pertencente a I . Mas, por hipótese, $f'(c) = 0$ e assim $f(x) - f(x_0) = 0$ e daí segue-se que $f(x) = f(x_0)$, para todo $x \in I$, o que mostra ser f constante.

Se f não estiver definida em um intervalo, a conclusão acima não é verdadeira. Para ver isso considere a função $f : (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in (-\infty, 0) \\ 1 & \text{se } x \in (0, \infty). \end{cases}$$

Tal função é derivável e sua derivada é identicamente nula em seu domínio, no entanto, ela não é constante. Veja figura 6.3.

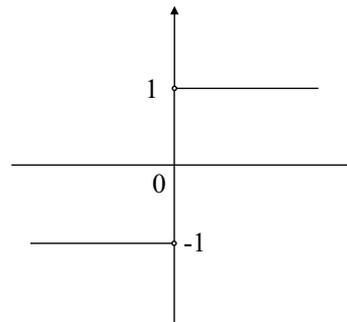


Fig. 6.3

2. Se f for uma função derivável em um intervalo I e se $f'(x) > 0$ em todos os pontos no interior do intervalo I , então f será crescente em I , ou seja, se $x_1, x_2 \in I$ e $x_1 < x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$.

Com efeito, sejam x_1 e x_2 como acima e apliquemos o *teorema do valor médio* à função f no intervalo $[x_1, x_2]$. Portanto, existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Como $f'(c)$ e $(x_2 - x_1)$ são ambos positivos, segue-se que $f(x_2) - f(x_1)$ também é positivo e daí $f(x_2) > f(x_1)$, ou seja, f é crescente. Veja figuras 6.4(a) e 6.4(b).

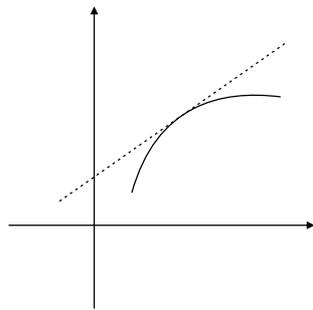


Fig. 6.4(a)

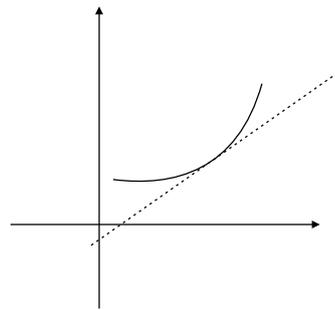


Fig. 6.4(b)

3. Se f for uma função derivável em um intervalo I e se $f'(x) < 0$ em todos os pontos no interior do intervalo I , então f será decrescente em I , ou seja, se $x_1, x_2 \in I$ e $x_1 < x_2$, então $f(x_1) > f(x_2)$.

Para demonstrar tal fato, siga os mesmos passos do que foi feito no item anterior. Observe as figuras 6.5(a) e 6.5(b).

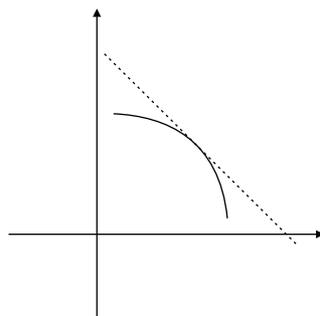


Fig. 6.5(a)

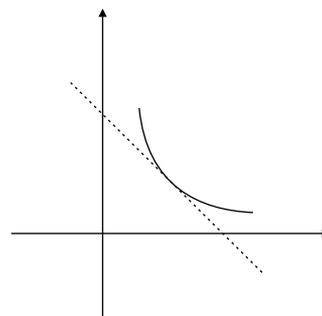


Fig. 6.5(b)

4. Observemos que a função pode ser crescente (ou decrescente) e a sua derivada se anular em alguns pontos. Basta considerar a função $f(x) = x^3$, que é crescente, no entanto sua derivada $f'(x) = 3x^2$ se anula no ponto $x = 0$.

3 Extremos locais

Consideremos o gráfico de uma função contínua f em um intervalo fechado $[a, b]$, conforme é mostrado na figura 6.6.

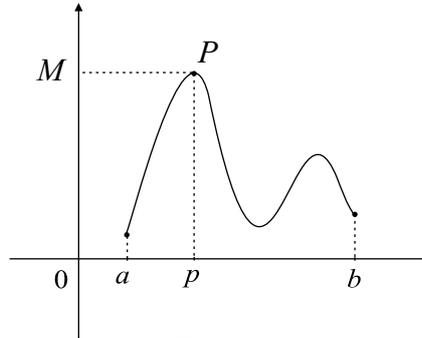


Fig. 6.6

O ponto mais alto do gráfico é atingido no ponto $P = (p, M)$ em que p se encontra no interior (a, b) do intervalo fechado $[a, b]$ e observemos que, de acordo com o gráfico, a derivada de f neste ponto deve ser nula, o que é equivalente a dizer que a reta tangente ao gráfico de f , aí, deve ser horizontal. O ponto mais baixo do gráfico é atingido na extremidade a do intervalo. Outro fato que deve ser destacado é que em alguns pontos o gráfico está em uma posição mais alta ou mais baixa, se nos restringirmos a intervalos pequenos centrados nestes pontos. Isto é traduzido matematicamente dizendo que a função atinge máximo ou mínimo local, o que será formalizado nas definições abaixo.

Seja f uma função definida em um intervalo I . Diz-se que f atinge *máximo local* em um ponto $p \in I$ se existir um número $r > 0$ tal que $f(x) \leq f(p)$, para todo $x \in I$ tal que $x \in (p - r, p + r) \cap I$. Veja figura 6.7.

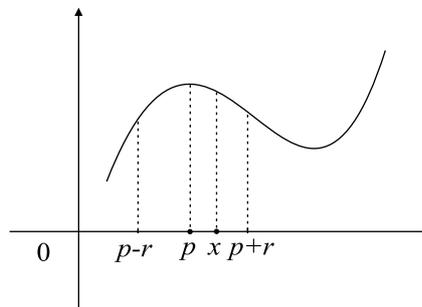


Fig. 6.7

Analogamente, diz-se que f atinge *mínimo local* em um ponto $p \in I$ se existir um número $r > 0$ tal que $f(x) \geq f(p)$, para todo $x \in I$ tal que $x \in (p - r, p + r) \cap I$. Veja figura 6.8.

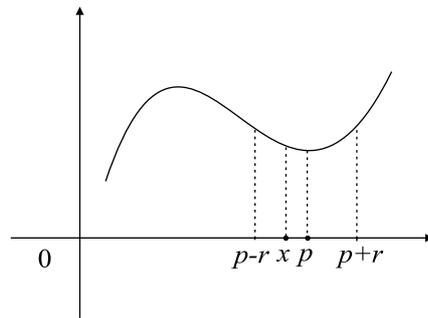


Fig. 6.8

Usa-se o termo *extremo local* para designar tanto o máximo como o mínimo local.

Um ponto de máximo (mínimo) local p é dito estrito se $f(x) < f(p)$ ($f(x) > f(p)$) para todo x nas condições acima.

Devemos observar também que uma função pode atingir vários máximos ou mínimos locais, conforme indicado nas figura 6.9.

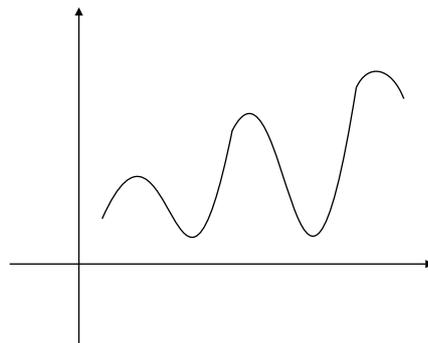


Fig. 6.9

Temos o seguinte teorema.

Teorema 11. *Se f possuir extremo local em um ponto p , então f não será derivável neste ponto ou $f'(p)$ existirá e será igual a zero.*

Geometricamente, a função f deixa de ser derivável em um dado ponto p pertencente ao seu domínio se a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$ ou é vertical ou não está definida. Veja figuras 6.10(a), 6.10(b) e 6.10(c).

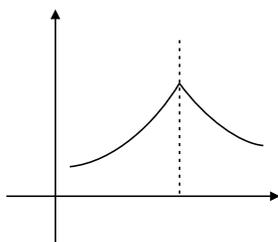


Fig. 6.10(a)

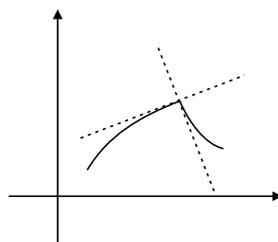


Fig. 6.10(b)

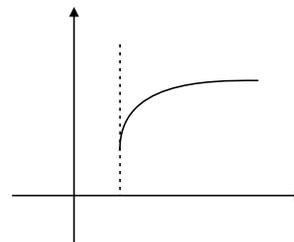


Fig. 6.10(c)

De maneira mais geral do que foi dito anteriormente, diz-se que p é um *ponto crítico* da função f se f não for derivável em p ou $f'(p)$ existir e for igual a zero. O teorema acima nos diz que se a função atingir extremo local em um ponto p , ele será crítico. No entanto, deve-se observar que o ponto pode ser crítico mas não ser extremo, como é o caso do ponto $x = 0$ na função $f(x) = x^3$. Note que $f'(0) = 0$ mas 0 não é ponto nem de máximo nem de mínimo. Veja figura 6.11.

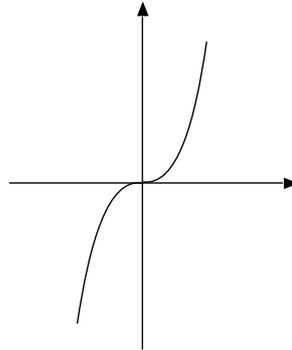


Fig. 6.11

Para decidir se um ponto crítico é de máximo ou de mínimo local podemos nos valer de alguns testes. Exibiremos dois deles.

Teorema 12. (Teste da primeira derivada) *Seja p um ponto crítico de f e suponha que exista $r > 0$ tal que $f'(x) > 0$ se $x \in (p - r, p)$ e $f'(x) < 0$ se $x \in (p, p + r)$, então p é ponto de máximo local. Se $f'(x) < 0$ se $x \in (p - r, p)$ e $f'(x) > 0$ se $x \in (p, p + r)$, então p é ponto de mínimo local.*

Observe as figuras 6.12(a) e 6.12(b) a seguir.

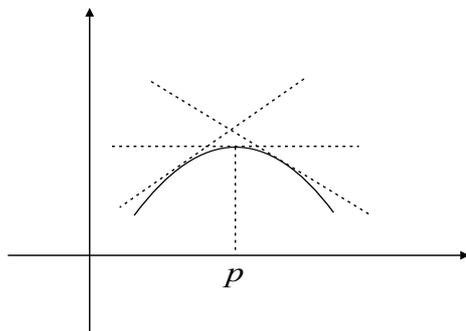


Fig. 6.12(a)

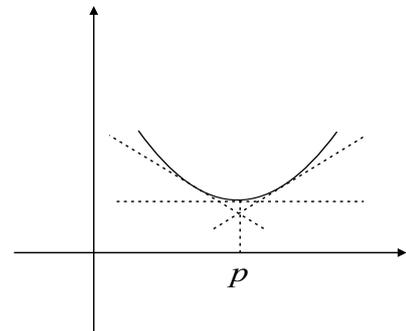


Fig. 6.12(b)

Exemplo 50. Consideremos a função $f(x) = x^2$ definida em toda a reta real \mathbb{R} e observemos que seu único ponto crítico é $x = 0$. Além disso, $f'(x) = 2x$ que é negativa se $x < 0$ e é positiva se $x > 0$, ou seja, antes do

ponto crítico a derivada é negativa e depois do ponto crítico a derivada é positiva. Assim, usando o teste da primeira derivada, verifica-se que 0 é ponto de mínimo local. No caso em questão ele é de fato mínimo global e tal função não possui máximo local nem global.

Exemplo 51. A função $f(x) = |x|$ não é derivável apenas em $x = 0$, nos demais pontos, ela é derivável e a derivada é sempre diferente de zero. Deste modo, $x = 0$ é o único ponto crítico de f e, como é fácil de ver, é ponto de mínimo global.

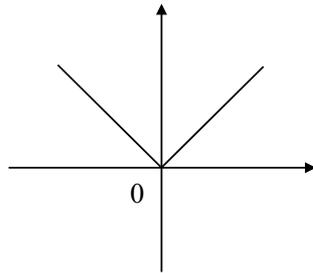


Fig. 6.13

Antes de prosseguirmos com mais exemplos, enunciemos o teste da derivada segunda.

Teorema 13. (Teste da derivada segunda) *Seja p um ponto crítico de f e suponha que $f''(p)$ exista e seja não-nula. Então f possui um extremo local em p . Se $f''(p) > 0$ tal ponto será de mínimo local e se $f''(p) < 0$ tal ponto será de máximo local.*

Observação 6. Se $f''(p) = 0$, a função poderá ter ou não extremo local. Por exemplo, se $f(x) = x^3$, a derivada segunda de f é $f''(x) = 6x$ e assim $f''(0) = 0$ e a função não possui nem máximo nem mínimo local em 0, pois ela é sempre crescente em \mathbb{R} . Porém, se considerarmos a função $f(x) = x^4$, teremos que $f''(x) = 12x^2$ e deste modo tem-se que $f''(0) = 0$ e vê-se que 0 é ponto de mínimo estrito (global), pois $f(0) = 0$ e $f(x) > 0$ se $x \neq 0$. Veja figuras 6.14(a) e 6.14(b).

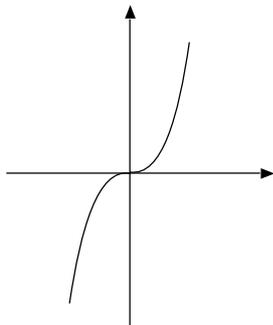


Fig. 6.14(a)

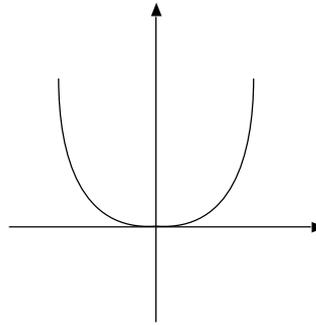


Fig. 6.14(b)

Exemplo 52. Encontremos os extremos locais da função

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3.$$

Inicialmente observemos que essa função é derivável pois é um polinômio. Determinemos seus pontos críticos. Sua derivada é

$$\begin{aligned} f'(x) &= 15x^4 - 15x^2 \\ &= 15x^2(x^2 - 1) \\ &= 15x^2(x - 1)(x + 1) \end{aligned}$$

e seus pontos críticos são obtidos fazendo $f'(x) = 0$. Assim, tais pontos são as raízes da equação

$$15x^2(x - 1)(x + 1) = 0$$

que são $x = -1, 0, 1$. Usemos o teste da derivada segunda. Como

$$f''(x) = 60x^3 - 30x$$

tem-se que

$$f''(-1) = -30 < 0, \quad f''(0) = 0, \quad f''(1) = 30 > 0$$

Pelo teste da derivada segunda $x = -1$ é ponto de máximo local, ao passo que $x = 1$ é ponto de mínimo local. Como a derivada segunda de f em $x = 0$ se anula, não podemos usar tal teste. No entanto, deve-se observar, analisando a derivada primeira

$$f'(x) = 15x^2(x^2 - 1)$$

que ela é negativa para $-1 < x < 1$, ou seja, a função f é decrescente nesse intervalo, e assim em $x = 0$ a função não atinge nem máximo nem mínimo.

Para concluir, devemos observar que a função em estudo não possui nem máximo nem mínimo global, pois

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

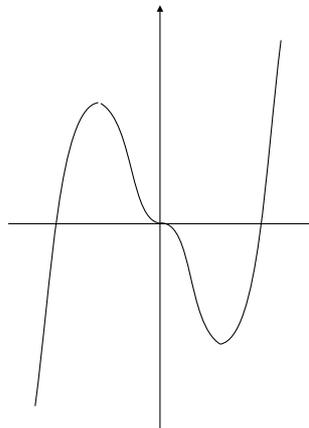


Fig. 6.15

Exemplo 53. Encontremos os extremos globais da função

$$f(x) = x^2 - 4x + 6$$

no intervalo $[-3, 10]$.

Inicialmente, observemos que tal f é contínua no intervalo fechado e limitado $[-3, 10]$. Assim sendo, essa função atinge máximo e mínimo em $[-3, 10]$. Esses extremos são atingidos nos pontos críticos de f que estejam no interior do intervalo $[-3, 10]$ ou em suas extremidades -3 e 10 . Calculemos os pontos críticos que estejam situados no interior do intervalo $[-3, 10]$. Como $f'(x) = 2x - 4$ seu único ponto crítico é $x = 2$. Desde que $f''(x) = 2 > 0$ tem-se que tal ponto crítico é de mínimo local. Os outros candidatos a extremo são $x = -3$ e $x = 10$. Como

$$f(-3) = 27, f(2) = 2, f(10) = 66$$

segue-se que 2 é ponto de mínimo e 10 é ponto de máximo.

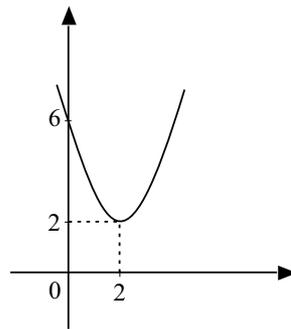


Fig. 6.16

Os dois exemplos acima sugerem certas regras que nos auxiliam na análise do comportamento de funções.

Caso 1. f está definida em toda a reta real \mathbb{R} . Nesse caso devemos proceder da seguinte maneira:

1. Determinar os pontos críticos de f .
2. Determinar os valores críticos de f .
3. Determinar o sinal de $f'(x)$ entre os pontos críticos.
4. Determinar os zeros de f .
5. Analisar o comportamento de f quando x tende para $\pm\infty$.

Antes de prosseguirmos, cabe uma observação. Dada uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ os pontos $x \in I$ tais que $f(x) = 0$ são chamados *zeros* da função f . No caso particular em que f é um polinômio tais zeros são chamados *raízes* de f .

Caso 2. f está definida em um intervalo fechado $[a, b]$.

1. Verifique se f é contínua em $[a, b]$.
2. Se no item 1 a resposta for afirmativa, isso significará que f possuirá extremo global em $[a, b]$.
3. Esses extremos são atingidos ou em pontos críticos de f situados no intervalo aberto (a, b) ou em a ou em b .
4. Determinar os valores críticos de f , ou seja, os valores atingidos por f em seus pontos críticos.
5. Determinar os valores de f nas extremidades a e b .
6. Comparar os valores obtidos nos itens 4 e 5. O maior será o máximo global e o menor o mínimo global.

4 Concavidade e pontos de inflexão

Seja f uma função contínua em um intervalo I e derivável em um ponto p pertencente ao interior de I . Seja $y = T(x)$ a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ em um ponto com abscissa p . Um cálculo elementar mostra que a equação da reta tangente ao gráfico da função f , no ponto $(p, f(p))$, é dada por

$$y = T(x) = f'(p)(x - p) + f(p)$$

Se $f(x) > T(x)$ para $x \in (p - \epsilon, p + \epsilon) - \{p\}$, para algum $\epsilon > 0$, então, para x neste conjunto, o gráfico de $y = f(x)$ está acima da reta tangente ao referido gráfico em p , conforme mostra a figura 6.17.

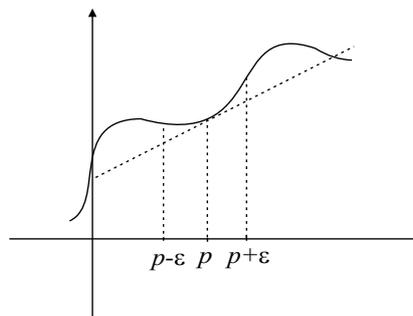


Fig. 6.17

Diz-se então que f é *côncava para cima* em p .

Analogamente, se $f(x) < T(x)$ em um conjunto como acima, teremos que o gráfico de $y = f(x)$ está abaixo da reta tangente ao referido gráfico em p . Vide figura 6.18.

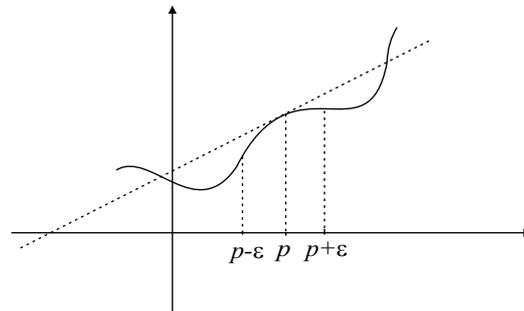


Fig. 6.18

Diz-se então que f é *côncava para baixo*.

Diz-se que p é *ponto de inflexão* do gráfico da função $y = f(x)$ quando existir $\epsilon > 0$ tal que: se $x \in (p - \epsilon, p)$ então $f(x) > T(x)$ e $x \in (p, p + \epsilon)$ então $f(x) < T(x)$ ou $x \in (p - \epsilon, p)$ então $f(x) < T(x)$ e $x \in (p, p + \epsilon)$ então $f(x) > T(x)$. Estas condições nos dizem que p é ponto de inflexão se o gráfico de $y = f(x)$ mudar de concavidade em $(p, f(p))$. Veja as figuras 6.19 onde são ilustradas várias situações que podem ocorrer.

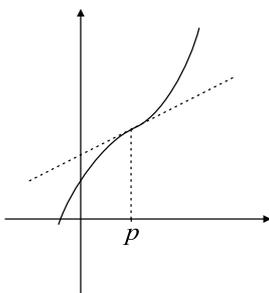


Fig. 6.19(a)

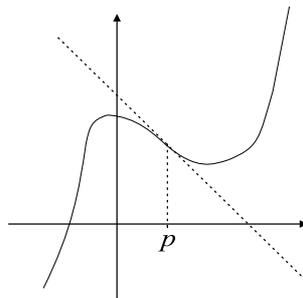


Fig. 6.19(b)

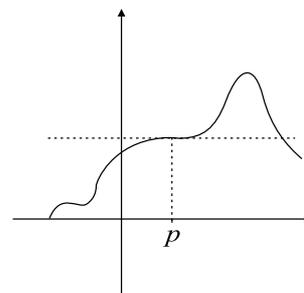


Fig. 6.19(c)

Pode-se verificar a concavidade do gráfico de uma função usando algumas regras que serão enunciadas a seguir.

Regra 5. Se $f''(p)$ existir e for positiva, então f' será crescente em algum intervalo aberto contendo p , e assim f será côncava para cima em p .

Regra 6. Se $f''(p)$ existir e for negativa, então f' será decrescente em algum intervalo aberto contendo p , e assim f será côncava para baixo em p .

Regra 7. Se f possuir um ponto de inflexão em p , então ou $f''(p)$ não existirá ou $f''(p)$ existirá e será igual a zero.

Regra 8. Suponhamos que f'' exista em um conjunto da forma $(p - \epsilon, p + \epsilon) - \{p\}$, para algum $\epsilon > 0$, que ou $f''(p)$ não exista ou $f''(p)$ exista e seja igual a zero e que f'' mude de sinal ao passar por p . Então p é ponto de inflexão de f .

Regra 9. Se $f''(p) = 0$ e se a terceira derivada $f'''(p)$ existir e for diferente de zero, então p será ponto de inflexão de f .

Exemplo 54. Encontremos os pontos de inflexão e analisemos a concavidade da função

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x - 4.$$

Observemos que $f''(x)$ existe, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$. Portanto, pela Regra 3, os candidatos a pontos de inflexão de f são as raízes da equação

$$f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x - 1)$$

que são os pontos $x = 0$ e $x = 1$. Pelas Regras 1 e 2, f é côncava para cima no intervalo $(-\infty, 0)$ pois $f''(x) > 0$ se $x < 0$, côncava para baixo no intervalo $(0, 1)$, pois $f''(x) < 0$ se $0 < x < 1$, e côncava para cima no intervalo $(1, +\infty)$, pois $f''(x) > 0$ se $x > 1$. Portanto, $x = 0$ e $x = 1$ são ambos pontos de inflexão de f .

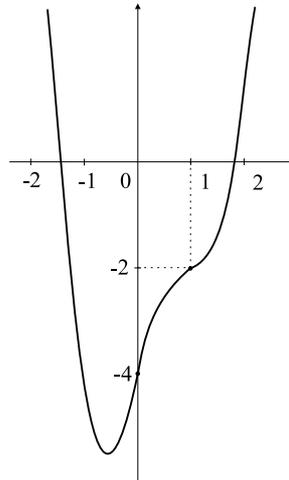


Fig. 6.20

5 Exercícios resolvidos

1. Verifique se é possível aplicar o teorema de Rolle à função $f(x) = x^2 - 2x - 3$ no intervalo $[-1, 3]$.

Solução. Inicialmente observemos que f é contínua em $[-1, 3]$ e derivável no intervalo aberto $(-1, 3)$. Na verdade, f é derivável no intervalo fechado $[-1, 3]$ sendo que em -1 pode-se calcular apenas a derivada lateral à direita, ao passo que em 3 é possível apenas calcular a derivada lateral à esquerda. Além disso, $f(-1) = f(3) = 0$. Fazendo $f'(x) = 0$, obtemos $x = 1$. Assim, $f'(1) = 0$ e $-1 < 1 < 3$.

2. Verifique que o teorema de Rolle não se aplica à função

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 1}$$

em $[-2, 3]$.

Solução. Basta observar que a função não está definida em $x = 1$ e $1 \in [-2, 3]$. Logo, no intervalo $[-2, 3]$, o teorema de Rolle não é aplicável.

3. Verifique se o teorema de Rolle se aplica à função $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}}$ no intervalo $[0, 8]$.

Solução. Inicialmente observemos que f é contínua em $[0, 8]$ e derivável em $(0, 8)$ (f não é derivável em 0). Também, $f(0) = f(8) = 0$ e então o teorema de Rolle se aplica. Desde que $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ fazendo $f'(x) = 0$, encontramos $x = 1$, o qual está entre 0 e 8 .

4. Aplique o teorema do valor médio à função $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$ no intervalo $[2, 5]$.

Solução. Inicialmente observemos que a função f é derivável no intervalo $[2, 5]$. Além disso, $f'(x) = 6x - 5$. Pondo

$$6c - 5 = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{51 - 3}{3} = 16$$

de modo que $c = \frac{7}{2}$, o qual está entre 2 e 5 .

6 Exercícios propostos

1. A função f é côncava para cima em p se ela possuir mínimo local estrito em p e côncava para baixo em p se ela possuir máximo local estrito em p . Verdadeiro ou falso?
2. Encontre os pontos de inflexão e analise a concavidade da função

$$y = f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 2x + 2.$$

3. Encontre os pontos de inflexão e analise a concavidade da função

$$y = f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 3a^2}$$

em, que a é uma constante.

4. Para que valores de c a função $y = x^3 + cx^2 + 1$ possui um ponto de inflexão em $x = 1$.
5. Consideremos a função

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 1.$$

Determine:

- (a) Os pontos críticos de f .
 - (b) Os pontos que anulam $f''(x)$.
 - (c) Os pontos críticos que são de máximo ou de mínimo.
 - (d) Os pontos de inflexão de f .
6. Determine as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão da função

$$y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12.$$

7. Prove que toda função polinomial da forma

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ com } a \neq 0$$

possui um único ponto de inflexão e determine sua abscissa.

7 Respostas dos exercícios propostos

1. Falso. Tome, por exemplo,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ x - 1 & \text{se } x > 1 \\ -x - 1 & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

e $p = 0$.

2. $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$ são pontos de inflexão de f . No intervalo $(-\infty, -\frac{1}{2})$ f é côncava para cima, no intervalo $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ f é côncava para baixo e no intervalo $(\frac{1}{2}, +\infty)$ f é côncava para cima.
3. Se $a = 0$ então f não tem pontos de inflexão e não é côncava para baixo e nem para cima em nenhum intervalo. Se $a \neq 0$ então 0 , $-3a$ e $3a$ são os pontos de inflexão de f . Se $a > 0$ então f é côncava para cima em $(-\infty, -3a)$, é côncava para baixo em $(-3a, 0)$, é côncava para cima em $(0, 3a)$ e é côncava para baixo em $(3a, +\infty)$. Se $a < 0$ então f é côncava para cima em $(-\infty, 3a)$, é côncava para baixo em $(3a, 0)$, é côncava para cima em $(0, -3a)$ e é côncava para baixo em $(-3a, +\infty)$.
4. -3
5. (a) $1, \frac{5}{2}$
 (b) $1, 2$
 (c) $\frac{5}{2}$
 (d) $1, 2$
6. 1
7. A segunda derivada função $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ é dada por $f''(x) = 6ax + 2b$. Essa segunda derivada tem um único zero, a saber, $-\frac{b}{3a}$. Além disso, f'' é uma função afim, logo ela tem sinais contrários nos intervalos $(-\infty, -\frac{b}{3a})$ e $(-\frac{b}{3a}, +\infty)$, o que implica que a concavidade de f nesses intervalos tem nomes contrários. Portanto, $-\frac{b}{3a}$ é o único ponto de inflexão de f .

Nesta aula você aprendeu:

- o teorema do valor médio e algumas aplicações;
- a determinar os pontos de máximo e de mínimo de certas funções.
- a determinar a concavidade e os pontos de inflexão de certas funções.

8 Apêndice

Michel Rolle

Michel Rolle foi um matemático francês, nascido em Ambert, Basse-Auvergne, a 21 de abril de 1652 e falecido em Paris, a 8 de novembro de 1719. Rolle possuía uma pequena educação formal, sendo, principalmente, um autodidata. Inicialmente, ele trabalhou em Ambert e vizinhanças como assistente de advogados, e em 1675 dirigiu-se a Paris, onde trabalhou como escriturário e especialista em Aritmética.

Foi eleito para a Academia Real de Ciências, em 1685, e tornou-se Pensionnaire Géometre da Academia em 1699.

Rolle trabalhou em Análise Diofantina, Álgebra e Geometria e publicou um trabalho, *Traité d'algèbre*, sobre a teoria das equações. No entanto, ele é mais conhecido pelo *Teorema de Rolle*, enunciado nesta aula, que foi inicialmente publicado, em 1691, em um livro pouco divulgado.

Aula 7

Aplicações da derivada

Objetivos

- Aplicar a derivada em problemas de taxas relacionadas.
- Aplicar a derivada em problemas de otimização.
- Aplicar a derivada em construção de gráficos de funções.

Esta aula será dedicada ao estudo de várias aplicações práticas do conceito de derivada, o que servirá de amostra da importância do Cálculo Diferencial na análise de questões oriundas da Física, Economia, etc.

1 Taxas relacionadas

Começaremos as aplicações com as chamadas *Taxas Relacionadas*. Nesses problemas são dadas as taxas de variação de uma determinada quantidade com respeito a uma certa variável (usualmente o tempo) e pede-se para determinar a taxa de variação daquela quantidade com respeito a outra variável. Neste ponto, devemos lembrar que a entidade matemática que mede taxas de variação é exatamente a derivada. Veja aula 5.

O que foi dito acima será perfeitamente entendido por meio dos exemplos que serão exibidos a seguir.

Exemplo 55. Consideremos um círculo de raio r e designemos por A a sua área. Suponhamos que r cresça com o tempo t . Observemos que $A = \pi r^2$ e sendo r uma função do tempo t teremos que A também depende de t e assim podemos calcular a taxa de variação de A com relação ao tempo t . Para isso usaremos a *regra da cadeia* que nos fornece

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}.$$

Suponhamos que, em certo instante, o raio seja igual a 5 cm e esteja crescendo a uma taxa de 10 cm/s. Podemos, então, determinar a taxa de variação da área A com relação ao tempo nesse instante, por meio da expressão acima, para obter

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \cdot \frac{dr}{dt}$$

e assim

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi 5 \cdot 10 \text{ cm}^2/\text{s} = 100\pi \text{ cm}^2/\text{s}^2$$

Exemplo 56. Um tanque cilíndrico de raio igual a 10 m está sendo abastecido com água a razão de $314 \text{ m}^3/\text{min}$. Encontremos a taxa de variação da altura da água.

Solução. Seja V o volume de água contida no tanque, no tempo t . Então $V = \pi(10)^2 h$. Assim,

$$\frac{dV}{dt} = 100\pi \cdot \frac{dh}{dt}$$

Como $\frac{dV}{dt} = 314 \text{ m}^3/\text{min}$, teremos que $314 = 100\pi \cdot \frac{dh}{dt}$ e daí $\frac{dh}{dt} = \frac{314}{100\pi}$ e aproximando π por 3,14 obtém-se que $\frac{dh}{dt} = 1$. Portanto, a altura da água está crescendo a uma taxa de 1 m/min.

Exemplo 57. Um foguete está subindo verticalmente com velocidade inicial de 400 m/s. Sua altura s , após t segundos, é dada por $s = 400t - 16t^2$. Encontremos a taxa de variação da distância do foguete a um observador que se encontra no solo a uma distância de 1800 m do local de lançamento, quando o foguete encontra-se subindo e está a 2400 m do local de lançamento.

Seja u a distância do foguete ao observador, conforme figura 7.1.

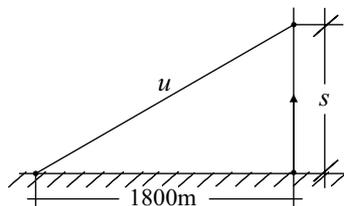


Fig. 7.1

Usando o teorema de Pitágoras, obtém-se $u^2 = s^2 + (1800)^2$. Portanto, $2u \frac{du}{dt} = 2s \cdot \frac{ds}{dt}$, e assim

$$u \cdot \frac{du}{dt} = s \cdot \frac{ds}{dt}$$

Quando $s = 2400$, temos que $u^2 = (2400)^2 + (1800)^2$, logo $u = 3000$. Desde que $s = 400t - 16t^2$, quando $s = 2400$, tem-se que $2400 = 400t - 16t^2$, ou seja, $t^2 - 25t + 150 = 0$, ou ainda $(t - 10)(t - 15) = 0$. Assim, o foguete está a 2400 m do solo quando $t = 10$ s. Mas, $\frac{ds}{dt} = 400 - 32t$. Logo, quando $t = 10$ s, $\frac{ds}{dt} = 400 - 32 \cdot 10 = 80$. Substituindo em $u \cdot \frac{du}{dt} = s \cdot \frac{ds}{dt}$, obtemos $3000 \cdot \frac{du}{dt} = 2400 \cdot 80$, de onde segue que $\frac{du}{dt} = 64$. Então a distância do foguete ao observador cresce a uma taxa de 64 m/s quando $t = 10$ s.

Exemplo 58. Um objeto se move ao longo do gráfico de $y = f(x)$. Em um certo ponto, a inclinação da reta tangente à curva é $\frac{1}{2}$ e a abscissa x do objeto está decrescendo a uma taxa de 3 unidades por segundo. Naquele ponto, qual a velocidade com que a ordenada y está variando?

Como $y = f(x)$, usando a regra da cadeia, teremos

$$\frac{dy}{dt} = f'(x) \cdot \frac{dx}{dt}$$

Desde que $f'(x)$ é igual a $\frac{1}{2}$ e $\frac{dx}{dt} = -3$, no ponto em questão, segue-se que $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} \cdot (-3) = -\frac{3}{2}$.

Exemplo 59. Uma partícula está movendo-se ao longo da curva $y = x^2 + 2x$. Em qual (ou quais) ponto (ou pontos) as coordenadas x e y da partícula se deslocam com a mesma taxa de variação?

Temos que

$$\frac{dy}{dt} = 2x \cdot \frac{dx}{dt} + 2 \cdot \frac{dx}{dt}$$

Quando $\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt}$ teremos $2x + 2 = 1$, logo $2x = -1$. Portanto, $x = -\frac{1}{2}$ e $y = -\frac{3}{4}$.

