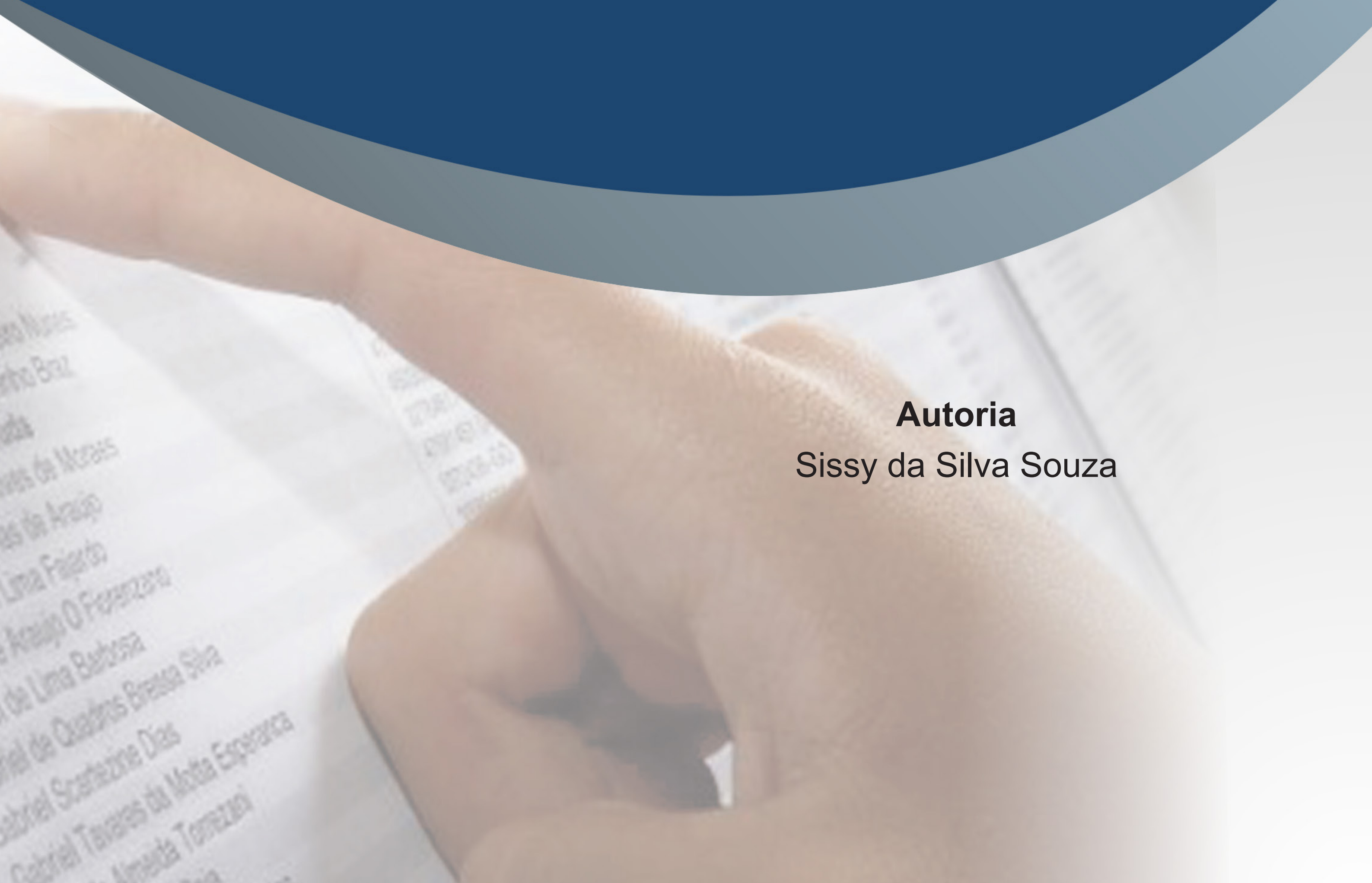
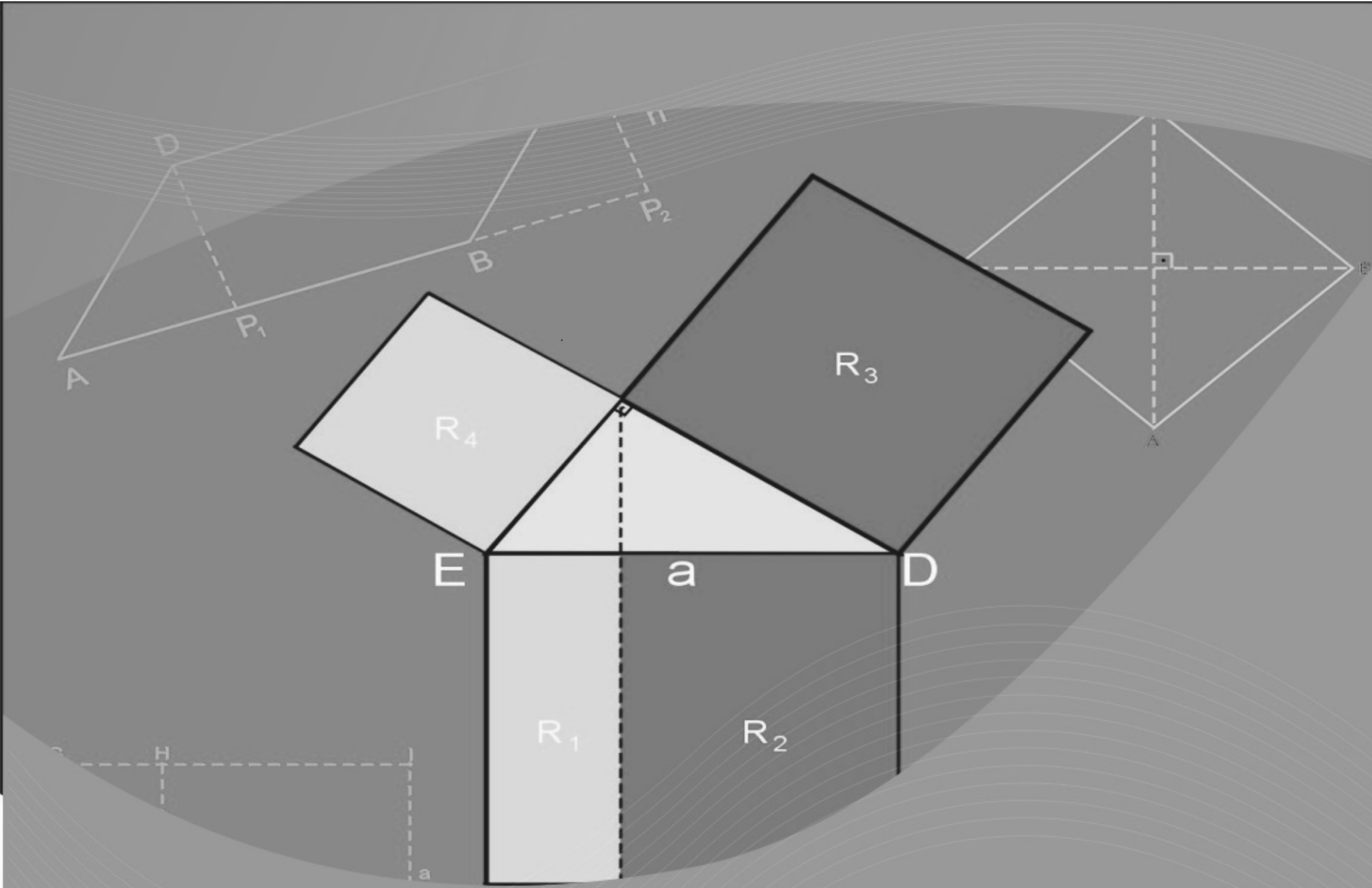
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E A DISTÂNCIA

MATEMÁTICA DISCRETA



Autoria
Sissy da Silva Souza



Módulo III

Matemática Discreta

Sissy da Silva Souza

PRESIDENTE DA REPÚBLICA
Luiz Inácio Lula da Silva

MINISTRO DA EDUCAÇÃO
Fernando Haddad

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
REITOR
Luiz de Sousa Santos Júnior

SECRETÁRIO DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA DO MEC
Carlos Eduardo Bielschowsky

DIRETOR DE POLITICAS PUBLICAS PARA EAD
Hélio Chaves

UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
COORDENADOR GERAL
Celso Costa

CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA A DISTÂNCIA DA UFPI
Coordenador Geral de EaD na UFPI
Gildásio Guedes Fernandes

CENTRO DE CIENCIAS DA NATUREZA
Helder Nunes da Cunha

COORDENADOR DO CURSO de Bach. Em Sistemas de Informação na Modaliade EaD
Luiz Cláudio Demes da Mata Sousa

DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA E ESTATÍSTICA
CHEFE DO DEPARTAMENTO
Luiz Cláudio Demes da Mata Sousa

EQUIPE DE APOIO
Paulo Sergio Marques dos Santos

DIAGRAMADOR
Joaquim Carvalho de Aguiar Neto

XXXX Souza, S. S.
Matemática Discreta / Sissy da Silva Souza – Teresina: UFPI/UAPI
2009.
1xxp.

Inclui bibliografia

1 – xx

CDU: 32

Apresentação

Este texto é destinado aos estudantes da disciplina **Matemática Discreta do curso de Bacharelado em Sistemas de Informação**, modalidade EaD. Curso que faz parte do programa de **Educação a Distância** da Universidade Aberta do Piauí (UAPI) vinculada ao consórcio formado pela Universidade Federal do Piauí (UFPI), Universidade Estadual do Piauí (UESPI), Centro Federal de Ensino Tecnológico do Piauí (CEFET-PI), com o apoio do Governo do Estado do Piauí, através da Secretaria de Educação.

Este livro é composto por 06 unidades, contendo itens e subitens, conforme descrevemos a seguir.

Na Unidade 1, apresentamos conceitos básicos de conjuntos, incluindo operações e propriedades.

Na Unidade 2, fazemos um estudo sobre as relações, mostrando vários exemplos e, de acordo com as propriedades envolvidas, definimos tipos especiais de relação, tais como as relações de ordem.

Na Unidade 3, introduzimos o conceito de função: definição, tipos, operações e propriedades importantes.

Na Unidade 4, incluímos as estruturas algébricas: conceitos, exemplos e propriedades de estruturas em geral, bem como de classes importantes como os grupos. Estudamos também aplicações com as quais observamos que certos grupos, do ponto de vista algébrico, se comportam da mesma maneira.

Na Unidade 5, abordamos conceitos e várias propriedades das Álgebras de Boole, inclusive exemplificando o uso destas propriedades na simplificação de circuitos de interruptores. Finalizamos com um breve estudo de uma classe de conjuntos ordenados que, como veremos, possui uma interessante relação com as Álgebras Booleanas.

Na Unidade 6, finalizamos com uma breve introdução aos grafos, incluindo tipos e estruturas de representação.

Sumário

Unidade 1

Conjuntos

Resumo

Esta unidade é dedicada ao estudo dos conjuntos, entes matemáticos que encontramos em nossa vida cotidiana como, por exemplo, a escalação de um time de futebol ou a lista de convidados para sua festa de formatura.

Nesta unidade, apresentamos conceitos e propriedades sobre os conjuntos. Além disso, estudamos as operações união, interseção, diferença e complemento e suas importantes propriedades.

Finalmente, dedicamos um estudo aos conjuntos numéricos, a saber: conjuntos dos números naturais, dos números inteiros, dos racionais, dos reais e dos complexos.

Sumário da Unidade

1. Conjuntos

Nesta unidade, apresentamos a noção de conjuntos, exemplos e tipos particulares. Estudamos a álgebra dos conjuntos através das propriedades dos operadores a saber: união, interseção, complementação e diferença. Finalizamos com uma seção sobre conjuntos numéricos.

Para incrementar o estudo de conjuntos, acesse o sítio Klickeducação.

1.1 Conjuntos e Relação de Inclusão

As noções de conjunto, elemento e pertinência são consideradas noções primitivas, isto é, aceitas sem uma definição a partir de outros elementos matemáticos. Nesta seção, estudamos estes entes mantemáticos, e as definições e propriedades das relações de pertinência e inclusão.

Consideramos por *conjunto* uma coleção, classe ou agrupamento de objetos ou elementos. Denotamos os conjuntos por letras maiúsculas e escrevemos seus elementos entre chaves e separados por vírgulas.

Exemplo 1.1.1.

a) *O conjunto das letras do alfabeto:*

$$A = \{a, b, c, ..., v, x, z\}.$$

b) *O conjunto dos números naturais até 50:*

$$B = \{0, 1, 2, 3, ..., 48, 49, 50\}.$$

c) *O conjunto dos meses que começam com a letra J:*

$$C = \{Janeiro, Junho, Julho\}.$$

d) *O conjunto dos dias da semana:*

$$D = \{\textit{domingo}, \textit{segunda-feira}, ..., \textit{sexta-feira}, \textit{sábado}\}.$$

e) *O conjunto das capitais brasileiras que começam com a letra S:*

$$E = \{\textit{Salvador}, \textit{São Luís}, \textit{São Paulo}\}.$$

Um conjunto também pode ser descrito em termos de uma propriedade P característica de seus elementos. Neste caso, denotamos os elementos por letras minúsculas e representamos o conjunto como segue:

$$A = \{x \mid x \text{ satisfaz a propriedade P}\}.$$

Exemplo 1.1.2.

a) $\{a, e, i, o, u\}$ *também pode ser representado como*

$$\{x \mid x \textit{ é vogal}\}.$$

b) $\{janeiro, fevereiro, ..., novembro, dezembro\}$ *representa*

$$\{x \mid x \textit{ é mês do ano}\}.$$

c) $\{$*Alagoas*, *Bahia*, *Ceará*, *Maranhão*, *Paraíba*, *Pernambuco*, *Piauí*, *Rio Grande do Norte*, *Sergipe*$\}$ *indica*

$$\{x \mid x \textit{ é estado da região nordeste}\}.$$

d) $\{0, 1, 2\}$ *indica*

$$\{x \mid x \textit{ é natural menor que 3}\}.$$

e) $\{2, 3, 5, 7, 11, 13...\}$ *representa os números primos positivos*

$$\{x \mid x \textit{ primo e } x > 0\}.$$

1.1.1 Conjuntos Unitário, Vazio e Universo

Nesta subseção apresentamos a definição dos conjuntos unitário, vazio e universo.

Definição 1.1.1. *Chamamos de conjunto unitário o conjunto que possui apenas um elemento.*

Exemplo 1.1.3.

a) *O conjunto das capitais brasileiras que começam com a letra T:* $\{$*Teresina*$\}$.

b) *O conjunto dos inteiros maiores que* -1 *e menores que* 1*:* $\{0\}$.

c) *O conjunto das soluções da equação* $2x - 5 = 1$*:* $\{3\}$.

Definição 1.1.2. *Chamamos de conjunto vazio, o qual denotamos por* $\emptyset$*, o conjunto que não possui elemento algum.*

Exemplo 1.1.4.

a) $\{x \mid x$ *é ímpar e divisível por 2*$\} = \emptyset$.

b) $\{x \mid x$ *é estado brasileiro começado com a letra F*$\} = \emptyset$.

c) $\{x \mid x > 3$ e $x < 0\} = \emptyset$.

Definição 1.1.3. *Chamamos de conjunto universo, o qual denotamos por* U*, o conjunto que contém todos os elementos importantes para um problema no qual estamos trabalhando.*

Exemplo 1.1.5.

a) *O conjunto universo das soluções complexas de uma equação do terceiro grau é* $\mathbb{C}$.

b) *O conjunto universo de um problema de geometria plana é um plano.*

1.1.2 Relação de Pertinência

Nesta subseção definimos a relação de pertinência e a igualdade de conjuntos.

Definição 1.1.4. *Seja A um conjunto qualquer.*

- *Quando x é um elemento do conjunto A, dizemos que x pertence ao conjunto A e denotamos $x \in A$.*
- *Quando x não é um elemento de A, dizemos que x não pertence ao conjunto A e denotamos $x \notin A$.*

Exemplo 1.1.6.

a) $4 \in \{x \mid x$ *é múltiplo de 2*$\}$.

b) $b \in \{x \mid x$ *é letra da palavra abril*$\}$.

c) $vermelho \notin \{x \mid x$ *é cor da bandeira brasileira*$\}$.

Definição 1.1.5.

- *Dizemos que dois conjuntos são iguais se eles têm os mesmos elementos, isto é, $A = B$ se, e somente se, todo elemento de A pertence a B e todo elemento de B pertence a A.*
- *Quando existir algum elemento de A que não pertence a B ou algum elemento de B que não está em A, dizemos que A e B não são iguais e denotamos $A \neq B$.*

Exemplo 1.1.7.

a) $\{p, a, i\} = \{a, i, p\}$.

b) $\{0, -1, 1, -2, 2\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

c) $\{a, e, i, o, u\} \neq \{a, i, u\}$.

d) $\{$*primavera*, *verão*$\} \neq \{x \mid x$ *é estação do ano*$\}$.

1.1.3 Relação de Inclusão e Subconjuntos

Apresentamos aqui a relação de inclusão e algumas propriedades básicas desta relação. Por fim, definimos e exemplificamos subconjuntos e conjunto das partes de um conjunto dado.

Definição 1.1.6.

- *Quando todo elemento de um conjunto A é também elemento de um conjunto B, temos uma relação de inclusão entre A e B, denotada por $A \subset B$ ou $B \supset A$, o qual se lê "A está contido em B"ou "B contém A".*
  Neste caso, dizemos que A é subconjunto de B.

- *Quando algum elemento de A não pertencer a B, dizemos que A não está contido em B, e denotamos por $A \not\subset B$, ou que B não contém A, o qual denotamos por $B \not\supset A$.*

Exemplo 1.1.8.

a) $\{1, 3, 5, 7\} \subset \{x \mid x$ *é ímpar*$\}$.

b) $\{Picos,$ *Parnaíba*$, Floriano\} \subset \{x \mid x$ *é município do estado do Piauí*$\}$.

c) $\{$*verão*$\} \subset \{x \mid x$ *é estação do ano*$\}$.

d) $\{x \mid x$ *é múltiplo de 10*$\} \supset \{10, 100, 1000\}$.

e) $\{amazonas, acre,$ *amapá*$\} \not\subset \{x \mid x$ *é estado do nordeste*$\}$.

Observação 1.1.1. *Já vimos que dois conjuntos A e B são iguais quando todo elemento de A pertence a B e todo elemento de B está em A, o qual usando a relação de inclusão significa que $A \subset B$ e, $B \subset A$. Assim, temos que:*

$$A = B \text{ se, e somente se, } A \subset B \text{ e } B \subset A.$$

Denominamos esta propriedade de anti-simétrica.

A relação de inclusão satisfaz também as seguintes propriedades:

1. $\emptyset \subset A$, para qualquer conjunto A.

2. $A \subset A$, para todo conjunto A (reflexiva).

3. Se $A \subset B$ e $B \subset C$ então $A \subset C$, para quaisquer conjuntos A, B, C (transitiva).

Definição 1.1.7. *Quando $A \subset B$, mas $A \neq B$, dizemos que A é subconjunto próprio de B.*

Exemplo 1.1.9.

a) $\{outubro, novembro, dezembro\}$ *é subconjunto próprio de* $\{x \mid x$ *é mês do ano*$\}$.

b) $\{2, 4, 6\}$ *é subconjunto próprio de* $\{x \mid x$ *é par*$\}$.

Definição 1.1.8. *Chamamos de conjunto das partes de um conjunto A, e o denotamos por $\mathcal{P}(A)$, o conjunto formado por todos os subconjuntos de A.*

Exemplo 1.1.10.

a) *Seja $A = \{1, 2\}$. Os subconjuntos de A são $\emptyset, \{1\}, \{2\}$ e $\{1, 2\}$. Então:*

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$

b) *Seja $A = \{1, 2, 3\}$. Então, os subconjuntos de A são $\emptyset$, $\{1\}, \{2\}, \{3\}$, $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}$, e $\{1, 2, 3\}$. Portanto,*

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Observação 1.1.2. *Se A é um conjunto com n elementos, o conjunto das partes de A possui 2^n elementos. Veja os dois últimos exemplos!*

Finalizamos esta seção apresentando a descrição de um subconjunto de um conjunto A em termos da propriedade que o define. Assim, se B é um subconjunto de A que possui a propriedade P, então B pode ser descrito como segue:

$$\{x \in A \mid x \text{ satisfaz a propriedade P}\}.$$

Exemplo 1.1.11.

a) *Seja* $A = \{a, b, c, d, e\}$.

$\{x \in A \mid x$ *é vogal*$\} = \{a, e\}$.

$\{x \in A \mid x$ *é consoante*$\} = \{b, c, d\}$.

b) *Seja* A *o conjunto das siglas dos estados brasileiros.*

$\{x \in A \mid x$ *é estado do sul*$\} = \{$*RS, SC, PR*$\}$.

$\{x \in A \mid x$ *é estado do sudeste*$\} = \{$*RJ, SP, ES, MG*$\}$.

Finalizamos esta seção com a subseção seguinte, onde estudamos uma maneira especial de representar conjuntos.