Exemplo 60. Dois lados de um triângulo medem 15 cm e 20 cm. Com que velocidade o terceiro lado está crescendo quando o ângulo α entre os lados dados acima mede 60° e está crescendo a uma velocidade de 2° por segundo?

Designemos por x a medida do terceiro lado do triângulo. Usando a lei dos cossenos,

$$x^2 = (15)^2 + (20)^2 - 2 \cdot 15 \cdot 20 \cdot \cos \alpha$$

Portanto, $2x \frac{dx}{dt} = 600 (\sin \alpha) \frac{d\alpha}{dt}$, ou seja, $x \frac{dx}{dt} = 300 \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt}$. Como foi dito $\frac{d\alpha}{dt} = 2 \left(\frac{\pi}{180} \right) = \frac{\pi}{90}$ rad/s. (Observemos que devemos transformar a

medida do ângulo para radiano.) Quando $\alpha = 60^\circ$, temos que $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, logo $x^2 = 225 + 400 - 600 \frac{1}{2} = 325$, $x = 5\sqrt{13}$. Portanto, $5\sqrt{13} \cdot \frac{dx}{dt} = 300 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\pi}{90}\right)$. Assim $\frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{\sqrt{39}}$ cm/s.

2 Problemas de otimização

Outro tipo de problema que mostra a utilidade prática da derivada são os chamados *problemas de otimização* que consistem, grosso modo, em determinar máximos e mínimos de funções. Os exemplos a seguir e os exercícios propostos darão ao estudante uma excelente idéia dos tipos de questões que podem ser abordadas usando técnicas de derivação desenvolvidas nas aulas precedentes.

Exemplo 61. Dentre todos os retângulos de mesmo perímetro, determinemos o de maior área.

Sejam x e y as dimensões de um retângulo cujo perímetro P seja fixado. Assim, $2x + 2y = P$ e sua área A é dada por $A = xy$. Explicitando y em função de x , obtemos $y = \frac{P - 2x}{2}$ e daí

$$A = x \frac{P - 2x}{2} = \frac{1}{2}x(P - 2x)$$

ou seja, A é uma função da variável x que satisfaz $0 < x < P/2$. De $A(x) = \frac{1}{2}(Px - 2x^2)$ obtém-se $A'(x) = \frac{1}{2}(P - 4x)$ e $A''(x) = -2$. Desse modo, o único ponto crítico da função $A(x)$, $x = \frac{P}{4}$, é ponto de máximo pois $A''(x) < 0$. Sendo $x = \frac{P}{4}$ segue-se que $y = \frac{P}{4}$, de onde se conclui que, dentre todos os retângulos de perímetro fixado, o que envolve a maior área é o quadrado.

Exemplo 62. Uma página impressa deve conter 60 cm^2 de matéria impressa. As margens laterais devem medir 5 cm e as margens superior e inferior devem medir 3 cm. Vamos determinar as dimensões do material impresso a fim de minimizar a área do papel a ser usado.

Sejam x e y , respectivamente, as dimensões do material impresso, conforme está indicado na figura 7.2.

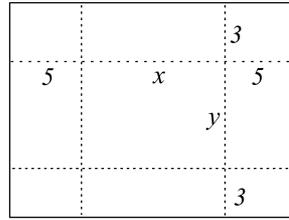


Fig. 7.2

Assim, $xy = 60$. A quantidade total de papel é dada por $A = (x + 10)(y + 6) = (x + 10)(\frac{60}{x} + 6) = 6(10 + x + \frac{100}{x} + 10) = 6(20 + x + \frac{100}{x})$, em que x é um número positivo qualquer. Como $A'(x) = 6(1 - \frac{100}{x^2})$, o único ponto crítico desta função é $x = 10$, pois x assume apenas valores positivos. Além disso, $A''(x) = \frac{1200}{x^3}$, que é sempre positiva em virtude de $x > 0$. Então $x = 10$ é ponto de mínimo absoluto pois é o único ponto crítico de A . Daí, como $xy = 60$ segue-se que $y = 6$. Portanto, as dimensões que produzem o mínimo de papel a ser utilizado são $x = 10\text{cm}$ e $y = 6\text{cm}$.

Exemplo 63. Encontremos dois números não-negativos x e y cuja soma seja 300 e para os quais x^2y é máximo.

Por hipótese temos que $x + y = 300$. O produto $P = x^2y$ pode ser escrito em função apenas de x como $P(x) = x^2(300 - x) = 300x^2 - x^3$, pois $y = 300 - x$. Desse modo, $0 \leq x \leq 300$ e como a função P é contínua ela atinge máximo e mínimo no intervalo $[0, 300]$. Tais extremos são atingidos ou em $x = 0$ ou em $x = 300$ ou no(s) ponto(s) crítico(s) de P que esteja(m) contido(s) no intervalo aberto $(0, 300)$. Determinemos o(s) ponto(s) crítico(s) de P . Temos que $P'(x) = 600x - 3x^2$. Assim, o único ponto crítico de P no intervalo $(0, 300)$ é $x = 200$. Observemos que $x = 0$ também anula a primeira derivada de P . No entanto, estamos interessados apenas naqueles pontos que estejam no intervalo aberto $(0, 300)$. Testemos os valores de P nos pontos 0, 200, 300.

x	0	200	300
$P(x)$	0	$4 \cdot 10^6$	0

Segue-se daí que o valor máximo de P é $4 \cdot 10^6$ e é atingido em $x = 200$ e o correspondente valor de y é 100.

Exemplo 64. Um retângulo é inscrito na elipse

$$\frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{225} = 1$$

com seus lados paralelos aos eixos da elipse. Veja Fig. 7.3.

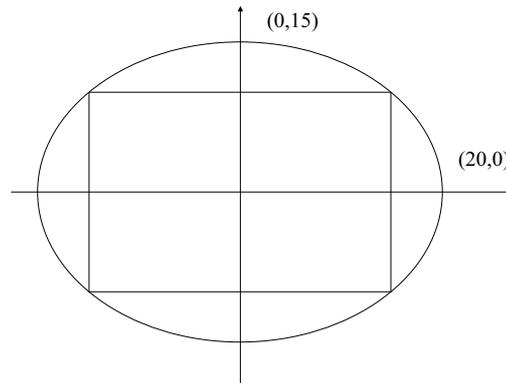


Fig. 7.3

Encontremos as dimensões do retângulo de perímetro máximo que pode ser assim inscrito.

Consideremos (x, y) um ponto do primeiro quadrante e y como função de x . Derivando ambos os membros da equação da elipse com relação a x , tomando y como função de x , obtemos

$$\frac{x}{200} + \frac{2y}{225} \frac{dy}{dx} = 0,$$

em que usamos a regra da cadeia para derivar y^2 , considerando y como função de x . Portanto,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{9x}{16y}$$

Como o perímetro P é dado por $P = 4x + 4y$, tem-se que

$$\frac{dP}{dx} = 4 + 4 \frac{dy}{dx} = 4 \left(1 - \frac{9x}{16y}\right) = 4 \frac{16y - 9x}{16y}.$$

Também, $\frac{d^2P}{dx^2} = -\frac{9}{4} \frac{\left[y - x \left(\frac{-9x}{16y}\right)\right]}{y^2} = -\frac{9}{4} \frac{16y^2 + 9x^2}{16y^3} < 0$. Resolvendo $\frac{dP}{dx} = 0$ obtemos $16y = 9x$ e então, substituindo na equação da elipse, encontramos $x^2 = 256$, de onde segue que $x = 16$ e $y = 9$. Desde que a segunda derivada de f é negativa, este único ponto crítico produz o perímetro máximo.

Exemplo 65. Encontre um número positivo x que excede seu quadrado pelo maior valor possível.

Devemos analisar a função $f(x) = x - x^2$ em que x é um número positivo. Então $f'(x) = 1 - 2x$ e $f''(x) = -2$. Portanto, o único ponto crítico de f é $x = \frac{1}{2}$. Desde que a derivada segunda é negativa, seu único ponto crítico produz um máximo absoluto.

Exemplo 66. Duas cidades A e B estão, respectivamente, a a km e a b km de uma estrada, conforme figura 7.4.

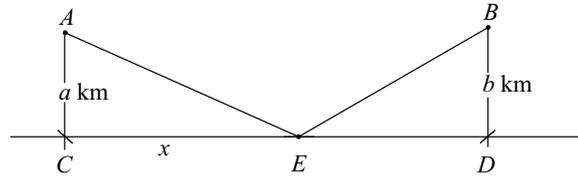


Fig. 7.4

Os pontos C e D sobre a estrada são os que estão mais próximos de A e B , respectivamente, e estão a uma distância de c km um do outro. Uma estação E está localizada na estrada de modo que a soma das distâncias de A e B a E é mínima. Encontre a posição de E .

Seja x a distância de E a C . Então a soma das distâncias de A e B a E é dada pela função $f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c - x)^2}$. Portanto,

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}.$$

Fazendo $f'(x) = 0$ obtemos

$$x = \frac{ac}{a + b}.$$

Para verificar que tal valor produz um mínimo global, calculemos $f''(x)$. Um cálculo simples, porém longo, nos dá

$$f''(x) = \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{b^2}{[b^2 + (c - x)^2]^{3/2}}$$

que é positivo. Então, o ponto crítico obtido é de mínimo.

3 Traçado de gráficos

Dada uma função, é interessante e instrutivo representá-la graficamente por meio de uma curva plana constituída por pontos da forma $(x, f(x))$, em que x pertence ao domínio da função f . Essa representação é importante pois, por meio dela, pode-se fazer a análise do comportamento de f , ou seja, quando ela cresce ou decresce, seus pontos de máximo e de mínimo, seu comportamento em $+\infty$ e $-\infty$, determinação de assíntotas, etc. Pode-se dizer que o gráfico de f é a sua fotografia, compreendida até mesmo por pessoas que nunca tenham estudado Cálculo.

Para o traçado de gráficos, estabeleceremos algumas passos que, muito embora não sejam algo dogmático, ajudarão o aluno, principalmente o iniciante, a ter sucesso neste desiderato. Desde já, aconselhamos o estudante a resolver o maior número possível de exemplos, pois é por meio deles que se ganha excelência neste assunto.

Eis os passos para traçarmos o gráfico de uma função $y = f(x)$.

Passo 1. Caso zero pertença ao domínio de f , calcule $f(0)$, ou seja, determine o ponto em que o gráfico de f intersecta o eixo oy .

Passo 2. Determine, se possível, os pontos nos quais o gráfico de f intersecta o eixo ox . Tais pontos são chamados zeros de f . Deve-se observar que nem sempre tal empreitada é simples ou até mesmo possível.

Passo 3. Determine $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Passo 4. Caso a não pertença ao domínio de f , mas seja extremidade de intervalos que compõe o domínio, calcule os limites laterais de f em a .

Passo 5. Determine, caso existam, as assíntotas do gráfico de f . Isto acontece normalmente quando f possui alguma singularidade.

Passo 6. Calcule a derivada $f'(x)$.

Passo 7. Determine os pontos críticos de f , ou seja, os valores de x tais que $f'(x) = 0$.

Passo 8. Determine os intervalos onde f cresce e onde ela decresce. Para isto, deve-se determinar os valores de x para os quais $f'(x) > 0$ ou $f'(x) < 0$.

Passo 9. Determine $f''(x)$.

Passo 10. Determine os pontos x tais que $f''(x) = 0$.

Passo 11. Determine os valores de x para os quais $f''(x) > 0$ ou $f''(x) < 0$. Dessa maneira encontraremos as regiões de concavidade da curva.

Exemplo 67. Consideremos o trinômio do segundo grau

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ onde } a \neq 0$$

e tracemos seu gráfico.

Seguindo o roteiro acima, temos que $f(0) = c$ e assim o gráfico de f intersecta o eixo oy no ponto $(0, c)$. Verifiquemos o comportamento de f em $-\infty$ e $+\infty$. Para isto, observemos que $f(x)$ pode ser escrita como

$$f(x) = x^2 \left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} \right)$$

e desde que $\frac{b}{x}$ e $\frac{c}{x^2}$ tendem a zero quando $x \rightarrow \pm\infty$ teremos que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty \text{ se } a > 0$$

ou

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty \text{ se } a < 0.$$

A derivada de f é $f'(x) = 2ax + b$. Portanto, o único ponto crítico de f é $x = -\frac{b}{2a}$, ou seja, tal ponto é o único que anula a derivada de f .

Estudemos o sinal de $f'(x)$. Suponhamos, inicialmente, que $a > 0$. Assim, $f'(x) = 2ax + b > 0$ se, e somente se, $x > -\frac{b}{2a}$, ou seja, f é crescente no intervalo $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$. Analogamente, prova-se que f é decrescente em $(-\infty, -\frac{b}{2a})$. Daí, conclui-se que o único ponto crítico $-\frac{b}{2a}$ é de mínimo. Se $a < 0$ tem-se que tal ponto crítico é de máximo. Se quiséssemos usar o teste da derivada segunda, teríamos que calcular $f''(x) = 2a$. Essa derivada será positiva se $a > 0$ e, neste caso, o ponto crítico será de mínimo, pois $f''(x) > 0$, e se $a < 0$ o ponto crítico será de máximo pois $f''(x) < 0$. O valor do máximo (ou mínimo) é dado por

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Os possíveis perfis do gráfico de f são esboçados nas figuras 7.5 a seguir.

$a > 0$ e $b^2 - 4ac < 0$

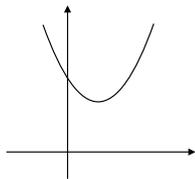


Fig. 7.5(a)

$a > 0$ e $b^2 - 4ac = 0$

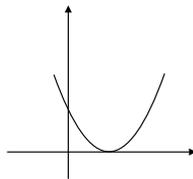


Fig. 7.5(b)

$a > 0$ e $b^2 - 4ac > 0$

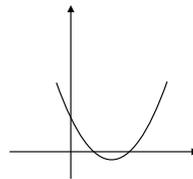


Fig. 7.5(c)

$a < 0$ e $b^2 - 4ac < 0$

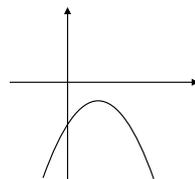


Fig. 7.5(d)

$a < 0$ e $b^2 - 4ac = 0$

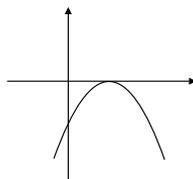


Fig. 7.5(e)

$a < 0$ e $b^2 - 4ac > 0$

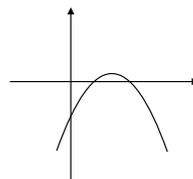


Fig. 7.5(f)

Exemplo 68. Consideremos a função

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

que, evidentemente, está definida somente para valores de x que sejam diferentes de zero. Claramente, $f(x) > 0$ se $x > 0$ e $f(x) < 0$ se $x < 0$ e assim o gráfico de tal função estará contido nos primeiro e terceiro quadrantes. Verifiquemos o comportamento de f nas proximidades de $x = 0$.

Quando $x \rightarrow 0^+$ teremos que $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$. Analogamente, se $x \rightarrow 0^-$ teremos que $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$.

Também,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Dessas observações segue-se que os eixos coordenados ox e oy são assíntotas do gráfico de f .

A derivada de f é dada por $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ e assim f não possui pontos críticos, sendo decrescente nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$.

Para analisarmos a concavidade de f , usamos a sua derivada segunda que é dada por $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ e daí f é côncava para cima se $x > 0$ e côncava para baixo se $x < 0$.

Do desenvolvido acima chega-se à conclusão de que o gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ é representado pela figura 7.6 a seguir.

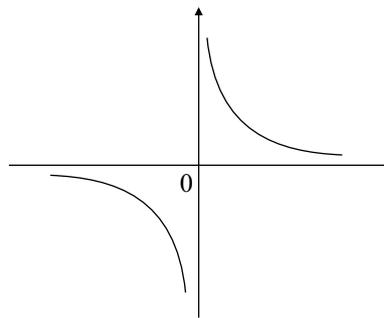


Fig. 7.6

Exemplo 69. Consideremos a função

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Inicialmente observemos que $f(0) = 0$, o que nos diz que o gráfico de f passa pela origem $(0, 0)$.

Analisemos o comportamento de f no infinito, ou seja, calculemos $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$. Para isto, devemos observar que, se fizéssemos o limite do numerador e denominador da função, chegaríamos a uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Para levantarmos esta indeterminação, escrevamos a função f na seguinte forma

$$f(x) = \frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2} + 1}$$

que é obtida dividindo-se o numerador e o denominador da função por x^2 , que é o termo de maior potência entre o numerador e o denominador de f . Segue-se então que, quando x tende para $\pm\infty$, o numerador tende a zero e o denominador tende a 1, e a indeterminação desaparece. Então

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{1 + x^2} = 0.$$

Calculemos a derivada de f para analisarmos os pontos críticos e as regiões de crescimento e de decrescimento de f . Utilizando as regras usuais de derivação, obtemos

$$f'(x) = \frac{2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2}$$

de onde resulta que os pontos críticos de f são $x = \pm 1$.

Se $-\infty < x < -1$, a derivada $f'(x) < 0$ pois para estes valores o numerador da derivada é negativo e o denominador é sempre positivo. Assim, f é decrescente no intervalo $(-\infty, -1)$. Já no intervalo $-1 < x < 1$ a função é crescente pois o numerador $2 - 2x^2$ da função é positivo. No intervalo $1 < x < +\infty$ a função é decrescente, e então $x = -1$ é ponto de mínimo e $x = 1$ é ponto de máximo.

Calculemos a derivada segunda de f . Usando as regras de derivação e após as devidas simplificações, obtém-se

$$f''(x) = \frac{4x(x^2 - 3)}{(1 + x^2)^3}$$

e constata-se que esta derivada segunda se anula nos pontos $x = 0$, $x = \sqrt{3}$ e $x = -\sqrt{3}$. Verifica-se facilmente que:

- (i) Se $x < -\sqrt{3}$, então $f''(x) < 0$ e assim f é côncava para baixo neste intervalo.
- (ii) Se $-\sqrt{3} < x < 0$, então $f''(x) > 0$ e assim f é côncava para cima neste intervalo.
- (iii) Se $0 < x < \sqrt{3}$, então $f''(x) < 0$ e assim f é côncava para baixo neste intervalo.

- (iv) Se $\sqrt{3} < x$, então $f''(x) > 0$ e assim f é côncava para cima neste intervalo.

Logo, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$ e $x = -\sqrt{3}$ são pontos de inflexão.

De posse destas informações temos que o gráfico de f é como na figura 7.7, a seguir.

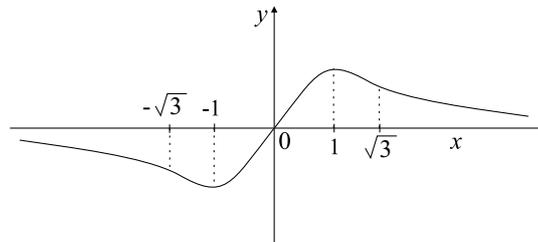


Fig. 7.7

Exemplo 70. Introduzindo uma Equação Diferencial.

Neste exemplo anteciparemos o estudo das *Equações Diferenciais* exibindo um estudo preliminar das chamadas *Pontes Suspensas*.

Para construir uma ponte suspensa, constroem-se duas torres e pendura-se um cabo entre elas. Desse cabo prende-se um grande número de cabos verticais que são usados para segurar a ponte propriamente dita. A ponte é praticamente horizontal e seu peso é muito grande comparado com o peso total dos vários cabos que a sustentam. Em virtude disso, desprezaremos o peso desses cabos no modelo que iremos estudar.

Nosso objetivo é determinar a forma do cabo principal da ponte suspensa. Desde que a forma geométrica do cabo principal é simétrica com relação ao seu ponto mais baixo, consideraremos o eixo vertical oy passando por este ponto, e em virtude da simetria consideraremos somente a parte direita do cabo correspondente ao intervalo $[0, x]$. Veja figura 7.8

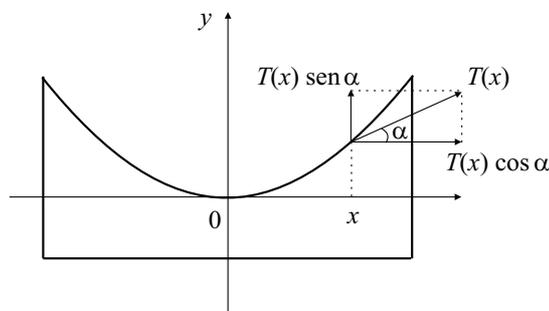


Fig. 7.8

Considerando que a ponte esteja em equilíbrio, ou seja, não haja oscilação, a resultante das forças que agem sobre ela é nula. Seja $T(0)$ a

tensão atuando sobre o cabo no ponto 0, conforme a figura. Desde que esse é o ponto mais baixo do cabo principal, $T(0)$ deve ser horizontal. Seja $T(x)$ a tensão atuando no ponto do cabo correspondente ao ponto de abscissa x . Esta tensão puxa o cabo para cima e para a direita ao longo da tangente ao cabo, fazendo um ângulo α com a horizontal, de acordo com a figura. As componentes horizontais e verticais da tensão $T(x)$ são dadas, respectivamente, por

$$T(x) \cos \alpha \text{ e } T(x) \sin \alpha.$$

Admitamos que o peso da ponte seja uniformemente distribuída de modo que, se ρ for a densidade de massa da ponte, tem-se que o trecho correspondente ao intervalo $[0, x]$ terá peso ρx . Conseqüentemente, em virtude de termos equilíbrio da ponte, chega-se às equações

$$T(0) = T(x) \cos \alpha \text{ e } \rho x = T(x) \sin \alpha.$$

Relembrando o fato básico e essencial de que a derivada é representada geometricamente pela inclinação da reta tangente ao gráfico da função, tem-se

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Das equações precedentes, obtém-se

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\rho x}{T(x)}}{\frac{T(0)}{T(x)}} = \frac{\rho}{T(0)} x.$$

Temos, então, uma equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\rho}{T(0)} x$$

que é uma equação cuja incógnita é uma função, no caso a função $y = y(x)$, que nos fornece o perfil do cabo principal. Ora, usando as regras de derivação previamente estudadas, tem-se que uma função que satisfaz tal equação diferencial é

$$y = \frac{\rho}{2T(0)} x^2 + h_0$$

em que h_0 é uma constante arbitrária. Na verdade, provaremos mais adiante que todas as soluções da equação diferencial estudada são dessa forma.

4 Exercícios resolvidos

1. O *problema da reflexão da luz* (Descartes). Consideremos um espelho plano, uma fonte luminosa S e um observador postado em um ponto O , conforme figura 7.9.

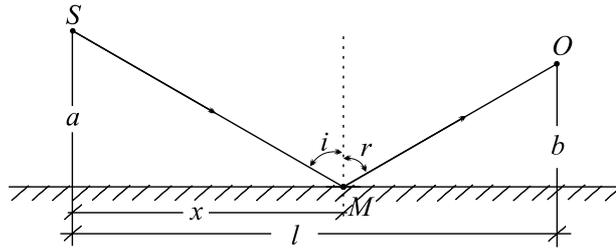


Fig. 7.9

Determinar a posição do ponto M em que o raio luminoso, emitido de S , deverá atingir o espelho para então seguir até o observador O , admitindo que a luz siga a trajetória mais curta.

Solução. Devemos observar que a, b e l são dados do problema, conforme figura 7.8, e procuraremos determinar a posição do ponto M a partir do valor de x . Inicialmente observemos que a distância total percorrida pela luz, de S até O , é dada por

$$d(x) = SM + MO = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (l - x)^2}.$$

Daí,

$$d'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{l - x}{\sqrt{b^2 + (l - x)^2}}$$

e os pontos críticos de d são obtidos fazendo-se $d'(x) = 0$, o que nos fornece a igualdade

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{l - x}{\sqrt{b^2 + (l - x)^2}}. \quad (7.1)$$

Calculemos o valor de x . Da igualdade anterior

$$\frac{x^2}{a^2 + x^2} = \frac{(l - x)^2}{b^2 + (l - x)^2}$$

o que nos fornece

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{(l - x)^2}{b^2}$$

ou

$$\frac{x}{a} = \frac{l - x}{b},$$

pois estamos admitindo $a > 0, b > 0$ e $0 < x < l$, donde

$$x = \frac{al}{a + b}. \quad (7.2)$$

Devemos observar que a equação (7.1) possui um significado geométrico:

- $\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ é o cosseno do ângulo de incidência i ;
- $\frac{l - x}{\sqrt{b^2 + (l - x)^2}}$ é o cosseno do ângulo de reflexão r .

Assim, $\cos i = \cos r$ e, como os valores de i e de r estão restritos ao intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$, teremos $i = r$. Daí segue-se a lei da reflexão da luz, descoberta por Descartes:

O ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.

Para finalizar, devemos verificar que, de fato, o valor de x , obtido em (7.2), é de mínimo. Isto segue-se do teste da derivada segunda, observando que

$$d''(x) = \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{b^2}{(b^2 + (l - x)^2)^{3/2}} > 0.$$

Por conseguinte, x é ponto de mínimo.

2. Inscrever, em um círculo de raio R , um triângulo isósceles cuja área seja máxima.

Solução. Consideremos as figuras 7.10 nas quais estão representados círculos de raio R e triângulos isósceles inscritos $\triangle ABC$.

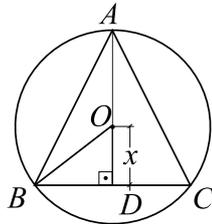


Fig. 7.10(a)

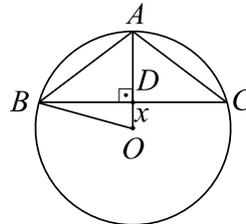


Fig. 7.10(b)

Tracemos o triângulo $\triangle OBD$ a partir do qual temos

$$BO^2 = BD^2 + OD^2.$$

Chamando $OD = x$ e observando que BO é o raio do círculo, obtém-se

$$BD = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

A área $S = S(x)$ do triângulo é dada por

$$S(x) = \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 2BD \cdot (R + x) = (R + x)\sqrt{R^2 - x^2},$$

em que $-R < x < R$ e observemos que na figura 7.10(b) x assume valores negativos. Derivando $S(x)$, usando a regra do produto, tem-se

$$S'(x) = \sqrt{R^2 - x^2} - \frac{x(R+x)}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

ou ainda

$$S'(x) = -\frac{2x^2 + Rx - R^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

Assim, teremos $S'(x) = 0$ se, e somente se,

$$2x^2 + Rx - R^2 = 0$$

cujas soluções no intervalo $-R < x < R$ é $x = \frac{R}{2}$. Verifica-se facilmente que, para $-R < x < \frac{R}{2}$, tem-se $S'(x) > 0$ e, para $\frac{R}{2} < x < R$, tem-se $S'(x) < 0$ e daí $x = \frac{R}{2}$ é ponto de máximo.

5 Exercícios propostos

1. Encontre as dimensões do triângulo retângulo de maior área, de modo que a soma dos comprimentos de um dos catetos com o comprimento da hipotenusa seja uma constante c .
2. Determine o cilindro circular reto de maior volume que possa ser inscrito em uma esfera de raio R .
3. Dados os pontos $A = (0, 3)$ e $B = (4, 5)$, encontre o ponto P sobre o eixo ox para o qual a distância $|AP| + |PB|$ é a menor possível.
4. Em um experimento os resultados de n medidas da quantidade x são x_1, x_2, \dots, x_n . Qual o valor de x que minimiza a expressão $(x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \dots + (x - x_n)^2$?
5. Dado o ponto $P = (a, b)$ no primeiro quadrante, encontre a reta que passa por P e que forma com os semi-eixos coordenados o triângulo de menor área.
6. Dentre todos os números não negativos x, y tais que $x + y = 5$, encontre aqueles tais que o produto do quadrado do primeiro pelo cubo do segundo seja o máximo possível.
7. Encontre o retângulo de área máxima que pode ser inscrito em um círculo de raio 1.
8. Esboce os gráficos das funções abaixo.

- (a) $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 3}$
- (b) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$
- (c) $f(x) = \frac{3}{5}x^{5/3} - 3x^{2/3}$
- (d) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}}$
- (e) $f(x) = x + \frac{9}{x}$
- (f) $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$
- (g) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$
- (h) $f(x) = \frac{9 + x^2}{9 - x^2}$

9. Em cada um dos itens a seguir, esboce o gráfico de uma função contínua f que satisfaça as condições dadas.

- (a) $f(1) = -2, f'(1) = 0, f''(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$
- (b) $f(2) = 3, f'(2) = 0, f''(x) < 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$
- (c) $f(1) = 1, f''(x) < 0$ para $x > 1$, $f''(x) > 0$ para $x < 1$,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
- (d) $f(0) = 0, f''(x) < 0$ para $x > 0$, $f''(x) > 0$ para $x < 0$,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$

6 Respostas dos exercícios propostos

1. Cateto = $\frac{c}{3}$, hipotenusa = $\frac{2c}{3}$

2. Altura do cilindro = $\frac{2R}{\sqrt{3}}$, raio do cilindro = $\sqrt{\frac{2}{3}}R$

3. $P = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$

4. $\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$

5. $y = -\frac{b}{a}x + 2b$

6. 2 e 3

7. Quadrado de lado $\sqrt{2}$

8. (a)

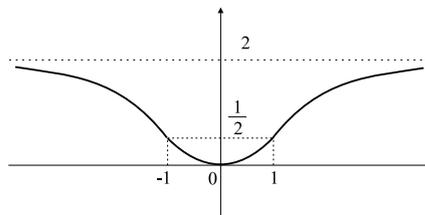


Fig. 7.11

(b)

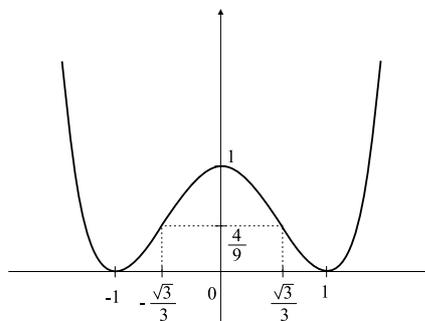


Fig. 7.12

(c)

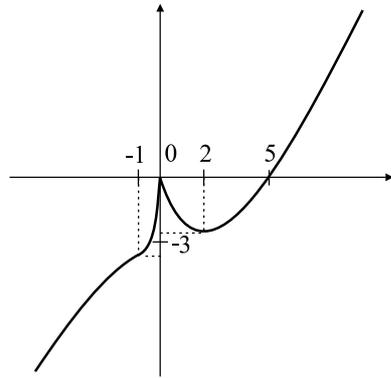


Fig. 7.13

(d)

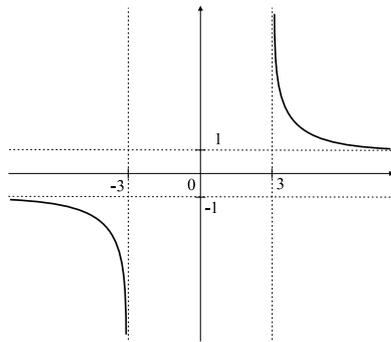


Fig. 7.14

(e)

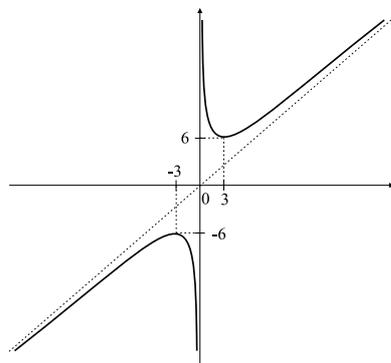


Fig. 7-15

(f)

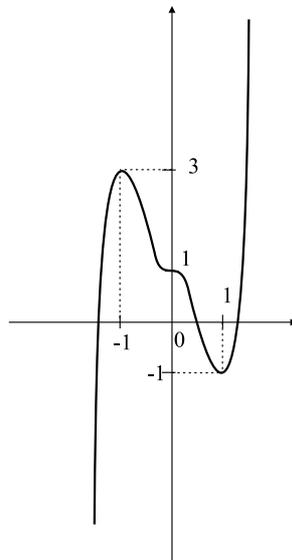


Fig. 7-16

(g)

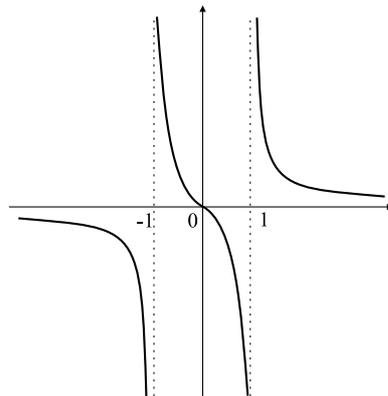


Fig. 7.17

(h)

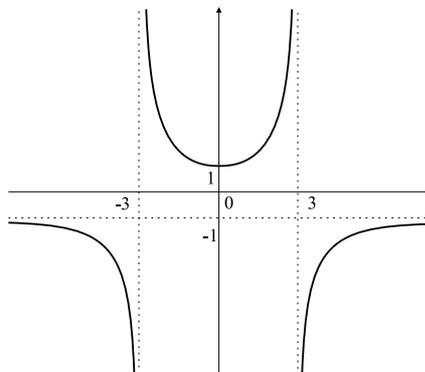


Fig. 7.18

9. (a)

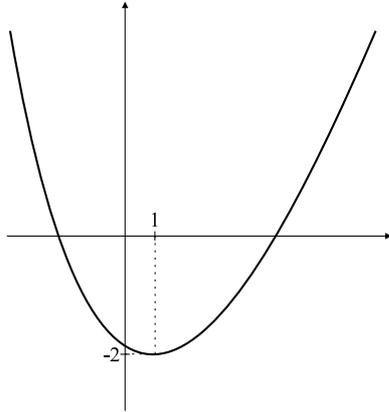


Fig. 7-19

(b)

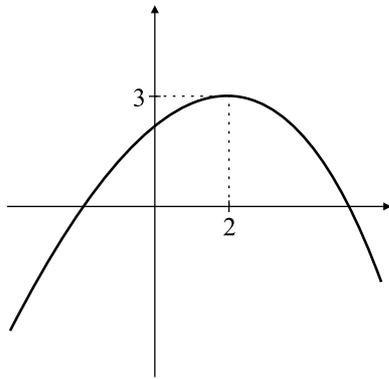


Fig. 7.20

(c)

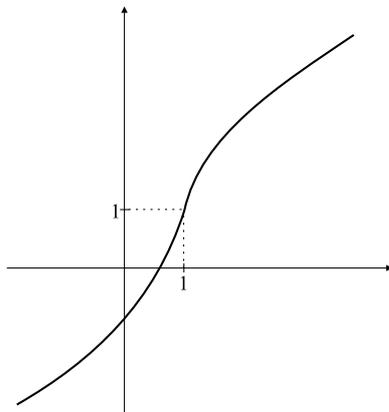


Fig. 7.21

(d)

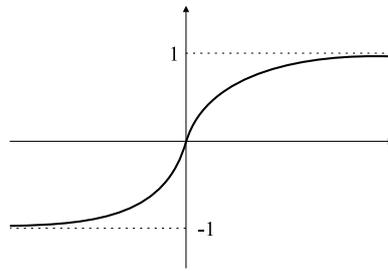


Fig. 7.22

Nesta aula você aprendeu:

- aplicar a derivada em problemas de taxas relacionadas;
- aplicar a derivada em problemas de otimização;
- aplicar a derivada em construção de gráficos de funções.

7 Apêndice

Máximos e mínimos no ensino médio

Os problemas de máximos e mínimos requerem, em sua grande maioria, o conhecimento de técnicas do Cálculo Diferencial, conforme foi visto nessa aula e anteriores. No entanto, alguns problemas desse tipo podem ser introduzidos, e resolvidos a contento, no ensino médio, usando técnicas elementares. Uma dessas é consequência do chamado completamento do quadrado. Vejamos como isso é feito.