1.1.4 Diagrama de Venn

Uma maneira de visualizar conjuntos é representá-los através de regiões, a qual chamamos de Diagrama de Venn, como exemplificamos abaixo.

Exemplo 1.1.12.

a) *O conjunto* $A = \{a, b, c\}$ *pode ser representado pela região da Figura 1.1.*

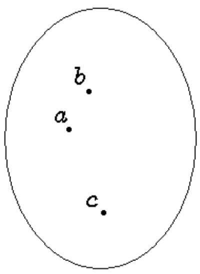


Figura 1.1: Conjunto A.

b) *O conjunto* $B = \{1, 3, 5, 7\}$ *pode ser representado pela região da Figura 1.2.*

As relações de pertinência e inclusão podem também ser representadas pelo Diagrama de Venn, como vemos nos exemplos a seguir.

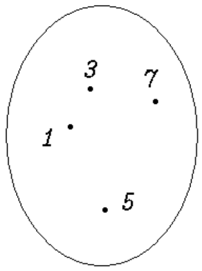


Figura 1.2: Conjunto B.

Exemplo 1.1.13.

a) *Seja* $A = \{2, 4, 5, 7\}$. *Sabemos que* $3, 8 \notin A$. *Pelo diagrama de Venn, esta não pertinência é representada através da Figura 1.3* .

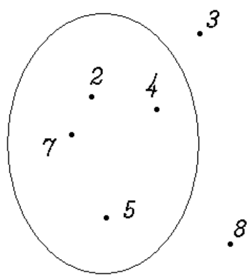


Figura 1.3: Conjunto A e relação de pertinência.

b) *Sejam* $A = \{x \mid x$ *é letra da palavra abril*$\}$ *e* $B = \{a, i\}$. *Sabemos que* $B \subset A$. *Esta relação pode ser visualizada na Figura 1.4.*

c) *Sejam* $A = \{2, 4, 6, 8\}$ *e* $B = \{3, 5, 6, 8\}$. *Neste caso,* $A \subset B$ *nem* $A \supset B$. *A representação dos conjuntos é dada na Figura 1.5.*

1.2 Operações com Conjuntos

Estudamos nesta seção as operações entre conjuntos quaisquer de um mesmo conjunto universo: união, interseção, complementar e diferença.

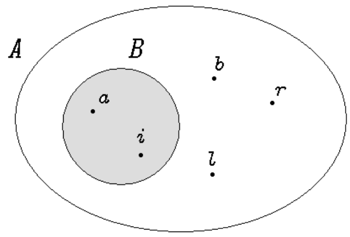


Figura 1.4: B é subconjunto de A.

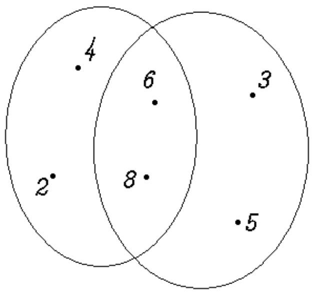


Figura 1.5: A não é subconjunto de B, nem contém B.

1.2.1 União de Conjuntos

Apresentamos, nesta subseção, a definição, exemplos e propriedades da operação união entre conjuntos.

Definição 1.2.1. *Sejam A e B dois conjuntos quaisquer, chamamos de união de A e B, e denotamos por $A \cup B$, o conjunto formado por elementos de A ou de B, isto é:*

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Exemplo 1.2.1.

a) $\{a, e, i, o, u\} \cup \{b, c, d\} = \{a, b, c, d, e, i, o, u\}$.

b) $\{2, 4, 6\} \cup \{0, 2, 3, 5, 6, 8\} = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$.

c) $\{5, 10, 15\} \cup \{x \mid x \text{ é múltiplo de 5}\} = \{x \mid x \text{ é múltiplo de 5}\}$.

d) $\{1, 7\} \cup \emptyset = \{1, 7\}$.

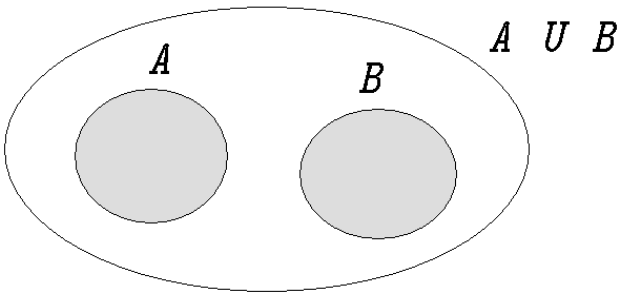


Figura 1.6: A união B.

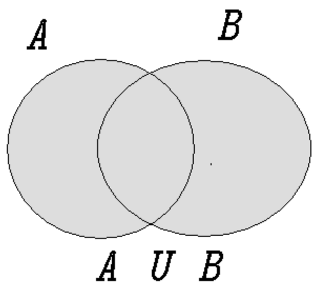


Figura 1.7: A unido com B.

Observe! No último exemplo apresentamos um conjunto unido com o conjunto vazio, o qual nos resultou o próprio conjunto. Como o conjunto vazio é desprovido de elementos, esta propriedade é valida para qualquer conjunto A, isto é:

$$A \cup \emptyset = A.$$

Dizemos, por esta propriedade, que $\emptyset$ é o elemento neutro para a união de conjuntos.

Em seguida, vemos outras propriedades da união de conjuntos. Sejam A, B, C três conjuntos quaisquer. Então:

1. **(Idempotente)** $A \cup A = A$.

2. **(Comutatividade)** $A \cup B = B \cup A$.

3. **(Associatividade)**$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

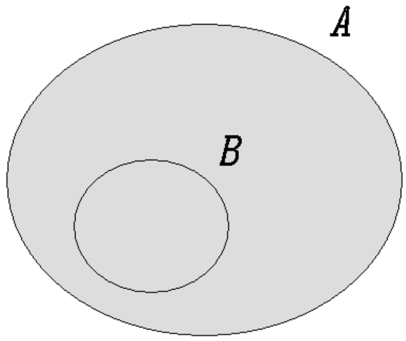


Figura 1.8: A união B.

1.2.2 Interseção de Conjuntos

Nesta subseção, definimos e apresentamos exemplos e propriedades da interseção entre conjuntos.

Definição 1.2.2. *Sejam A e B dois conjuntos quaisquer, chamamos de interseção de A e B, e denotamos por $A \cap B$ (o qual se lê A inter B), o conjunto formado pelos elementos que são comuns de A e de B, isto é, que estão em A e em B:*

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

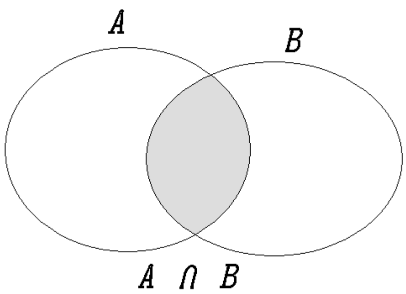


Figura 1.9: A interseção B

Exemplo 1.2.2.

a) $\{2, 4, 6\} \cap \{0, 2, 3, 5, 6, 8\} = \{2, 6\}$.

b) $\{5, 8, 15, 26\} \cap \{x \mid x \text{ é múltiplo de 3}\} = \{15\}$.

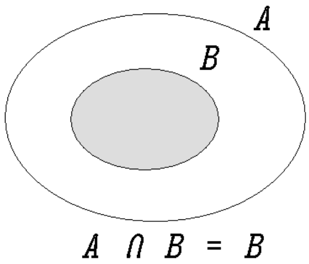


Figura 1.10: A interseção B

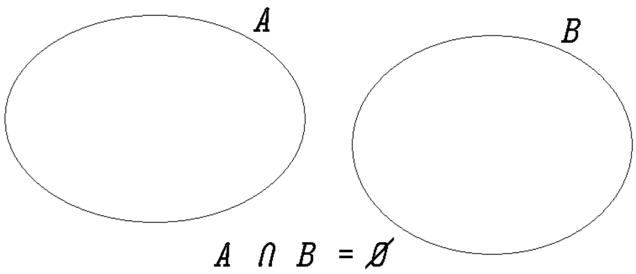


Figura 1.11: A interseção B

c) $\{a, e, i\} \cap \{b, c, d, f, g\} = \emptyset$.

d) $\{1, 2, 3, 4, 6, 8\} \cap \{x \mid x$ *é primo*$\} = \{2, 3\}$.

e) $\{-1, 0, 9, 17\} \cap \emptyset = \emptyset$.

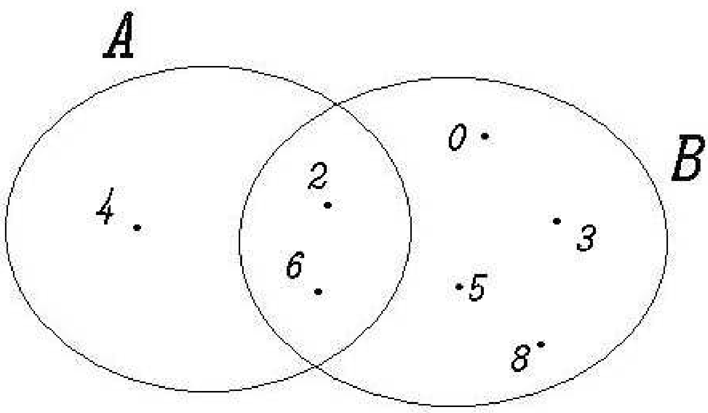


Figura 1.12: Ilustração do Exemplo **a**)

Observe! No último exemplo vimos que a interseção de um conjunto dado com o conjunto vazio nos resultou o vazio. Como o con-

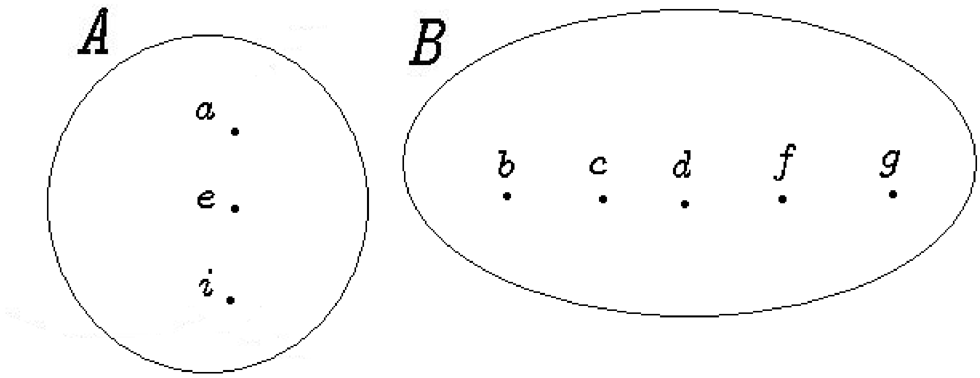


Figura 1.13: Ilustração do Exemplo **c**

junto vazio não possui elementos, esta propriedade é valida para a interseção com qualquer conjunto A, isto é:

$$A \cap \emptyset = \emptyset.$$

Em seguida, vemos outras propriedades da interseção de conjuntos. Sejam A, B, C três conjuntos quaisquer. Então:

1. **(Idempotente)** $A \cap A = A$.
2. **(Elemento Neutro)** $A \cap U = A$.
3. **(Comutatividade)** $A \cap B = B \cap A$.
4. **(Associatividade)** $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

Definição 1.2.3. *Dizemos que dois conjuntos A e B são disjuntos se eles não possuem elementos em comum, isto é,*

$$A \cap B = \emptyset.$$

Exemplo 1.2.3.

a) $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$.

b) $\{x \mid x$ *é par*$\} \cap \{x \mid x$ *é ímpar*$\} = \emptyset$.

Agora, observemos os seguintes exemplos:

Exemplo 1.2.4.
Sejam $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{a, e, i, o, u\}$ e $C = \{a, b, u, z\}$.

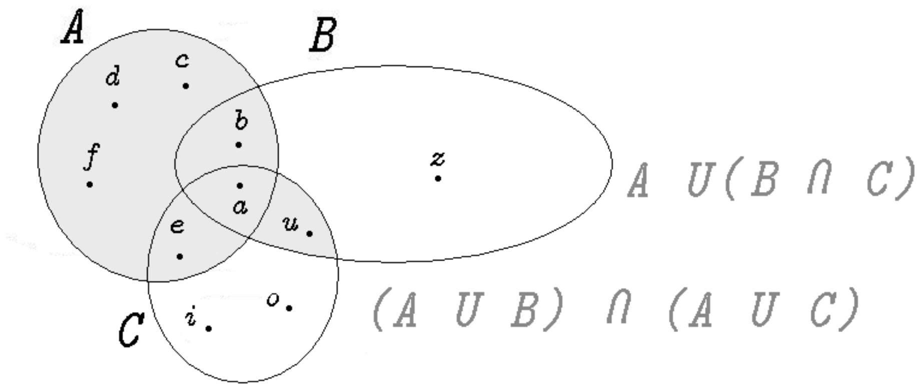


Figura 1.14: Propriedade Distributiva para a União

a) Que conjuntos obtemos se fizermos $A \cup (B \cap C)$ *e* $(A \cup B) \cap (A \cup C)$*? Vemos então que* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) = \{a, b, c, d, e, f, u\}$*.*

b) E que conjuntos obtemos em $A \cap (B \cup C)$ *e* $(A \cap B) \cup (A \cap C)$*? Vemos neste exemplo que* $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap B) =$

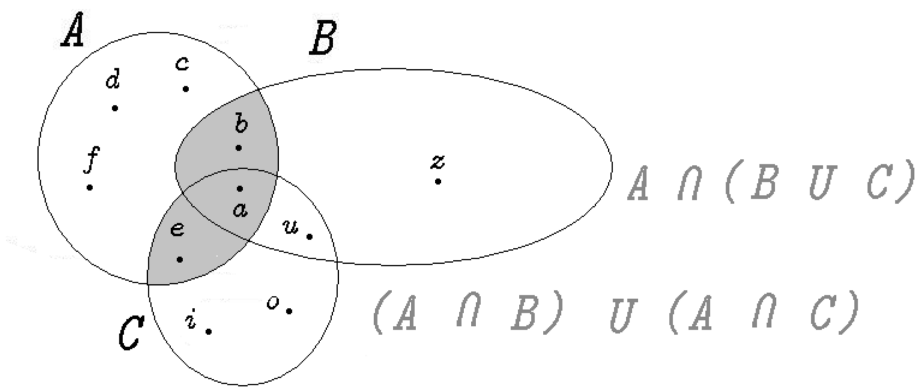


Figura 1.15: Propriedade Distributiva para a Interseção

$\{a, b, e\}$.

Estas duas propriedades observadas no exemplo anterior são válidas para quaisquer três conjuntos A, B e C. Citamos agora estas e outras propriedades que envolvem união e interseção de conjuntos.

1. $A \cup (A \cap B) = A$.

2. $A \cap (A \cup B) = A$.

3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

1.2.3 Diferença de Conjuntos

Nesta subseção, apresentamos a definição e alguns exemplos e propriedades da diferença entre conjuntos.

Definição 1.2.4. *Sejam A e B dois conjuntos quaisquer, chamamos de diferença entre A e B, e denotamos por $A - B$, o conjunto formado por elementos que estão em A e não estão em B, isto é,*

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Veja as figuras 1.16 a 1.20.

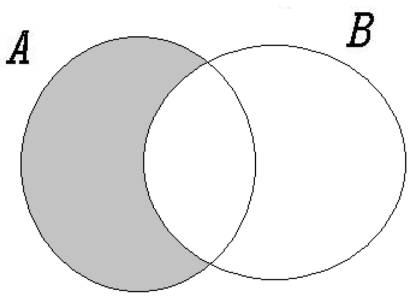


Figura 1.16: Diferença de conjuntos

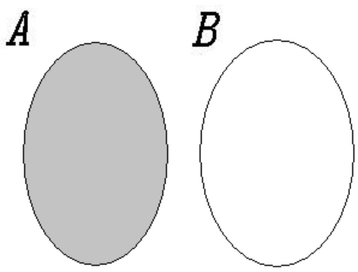


Figura 1.17: Diferença de conjuntos

Exemplo 1.2.5.

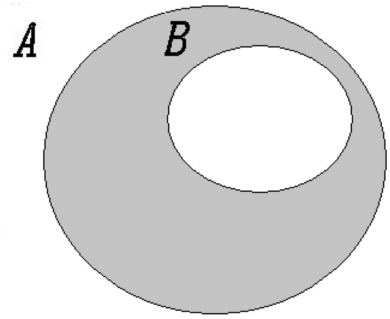


Figura 1.18: Diferença de conjuntos

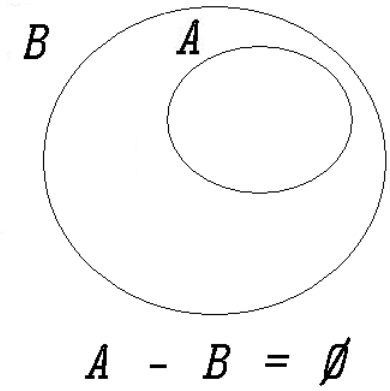


Figura 1.19: Diferença de conjuntos

a) $\{a, e, o, u\} - \{c, d, e, h, j, o\} = \{a, u\}$.

b) $\{1, 2, 3, 4, 5\} - \{x \mid x$ *é par*$\} = \{1, 3, 5\}$.

c) $\{a, b, c\} - \emptyset = \{a, b, c\}$.

d) $\{2, 4, 6\} - \{2, 4, 6\} = \emptyset$.

Observe! No item **d)** do Exemplo 1.2.5 acima, vimos que a diferença entre os dois conjuntos iguais dados resultou no conjunto vazio. Pela definição de diferença de conjuntos, essa propriedade é válida para qualquer conjunto A, isto é,

$$A - A = \emptyset.$$

Podemos observar através do exemplo **c)** acima, uma outra propriedade: A diferença de qualquer conjunto A pelo conjunto vazio resulta o próprio conjunto, isto é,

$$A - \emptyset = A.$$

1.2.4 Complementar de Conjuntos

Nesta última subseção, definimos a complementação de conjuntos e apresentamos exemplos e propriedades desta operação entre conjuntos.

Definição 1.2.5. *Sejam A e B dois conjuntos tais que $B \subset A$. Chamamos de complementar de B em relação a A, e denotamos C_A^B, o conjunto formado pelos elementos que estão em A excluindo os elementos que estão em B. Em outras palavras,*

$$C_A^B = A - B.$$

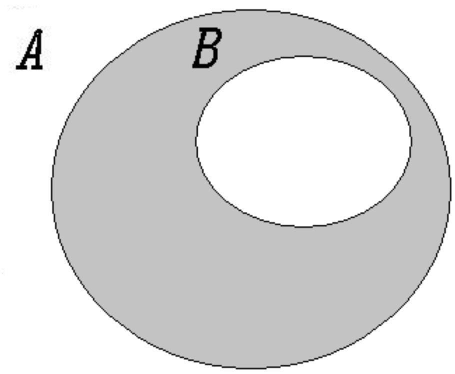


Figura 1.20: Complementar de conjuntos

Exemplo 1.2.6.

a) *Sejam $A = \{-1, 1, -2, 2, -3, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, \}$. Então*

$$C_A^B = \{-1, -2, -3\}.$$

b) *Sejam $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{b, c, d\}$. Então:*

$$C_A^B = \{a, e\}.$$

c) *Sejam $A = \{x \mid x$ é cor da bandeira do brasil$\}$ e $B = \{azul, amarelo\}$. Então:*

$$C_A^B = \{verde, branco\}.$$

d) *Sejam* $A = \{11, 25, 73\}$ *e* $B = \emptyset$*. Então,*

$$C_A^B = \{11, 25, 73\}.$$

Em **d)** acima, vimos que o complementar do vazio em relação ao conjunto A, nos resultou o próprio conjunto A. E, pela definição da complementação, tal propriedade é válida para qualquer conjunto A, isto é,

$$C_A^{\emptyset} = A.$$

Apresentamos abaixo outras propriedades da complementação. Para isso, consideramos B e C dois subconjuntos quaisquer de um conjunto A.

1. $C_A^B \cap B = \emptyset$ e $C_A^B \cup B = A$.

2. $C_A^A = \emptyset$ e $C_A^{\emptyset} = A$.

3. $C_A^{B\cap C} = C_A^B \cup C_A^C$.

4. $C_A^{B\cup C} = C_A^B \cap C_A^C$.

Observação 1.2.1. *As duas últimas propriedades são conhecidas como Leis de Morgan.*

Na última seção desta unidade tratamos sobre tipos bastante especiais de conjuntos, conhecidos por conjuntos numéricos.

1.3 Conjuntos Numéricos

Nesta seção apresentamos definição, exemplos e propriedades dos conjuntos numéricos: $\mathbb{N}$, dos números naturais, $\mathbb{Z}$, dos números inteiros, $\mathbb{Q}$, dos números racionais, $I\!R$, dos números reais e, por fim, $\mathbb{C}$, dos números complexos.

1.3.1 Números Naturais

Apresentamos nesta subseção a definição do conjunto dos números naturais, assim como propriedades deste conjunto numérico.

Definição 1.3.1. *O conjunto dos números naturais, o qual denotamos por* $\mathbb{N}$*, é o conjunto dos números construídos com os algarismos* 0*,* 1*,* 2*,* 3*,* 4*,* 5*,* 6*,* 7*,* 8*,* 9*, isto é:*

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14...\}.$$

A construção dos números naturais pode ser descrita através das seguintes propriedades:

1. Todo número natural possui um sucessor.

   Exemplo 1.3.1.

   a) *O sucessor de* 0 *é* 1*.*

   b) *O sucessor de* 4 *é* 5*.*

   c) *De modo geral, se* n *é um número natural então* $n+1$ *é seu sucessor.*

2. Se um número natural é sucessor de outro, então os dois números, quando juntos, são denominados números consecutivos.

   Exemplo 1.3.2.

   a) 0 *e* 1 *são números consecutivos.*

   b) 12 *e* 13 *são números consecutivos.*

   c) n *e* $n+1$ *são números consecutivos, para qualquer* n *natural.*

3. Vários números formam uma coleção de números naturais consecutivos se o segundo é sucessor do primeiro, o terceiro é sucessor do segundo, o quarto é sucessor do terceiro e assim sucessivamente.

   Exemplo 1.3.3.

a) $0, 1, 2, 3, 4, 5$ *são consecutivos.*

b) $37, 38, 39, 40, 41, 42$ *são consecutivos.*

c) $n, n+1, n+2, n+3$ *são consecutivos, para qualquer* n *natural.*

4. Todo número natural dado n, exceto o zero, possui um antecessor.

   Exemplo 1.3.4.

   a) *O antecessor de* 1 *é* 0*.*

   b) *O antecessor de* 23 *é* 22

   c) *De modo geral, se* $n \neq 0$ *é um número natural então* $n - 1$ *é seu antecessor.*

Em $\mathbb{N}$ são definidas duas operações fundamentais: a adição e a multiplicação. A adição reune em um só número, todas as unidades de dois ou mais números. Já a multiplicação é realizada adicionando o primeiro número, o qual denominamos por multiplicando ou parcela, quantas vezes são as unidades do segundo número, que por sua vez denominamos multiplicador.

Exemplo 1.3.5.

- *Adição*

a) *2+4=6.*

b) *11+57=68.*

- *Multiplicação*

a) $3 \times 5 = 5 + 5 + 5 = 15$*.*

b) $4 \times 12 = 12 + 12 + 12 + 12 = 48$*.*

Observe que a soma de números naturais ainda é um número natural e a multiplicação de números naturais também resulta em um número natural. Esta propriedade é chamada de fechamento. Portanto, ambas as operações - soma e multiplicação - são fechadas. A seguir, apresentamos outras propriedades da adição e da multiplicação. Para isto, consideramos a, b, c três números naturais quaisquer.

1. Associativa da adição

$$(a+b)+c = a+(b+c).$$

2. Comutativa da adição

$$a+b = b+c.$$

3. Elemento neutro da adição

$$a+0 = a.$$

4. Associativa da multiplicação

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

5. Comutativa da multiplicação

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

6. Elemento neutro da multiplicação

$$a \cdot 1 = a.$$

7. Distributiva da multiplicação em relação à adição

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

1.3.2 Números Inteiros

Nesta subseção definimos o conjunto dos números inteiros, bem como apresentamos propriedades deste conjunto numérico.

Definição 1.3.2. *O conjunto dos números inteiros, o qual denotamos por $\mathbb{Z}$, é a união do conjunto dos números naturais com o conjunto dos opostos dos números naturais, isto é:*

$$\mathbb{Z} = \{..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}.$$

Destacamos três subconjuntos do conjunto $\mathbb{Z}$:

1. O conjunto dos números inteiros não-negativos:

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\} = \mathbb{N}.$$

2. O conjunto dos números inteiros não-positivos:

$$\mathbb{Z}_- = \{..., -4, -3, -2, -1, 0\}.$$

3. O conjunto dos números inteiros excluindo o zero:

$$\mathbb{Z}^* = \{..., -3, -2, -1, 1, 2, 3, ..\}.$$

Analogamente aos números naturais, estabelecemos uma ordem no conjunto dos números inteiros. Dado um inteiro $n \in \mathbb{N}$, chamamos de sucessor de n o inteiro imediatamente seguinte, isto é, $n + 1$ e, o antecessor de n é o inteiro imediatamente anterior, isto é $n - 1$.

Exemplo 1.3.6.

a) 10 *é sucessor de* 9 *e é antecessor de* 11*.*

b) -3 *é sucessor de* -4 *e é antecessor de* -2*.*

c) 0 *é antecessor de* 1 *e é sucessor de* -1*.*

Uma propriedade dos números inteiros é a existência de um elemento chamado simétrico ou oposto, que é definido como segue.

Definição 1.3.3. *Dado um número inteiro z, chamamos de oposto ou simétrico de z o inteiro $-z$.*

Em seguida, apresentamos a noção de valor absoluto de um inteiro.

Definição 1.3.4. *Definimos por módulo ou valor absoluto de um número inteiro z, e denotamos por $|z|$, o maior valor entre z e o seu oposto $-z$, isto é,*

$$|z| = \max\{z, -z\}.$$

Exemplo 1.3.7.

a) $|2| = 2$.

b) $|-9| = 9$.

c) $|0| = 0$.

Para números inteiros, a soma de dois números é determinada como segue:

- A soma de dois números inteiros com o mesmo sinal é um número com o mesmo sinal e cujo valor absoluto é a soma dos valores absolutos das parcelas.

- A soma de dois números inteiros com sinais contrários e valores absolutos diferentes é um número cujo valor absoluto é a diferença entre os valores absolutos das parcelas e o sinal é igual ao sinal daquele de maior valor absoluto. Em especial, a soma de dois números simétricos é igual a zero.

Exemplo 1.3.8.

a) $(+7) + (+4) = 11$.

b) $(-3) + (-4) = -7$.

c) $23 + (-3) = 20$.

d) $(-2) + 11 = 9$.

e) $(-16) + 7 = -9$.

Para a multiplicação de dois inteiros temos a seguinte regra:

- O produto de dois números inteiros positivos é um número inteiro positivo.

- O produto de dois números inteiros negativos é um número inteiro positivo.

- O produto de um número inteiro negativo por um inteiro positivo é um número inteiro negativo.

Exemplo 1.3.9.

a) $(+7) \times (+4) = 28$.

b) $(-3) \times (-4) = 12$.

c) $(-21) \times (-3) = 63$.

d) $2 \times (-11) = -22$.

e) $(-16) \times 4 = -64$.

As propriedades vistas para adição e multiplicação de números naturais também são válidas para os números inteiros. Além destas, vale a propriedade de existência do simétrico, como vemos abaixo.

Existência do simétrico Dado $x \in \mathbb{Z}$, sempre existe o inteiro $-x \in \mathbb{Z}$ tal que

$$x + (-x) = 0.$$

Além de soma e multiplicação, também temos para números inteiros a noção de divisor, que apresentamos a seguir.

Definição 1.3.5. *Dizemos que um número inteiro a é divisor de b, e denotamos por $a|b$, quando existe um inteiro c tal que $c \cdot a = b$.*

Exemplo 1.3.10.

a) $2|10$, *pois* $10 = 5 \cdot 2$

b) $5|-15$ *pois* $15 = 3 \cdot 5$

c) $-7|24$ *pois* $24 = (-4) \cdot (-7)$

d) $-3|-27$ *pois* $-27 = 9 \cdot (-3)$

e) $0|0$ *pois* $0 = 1 \cdot 0$

f) $3|0$ *pois* $0 = 0 \cdot 3$

No último exemplo acima, vimos que $3|0$. Podemos observar que qualquer número inteiro n é divisor de 0, pois $0 = 0 \cdot n$.

Observação 1.3.1. *Quando $a|b$ dizemos que b é divisível por a ou b é múltiplo de a.*

Finalizamos esta seção lembrando o conceito de número primo.

Definição 1.3.6. *Dizemos que um número inteiro p é primo se p é diferente de $0, 1, -1$ e os únicos números que o dividem são $\pm 1, \pm p$.*

Exemplo 1.3.11. *Os números $\pm 2, \pm 5, \pm, 13$ são primos.*

1.3.3 Números Racionais

O conjunto dos números racionais pode ser interpretado como uma extensão do conjunto dos números inteiros. Iniciamos esta subseção apresentando o conceito de número racional e apresentamos posteriormente propriedades e exemplos relacionados a este conjunto.

Definição 1.3.7. *Chamamos de número racional, todo número que pode ser escrito sob a forma de fração $\frac{a}{b}$, onde a e b são números inteiros e $b \neq 0$. Denominamos a de numerador e b de denominador.*

Assim, podemos definir o conjunto dos números racionais como segue.

Definição 1.3.8. *O conjunto dos números racionais, o qual denotamos por $\mathbb{Q}$, é dado por:*

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

Assim, temos que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Exemplo 1.3.12.

a) $\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$.

b) $\frac{-2}{3} \in \mathbb{Q}$.

c) $\frac{6}{5} \in \mathbb{Q}$.

d) $\frac{10}{5} = 2 \in \mathbb{Q}$.

Destacamos, assim como em $\mathbb{Z}$, três subconjuntos de $\mathbb{Q}$:

1. O conjunto dos racionais não-positivos, o qual denotamos por $\mathbb{Q}_-$.
2. O conjunto do racionais não-negativos, o qual denotamos por $\mathbb{Q}_+$.
3. O conjunto do racionais não-nulos, o qual denotamos por $\mathbb{Q}^*$.

Todo racional pode ser representado por um número decimal. Temos dois casos:

1. Quando o número decimal tem uma quantidade finita de algarismos.

   Exemplo 1.3.13.

   a) $\frac{6}{3} = 2$

   b) $\frac{1}{2} = 0,5$

   c) $\frac{1}{4} = 0,25$

   d) $\frac{13}{100} = 0,13$

   e) $\frac{97}{10000} = 0,0097$

2. Quando o número decimal tem uma quantidade infinita de algarismos que se repetem periodicamente.

   Exemplo 1.3.14.

   a) $\frac{1}{3} = 0,33333...$

b) $\dfrac{5}{7} = 0,714285714285...$

c) $\dfrac{-13}{22} = -0,59090909...$

Para números racionais, a igualdade, a soma e a multiplicação são definidas como segue.

Definição 1.3.9. *Dados dois números racionais* $\dfrac{a}{b}$ *e* $\dfrac{c}{d}$*, temos:*

i) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Longleftrightarrow ad = bc.$

ii) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}.$

iii) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot c}{b \cdot d}.$

As propriedades de soma e multiplicação vistas para números naturais e inteiros também são válidas para os números racionais. Além destas, temos também a propriedade de existência do elemento inverso para a multiplicação.

Existência do inverso multiplicativo Para todo $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_*$, existe $\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}_*$ tal que $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.

Exemplo 1.3.15.

a) *O inverso multiplicativo de* $\dfrac{2}{3}$ *é* $\dfrac{3}{2}$*.*

b) *O inverso multiplicativo de* 5 *por* $\dfrac{1}{5}$*.*

c) *O inverso multiplicativo de* $\dfrac{-1}{3}$ *é* -3*.*

1.3.4 Números Reais

Nesta subseção apresentamos uma definição e várias propriedades do conjunto dos números reais.

Definição 1.3.10. *O conjunto dos números irracionais é aquele formado pelos números que não são racionais, isto é, não podem ser expressos como fração de dois números inteiros, cujo denominador é diferente de zero.*

Exemplo 1.3.16.

a) $\sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{4}$

c) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

d) $\pi = 3,1415926$

e) $e = 2.71828182845904552...$

Definição 1.3.11. *O conjunto dos números reais, o qual denotamos por $I\!R$, é a união dos números racionais e irracionais.*

Pela definição, temos que $\mathbb{Q} \subset I\!R$ e mais, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset I\!R$.
Destacamos os seguintes subconjuntos de R.

1. O conjunto dos reais não-positivos, o qual denotamos por R_{-}.

2. O conjunto do reais não-negativos, o qual denotamos por R_{+}.

3. O conjunto dos reais não nulos, o qual denotamos por $I\!R^{*}$.

O conjunto dos números reais munido das operações de adição e multiplicação, satisfazendo as mesmas propriedades que satisfazem os números racionais, determina o que chamamos de **corpo**.

A representação dos números reais nos permite definir uma relação de ordem entre eles. A relação de ordem pode ser definida como segue. Dados dois números reais a e b, temos:

$$a \leq b \Longleftrightarrow b - a \geq 0.$$

Exemplo 1.3.17.

a) $5 \leq 7 \Longleftrightarrow 7 - 5 = 2 \geq 0.$

b) $-3 \leq 4 \Longleftrightarrow 4 - (-3) = 7 \geq 0.$

c) $-15 \leq -8 \Longleftrightarrow (-8) - (-15) = 7 \geq 0.$

Com a relação de ordem, denominamos o conjunto dos números reais de corpo ordenado. A seguir estudamos alguns tipos de subconjuntos dos números reais, os intervalos da reta.

Definição 1.3.12. *Dados dois números reais a e b tais que $a < b$, chamamos de*

- *Intervalo aberto, de extremos a e b, o conjunto*

$$(a, b) = \{x \in I\!R \mid a < \ x \ < b\}.$$

- *Intervalo fechado, de extremos a e b, o conjunto*

$$[a, b] = \{x \in I\!R \mid a \leq \ x \ \leq b\}.$$

- *Intervalo fechado à esquerda, ou aberto à direita, de extremos a e b é o conjunto*

$$[a, b) = \{x \in I\!R \mid a \leq \ x \ < b\}.$$

- *Intervalo fechado à direita, ou aberto à esquerda, de extremos a e b é o conjunto*

$$(a, b] = \{x \in I\!R \mid a < \ x \ \leq b\}.$$

Exemplo 1.3.18.

a) $[0, 1] \cup [0.5, 2] = [0, 2]$.

b) $(0, 1.4) \cap [0.3, 2.6) = [0.3, 1.4)$.

c) $[1, 9) \cap (4, 7] = (4, 7]$.

d) $(2, 5] - [3, 5] = (2, 3)$.

Observação 1.3.2. *Temos também os intervalos onde um dos extremos é $+\infty$ ou $-\infty$, isto é,*

1. $(a, +\infty) = \{x \in I\!R \mid x > a\}$;

2. $[a, +\infty) = \{x \in I\!R \mid x \geq a\}$;

3. $(-\infty, a) = \{x \in I\!R \mid x < a\}$*;*

4. $(-\infty, a] = \{x \in I\!R \mid x \leq a\}$*.*

Finalizamos a unidade apresentando alguns conceitos sobre o corpo dos números complexos.

1.3.5 Números Complexos

A equação $x^2 + 1 = 0$ não possui solução em $I\!R$. Motivado pela determinação de solução para problemas como este, surgiu o número imaginário $i = \sqrt{-1}$ e a definição de número complexo. Nesta subseção, apresentamos um breve estudo sobre o conjunto dos números complexos.

Definição 1.3.13. *Chamamos de número complexo o número que é escrito sob a forma:*

$$z = a + bi,$$

onde a *e* b *são números reais e* i *é a unidade imaginária.*

Chamamos os números reais a e b, respectivamente, de parte real e parte imaginária do número complexo z. Denotamos o conjunto dos números complexos de $\mathbb{C}$.

Exemplo 1.3.19.

a) $z = 1 + 4i$*, tem parte real* 1 *e parte imaginária* 4*.*

b) $z = -3 + 2i$ *tem parte real* -3 *e parte imaginária* 2*.*

c) $z = 5 - 8i$ *tem parte real* 5 *e parte imaginária* -8*.*

d) $z = -2 - 7i$ *tem parte real* -2 *e parte imaginária* -7*.*

e) $z = 4$ *tem parte imaginária nula.*

f) $z = 3i$ *tem parte real nula e parte imaginária* 3*.*

Note! Em **f)**, do Exemplo 1.3.19, temos um número complexo cuja parte real é nula. Os números complexos desta forma denominamos de número imaginário puro. Já em **e)** temos um complexo com parte imaginária nula, ou seja, um número real.

Temos válidas as seguintes inclusões:

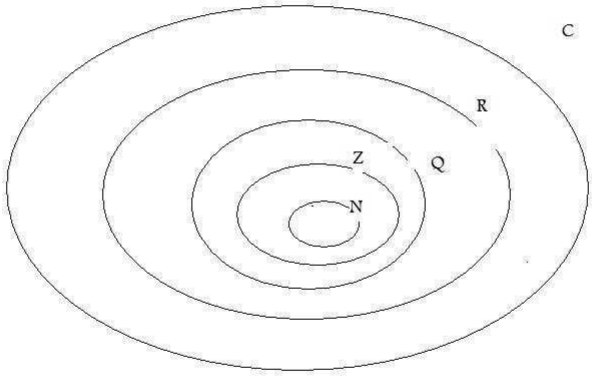


Figura 1.21: Conjuntos Numéricos

A seguir apresentamos a definição usual de igualdade, soma e produto de números imaginários.

Definição 1.3.14. *Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$ dois números complexos quaisquer. Então, definimos:*

1. $z = w \Longleftrightarrow a = c$ e $b = d$.

2. $z + w = (a + c) + (b + d)i$.

3. $z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)i$

O oposto de um número complexo z, assim como para os reais, é o elemento $-z$. Isto é, o oposto ou simétrico de $z = a + bi$ é o complexo $-z = -a - bi$. Um número complexo especial é o elemento conjugado, cuja definição damos abaixo.

Definição 1.3.15. *Seja $z = a + bi$ um número complexo qualquer. Chamamos de conjugado de z, e denotamos por z^*, o número complexo $z = a - bi$.*

O conjunto dos números complexos, munido das operações adição e multiplicação como definidos acima, forma um corpo.

1.4 Exercícios

1. Indique quais das seguintes sentenças são verdadeiras e quais são falsas.

   a) $a \in \{x \mid x$ é vogal$\}$

   b) $10 \in \{x \mid x$ é primo$\}$

   c) $\{x \mid x$ é algarismo romano$\} \supset \{a, b, c, d\}$

   d) $\emptyset = \{x \in \mathbb{N} \mid x = x + 2\}$

   e) $\{a\} \subset \{a, \{b, d\}\}$

   f) $\{a, c\} \not\subset \{a, d, g, j\}$

2. Indique quais dos seguintes conjuntos são vazios e quais são unitários.

   a) $\{x \in \mathbb{N} \mid x + 2 = 8 \}$

   b) $\{x \in I\!R \mid x^2 + 4 = 0\}$

   c) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x = x + 2\}$

   d) $\{x \mid x$ é inteiro entre -13 e $-12\}$

3. Determine todos os subconjuntos do conjunto $A = \{0, 1, 2\}$. Em seguida, descreva o conjunto das partes de A.

4. Descreva cada conjunto escrevendo os seus elementos.

   a) $\{x \mid x^2 - 2x + 1\}$

   b) $\{x \mid x$ é letra da palavra DISCRETA$\}$

   c) $\{x \mid x$ é capital de estado do nordeste brasileiro$\}$

   d) $\{x \mid x^2 - 5x + 6$ e $2x - 4 = 0\}$

5. Na classe de Matemática Discreta há 60 alunos, 37 deles fizeram um curso técnico antes de graduação, 12 deles tem curso de inglês completo e 7 tem curso técnico e de inglês completos. Quantos alunos concluíram inglês ou um curso técnico?

6. Sejam $A = \{a, e, i, o, u\}$, $B = \{b, d, f, i\}$, $C = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $D = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$, $E = \{2, 4, 6\}$ e $F = \{1, 2, 3, ..., 10\}$. Determine:

   a) $A \cup B$

   b) $A \cap C$

   c) $A \cap (B \cup C)$

   d) $(A \cup B) \cap C$

   e) $A - (B \cap C)$

   f) $E - D$

   g) $(D \cap F) - (E \cup F)$

   h) $(F - E) \cap D$

   i) $C_F^{E \cup D}$

   j) $C_C^{B \cap A}$

7. Classifique as seguintes sentenças em verdadeiro (V) ou falso (F).

   a) $0.3 \in \mathbb{Z}$

   b) $2.5 \in \mathbb{Q}$

   c) $\mathbb{Z} \subset I\!R$

   d) $2\sqrt[3]{5} \in I\!R - \mathbb{Q}$

   e) $\sqrt{25} \in I\!R - \mathbb{Q}$

   f) $\frac{21}{3} \in I\!R - \mathbb{N}$

8. Considere os seguintes intervalos $A = [0, 3)$ e $B = (1, 5]$. Determine:

   a) $A \cup B$

   b) $A \cap B$

   c) C_A^B.

9. Considere os seguintes conjuntos $A = [0,2] \cap \mathbb{Q}$ e $B = [1,2] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$. Determine:

   a) $A \cup B$

   b) $A \cap B$

Referências Bibliográficas

[1] Matemática Essencial
http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio

[2] Klick Educação
http://www.klickeducacao.com.br/2006/frontdoor/lista_materia/0,59

[3] Info Escola
http://www.infoescola.com/matematica/conjuntos-numericos/

[4] Brasil Escola
http://www.brasilescola.com/matematica/conjunto.htm

[5] HEFEZ, A. Curso de Álgebra, volume 1. IMPA. CNPq. Rio de Janeiro. 1993.

[6] IEZZI, G. et al. Fundamentos de Matemática Elementar 1: conjuntos e funções. São Paulo. Ed. Atual. 1977.