Seja

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0,$$

um trinômio do segundo grau (função quadrática) e suponhamos que queiramos calcular o seu valor extremo (máximo ou mínimo, dependendo do sinal de a). Assim,

$$y = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c$$

e desejamos fazer com que no termo entre parênteses apareça um quadrado perfeito. Sabe-se que o quadrado da soma de dois números z e w é

$$(z + w)^2 = z^2 + 2zw + w^2$$

e daí vejamos o que está faltando no termo entre parênteses para chegarmos a um quadrado perfeito. Observemos que

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x &= x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x \\ &= x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \\ &= \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2. \end{aligned}$$

Em virtude disso, o trinômio em estudo pode ser reescrito como

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Analisemos essa última expressão. Suponhamos inicialmente que $a > 0$. Como $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$ tem-se $a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$ de modo que o valor de y será mínimo quando $a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0$ e, como $a > 0$, devemos ter $x + \frac{b}{2a} = 0$, ou seja, o valor mínimo de y será atingido no ponto

$$x_{\min} = -\frac{b}{2a}.$$

Se $a < 0$, o trinômio do segundo grau atingirá máximo no ponto

$$x_{\text{máx}} = -\frac{b}{2a},$$

de modo que o valor extremo da função quadrática, máximo ou mínimo, conforme $a < 0$ ou $a > 0$, será dado por

$$y_{\text{ext}} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}.$$

Designando por $\Delta = b^2 - 4ac$, o conhecido discriminante da função trinômio do segundo grau, teremos

$$y_{\text{ext}} = \frac{\Delta}{4a}$$

de modo que as coordenadas do ponto pertencente ao gráfico de y que corresponde ao extremo da função são

$$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right).$$

Como deve ter ficado claro para o leitor, este método funcionou porque trabalhamos com uma função quadrática e pudemos usar o estratagema de completar quadrado.

O que acontece quando não tivermos uma função que não seja do tipo acima? Já que neste apêndice estamos no âmbito do ensino médio, não nos é possível usar o Cálculo Diferencial.

Para algumas classes de funções poderemos proceder conforme é feito no exemplo a seguir, o qual está contido no motivador artigo de Paterlini¹

Exemplo 71. Um paciente ingere um remédio no instante $t = 0$. A concentração do remédio no sangue do paciente no instante t pode ser representada pela função

$$C(t) = \frac{20t}{t^2 + 4} \text{ para } t \geq 0.$$

Calcule o instante em que a concentração é máxima.

Solução. Inicialmente observemos que $y \in \mathbb{R}$ está na imagem da função C se a equação

$$\frac{20t}{t^2 + 4} = y$$

tiver solução $t \geq 0$. Essa equação é equivalente a

$$yt^2 - 20t + 4y = 0$$

¹Roberto Ribeiro Paterlini, Técnicas de Máximos e Mínimos, Revista do Professor de Matemática, SBM, N^o 35(1997)34-38.

que é uma equação do segundo grau em t , cujos coeficientes são y , -20 e $4y$. Essa equação possui solução quando o seu discriminante for maior do que ou igual a zero, ou seja, $400 - 16y^2 \geq 0$, o que é equivalente a $-5 \leq y \leq 5$. Da expressão de $C(t)$ temos que $y \geq 0$ se, e somente se, $t \geq 0$, de modo que a imagem da função C , para $t \geq 0$, é o intervalo fechado $[0, 5]$. Então o valor máximo de $C(t)$, para $t \geq 0$, é igual a 5. Para obtermos o valor do tempo t para o qual isso acontece, basta resolvermos a equação $C(t) = 5$, de modo que $t^2 - 4t + 4 = 0$ cuja solução positiva é $t = 2$. Veja o gráfico da função $C(t)$.

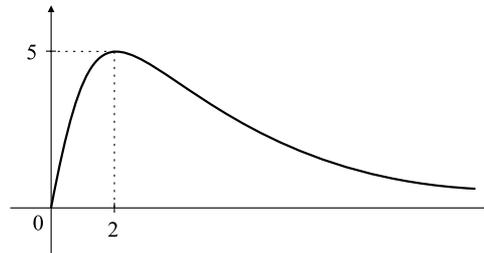


Fig. 7-23

Sobre máximos e mínimos em problemas de Geometria o leitor está fortemente convidado a ler o estimulante artigo de Figueiredo²

²Djairo Guedes de Figueiredo, Problemas de Máximo e Mínimo em Geometria Euclidiana, Matemática Universitária, SBM, N^o 9/10, Dezembro(1989)69-108

Aula 8

Mais aplicações da derivada

Objetivos

- Estudar a aproximação de funções por polinômios.
- Estudar a regra de L'Hospital.

Nesta aula estudaremos duas outras aplicações da derivada, a saber, a *aproximações de funções por polinômios* e a *regra de L'Hospital*. Esta última é uma maneira engenhosa de cálculo de certos limites de funções usando derivada.

1 Aproximação de funções por polinômios

Dentre as funções mais simples que se estudam na Matemática estão os polinômios. Mas existem funções, conhecidas do leitor, que não são representadas por polinômios. Dentre essas podemos destacar a função exponencial, a função logarítmica, as funções trigonométricas e tantas outras que se encontram na Matemática e suas aplicações. Entretanto, existem classes de funções relevantes que podem ser aproximadas, em um sentido a ser esclarecido oportunamente, por polinômios. Este é o caso da função exponencial $f(x) = e^x$. Mostraremos que os polinômios

$$f_1(x) = 1 + x,$$

$$f_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!},$$

$$f_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!},$$

$$f_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

são todas aproximações cada vez melhores da função exponencial.

Veja a figura 8.1 em que estão esboçados os gráficos da função exponencial e das funções f_1, f_2, f_3 e f_4 e observe que tais gráficos vão gradativamente ficando mais próximos do gráfico de $y = e^x$ nas proximidades de $x = 0$.

É de bom alvitre lembrar que em Matemática é interessante estudar tópicos mais avançados comparando-os com outros previamente estudados. Quando trabalhamos com números reais, o mais interessante seria trabalhar sempre com os números racionais. Porém, para felicidade geral dos matemáticos, existem os números irracionais. O que se faz quando, em problemas práticos, tem-se que lidar com irracionais? Fazemos uma aproximação por números racionais. Lembre de $\sqrt{2}$ que é aproximado por 1,4, por 1,41, por 1,414 e assim por diante, que são todos racionais.

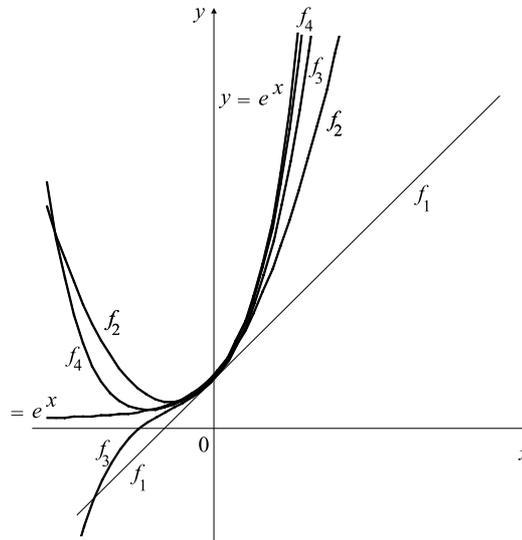


Fig. 8.1

Esta idéia, a de aproximar funções bastante gerais por polinômios, teve origem com Maclaurin, matemático inglês do século XVII. Vide apêndice desta aula. Começemos com um exemplo ilustrativo.

Exemplo 72. Consideremos uma progressão geométrica de razão $r > 0$ e cujo primeiro termo seja $a > 0$. Assim, os termos dessa progressão são

$$a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \dots$$

Pode-se provar facilmente que a soma dos n primeiros termos dessa progressão é

$$S_n = a \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

Se $r > 1$ os termos da progressão tendem ao infinito, de onde se conclui que a soma S_n tende ao infinito. Se $0 < r < 1$ observa-se que r^n tende a zero, de modo que a soma de todos os termos da progressão geométrica tende a

$$a \frac{1}{1 - r}$$

e escreve-se

$$a \frac{1}{1 - r} = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots$$

e de maneira mais sucinta, e eliminando o a ,

$$\frac{1}{1 - r} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n.$$

Isso nos diz que os polinômios

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n, \text{ para todo, } n = 1, 2, \dots,$$

são aproximações de

$$\frac{1}{1-r}$$

se $0 < r < 1$. Mais geralmente, e usando x para designar a variável, temos

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \text{ para todo } -1 < x < 1.$$

Desse modo, a função não-polinomial $\frac{1}{1-x}$ é aproximada pelo polinômio

$$P_n(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$$

e a parte restante da soma infinita, $\sum_{j=n+1}^{\infty} x^j$, tende a zero quando n tende para o infinito.

Observação 7. Expressões da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

em que a_n é um número real para todo $n \in \mathbb{N}$, são chamadas *séries numéricas*, ou simplesmente *séries*, e não são somas no sentido usual da palavra e sim um limite de somas. O que significa isto? Faremos uma breve interpretação intuitiva deste importante conceito, deixando os formalismos para as aulas de Análise.

Começemos considerando um conjunto de números reais $\{a_1, a_2, \dots\}$ dispostos numa certa ordem, de modo que a_1 seja o primeiro, a_2 seja o segundo, \dots , a_n seja o n -ésimo, e assim por diante. Deve-se enfatizar que esta ordem não significa que tenhamos $a_1 \leq a_2 \leq \dots$.

À custa desses números construímos outro conjunto de números s_n , da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2, \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \end{aligned}$$

para todo $n = 1, 2, \dots$. Caso estes valores $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ se aproximem de algum número real s , diremos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e escreve-se

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

ou

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n a_j.$$

Caso contrário diremos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

No caso do exemplo 72 os números a_n são dados por

$$a_1 = 1, a_2 = r, a_3 = r^2, \dots$$

e

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 \\ s_2 &= 1 + r \\ s_3 &= 1 + r + r^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

de modo que, se $0 < r < 1$ (na verdade podemos ter $-1 < r < 1$), a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{1-r}.$$

A *fórmula de Maclaurin* tem como objetivo generalizar o procedimento esboçado no Exemplo 1. Em virtude dos objetivos iniciais deste curso, não entraremos nos detalhes formais das demonstrações, deixando os rigores matemáticos para as aulas referentes à Análise.

Para estabelecermos a fórmula de Maclaurin, comecemos considerando uma função $y = f(x)$ definida e possuindo derivadas de todas as ordens em um dado intervalo aberto I que contenha o ponto 0. Gostaríamos de expressar tal função na forma

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (8.1)$$

cujos coeficientes a_j , $j = 0, 1, 2, \dots$ devem ser determinados de maneira conveniente. O termo a_0 é determinado atribuindo-se o valor $x = 0$ na expressão (8.1). Assim,

$$f(0) = a_0.$$

Para a determinação dos outros usaremos um fato que não é trivial, porém é tentador. A expressão em (8.1) é, digamos, uma soma infinita. No

entanto, esse tipo de soma, chamada *série de potências*, é, na verdade, um limite de somas finitas, e derivar termo a termo tal tipo de série é algo válido em um certo intervalo centrado em 0, chamado intervalo de convergência, mas que nem sempre é possível para as chamadas *série de funções*. As funções que podem ser desenvolvidas como aquela na expressão (8.1) são chamadas *funções analíticas* e são aquilo o que de melhor podemos esperar no que concerne às funções.

Derivando uma vez, termo a termo, a expressão em (8.1), obtém-se

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots \quad (8.2)$$

Fazendo-se $x = 0$ em (8.2), tem-se

$$f'(0) = a_1.$$

Para determinarmos o valor de a_2 , derivemos termo a termo a expressão em (8.2):

$$f''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3x + 3 \cdot 4a_4x^2 + \dots \quad (8.3)$$

Atribuindo $x = 0$ na expressão em (8.3), obtém-se $f''(0) = 2a_2$, e daí segue que

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2} = \frac{f''(0)}{2!}.$$

Derivemos mais uma vez:

$$f'''(x) = 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4x + \dots \quad (8.4)$$

Procedendo como nos casos anteriores, obtemos $f'''(0) = 2 \cdot 3a_3$, logo

$$a_3 = \frac{f'''(0)}{2 \cdot 3} = \frac{f'''(0)}{3!}.$$

Derivando novamente, indicando a derivada de ordem 4 por $f^{(4)}$ e fazendo $x = 0$, obtemos

$$a_4 = \frac{f^{(4)}(0)}{4!}.$$

Prosseguindo desta maneira, pode-se provar que

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \text{ para todo } n = 1, 2, \dots$$

em que $f^{(n)}(0)$ designa a derivada de ordem n da função f calculada em $x = 0$.

De posse destes coeficientes encontramos a *série de Maclaurin* da função f :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots \quad (8.5)$$

ou

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 73. Começemos com a função $f(x) = e^x$, pois é a mais fácil de derivar. Assim,

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x, & f(0) &= e^0 = 1 \\ f'(x) &= e^x, & f'(0) &= e^0 = 1 \\ f''(x) &= e^x, & f''(0) &= e^0 = 1 \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

Substituindo-se na expressão (8.5), obtém-se

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots. \quad (8.6)$$

Ao atribuímos o valor $x = 1$ na expressão em (8.6), teremos

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots \quad (8.7)$$

de modo que, ao truncarmos a soma infinita dada em (8.7), chegamos a

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad (8.8)$$

a qual é uma aproximação para o número transcendente e , sendo que o erro cometido será tanto menor quanto maior for n , que é o número de parcelas da soma dada por (8.8).

Exemplo 74. Determinemos a série de Maclaurin da função

$$f(x) = \ln(1+x).$$

Um simples cálculo de derivadas nos fornece a seguinte tabela

$$\begin{array}{ll} f(x) = \ln(1+x) & f(0) = \ln(1+0) = 0 \\ f'(x) = \frac{1}{1+x} & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} & f''(0) = -1 \\ f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} & f'''(0) = 2 \\ f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4} & f^{(4)}(0) = -6 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Substituindo-se tais valores na expressão em (8.5), teremos

$$\ln(1+x) = 0 + \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} - \frac{6x^4}{4!} + \cdots$$

Portanto,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

que possui limite finito se $-1 < x < 1$.

Exemplo 75. Desenvolvamos a função $f(x) = \cos x$. Cálculos elementares de derivadas nos levam a

$$\begin{array}{ll} f(x) = \cos x & f(0) = 1 \\ f'(x) = -\operatorname{sen} x & f'(0) = 0 \\ f''(x) = -\cos x & f''(0) = -1 \\ f'''(x) = \operatorname{sen} x & f'''(0) = 0 \\ f^{(4)}(x) = \cos x & f^{(4)}(0) = 1 \\ f^{(5)}(x) = -\operatorname{sen} x & f^{(5)}(0) = 0 \\ f^{(6)}(x) = -\cos x & f^{(6)}(0) = -1 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

de modo que, ao substituirmos esses valores na expressão em (8.5), obtém-se

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Caso queiramos construir uma tábua trigonométrica, devemos observar que

$$\begin{aligned} \cos x &\cong 1 - \frac{x^2}{2!} \\ \cos x &\cong 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \\ \cos x &\cong 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \end{aligned}$$

o que nos fornece aproximações cada vez mais acuradas para os valores de $\cos x$.

Exemplo 76. Desenvolvamos a função $f(x) = \operatorname{sen} x$ em série de Maclaurin. Observemos a tabela abaixo obtida por simples derivação

$$\begin{array}{ll} f(x) = \operatorname{sen} x & f(0) = 0 \\ f'(x) = \cos x & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\operatorname{sen} x & f''(0) = 0 \\ f'''(x) = -\cos x & f'''(0) = -1 \\ f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x & f^{(4)}(0) = 0 \\ f^{(5)}(x) = \cos x & f^{(5)}(0) = 1 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

de modo que, como nos casos anteriores,

$$\operatorname{sen} x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Exemplo 77. Um cálculo simples, porém longo, mostra que a função $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ possui o seguinte desenvolvimento de Maclaurin

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} x^6 - \dots$$

de maneira que

$$\sqrt{1+x^2} \cong 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} x^4$$

nos fornece uma aproximação para $\sqrt{1+x^2}$. Fazendo $x = 1$ nesta expressão obtemos uma aproximação para $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} \cong 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}.$$

Exemplo 78. Vejamos uma demonstração para o conhecido *binômio de Newton*. Para isto consideraremos a função

$$f(x) = (a+x)^m$$

onde m é um inteiro positivo. Observemos que essa função é um polinômio de grau m e a cada derivação obtemos um polinômio de grau uma unidade menor do que a do anterior. Assim, a derivada $f^{(m+1)}(x) = 0$ para todo x . Calculando as sucessivas derivadas de f , obtém-se

$$\begin{array}{ll} f(x) = (a+x)^m & f(0) = a^m \\ f'(x) = m(a+x)^{m-1} & f'(0) = ma^{m-1} \\ f''(x) = m(m-1)(a+x)^{m-2} & f''(0) = m(m-1)a^{m-2} \\ \vdots & \vdots \\ f^{(m)}(x) = m(m-1)(m-2)\dots 1 & f^{(m)}(0) = m(m-1)(m-2)\dots 1 \\ f^{(m+1)}(x) = 0 & f^{(m+1)}(0) = 0. \end{array}$$

Conseqüentemente,

$$(a+x)^m = a^m + \frac{m}{1!} a^{m-1} x + \frac{m(m-1)}{2!} a^{m-2} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots 1}{m!} x^m.$$

Fazendo $x = b$ nesta última expressão, obtemos a forma como o *binômio de Newton* é normalmente apresentada:

$$(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1!} a^{m-1} b + \frac{m(m-1)}{2!} a^{m-2} b^2 + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots 1}{m!} b^m.$$

Para obter o desenvolvimento de $(a-b)^m$ basta observar que $a-b$ é igual a $a+(-b)$ e daí use a última expressão.

Raciocinando de maneira análoga ao feito para a fórmula de Maclaurin, obtemos a *fórmula de Taylor*.

Se $y = f(x)$ for uma função que tenha derivadas de todas as ordens em um certo intervalo aberto I , teremos a seguinte fórmula

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \frac{h^3}{3!} f'''(a) + \dots$$

chamada *fórmula de Taylor*, ou, equivalentemente

$$f(a+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

em que se convencionou $f^{(0)}(x) = f(x)$. Ao fazermos $x = a + h$, obtemos a expressão seguinte, que é bastante usual e exprime a função f em forma de potências de $x - a$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n. \quad (8.9)$$

Observação 8. Deve-se observar que nem toda função que possua derivadas de todas as ordens em certo intervalo pode ser desenvolvida em série de Taylor (ou série de Maclaurin). Para que isto aconteça, algumas condições devem ser impostas à função. A classe de funções que possuem esta propriedade (a de ser desenvolvidas em *série de potências*) é a das *funções analíticas*. Para sorte nossa, a grande maioria das funções com as quais temos trabalhado são analíticas. Para elas é válido derivar termo a termo, integrar termo a termo, etc., porém devemos deixar claro que existem funções, importantes do ponto de vista da Matemática e de suas aplicações, que não são analíticas mas podem ser desenvolvidas em outros tipos de séries. Um exemplo típico são as chamadas *séries de Fourier* que surgiram nos estudos de transmissão de calor e que se prestam, entre outras coisas, a aproximar funções que podem ter várias descontinuidades. Apenas para satisfazer a curiosidade do leitor, uma *série de Fourier*, é uma expressão da forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

em que $a_n, n = 1, 2, \dots$ são constantes que dependem da função que está sendo expandida. Um exemplo de função que pode ser representada por séries de Fourier é a apresentada na figura 8.2.

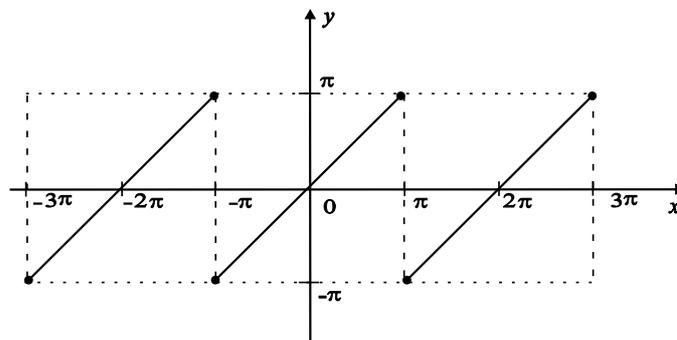


Fig. 8.2

Exemplo 79. Desenvolvamos a função $f(x) = e^x$ em potências de $x - 1$. No caso em questão tem-se $a = 1$ e então

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x & f(1) &= e \\ f'(x) &= e^x & f'(1) &= e \\ f''(x) &= e^x & f''(1) &= e \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

Portanto, usando a fórmula expressa em (8.9), tem-se

$$e^x = e + \frac{e^2}{1!}(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 + \frac{e}{3!}(x-1)^3 + \dots$$

Exemplo 80. A expressão da fórmula de Taylor

$$f(a+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

pode ser utilizada para fazer aproximações. À guisa de exemplo determinemos uma aproximação para $\text{sen } 31^\circ$ sabendo que $\text{sen } 30^\circ = 0,5$. Ora $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ e $1^\circ = \frac{\pi}{180} = 0,01745 \text{ rad}$, de modo que

$$\text{sen } \frac{\pi}{6} = 0,5$$

e

$$\text{sen} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180} \right) = \text{sen } 31^\circ$$

donde

$$\text{sen } 31^\circ \cong \text{sen } 30^\circ + \frac{\pi}{180} \cdot \cos 30^\circ = 0,5 + 0,0349 \cdot 0,8666 = 0,5151.$$

em que na última expressão usamos a aproximação

$$f(a+h) \cong f(a) + f'(a)h$$

dada pela fórmula de Taylor. Caso quiséssemos algo mais preciso, poderíamos usar uma aproximação de grau dois

$$f(a+h) \cong f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2$$

de modo que quanto maior for o grau do polinômio de Taylor

$$f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n$$

melhor será a aproximação obtida.

2 Expressões indeterminadas

Usaremos o que foi feito sobre séries de Maclaurin e de Taylor para o estudo de levantamentos de indeterminações. Sabe-se, desde o estudo de limites, nas Aulas 2 e 3, que indeterminações são expressões da forma $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0^0, \dots$. Começemos com o primeiro exemplo já introduzido na aula 3.

Exemplo 81. Consideremos a função

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

que, quando $x \rightarrow 0$, apresenta a indeterminação $\frac{0}{0}$. Como levantá-la? Usemos a fórmula de Maclaurin

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Deste modo

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots$$

e daí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

que é uma maneira de levantar tal indeterminação sem o apelo geométrico desenvolvido na aula 3.

Exemplo 82. Vejamos, agora, a função

$$\frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x}$$

da qual resulta a indeterminação $\frac{0}{0}$ quando $x \rightarrow 0$. Usando a série de Maclaurin para as funções $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$, teremos

$$\frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right)}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots} = \frac{\frac{x}{2!} - \frac{x^3}{4!} + \frac{x^5}{6!} - \dots}{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots}$$

e então

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} = 0.$$

3 Regra de L'Hospital

Vejamus a *regra de L'Hospital*, que é outro instrumento muito útil para levantarmos indeterminações. Para isso, suponhamos que tenhamos duas funções $f(x)$ e $g(x)$ que se anulem simultaneamente no ponto $x = a$, de modo que, se tentarmos calcular o limite do quociente

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

atribuindo-se simplesmente o valor $x = a$, chegamos à indeterminação $\frac{0}{0}$. O que fazer? Usemos a série de Taylor para ambas as funções f e g em torno de $x = a$ para obter

$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \dots}{g(a) + \frac{g'(a)}{1!}h + \frac{g''(a)}{2!}h^2 + \frac{g'''(a)}{3!}h^3 + \dots}$$

de modo que, usando o fato de que $f(a) = g(a) = 0$,

$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{\frac{f'(a)}{1!} + \frac{f''(a)}{2!}h + \frac{f'''(a)}{3!}h^2 + \dots}{\frac{g'(a)}{1!} + \frac{g''(a)}{2!}h + \frac{g'''(a)}{3!}h^2 + \dots}$$

Supondo que $g'(a) \neq 0$, podemos fazer $h \rightarrow 0$ nesta última expressão para obter

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Esta é a *regra de L'Hospital* (veja Apêndice no qual se fazem alguns comentários sobre L'Hospital). Caso tivéssemos que a é ponto crítico tanto de f como de g , obteríamos, outra vez, uma indeterminação da forma $\frac{0}{0}$ e aplicaríamos, novamente, o processo acima para obter

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{f''(a)}{g''(a)}$$

supondo que não teríamos outra indeterminação $\frac{0}{0}$. Caso isto aconteça, mais um a vez aplicamos o procedimento e teríamos o quociente das derivadas de ordem três de f e g . Temos, então, as seguintes regras práticas.

Regras práticas para levantamento de indeterminação

Regra 10. O caso $\frac{0}{0}$

Caso queiramos calcular o limite

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

e tenhamos $f(a) = g(a) = 0$, ou seja, recaímos em uma indeterminação da forma $\frac{0}{0}$, devemos calcular as derivadas $f'(x)$ e $g'(x)$ e construir o quociente $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, avaliando-o em $x = a$. Caso não tenhamos $\frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{0}{0}$, teremos

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{f'(x)}{g'(x)} \right]_{x=a} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Se recairmos, novamente, em uma indeterminação $\frac{0}{0}$, que acontece quando a for, simultaneamente, ponto crítico tanto de f como de g , $f'(a) = g'(a) = 0$, aplicaremos a regra de L'Hospital uma vez mais para obter

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \left[\frac{f''(x)}{g''(x)} \right]_{x=a} = \frac{f''(a)}{g''(a)}.$$

Se tivermos $f''(a) = g''(a) = 0$, aplicamos mais uma vez a regra, e assim por diante.

Regra 11. O caso $\frac{\infty}{\infty}$

Consideremos a função $\frac{f(x)}{g(x)}$ de modo que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

que é um outro tipo de indeterminação. Isto acontece quando $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$. Observando que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{\frac{g(x)}{f(x)}}$$

de modo que quando $x \rightarrow a$ teremos a indeterminação $\frac{0}{0}$. Usando a regra de L'Hospital para esta última fração, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\frac{g(x)}{f(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{-\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}}{-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}} \right]$$

caso não tenhamos uma nova indeterminação. Se recairmos em nova indeterminação, utilizaremos os procedimentos anteriores.

Observação 9. Os procedimentos referentes à regra de L'Hospital são válidos quando tivermos limites do tipo

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

que recaiam em indeterminações como as previamente estudadas. Isto pode ser justificado, de maneira informal, da seguinte maneira: faça $x = \frac{1}{t}$ de modo que $x \rightarrow \pm\infty$ é equivalente a fazer $t \rightarrow 0$ de modo que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})},$$

caso tenhamos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, aplicamos a regra 10 para obter

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 83. Começemos com um velho conhecido nosso. Consideremos o limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x}$$

o qual, como é bem sabido, recai em uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Usando a regra de L'Hospital, teremos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = \left[\frac{\cos x}{1} \right]_{x=0} = 1.$$

Os exemplos 84, 85, 86 e 87 são para aqueles que já possuem conhecimentos prévios sobre logaritmos.

Exemplo 84. Consideremos o limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$$

que recai na indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$. Usando a regra de L'Hospital, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Vê-se, então, que a função $g(x) = x$ cresce mais rápido do que a função $\ln x$. De maneira análoga, podemos proceder com o exemplo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0.$$

Como no caso anterior, a função $g(x) = x^2$ cresce mais rápido do que a função $\ln x$. Na verdade, este comportamento se verifica para qualquer potência $g(x) = x^m$, qualquer que seja $m = 1, 2, \dots$, ou seja, $g(x) = x^m$ cresce mais rapidamente do que $\ln x$, qualquer que seja $m = 1, 3, \dots$

Exemplo 85. Estudemos o limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$$

o qual resulta na indeterminação $0 \cdot (-\infty)$, que não se enquadra em nenhuma das situações que analisamos até aqui. No entanto, podemos observar que

$$x \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

Quando $x \rightarrow 0$ tem-se que $\ln x \rightarrow -\infty$ e $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ (observe que $x > 0$) e chegamos a uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Usando a regra de L'Hospital,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

Exemplo 86. Analisemos o limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x, \quad x > 0.$$

Este exemplo nos leva à indeterminação do tipo 0^0 , que não se enquadra em nenhum dos tipos estudados até agora. Para levantar essa indeterminação, procederemos da seguinte maneira, valendo-nos da função logaritmo e do exemplo precedente. Segue de $f(x) = x^x$ que $\ln f(x) = \ln x^x$. Logo $\ln f(x) = x \ln x$. Ora, sabe-se que

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

de modo que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln f(x) = 0.$$

Como $\ln f(x) \rightarrow 0$ então $f(x) \rightarrow 1$ e daí

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1.$$

Exemplo 87. Consideremos o limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} \quad \text{para } x > 0.$$

Notemos que, ao fazer $x \rightarrow 0$, somos levados à indeterminação 1^∞ . Usemos, novamente, a função logarítmica. Escrevendo $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$, temos que

$$\ln f(x) = \ln(\cos x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \ln(\cos x)$$

o que conduz à indeterminação $\frac{0}{0}$. Usando a regra de L'Hospital, teremos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(\cos x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{1} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 0.$$

Deste modo, $\ln f(x) \rightarrow 0$ e daí teremos $f(x) \rightarrow 1$, isto é,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = 1.$$

Outros exemplos serão colocados nos exercícios propostos.

4 Exercícios resolvidos

1. Encontre a série de Maclaurin de $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$.

Solução. Observemos que $f(x) = \frac{1-x}{1-x^3}$. De $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$,

obtemos $\frac{1}{1-x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n}$, e assim

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-x^3} - x \frac{1}{1-x^3} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n} - \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n+1}. \end{aligned}$$

2. Usando o fato de que $\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + \dots$ se $|r| < 1$, encontre uma expressão para $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots$

Solução. Fazendo-se $r = \frac{1}{x}$ tem-se

$$\frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^3 + \dots,$$

válida para $\left|\frac{1}{x}\right| < 1$, ou seja, $|x| > 1$. Assim, $\frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots$. Logo $\frac{x}{x-1} - 1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots$, ou seja

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots$$

3. Usando o fato de que

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

encontre a série de Maclaurin de $\sin^2 x$.

Solução. Usemos a identidade trigonométrica $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ e $\cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!}$. Daí $-\cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!}$. Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} \\ &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

4. A regra de L'Hospital se aplica a $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x + 1}$?

Solução. Usando-se regras elementares de limites temos

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x + 1} = \frac{0}{2} = 0.$$

Caso usássemos a regra de L'Hospital, teríamos

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2}{1} = 3$$

o que, evidentemente, é falso. A aplicação da regra de L'Hospital não é possível, pois não temos uma indeterminação.

5 Exercícios propostos

1. Desenvolver em série de Maclaurin as seguintes funções:

(a) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

(b) $f(x) = \frac{1}{1+x}$

(c) $f(x) = \cos^2 x$

$$(d) f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$$

2. Desenvolver as funções abaixo em potências de $x - a$.

$$(a) f(x) = \operatorname{sen} x, a = \frac{\pi}{4}$$

$$(b) f(x) = \operatorname{cos} x, a = 0$$

$$(c) f(x) = \operatorname{tg} x, a = 0$$

$$(d) f(x) = e^{\operatorname{cos} x}, a = 0$$

3. Calcule uma aproximação para $\operatorname{cos} 32^\circ$ a partir de $\operatorname{cos} 30^\circ$.

4. Calcule uma aproximação para $\operatorname{cos} 29^\circ$ a partir de $\operatorname{cos} 30^\circ$.

5. Calcule uma aproximação para $\ln \frac{4}{3}$ considerando o desenvolvimento de Taylor para a função $\ln(1+x)$ partindo do fato de que $\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$.

6. Calcule os seguintes limites

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^2}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \operatorname{cos} x}{x - \operatorname{sen} x}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln 2x}{\ln 3x}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{\operatorname{sen} x}$$

6 Respostas dos exercícios propostos

1. (a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$
 - (b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$
 - (c) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}$
 - (d) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2))}{3^n n!}$
2. (a) $\frac{\sqrt{2}}{2} \left[1 + \frac{x - \frac{\pi}{4}}{1!} - \frac{(x - \frac{\pi}{4})^2}{2!} - \frac{(x - \frac{\pi}{4})^3}{3!} + \frac{(x - \frac{\pi}{4})^4}{4!} - \dots \right]$
 - (b) $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$
 - (c) $x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{15}x^3 + \dots$
 - (d) $e \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \dots \right)$
3. 0,848
 4. 0,874
 5. 1,098
 6. (a) 0
 - (b) $+\infty$
 - (c) 1
 - (d) 4

Nesta aula você aprendeu:

- a expandir funções em séries de Maclaurin e de Taylor;
- a resolver limites utilizando a regra de L'Hospital.

7 Apêndice

Marquês de L'Hospital

Guillaume-François-Antoine de L'Hospital, ou L'Hôpital, Marquês de St. Mesme, nasceu em 1661. Desde tenra idade manifestou interesse por Geometria e aos quinze anos de idade chegou a resolver um difícil problema sobre a cicloíde, proposto por Pascal. Tornou-se capitão de cavalaria, mas desistiu da carreira militar para dedicar mais tempo aos estudos de Matemática. Quando Jean Bernoulli esteve em Paris, em 1692, L'Hospital estudou a geometria infinitesimal, então emergente, sob a sua orientação, tendo se tornado um dos expoentes do Cálculo na França de então. Nesta época um dos poucos textos existentes sobre o recém-nascido Cálculo Infinitesimal era uma memória escrita por Leibniz, na *Acta Eruditorum*, em 1684. Este trabalho continha a definição de diferencial e fornecia algumas regras de derivação, tais como a derivada da soma, do produto, do quociente, de potências e de raízes. Ela também incluía algumas aplicações a problemas de tangentes e pontos críticos. No entanto, ele não era um texto didático nos moldes que entendemos atualmente. L'Hospital teve a percepção da deficiência de textos mais elementares de Cálculo, fato este manifestado em uma carta para Bernoulli, em 1695, no qual ele informava que estava a escrever um trabalho sobre seções cônicas no qual ele acrescentaria um pequeno tratado sobre o Cálculo Diferencial. O trabalho sobre cônicas teve sua publicação procrastinada e somente apareceu postumamente em 1707 (L'Hospital faleceu em 1704); no entanto, o trabalho sobre Cálculo, *Analyse des Infiniment Petits*, foi publicado em 1696. No prefácio o autor enfatiza que deve muito a Leibniz e a Jean Bernoulli, especialmente a esse último, a quem chama de jovem professor de Groningen.

O *Analyse des Infiniment Petits* representa o primeiro tratamento sistemático do Cálculo e apresenta um perfil bastante claro do estado da arte na época de seu lançamento. O prefácio inclui um breve histórico no qual o autor admite que Newton também tinha um tipo de Cálculo.