[7] MENEZES, P. B. Matemática Discreta para Computação e Informática. Porto Alegre. Ed Sagra Luzzato. 2005.

Unidade 2

Relações

Resumo

Nesta unidade, estudamos as relações entre os conjuntos, recebendo maior destaque as relações binárias, especialmente as endorrelações. Apresentamos também duas importantes classes de endorrelações, a saber: as relações de ordem e as relações de equivalência.

Sumário da Unidade

2. Relações

Nesta unidade, tratamos sobre as relações entre conjuntos. Apresentamos aqui a definição, propriedades e alguns tipos de relações, tais como as relações binárias, endorrelações e classes de endorrelações com suas propriedades.

Esta unidade serve de base para os demais, visto que Funções são exemplos de relações e, Estruturas Algébricas, Álgebra Booleana e Reticulados são definidos com alguma operação binária entre os conjuntos envolvidos.

Para ver mais sobre Relações clique o AQUI

Iniciamos a unidade com os conceitos de par ordenado e produto cartesiano.

2.1 Par Ordenado e Produto Cartesiano

Aqui apresentamos a definição e algumas propriedade de produto cartesiano, a qual nos serve de base para o estudo da próxima seção.

Definição 2.1.1. *Sejam a e b dois elementos quaisquer. Denominamos par ordenado à seqüência ordenada (a, b).*

Observação 2.1.1. *A ordem em um par ordenado é importante: Lembremos do estudo de pontos no plano cartesiano que o ponto $(2, -3)$ é diferente de $(-3, 2)$. Veja figura 2.1.*

Temos então que dois pares ordenados (a, b) e (c, d) são iguais se, e somente se, $a = c$ e $b = d$.

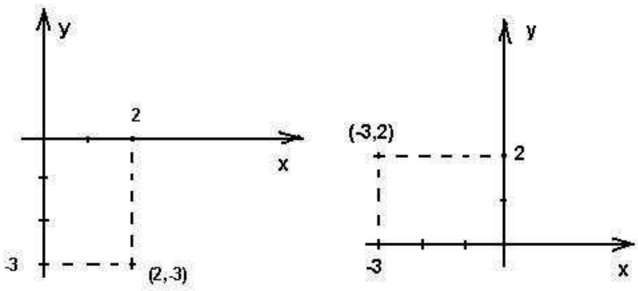


Figura 2.1: Par ordenado

Definição 2.1.2. *Sejam A e B dois conjuntos não vazios. O produto cartesiano de A por B, o qual denotamos por $A \times B$ (lê-se A cartesiano B), é o conjunto formado por todos os pares ordenados cujo primeiro elemento pertence ao conjunto A e o segundo elemento pertence a B, isto é,*

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Se pelo menos um dos conjuntos A ou B for o vazio, definimos o produto cartesiano entre eles por $A \times B = \emptyset$, isto é:

$$A \times \emptyset = \emptyset, \ \emptyset \times B = \emptyset, \text{ e } \emptyset \times \emptyset = \emptyset.$$

Quando $A = B$, denotamos o produto cartesiano $A \times B$ por A^2 e, temos $A^2 = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$.
Podemos representar o produto cartesiano pelo diagrama de flechas e pelo diagrama (plano) cartesiano.

Exemplo 2.1.1.

1. *Sejam $A = \{1, 2\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$. Temos:*

   a) $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$. *Este conjunto pode ser representado pelo diagrama de flechas, como vemos na figura 2.2.*

   b) $B \times A = \{(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2)\}$. *Pelo diagrama cartesiano, a representação deste conjunto é dada na figura 2.3.*

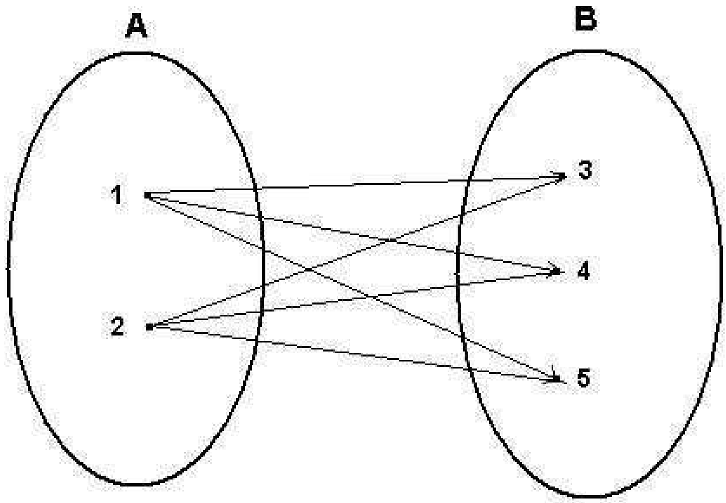


Figura 2.2: Diagrama de Flechas

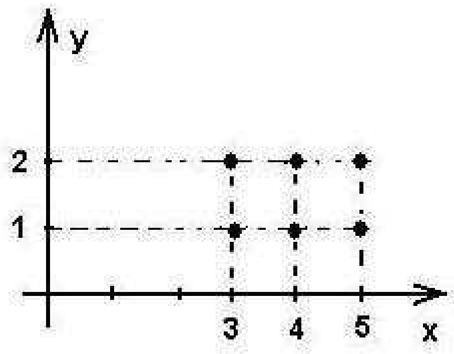


Figura 2.3: Diagrama Cartesiano

c) $A \times A = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$. *Pelo diagrama de flechas, este conjunto é representado na figura 2.4.*

d) $B \times B = \{(3,3),(3,4),(3,5),(4,3),(4,4),(4,5),(5,3),(5,4),(5,5)\}$. *Pelo diagrama cartesiano, temos a representação dada pela figura 2.5.*

2. *Sejam* $A = [1,2]$ *e* $B = [0,3]$, *então* $A \times B = \{(a,b) \mid a \in [1,2]$ *e* $b \in [0,3]\}$ *e representamos graficamente este conjunto na figura 2.6.*

3. *Consideremos agora* $A = [-2,3)$ *e* $B = \{4\}$. *Então* $A \times B = \{(a,4) \mid a \in [-2,3)\}$. *Graficamente temos a representação dada na figura 2.7.*

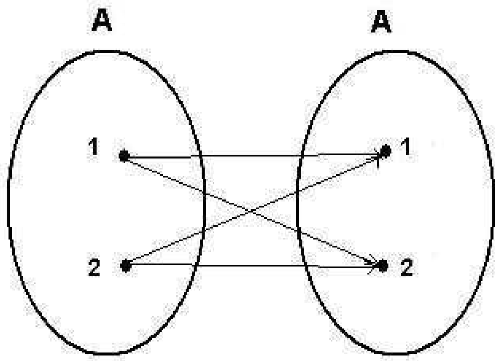


Figura 2.4: Diagrama de Flechas

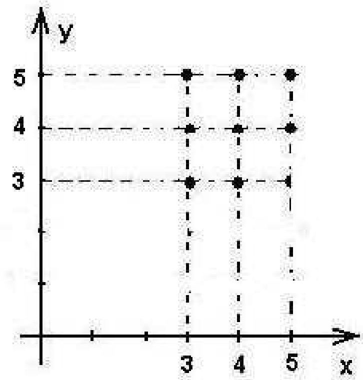


Figura 2.5: Diagrama Cartesiano

Citamos agora algumas propriedades sobre o produto cartesiano:

1. **(Não-comutatividade)** Se $A \neq B$ então $A \times B \neq B \times A$.

2. **(Não-associatividade)** Se A, B e C conjuntos distintos, então $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$.

3. **(Distributividade sobre a união)** Para quaisquer conjuntos A, B, C: $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

4. **(Distributividade sobre a interseção)** Para quaisquer conjuntos A, B, C: $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

A definição de produto cartesiano pode ser expandido para mais de dois conjuntos. Vemos isso a seguir:

Definição 2.1.3. *Sejam $A_1, A_2, ..., A_n$ conjuntos quaisquer. O produto cartesiano de A_1 a A_n, o qual denotamos por $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, é o*

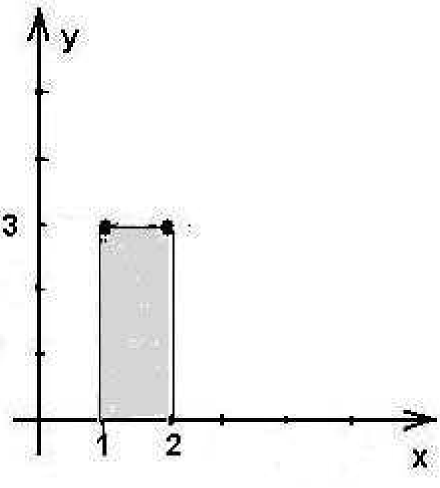


Figura 2.6: Representação Gráfica

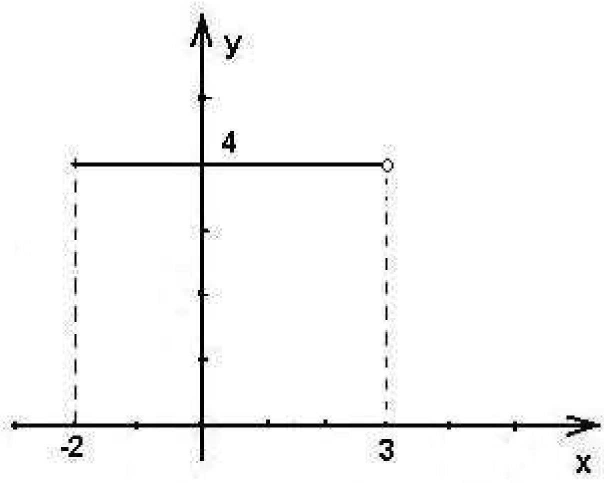


Figura 2.7: Representação Gráfica

conjunto

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, , ..., a_n) \mid a_i \in A_i, i = 1, ..., n\}.$$

Exemplo 2.1.2. *Sejam* $A = \{1, 2\}$*,* $B = \{0, 2\}$ *e* $C = \{1, 2, 3\}$*. Então:*

$$\begin{aligned} A \times B \times C &= \{(1,0,1),(1,0,2),(1,0,3),(1,2,1),(1,2,2),(1,2,3),\\ &\quad (2,0,1),(2,0,2),(2,0,3),(2,2,1),(2,2,2),(2,2,3)\}. \end{aligned}$$

2.2 Relação Binária

Nesta seção introduzimos as relações binárias, apresentando definições e propriedades destas relações.

Definição 2.2.1. *Sejam A e B conjuntos quaisquer. Chamamos relação binária de A em B, todo subconjunto do produto cartesiano entre A e B.*

Os conjuntos A e B são chamados, respectivamente, de conjuntos de partida (ou origem) e de chegada (ou destino).

Exemplo 2.2.1. *Sejam $A = \{1, 2\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$. Então os conjuntos abaixo são exemplos de relações:*

a) $\Re_1 = \{(1, -1), (1, 0), (1, 1)\}$.

b) $\Re_2 = \{(1, 1), (2, 2)\}$.

c) $\Re_3 = \{(2, -1), (1, 3), (2, 0), (1, -1)\}$.

Denotaremos uma relação de um conjunto A em um conjunto B por $A\Re B$.
Em uma relação $A\Re B$, destacamos os seguintes subconjuntos.

Definição 2.2.2. *Chamamos de domínio da relação $\Re$, o qual denotamos por $D(\Re)$, o seguinte subconjunto de A:*

$$D(\Re) = \{a \in A \mid \exists\, b \in B :\ a\Re b\}.$$

Definição 2.2.3. *Chamamos de imagem da relação $\Re$, o qual denotamos por $Im(\Re)$, o seguinte subconjunto de B:*

$$Im(\Re) = \{b \in B \mid \exists\, a \in A :\ x\Re y\}.$$

Exemplo 2.2.2. *Os domínios e imagens das relações do exemplo 2.2.1 são, respectivamente:*

a) $D(\Re)_1 = \{1\} \subset A$ e $Im(\Re) = \{-1, 0, 1\} \subset B$.

b) $D(\Re)_2 = \{1, 2\} = A$ e $Im(\Re) = \{1, 2\} \subset B$.

c) $D(\Re)_3 = \{1, 2\} = A$ e $Im(\Re) = \{-1, 0, 3\} \subset B$.

Segue abaixo alguns exemplos de relações que são definidas pela propriedade que a caracteriza.

Exemplo 2.2.3. *1. Consideremos os conjuntos* $A = \{2, 4, 6\}$ *e* $B = \{0, 3, 4, 7, 11\}$. *A relação* $\Re = \{(a, b) \in A \times B \mid a > b\}$ *representa*

$$\Re = \{(2, 0), (4, 0), (4, 3), (6, 0), (6, 3), (6, 4)\}.$$

2. Consideremos $A = I\!R$, $B = I\!R$ *e* $\Re = \{(x, y) \in A \times B \mid x + y \geq 1\}$. *Graficamente, esta relação é representada na figura 2.8.*

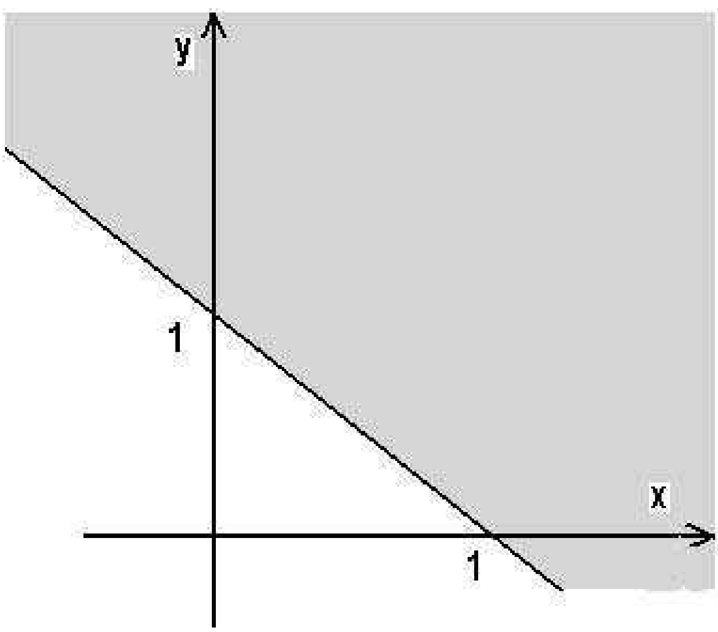


Figura 2.8: Representação Gráfica

3. Sejam $A = I\!R$, $B = I\!R$ *e* $\Re = \{(x, y) \in A \times B \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$. *Graficamente, esta relação é representada na figura 2.9.*

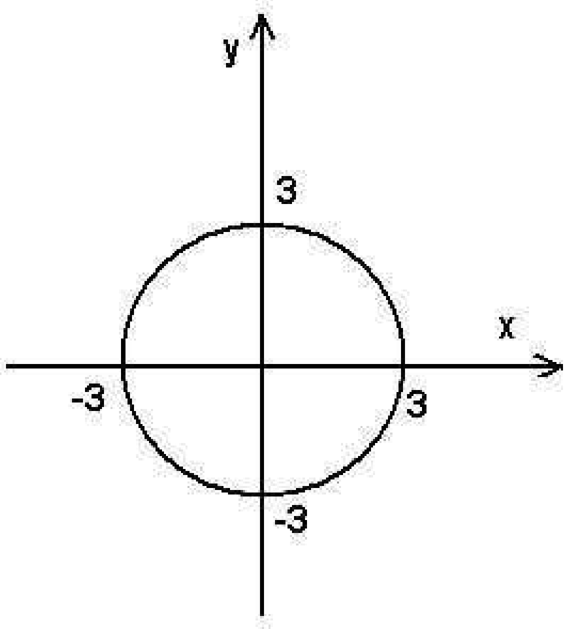


Figura 2.9: Representação Gráfica

2.3 Endorrelação e Propriedades

Apresentamos nesta seção o conceito de endorrelação, alguns exemplos e, propriedades deste tipo de relação, as quais definirão importantes classes que estudamos nas seções seguintes.

Definição 2.3.1. *Quando $A = B$, denominamos a relação $A\Re B$ de endorrelação ou autorelação, ou simplesmente dizemos "uma relação em A".*

Toda endorrelação pode ser representada como um grafo. Para isto, representamos cada elemento de A por um ponto ou círculo, e o denominamos de nodo, e cada par (a, b) por uma seta, arco ou aresta, com origem em a e destino em b. Aqui, tratamos grafos apenas como um tipo de representação das relações, a teoria de grafos será estudada na última unidade deste livro.

Exemplo 2.3.1. *Sejam $A = \{r, i, e, c\}$ e $B = \{-5, 0, 4\}$.*

a) *Consideremos a relação de igualdade em A, isto é,*

$$\Re = \{(a, b) \in A \times A \mid a = b\};$$

então

$$\Re = \{(r, r), (i, i), (e, e), (c, c)\}$$

e esta pode ser representada pelo grafo da figura 2.10.

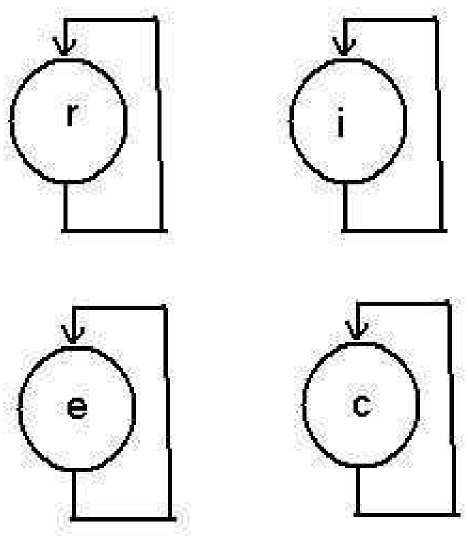


Figura 2.10: Representação por Grafo

b) *Consideremos a relação de desigualdade $\leq$ em B dada por:*

$$\Re = \{(a, b) \in B \times B \mid a \leq b\},$$

isto é,

$$\Re = \{(-5, 0), (-5, 4), (0, 4)\}.$$

Na figura 2.11 temos uma representação por grafos desta relação.

Uma endorrelação $\Re$ sobre um conjunto A pode satisfazer algumas das seguintes propriedades:

1. **Reflexiva.**

   Definição 2.3.2. *Chamamos uma relação $\Re$ de reflexiva quando satisfaz:*

   $$(\forall\ a \in A)\ a\Re a.$$

   Exemplo 2.3.2.

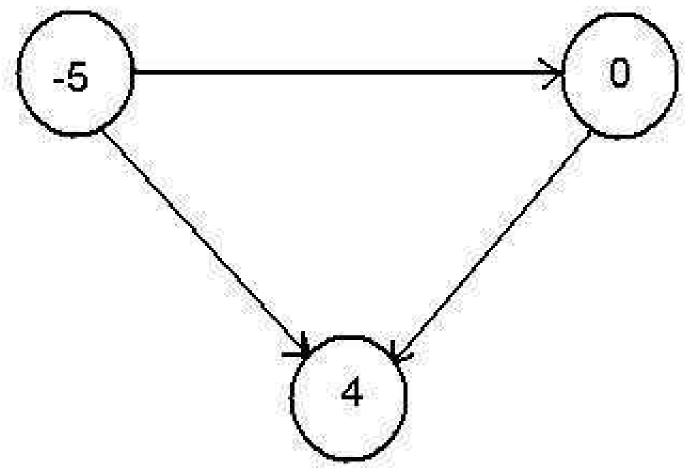


Figura 2.11: Representação por Grafo

a) *A relação de igualdade sobre $\mathbb{R}$ é reflexiva. Basta observar que $x\Re y$ se, e somente se, $x = y$ e, sempre temos $x = x$.*

b) *A relação de desigualdade $\leq$ em $\mathbb{Z}$ é reflexiva. Basta observar que qualquer inteiro não-negativo satisfaz a desigualdade $x \leq x$.*

c) *Seja A um conjunto qualquer. A relação de inclusão $\subseteq$ sobre o conjunto das partes $\mathcal{P}(A)$ é reflexiva. Basta observar que todo conjunto está contido em si mesmo.*

Uma propriedade interessante é que quaisquer nodos do grafo de uma relação reflexiva possuem uma aresta com origem e destino nele mesmo. Veja o exemplo abaixo.