Neste texto aparece a chamada *Regra de L'Hospital*, que consiste, como vimos nesta aula, em

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)},$$

desde que $f(a) = g(a) = 0$, $g'(a) \neq 0$, cuja origem é bastante inusitada. Ao que parece, os fatos aconteceram da seguinte maneira: durante alguns meses, de 1691-1692, o brilhante matemático suíço Jean Bernoulli esteve a serviço do Marquês de L'Hospital e recebia uma espécie de bolsa; em contrapartida, alguns resultados obtidos por Bernoulli seriam atribuídos a L'Hospital, com as anuências dos dois envolvidos. Em particular, a chamada Regra de L'Hospital estava incluída neste negócio. Vejamos um

trecho de uma carta enviada por L'Hospital a Jean Bernoulli, em 17 de março de 1694, de Paris para Basel (Suíça):

I shall give you with a pleasure a pension of three hundred livres, which will begin on the first of January of the present year, and I shall send you two hundreds livres for the first half of the year because of the journals that you have sent, and it will be one hundred and fifty livres for the other half of the year, and so in the future. I promise to increase this pension soon, since I know it to be very moderate, and I shall do this as soon as my affairs are a little less confused . . . I am not so unreasonable as to ask for this all your time, but I shall ask you to give me occasionally some hours of your time to work on what I shall ask you- and also to communicate to me your discoveries, with the request not to mention them to others. I also ask you to send neither to M. Varignon nor to others copies of the notes that you let me have, for it would not please me if they were made public. Send me your answer to all this and believe me , *Monsieur tout À vous*.

le M. de Lhopital

Em uma carta de 22 de julho de 1694, Jean Bernoulli aceita a proposta de L'Hospital. Nesta carta está contida a regra para $\frac{0}{0}$, e a formulação de Bernoulli é próxima daquela que aparece em *Analyse des Infiniment Petits* e consiste basicamente, em linguagem atual, no seguinte: se

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

e ambas as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ passam pelo mesmo ponto P no eixo x de modo que se designarmos por O a origem do sistemas de coordenadas, $OP = a$, tal que $f(a) = g(a) = 0$, e se tomarmos $x = a + h$, então

$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)}$$

é aproximadamente igual ao quociente

$$\frac{hf'(a+h)}{hg'(a+h)}$$

quando h for suficientemente pequeno. Fazendo $h \rightarrow 0$ obtemos a conhecida regra de L'Hospital. Para mais informações o leitor poderá consultar os artigos de Boyer¹ e Struik²

¹Carl B. Boyer, The First Calculus Textbooks, Mathematics Teacher 39 (April, 1946) 159-167.

²D.J. Struik, The Origin of L'Hôpital's Rule, Mathematics Teacher, 56 (April, 1963) 257-260.

Maclaurin e Taylor

Brook Taylor (1685-1731) foi um eminente matemático inglês, contemporâneo de Isaac Newton. Ele foi um jovem de talento incomum com variados interesses intelectuais nos quais estavam incluídos a Música, as Artes, a Filosofia e a Matemática. A dedução da série que leva seu nome está contida em seu livro *Methodus Incrementorum Directa et Inversa*, que foi publicado em Londres, em 1715, em uma época em que o mundo matemático estava envolvido em querelas sobre a prioridade da criação do Cálculo entre as correntes pró-Newton e pró-Leibniz. Tal livro era devotado inicialmente para aquilo conhecido hoje como o cálculo de diferenças finitas. Os argumentos usados por Taylor eram pouco rigorosos, muitas vezes confusos, que deixavam não apenas Taylor, mas também Newton e Leibniz e os pioneiros do Cálculo, vulneráveis aos ataques do Bispo de Berkeley, que era um ferrenho opositor do então emergente Cálculo. Esses ataques tiveram frutos positivos, pois levaram os matemáticos a procurar demonstrações que tornassem mais convincentes os argumentos do Cálculo incipiente.

Com relação à série de Taylor, as objeções levantadas por Berkeley foram absorvidas por Maclaurin, que chegou a uma série, chamada *Série de Maclaurin*, cuja abordagem será feita após falarmos brevemente sobre a vida de Maclaurin.

Colin Maclaurin (1698-1746) foi um brilhante matemático britânico que se tornou professor de Matemática da Universidade de Aberdeen aos dezenove anos de idade por meio de um exame extremamente competitivo. Neste exame ele apresentou a dedução da chamada *Série de Maclaurin*, que posteriormente apareceu em seu livro *Treatise on Fluxions*, publicado em Edinburg, em 1742. O procedimento de Maclaurin será descrito a seguir.

Seja

$$y(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \dots,$$

em que os coeficientes $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots$ são números fixados a ser determinados. Como $y(0) = A_0$ e admitindo que a função y seja derivável infinitas vezes, teremos:

$$\frac{dy}{dx}(x) = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + \dots$$

e fazendo $x = 0$ obtemos

$$\frac{dy}{dx}(0) = A_1.$$

Analogamente,

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x) = 2A_2 + 3 \cdot 2A_3x + 4 \cdot 3A_4x^2 + \dots$$

e assim

$$\frac{d^2y}{dx^2}(0) = 2A_2$$

e prosseguindo dessa maneira

$$\frac{d^n y}{dx^n}(x) = n!A_n + (n+1)n(n-1) \dots 2A_{n+1}x + (n+2)(n+1) \dots 3A_{n+2}x^2 + \dots$$

de modo que

$$\frac{d^n y}{dx^n}(0) = n!A_n.$$

Assim,

$$y(x) = y(0) + \frac{dy}{dx}(0)x + \frac{d^2y}{dx^2}(0)\frac{x^2}{2!} + \frac{d^3y}{dx^3}(0)\frac{x^3}{3!} + \dots$$

que é a chamada *Série de Maclaurin* da função y em 0.

Evidentemente, Maclaurin ignorou o fato de que nem toda função que seja derivável infinitas vezes possui tal desenvolvimento, assim como a justificativa para derivarmos uma série termo a termo.

Estas questões serão respondidas nas aulas de Análise.

Aula 9

A integral de Riemann: noções iniciais

Objetivos

- Apresentar o processo de quadratura de certas figuras planas como motivação para o cálculo de área por meio de integrais.
- Estudar as noções de integral definida e de integral indefinida.
- Calcular integrais definidas usando o teorema fundamental do Cálculo.

Um dos problemas clássicos da Geometria é o do Cálculo de áreas que, além de suas aplicações práticas, gerou importantes questões na Matemática, não apenas ligados à Geometria como também a outros ramos da Matemática. Essas questões se originaram no chamado *problema da quadratura* o qual consiste em, dada uma figura qualquer, determinar, usando apenas régua e compasso, um quadrado que possua a mesma área da figura dada. Este problema é solúvel, usando métodos elementares, quando a figura é um polígono, ou até mesmo é uma figura com lados curvilíneos, como é o caso das lúnulas de Hipócrates, que serão desenvolvidos a seguir, à guisa de ilustração e motivação.

1 Quadraturas

A quadratura do retângulo

Para facilitar o entendimento façamos, por passos, a quadratura do retângulo.

Consideremos um retângulo arbitrário $\square ABCD$, conforme figura 9.1.

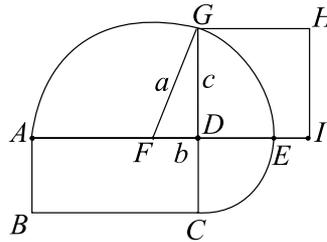


Fig. 9.1

Construamos, usando apenas régua e compasso, um quadrado com área igual à do retângulo dado. Descrevamos o processo passo a passo.

Passo 1. Usando uma régua, prolongue, para a direita, o lado AD .

Passo 2. Centre o compasso em D , e com abertura até C , marque o ponto E , isto é, $\overline{DC} = \overline{DE}$.

Passo 3. Usando régua e compasso, determine o ponto médio F do segmento AE .

Passo 4. Centre o compasso em F e, com abertura $\overline{FE} = \overline{AF}$, construa o semicírculo como na figura 9.1.

Passo 5. Usando régua e compasso, trace uma perpendicular ao segmento AE , passando por D , até encontrar o ponto G pertencente ao semicírculo construído no Passo 4.

Passo 6. Construa, com régua e compasso, o quadrado $\square GHID$.

Afirmamos que a área do retângulo $\square ABCD$ é igual à área do quadrado $\square GHID$. De fato,

$$\begin{aligned}
 \text{Área}(\square ABCD) &= \overline{AD} \cdot \overline{DC} \\
 &= \overline{AD} \cdot \overline{DE} \\
 &= (a + b) \cdot (a - b) \\
 &= a^2 - b^2 \\
 &= c^2 \\
 &= \text{Área}(\square GHID)
 \end{aligned}$$

em que a, b e c estão representados na figura 9.1.

A quadratura do triângulo

Consideremos o triângulo $\triangle ABC$, como na figura 9.2(a).

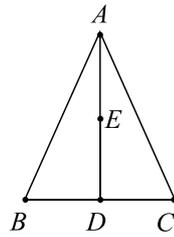


Fig. 9.2(a)

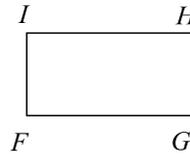


Fig. 9.2(b)

Façamos, como no caso anterior, a quadratura deste triângulo.

Passo 1. Construa a perpendicular ao lado BC , passando pelo vértice A e intersectando BC no ponto D .

Passo 2. Determine o ponto médio E do segmento AD (altura relativa ao lado BC).

Passo 3. Construa o retângulo $\square FGHI$ de modo que $\overline{FG} = \overline{BC}$ e $\overline{FI} = \overline{DE}$. Veja figura 9.2(b).

Afirmamos que a área do triângulo $\triangle ABC$ é igual à do retângulo $\square FGHI$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
 \text{Área}(\triangle ABC) &= \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AD} \\
 &= \overline{BC} \cdot \frac{\overline{AD}}{2} \\
 &= \overline{BC} \cdot \overline{DE} \\
 &= \overline{FG} \cdot \overline{FI} \\
 &= \text{Área} \square FGHI.
 \end{aligned}$$

Como aprendemos, com a quadratura do retângulo, a partir daqui se pode construir a quadratura do triângulo.

Para não nos alongarmos mais nesta introdução, não faremos a quadratura de um polígono qualquer.

A quadratura da lúnula

Nos exemplos acima, as quadraturas foram efetuadas usando apenas Matemática elementar. No entanto, quando passamos para outras figuras curvilíneas, como o círculo ou a parábola, as técnicas até então conhecidas revelam-se insuficientes. Foi Arquimedes o primeiro matemático a vislumbrar um método que contornava as dificuldades da Matemática de seu tempo para fazer a quadratura de figuras curvilíneas. Suas idéias, que continuam o gérmen do Cálculo Integral, foram inicialmente usadas para calcular a área de um setor da parábola. No linguajar moderno, o

procedimento de Arquimedes está contido no primeiro exemplo desta aula. Antes, façamos a quadratura de uma Lúnula de Hipócrates.

Ao que parece, o primeiro matemático a calcular a área exata de uma figura delimitada por curvas foi Hipócrates de Chios, o mais famoso matemático grego do século V a.C.

Antes de efetuarmos a quadratura da Lúnula, estabeleçamos a seguinte proposição.

Proposição 1. *Segmentos circulares semelhantes estão na mesma razão que os quadrados de suas bases.*

Tal proposição também é atribuída a Hipócrates de Chios.

Consideremos os segmentos circulares semelhantes conforme mostrados, respectivamente, nas figuras 9.3(a) e 9.3(b).

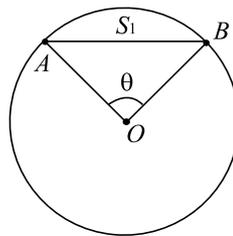


Fig. 9.3(a)

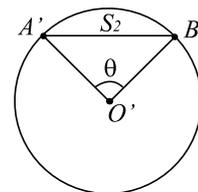


Fig. 9.3(b)

Designando suas áreas respectivas por S_1 e S_2 teremos, de acordo com a Proposição 1, que

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}.$$

Passemos à quadratura de uma Lúnula como feito por Hipócrates de Chios. Construamos a seguinte Lúnula, conforme figura 9.4.

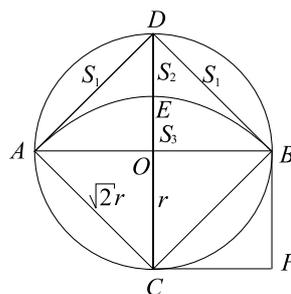


Fig. 9.4

Consideremos o segmento AB cujo ponto médio é O . Tracemos o círculo de centro O e raio OB . Construamos o diâmetro do círculo perpendicular a AB e designemos suas extremidades por C e D , conforme figura 9.4. Construamos o setor circular centrado em C e de raio AC , de acordo com a figura 9.4, e que intersecta o diâmetro CD no ponto E . Consideremos a Lúnula $AEBD$.

Proposição 2. *A Lúnula $AEBD$ é quadrável.*

Demonstração. Designemos por S_1 a área de cada um dos dois segmentos circulares da circunferência $ACBD$ determinados pelos segmentos de retas AD e DB . Por S_2 denotemos a área da figura limitada pelo arco \widehat{AEB} e pelos segmentos AD e DB , e por S_3 a área da região limitada pelo arco \widehat{AEB} e pelo diâmetro AB . A fim de usarmos a Proposição 1 devemos observar que os segmentos circulares ABE e aquele sobre a circunferência $ACBD$ determinada pelo segmento AD (ou DB) são semelhantes. Portanto, designando por r o raio da circunferência passando pelos pontos A, C, B e D , tem-se

$$\frac{S_1}{S_3} = \frac{(\sqrt{2}r)^2}{(2r)^2} = \frac{1}{2}$$

o que implica

$$S_1 = \frac{S_3}{2}.$$

Daí, segue-se que

$$\begin{aligned} \text{Área da Lúnula } AEBD &= 2S_1 + S_2 \\ &= S_2 + S_3 \\ &= \text{Área } (\triangle ABD) \\ &= \frac{2r^2}{2} \\ &= r^2. \end{aligned}$$

que é exatamente a área do quadrado $\square OBFC$, conforme mostrado na figura 8.4, o que conclui a demonstração de que a Lúnula em estudo é quadrável. \square

Muito embora o procedimento usado por Hipócrates de Chios seja extremamente elegante e criativo, ele não se aplica a outras figuras de lados curvilíneos, como é o caso do círculo. Prova-se que não se pode efetuar a quadratura de círculos usando-se apenas régua e compasso. Para tais tipos de figuras faz-se necessário introduzir um método que envolve um processo de limite, cujas origens remontam a Arquimedes, por meio de uma técnica chamada *Método de Exaustão* usada por ele em sua obra *A Quadratura da Parábola*¹. Remetemos o leitor ao apêndice desta aula em

¹ Quadrature of the Parabola, Great Books of Western World, Vol. 10, pp. 527-537.

que se mostra a quadratura da parábola de um modo semelhante ao que fez o sábio de Siracusa.

O procedimento inaugurado por Arquimedes deu origem ao chamado *Cálculo Integral*, cuja essência será ilustrada nos dois exemplos a seguir.

Exemplo 88. Consideremos a função $f(x) = x$, para $0 \leq x \leq 1$, e suponhamos que se queira calcular a área da região abaixo do gráfico de f e acima do eixo ox , para $0 \leq x \leq 1$. Vide figuras 9.5.

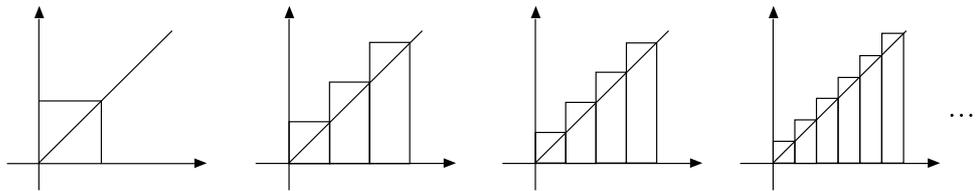


Fig. 9.5(a)

Fig. 9.5(b)

Fig. 9.5(c)

Fig. 9.5(d)

Inicialmente fazemos uma aproximação da figura por meio de retângulos. A partir daqui o leitor deverá redobrar a atenção a fim de apreender a essência do método que, muito embora esteja sendo aplicado a um caso específico, é bastante geral. Inicialmente, subdividimos o intervalo $[0, 1]$ em n subintervalos de comprimentos iguais. Portanto, $[0, 1]$ ficará subdividido nos intervalos

$$\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \dots, \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}\right].$$

A seguir, construamos os retângulos, conforme indicado nas figuras 9.5, da seguinte maneira:

Primeiro Retângulo. O primeiro retângulo tem como base o intervalo $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ e altura $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$. Daí, segue-se que sua área é dada por

$$S_1 = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}.$$

Segundo Retângulo. O segundo retângulo tem como base o intervalo $\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$ e como altura $f\left(\frac{2}{n}\right)$. Daí, segue-se que sua área é dada por

$$S_2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} = \frac{2}{n^2}.$$

i -ésimo Retângulo. O i -ésimo retângulo tem como base o intervalo $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ e como altura $f\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{i}{n}$. Portanto, sua área é dada por

$$S_i = \frac{1}{n} \cdot \frac{i}{n} = \frac{i}{n^2}.$$

n -ésimo Retângulo. O n -ésimo retângulo tem como base o intervalo $[\frac{n-1}{n}, 1]$ e como altura $f(1) = 1 = \frac{n}{n}$. Portanto, sua área é dada por

$$S_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n} = \frac{n}{n^2}.$$

A área total A_n desses retângulos é

$$A_n = S_1 + S_2 + \dots + S_i + \dots + S_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{i}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}.$$

que pode ser reescrita como

$$A_n = \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \dots + i + \dots + n).$$

Usando o fato de que

$$1 + 2 + \dots + i + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

teremos

$$A_n = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{n} \right].$$

Análise a figura e observe que o valor de S aproxima, por excesso, a área procurada. À medida que aumentamos o valor de n o erro cometido na aproximação diminui, de modo que o valor será exato quando fizermos $n \rightarrow +\infty$. Conseqüentemente, designando por A a área a ser determinada, teremos

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{n} \right] = \frac{1}{2}$$

O ponto crucial a ser observado é que no processo do cálculo da área usamos como ingrediente básico a noção de limite, que somente começou a ser desenvolvido com o advento do Cálculo e que não era conhecido dos Gregos Antigos.

Adiantando um pouco a notação: o processo final do procedimento acima é designado por

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

Exemplo 89. Consideremos a função $f(x) = x^2$ com x restrito ao intervalo $[-1, 1]$. Seu gráfico é o setor de uma parábola conforme figura 9.6(a). Nosso problema consiste em determinar a área da região OAB . Em virtude da simetria do gráfico é suficiente calcular a área da região OAC e multiplicá-la por dois. Inicialmente calculemos a área da figura OAD , que é a região abaixo do gráfico de f , conforme figura 9.6(b), com x restrito ao intervalo $[0, 1]$.

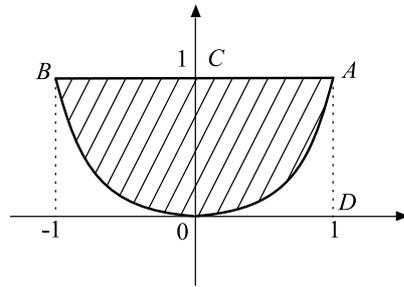


Fig. 9.6(a)

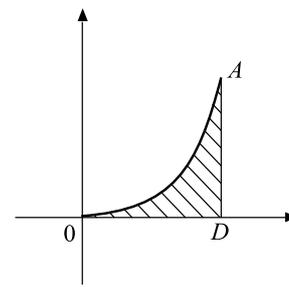


Fig. 9.6(b)

Inicialmente, subdividamos o intervalo $[0, 1]$ em n subintervalos de comprimentos iguais. Portanto, $[0, 1]$ ficará subdividido nos intervalos

$$\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \dots, \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} = 1\right].$$

A seguir, construímos os retângulos, conforme indicado nas figuras 9.7, da seguinte maneira:

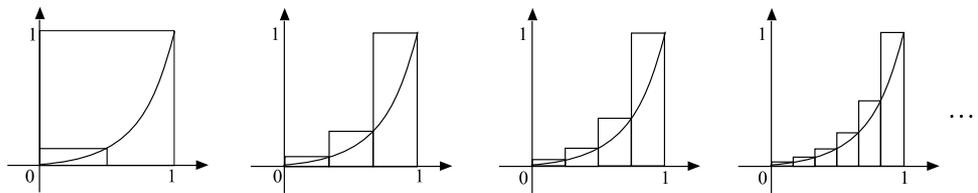


Fig. 9.7(a)

Fig. 9.7(b)

Fig. 9.7(c)

Fig. 9.7(d)

Primeiro Retângulo. O primeiro retângulo tem como base o intervalo $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ e altura $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$. Daí, segue-se que sua área é dada por

$$S_1 = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^3}.$$

Segundo Retângulo. O segundo retângulo tem como base o intervalo $\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$ e como altura $f\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2^2}{n^2}$. Daí, segue-se que sua área é dada por

$$S_2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{2^2}{n^2} = \frac{2^2}{n^3}.$$

i -ésimo Retângulo. O i -ésimo retângulo tem como base o intervalo $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ e como altura $f\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{i^2}{n^2}$. Portanto, sua área é dada por

$$S_i = \frac{1}{n} \cdot \frac{i^2}{n^2} = \frac{i^2}{n^3}.$$

n -ésimo Retângulo. O n -ésimo retângulo tem como base o intervalo $[\frac{n-1}{n}, 1]$ e como altura $f(1) = 1 = \frac{n^2}{n^2}$. Portanto, sua área é dada por

$$S_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{n^2}{n^2} = \frac{n^2}{n^3}.$$

A área total A_n desses retângulos é

$$A_n = S_1 + S_2 + \dots + S_i + \dots + S_n = \frac{1}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \dots + \frac{i^2}{n^3} + \dots + \frac{n^2}{n^3}.$$

que pode ser reescrita como

$$A_n = \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \dots + i^2 + \dots + n^2).$$

Usando o fato de que

$$1^2 + 2^2 + \dots + i^2 + \dots + n^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

e daí

$$A_n = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}.$$

Analisemos as figuras 9.7 e observemos que o valor de S aproxima, por excesso, a área procurada. À medida que aumentamos o valor de n , o erro cometido na aproximação diminui, de modo que o valor será exato quando fizermos $n \rightarrow +\infty$. Conseqüentemente, designando por A a área da figura ODA , representada na figura 9.6(b), teremos

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) = \frac{1}{3}$$

Daí a área total A_p do segmento da parábola é

$$A_p = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \right) = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Usando a notação como no exemplo anterior, teremos

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

2 Área sob uma curva: o caso geral

Seja

$$y = f(x), \quad a \leq x \leq b$$

uma função contínua e não-negativa no intervalo fechado $[a, b]$. A área sob a curva que é o gráfico da função $y = f(x)$, de $x = a$ até $x = b$, é a

área A da região plana limitada pelo gráfico de $y = f(x)$, pelo eixo ox e as retas $x = a$ e $x = b$. Para calcular essa área, seguiremos procedimentos semelhantes aos desenvolvidos nos exemplos anteriores.

Assim, inicialmente, subdividiremos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, de comprimentos não necessariamente iguais, considerando n pontos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ tais que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Façamos

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n$$

e seja

$$\lambda = \max \{ \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n \}.$$

As retas $x = x_0, x = x_1, \dots, x = x_{n-1}, x = x_n$ dividem a região em faixas verticais, conforme figura 9.8.

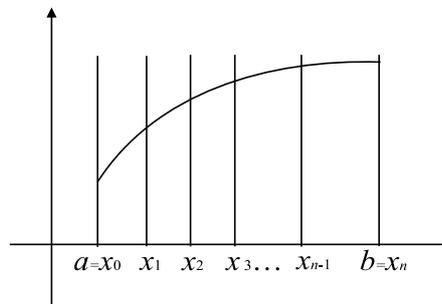


Fig. 9.8

Sendo f contínua, e supondo que os intervalos tenham comprimentos pequenos, a variação de f em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ será bastante pequena, de modo que uma boa aproximação de $f(x)$, $x \in [x_{i-1}, x_i]$, será obtida escolhendo-se $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ e fazendo-se $f(\xi_i) \cong f(x)$ para $x \in [x_{i-1}, x_i]$. Aproximar $f(x)$ por $f(\xi_i)$ implica que a área de cada uma das faixas representadas na figura 9.9 é aproximadamente igual à área do retângulo cuja base é o intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ e cuja altura possui comprimento $f(\xi_i)$.

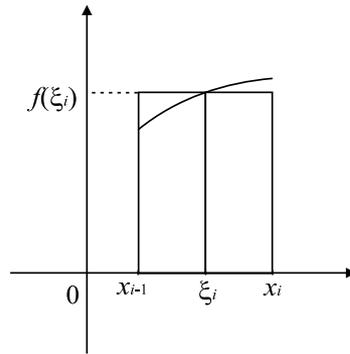


Fig. 9.9

A soma das áreas destes retângulos é dada por

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$

À medida que os comprimentos dos subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ diminuem, o erro cometido ao aproximar $f(x)$ por $f(\xi_i)$ torna-se cada vez menor, de modo que é natural definir a área A como sendo

$$A = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i,$$

que é, *mutatis mutandis*, o que foi feito no exemplo 1, em que $\|P\| = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$. Seguindo as notações introduzidas nos exemplos 88 e 89, escrevemos

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

3 A definição de integral

As considerações anteriores nos conduzem, naturalmente, à seguinte definição de integral.

Dada uma função $y = f(x)$ definida em um intervalo $[a, b]$, sejam

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

e ξ_i um ponto arbitrário do subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, de comprimento $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. O conjunto $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$ é chamado uma *partição* do intervalo $[a, b]$.

Suponhamos que a soma

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

tenha um limite finito quando

$$\|P\| = \max \{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \max \{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$$

tende a zero (o número $\|P\|$ é chamado *norma* da partição P). Caso isso aconteça, esse limite é chamado *integral definida* de $f(x)$ no intervalo $[a, b]$ e designada por

$$\int_a^b f(x)dx.$$

e diz-se então que f é integrável em $[a, b]$.

A integral definida acima é também chamada *integral de Riemann* e goza das seguintes propriedades:

Se $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ forem funções integráveis no intervalo $[a, b]$ e se $\lambda \in \mathbb{R}$, então:

(a) $f + g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável e

$$\int_a^b [(f + g)(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx;$$

(b) $\lambda f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável e

$$\int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx;$$

(c) Se $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$, então $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ e este valor representa a área sob o gráfico de f acima do eixo ox e entre as retas $x = a$ e $x = b$. Esta propriedade é equivalente a: se $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

Exemplo 90. Nos dois exemplos anteriores vimos que $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$ e $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$. Calculemos a integral de uma função constante. Seja $f(x) = k$ para todo $x \in [a, b]$, em que k é uma constante. Consideremos uma partição $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$ e $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ para cada $i = 1, \dots, n$. Teremos, então,

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n k(x_i - x_{i-1}) = k \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = k(b - a).$$

Isto significa que todas as somas como a acima são iguais a k e como o limite de constante é a própria constante, teremos

$$\int_a^b k dx = k(b - a).$$

4 Área entre duas curvas

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções definidas em um mesmo intervalo $[a, b]$. Para fixar as idéias, suponha que $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, como mostrado na figura 9.10. Como se vê, o gráfico de $f(x)$ está acima do gráfico de $g(x)$.

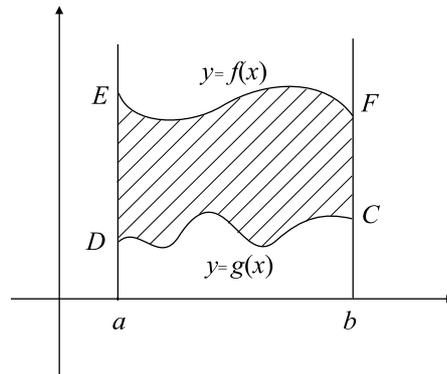


Fig. 9.10

Suponhamos que queiramos calcular a área da região limitada pelos dois gráficos, ou seja, a área da região $DCFE$. Observemos que

$$(\text{Área de } abCD) + (\text{Área de } DCFE) = \text{Área de } abFE,$$

e portanto

$$A = \text{Área de } DCFE = (\text{Área de } abFE) - (\text{Área de } abCD).$$

Desde que

$$\text{Área de } abFE = \int_a^b f(x)dx, \quad (\text{Área de } abCD) = \int_a^b g(x)dx,$$

segue-se que

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

Percebe-se, pelo que foi desenvolvido nos dois exemplos vistos antes, mesmo sendo casos simples, que calcular a integral de Riemann usando a definição é algo extremamente trabalhoso pois manipular as somas parciais e depois calcular seu limite é algo quase que impraticável quando tratamos com funções que não sejam tão simples quanto $f(x) = x$ ou $f(x) = x^2$. Em vista disso, devemos introduzir um resultado, chamado *teorema fundamental do Cálculo*, que nos permitirá calcular grande parte das integrais importantes que surgem no Cálculo Integral.

Para isto necessitaremos de um conceito preliminar.

Dada uma função $f(x)$ definida em um intervalo I , diz-se que uma outra função $F(x)$, definida e derivável no intervalo I , é uma *primitiva* ou *antiderivada* de $f(x)$ se

$$\frac{dF}{dx}(x) = F'(x) = f(x)$$

para todo $x \in I$.

Por exemplo, $F(x) = \frac{x^2}{2}$ é primitiva de $f(x) = x$, assim como $F_1(x) = \frac{x^2}{2} + C$, qualquer que seja a constante C , também é primitiva da mesma f , donde se conclui que primitiva de uma função f , caso exista, pode não ser única. Isto é um caso particular do teorema a seguir.

Teorema 14. *Sejam $F(x)$ e $G(x)$ primitivas da função $f(x)$ no intervalo I . Então existe uma constante C tal que $F(x) = G(x) + C$, ou seja, duas primitivas de uma mesma função em um intervalo diferem por uma constante.*

Demonstração. Como $F(x)$ e $G(x)$ são primitivas de $f(x)$, tem-se que $F'(x) = f(x)$ e $G'(x) = f(x)$ e daí $F'(x) = G'(x)$ e assim $F'(x) - G'(x) = 0$, para todo $x \in I$. Como $(F - G)' = F' - G'$, teremos $(F - G)'(x) = 0$, para todo $x \in I$. Assim, $F(x) - G(x) = C$, para alguma constante C e daí $F(x) = G(x) + C$ para todo $x \in I$, o que conclui a demonstração do teorema. \square

Exemplo 91. Consideremos a função $f(x) = x^n$ para $n \neq -1$. Usando a regra de derivação dada na aula 5, temos que $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ é primitiva de $f(x)$.

Exemplo 92. A função $f(x) = 3x^2 + 2x + 4$ tem $F(x) = x^3 + x^2 + 4x + C$ como sua primitiva.

Nesses dois exemplos as primitivas foram obtidas por simples inspeção, usando o que se sabia das técnicas elementares de derivação. No entanto, nem sempre as coisas são tão simples. Basta observar a função $f(x) = x(x^2 + 10)^{100}$ e tentar calcular sua primitiva por meio de uma simples manipulação de derivadas. Tente também calcular uma primitiva de $f(x) = x \cos x$. Para funções como essas, e outras que aparecerão mais adiante, precisamos de técnicas mais sofisticadas de primitivação (cálculo de primitivas), que serão vistas na próxima lição.

Seja $F(x)$ uma primitiva de $f(x)$ no intervalo I . Pelo visto anteriormente, a primitiva geral de $f(x)$ é dada por

$$F(x) + C$$

em que C é uma constante arbitrária. Esta expressão é chamada *integral indefinida* de $f(x)$ sendo designada por

$$\int f(x)dx.$$

Assim

$$\int f(x) = F(x) + C.$$

O símbolo \int é chamado *senal de integral*, x é chamada *variável de integração*, $f(x)$ é chamada *integrando* e C é chamada *constante de integração*.

Uma observação útil, que segue da definição de integral indefinida, é que

$$\frac{d}{dx} \int f(x)dx = f(x)$$

e

$$\int f'(x)dx = f(x) + C.$$

A operação que nos permite calcular primitivas é linear. Mais precisamente, temos o seguinte teorema.

Teorema 15. *Suponhamos que $f(x)$ e $g(x)$ possuam integrais indefinidas no mesmo intervalo I . Então*

$$\int [af(x) + bg(x)]dx = a \int f(x)dx + b \int g(x),$$

em que a e b são constantes arbitrárias.

Demonstração. Segue-se do que observamos acima que

$$\frac{d}{dx} \int [af(x) + bg(x)]dx = af(x) + bg(x).$$

Por outro lado, pelas regras usuais de derivação, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[a \int f(x)dx + b \int g(x)dx \right] &= a \frac{d}{dx} \int f(x)dx + b \frac{d}{dx} \int g(x)dx = \\ &af(x) + bg(x). \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\int [af(x) + bg(x)]dx = a \int f(x)dx + b \int g(x)dx.$$

o que conclui a demonstração. \square

Deve-se observar que esta propriedade é válida para um número finito qualquer de funções. Mais precisamente, sejam a_1, \dots, a_n números reais e f_1, \dots, f_n funções definidas em um mesmo intervalo, então

$$\int \left(\sum_{i=1}^n a_i f_i(x) \right) dx = \sum_{i=1}^n a_i \int f_i(x) dx.$$

Exemplo 93. Para ilustrar o uso deste teorema, calculemos

$$\int \left(5x^4 - 6x^2 + \frac{2}{x^2} \right) dx.$$

Usando o teorema 2 e a observação subsequente, teremos

$$\begin{aligned} \int \left(5x^4 - 6x^2 + \frac{2}{x^2} \right) dx &= 5 \int x^4 dx - 6 \int x^2 dx + 2 \int x^{-2} dx \\ &= x^5 - 2x^3 - \frac{2}{x} + C. \end{aligned}$$

Observemos que o cálculo de integrais definidas usando simplesmente a definição é algo quase que impraticável. No entanto, para contornar esta dificuldade existe um importante teorema, o *teorema fundamental do Cálculo*, que nos permitirá calcular integrais definidas, desde que conheçamos uma primitiva da função a ser integrada.

Antes de abordar o teorema fundamental do Cálculo, demonstremos o teorema do valor médio para integrais.

Teorema 16. (Teorema do valor médio para integrais) *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existe $c \in [a, b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a).$$

Demonstração. Desde que f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$ ela atinge máximo M e mínimo m neste intervalo. Assim,

$$m \leq f(x) \leq M, \text{ para todo } x \in [a, b].$$

Uma simples integração nos fornece

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$$

ou, equivalentemente,

$$m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

e, pelo teorema do valor intermediário, existe $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$$

o que conclui a demonstração do teorema. □

Teorema 17. (Teorema fundamental do Cálculo) *Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e seja $F(x)$ uma primitiva de f . Então*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Deve-se observar que, definindo

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

tem-se

$$F'(x) = f(x)$$

ou

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$$

isto é, a função $F(x)$ é uma primitiva de f . De onde se conclui-se que, usando o fato de que toda função contínua é integrável em intervalos fechados e limitados, toda função contínua possui uma primitiva dada por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Façamos uma demonstração geométrica do teorema fundamental do Cálculo usando a interpretação da integral de Riemann como a área sob o gráfico de funções. Para isto consideremos o gráfico da função contínua e positiva $y = f(x)$ para $a \leq x \leq b$. Assim, a integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

representa a área da figura limitada superiormente pelo gráfico da função $y = f(x)$, lateralmente pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$ e inferiormente pelo eixo ox , conforme figura 9.11.

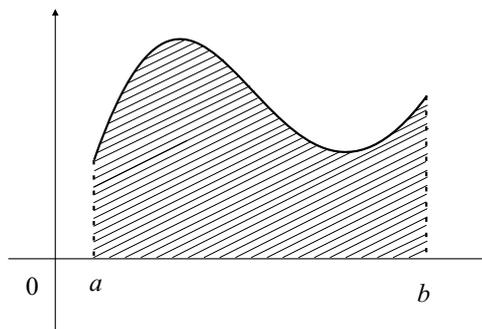


Fig. 9.11

Designemos por $A(x)$ a função

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt$$

a qual representa a área da região hachurada na figura 9.12.

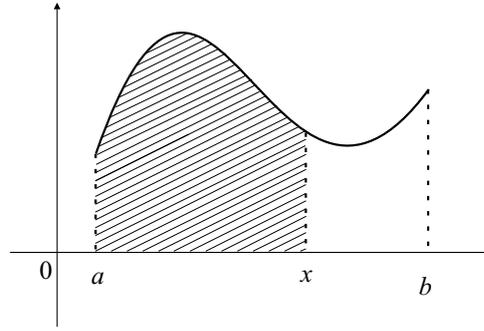


Fig. 9.12

Calculemos $\frac{dA}{dx}(x)$. Para tal fim, tome x e dê a ele um acréscimo Δx que, para simplificar os cálculos, será considerado positivo. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} &= \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{\Delta x} \\ &= \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \\ &= f(\xi) \end{aligned}$$

em que $\xi \in [x, x + \Delta x]$ é obtido via teorema do valor médio para integrais. Por continuidade, $f(\xi) \rightarrow f(x)$, quando $\Delta x \rightarrow 0$ e assim $F'(x) = f(x)$, o que conclui a demonstração do teorema fundamental do Cálculo.

Exemplo 94. O complicado cálculo de

$$\int_a^b xdx$$

no exemplo 88 pode ser substituído de maneira simples, usando o teorema fundamental do Cálculo, observando que

$$F(x) = \frac{x^2}{2}$$

é uma primitiva da função $f(x) = x$. Assim,

$$\int_a^b xdx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

Exemplo 95. Outro exemplo que foi resolvido de maneira bastante trabalhosa foi o da integral

$$\int_0^1 x^2 dx$$

e que pode, usando o teorema fundamental do Cálculo, ser resolvido em apenas uma linha se observarmos que

$$F(x) = \frac{x^3}{3}$$

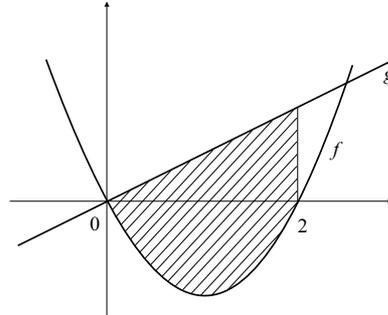
é uma primitiva da função $f(x) = x^2$. Assim

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

5 Exercícios resolvidos

1. Calcular a área da região R situada entre os gráficos das funções f e g no intervalo $[0, 2]$ sendo $f(x) = x(x - 2)$ e $g(x) = \frac{x}{2}$.

Solução. Os gráficos estão representados na seguinte figura



Desde que $f \leq g$ no intervalo $[0, 2]$, podemos escrever a área $A(R)$ da região R como

$$A(R) = \int_0^2 [g(x) - f(x)] dx = \int_0^2 \left(\frac{5}{2}x - x^2 \right) dx = \frac{7}{3}.$$

2. Encontre a equação da curva passando por $(1, 5)$ e cuja tangente em (x, y) possui inclinação $4x$.

Solução. Relembrando que a derivada de uma função $y = f(x)$ representa a inclinação da reta tangente ao seu gráfico, tem-se que $f'(x) = 4x$. Desse modo, deve-se encontrar a primitiva de $4x$ que, escrita na notação introduzida nesta aula, é dada por

$$f(x) = \int 4x dx = 2x^2 + C$$

por hipótese, o gráfico da função passa pelo ponto $(1, 5)$, ou seja, $f(1) = 5$ e daí $f(1) = 2 + C = 5$. Assim $C = 5$. Logo $f(x) = 2x^2 + 5$.

3. Calcule $\int (x + 1)(x - 1) dx$

Solução.

$$\begin{aligned} \int (x + 1)(x - 1) dx &= \int (x^2 - 1) dx \\ &= \int x^2 dx - \int dx \\ &= \frac{x^3}{3} - x + C \end{aligned}$$

4. Calcule $\int [g(x)]^3 g'(x) dx$

Solução. Usando a regra da cadeia, obtemos

$$\frac{d}{dx} [g(x)]^4 = 4 [g(x)]^3 g'(x)$$

de modo que

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{4} g(x)^4 \right] = [g(x)]^3 g'(x)$$

Em vista disso, $\frac{1}{4} [g(x)]^4$ é uma primitiva de $[g(x)]^3 g'(x)$. Por conseguinte,

$$\int [g(x)]^3 g'(x) dx = \frac{1}{4} [g(x)]^4 + C,$$

em que C é a constante de integração.

6 Exercícios propostos

1. Achar a área sob as curvas dadas, entre os extremos indicados

- (a) $f(x) = x^3$ entre $x = 1$ e $x = 5$;
- (b) $f(x) = x$ entre $x = 0$ e $x = 2$;
- (c) $f(x) = x^4$ entre $x = -1$ e $x = 4$;
- (d) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ entre $x = 1$ e $x = 2$.

2. Achar a área entre as curvas $y = x$ e $y = x^2$.

3. Achar a área entre as curvas $y = x$ e $y = x^3$.

4. Achar a área entre as curvas $y = x^2$ e $y = x^3$.

5. Achar a área entre a curva $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ e o eixo ox , entre $1 \leq x \leq 3$. Esboce a curva.

6. Calcule as seguintes integrais

(a) $\int (x + 1)dx;$

(b) $\int (3x - 2)dx;$

(c) $\int (x^2 + x^3 + x^4)dx;$

(d) $\int x^{\frac{3}{4}};$

(e) $\int x^2(x^2 - 1)dx.$

7 Respostas dos exercícios propostos

1. (a) 156
(b) 2
(c) 205
(d) $\frac{1}{2}$
2. $\frac{1}{6}$
3. $\frac{1}{4}$
4. $\frac{1}{12}$
5. 0
6. (a) $\frac{x^2}{2} + x + C$
(b) $\frac{3}{2}x^2 - 2x + C$
(c) $\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + C$
(d) $\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + C$
(e) $\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + C$

Nesta aula você aprendeu:

- o processo de quadratura de certas figuras planas;
- a noção de integral definida e integral indefinida;
- a calcular integrais definidas usando o teorema fundamental do Cálculo.

8 Apêndice

A quadratura da parábola segundo Arquimedes

A *Quadratura da Parábola*, já citada nesta aula, é uma das obras fundamentais de Arquimedes que prima pela elegância e estética como também é o gérmen do Cálculo Integral. Na Introdução da *Quadratura da Parábola*, dirigida a um certo Dositheus, Arquimedes faz menção a um problema que preocupava os geômetras de então que haviam tentado, sem muito sucesso, encontrar uma área *retilínea* igual à de um círculo ou de um segmento de círculo, ou seja, tais geômetras tentavam fazer a quadratura do círculo. Mais adiante ele afirma ter conseguido encontrar a solução para o cálculo da área de um segmento de parábola.

Antes de chegar ao seu método, vários resultados são demonstrados. Enunciemos alguns deles, à guisa de ilustração. Ele começa com a seguinte proposição.

Proposição 1. *Se de um ponto P sobre uma parábola for traçada uma linha reta que é ou o seu eixo ou paralela ao seu eixo, como PV , e se QQ' for uma corda paralela à tangente à parábola em P encontrando PV em V , então $QV = VQ'$. Reciprocamente, se $QV = VQ'$, a corda QQ' será paralela à tangente em P .*

Veja a figura 9.13.

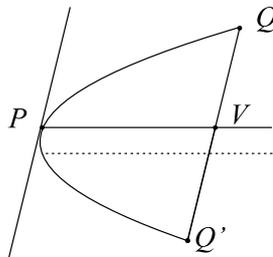


Fig. 9.13

Outro resultado é a proposição 21 enunciada a seguir.

Proposição 21. *Se Qq for a base e se P for o vértice de algum segmento parabólico, e se R for o vértice do segmento parabólico determinado por PQ , então*

$$\triangle PQq = 8 \triangle PRQ.$$

Estamos representando por $\triangle ABC$ a área do triângulo cujos vértices são os pontos A, B e C . Veja a figura 9.14 para uma visualização dessa proposição.

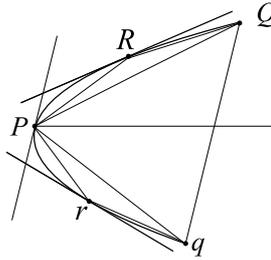


Fig. 9.14

Muito embora não seja dito explicitamente, na Proposição 21 o segmento de reta Qq é paralelo à reta tangente à parábola em P . Observe, também, e isto é enfatizado ao final da demonstração da Proposição 21, que

$$\triangle PQq = 8 \triangle Prq.$$

Assim,

$$2 \triangle PQq = 8 \triangle PRQ + 8 \triangle Prq$$

e então

$$\triangle PRQ + \triangle Prq = \frac{1}{4} \triangle PQq$$

No próximo resultado Arquimedes demonstra o seguinte.

Proposição 22. *Se existir uma série de áreas A, B, C, D, \dots cada uma das quais é quatro vezes a seguinte, e se a maior, A , for igual à do triângulo PQq inscrito em um segmento parabólico PQq e tendo a mesma base que a do triângulo e igual altura, então*

$$A + B + C + D + \dots < (\text{Área do Segmento } PQq).$$

O leitor interessado deverá consultar a obra de Arquimedes (já citada anteriormente) para estudar as demonstrações das proposições 1, 21 e 22, como também de outras, assim como deverá consultar George F. Simmons²

Para verificarmos como executar o método de Arquimedes, chamado *Método de Exaustão*, introduzido por Eudóxio, pois consiste em exaurir o segmento parabólico por meio de triângulos nele inscritos, consideremos o segmento parabólico ilustrado na figura 9.15.

² George F. Simmons, *Cálculo com Geometria Analítica*, Vol. 2, pág. 682-684, Ed. McGraw-Hill

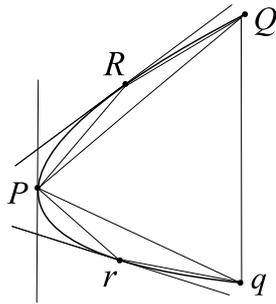


Fig. 9.15

Como visto anteriormente

$$\triangle PRQ + \triangle Prq = \frac{1}{4} \triangle PQq.$$

Vejamos o que acontece com o segmento parabólico PRQ se procedermos como neste primeiro processo. Fazemos uma ampliação da figura 9.15.

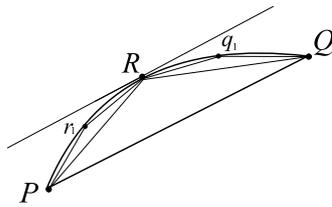


Fig. 9.16

Assim,

$$\triangle Pr_1R + \triangle Rq_1Q = \frac{1}{4} \triangle PRQ$$

e procedendo de maneira análoga conforme figura 9.17

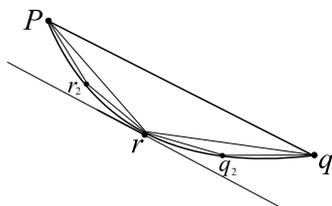


Fig. 9.17

teremos

$$\triangle Pr_2r + \triangle rq_2q = \frac{1}{4} \triangle Prq.$$

Desse modo, a soma das áreas de todos os triângulos construídos até agora (que é menor do que a área do segmento parabólico PQq) é dada por

$$\begin{aligned} \Delta PQq + \Delta PRQ + \Delta Prq + \Delta Pr_1R + \Delta Rq_1Q + \Delta Pr_2r + \Delta rq_2q &= \\ \Delta PQq + \frac{1}{4} \Delta PQq + \frac{1}{4} \Delta PRQ + \frac{1}{4} \Delta Prq &= \\ \Delta PQq + \frac{1}{4} \Delta PQq + \frac{1}{4} (\Delta PRQ + \Delta Prq) &= \\ \Delta PQq + \frac{1}{4} \Delta PQq + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \Delta PQq &= \\ \left[1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right] \Delta PQq < (\text{Área do segmento } PQq). \end{aligned}$$

Repetindo este processo indefinidamente, teremos

$$\text{Área do segmento } PQq = \Delta PQq \left[1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots\right]$$

e lembrando que a soma de uma série geométrica infinita com razão r , $0 < |r| < 1$, é dada por

$$1 + r + r^2 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} r^j = \frac{1}{1-r},$$

Dessa maneira

$$\begin{aligned} \text{Área do segmento } PQq &= \Delta PQq \left[\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^j \right] \\ &= \Delta PQq \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{4}{3} \cdot \Delta PQq. \end{aligned}$$

Vejam, então, que a integral de Riemann jazia adormecida desde os idos da época de Arquimedes.

Aula 10

Cálculo de primitivas ou de antiderivadas

Objetivos

- Calcular primitivas de funções usando regras elementares de primitivação.
- Calcular primitivas de funções pelo método da substituição.
- Calcular primitivas de funções usando o método da integração por partes.

Esta aula será dedicada às técnicas que nos permitirão calcular primitivas que não sejam obtidas por simples inspeção. Recordemos que $F(x)$ é uma primitiva ou antiderivada de uma função $f(x)$ em um intervalo I se $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in I$, sendo que o símbolo $\int f(x)dx$ designa

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

1 Regras elementares para cálculo de primitivas

Por questões de completeza estabeleceremos não apenas novas regras como também recordaremos outras que já foram citadas na aula 8. Nas regras a seguir, o símbolo C representará sempre uma constante arbitrária.

Regra 1. $\int 0 dx = C.$

Regra 2. $\int 1 \, dx = x + C.$

Regra 3. $\int a \, dx = ax + C,$ em que a é uma constante.

Regra 4. $\int x^r \, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C,$ para qualquer número racional $r \neq -1$

Regra 5. $\int a f(x) dx = a \int f(x) dx,$ qualquer seja a constante a

Regra 6. $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$

Regra 7. $\int (f(x) - g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx.$

Regra 8. $\int (g(x))^r g'(x) dx = \frac{1}{r+1} (g(x))^{r+1} + C,$ para todo número racional $r \neq -1.$

Outras técnicas de integração serão vistas. Antes de passarmos a elas faremos uma seqüência de exemplos, a fim de que o leitor fixe definitivamente as regras já estabelecidas.

Exemplo 96. Calculemos a integral

$$\int x^6 dx$$

Neste caso basta aplicar diretamente a regra 4.

$$\int x^6 dx = \frac{1}{7} x^7 + C$$

Exemplo 97. Calculemos

$$\int \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx$$

Observemos inicialmente que

$$\int \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{5}} dx.$$

Agora, tal como no exemplo anterior, basta aplicar diretamente a regra 4, para obter

$$\int \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx = \frac{5}{4} x^{\frac{4}{5}} + C.$$

Exemplo 98. Calculemos a integral indefinida

$$\int (2x^2 - 5x + 3) dx.$$

Aplicando as regras 5, 6 e 7, obtemos

$$\int (2x^2 - 5x + 3) dx = 2 \int x^2 dx - 5 \int x dx + \int 3 dx$$

Segue-se das regras 3 e 4 que

$$\int (2x^2 - 5x + 3) dx = \frac{2}{3} x^3 - \frac{5}{2} x^2 + 3x + C.$$

Exemplo 99. Calculemos a seguinte integral indefinida

$$\int (3s + 4)^2 ds.$$

Observemos que

$$\int (3s + 4)^2 ds = \frac{1}{3} \int (3s + 4)^2 3 ds$$

Assim, podemos aplicar a regra 8 para obter

$$\int (3s + 4)^2 ds = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} (3s + 4)^3 \right) + C = \frac{1}{9} (3s + 4)^3 + C.$$

2 Método da substituição

Para resolver uma integral que possa ser escrita na forma

$$\int f(g(x))g'(x) dx$$

podemos lançar mão de um processo chamado *método da substituição*, que consiste em tomar $u = g(x)$ e, portanto, $du = g'(x)dx$, de modo que a integral anterior pode ser reescrita como

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du.$$

Assim, a variável de integração, que era x , foi substituída pela nova variável u .

Vejamos alguns problemas.

Exemplo 100. Calculemos a integral $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.

Observemos que essa integral pode ser escrita como

$$\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \cos(\sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}} dx.$$

Fazendo $u = \sqrt{x}$, obtemos $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$. Assim,

$$\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \cos u du = 2 \operatorname{sen} u = 2 \operatorname{sen}(\sqrt{x}) + C.$$

Exemplo 101. Calculemos a integral $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$.

Façamos $u = x + 1$, logo $du = dx$. Então

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx &= \int \frac{u-1}{\sqrt{u}} du \\ &= \int \left(u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}} \right) du \\ &= \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}} + C \\ &= \frac{2}{3} (\sqrt{u})^3 - 2\sqrt{u} + C \\ &= \frac{2}{3} (\sqrt{x+1})^3 - 2\sqrt{x+1} + C \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{x+1}(x-2) + C \end{aligned}$$

Exemplo 102. Calculemos $\int \sqrt[3]{x^3 - 2x + 1} dx$.

Notemos que $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$. Assim, fazendo $u = x-1$, $du = dx$. Então

$$\begin{aligned} \int \sqrt[3]{x^3 - 2x + 1} dx &= \int \sqrt[3]{(x-1)^2} dx \\ &= \int \sqrt[3]{u^2} du \\ &= \int u^{\frac{2}{3}} du \\ &= \frac{3}{5} u^{\frac{5}{3}} + C \\ &= \frac{3}{5} (\sqrt[3]{u})^5 + C \\ &= \frac{3}{5} (\sqrt[3]{x-1})^5 \end{aligned}$$

3 Integração por partes

Sejam f e g funções deriváveis em um certo intervalo I . Usando a *regra do produto* para a derivação

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

obtemos

$$f(x)g'(x) = (f(x)g(x))' - f'(x)g(x).$$

Assim,

$$\int f(x)g'(x)dx = \int (f(x)g(x))'dx - \int f'(x)g(x)dx$$

o que nos fornece

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

que é a chamada *fórmula de integração por partes*. Tal fórmula é mais usualmente apresentada da seguinte maneira. Chamemos $u = f(x)$ e $dv = g'(x)dx$, de modo que

$$du = f'(x)dx \quad \text{e} \quad v = g(x)$$

e assim temos a outra forma para a *fórmula de integração por partes*

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 103. Calculemos a integral

$$\int x \cos x dx.$$

Para aplicar a fórmula de integração por partes devemos escolher convenientemente u e dv observando que u deve ser derivada e dv deve ser integrada, de modo que a integral resultante se torne mais simples do que a integral original. No presente caso, façamos

$$u = x \quad \text{e} \quad dv = \cos x dx$$

o que nos dá

$$du = dx \quad \text{e} \quad v = \text{sen } x$$

donde

$$\int x \cos x dx = x \text{sen } x - \int \text{sen } x dx = x \text{sen } x + \cos x + C.$$

Exemplo 104. Calculemos

$$\int x^2 \cos x dx.$$

Chamemos $u = x^2$ e $dv = \cos x dx$ para obter

$$du = 2x dx \text{ e } \int dv = \int \cos x dx,$$

e assim $v = \sin x$. Logo,

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - \int (\sin x) 2x dx$$

e observemos que devemos integrar por partes o termo

$$\int x \sin x dx.$$

Façamos

$$u = x \text{ e } dv = \sin x dx$$

o que fornece

$$du = dx \text{ e } v = -\cos x.$$

Daí,

$$\int x \sin x = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Voltando à integral $\int x^2 \cos x dx$, teremos

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C_1,$$

em que C_1 é a constante $-2C$.

Para nos certificarmos de que os cálculos efetuados estão corretos, podemos derivar a função

$$x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C_1$$

cujos resultados devem ser $x^2 \cos x$. De fato,

$$\begin{aligned} & (x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C_1)' \\ &= 2x \sin x + x^2 \cos x + 2 \cos x - 2x \sin x - 2 \cos x \\ &= x^2 \cos x, \end{aligned}$$

o que mostra que os cálculos efetuados estão corretos. Evidentemente, após o estudante adquirir prática no processo de integração por partes, esta verificação final pode ser dispensada.

Deixaremos certas integrais por partes, envolvendo exponencial, logaritmos, etc., para aulas futuras.

Exemplo 105. Calculemos

$$\int x \operatorname{sen}(kx) dx.$$

em que k é uma constante não-nula. Façamos

$$u = x \text{ e } dv = \operatorname{sen}(kx) dx,$$

donde

$$du = dx \text{ e } v = -\frac{\cos(kx)}{k}$$

o que implica

$$\begin{aligned} \int x \operatorname{sen}(kx) dx &= -\frac{x \cos(kx)}{k} + \frac{1}{k} \int \cos(kx) dx \\ &= -\frac{x \cos(kx)}{k} + \frac{1}{k^2} \operatorname{sen}(kx) + C. \end{aligned}$$

Observa-se que, ao calcularmos integrais indefinidas, sempre surge a chamada constante de integração. Em alguns casos pode-se determinar tal constante de integração. Vejamos um exemplo no qual isso ocorre.

Exemplo 106. Determinemos a curva que passa pelo ponto $(2, 3)$ e cuja declividade da reta tangente a ela, em cada um de seus pontos (x, y) , é dada por $-\frac{x}{y}$.

Seja $y = f(x)$ a equação dessa curva. Assim,

$$y' = -\frac{x}{y},$$

pois a derivada y' mede a declividade da reta tangente em cada um de seus pontos. Daí, $yy' = -x$ e observando que, usando a regra da cadeia,

$$\frac{d}{dx}[y^2] = 2yy',$$

teremos $2yy' = -2x$. Logo

$$\frac{d}{dx}[y^2] = -2x$$

o que nos diz que y^2 é primitiva de $-2x$. Pela definição de primitiva, tem-se

$$y^2 = \int -2x dx = -x^2 + C,$$

em que C é a constante de integração. Assim,

$$x^2 + y^2 = C$$

é a expressão algébrica de todas as curvas cuja declividade da reta tangente em cada um de seus pontos é $-\frac{x}{y}$. Desta última expressão tem-se que $y \neq 0$. Além disso, como $x^2 + y^2 > 0$, quaisquer que sejam $(x, y), y \neq 0$, façamos $C = R^2, R > 0$, e daí

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \text{ ou } y = -\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Observando-se que no enunciado exige-se que o ponto $(3, 4)$ pertença à curva, façamos $x = 3$ e $y = 4$ para obter

$$3^2 + 4^2 = R^2 = 25$$

o que nos fornece $R = 5$, de modo que a curva procurada é $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ que é o semicírculo de centro $(0, 0)$ e raio 5.

4 Funções trigonométricas inversas

Introduziremos agora a noção de função trigonométrica inversa. Começemos com a inversa da função sen . Como é bem conhecido, a função sen não é injetiva e em vista disso não existirá sua inversa. No entanto, se restringirmos seu domínio, por exemplo, ao intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, teremos que a função sen , restrita a este intervalo,

$$\text{sen} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$$

é injetiva e sobrejetiva, de modo que existe a sua inversa, designada por arcsen ,

$$\text{arcsen} : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Dessa maneira

$$y = \text{arcsen } x$$

é equivalente a dizer que

$$x = \text{sen } y.$$

Derivando ambos os membros de $x = \text{sen } y$, observando que y é função de x e usando a regra da cadeia, obtém-se

$$1 = y' \cos y.$$

Restringindo os valores de y ao intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, a fim de que $\cos y \neq 0$, o que restringirá os valores de x ao intervalo aberto $(-1, 1)$, obtém-se

$$y' = \frac{1}{\cos y}.$$

Como $x = \operatorname{sen} y$ implica $\cos y = \sqrt{1 - x^2}$, teremos $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, o que nos fornece as seguintes regras para derivação e integração da função arcsen

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C \quad (10.1)$$

Tudo o que fizemos a fim de determinar uma função inversa para a função sen e calcular a derivada e a primitiva dessa inversa pode ser reproduzido para a função cos em que, nesse caso, restringimos x ao intervalo $(-1, 1)$, o que restringe y a $(0, \pi)$. Assim,

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arccos} x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\int -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \operatorname{arccos} x + C.$$

Vejam o que acontece no caso da função tangente. Observemos que essa função, restrita ao intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

$$\operatorname{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow (-\infty, +\infty),$$

é injetiva e sobrejetiva (além de contínua, derivável, etc.), de modo que podemos definir sua inversa

$$\operatorname{tg} : (-\infty, +\infty) \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

de modo que $y = \operatorname{arctg} x$ se, e somente se, $x = \operatorname{tg} y$. Derivando ambos os membros desta última igualdade, lembrando que y é uma função de x , e usando a regra da cadeia, obtemos

$$1 = y' \cdot \sec^2 y.$$

Como $\sec^2 y = 1 + \operatorname{arctg}^2 y = 1 + x^2$, teremos

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

de onde resulta

$$\int \frac{1}{1 + x^2} dx = (\operatorname{arctg} x) + C.$$

Vejam alguns exemplos de integrais nas quais aparecem termos da forma $\sqrt{k^2 - x^2}$ ou $\frac{1}{k^2 + x^2}$

Exemplo 107. Calculemos a integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{k^2 - x^2}} dx,$$

em que k é uma constante positiva. Observemos que a expressão $\frac{1}{\sqrt{k^2 - x^2}}$, a menos da constante k , é essencialmente aquela que aparece em (10.1). A fim de que elas se tornem exatamente iguais, façamos $x = ku$, de modo que $dx = kdu$ e daí

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{k^2 - x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{k^2 - k^2 u^2}} k du \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} du \\ &= \arcsen u + C \\ &= \arcsen \left(\frac{x}{k} \right) + C. \end{aligned}$$

Exemplo 108. Calculemos a integral indefinida

$$\int \frac{1}{k^2 + x^2} dx.$$

Procedendo como no exemplo anterior, façamos $x = ku$, de onde $dx = kdu$, e assim

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{k^2 + x^2} dx &= \int \frac{k}{k^2 + k^2 u^2} du \\ &= \int \frac{1}{1 + u^2} du \\ &= \frac{1}{k} \operatorname{arctg} u + C \\ &= \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{k} \right) + C. \end{aligned}$$

Exemplo 109. Calculemos

$$\int x \arcsen x dx.$$

Façamos $u = \arcsen x$ e $dv = x dx$ de onde

$$du = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx, \quad v = \frac{x^2}{2}.$$

Portanto,

$$\int x \arcsen x dx = \frac{x^2}{2} \arcsen x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

em que esta última integral é resolvida por substituição. Mais precisamente, fazendo $x = \sin \theta$, o que implica $dx = \cos \theta d\theta$, obtém-se

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \sin^2 \theta d\theta = \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} + C = \frac{1}{2} \arcsen x - \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C.$$

Portanto,

$$\int x \arcsen x dx = \frac{x^2}{2} \arcsen x - \frac{1}{4} \arcsen x + \frac{1}{4} x \sqrt{1-x^2} + C.$$

5 Exercícios resolvidos

1. Calcule $\int \frac{1}{x^6} dx$.

Solução. Basta observar que

$$\int \frac{1}{x^6} dx = \int x^{-6} dx$$

e aplicar a regra 4. Assim,

$$\int \frac{1}{x^6} dx = -\frac{1}{5} x^{-5} + C.$$

2. Calcule a integral $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$.

Solução. Observemos que

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int x^{-\frac{2}{3}} dx$$

Assim, segue da regra 4 que

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = 3\sqrt[3]{x} + C.$$

3. Calcule a integral indefinida $\int (1-x)\sqrt{x} dx$.

Solução. Inicialmente observemos que

$$\int (1-x)\sqrt{x} dx = \int (1-x)x^{\frac{1}{2}} dx = \int (x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}) dx$$

Usando agora a regra 7 e depois a regra 4, obtém-se

$$\begin{aligned} \int (1-x)\sqrt{x} dx &= \int x^{\frac{1}{2}} dx - \int x^{\frac{3}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\frac{5}{2}} x^{\frac{5}{2}} + C \\ &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C \\ &= 2x^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} x \right) + C. \end{aligned}$$

4. Calcule $\int \sqrt[3]{1-x^2} x dx$.

Solução. Essa integral pode ser reescrita como segue

$$\int \sqrt[3]{1-x^2} x dx = -\frac{1}{2} \int (1-x^2)^{\frac{1}{3}} (-2x) dx$$

Agora basta aplicar a regra 8.

$$\int \sqrt[3]{1-x^2} x dx = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\frac{4}{3}} (1-x^2)^{\frac{4}{3}} \right) + C = -\frac{3}{8} (1-x^2)^{\frac{4}{3}} + C.$$

5. Calcule $\int \sin^2 x \cos x dx$.

Solução. A resolução dessa integral é consequência imediata da regra 8.

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \int (\sin x)^2 \cos x dx = \frac{1}{3} (\sin x)^3 + C.$$

6 Exercícios propostos

1. Calcule as primitivas (antiderivadas) a seguir:

(a) $\int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}} dx$

(b) $\int \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} dx$

(c) $\int \cos 3x dx$

(d) $\int \frac{\operatorname{sen} z}{\cos^2 z} dz$

(e) $\int \frac{1}{1 + \cos x} dx$

(f) $\int (x-2)^{\frac{3}{2}} dx$

(g) $\int \frac{dx}{(x-1)^3}$

(h) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$

(i) $\int \sqrt{3x-1} dx$

(j) $\int (2x^2 + 3)^{\frac{1}{3}} x dx$

- (k) $\int 5\sqrt[3]{x^2} dx$
- (l) $\int (x^2 - 1)\sqrt{x} dx$
- (m) $\int \frac{\text{sen } \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$
- (n) $\int (1 - x^2)^5 x dx$
- (o) $\int (5\text{sen } x + 3 \cos x) dx$
- (p) $\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) dx$
- (q) $\int x\sqrt{x+1} dx$
- (r) $\int \frac{x^2 + 1}{x^2} dx$
- (s) $\int \cos^2 x dx$
- (t) $\int \text{sen}^2 x dx$
- (u) $\int \frac{3x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$
- (v) $\int \frac{3}{\sqrt{1-4x^2}} dx$
- (w) $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$

2. Encontre a equação da curva que passa pelo ponto $(1, 2)$ e cuja inclinação em cada ponto (x, y) , $x > 0$, é dada por $x^{\frac{1}{2}} + 2$.
3. Uma partícula se move em linha reta com velocidade $v(t) = t^2 + 2$. Determine a distância percorrida pela partícula, de $t = 1$ a $t = 3$.

7 Respostas dos exercícios propostos

1. (a) $\frac{1}{15} \sqrt{x} (15 + 10x + 3x^2) + C$
- (b) $x + \frac{1}{x+1} + C$
- (c) $\frac{1}{3} \sin(3x) + C$
- (d) $\frac{1}{\cos z} + C$
- (e) $\frac{x}{1 + \cos x} + C$
- (f) $\frac{2}{5} (x-2)^{\frac{5}{2}} + C$
- (g) $-\frac{1}{2(x-1)^2} + C$
- (h) $2\sqrt{x+3} + C$
- (i) $\frac{2}{9} (3x-1)^{\frac{3}{2}} + C$
- (j) $\frac{3}{16} (2x^2+3)^{\frac{4}{3}} + C$
- (k) $3x^{\frac{5}{3}} + C$
- (l) $2(\sqrt{x})^3 \left(\frac{1}{7}x^2 - \frac{1}{3}\right) + C$
- (m) $-2 \cos \sqrt{x} + C$
- (n) $-\frac{1}{12} (1-x^2)^6$
- (o) $-5 \cos x + 3 \operatorname{sen} x + C$
- (p) $-\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + C$
- (q) $\frac{2}{15} (x+1)^{\frac{3}{2}} (-2+3x) + C$
- (r) $x - \frac{1}{x} + C$
- (s) $\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$
- (t) $\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} x 2x}{4} + C$
- (u) $-\frac{3}{4} \sqrt{1-4x^2} + C$
- (v) $\frac{3}{2} \operatorname{arcsen}(2x) + C$
- (w) $\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}x\right)$

2. $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x - \frac{2}{3}$

3. 12 unidades de comprimento

Nesta aula você aprendeu:

- a calcular primitivas de funções usando regras elementares de primitivação.
- a calcular primitivas de funções pelo método da substituição.
- a calcular primitivas de funções usando o método da integração por partes.

Aula 11

O logaritmo natural

Objetivos

- Estudar o logaritmo natural.
- Fazer aplicações da derivada da função logarítmica.
- Fazer aplicações da primitiva da função logarítmica.

Na aula passada vimos a conhecida fórmula para o cálculo da primitiva da função $y = x^r$, que é dada por

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \quad r \neq -1.$$

Resta-nos saber o que acontece quando $r = -1$, ou seja, o que devemos fazer para encontrar a primitiva ou antiderivada de $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$. Esta aula é dedicada a definir e a estudar as propriedades dessa importante função chamada logaritmo natural (ou neperiano) e indicada por $y = \ln x$.

1 O logaritmo natural

O gráfico de $y = \frac{1}{t}$, para $t > 0$, é conhecido do leitor

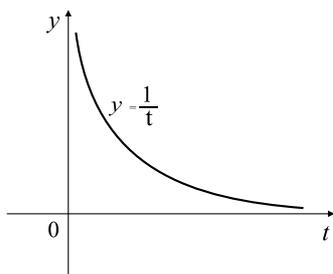


Fig. 11.1

e está esboçado na figura 11.1, sendo um ramo de uma hipérbole equilátera.

Para $x > 1$ a integral

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt$$

representa a área sob a curva $y = \frac{1}{t}$ e acima do eixo ot , entre os valores $t = 1$ e $t = x$. Veja figura 11.2.

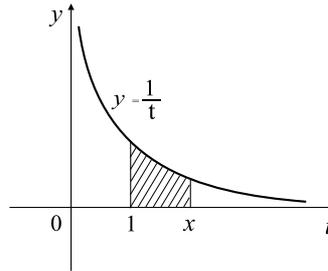


Fig. 11.2

Para $0 < x < 1$ a integral acima pode ser escrita como

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = - \int_x^1 \frac{1}{t} dt,$$

e assim, neste caso, esta última integral representa a área sob a curva, limitada inferiormente pelo eixo ot , entre $t = 1$ e $t = x$, precedida do sinal negativo. Veja a figura 11.3. Se $x = 1$, a integral dá zero.

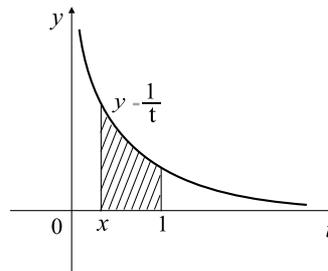


Fig. 11.3

Podemos, então, definir a função logaritmo natural da seguinte maneira.

Definição 2. Definimos a função *logaritmo natural*,

$$\ln : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

por

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \text{ para } t > 0.$$

Deve-se observar que a integral $\int_1^x \frac{1}{t} dt$ existe, pois a função $\frac{1}{t}$ é contínua para $t > 0$, donde se conclui que a integral que define a função *logaritmo* está bem definida, lembrando que qualquer função contínua, definida em intervalos fechados e limitados, é integrável.

Esta maneira, aparentemente não-natural, de definir a função logaritmo natural tornar-se-á clara à medida que formos avançando no seu estudo.

Em virtude do teorema fundamental do Cálculo, temos que \ln é derivável e

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = (\ln)'(x) = \frac{1}{x}, \text{ para } x > 0.$$

Portanto, o logaritmo natural é uma primitiva ou antiderivada de $\frac{1}{x}$, somente para $x > 0$. Uma primitiva no caso em que $x \neq 0$ será construída futuramente.

Listaremos, a seguir, algumas propriedades da função logaritmo natural as quais começarão a tornar claro o porquê de chamarmos tal função de logaritmo.

Propriedade 1. $\ln 1 = 0$, porque

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t} dt = 0.$$

Propriedade 2. Se $x > 1$, então $\ln x > 0$.

Isto é claramente verdade em virtude de integrais de funções positivas serem positivas e assim $\int_1^x \frac{1}{t} dt$ representará a área sob o gráfico de $\frac{1}{t}$ e acima do eixo ox , para t variando de 1 até x .

Propriedade 3. Se $0 < x < 1$, então $\ln x < 0$.

Isto se segue do fato

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt = - \int_x^1 \frac{1}{t} dt.$$

e de que a integral $\int_x^1 \frac{1}{t} dt$ representa a área sob o gráfico de $\frac{1}{t}$ e acima do eixo ox , para t variando de x até 1.