Exemplo 2.3.3. *Consideremos $A = \{a, b, c\}$ e a relação $\Re = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, a), (c, b), (c, c)\}$. Observemos então o grafo que representa esta relação, dado na figura 2.12.*

2. **Simétrica.**

Definição 2.3.3. *Chamamos uma relação $\Re$ de simétrica quando satisfaz:*

$$(\forall\ a, b \in A)\ a\Re b \Rightarrow b\Re a.$$

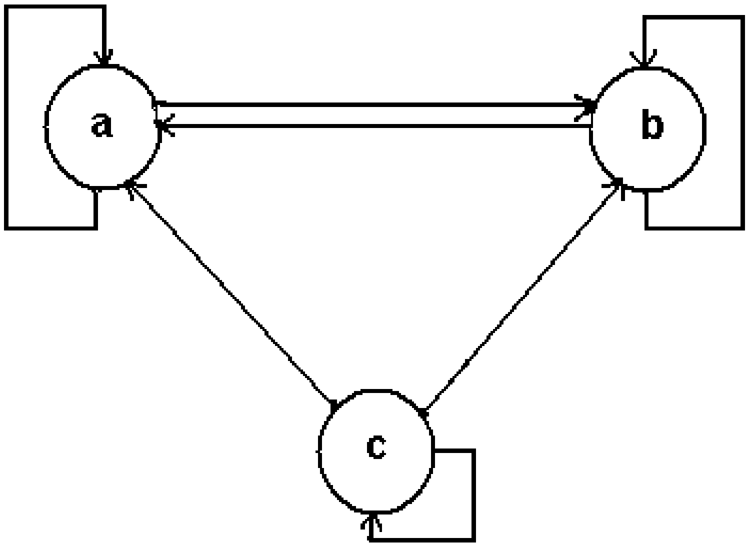


Figura 2.12: Representação por Grafo

Exemplo 2.3.4.

a) *Para qualquer A, as relações de igualdade e diferença são relações simétricas. Observe que para quaisquer $a, b \in A$, $a = b$ implica $b = a$* e *$a \neq b$ implica $b \neq a$.*

b) *A relação de perpendicularismo entre vetores de um plano é uma relação simétrica, pois dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ temos que $\vec{u} \perp \vec{v}$ implica $\vec{v} \perp \vec{u}$.*

c) *A relação de desigualdade $\leq$ não é simétrica em $\mathbb{N}$. Veja, por exemplo, que $3 \leq 6$ não implica $6 \leq 3$.*

O grafo de uma relação simétrica possui a característica que entre dois nodos quaisquer, ou não existe aresta ou há duas arestas, uma em cada sentido. Veja os exemplos abaixo:

Exemplo 2.3.5. *Consideremos $A = \{a, b, c\}$.*

a) *Seja a relação $\Re = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$. O grafo que a representa é dado pela figura 2.13.*

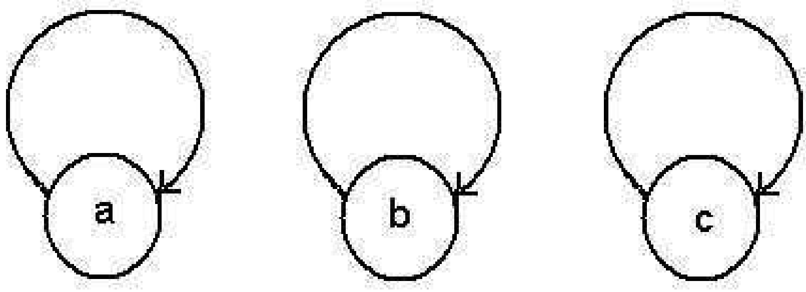


Figura 2.13: Representação por Grafo

b) *Seja a relação*

$$\Re = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,d)\}.$$

Neste caso, temos o grafo da figura 2.14.

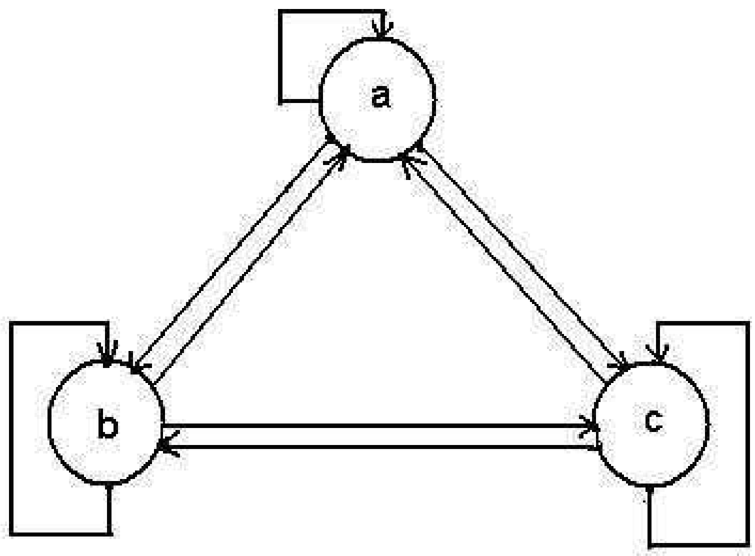


Figura 2.14: Representação por Grafo

3. **Transitiva.**

Definição 2.3.4. *Chamamos uma relação $\Re$ de transitiva quando*

$$(\forall\ a,b,c)\ \ a\Re b \text{ e } b\Re c \Longrightarrow a\Re c.$$

Exemplo 2.3.6.

a) *As relações de igualdade e diferença em $\mathbb{R}$ são relações transitivas. Observe que para quaisquer $a, b, c \in A$, se $a = b$ e $b = c$ então temos $a = c$; o mesmo valendo no caso da diferença.*

b) *As relações $\leq$ e $\geq$ em $\mathbb{R}$ também são exemplos de relações transitivas, pois para quaisquer $a, b, c \in A$, se $a \leq b$ e $b \leq c$ então temos $a \leq c$; o mesmo ocorrendo no caso de desigualdade $\geq$.*

c) *Seja A um conjunto qualquer. A relação de inclusão $\subseteq$ sobre o conjunto das partes $\mathcal{P}(A)$ também é transitiva, isto é, dados $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{P}(A)$ tais que $A_1 \subset A_2$ e $A_2 \subset A_3$ temos que $A_1 \subset A_3$. Veja ilustração na figura 2.15.*

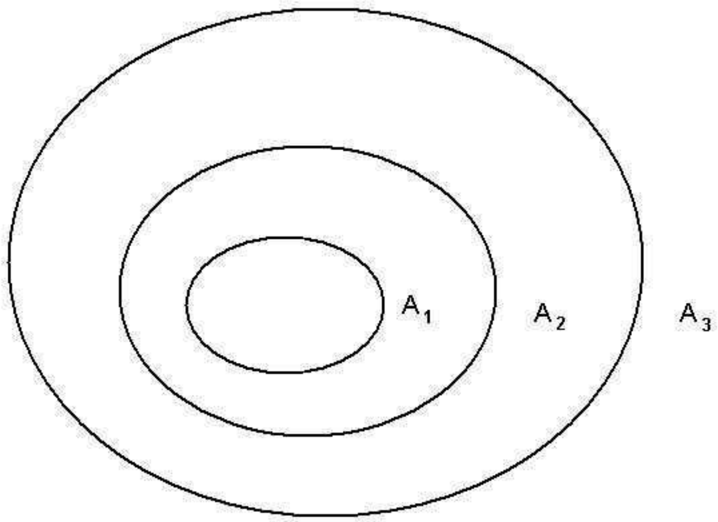


Figura 2.15: Inclusão no conjunto das partes

4. **Anti-simétrica.**

Definição 2.3.5. *Chamamos uma relação $\Re$ de anti-simétrica quando satisfaz:*

$$(\forall\, a, b, c)\ \ a\Re b \text{ e } b\Re a \Longrightarrow a = b.$$

Exemplo 2.3.7.

a) *A relação $\leq$ em $\mathbb{R}$ é anti-simétrica. Veja que para quaisquer elementos $a, b \in \mathbb{R}$ que satisfazem $a \leq b$ e $b \leq a$ temos que $a = b$. Lembre-se que esta relação não é simétrica.*

b) *Seja A um conjunto qualquer. A relação de inclusão $\subseteq$ sobre o conjunto das partes $\mathcal{P}(A)$ também é anti-simétrica, pois dados dois subconjuntos A_1 e A_2 de $\mathcal{P}(A)$, se $A_1 \subset A_2$ e $A_2 \subset A_1$ então $A_1 = A_2$.*

c) *A relação de igualdade em $\mathbb{R}$ é simétrica e anti-simétrica.*

O grafo de uma relação anti-simétrica é caracterizado por possuir entre dois nodos quaisquer, no máximo uma aresta.

Exemplo 2.3.8. *Sejam $A = \{a, b, c\}$ e a endorrelação*

$$\Re = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, c)\}.$$

O grafo desta relação é representado na figura 2.16.

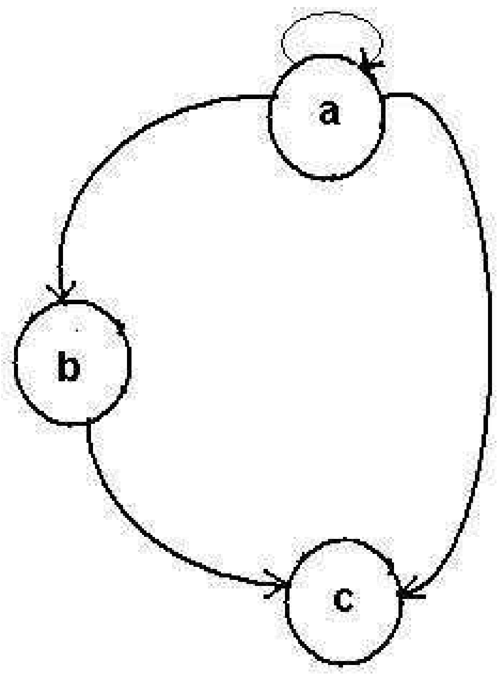


Figura 2.16: Representação por Grafo

Observemos agora outros exemplos sob o ponto de vista de todas as propriedades vistas.

Exemplo 2.3.9 (Exemplos Gerais)**.**

a) *A relação de igualdade em* $\mathbb{R}$ *é reflexiva, simétrica, transitiva e anti-simétrica.*

b) *As relações* $\leq$ *em* $\mathbb{R}$ *e,* $\subseteq$ *no conjunto das partes de um conjunto dado, são reflexivas, transitivas e anti-simétricas.*

c) *Seja* A *o conjunto das cidades do Piauí. A relação*

$$\Re = \{(a, b) \mid \text{chega-se da cidade } a \text{ à cidade } b \text{ em até 10h}\}$$

não é simétrica, porque as estradas que ligam duas cidade podem ser diferentes e, em um dos sentidos, ser mais demorado que o outro; nem transitiva mas, é reflexiva.

d) *Seja* A *o conjunto das disciplinas do seu curso universitário. A relação* $\Re = \{(a, b) \mid a \text{ é pré-requisito para } b\}$ *é transitiva.*

2.4 Relação de Ordem

Nesta seção estudamos os conjuntos parcialmente e totalmente ordenados: definição, exemplos e elementos associados, tais como ínfimo e supremo. Esta seção nos serve de base, por exemplo, para definir Reticulados, como veremos em unidades posteriores.

Definição 2.4.1. *Chamamos de ordenação parcial em um conjunto* A *a uma relação em* A *que possui as propriedades reflexiva, transitiva e anti-simétrica, isto é, satisfaz, respectivamente:*

i) *Para qualquer* $a \in A$ *temos que* $a\Re a$*.*

ii) *Para quaisquer* $a, b, c \in A$ *tais que* $a\Re b$ *e* $b\Re c$ *implica que* $a\Re c$*.*

iii) *Para quaisquer* $a, b, c \in A$ *tais que* $a\Re b$ *e* $b\Re a$ *implica que* $a = b$*.*

A relação de ordem generaliza a idéia da desigualdade, seja $\leq$ ou $\geq$, conhecida para números reais. Assim, são exemplos naturais de relação de ordem, as seguintes relações:

Exemplo 2.4.1.

a) *As relações de desigualdade maior ou igual* $\geq$ *e menor ou igual* $\leq$ *em* $\mathbb{R}$*.*

b) *A relação de inclusão* $\subseteq$ *no conjuntos das partes de um conjunto* A *qualquer.*

Seja $\Re$ uma relação de ordenação parcial em um conjunto A dado. Denotamos $a \leq_{\Re} b$, a qual lemos *a precede b na relação* $\Re$, para dizer que $(a, b) \in \Re$. No caso em que a for diferente de b, usamos a notação $a <_{\Re} b$ (a qual lemos *a precede estritamente b na relação* $\Re$).

Definição 2.4.2. *Chamamos de conjunto parcialmente ordenado a todo conjunto onde foi definida uma relação de ordem parcial.*

Fixada uma relação de ordem $\Re$ num conjunto dado A, podemos estabelecer uma comparação entre os elementos de $\Re$ como definimos abaixo.

Definição 2.4.3. *Sejam* A *um conjunto dado e* $\Re$ *uma relação de ordem em* A*. Chamamos de comparáveis, segundo* $\Re$*, os elementos* $a, b \in A$ *que satisfazem*

$$a \leq_{\Re} b \text{ ou } b \leq_{\Re} a.$$

Os conjuntos com uma relação de ordem, que possuem todos os seus elementos comparáveis segundo esta ordem, recebem uma denominação especial.

Definição 2.4.4. *Seja* $\Re$ *uma relação de ordem sobre um conjunto* A*. Se todos os elementos de* $\Re$ *são comparáveis, dizemos que* $\Re$ *é uma relação de ordem total sobre* A *e, o conjunto* A *é um conjunto totalmente ordenado.*

Exemplo 2.4.2.

1. *A relação de desigualdade $\leq$ em $\mathbb{R}$ e a relação de inclusão $\subset$ no conjunto das partes, $\mathcal{P}(A)$, de um conjunto dado A, são exemplos de relações totalmente ordenadas.*

2. *Consideremos o conjunto $A = \{-1, 5, 9\}$. A relação*

$$\Re = \{(-1,-1),(5,5),(9,9),(-1,5),(5,9),(-1,9)\}$$

em A é de ordenação total. Veja figura 2.17.

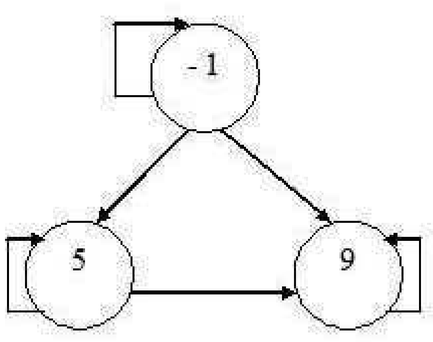


Figura 2.17: Ordenação Total

Observe que o grafo desta ordenação possui todos os vértices ligados. Temos de modo geral que quando não há dois vértices que não estejam ligados, a ordenação é total.

O conceito de comparação segundo uma relação dada nos leva à definição de outros elementos, como segue.

Definição 2.4.5. *Sejam A um conjunto qualquer e $\Re$ uma relação de ordem parcial em A. Seja o conjunto $B \subset A$ com $B \neq \emptyset$.*

- *Chamamos um elemento $L \in A$ de limite superior de B quando satisfaz:*

$$(\forall\, b \in B)\;\; b \leq_{\Re} L.$$

- *Chamamos um elemento $l \in A$ de limite inferior de B quando satisfaz:*

$$(\forall\, b \in B)\;\; l \leq_{\Re} b.$$

Definição 2.4.6. *Sejam A um conjunto qualquer e $\Re$ uma relação de ordem parcial em A.*

- *Chamamos um elemento $x \in A$ de máximo de A quando satisfaz:*

$$(\forall\ a \in A)\ \ a \leq_{\Re} x.$$

- *Chamamos um elemento $y \in A$ de mínimo de A quando satisfaz:*

$$(\forall\ a \in A)\ \ y \leq_{\Re} a.$$

Note! Pela definição acima, podemos dizer que o elemento máximo é um limite superior de A e pertence a A. Da mesma maneira, podemos dizer que o elemento mínimo de A é um limite inferior de A e que pertence a A.

Exemplo 2.4.3. *Vamos identificar os limites inferiores e superiores de A e os elementos máximo e mínimo, sendo:*

1. *$A = [-1, 2]$ e a ordem é a relação usual de desigualdade.*

   - *São limites superiores de A todos os números L maiores que 2. Analogamente, são limites inferiores todos os l menores que -1.*
   - *-1 e 2 são, respectivamente, os elementos mínimo e máximo, pois são limites superiores e inferiores de A, respectivamente, e ambos pertencem a A.*

2. *$A = (0, 1.2]$ e a ordem é a relação usual de desigualdade.*

   - *Neste caso, o conjunto dos limites inferiores é $\{l \in I\!R \mid l \leq 0\}$ e, o conjunto dos limites superiores é $\{l \in I\!R \mid l \geq 1.2\}$.*
   - *1.2 é o máximo de A por ser limite superior e pertencer a A e observe que A não possui mínimo ($0 \notin A$).*

Definição 2.4.7. *Seja A um conjunto parcialmente ordenado e $B \neq \emptyset$ um subconjunto qualquer de A.*

- *Chamamos de supremo de B o mínimo (caso exista) do conjunto dos limites superiores de B.*

- *Chamamos de ínfimo de B o máximo (caso exista) dos limites inferiores de B.*

Exemplo 2.4.4. *Veremos agora quais são os elementos supremo e ínfimo para os conjuntos do exemplo anterior.*

1. *Para $A = [-1, 2]$, temos que -1 é o ínfimo e 2 é o supremo.*

2. *Para $A = (0, 1.2]$, temos que 0 é o ínfimo 1.2 é o supremo.*

Definição 2.4.8. *Sejam A um conjunto parcialmente ordenado e $B \neq \emptyset$ um subconjunto qualquer de A.*

- *Dizemos que um elemento $x \in B$ é um elemento maximal de B se satisfaz:*
$$(\forall\ a \in A)\ x \leq_{\Re} a\ \Rightarrow\ x = a.$$
Em outras palavras, o único elemento do conjunto B precedido por x é o próprio x.

- *Dizemos que um elemento $y \in B$ é um elemento minimal de B se satisfaz:*
$$(\forall\ a \in A)\ a \leq_{\Re} y\ \Rightarrow\ a = y.$$
Em outras palavras, o único elemento do conjunto B que precede y é o próprio y.

Exemplo 2.4.5. *Agora vamos identificar quais são os elementos maximal e minimal para os mesmos conjuntos estudados no exemplo anterior.*

1. *Para $A = [-1, 2]$, temos que -1 é o elemento minimal e 2 é o elemento maximal.*

2. *Para $A = (0, 1.2]$, temos que 1.2 é o elemento maximal. Neste caso, A não possui elemento minimal.*

2.5 Relação de Equivalência

Nesta seção tratamos das relações de equivalência, definimos classes de equivalência, e apresentamos exemplos e propriedades.

Definição 2.5.1. *Chamamos relação de equivalência a toda relação binária em um conjunto A que é reflexiva, simétrica e transitiva, isto é, satisfaz:*

i) *Para qualquer* $a \in A$ *temos que* $a\Re a$*.*

ii) *Para quaisquer* $a, b \in A$ *tais que* $a\Re b$ *implica* $b\Re a.$

iii) *Para quaisquer* $a, b, c \in A$ *tais que* $a\Re b$ *e* $b\Re c$ *implica* $a\Re c$*.*

A relação de equivalência generaliza a igualdade. Assim, são exemplos naturais de relação de equivalência:

Exemplo 2.5.1.

a) *A igualdade de números em* $\mathbb{R}$*.*

b) *A igualdade de conjuntos em um conjunto universo.*

c) *A relação de paralelismo definida em retas do espaço é uma relação de equivalência, pois dados três retas* r*,* s *e* t *quaisquer, sabemos do estudo de espaço euclideano que:*

- r *é paralela a* r*,*
- *se* r *é paralela a* s *então* s *é paralela* r *e,*
- *se* r *é paralela a* s *e, por sua vez,* s *é paralela a* t *então* r *também é paralela a* t*.*

Na seqüência apresentamos a definição de cobertura e partição de conjuntos.

Definição 2.5.2. *Sejam* S *um conjunto dado e* $A = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ *um conjunto formado por subconjuntos de* S*, isto é,* $A_i \subset S$ *para cada* $i = 1, ..., n$*. Chamamos o conjunto* A *de cobertura de* S *quando*

$$\cup_{i=1}^{n} A_i = S.$$

Se, além disso, os conjuntos A_i $(i = 1, ..., n)$ forem mutuamente disjuntos, isto é, $\cap_{i=1}^{n} A_i = \emptyset$, dizemos que A é uma partição de S e os conjuntos $A_1, ..., A_n$ são os blocos da partição.

Observação 2.5.1. *Quando na definição acima temos apenas satisfeita a condição de que os conjuntos $A_1, ..., A_n$ são mutuamente disjuntos, chamamos A de empacotamento. Assim, podemos também dizer que uma partição é um conjunto que é ao mesmo tempo cobertura e empacotamento de S.*

Exemplo 2.5.2.

a) *Seja $S = \{0, 1, 2\}$. Consideremos os conjuntos $A = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}\}$, $B = \{\{0\}, \{1, 2\}\}$, $C = \{\{0\}, \{0, 1\}\}$, $D = \{\{0, 1\}, \{1, 2\}\}$, $E = \{\{0\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}\}$, $F = \{\{0, 1, 2\}\}$. Os conjuntos D, E são coberturas de S e A, B e F são partições de S. O conjunto C é apenas um empacotamento de S.*

b) *Os conjuntos de números pares $P = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ é par$\}$ e dos números ímpares $I = \{x \in \mathbb{N} | \ x$ é ímpar$\}$ formam uma partição dos números naturais. Veja a figura 2.18.*

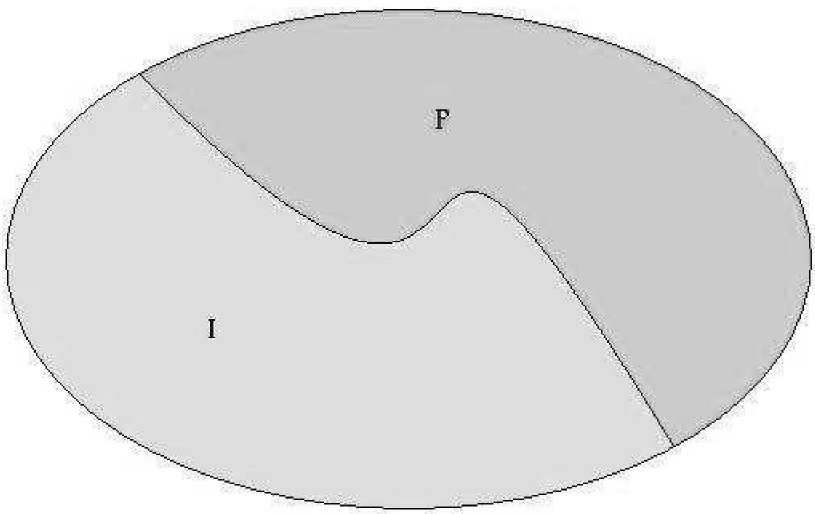


Figura 2.18: Partição

Uma relação de equivalência sobre um conjunto A define uma partição em A, como veremos abaixo.