Propriedade 4. $\frac{d}{dx}(\ln |x|) = \frac{1}{x}$

Isto se segue dos seguintes fatos: Se $x > 0$, temos que $|x| = x$ e assim

$$\frac{d}{dx}(\ln |x|) = \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}.$$

Se $x < 0$, temos que $|x| = -x$ e daí

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{d}{dx}(\ln(-x)).$$

Fazendo $u = -x > 0$, e usando a regra da cadeia, obtemos

$$\frac{d}{dx}(\ln(-x)) = \frac{d}{du}(\ln u) \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot (-1) = \frac{1}{-u} = \frac{1}{x}.$$

Propriedade 5 $\ln uv = \ln u + \ln v$

Inicialmente, observemos que

$$\frac{d}{dx}(\ln(ax)) = \frac{1}{ax} \frac{d}{dx}(ax),$$

em virtude da regra da cadeia. Dessa forma,

$$\frac{d}{dx}(\ln(ax)) = \frac{1}{ax} a = \frac{1}{x}.$$

Isto nos diz que as funções $\ln x$ e $\ln(ax)$ possuem derivadas iguais. Conseqüentemente,

$$\ln(ax) = \ln x + K,$$

para alguma constante K . Daí, quando $x = 1$, obteremos

$$\ln a = \ln 1 + K = 0 + K = K.$$

Conseqüentemente,

$$\ln(ax) = \ln a + \ln x.$$

Fazendo $a = u$ e $x = v$, obtemos a fórmula pretendida.

Propriedade 6. $\ln\left(\frac{u}{v}\right) = \ln u - \ln v$

Esta propriedade segue-se da anterior da seguinte maneira:

$$\ln u = \ln\left(\frac{u}{v} \cdot v\right) = \ln\left(\frac{u}{v}\right) + \ln v,$$

donde

$$\ln\left(\frac{u}{v}\right) = \ln u - \ln v.$$

Propriedade 7. $\ln\left(\frac{1}{v}\right) = -\ln v$

Na propriedade anterior, façamos $u = 1$ para obter

$$\ln\left(\frac{1}{v}\right) = \ln 1 - \ln v = -\ln v.$$

Propriedade 8. Se r for um número racional e x um número positivo, então

$$\ln(x^r) = r \ln x.$$

Pela regra da cadeia

$$\frac{d}{dx}(\ln(x^r)) = \frac{1}{x^r}(rx^{r-1}) = \frac{r}{x} = \frac{d}{dx}(r \ln x).$$

Deste modo, como as funções $\ln x^r$ e $r \ln x$ possuem derivadas iguais, elas diferem por uma constante, ou seja, existe uma constante K tal que

$$\ln(x^r) = r \ln x + K.$$

Fazendo $x = 1$, obtém-se $\ln 1 = r \ln 1 + K$ e desde que $\ln 1 = 0$, concluímos que $K = 0$ e então

$$\ln(x^r) = r \ln x.$$

Propriedade 9. A função $\ln x$ é crescente.

Basta observar que

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} > 0$$

desde que $x > 0$. A propriedade segue-se do fato de que, se a derivada de uma função for positiva, então ela será crescente.

Propriedade 10. O gráfico da função \ln é côncavo para baixo.

Basta observar que

$$\frac{d^2}{dx^2}(\ln x) = \frac{d}{dx} \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

Propriedade 11. $\frac{1}{2} < \ln 2 < 1$

Observemos a figura 11.4 e conclua que a área sob o gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$, entre $x = 1$ e $x = 2$, e acima do eixo ox é maior do que a área do retângulo com base $[1, 2]$ e altura $\frac{1}{2}$, que é $\frac{1}{2}$ que, por sua vez, é menor que a área do retângulo de base $[1, 2]$ e altura 1, a qual é 1.

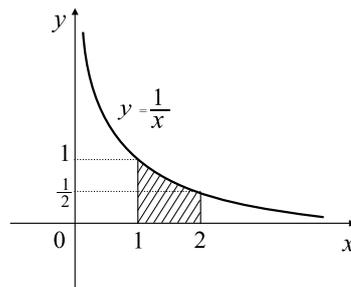


Fig. 11.4

Mais precisamente, $1 \cdot \frac{1}{2} < \int_1^2 \frac{1}{x} dx < 1 \cdot 1$, ou seja $\frac{1}{2} < \int_1^2 \frac{1}{x} dx < 1$.
Portanto,

$$\frac{1}{2} < \ln 2 < 1.$$

Propriedade 12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

Seja k um inteiro positivo qualquer. Então, para $x > 2^{2k}$, teremos

$$\ln x > \ln(2^{2k})$$

pois a função \ln é crescente. Assim,

$$\ln x > \ln(2^{2k}) = 2k \ln 2 > 2k \left(\frac{1}{2}\right) = k.$$

Portanto, como $x \rightarrow +\infty$, temos que $\ln x$ excede qualquer número inteiro positivo k , o que implica que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

Propriedade 13. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

Façamos $u = \frac{1}{x}$ e observemos que $x \rightarrow 0^+$ se, e somente se, $u \rightarrow +\infty$.
Portanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{1}{u}\right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} (-\ln u) = - \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = -\infty.$$

Propriedade 14.

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)| + C$$

Isto se segue da Regra da Cadeia e do seguinte fato

$$\frac{d}{dx}(\ln |g(x)|) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

bastando observar que

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \int \frac{d}{dx}(\ln |g(x)|) dx = \ln |g(x)| + C.$$

Esta propriedade pode ser reescrita como: Façamos $u = g(x)$, o que nos permite concluir que $du = g'(x)dx$ e daí

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C = \ln |g(x)| + C.$$

Observemos que as propriedades do logaritmo listadas até agora nos fazem tirar algumas conclusões importantes que serão utilizadas na aula 12 e verificar que o seu gráfico é esboçado na figura 11.5.

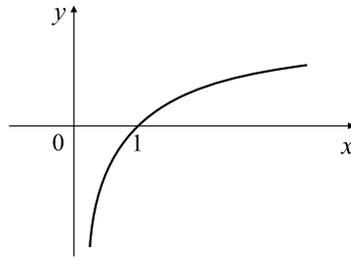


Fig. 11.5

Na figura 11.6 encontra-se esboçado o gráfico da função $\ln|x|$.

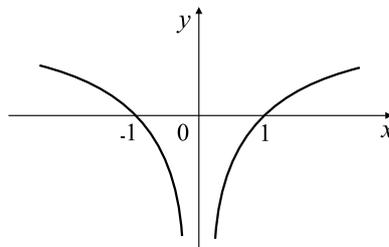


Fig. 11.6

Antes de resolvermos alguns exercícios, introduziremos uma técnica em que usamos a derivada do logaritmo, com algumas de suas propriedades, a fim de facilitar o cálculo da derivada de funções que, sem essa ajuda, tornaria o nosso trabalho bastante árduo. Tal técnica é chamada *derivação logarítmica*.

2 Derivação logarítmica

Ilustremos esse método por meio de exemplos.

Exemplo 110. Derivemos a função

$$y = (1 - 3x^2)^3(\cos 2x)^4.$$

Calculando o logaritmo de ambos os membros da expressão acima, obtém-se

$$\ln y = \ln(1 - 3x^2)^3 + \ln(\cos 2x)^4.$$

Daí,

$$\ln y = 3 \ln(1 - 3x^2) + 4 \ln(\cos 2x)$$

e derivando ambos os seus membros

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{1-3x^2} \cdot (-6x) + \frac{4}{\cos 2x} \cdot (-\operatorname{sen} 2x) \cdot (2) = -\frac{18x}{1-3x^2} - 8\operatorname{tg} 2x.$$

Conseqüentemente

$$y' = -(1-3x^2)^3 (\cos 2x)^4 \left(\frac{18x}{1-3x^2} + 8\operatorname{tg} 2x \right).$$

Exemplo 111. Calcule a derivada de

$$y = \frac{x(1-x^2)^2}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Usando a derivação logarítmica, obtemos

$$\ln y = \ln x + 2 \ln(1-x^2) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

logo,

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + 2 \frac{1}{1-x^2} (-2x) - \frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} (2x) = \frac{1}{x} - \frac{4x}{1-x^2} - \frac{x}{1+x^2}$$

e, após algumas manipulações algébricas, obtém-se

$$y' = \frac{(1-5x^2-4x^4)(1-x^2)}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

Com a introdução da função logaritmo podemos considerar uma nova técnica de integração chamada *integração por frações parciais*.

3 Integração por frações parciais

A técnica de integração por frações parciais consiste em determinar primitivas de funções racionais decompondo tal tipo de funções em soma de funções racionais mais simples e cujas primitivas sejam calculadas facilmente. Começemos com um exemplo simples.

Exemplo 112. Calculemos a integral

$$\int \frac{1}{x^2-1} dx.$$

A idéia é decompor a função racional $\frac{1}{x^2-1}$ na forma

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

em que A e B são constantes a ser determinadas. Dessa última igualdade obtém-se

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} = \frac{A(x + 1) + B(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{(A + B)x + A - B}{x^2 - 1}.$$

Daí, por uma simples comparação, tem-se

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ A - B &= 1 \end{aligned}$$

que é um sistema linear cuja solução é $A = \frac{1}{2}$ e $B = -\frac{1}{2}$. Portanto,

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{2} \frac{1}{x + 1}.$$

Integrando ambos os membros dessa última igualdade

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x - 1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x + 1} dx,$$

donde

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \ln|x - 1| - \frac{1}{2} \ln|x + 1| + C.$$

Se quisermos simplificar esta última expressão, obteremos

$$\int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \ln \left[K \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right|^{1/2} \right],$$

em que $C = \ln K$. Verifique a validade dessa última igualdade.

Exemplo 113. Calculemos a integral

$$\int \frac{3x - 1}{x^2 + x - 2} dx.$$

Usemos um procedimento semelhante àquele do exemplo anterior e escrevamos

$$\frac{3x - 1}{x^2 + x - 2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2}$$

observando que $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$. Após um cálculo simples chegamos a

$$A = \frac{2}{3} \text{ e } B = \frac{7}{3}.$$

Assim

$$\begin{aligned} \int \frac{3x - 1}{x^2 + x - 2} dx &= \frac{2}{3} \int \frac{1}{x - 1} dx + \frac{7}{3} \int \frac{1}{x + 2} dx \\ &= \frac{2}{3} \ln|x - 1| + \frac{7}{3} \ln|x + 2| + C. \end{aligned}$$

Exemplo 114. Em alguns casos o polinômio que figura no denominador não pode ser decomposto em fatores de primeiro grau reais, pois as suas raízes são complexas. Em virtude disso, devemos usar outra estratégia. Vejamos o que acontece com a integral

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx.$$

Observemos que o trinômio do segundo grau $x^2 + 2x + 2$ não possui raízes reais pois o seu discriminante é negativo. Verifique isso. No entanto, ele pode ser escrito na forma

$$x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 + 1 = (x + 1)^2 + 1$$

e a integral em estudo se apresenta como

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx = \int \frac{1}{(x + 1)^2 + 1} dx.$$

Neste ponto o estudante deve recordar a integral

$$\int \frac{1}{u^2 + 1} du = \arctan u + C.$$

Portanto, fazendo $u = x + 1$ tem-se $du = dx$ e assim

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx &= \int \frac{1}{(x + 1)^2 + 1} dx = \int \frac{1}{u^2 + 1} du = \arctan u + C = \\ &= \int \frac{1}{u^2 + 1} du = \arctan u + C = \arctan(x + 1) + C. \end{aligned}$$

Exemplo 115. Vejamos a integral

$$\int \frac{x + 1}{(x + 1)^2 + 1} dx.$$

O que fazer com essa integral? Observe que podemos fazer a mudança de variáveis $u = x + 1$ e obter

$$\int \frac{x + 1}{(x + 1)^2 + 1} dx = \int \frac{u}{u^2 + 1} du = \frac{1}{2} \int \frac{2u}{u^2 + 1} du.$$

Nesta última integral o numerador do integrando é exatamente a derivada da função que figura no denominador, de modo que

$$\begin{aligned} \int \frac{x + 1}{(x + 1)^2 + 1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2u}{u^2 + 1} du = \frac{1}{2} \ln(u^2 + 1) + C \\ &= \frac{1}{2} \ln(u^2 + 1) + C \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 2) + C. \end{aligned}$$

4 Exercícios resolvidos

1. Calcule a derivada de $\ln(5x + 3)$.

Solução. Usando a regra da cadeia

$$\frac{d}{dx}(\ln(5x + 3)) = \frac{d}{dx}(5x + 3) \cdot \frac{1}{5x + 3} = \frac{5}{5x + 3}.$$

2. Calcule a derivada de $\sqrt{\ln x}$.

Solução. Usando a regra da cadeia

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\sqrt{\ln x}) &= \frac{d}{dx}(\ln x)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}(\ln x)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}(\ln x) \\ &= \frac{1}{2}(\ln x)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}. \end{aligned}$$

3. Calcule a integral

$$\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx.$$

Solução. Basta observar que fazendo $g(x) = x^2 + 1$ obtemos $g'(x) = 2x$. Daí

$$\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \int \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} dx = \ln|x^2 + 1| + C = \ln(x^2 + 1) + C.$$

4. Calcule a integral

$$\int \operatorname{tg} x dx.$$

Solução. Observemos que

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = - \int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} dx.$$

Fazendo $g(x) = \cos x$ tem-se $g'(x) = -\operatorname{sen} x$ e assim

$$\int \operatorname{tg} x dx = - \int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = \int \frac{\cos' x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + C.$$

5. Calcule $\int \frac{4x^7}{3x^8 - 2} dx$.

Solução. Para calcular a integral acima basta acompanhar os cálculos abaixo, justificando as passagens.

$$\int \frac{4x^7}{3x^8 - 2} dx = \frac{1}{6} \int \frac{24x^7}{3x^8 - 2} dx = \frac{1}{6} \ln|3x^8 - 2| + C.$$

6. Calcule $\int \ln x dx$, $x > 0$.

Solução. Calculemos essa integral usando a técnica de integração por partes. Para isso, façamos

$$u = \ln x \text{ e } dv = dx,$$

de modo que $du = \frac{1}{x}$ e $v = x$.

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C.$$

7. Calcule $\int \frac{\ln x}{x} dx$.

Solução. Faça $u = \ln x$, o que nos dá $du = \frac{dx}{x}$ e assim

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2} + C.$$

8. Calcule a integral $\int \frac{dx}{x^2 - 9}$.

Solução. Escrevamos $\frac{1}{x^2 - 9} = \frac{1}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x + 3}$.

Assim, $1 = A(x + 3) + B(x - 3)$ e daí $A = \frac{1}{6}$ e $B = -\frac{1}{6}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - 9} &= \frac{1}{6} \int \frac{dx}{x - 3} + \frac{1}{6} \int \frac{dx}{x + 3} \\ &= \frac{1}{6} \ln |x - 3| - \frac{1}{6} \ln |x + 3| + C \\ &= \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x - 3}{x + 3} \right| + C \end{aligned}$$

9. Calcule a integral $\int \frac{x}{(x + 2)(x + 3)} dx$.

Solução. $\frac{x}{(x + 2)(x + 3)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x + 3}$. Assim, $x = A(x + 3) + B(x + 2)$ e daí $A = -2$ e $B = 3$. Logo,

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x + 2)(x + 3)} &= \int -\frac{2}{x + 2} dx + \int \frac{3}{x + 3} dx \\ &= -2 \ln |x + 2| + 3 \ln |x + 3| + C \\ &= \ln \left| \frac{(x + 3)^3}{(x + 2)^2} \right| + C \end{aligned}$$

10. Calcule a integral $\int \frac{x-5}{x^2(x+1)} dx$

Solução. $\frac{x-5}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$. Assim, $x-5 = Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2$ e daí $A = 6$, $B = -5$ e $C = -6$. Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \int \frac{x-5}{x^2(x+1)} dx &= \int \frac{6}{x} dx - \int \frac{5}{x^2} dx - \int \frac{6}{x+1} dx \\ &= 6 \ln|x| + \frac{5}{x} - 6 \ln|x+1| + C \\ &= 6 \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + \frac{5}{x} + C. \end{aligned}$$

5 Exercícios propostos

1. Encontre as derivadas das funções.

- (a) $y = \ln(x+3)^2$
- (b) $y = (\ln(x+3))^2$
- (c) $y = \ln(\operatorname{sen} 5x)$
- (d) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$
- (e) $y = x \ln x - x$
- (f) $y = \ln \sqrt{3-x^2}$

2. Calcule as seguintes primitivas.

- (a) $\int \frac{1}{7x} dx$
- (b) $\int \frac{x^8}{x^9-1} dx$
- (c) $\int \frac{1}{x \ln x} dx$
- (d) $\int \frac{\operatorname{sen} 3x}{1-\cos 3x} dx$
- (e) $\int \frac{2x^4-x^2}{x^3} dx$
- (f) $\int \frac{\ln x}{x} dx$
- (g) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} dx$

3. Encontre a área sob a curva $y = \frac{1}{x}$ e acima do eixo ox , entre $x = 2$ e $x = 4$.

4. Calcule a integral $\int \frac{x}{(2x+3)^2} dx$.
5. Resolva a equação $2 \ln x = \ln(2x)$.
6. Calcule a integral $\int_1^2 \frac{x}{4x^2-2} dx$.
7. Mostre que $\ln x < \sqrt{x}$, para todo $x > 0$.

6 Respostas dos exercícios propostos

1. (a) $y' = \frac{2}{x+3}$
(b) $y' = 2 \frac{\ln(x+3)}{x+3}$
(c) $y' = 5 \frac{\cos(5x)}{\sin(5x)}$
(d) $y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
(e) $y' = \ln x$
(f) $y' = -\frac{x}{3-x^2}$
2. (a) $\frac{1}{7} \ln x + C$
(b) $\frac{1}{9} \ln(x^9 - 1) + C$
(c) $\ln(\ln x) + C$
(d) $\frac{1}{3} \ln(1 - \cos(3x)) + C$
(e) $x^2 - \ln x + C$
(f) $\frac{1}{2} (\ln x)^2 + C$
(g) $-2 \ln(-1 + \sqrt{x}) + C$
3. $\ln 2$
4. $\frac{1}{4} \ln(2x+3) + \frac{3}{4(2x+3)} + C$
5. 2
6. $\frac{1}{8} \ln 7$
7. Sugestão: use o que você sabe sobre máximos e mínimos.

Nesta aula você aprendeu:

- O que é o logaritmo natural.
- a fazer aplicação da derivada da função logarítmica.
- a fazer aplicação da primitiva da função logarítmica.

7 Apêndice

História dos logaritmos

Os logaritmos surgiram como um instrumento para simplificar cálculos em que figuravam números muito grandes, principalmente aqueles oriundos de medições astronômicas. As propriedades que simplificavam tais cálculos eram aquelas que transformavam multiplicações em adições e divisões em subtrações.

Muito embora a formalização dos logaritmos tenha sido realizada por John Napier (1550-1617), um escocês proprietário de terras, que foi o primeiro a publicar, em 1614, uma tábua de logaritmos, a sua essência, ao que parece, foi levada em conta pelos antigos babilônios¹ que consideravam uma tabela em um tablete datado aproximadamente de 1888 a.C., dada por

Tabela 1

2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6

O leitor que analisar de maneira acurada esta tabela verificará que ela se estende obedecendo a uma regra geral, de modo que a tabela 2 a seguir é uma extensão da tabela 1

Tabela 2

2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
128	7
256	8
512	9
1024	10
2048	11
4096	12

¹ Learn from the Masters, Editors Frank Swetz, John Fauvel, Otto Bekken, Bengt Johansson, Victor Katz, The Mathematical Association of America, 1995

e assim, caso queiramos calcular o produto 32×64 , basta observar que 32 corresponde ao 5 e 64 corresponde ao 6. Somam-se $5 + 6 = 11$ e verifica-se a linha correspondente ao 11, na qual figura 2048. Assim, $32 \times 64 = 2048$.

Este foi, essencialmente, o procedimento usado por Napier, que usa *progressões aritméticas* e *progressões geométricas*, assuntos bem conhecidos dos matemáticos do século XVI. Vejamos como proceder. Consideremos uma progressão aritmética começando com 0 e com razão $a > 0$ e uma progressão geométrica começando com 1 e com razão $r > 0$ e vejamos a tabela 3, a seguir,

Tabela 3

1	0
r	a
r^2	$2a$
r^3	$3a$
r^4	$4a$
r^5	$5a$
r^6	$6a$
r^7	$7a$
r^8	$8a$
r^9	$9a$
\vdots	\vdots

em que se exhibe uma correspondência biunívoca entre os elementos das duas colunas dada por $0 \leftrightarrow 1, a \leftrightarrow r, 2a \leftrightarrow r^2, \dots, na \leftrightarrow r^n$ para todo $n = 0, 1, 2, \dots$. Assim, as funções f e g definidas por

$$f(na) = r^n \text{ e } g(r^n) = na$$

são funções inversas uma da outra, de modo que

$$g(r^n) + g(r^m) = na + ma = (m + n)a = g(r^n r^m),$$

ou de maneira mais concisa

$$g(x) + g(y) = g(xy).$$

Também

$$g(r^n) - g(r^m) = na - ma = (n - m)a = g\left(\frac{r^n}{r^m}\right),$$

ou

$$g(x) - g(y) = g\left(\frac{x}{y}\right).$$

Pode-se constatar, sem muita dificuldade, que todas as regras do logaritmo se verificam, ou seja, g nada mais é do que a função logaritmo conhecida com base r sendo a inversa de uma potência.

Somente na década de 1650 foi verificado por Isaac Newton (1642-1727), em seu *Waste Book* (1664-1665), que a área abaixo da hipérbole satisfaz as propriedades do logaritmo. Posteriormente, em 1668, Mercator encontra o logaritmo como uma série dada por

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$$

Evidentemente que o uso dos logaritmos como instrumento de cálculo está completamente ultrapassado, dado o advento das calculadoras, computadores, etc. No entanto, sua relevância perdura em virtude da função logarítmica, que se presta, em parceria com a função exponencial, a diversas aplicações práticas importantes. Isto ficará evidente, por exemplo, em várias aulas sobre *equações diferenciais*.

Aula 12

A função exponencial e a função logarítmica

Objetivos

- Estudar a função exponencial.
- Calcular a derivada e a integral da função exponencial.

Como vimos na aula 11, a função logarítmica $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é injetiva e sobrejetiva. Portanto, existe a sua função inversa $\ln^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$. Esta aula é dedicada ao estudo dessa função, chamada função exponencial.

1 A função exponencial

Começemos com a seguinte definição.

Definição 3. Definimos a *função exponencial* $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ como sendo a inversa da função logaritmo natural $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Como as funções logaritmo e exponencial são inversas uma da outra, os seus gráficos são simétricos com relação à primeira bissetriz $y = x$, como mostra a figura 12.1.

Listaremos as propriedades da função exponencial que são, essencialmente, decorrentes das propriedades da função logarítmica.

Propriedade 1. $\exp x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Isto se segue da própria definição de exponencial pois, já que $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, a imagem da exponencial é exatamente o domínio do logaritmo que é o intervalo $(0, \infty)$.

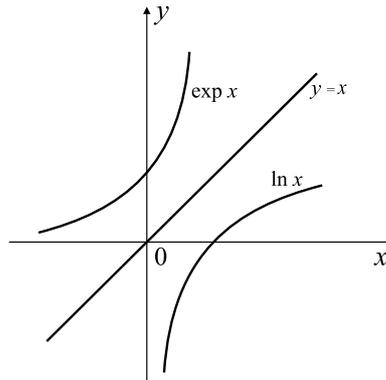


Fig. 12.1

Propriedade 2. $\ln(\exp x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Esse fato é decorrência da própria definição de função inversa e do fato de \exp ser a inversa de \ln .

Propriedade 3. $\exp(\ln x) = x$ para todo $x > 0$.

Justifica-se essa propriedade como no caso anterior.

Propriedade 4. $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ é uma função crescente.

Deve-se mostrar que se $u < v$ então $\exp u < \exp v$. Suponhamos que $u < v$. Como $u = \ln(\exp u)$ e $v = \ln(\exp v)$, tem-se $\ln(\exp u) < \ln(\exp v)$ e como \ln é crescente concluímos que $\exp u < \exp v$.

Propriedade 5. $\frac{d}{dx}(\exp x) = \exp x$ ou $\exp'(x) = \exp x$.

Inicialmente, observemos que se $y = \exp x$ então $\ln y = x$. Derivando ambos os membros desta última igualdade com relação a x , observando que y é uma função de x , obtemos

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = 1$$

e daí

$$\frac{y'}{y} = 1,$$

donde concluímos que

$$y' = \exp'(x) = y = \exp x.$$

Propriedade 6. Se $f(x)$ for uma função derivável, então a função $y = \exp f(x)$ é derivável e $y' = f'(x) \exp f(x)$.

Essa propriedade segue-se imediatamente da regra da cadeia.

À guisa de exemplo, a derivada da função $y = \exp(\cos x)$ é dada por $y' = (\cos x)' \exp(\cos x) = -\text{sen } x \exp(\cos x)$.

Propriedade 7. $\int \exp x dx = \exp x + C.$

Esta propriedade é decorrência do fato de que $\exp' x = \exp x$, ou seja, \exp é uma primitiva dela mesma.

Propriedade 8. $\exp 0 = 1$

Como a função \exp e a função \ln são inversas uma da outra, tem-se

$$1 = \exp \ln 1 = \exp 0$$

Propriedade 9. $\exp(u + v) = \exp u \cdot \exp v.$

É suficiente observar que

$$\ln \exp(u + v) = u + v = \ln \exp u + \ln \exp v = \ln(\exp u \cdot \exp v)$$

e como \ln é uma função injetiva, obtemos

$$\exp(u + v) = \exp u \cdot \exp v$$

Propriedade 10. $\exp(u - v) = \frac{\exp u}{\exp v}$

Observemos que

$$\exp(u - v) \exp v = \exp[(u - v) + v] = \exp u$$

e agora dividindo-se ambos os membros da igualdade acima por $\exp v$ obteremos a igualdade acima.

Propriedade 11. $\exp(-v) = \frac{1}{\exp v}$

Esta propriedade é imediata a partir da anterior.

Propriedade 12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp x = +\infty$

Observemos que, tomando $y = 2^k$, em que $k \in \mathbb{N}$, teremos $\ln y = \ln 2^k$, donde $\ln y = k \ln 2$ e desde que $\ln 2 > 0$ tem-se que $\ln y \rightarrow +\infty$ se $k \rightarrow +\infty$. Conseqüentemente $y = \exp x \rightarrow +\infty$ se $x \rightarrow +\infty$.

Propriedade 13. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = 0$

Neste caso tomemos $y = 2^{-k}$ para $k \in \mathbb{N}$. Daí, $\ln y = \ln 2^{-k}$ de onde $\ln y = -k \ln 2$ e como $-k \ln 2 \rightarrow -\infty$ deveremos ter $\ln y \rightarrow -\infty$ e então $y = \exp x \rightarrow 0$.

2 A função \exp e o número e

A partir de agora o fato de chamarmos a função \exp de exponencial começará a ser esclarecido.

Definição 4. Definimos o número e como sendo aquele que satisfaz

$$\ln e = 1$$

O número e está bem definido, pois a função $\ln : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é injetora e sobrejetora. Portanto, dado o número $1 \in \mathbb{R}$, existe um único número positivo, que designaremos por e , tal que $\ln e = 1$.

Propriedade 14. $\exp x = e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Começemos observando que a propriedade é válida para $x = 1$. De fato,

$$e = \exp(\ln e) = \exp 1.$$

Por indução, mostraremos que a propriedade se verifica para todo $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$ isto foi exatamente o que acabou de ser demonstrado. Suponhamos que

$$e^n = \exp n, \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

Assim $\exp(n+1) = \exp n \cdot \exp 1 = e^n \cdot e^1 = e^{n+1}$, o que mostra que a propriedade é válida para $n+1$ e, conseqüentemente, válida para todo $n \in \mathbb{N}$

Se n for inteiro positivo, teremos

$$\exp(0) = 1 = \exp(n + (-n)) = \exp(n) \cdot \exp(-n)$$

e assim

$$\exp(-n) = \frac{1}{\exp n} = \frac{1}{e^n} = e^{-n}$$

Suponhamos que $r = \frac{m}{n}$ em que m e n são números inteiros e $n \neq 0$.

Daí,

$$\begin{aligned} \exp r &= \exp\left(\frac{m}{n}\right) = \exp\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{m\text{-vezes}}\right) = \\ &= \exp\left(\frac{1}{n}\right) \cdots \exp\left(\frac{1}{n}\right) = e^{\frac{1}{n}} \cdots e^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{m}{n}} \end{aligned}$$

em que usamos o fato de que $\exp\left(\frac{1}{n}\right) = e^{\frac{1}{n}}$. Mostremos este fato: Seja $y = \exp\left(\frac{1}{n}\right)$, ou seja, $\ln y = \frac{1}{n}$ o que implica $n \ln y = 1$ e daí $\ln y^n = 1 = \ln e$ e pela injetividade da função \ln tem-se $y^n = e$ e então $y = \exp\left(\frac{1}{n}\right) = e^{\frac{1}{n}}$.

Desse modo temos

$$\exp r = e^r,$$

para todo $r \in \mathbb{Q}$. Assim, é natural definir a potência e^x , para qualquer número real x , como feito a seguir.

Definição 5. Dado qualquer número $x \in \mathbb{R}$, define-se

$$e^x = \exp x.$$

De agora em diante trabalharemos com a função exponencial apresentando-a mais na forma $y = e^x$ do que na forma $y = \exp x$.

Cabem algumas observações sobre o número e , que é a base do sistema de logaritmos naturais.

O número e é um número irracional, ou seja, ele não pode ser escrito na forma de uma fração $\frac{p}{q}$, em que $p, q \in \mathbb{Z}$, com $q \neq 0$, e seu valor aproximado é 2,71828182845.... Na verdade, e é um número *transcendente*, isto é, ele não é raiz de nenhum polinômio da forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

em que os coeficientes a_0, a_1, \dots, a_n sejam inteiros. Os números que não são transcendentos são chamados *algébricos*.

Deve-se ressaltar que todo número racional $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, com $q \neq 0$, é algébrico. Basta observar que $\frac{p}{q}$ é raiz do polinômio de grau 1

$$P(x) = qx - p.$$

No entanto, existem números irracionais que são algébricos, como é o caso de $\sqrt{2}$, que é raiz do polinômio $P(x) = x^2 - 2$. Para mais informações sobre tais classes de números, o leitor pode consultar D.G. de Figueiredo¹

Uma maneira de calcular e^x é por meio de uma entidade matemática chamada *série numérica* que é, grosso modo, uma *soma* com uma infinidade de parcelas. Detalhes sobre estas séries serão vistas nas aulas referentes à Análise. Apenas como uma informação adicional observemos que e^x pode ser escrita como

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

sendo que uma boa aproximação para e^x , qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, é dada por

$$e^x \cong 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}, \quad n = 1, 2, \dots$$

¹Djairo G. de Figueiredo, Números Irracionais e Transcendentes, coleção Iniciação Científica, Sociedade Brasileira de Matemática, 2002.

de sorte que quanto maior o valor de n melhor será a aproximação obtida.

Deve-se enfatizar que as funções exponencial e logarítmica são aplicáveis em vários problemas oriundos não só da Matemática como também do mundo físico.

Uma classe desses problemas está relacionada com os chamados crescimento ou decaimento exponencial. Tornemos isso mais preciso.

Suponhamos que $y = y(t)$ represente o valor de uma certa quantidade, no tempo t , cujo crescimento ou decréscimo seja expresso pela igualdade

$$\frac{dy}{dt} = ky,$$

em que k é uma certa constante não-nula. Tal expressão traduz o fato de que a taxa de variação (derivada) da quantidade y é proporcional ao valor de y em cada instante t .

Façamos $g(t) = \frac{y}{e^{kt}}$ e calculemos sua derivada, usando a regra do quociente:

$$\frac{dg}{dt}(t) = \frac{e^{kt} \frac{dy}{dt} - y k e^{kt}}{e^{2kt}} = \frac{e^{kt} ky - y k e^{kt}}{e^{2kt}} = 0,$$

qualquer que seja t em um certo intervalo, normalmente $(0, +\infty)$. Portanto, $g(t)$ deve ser constante, de modo que

$$\frac{y(t)}{e^{kt}} = C,$$

para alguma constante C e para todo $t \geq 0$, ou seja,

$$y(t) = C e^{kt}.$$

Suponhamos que no fenômeno que estejamos a estudar, conheça-se o valor de y em $t = 0$, digamos $y(0) = y_0$. Assim, podemos determinar o valor de C :

$$y_0 = y(0) = C e^{k \cdot 0} = C$$

e então

$$y(t) = y_0 e^{kt}.$$

Se $k > 0$, diz-se que y cresce exponencialmente e, se $k < 0$, diz-se que y decresce exponencialmente. Esse tipo de problema será estudado detalhadamente nas aulas referentes às equações diferenciais.

Nos exercícios resolvidos mostraremos várias propriedades importantes das funções exponencial e logarítmica e que o leitor deve estudar com cuidado.

Um problema importante em Biologia, que já foi citado *an passant*, é o do crescimento populacional de bactérias. Designemos por $N = N(t)$ o

número de bactérias em uma certa colônia de um experimento científico. Um modelo razoável para descrever tal fenômeno, caso não haja inibição ao crescimento das bactérias, é o descrito pela relação

$$\frac{dN}{dt} = kN,$$

em que $\frac{dN}{dt}$ é a derivada de N , que representa a taxa de crescimento populacional, e k é uma constante positiva, sendo que esta última relação é o que chamamos de *equação diferencial*, a qual expressa o fato de que a taxa de crescimento da cultura de bactérias, em cada instante t , é proporcional à quantidade de bactérias neste mesmo instante.

Reescrevamos tal equação diferencial na forma

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = k$$

e observemos que $\frac{d}{dt} \ln(N(t)) = \frac{N'(t)}{N(t)}$, ou seja,

$$\frac{d}{dt} \ln(N(t)) = k$$

o que nos diz que $\ln N(t)$ é uma primitiva da função constante k , isto é,

$$\ln N(t) = \int k dt + C$$

Portanto,

$$\ln N(t) = kt + C$$

e usando o fato conhecido de que as funções logarítmica e exponencial são inversas uma da outra, teremos

$$N(t) = e^{kt+c} = e^c \cdot e^{kt}$$

e chamando $e^c = A$, obtemos

$$N(t) = Ae^{kt}$$

que é a chamada *solução geral* da equação diferencial $\frac{dN}{dt} = kN$, e diz então que a população de bactérias possui crescimento exponencial.

Admitindo que saibamos calcular o número de bactérias no início do experimento, isto é, $n(0) = N_0$ é um valor conhecido, obteremos $N(0) = Ae^0 = A = N_0$. Daí,

$$N(t) = N_0 e^{kt}.$$

Vejamoss uma situação concreta.

Suponhamos que em um experimento científico um pesquisador dispõe de uma colônia de bactérias para ser observada. Admitamos que no dia 1 de abril existam 1 milhão de bactérias e no dia 1 de maio elas tenham crescido e atingido a marca de 7,5 milhões. Observemos que a função que rege tal fenômeno é $N(t) = N_0 e^{kt}$. Considerando $t = 0$ no dia 1 de abril, teremos

$$N(0) = 1000000 = N_0$$

e daí

$$N(t) = 10^6 e^{kt}.$$

Como calcular k ? Ora, $N(30) = 7,5 \cdot 10^5$, e daí $N(30) = 10^6 e^{k \cdot 30}$, donde se conclui que

$$k = \frac{\ln 7,5}{30} \cong 0,0672.$$

Assim

$$N(t) \cong 10^6 \cdot e^{0,0672t}.$$

Quando a colônia de bactérias atingiria a formidável marca de 10^9 elementos? Simples:

$$10^9 \cong 10^6 \cdot e^{0,0672t}$$

e daí

$$t \cong \frac{\ln 1000}{0,0672} \cong 102,8 \text{ dias.}$$

Essa marca será alcançada no dia 11 de julho.