Definição 2.5.3. *Sejam $\Re$ uma relação de equivalência sobre um conjunto dado A e um elemento $a \in A$. Chamamos classe de equivalência determinada por a, módulo $\Re$, o subconjunto $[a]$ de todos os elementos de A que se relacionam com a, isto é,*

$$[a] = \{x \in A|\ x\Re a\}.$$

Exemplo 2.5.3.

1. *Seja $A = \{0, 1, 2\}$. A relação de equivalência*

$$\Re = \{(0,0),(1,1),(2,2),(0,2),(2,0)\}$$

admite as seguintes classes de equivalência:

a) $[0] = \{0, 2\}$

b) $[1] = \{1\}$

c) $[2] = \{2, 0\}$

2. *Seja a relação $\Re$ em $\mathbb{N}$ definida por $a\Re\, b \ \Leftrightarrow\ a + b$ é par. Esta relação particiona $\mathbb{N}$ em duas classes de equivalência:*

- *Observe que se a é um número par então para todo b par, a soma $a + b$ também é par e, assim, $b \in [a]$. Logo, $[a]$ é a classe de equivalência dos números pares.*

- *Veja também que se x é um número ímpar então para todo y ímpar, a soma $x + y$ também é par e, $y \in [x]$. Logo, $[x]$ é a classe de equivalência dos números ímpares.*

Uma classe de equivalência pode ter mais de um nome ou elemento representativo: no primeiro exemplo veja que $[0] = [2]$ e, no segundo, podemos representar a classe dos números pares por $[2] = [4] = [98] = [128] = [1976] = ...$, e a classe dos números ímpares por $[1] = [3] = [19] = [137] = [1079] = ...$ (Veja figura 2.18 acima).

Definição 2.5.4. *Chamamos o conjunto das classes de equivalência módulo $\Re$ de um conjunto A, o qual indicamos por $A/\Re$, de conjunto quociente de A por $\Re$.*

Veremos em seguida um exemplo especial de relação de equivalência, a chamada relação de congruência módulo m sobre $\mathbb{Z}$.

Exemplo 2.5.4 (Relação binária de congruência módulo m sobre o conjunto $\mathbb{Z}$.)**.** *Seja um inteiro $m > 1$. Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, dizemos que a é côngruo a b módulo m, o qual denotamos por $a \equiv b(mod\ m)$, se, e somente se, $m|(a-b)$, isto é, $a-b$ é divisível por m, ou ainda, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = y + km$.*
A relação de congruência define uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$, isto é, atende as três propriedades: reflexiva, smétrica e transitiva. Observe:

- *A relação de congruência é reflexiva pois, para qualquer $x \in \mathbb{Z}$ temos que $x \equiv x(mod\ m)$, visto que $x - x = 0$ é divisível por m.*

- *A relação de congruência é simétrica pois, para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$ com $x \equiv y(mod\ m)$ temos que $(-x-y)$ é divisível por m, ou ainda, $y \equiv x(mod\ m)$.*

- *A relação de congruência é transitiva pois, para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{Z}$ com $x \equiv y(mod\ m)$ e $y \equiv z(mod\ m)$ temos que $x-y$ e $y-z$ são divisíveis por m. Logo, a soma deles também é divisível por m, isto é, $(x-y)+(y-z) = x-z$ satisfaz $x \equiv z(mod\ m)$.*

A relação de congruência módulo m define em $\mathbb{Z}$ um conjunto quociente, o qual denotamos por $\mathbb{Z}_m$. Tal conjunto quociente tem exatamente m elementos a saber:

$$\mathbb{Z}_m = \{[0], [1], [2], ..., [m-1]\}.$$

Sub-exemplo: *Vamos escrever as classes de equivalência da relação binária de congruência módulo 3 em $\mathbb{Z}$.*

$[0]$ *é a classe de equivalência formada por todos os números inteiros que deixam resto 0 quando divididos por* 3*:*

$$[0] = \{..., -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, ...\}.$$

$[1]$ *é a classe de equivalência formada pelos números inteiros que deixam resto 1 ao serem divididos por* 3*.*

$$[1] = \{..., -8, -5, -2, 1, 4, 7, ...\}.$$

Analogamente, $[2]$ *é formada pelos inteiros que quando divididos por* 3 *deixam resto 2.*

$$[2] = \{..., -7, -4, -1, 2, 5, 8, ...\}.$$

Lembre-se que qualquer inteiro quando dividido por 3*, pode deixar resto* $0, 1$ *ou* 2*. Assim, é fácil observar que o conjunto quociente* $\mathbb{Z}_3$ *é:*

$$\mathbb{Z}_3 = \{[0], [1], [2]\}.$$

Encerramos esta unidade com as seções sobre inversa e composta de relações.

2.6 Relação Inversa

Estudamos nesta seção a inversão de relações. Iniciamos com a definição de relação inversa, apresentamos exemplos e, por fim, propriedades satisfeitas por esta relação.

Definição 2.6.1. *Seja* $\Re$ *uma relação de um conjunto* A *em um conjunto* B*. Chamamos relação inversa de* $\Re$*, o qual denotamos por* $\Re^{-1}$*, a seguinte relação de* B *em* A*:*

$$\Re^{-1} = \{(b, a) \in \ B \times A \mid (a, b) \in \Re\}.$$

Exemplo 2.6.1.

a) *Sejam* $A = \{a, b, c\}$ *e* $B = \{x, y, z\}$*. Consideremos a relação* $\Re = \{(a, x), (a, y), (b, z), (c, z)\}$*, então*

$$\Re^{-1} = \{(x, a), (y, a), (z, b), (z, c)\}.$$

b) *Consideremos a relação de desigualdade* $>$ *no conjunto* $A = \{-1, 0, 2, 5\}$*, isto é,*

$$\Re = \{(0, -1), (2, -1), (5, -1), (2, 0), (5, 0), (5, 2)\}.$$

A relação inversa é

$$\Re^{-1} = \{(-1, 0), (-1, 2), (-1, 5), (0, 2), (0, 5), (2, 5)\}.$$

c) *Consideremos a endorrelação* $y = x + 1$ *em* $I\!R$*. A relação inversa é dada por* $\Re^{-1} = \{(x, y) \in I\!R^2 \mid x = y - 1\}$ *e ambas as relações são representadas na figura 2.19.*

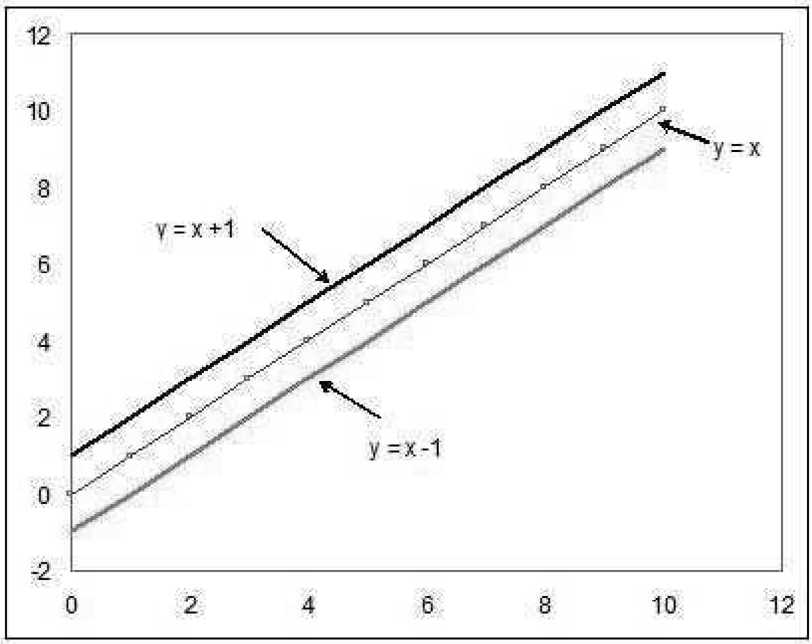


Figura 2.19: Relação e sua inversa

A relação inversa possui as seguintes propriedades:

1. $D(\Re^{-1}) = Im(\Re)$.

2. $Im(\Re^{-1}) = D(\Re)$.

3. $(\Re^{-1})^{-1} = \Re$.

2.7 Relação Composta

Apresentamos aqui a definição, exemplos e propriedades desta operação entre relações.

Definição 2.7.1. *Sejam* A, B *e* C *três conjuntos quaisquer e* $\Re_1$ *e* $\Re_2$ *relações, respectivamente, de* A *em* B *e de* B *em* C. *Chamamos de composição ou composta de* $\Re_1$ *e* $\Re_2$ *, a qual denotamos por* $\Re_2 \circ \Re_1$ *(e lemos "*$\Re_2$ *composta com* $\Re_1$*"ou "*$\Re_2$ *bola* $\Re_1$*"), a relação definida de* A *em* C *como segue:*

$$\Re_2 \circ \Re_1 = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists\, b \in B \text{ tal que } a\Re b \text{ e } b\Re c\}.$$

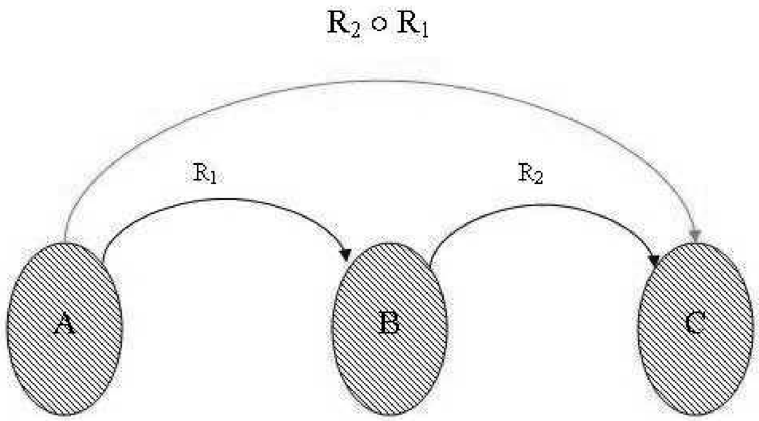


Figura 2.20: Composição de Relações

Exemplo 2.7.1.

a) *Sejam os conjuntos* $A = \{a, b\}$, $B = \{x, y, z\}$ *e* $C = \{i, j, k\}$. *Consideremos as relações* $\Re_1 = \{(a, x), (a, y), (b, z)\}$ *e* $\Re_2 = \{(x, i), (x, j), (y, i), (z, j), (z, k)\}$. *A composta* $\Re_2 \circ \Re_1$ *é dada portanto por:*

$$\Re_2 \circ \Re_1 = \{(a, i), (a, j), (b, j), (b, k)\}.$$

b) *Sejam as relações* $\Re_1 = \{(x, y) \in I\!R^2 \mid y = x^2\}$ *e* $\Re_2 = \{(x, y) \in I\!R^2 \mid y = x + 1\}$ *em* $I\!R$. *Temos que a composição* $\Re_2 \circ \Re_1$ *é dada por:*

$$\Re_2 \circ \Re_1 = \{(x, y) \in I\!R^2 \mid y = (x + 1)^2\}.$$

Temos também que:

$$\Re_1 \circ \Re_2 = \{(x, y) \in I\!R^2 \mid y = x^2 + 1\}.$$

Observe! Pelo item **b)** do Exemplo 2.7.1 acima, a composição de relações em geral não é comutativa.
A composição atende a propriedade associativa, como enunciamos abaixo.

Associatividade. Sejam A, B, C três conjuntos quaisquer. Dadas as relações $\Re_1$ de A em B, $\Re_2$ de B em C e $\Re_3$ de C em D, temos que vale:

$$\Re_3 \circ (\Re_2 \circ \Re_1) = (\Re_3 \circ \Re_2) \circ \Re_1.$$

2.8 Exercícios

1. Sejam A um conjunto com 6 elementos e

$$\Re = \{(a, a), (b, c), (b, d), (c, e), (d, b)\}.$$

   Determine:

   a)A b)$D(\Re)$ c)$Im(\Re)$ d)$\Re^{-1}$

2. Determine domínio, imagem e inversa das seguintes relações:

   a) $\Re = \{(a, b) \mid a + b = 7\}$ em $\mathbb{N}$.

   b) $\Re = \{(a, b) \mid 25x^2 + 4y^2 = 100\}$ em $I\!R$.

   c) $\Re = \{(1, 2), (2, 2), (2, 3)\}$ em $A = \{1, 2, 3\}$.

   d) $\Re = \{(0, 1), (1, 0), (2, 4), (4, 2), (4, 6), (6, 4)\}$ em $A = \{0, 1, 2, 4, 6\}$.

3. Encontre todas as relações binárias sobre o conjunto $A = \{a, b\}$. Determine quais são reflexivas, simétricas, anti-simétricas e/ou transitivas.

4. Seja $A = \{-2, -1, 3, 5, 7\}$. Classifique as seguintes relações em A como reflexivas, simétricas, anti-simétricas e/ou transitivas.

a) $\Re_1 = \{(-2,-2),(-1,-1),(3,3),(5,5),(7,7),(-2,-1),(-1,3),(3,5),(5,7)\}$.

b) $\Re_2 = \{(-2,-1),(-1,-2),(5,7),(7,5)\}$.

c) $\Re_3 = \{(-2,-1),(-1,3),(-2,3),(3,-2),(3,-1),(-1,-2),(-1,-1),(-2,-2),(3,3)\}$.

d) $\Re_4 = \emptyset$.

5. Classifique as relações dadas nos conjuntos A mencionados em reflexivas, simétricas, anti-simétricas e/ou transitivas.

   a) $\Re_1 = \{(x,y) \mid x$ é ímpar$\}$ em $A = \mathbb{N}$.

   b) $\Re_2 = \{(x,y) \mid x+y$ é par$\}$ em $A = \mathbb{N}$.

   c) $\Re_3 = \{(x,y) \mid x-y$ é múltiplo de 5$\}$ em $A = \mathbb{Z}$.

   d) $\Re_4 = \{(x,y) \mid$ nº de caracteres em $x =$ nº de caracteres em $y\}$.

6. Sejam $\Re_1$ e $\Re_2$ duas relações em um mesmo conjunto A. Verifique que:

   a) Se $\Re_1$ e $\Re_2$ são transitivas então $\Re_1 \cap \Re_2$ é transitiva.

   b) Se $\Re_1$ e $\Re_2$ são simétricas então $\Re_1 \cup \Re_2$ e $\Re_1 \cap \Re_2$ são simétricas.

7. Verifique que as seguintes relações são ordenações parciais e desenhe o grafo de cada uma delas.

   a) $\Re = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,b),(b,c),(c,c)\}$ em $A = \{a,b,c\}$.

   b) $\Re = \{(x,y) \mid x$ divide $y\}$ em $A = \{1,2,3,5,9,15,36,45\}$.

   c) $\Re = \{(x,y) \mid x = a+bi,\ y = c+di$ com $a \le c$ e $b \le d\}$ em $\mathbb{C}$.

8. Determine quais os limites inferiores, superiores, ínfimo e supremo de cada item do exercício anterior.

9. Considere a relação de ordem por divisibilidade em

   $$A = \{1,2,3,5,9,15,36,45\}.$$

   Identifique o máximo, o mínimo e os elementos maximais e minimais de $B = \{9,15\}$.

10. Considere a relação de ordem por inclusão em

$$A = \{\{0\}, \{1\}, \{0,1\}, \{0,1,2\}, \{0,1,3\}, \{0,1,2,3\}\}.$$

Identifique o máximo, o mínimo e os elementos maximais e minimais de $B = \{\{0,1\}, \{0,1,2\}, \{0,1,3\}\}$.

11. Determine quais das relações abaixo sobre $A = \{1,2,3\}$ são relações de equivalência.

a) $\Re_1 = A \times A$

b) $\Re_2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3)\}$.

c) $\Re_3 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (3,2), (2,3)\}$.

d) $\Re_4 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1)\}$.

12. Determine as classes de equivalência que compõem o conjunto $\mathbb{Z}_5$.

13. Se $m-1$ é o limite do tamanho da palavra que pode ser armazenada em um computador e a soma de dois elementos $0 \leq x \leq m-1$ e $0 \leq y \leq m-1$, $x+y$, excede este limite, uma alternativa para o armazenamento de $x+y$ é utilizarmos o que chamamos de *soma módulo* m e armazenar o resto r da divisão de $x+y$ por m. Assim, decida:
Se 7 for o maior inteiro que puder ser armazenado em um microcomputador, qual deve ser o número armazenado como resultado da soma 2+7 se a soma módulo 5 for usada?

14. Identifique, dentre as relações abaixo, quais são de equivalência.

a) $\Re = \{(x,y) \mid x+y=5\}$ em $\mathbb{N}$.

b) $\Re = \{(x,y) \mid x$ divide $y\}$ em $\mathbb{N}$.

c) $\Re = \{(r,s) \mid r \perp s\}$ sobre o conjunto das retas de um plano π dado.

d) $\Re = \{(x,y) \mid x=(a,b), y=(c,d)$ e $ad=bc\}$ em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.

15. Determine todas as relações de equivalência sobre o conjunto $A = \{0, 1, 2\}$.

Referências Bibliográficas

[1] Matemática Essencial
http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/superior/algebra/relacoes/relacoes.htm

[2] Brasil Escola
www.brasilescola.com/matematica/plano-cartesiano.htm

[3] DOMINGUES, H. e IEZZI, G. Álgebra Moderna. São Paulo. Ed. Atual. 1982.

[4] GERSTING, J. L. Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação. Rio de Janeiro. LTC. 1995.

[5] MENEZES, P. B. Matemática Discreta para Computação e Informática. Porto Alegre. Ed Sagra Luzzato. 2005.

Unidade 3

Funções

Resumo

Esta unidade é dedicada ao estudo das funções, de um ponto de vista algébrico. Definimos funções, estudamos as propriedades de sobrejeção, injeção e bijeção, bem como a condição para existência da função inversa e a operação de composição. Finalizamos apresentando dois interessantes exemplos de classes de funções, a saber: funções de permutação e funções de recursão.

Sumário da Unidade

3. Funções

As funções constituem uma importante classe de relações com aplicações em várias ciências. Na Ciência da Computação, por exemplo, os resultados gerados por um algoritmo podem ser vistos como uma função dos dados de entrada, um caso especial destas funções é a função de recursão.

O estudo de funções pode ser incrementado no sítio somatematica.

Nesta unidade apresentamos o que caracteriza este tipo de relação, propriedades, operações e, ao final, alguns tipos especiais.

3.1 Definição de Função

Função, como citamos anteriormente, é um caso particular de relação. Motivados por esta propriedade, iniciamos esta seção analisando alguns exemplos de relação para destacarmos características comuns daquelas a qual definimos por funções.

Exemplo 3.1.1. a) *Sejam os conjuntos* $A = \{a, b, c, d\}$ *e* $B = \{x, y, z\}$ *e, a relação* $\Re = \{(a, x), (a, y), (b, z), (c, x), (d, y)\}$*. Neste caso, observe:*

- *Para todos os elementos do conjunto* A*, a menos de* a*, existe apenas um elemento de* B *tal que o par pertence à relação. Veja:*

$$(b, z), (c, x), (d, y) \in \Re.$$

- *Para o elemento* $a \in A$*, existem dois elementos de* B*,* x *e* y*, tais que os pares* (a, x) *e* (a, y) *estão em* $\Re$*.*

Veja ilustração desta relação pelo diagrama de Venn na figura 3.1.