3 A função exponencial de base a

Observe que, muito embora a função e^x tenha sido introduzida no ensino médio, expressões como $\pi^{\sqrt{x}}$ ou $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$, entre outras, ainda não foram rigorosamente definidas. Ora, como já sabemos calcular e^x , para qualquer valor real de x , a definição seguinte deverá soar bastante natural.

Definição 6. Dado qualquer número real $a > 0, a \neq 1$, define-se a função *exponencial de base a* por

$$a^x = e^{x \ln a}.$$

Essa função, como era de esperar, herda todas as propriedades da função $\exp x = e^x$. Façamos alguns casos, à guisa de exemplo.

$$a^0 = e^{0 \ln a} = e^0 = 1,$$

$$a^1 = e^{1 \cdot \ln a} = e^{\ln a} = a,$$

pois, como já foi observado, as funções exponencial e logarítmica são inversas uma da outra.

$$a^{-x} = e^{-x \ln a} = e^{\ln a^{-x}} = a^{-x},$$

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y.$$

Esta propriedade segue-se dos cálculos a seguir:

$$a^{x+y} = e^{(x+y) \ln a} = e^{x \ln a + y \ln a} = e^{x \ln a} \cdot e^{y \ln a} = a^x \cdot a^y.$$

Estabeleceremos, em seguida, um teorema que nos fornecerá uma propriedade básica da função a^x .

Teorema 18. Seja a um número positivo e sejam x e y números reais arbitrários. Então

$$(a^x)^y = a^{xy}.$$

Demonstração. Usando a definição de exponencial, tem-se

$$(e^x)^y = e^{y \ln e^x} = e^{yx} = e^{xy},$$

e assim a propriedade é válida para $a = e$. Portanto,

$$(a^x)^y = (e^{x \ln a})^y = e^{xy \ln a} = a^{xy}.$$

o que completa a demonstração. \square

Vejamos outras propriedades da função a^x . Começemos com a sua derivada.

Propriedade 15. $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$.

De fato, considerando que $a^x = e^{x \ln a}$, podemos usar a *regra da cadeia*, para obter

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(x \ln a) e^{x \ln a} = a^x \ln a.$$

Decorre daí que, se $a > 1$, então a^x é crescente e, se $0 < a < 1$, tal função é decrescente.

Propriedade 16. Se $a > 1$, então $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$.

Com efeito, $a^x = e^{x \ln a}$ e sendo $a > 1$, segue-se que $\ln a > 0$ e assim $x \ln a \rightarrow +\infty$ se $x \rightarrow +\infty$, o que implica que $e^{x \ln a} \rightarrow +\infty$, mostrando a propriedade.

Propriedade 17. Se $0 < a < 1$, então $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$.

Realmente, $a^x = e^{x \ln a}$ e como $0 < a < 1$ tem-se que $\ln a < 0$ e daí $x \ln a \rightarrow -\infty$ se $x \rightarrow +\infty$, donde se conclui que $e^{x \ln a} \rightarrow 0$.

De maneira análoga mostram-se as duas propriedades seguintes.

Propriedade 18. Se $a > 1$, então $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$.

Propriedade 19. Se $0 < a < 1$ então $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$.

Destas propriedades, segue-se que a função exponencial a^x , definida em $x \in \mathbb{R}$, é injetora e sobrejetora tendo como imagem o intervalo $(0, +\infty)$, de modo que seus gráficos, conforme sejam $0 < a < 1$ ou $a > 1$ estão esboçados nas figuras 12.2(a) e 12.2(b) dadas a seguir.

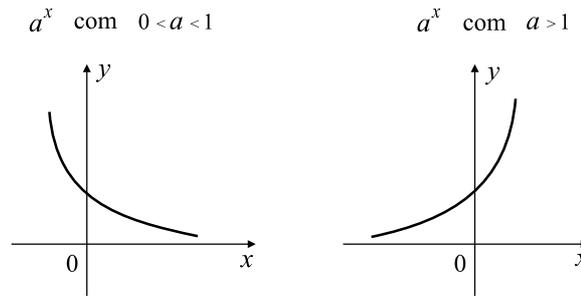


Fig. 12.2(a)

Fig. 12.2(b)

Observemos que

$$(a^x)' = \ln a \cdot e^{x \ln a}$$

$$(a^x)'' = (\ln a)^2 \cdot e^{x \ln a} > 0$$

que foram usadas para traçar os gráficos representados nas figuras 12.2(a) e 12.2(b).

4 A função logarítmica de base a

Até agora estudamos a função logarítmica \ln , definida como sendo a inversa da função exponencial de base e . Introduziremos agora outras funções logarítmicas que são definidas como inversas de funções exponenciais de outras bases.

Definição 7. Seja $a > 0$, $a \neq 1$. Define-se a função *logarítmica de base a* , $\log_a : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, como sendo a inversa da função

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow (0, +\infty) \\ x &\mapsto a^x, \end{aligned}$$

Portanto, temos que $y = \log_a x$ se, e somente se, $x = a^y$. Daí, segue-se que $\ln a^y = \ln x$ se, e somente se, $y \ln a = \ln x$, donde

$$y = \frac{\ln x}{\ln a}$$

o que nos fornece

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Resulta, também, da definição que

$$a^{\log_a x} = x \text{ e } \log_a(a^x) = x.$$

Como exercício, prove as seguintes propriedades:

- (i) $\log_a 1 = 0$;
- (ii) $\log_a a = 1$;
- (iii) $\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v$;
- (iv) $\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$;
- (v) $\log_a\left(\frac{1}{v}\right) = -\log_a v$;
- (vi) $\log_a(u^r) = r \log_a u$.

Estas propriedades decorrem daquelas mostradas para o logaritmo natural.

5 Exercícios resolvidos

1. Mostre que

$$e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Solução. Escreva

$$f(t) = \left(1 + \frac{x}{t}\right)^t$$

de onde

$$\ln f(t) = t \ln \left(1 + \frac{x}{t}\right) = x \left[\frac{\ln(1 + \frac{x}{t}) - \ln 1}{\frac{x}{t}} \right].$$

Fixado x teremos que $t \rightarrow +\infty$ implica $\frac{x}{t} \rightarrow 0$ e observe que

$$\frac{\ln(1 + x/t) - \ln 1}{\frac{x}{t}}$$

é o quociente de Newton da função \ln no ponto 1 em que o acréscimo $h = \frac{x}{t}$ tende a zero quando $t \rightarrow +\infty$. Assim,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln f(t) = x \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + x/t) - \ln 1}{\frac{x}{t}} = x \cdot \ln'(1) = x.$$

Desse modo,

$$\ln f(t) \rightarrow x \text{ se } t \rightarrow +\infty$$

e assim

$$e^{\ln f(t)} \rightarrow e^x \text{ se } t \rightarrow +\infty,$$

ou seja,

$$f(t) \rightarrow e^x \text{ se } t \rightarrow +\infty$$

Conseqüentemente,

$$e^x = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{t}\right)^t.$$

Fazendo $x = 1$ temos uma maneira de calcular aproximações para o número e :

$$e = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t.$$

2. Calcule a integral

$$\int a^x dx$$

em que a é um número real positivo e diferente de 1.

Solução. Sabemos que

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

e daí

$$a^x = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\ln a} a^x \right).$$

Segue-se que $\frac{1}{\ln a} a^x$ é uma primitiva de a^x . Portanto,

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C.$$

3. Calcule a integral $\int x \ln x dx$.

Solução. Usaremos a fórmula de integração por partes, introduzida na aula 10, ou seja,

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Chamemos $u = \ln x$ e $dv = x dx$ para obter $du = \frac{1}{x} dx$ e $v = \frac{x^2}{2}$ donde

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x + C.$$

4. Calcule a integral $\int \ln x dx$.

Solução. Façamos $u = \ln x$ e $dv = dx$ e usemos a fórmula da integração por partes. Assim, $du = \frac{1}{x} dx$ e $v = x$, o que nos fornece

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} x dx = x \ln x - x + C.$$

5. Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função $y = \ln x$ no ponto $(1, 0)$.

Solução. A inclinação da reta tangente ao gráfico da função $y = \ln x$ em um ponto de abscissa $x > 0$ é dada por $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$. Fazendo $x = 1$, teremos a inclinação $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = 1$ e daí a reta tangente solicitada no problema é $y = x - 1$.

6. Calcule o limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{x+1}.$$

Solução. Observemos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{x+1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1-1}{x+1} \right)^{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x+1} \right)^{x+1} \\ &= e^{-1} \end{aligned}$$

6 Exercícios propostos

1. Calcule $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$.

2. Mostre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x}{n} \right)^n = e^{-x}.$$

3. Encontre todas as funções $f(x)$ que satisfazem à igualdade $f'(x) = f(x)$.
4. Encontre a área da região plana limitada pelos gráficos das funções $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$ e pela reta vertical $x = \frac{1}{2}$.
5. Mostre que a reta tangente ao gráfico de $y = \ln x$, passando pelo ponto de abscissa e passa pela origem.

6. Encontre a área da região limitada pelo eixo ox , a reta $x = e$ e o gráfico de $y = \ln x$.

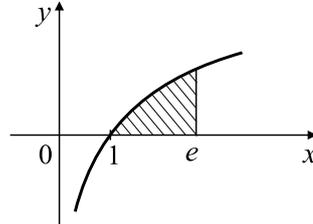


Fig. 12.3

7. Calcule a derivada de cada uma das funções abaixo:

(a) $x8^x$ (b) 10^{x^2} (c) $10^x x^{10}$.

8. Calcule as derivadas das funções abaixo:

(a) $y = e^{5x}$

(b) $y = e\sqrt{x}$

(c) $y = e^{\frac{x}{3}}$

(d) $y = e^{\cos x}$

(e) $y = e^{|x|}$

(f) $y = \frac{e^x}{x^2}$

(g) $y = 3^{\text{sen } x}$

(h) $y = 10^{x \cos x}$

(i) $y = x^{e^x}$

(j) $y = e^{2^x}$

9. Esboce o gráfico da função $y = e^{|x|}$.

10. Esboce o gráfico da função $y = e^{x+k}$ em que k é uma constante.

11. Esboce o gráfico da função $y = e^{|x|+k}$.

12. Determine a reta normal ao gráfico da função $y = e^{x^2}$ quando $x = 1$.

13. Mostre que as funções $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{2x}$ e $y_3(x) = Ae^x + Be^{2x}$ satisfazem à igualdade

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

7 Respostas dos exercícios propostos

1. $\ln 2$

2. Sugestão: Verifique inicialmente que $e^x = \lim_{n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. A seguir, no limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}$, faça a mudança de variável $u = -n$.

3. $f(x) = Ae^x$ em que A é uma constante.

4. $\ln 2 - \frac{7}{24}$

5. A equação da reta procurada é $y = \frac{1}{e}x$

6. 1

7. (a) $8^x + 8^x x \ln x$ (b) $2 \cdot 10^{x^2} x \ln(10)$ (c) $10^x x^{10} \ln x + 10 \cdot 10^x x^9$

8. (a) $y' = 5e^{5x}$

(b) $y' = \frac{e}{2\sqrt{x}}$

(c) $y' = \frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}$

(d) $y' = -e^{\cos x} \sin x$

(e) $y' = \begin{cases} e^x & \text{se } x > 0 \\ -e^{-x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$

(f) $y' = \frac{e^x(x-1)}{x^3}$

(g) $y' = \ln 3 (3^{\sin x} \cos x)$

(h) $y' = 10^{x \cos x} (\cos x - x \sin x) \ln 10$

(i) $y' = x^{e^x} e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right)$

(j) $y' = e^{2x} 2^x \ln x$

9.

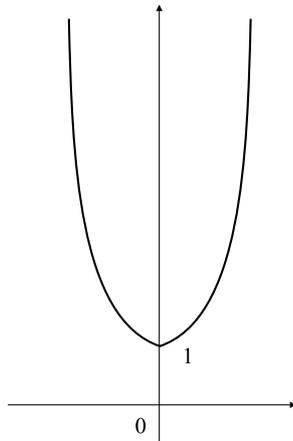


Fig. 12.4

10.

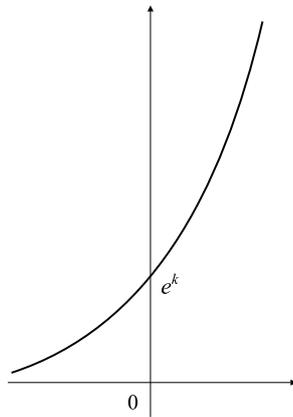


Fig. 12.5

11.

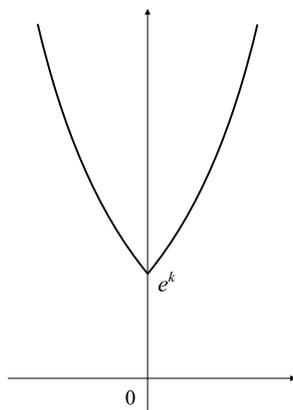


Fig. 12.6

12. $y = -\frac{1}{2e}(x - 1) + e$

13. Basta mostrar que a função y_1 e suas primeira e segunda derivadas satisfazem $y_1'' - 3y_1' + 2y_1 = 0$ fazendo substituição de y_1 , y_1' e y_1''

nessa fórmula. O mesmo deve ser feito para y_2 e y_3 .

Nesta aula você aprendeu:

- a definição e as propriedades da função exponencial.
- a calcular a derivada e a integral da função exponencial.

8 Apêndice

Como construir uma tábua de logaritmos

Este Apêndice é baseado, parcialmente, em um artigo do Prof. Geraldo Ávila²

Como vimos na Definição 7 desta aula, dado um número positivo $a \neq 1$, o logaritmo de um número positivo x , na base a , é dado por

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

e a função $\log_a : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é a inversa da função exponencial

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow (0, +\infty) \\ x &\mapsto a^x. \end{aligned}$$

Antes do advento e popularização das calculadoras eletrônicas, os valores dos logaritmos vinham listados em tabelas incluídas nos textos utilizados no Curso Científico, um dos precursores do atual ensino médio. Veja o livro de Bezerra³, bastante popular há algumas décadas, que contém uma tábua de logaritmos.

Como, então, tais tábuas eram construídas?

Os logaritmos que mais se popularizaram foram os decimais, que são aqueles calculados na base 10. Tais logaritmos, foram introduzidos por Henry Briggs (1561-1631), e por isso são também chamados logaritmos de Briggs, tiveram sua tábua publicada pela primeira vez em 1617 e, depois, em uma versão mais ampliada, em 1624.

Começemos lembrando o que vem a ser o logaritmo de um número na base 10:

O logaritmo de um número N na base 10, designado por $\log_{10} N$, é o expoente r a que se deve elevar 10 a fim de obter N , isto é, $N = 10^r$.

De agora em diante designaremos o logaritmo na base 10 simplesmente por \log . Observemos, inicialmente, que qualquer número positivo pode ser escrito na forma de uma potência de 10 vezes um número α pertencente ao intervalo $[0, 10)$. Por exemplo,

$$\begin{aligned} 17749 &= 1,7749 \times 10^4 \\ 0,00031 &= 3,1 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

²Geraldo Ávila, Como se Constrói uma Tábua de Logaritmos, Revista do Professor de Matemática 26(1994)1-7.

³Manoel Jairo Bezerra, Curso de Matemática, Companhia Editora Nacional, São Paulo, 1970.

Portanto, é suficiente conhecer os logaritmos dos números do intervalo $(1, 10)$. Tais logaritmos são chamados *mantissas*. Se quisermos calcular $\log 17749$, basta saber o valor de $\log 1,7749$ pois

$$\log 17749 = \log(1,7749 \times 10^4) = \log 1,7749 + \log 10^4 = \log 1,7749 + 4.$$

Briggs procedeu da seguinte maneira. Inicialmente ele extraiu a raiz quadrada de 10, seguida das extrações sucessivas das raízes quadradas dos resultados obtidos em cada extração. Isto é equivalente a calcular

$$10^{\frac{1}{2}}, 10^{\frac{1}{4}}, 10^{\frac{1}{8}}, 10^{\frac{1}{16}}, \dots$$

Assim,

$$10^{\frac{1}{2}} = 3,1622 \Rightarrow \log 3,1622 = 0,5;$$

$$10^{\frac{1}{4}} = 1,7783 \Rightarrow \log 1,7783 = 0,25;$$

$$10^{\frac{1}{8}} = 1,3352 \Rightarrow \log 1,3352 = 0,125.$$

Prosseguindo desta maneira ele obtinha uma tabela na qual estava incluída a seguinte tabelinha:

x	$\log x$
$10^{1/2} = 3,16228$	0,50000
$10^{1/4} = 1,77828$	0,25000
$10^{1/8} = 1,33352$	0,12500
$10^{1/16} = 1,15478$	0,06250
$10^{1/32} = 1,07461$	0,03125
$10^{1/64} = 1,03663$	0,01563
$10^{1/128} = 1,01815$	0,00781
$10^{1/256} = 1,00904$	0,00391

Aula 13

Aplicações da integral

Objetivos

- Utilizar a integral definida para calcular área, comprimento de arcos, volume de sólidos de revolução e trabalho mecânico.

Iniciamos a aula 9, dedicada à integração, motivando o conceito de integral definida, a chamada *integral de Riemann*, por intermédio do cálculo de áreas. Mais precisamente, se tivéssemos que calcular a área da região R esboçada na figura 13.1, a seguir,

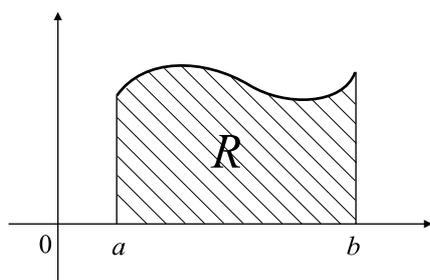


Fig. 13.1

limitada lateralmente pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$, inferiormente pelo segmento $[a, b]$, contido no eixo ox e superiormente pelo gráfico da função $y = f(x)$, fatiávamos tal região em finíssimos retângulos e, à medida que suas bases se tornassem cada vez menores a área total desses retângulos ficariam cada vez mais próxima da área de R . Veja figura 13.2.

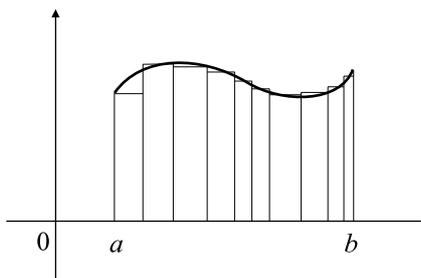


Fig. 13.2

Esse procedimento, extremamente útil, se aplica não somente em problemas geométricos mas também em problemas físicos. Esta aula e a seguinte serão dedicadas a essas aplicações. Comecemos relembrando o estudo das áreas.

1 Cálculo de áreas

Nesta seção estudaremos o cálculo de área de regiões do plano que são associadas a gráficos de funções. Analisaremos duas situações: áreas abaixo de gráficos de funções e áreas entre gráficos de funções.

Área abaixo de gráfico

Suponhamos que se queira calcular a área da região R descrita anteriormente, muitas vezes chamada de *área abaixo do gráfico da função*, e que a função $y = f(x)$ seja positiva, para todo $x \in [a, b]$. Subdividindo o intervalo $[a, b]$ em subintervalos da forma

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

(lembramos das partições introduzidas na aula 9) e escolhendo pontos arbitrários ξ_i pertencentes aos intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, temos que a área de cada retângulo R_i , como na figura 13.3,

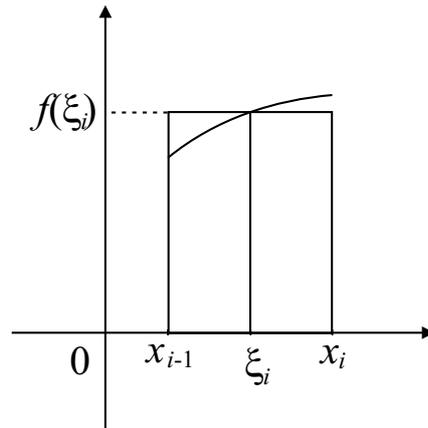


Fig. 13.3

é dada por

$$f(\xi_i)\Delta x_i,$$

em que $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, de modo que a soma total das áreas de todos os retângulos R_i é

$$\sum_{i=1}^N f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Essa é uma aproximação da área R que se quer calcular. Designemos por

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$$

e

$$\|P\| = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i.$$

Observemos que

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N f(\xi_i)\Delta x_i$$

fornece a área de R que é exatamente a integral definida de $y = f(x)$ no intervalo $[a, b]$. Assim, designando a área de R por $A(R)$, teremos

$$A(R) = \int_a^b f(x)dx. \quad (13.1)$$

De posse da expressão em (13.1) estudaremos vários casos.

Exemplo 116. Calculemos a área da região R compreendida entre as retas $x = 1$, $x = 2$, o eixo ox e o gráfico da função $y = x^2$. Essa região é mostrada na figura 13.4.

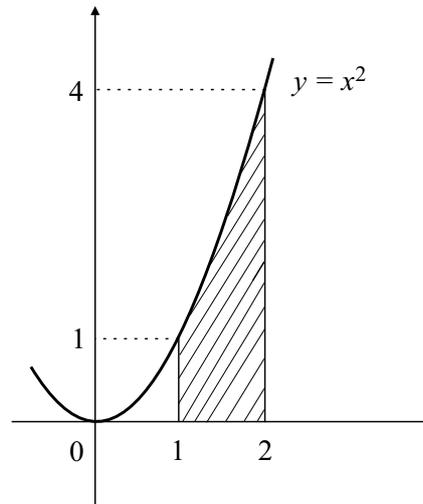


Fig. 13.4

A área da região procurada é

$$A(R) = \int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{7}{3}.$$

Exemplo 117. Calculemos a área da região compreendida entre o eixo ox e o gráfico da função $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \text{sen } x$.

Queremos calcular a área da região mostrada na figura 13.5.

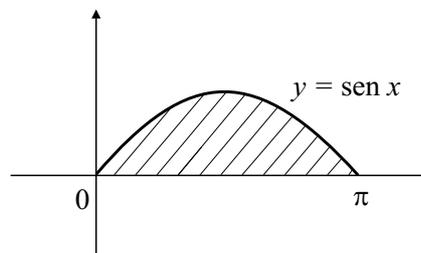


Fig. 13.5

A área dessa região é dada por

$$\int_0^{\pi} \text{sen } x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = 2.$$

Área entre gráficos

Suponhamos que se queira calcular a área da região R limitada pelos gráficos das funções $y = f(x)$ e $y = g(x)$, para $a \leq x \leq b$, em que $f(x) \geq g(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$, conforme figura 13.6.

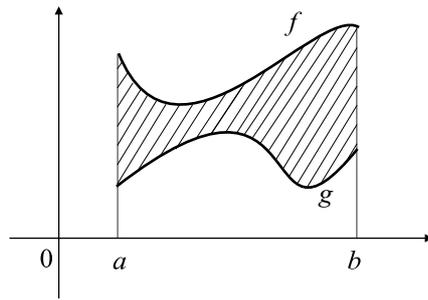


Fig. 13.6

Assim, a área $A(R)$ de R é calculada por $A(R) = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$, ou seja,

$$A(R) = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx. \quad (13.2)$$

No presente exemplo, supusemos que ambas as funções assumiam apenas valores positivos. No entanto, a expressão em (13.2) continua válida mesmo no caso em que as funções atinjam valores negativos. Consideremos a situação como a esboçada na figura 13.7.

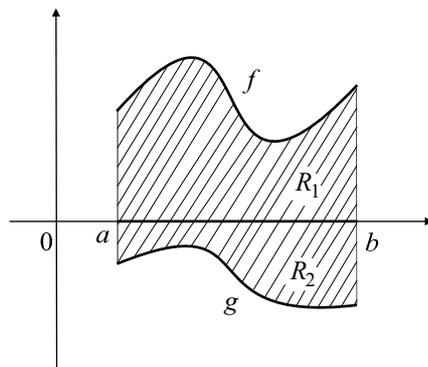


Fig. 13.7

Neste caso, a região $R = R_1 \cup R_2$ e $A(R) = A(R_1) + A(R_2)$. A área $A(R_1)$ é calculada por

$$A(R_1) = \int_a^b f(x)dx$$

enquanto

$$A(R_2) = - \int_a^b g(x)dx$$

em que a presença do sinal $-$ na expressão acima se deve ao fato de que $g(x)$ é negativa em $[a, b]$. Portanto

$$A(R) = \int_a^b f(x)dx + \left(- \int_a^b g(x)dx \right) = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

Mesmo que tenhamos a ocorrência de gráficos como os representados na figura 13.8, a expressão em (13.2) continua válida.

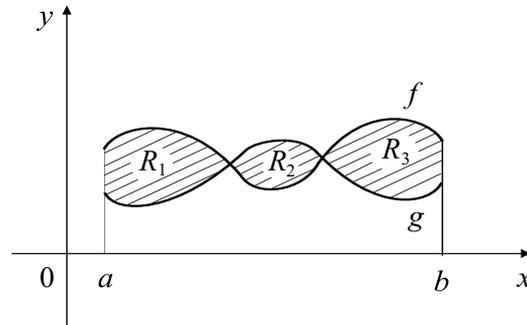


Fig. 13.8

Nesse caso temos $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$. Assim, $A(R) = A(R_1) + A(R_2) + A(R_3)$. Logo

$$A(R) = \int_a^c [f(x) - g(x)] dx + \int_c^d [g(x) - f(x)] dx + \int_d^b [f(x) - g(x)] dx.$$

Exemplo 118. Calculemos a área da região R sob a reta $y = x + 2$, acima da parábola $y = x^2$ e entre o eixo oy e a reta $x = 2$, conforme figura 13.9.

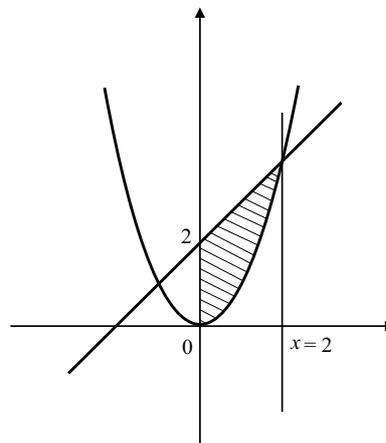


Fig. 13.9

Nesse caso,

$$A(R) = \int_0^2 (x + 2 - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{10}{3}.$$

Exemplo 119. Encontremos a área da região limitada pela retas $y = 2x - 4$ e pela parábola $y^2 = 4x$.

Vejam os a figura 13.10.

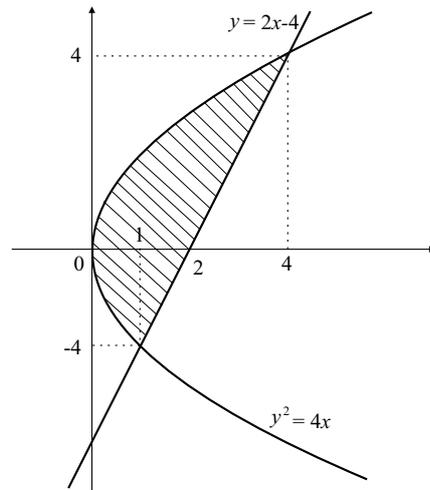


Fig. 13.10

e observemos que na relação $y^2 = 4x$ y não é função de x , mas x é função de y . Assim, podemos escrever

$$x = \frac{y^2}{4} \text{ e } x = \frac{y}{2} + 2$$

de modo que os valores de y correspondentes aos pontos de interseção da reta e da parábola são determinados pelas raízes da equação

$$y^2 - 2y - 8 = 0,$$

o que nos fornece as soluções $y = -2$ e $y = 4$. Dessa maneira,

$$A(R) = \int_{-2}^4 \left[\frac{y}{2} + 2 - \frac{y^2}{4} \right] dy = \left[\frac{y^2}{4} + 2y - \frac{y^3}{12} \right]_{-2}^4 = 9.$$

2 Integrais impróprias

Para termos uma idéia inicial do que iremos desenvolver, comecemos com um exemplo.

Exemplo 120. Consideremos a função $f(x) = \frac{1}{x^2}$ cujo gráfico está esboçado na figura 13.11, a seguir.

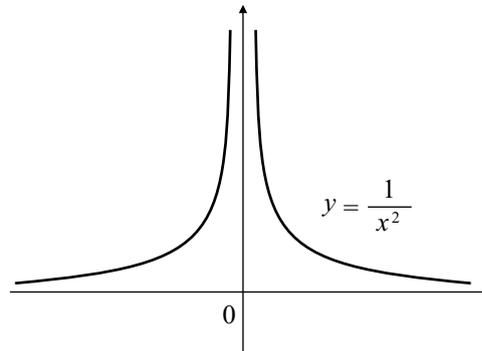


Fig. 13.11

Sabe-se que, caso queiramos determinar a área da região abaixo do gráfico de tal função, entre os valores $0 < a < b < +\infty$, conforme mostrado na figura 13.12(a), basta calcularmos a integral $\int_a^b f(x)dx$.

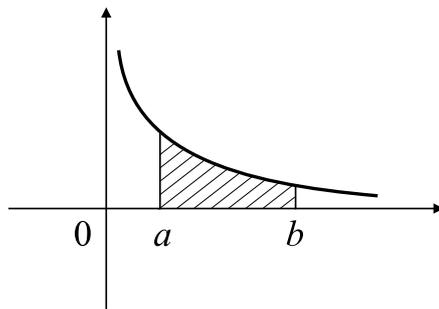


Fig. 13.12(a)

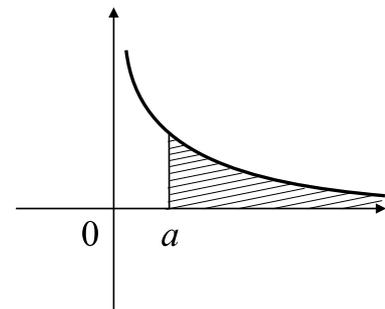


Fig. 13.12(b)

Sejamos um pouco mais ambiciosos e suponhamos que queiramos calcular a área de toda a região abaixo da curva, acima do eixo ox e para $a \leq x < +\infty$, conforme mostra a figura 13.12(b). Observemos que a região não é limitada para valores de $x > a$. Para realizarmos tal objetivo, calcularemos a integral $\int_a^b f(x)dx$ e depois faremos b tender para $+\infty$. O resultado obtido nesse limite é chamado *integral imprópria de primeira espécie* e será designada por $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. Assim,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{1}{x^2} dx = - \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} \right]_a^b = - \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right] = \frac{1}{a}.$$

Isso mostra que podemos trabalhar com regiões não-limitadas, mas que possuem áreas finitas. Quando isto acontece dizemos que a integral imprópria $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge.

Vejamos um outro exemplo.

Exemplo 121. Consideremos a função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, para valores positivos de x , cujo gráfico está esboçado na figura 13.13.

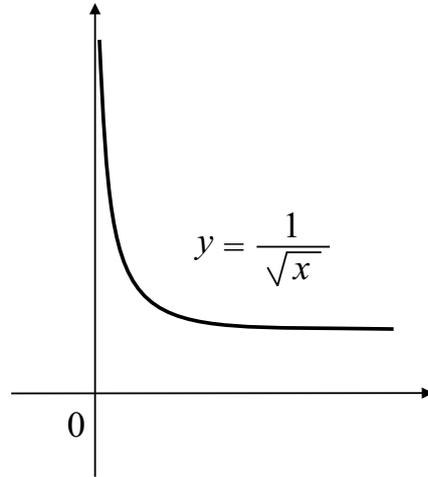


Fig. 13.13

A área da região abaixo do seu gráfico, acima do eixo ox , entre os pontos $0 < a < b < +\infty$ é dada por $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.

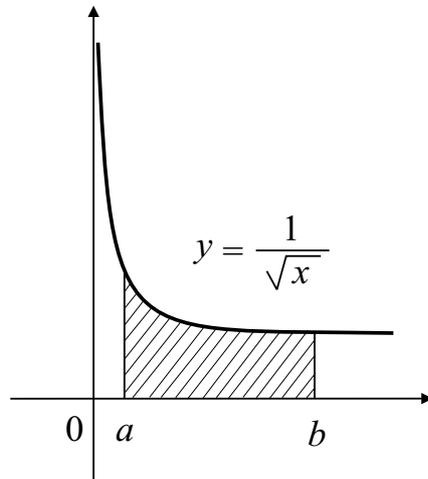


Fig. 13.14

No entanto, caso desejemos calcular a área da região limitada pelos gráficos de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ e pelas retas $y = 0$, $x = 0$ e $x = b$, devemos nos valer, *mutatis mutandis*, das mesmas idéias desenvolvidas no exemplo anterior. No caso em tela, procedamos da seguinte maneira: calcularemos a integral $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ e depois faremos $a \rightarrow 0^+$ e assim teremos a *integral imprópria de segunda espécie* $\int_0^b \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.

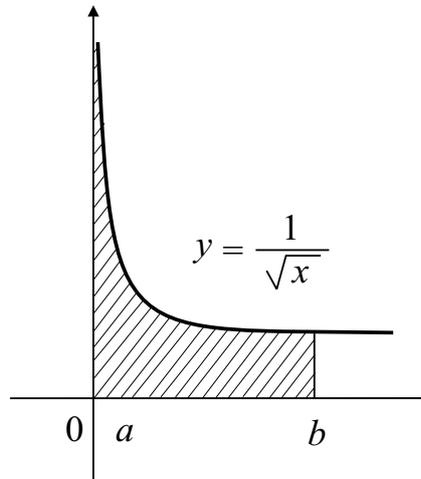


Fig. 13.15

Portanto,

$$\int_0^b \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} [2\sqrt{x}]_a^b = 2 \lim_{a \rightarrow 0^+} [\sqrt{b} - \sqrt{a}] = 2\sqrt{b}$$

e, como no exemplo precedente, diz-se que a integral imprópria $\int_0^b \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ é *convergente*.

Mais formalmente, seja $y = f(x)$ uma função contínua em cada intervalo da forma $[a, M]$, em que $a \in \mathbb{R}$ é um número fixado e $M > a$. Em virtude da continuidade de f em cada intervalo $[a, M]$ tem-se que $\int_a^M f(x) dx$ existe. Suponhamos que

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_a^M f(x) dx$$

exista. Define-se então tal limite como sendo a *integral imprópria de primeira espécie* da função f em $[a, +\infty)$ e escreve-se

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_a^M f(x) dx.$$

Se esse for o caso, diz-se que a integral imprópria é *convergente*. Caso contrário, diz-se que a integral imprópria é *divergente*. No exemplo 120 a integral imprópria converge.

Pode-se também definir integrais impróprias da forma

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{M \rightarrow -\infty} \int_M^b f(x) dx$$

na qual a função f é contínua em cada intervalo da forma $[M, b]$ em que b é um número real fixado e $M < b$.

Temos integrais da forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{M \rightarrow +\infty \\ N \rightarrow -\infty}} \int_N^M f(x)dx$$

em que M e N são números reais satisfazendo $N < M$ e a função f é integrável em cada intervalo $[N, M]$. A expressão

$$\lim_{\substack{M \rightarrow +\infty \\ N \rightarrow -\infty}} \int_N^M f(x)dx$$

deve ser entendida como segue

$$\lim_{\substack{M \rightarrow +\infty \\ N \rightarrow -\infty}} \int_N^M f(x)dx = \lim_{N \rightarrow -\infty} \left(\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_N^M f(x)dx \right).$$

Exemplo 122. Calculemos a integral imprópria

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4}{4+x^2} dx$$

Esta integral é igual à área mostrada na figura 13.16.