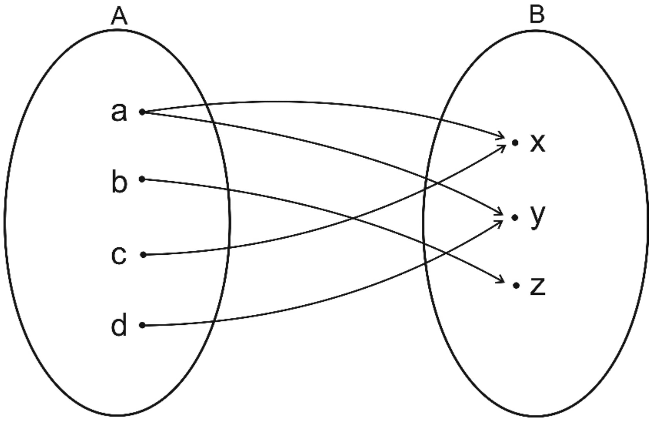


Figura 3.1: Representação da Relação

b) *Seja a relação* $\Re = \{(a,a),(b,c),(d,e)\}$ *em* $A = \{a,b,c,d,e\}$*. Neste caso, temos:*

- *Para os elementos* $a, b, d \in A$*, existe apenas um elemento de* A *tal que o par pertence à relação. São eles:*

$$(a,a),(b,c),(d,e) \in \Re.$$

- *Para os elementos* $c, e \in A$*, não existe algum elemento* $x \in A$ *tal que* $(c,x) \in \Re$ *e* $(e,x) \in \Re$*.*

Veja ilustração desta relação pelo diagrama de Venn na figura 3.2.

c) *Sejam os conjuntos* $A = \{1,3,5,7\}$ *e* $B = \{0,2,4,6\}$*, e a relação* $\Re = \{(1,0),(3,4),(5,6),(7,2)\}$*. Neste caso:*

- *Cada elemento de* A *é ligado unicamente a algum elemento de* B*.*

Veja na figura 3.3 a representação desta relação.

d) *Consideremos os mesmos conjuntos* A *e* B *do exemplo* **c)** *acima mas, tomemos agora a relação* $\Re = \{(1,0),(3,0),(5,2),(7,4)\}$*. Temos:*

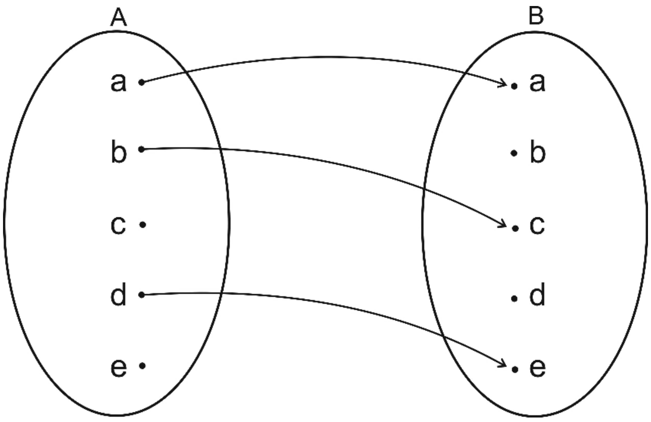


Figura 3.2: Representação da Relação

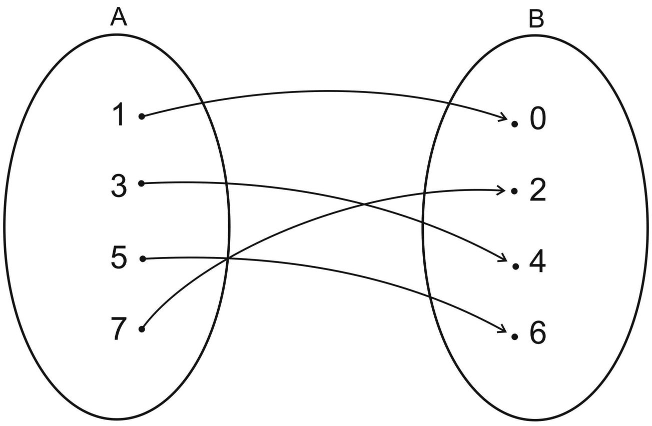


Figura 3.3: Representação da Relação

- *Todos os elementos de A são ligados a apenas um elemento de B.*

- *Para o elemento $6 \in B$, não existe algum elemento $a \in A$ cujo par $(a, 6)$ pertença à relação.*

- *O elemento $0 \in B$ possui dois elementos em A, 1 e 3, cujos pares pertencem à relação dada. São eles:*

$$(1, 0), (3, 0) \in \Re.$$

Na figura 3.4 temos a representação desta relação pelo diagrama de Venn.

e) *Seja a relação $\Re = \{(x, y) \mid x + y = 2\}$ em $I\!R$. Neste caso, temos:*

- *Para cada $x \in I\!R$, o elemento $y \in I\!R$ é determinado de maneira única (por $y = 2 - x$).*

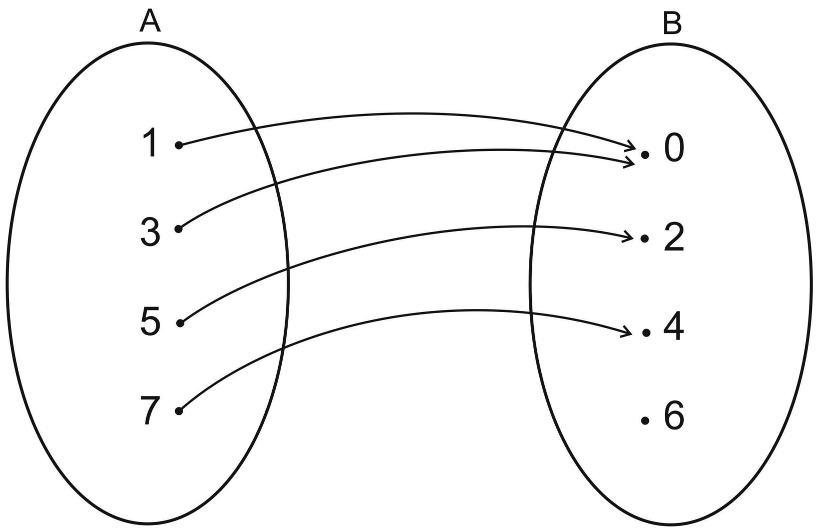


Figura 3.4: Representação da Relação

Esta relação é representada geometricamente pela reta da figura 3.5.

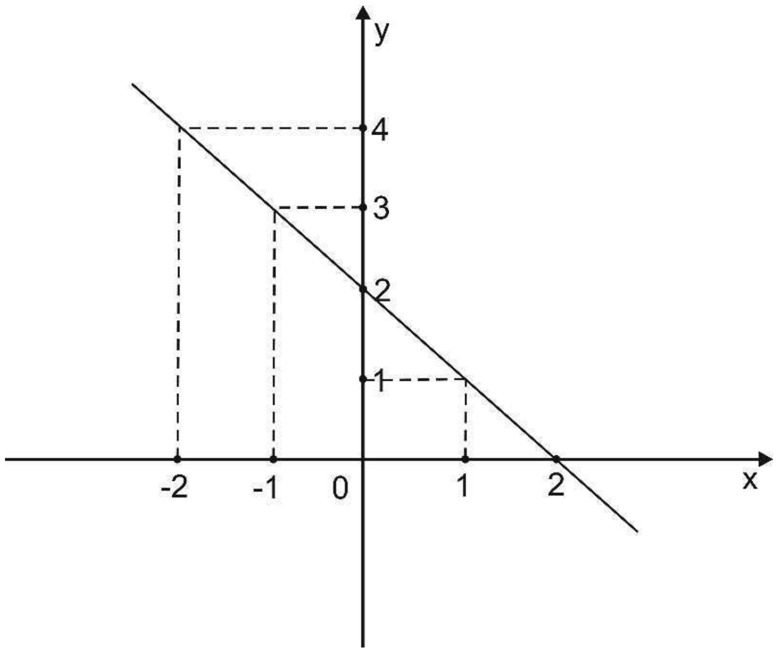


Figura 3.5: Representação da Relação

Note! As relações dos exemplos **c), d)** e **e)** possuem uma propriedade em comum: Cada elemento do conjunto de partida A é levado a um, e apenas um, elemento do conjunto de chegada B. Isto caracteriza o que chamamos de função ou aplicação de A em B. Assim, temos:

Definição 3.1.1. *Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Uma relação f de A para B é chamada função, e denotamos $f : A \to B$, se para todo $x \in A$ existe único $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.*

Observe! Da definição acima, relações que fazem associações do tipo um-para-vários (ou vários-para-vários) não podem ser funções.

Indicamos o elemento y, que corresponde a x através da função f, por $y = f(x)$, a qual lemos "f de x", e denotamos:

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \to & B \\ & x & \mapsto & f(x). \end{array}$$

As definições de domínio e imagem são semelhantes ao que vimos na unidade anterior para relações.

Definição 3.1.2. *Seja uma função $f : A \to B$. Chamamos o conjunto de partida ou de saída, A, de domínio de f e o denotamos por $D(f)$. O conjunto de chegada, B, denominamos de contradomínio de f e o denotamos por $CD(f)$.*

Definição 3.1.3. *Seja uma função $f : A \to B$. Chamamos $y = f(x)$ de imagem de $x \in A$. Denominamos o conjunto das imagens $y = f(x)$, para cada $x \in D(f)$, de Imagem de f e o denotamos por $Im(f)$.*

Exemplo 3.1.2. *São exemplos de funções as seguintes relações.*

a) *A relação $\{(x, y) \mid y = f(x) = 1\}$ em $\mathbb{R}$. Veja a representação gráfica na figura 3.7.*

b) *A relação $\{(x, y) \mid y = f(x) = 2x+5\}$ em $\mathbb{R}$. Temos a representação gráfica na figura 3.8.*

c) *A relação $\{(x, y) \mid y = f(x) = x^2\}$ em $\mathbb{R}$. A representação gráfica pode ser vista na figura 3.9.*

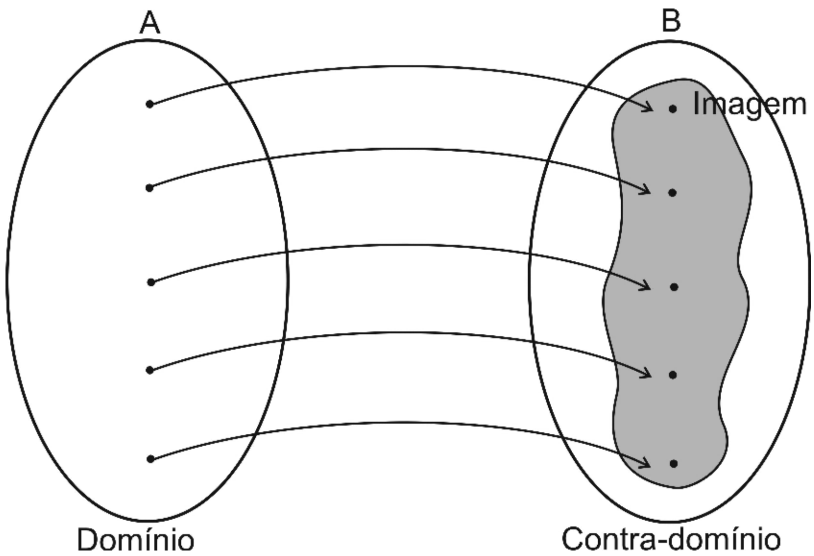


Figura 3.6: Conjunto Imagem

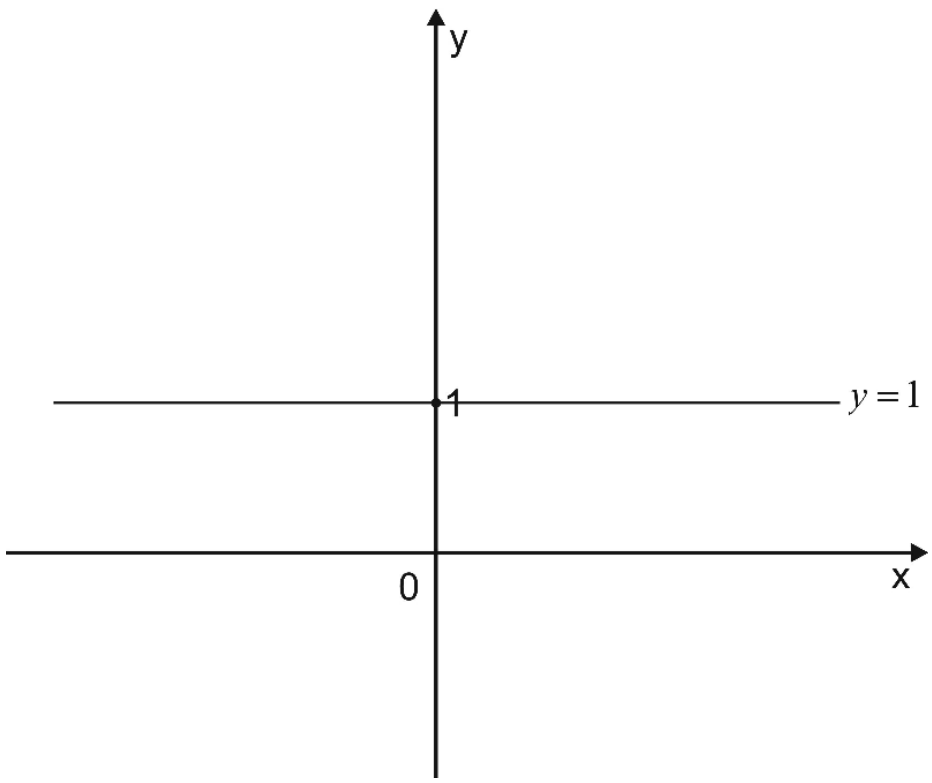


Figura 3.7: Função **a)**

Observe! Se tomássemos no último exemplo a condição $x = y^2$ no lugar de $y = x^2$, esta nova relação obtida não seria um função. Veja por exemplo que $(1, -1)$ e $(1, 1)$ pertencem à esta nova relação, ou seja, um mesmo elemento do conjunto de saída está relacionado a dois elementos do conjunto de chegada.

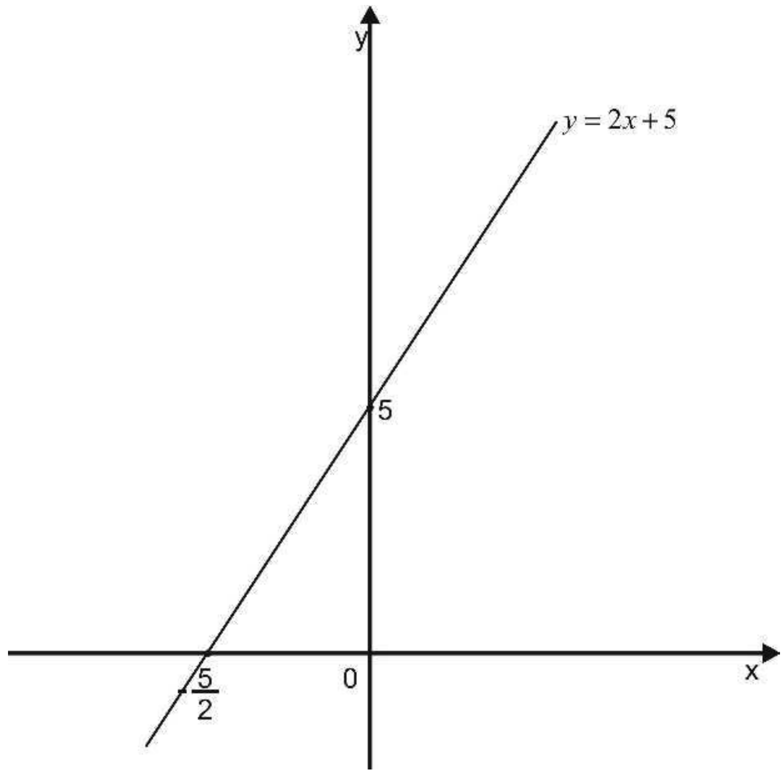


Figura 3.8: Função **b)**

Note! Nos exemplos acima, se passarmos retas paralelas ao eixo $0y$ elas cortam o gráfico em apenas um ponto (respectivamente vistas nas figuras 3.10, 3.11 e 3.12). Isto caracteriza a representação gráfica das funções. Em seguida apresentamos uma relação que não é função e, portanto, não possui esta propriedade.

Exemplo 3.1.3. *Considere* $\Re = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ *em* $I\!R$. *Esta relação não é uma função, basta verificar que* $(0, 1)$ *e* $(0, -1)$ *pertencem à* $\Re$. *Na figura 3.13 vemos que ao passarmos retas paralelas ao eixo* $0y$*, estas cortam o círculo em mais de um ponto.*

3.2 Propriedades das Funções

De acordo com a propriedade que uma função satisfaça, ela pode ser dita Sobrejetora, Injetora, Bijetora. Vamos conhecer as definições de cada uma destas propriedades, iniciando com a sobrejetividade.

Definição 3.2.1. *Consideremos uma função* $f : A \to B$. *Dizemos que*

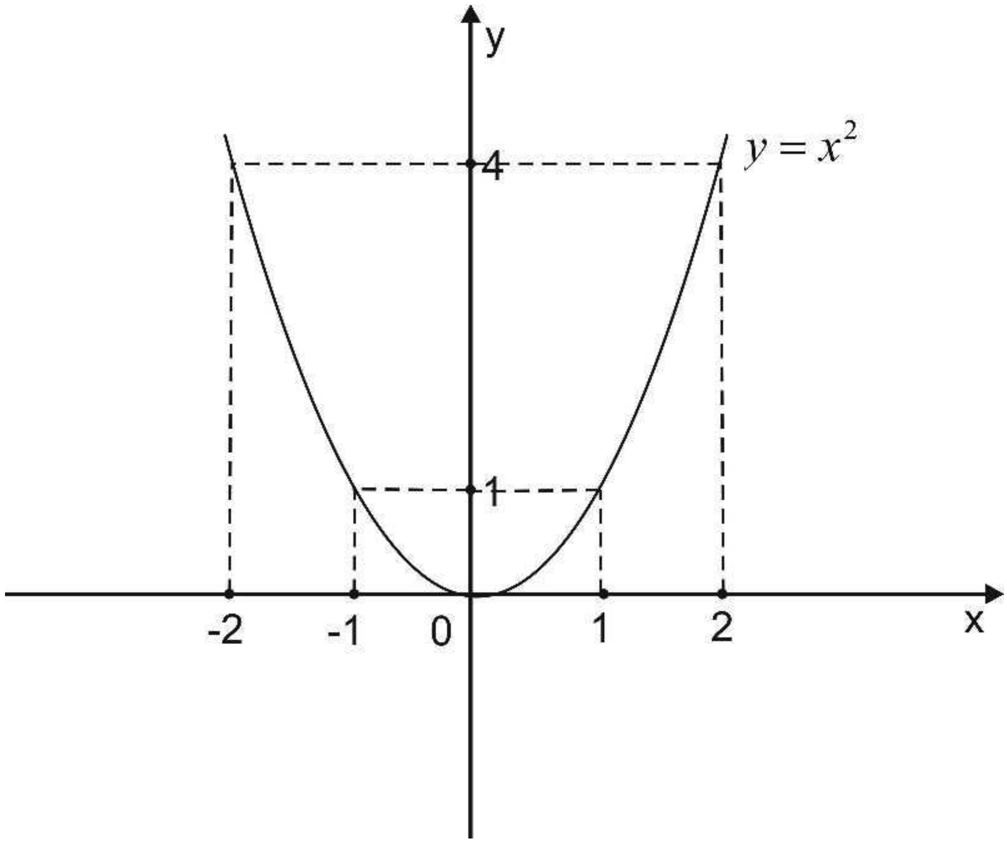


Figura 3.9: Função **c)**

f é sobrejetora (ou sobrejetiva) quando a imagem da função coincide com o seu contradomínio, isto é:

$$Im(f) = CD(f).$$

Exemplo 3.2.1.

a) *Sejam $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-1, 0, 3\}$.*

A função $f : A \to B$ definida pela lei $f(x) = x^2 - 1$ é sobrejetora.

Temos:

$$f = \{(-1, 0), (0, -1), (1, 0), (2, 3)\}.$$

Logo,

$$Im(f) = \{-1, 0, 3\} = B.$$

Encontramos na figura 3.14 a representação desta função, usando o diagrama de Venn.