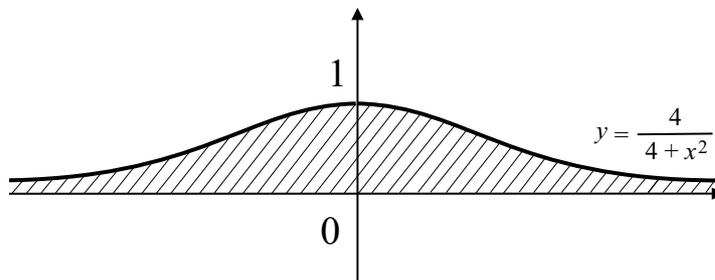


Fig. 13.16

Pelo que já foi dito temos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4}{4+x^2} dx &= \lim_{\substack{M \rightarrow +\infty \\ N \rightarrow -\infty}} \int_N^M \frac{4}{1+x^2} dx \\ &= \lim_{\substack{M \rightarrow +\infty \\ N \rightarrow -\infty}} \left(-2 \arctan \left(\frac{1}{2} N \right) + 2 \arctan \left(\frac{1}{2} M \right) \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow -\infty} \left(\lim_{M \rightarrow +\infty} \left(-2 \arctan \left(\frac{1}{2} N \right) + 2 \arctan \left(\frac{1}{2} M \right) \right) \right) \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

Consideremos uma outra situação. Seja f uma função contínua em cada intervalo da forma $[a + \epsilon, b]$ em que $a < b$ são números reais fixados e $\epsilon > 0$ é qualquer número real tal que $a + \epsilon < b$. Assim, a integral

$$\int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$$

existe. Caso o limite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$$

exista, diremos que ela é uma *integral imprópria de segunda espécie* e escreve-se

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx.$$

É claro que se f for contínua em $[a, b]$ a integral imprópria coincide com a integral de Riemann usual.

Evidentemente outras situações poderão ocorrer. Suponhamos, por exemplo, que uma certa função $y = f(x)$ seja contínua em qualquer intervalo da forma $[a, b - \epsilon]$ em que $a < b$ são números reais fixados e $\epsilon > 0$ é qualquer real tal que $a < b - \epsilon$. A integral

$$\int_a^{b-\epsilon} f(x)dx$$

sempre existe, qualquer que seja o valor de ϵ como acima. Se

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx$$

existir, ele será também chamado de integral imprópria de segunda espécie e designada por $\int_a^b f(x)dx$ para a qual são válidas todas as observações feitas anteriormente para a outra integral imprópria.

Deve-se observar que a hipótese de que f seja contínua foi imposta a fim de garantirmos a integrabilidade de f nos intervalos fechados e limitados. No entanto, tal hipótese pode ser substituída por integrabilidade.

3 Comprimento de arco

Inicialmente observemos que as aplicações da integral consistem em aproximar entidades, digamos, curvilíneas, por outras que sejam lineares. Tratemos, no presente caso, do comprimento de curvas. Suponhamos que tenhamos o problema de calcular o comprimento da curva representada pelo gráfico da função derivável $y = f(x)$, no intervalo $[a, b]$, como descrita na figura 13.17, a seguir.

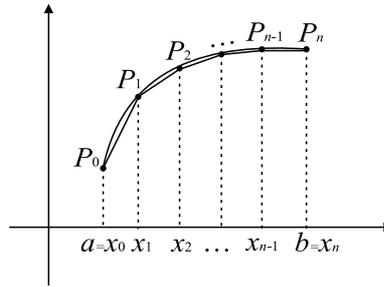


Fig. 13.17

O comprimento do arco do ponto P_0 ao ponto P_n é aproximado pelo comprimento da poligonal $P_0P_1 \dots P_n$ cujo comprimento será designado por L_n . Assim,

$$L_n = \overline{P_0P_1} + \overline{P_1P_2} + \dots + \overline{P_{n-1}P_n}.$$

As componentes do ponto P_{k-1} são dadas por $P_{k-1} = (x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ e os de $P_k = (x_k, f(x_k))$, de modo que

$$\overline{P_{k-1}P_k} = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}.$$

Usando o *teorema do valor médio*, vide aula 6, à função f , no intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, encontra-se $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ tal que

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

e designando por $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, teremos

$$\overline{P_{k-1}P_k} = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + [f'(\xi_k)]^2(\Delta x_k)^2} = \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \Delta x_k,$$

de modo que

$$L_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \Delta x_k.$$

Fazendo a norma da partição

$$P = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$$

tender a zero, obtém-se

$$L = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

e, portanto, temos

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Essa é a fórmula para o cálculo do comprimento do arco descrito por uma curva representada pelo gráfico da função $y = f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$.

Exemplo 123. Encontremos o comprimento da curva dada pela equação $f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ para x entre 0 e 1.

Observemos que f é derivável e $f'(x) = x^{\frac{1}{2}}$. Assim, o comprimento L requerido é

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+x} \, dx = \int_0^1 (1+x)^{\frac{1}{2}} \, dx = \left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \left[2^{\frac{3}{2}} - 1 \right].$$

4 Volume de sólidos de revolução

Seja $y = f(x)$ uma função contínua e positiva definida em um intervalo fechado $[a, b]$, conforme figura 13.18.

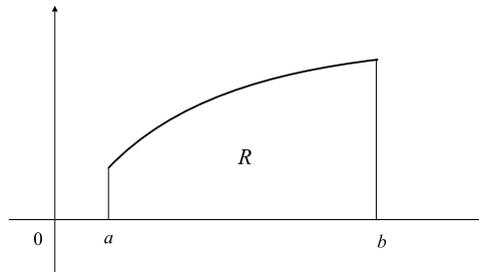


Fig. 13-18

Façamos uma revolução completa da região R definida por

$$R = \{(x, y) ; a \leq x \leq b \text{ e } 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Veja figura 13.19. Esse sólido é chamado de *sólido de revolução*.

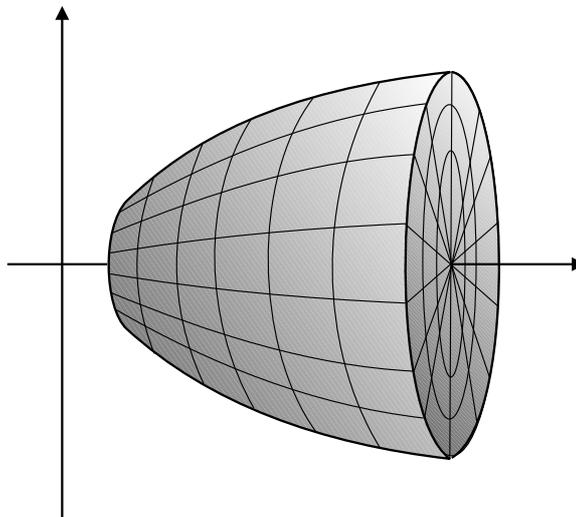


Fig. 13-19

Nosso objetivo é determinar o volume desse sólido, por meio de uma integração. Intuitivamente, o processo consiste em fatiar o referido sólido em fatias finíssimas de tal maneira que elas se aproximem de um cilindro. Para isto consideraremos uma partição $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$ em que a fatia determinada por $[x_{k-1}, x_k]$, conforme figura 13-20,

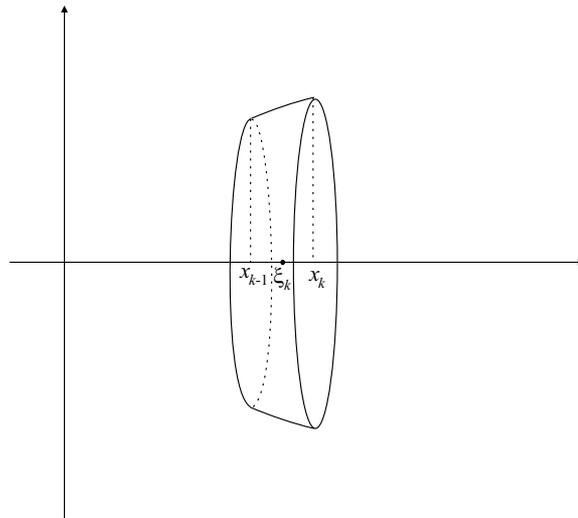


Fig. 13-20

possui volume aproximadamente igual a

$$\pi [f(\xi_k)]^2 \Delta x_k,$$

em que ξ_k é um ponto do intervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Desse modo, o volume total aproximado é

$$\sum_{k=1}^n \pi [f(\xi_k)]^2 \Delta x_k.$$

Fazendo, como nos casos anteriores, o maior comprimento Δx_k tender a zero, obtém-se o volume V do sólido de revolução como sendo

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Exemplo 124. Calculemos o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo x , de todos os pares (x, y) tais que $0 \leq x \leq 4$ e $0 \leq y \leq \sqrt{x}$.

O sólido em questão está mostrado na figura 13.21.

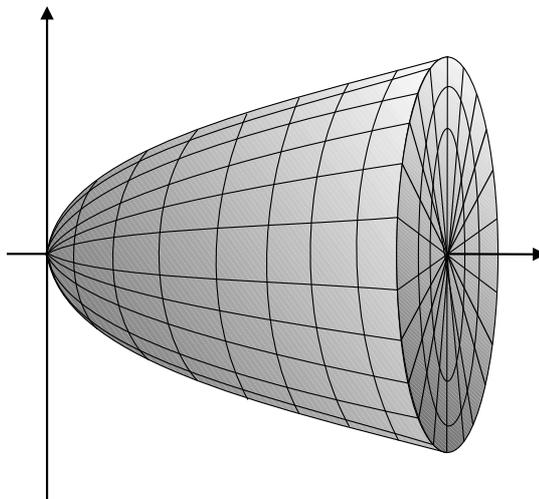


Fig. 13.21

O volume desse sólido é dado por

$$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 8\pi$$

5 Trabalho mecânico

Desde os cursos elementares de Física que conhecemos o conceito de *trabalho mecânico* realizado por uma força constante. Mais precisamente, suponhamos que se tenha uma força constante F deslocando um certo corpo ao longo de uma trajetória retilínea, desde o ponto A até o ponto B , conforme mostra a figura 13.22, e seja d a distância entre tais pontos.

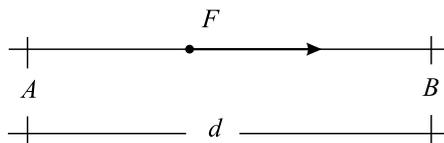


Fig. 13.22

Define-se o *trabalho mecânico* da força F , designado por $W_A^B(F)$, para deslocar o corpo do ponto A ao ponto B como sendo

$$W_A^B(F) = F \cdot d.$$

No entanto, nem sempre acontece de as forças envolvidas nos fenômenos físicos serem constantes. É o que ocorre com as forças gravitacionais, elétricas, magnéticas, etc. Em virtude disso, faz-se necessário definir precisamente o trabalho mecânico quando as forças envolvidas forem variáveis.

Restringiremos a nossa análise ao caso em que a trajetória é retilínea pois, caso contrário, teremos de lidar com *integrais de linha*, o que foge ao escopo destas aulas.

Suponhamos que estejamos a deslocar um corpo ao longo de um eixo, por meio de uma força $F(x)$, em que x designa a posição do corpo com relação à origem O do eixo que estamos a considerar, que desloca o corpo desde o ponto a até o ponto b , de acordo com o mostrado na figura 13.23.

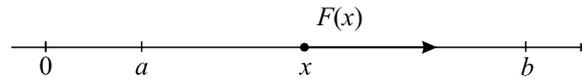


Fig. 13.23

Como a força $F(x)$ depende da posição x em que o corpo se encontra, não podemos usar a definição supracitada para calcular o trabalho realizado por $F(x)$ no percurso de a até b . No entanto, podemos nos valer de uma aproximação que nos levará ao conceito de integral. Com efeito, subdividamos o percurso total $[a, b]$ em pequenos percursos $[x_{i-1}, x_i]$ dados por

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

e aí o leitor já deve ter percebido que construímos uma partição do intervalo $[a, b]$. Evidentemente, mesmo que cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ tenha comprimento bem pequeno, a força $F(x)$ terá uma variação nesse percurso. Contudo, se escolhermos um ponto qualquer $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ e fizermos

$$W_{x_{i-1}}^{x_i}(F(\xi_i)) = F(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = F(\xi_i)\Delta x_i$$

teremos uma aproximação para o trabalho realizado pela força F no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Ora, caso queiramos uma aproximação para o trabalho total no percurso $[a, b]$, devemos somar todas as parcelas como as acima, para obter

$$\sum_{i=1}^n W_{x_{i-1}}^{x_i}(F(\xi_i)) = \sum_{i=1}^n F(\xi_i)\Delta x_i.$$

Essa expressão é exatamente uma soma de Riemann da função F com respeito à partição $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$. Designando por $\|P\|$ a norma desta partição, para obter o valor exato do trabalho no intervalo $[a, b]$, devemos tomar o limite da soma de Riemann quando a norma da partição tender a zero. Mas isto é precisamente a integral de Riemann da função F no intervalo $[a, b]$. Então o trabalho realizado pela força F no percurso dado, designado por $W_a^b(F)$, é dado por

$$W_a^b(F) = \int_a^b F(x)dx.$$

Vejamos um exemplo.

Exemplo 125. (*Trabalho realizado para deformar uma mola*) Pela Lei de Hooke a força necessária para deformar uma mola é da forma $F(x) = -kx$, em que k é a constante da mola e x a deformação. Portanto, caso queiramos deformar a mola de uma posição a até uma posição b , o trabalho a ser realizado é

$$W_a^b(F) = \int_a^b F(x)dx = \int_a^b -kx dx = -k \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = -k \left[\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right].$$

6 Exercícios resolvidos

1. Calcule o comprimento da circunferência $x^2 + y^2 = R^2$.

Solução. Em virtude da simetria da circunferência, é suficiente calcular o comprimento da parte da circunferência contida no primeiro quadrante, e multiplicá-lo por 4.

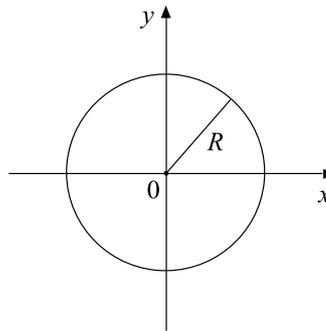


Fig. 13.24

A referida parte da circunferência é dada pela função

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2},$$

com $0 \leq x \leq R$. Portanto, o comprimento L da circunferência é

$$L = 4 \int_0^R \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Desde que $f'(x) = -x(R^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ teremos

$$L = 4R \int_0^R \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx.$$

Fazendo a mudança de variável $x = R \cos \theta$ obtemos

$$L = 4R \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1}{\sqrt{R^2 - R^2 \cos^2 \theta}} R(-\operatorname{sen} \theta) d\theta = 4R [\theta]_0^{\pi/2} = 2\pi R.$$

2. Calcule o comprimento da curva $y^2 = 8x^3$, de $x = 1$ à $x = 3$.

Solução. Observemos que $y = 2\sqrt{2}x^{3/2}$ e $y' = 3\sqrt{2}x^{1/2}$ e assim o comprimento L da curva é

$$L = \int_1^3 \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_1^3 \sqrt{1 + 18x} dx.$$

Usando a mudança de variável $u = 1 + 18x$, obtém-se

$$L = \int_1^3 \sqrt{1 + 18x} dx = \frac{1}{27} \left[\sqrt{(1 + 18x)^3} \right]_1^3 = \frac{1}{27} \left[55\sqrt{55} - 19\sqrt{19} \right].$$

3. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo x , de todos os pares (x, y) tais que $1 \leq x \leq 4$ e $1 \leq y \leq 2$.

Solução. O sólido desse exercício pode ser visualizado na figura a seguir.

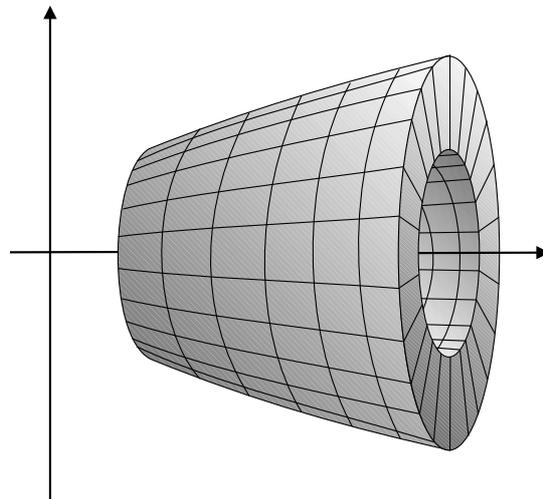


Fig. 13.25

O seu volume é obtido como segue

$$V = \pi \int_1^4 (\sqrt{x})^2 dx - \pi \int_1^4 1 dx = 5\pi.$$

4. Uma partícula se desloca ao longo do eixo ox sob a ação de uma força paralela ao deslocamento e de módulo igual a $\frac{1}{\sqrt{x}}$. Calcule o trabalho realizado pela força para deslocar a partícula de $x = 1$ até $x = 4$.

Solução. O trabalho realizado pela força é dado por

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_1^4 = 2J.$$

7 Exercícios propostos

- Nos exercícios a seguir, calcular a área da região R entre os gráficos das funções f e g para valores de x no intervalo $[a, b]$. Faça um esboço da região R .
 - $f(x) = 2 - x^2$, $g(x) = 0$, $a = -1$, $b = 1$.
 - $f(x) = x^3 + x^2$, $g(x) = x^3 + 1$, $a = -1$, $b = 1$.
 - $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 2$, $a = -1$, $b = 2$.
 - $f(x) = |x - 1|$, $g(x) = 2x^2 - 4x + 1$, $a = 0$, $b = 2$.
- Nas observações feitas sobre cálculos de áreas consideravam-se funções da forma $y = f(x)$ e calculavam-se áreas de regiões limitadas pelo gráfico de f e o eixo x . Este era o problema, e algumas de suas variações, que consideramos até agora. Contudo, existem situações nas quais se tem x como função de y e, nestes casos, calculam-se áreas de regiões limitadas pelos gráficos das funções e o eixo oy . Veja figura 13.26.

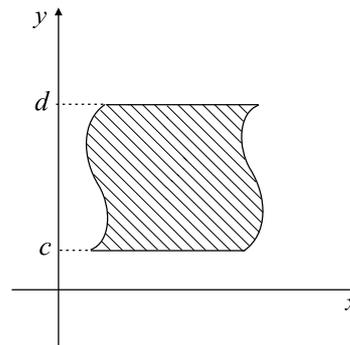


Fig. 13.26

Nessa situação, a área da região R_1 é dada por

$$A(R_1) = \int_c^d g(y) dy.$$

De posse dessas observações. Determine a área da região limitada entre as curvas esboçando os seus gráficos.

- $x = y^3 - y$ e $x = 0$.
- $x = -y + \frac{17}{4}$ e $x = \frac{1}{y}$
- $x = y^3 - 4y^2 + 3y$ e $x = -y$.
- $x = -\frac{1}{2}y + 2$ e $x = \sqrt{4 - y}$.

3. Ache a área da região entre as curvas $y = x^2$ e $y = 9x$ integrando

(a) com relação a x ;

(b) com relação a y .

4. Mostre que a integral

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$$

é divergente.

5. Investigue a convergência da integral

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx, \quad a > 0$$

com respeito aos possíveis valores de p .

6. Investigue a convergência da integral

$$\int_0^b \frac{1}{x^p} dx, \quad b > 0$$

com respeito aos possíveis valores de p .

7. Investigue a convergência da integral imprópria

$$\int_1^{+\infty} x e^{-x} dx.$$

8. Investigue a convergência da integral imprópria

$$\int_1^{+\infty} x e^{-x^2} dx.$$

9. Calcule a integral imprópria

$$\int_1^2 \frac{1}{x \ln x} dx.$$

10. Mostre que a integral

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|x-1|}} dx.$$

é convergente.

11. Calcule a integral imprópria

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx.$$

8 Respostas dos exercícios propostos

1. (a) $\frac{10}{3}$

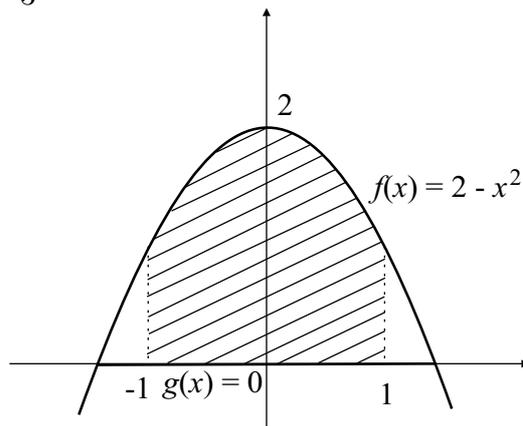


Fig. 13.27

(b) 2

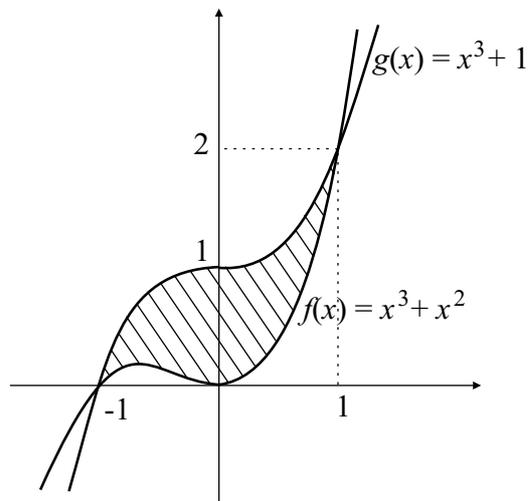


Fig. 13.28

(c) $\frac{9}{2}$

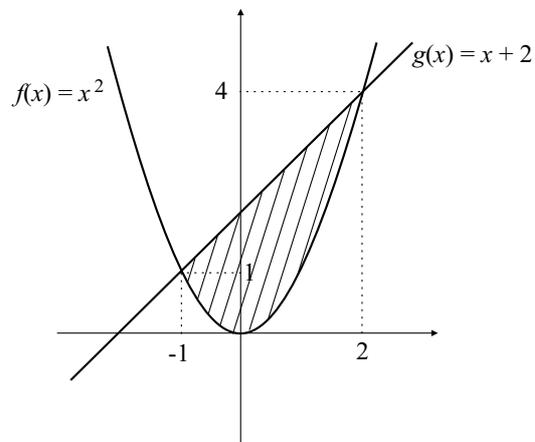


Fig. 13.29

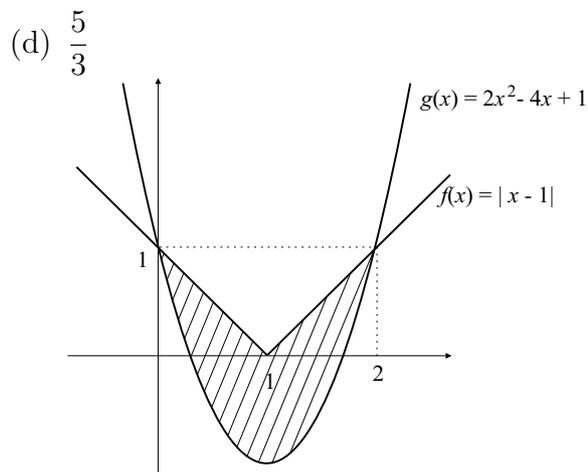


Fig.13.30

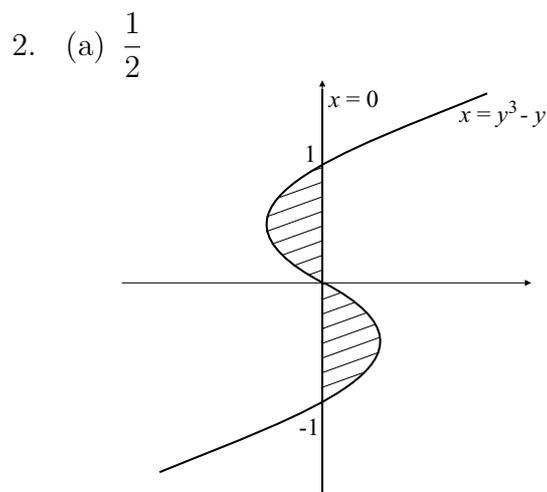


Fig. 13.31

(b) $\frac{255}{32} - 4 \ln 2$

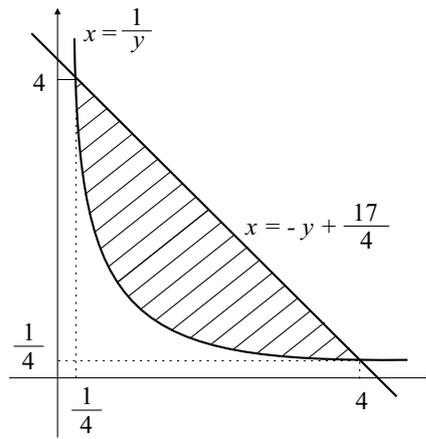


Fig.13.32

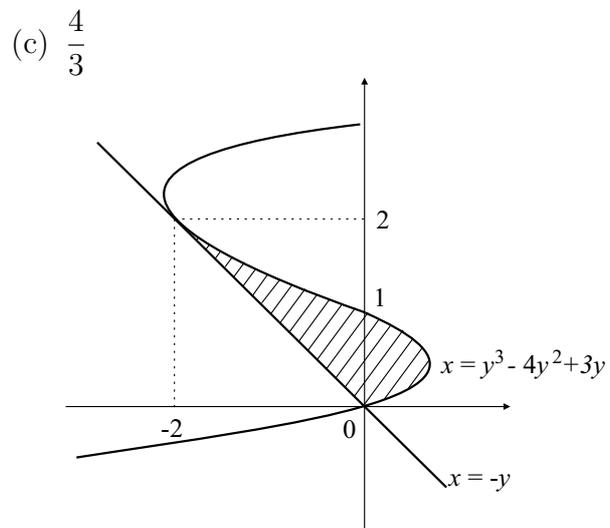


Fig. 13.33

(d) $\frac{4}{3}$

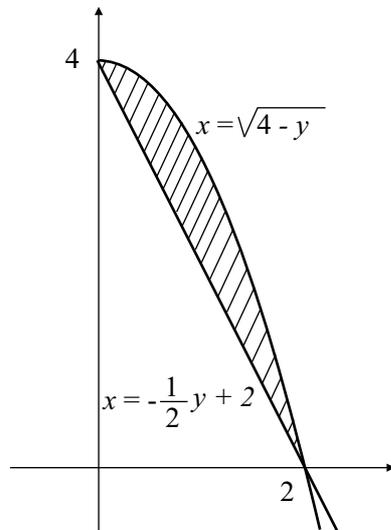


Fig. 13.34

$$3. \quad (a) \quad \int_0^9 (9x - x^2) dx = \frac{243}{2}$$

$$(b) \quad \int_0^{81} \left(\sqrt{y} - \frac{y}{9} \right) dy = \frac{243}{2}$$

5. Diverge para $p \leq 1$ e converge para $p > 1$.

6. Converte para $p \leq 1$ e diverge para $p > 1$.

7. Converte para $\frac{2}{e}$.

8. Converte para $\frac{1}{2e}$.

9. $+\infty$

11. 4

Nesta aula você aprendeu a:

- utilizar a integral definida para calcular área, comprimento de arcos, volume de sólidos de revolução e trabalho mecânico.

9 Apêndice

Métodos numéricos para cálculo de integrais

Calcular integrais definidas torna-se matéria simples desde que conheçamos uma primitiva da função a ser integrada dada por funções elementares. Além disso, sabe-se que toda função contínua definida em um certo intervalo possui primitiva. Mais precisamente, dada uma função contínua $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, em que I é um intervalo de \mathbb{R} , a função

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

em que a é um ponto qualquer de I e $x \in I$ é uma primitiva de f em I . No entanto, nem sempre temos primitivas dadas como uma combinação de funções elementares. O exemplo típico é o da função $f(x) = e^{-x^2}$. Como, então, calcular $\int_a^b e^{-x^2} dx$? Para atingir este objetivo, existem métodos numéricos que, mesmo não exibindo o valor exato da integral, nos fornecem aproximações tão acuradas quanto se queira. Exibamos alguns métodos.

Método do retângulo (usando extremidades de intervalos)

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Consideremos uma partição

$$P = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n\}.$$

Sabemos que essa partição P induz uma aproximação da integral de Riemann $\int_a^b f(x)dx$ por intermédio da chamada soma de Riemann

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

em que $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$. Suponhamos que cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ possua comprimento igual a $\frac{b-a}{n}$ de modo que $x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, x_2 = a + 2\frac{b-a}{n}, \dots, x_{n-1} = a + (n-1)\frac{b-a}{n}, x_n = a + n\frac{b-a}{n} = b$. Escolhamos $\xi_1 = a = x_0, \xi_2 = a + \frac{b-a}{n} = x_1, \dots, \xi_n = a + (n-1)\frac{b-a}{n} = x_{n-1}$. Conseqüentemente,

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{n} [f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})].$$

Caso tivéssemos tomado as extremidades esquerdas dos subintervalos, teríamos a aproximação

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)].$$

Como já foi observado, quanto maior for o valor de $n \in \mathbb{N}$ melhor serão as aproximações dadas nas expressões acima. As interpretações geométricas desses fatos já foram fornecidas na aula 9.

Método do ponto médio

Consideraremos uma partição como no caso anterior e escolheremos como ξ_i o ponto médio do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ em que estamos também considerando todos os intervalos com comprimentos iguais a $\frac{b-a}{n}$. Assim, $\xi_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ para $i = 1, \dots, n$, de modo que teremos a seguinte aproximação

$$\int_a^b f(x) dx \cong \frac{b-a}{n} \left[f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + \dots + f\left(\frac{x_{n-1} + x_n}{2}\right) \right].$$

Veja a figura

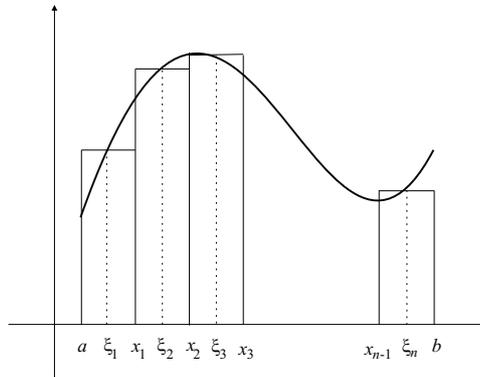


Fig. 13.35

Método do Trapézio

Nesse caso consideraremos a partição como nos dois casos anteriores e aproximamos a integral por meio de trapézios como os mostrados na figura 13.36.

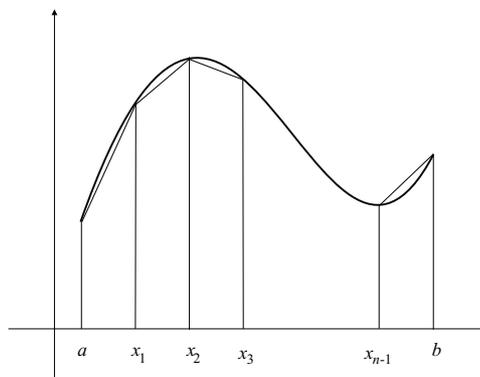


Fig. 13.36

Observemos que a área de cada trapézio é dada por

$$\left[\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \right] \frac{b-a}{n}$$

e assim temos a aproximação

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{n} \left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2} \right].$$

Temos também o *método de Simpson*, que não será abordado aqui.

Vejam os um exemplo simples para ilustrar os métodos numéricos descritos. Consideremos a função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, cuja integral é calculada, pelo teorema fundamental do cálculo e é dada por

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} = 0,3333\dots$$

Façamos a subdivisão do intervalo $[0, 1]$ de modo que tenhamos a partição

$$P = \left\{ x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{3} < x_2 = \frac{2}{3} < x_3 = 1 \right\}$$

cujos subintervalos possuem comprimentos iguais a $\frac{1}{3}$.

Usando o método do retângulo e tomando as extremidades esquerdas, conforme figura 13.37, teremos a aproximação

$$\int_0^1 x^2 dx \cong \frac{1}{3} \left[0 + \left(\frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right] = \frac{5}{27} \cong 0,1852.$$

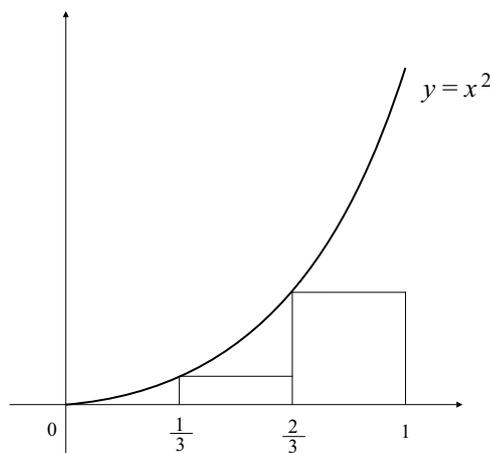


Fig. 13.37

Usando ainda o método do retângulo, mas agora tomando as extremidades direitas tal como na figura 13.38, teremos

$$\int_0^1 x^2 dx \cong \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1 \right] = \frac{14}{27} \cong 0,5185$$

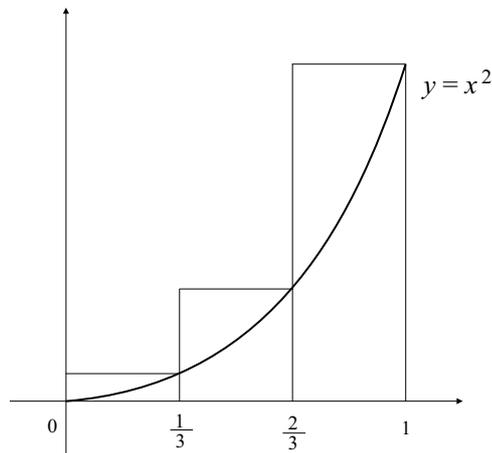


Fig. 13.38

que é uma aproximação (por excesso).

Usando a regra do trapézio, como é mostrado na figura seguinte, teremos a aproximação

$$\int_0^1 x^2 dx \cong \frac{1}{3} \left[\frac{f(0)}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{f(1)}{2} \right] = \frac{19}{54} \cong 0,3519.$$

que é uma aproximação (por excesso).

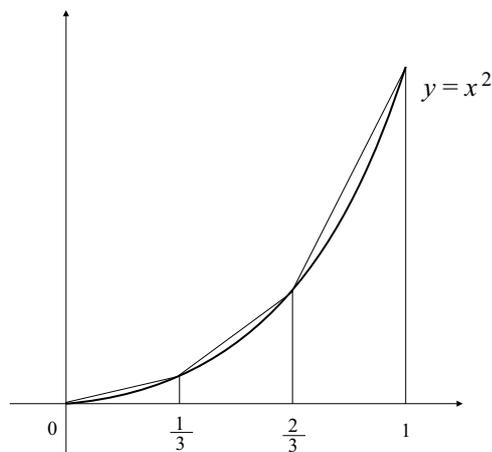


Fig. 13.39

Agora, usando o método do ponto médio, conforme figura 13.40, temos

$$\int_0^1 x^2 dx \cong \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \right] = \frac{35}{108} \cong 0,3241.$$

que é, neste caso, a melhor das aproximações.

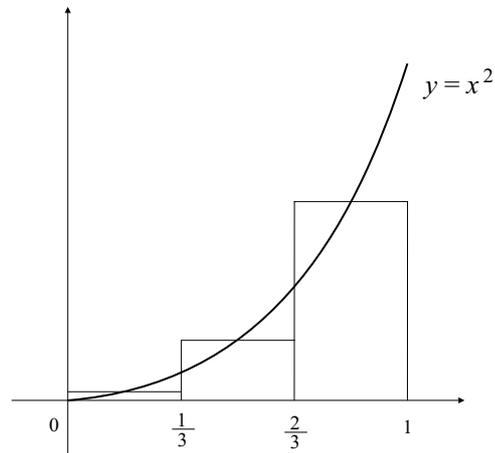


Fig. 13.40

Experimente partições mais refinadas: divida o intervalo em quatro partes iguais, cinco partes iguais, etc. Use uma calculadora ou programas matemáticos como o Maple.