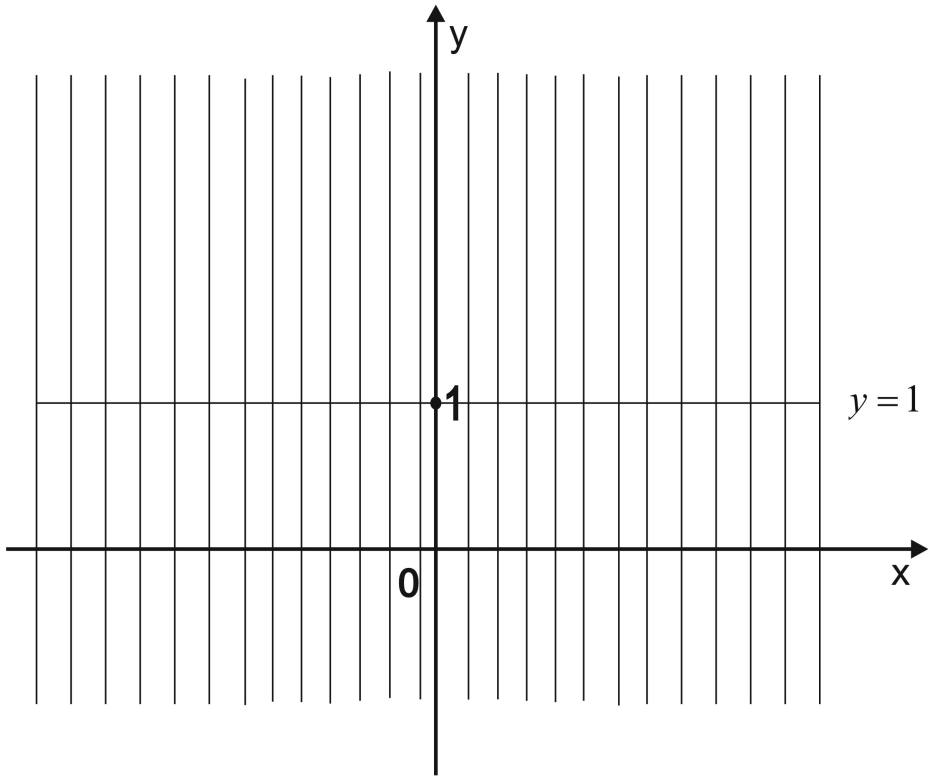


Figura 3.10: Função **a)**

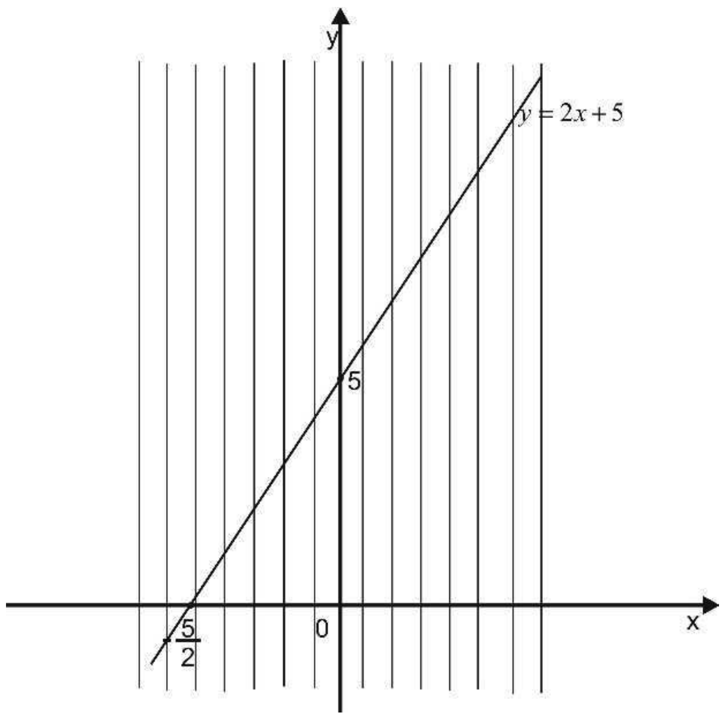


Figura 3.11: Função **b)**

b) *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x + 5$ é sobrejetora.*

O gráfico desta função é uma reta (dada na figura 3.8), portanto,

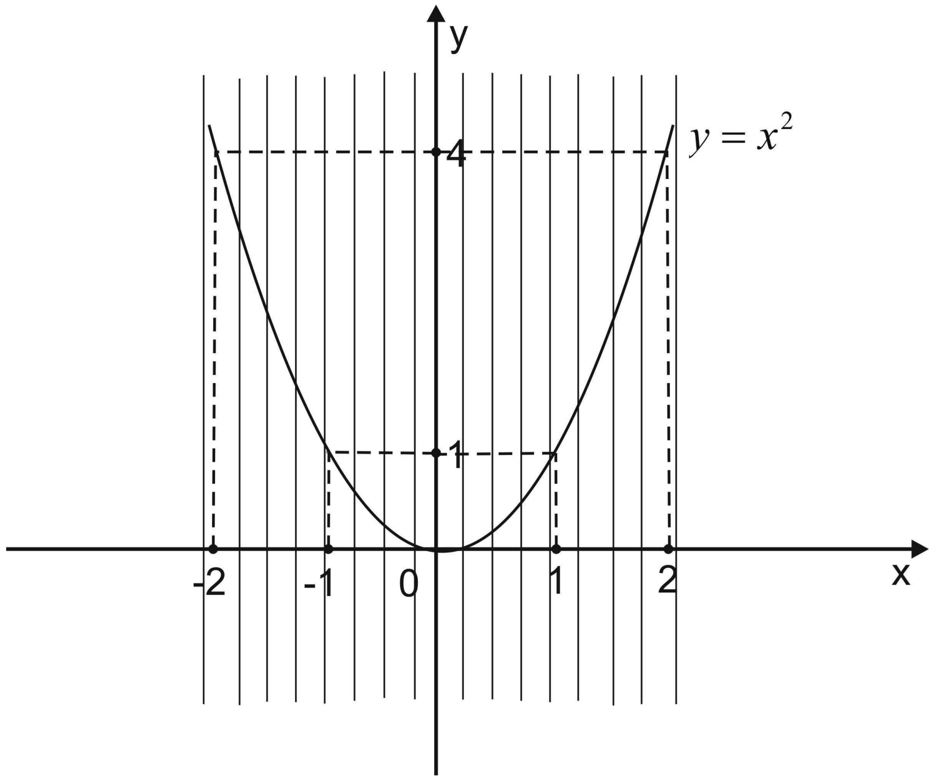


Figura 3.12: Função **c)**

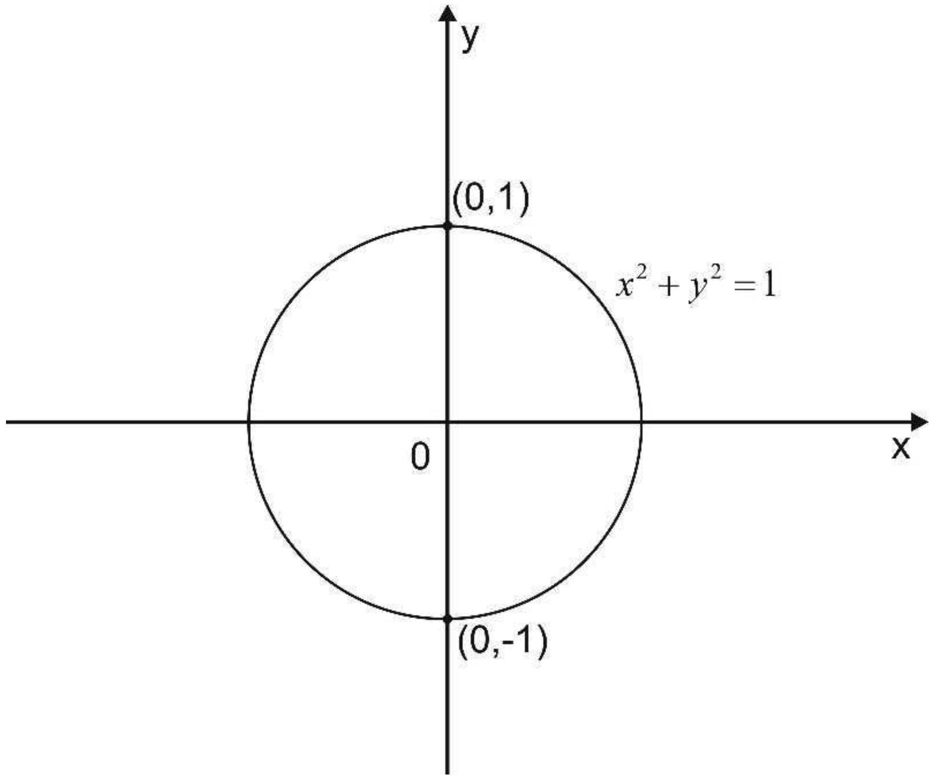


Figura 3.13: Relação que não é Função

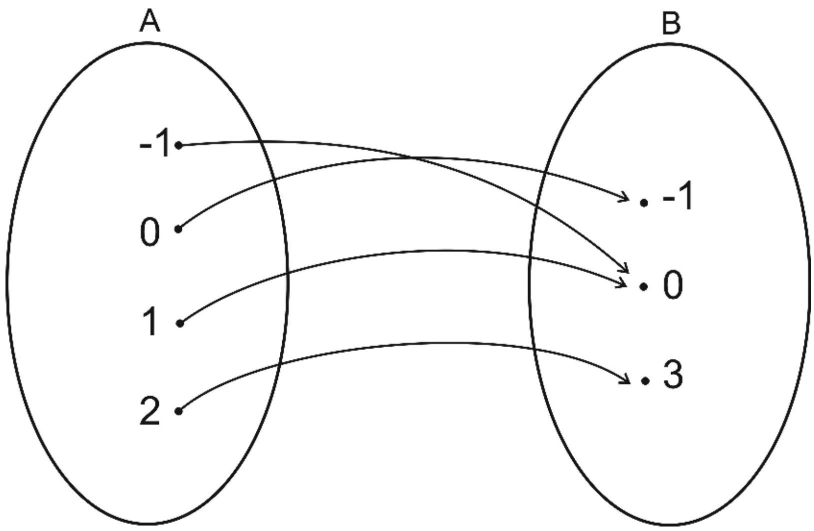


Figura 3.14: Função sobrejetora - Diagrama de Venn

sua imagem é o conjunto dos números reais.

c) *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ tal que $f(x) = x^2$ é sobrejetora. Observe que sendo $y = x^2$ podemos escrever $x = \sqrt{y}$, ou seja, para cada $y \in CD(f)$, existe um elemento $x \in D(f)$ tal que $y = x^2$. O gráfico desta função é dado na figura 3.9.*

d) *A função $f : A \to B$, definida por $f(x) = x^3$ também é sobrejetora. Analogamente ao exemplo anterior , temos que dado $y = x^3$ podemos escrever $x = \sqrt[3]{y}$, ou seja, para cada $y \in CD(f)$, existe um elemento $x \in D(f)$ ($x = \sqrt[3]{y}$) tal que $y = x^3$. A representação cartesiana desta função pode ser vista na figura 3.15.*

Note! Ao passarmos retas paralelas ao eixo $0x$, os gráficos das funções definidas em **b), c)** e **d)** do Exemplo 3.2.1 são cortados em um (veja figuras 3.16, 3.18) ou mais pontos (veja figura 3.17) por cada uma dessas retas. Identificamos uma função sobrejetora, através de sua representação cartesiana, por tal característica, isto é:
Ao passarmos retas paralelas ao eixo $0x$, cada reta

- corta o gráfico em apenas um ponto, ou

- corta o gráfico em mais de um ponto.

Em seguida apresentamos a injetividade de funções.

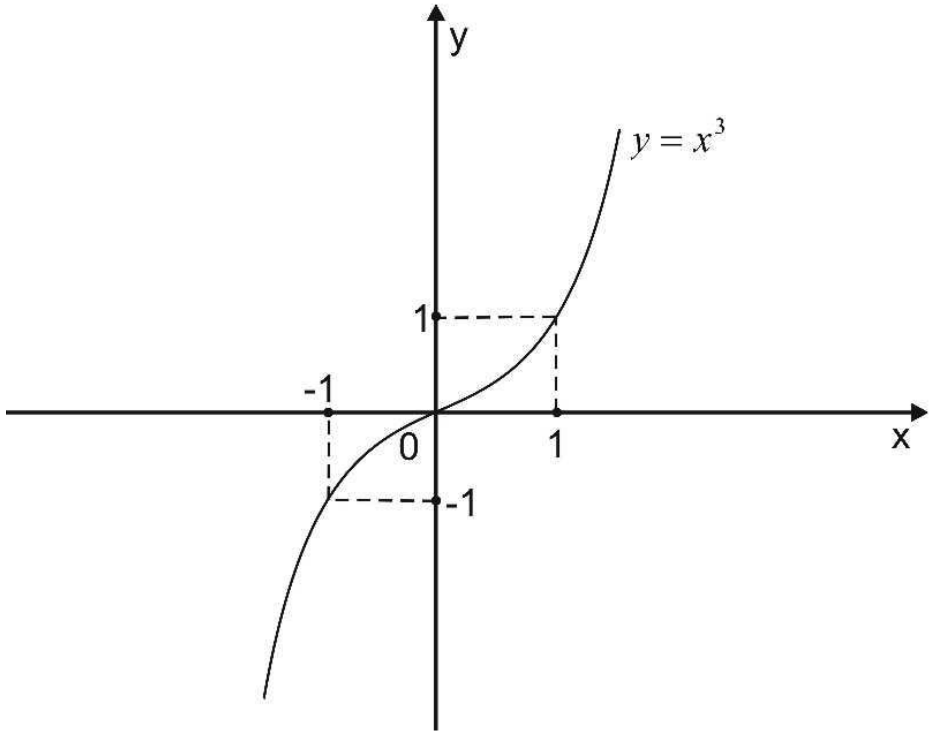


Figura 3.15: Função Sobrejetora - Representação Cartesiana

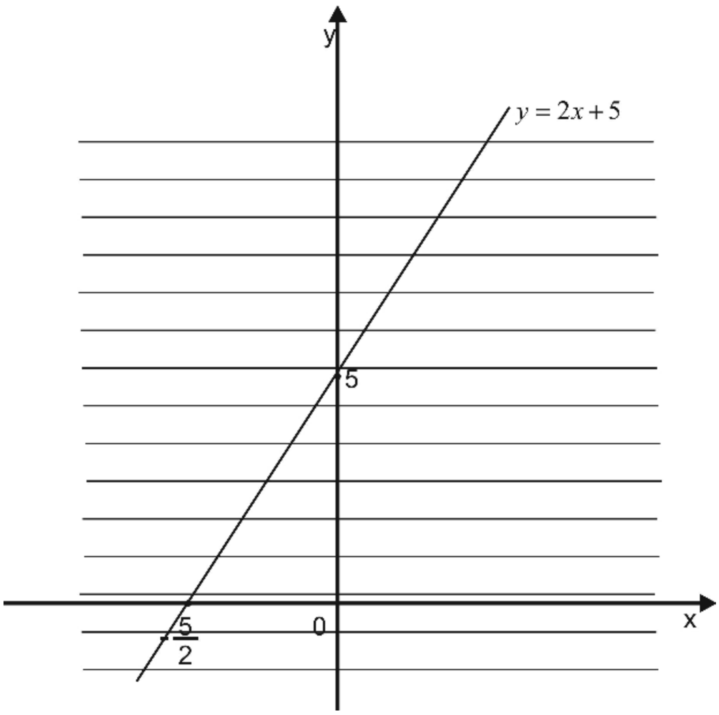


Figura 3.16: Função Sobrejetora - Representação Cartesiana

Definição 3.2.2. *Consideremos uma função* $f : A \to B$. *Dizemos que* f *é injetora (ou injetiva) quando elementos distintos do domínio de* f

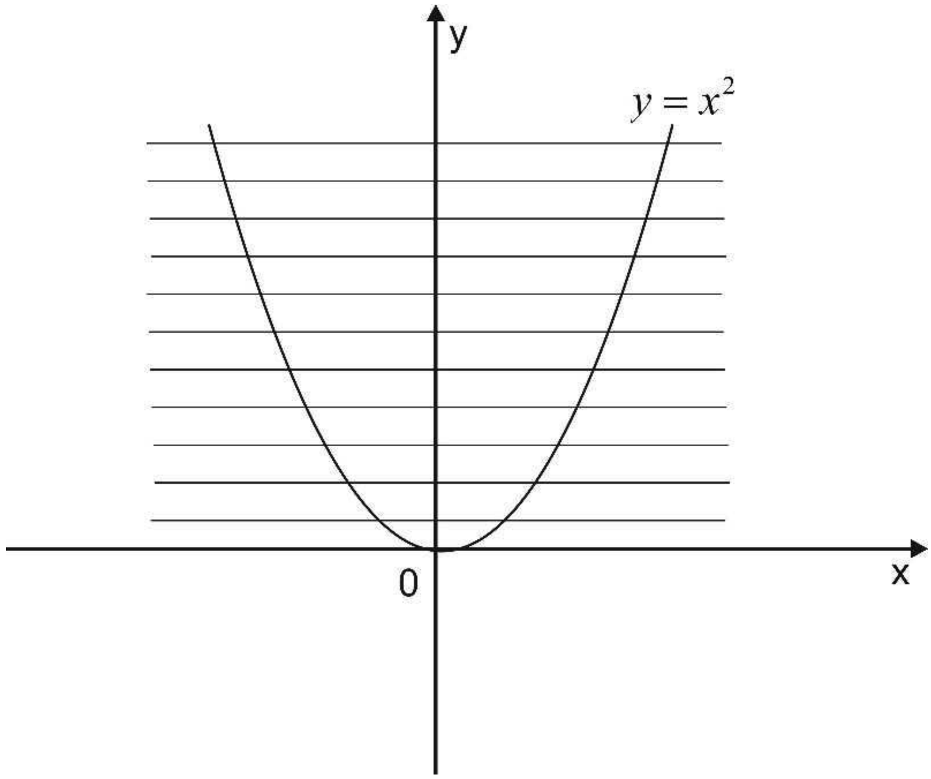


Figura 3.17: Função Sobrejetora - Representação Cartesiana

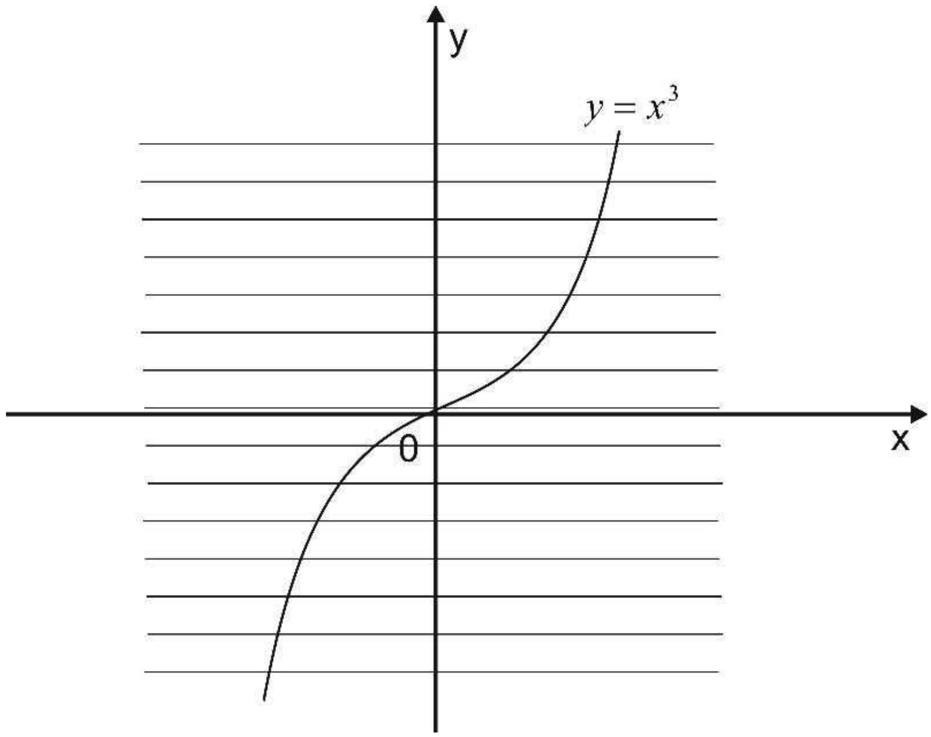


Figura 3.18: Função Sobrejetora - Representação Cartesiana

possuem imagens distintas, isto é:

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Dica! Para verificar quando uma função é injetora, algumas vezes usamos a negativa da condição acima, isto é, mostramos que imagens iguais implicam em elementos iguais no domínio: $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$.

Exemplo 3.2.2. *Vamos estudar quanto a injetividade as funções do exemplo anterior.*

a) *Observe que a função dada no item* **a)** *do exemplo anterior não é injetora, pois temos que* $f(-1) = f(1)$.

b) *A função* $f(x) = 2x + 5$ *em* $\mathbb{R}$ *é injetora pois: se* $x_1 \neq x_2$ *então* $2x_1 \neq 2x_2$*, donde* $2x_1 + 5 \neq 2x_2 + 5$*, isto é,* $f(x_1) \neq f(x_2)$.

c) *A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *dada por* $f(x) = x^2$ *não é injetora. Como em* **a)***, podemos determinar dois elementos distintos do domínio com a mesma imagem, por exemplo,* $f(-1) = f(1)$.

d) *A função* $y = x^3$ *em* $\mathbb{R}$ *é injetora. Temos que* $x_1 \neq x_2$ *implica em* $x_1^3 \neq x_2^3$.

Note! Ao passarmos retas paralelas ao eixo $0x$, os gráficos das funções injetoras dadas em $b)$ e $c)$ do Exemplo 3.2.1, apresentados respectivamente nas figuras 3B e 3C, são cortados em apenas um ponto por cada uma dessas retas.

Identificamos uma função injetora, através de sua representação cartesiana, quando ao passarmos retas paralelas ao eixo $0x$, cada reta

- corta o gráfico em apenas um ponto, ou

- não corta o gráfico.

Finalizando a seção, apresentamos o conceito de bijeção.

Definição 3.2.3. *Seja uma função* $f : A \to B$*. Dizemos que* f *é bijetora (ou bijetiva) quando* f *é injetora e sobrejetora.*

Exemplo 3.2.3.

a) *Pelo estudado nos Exemplos 3.2.1 e 3.2.2, temos que são bijetoras as funções $f(x) = 2x + 5$ e $f(x) = x^3$ em $\mathbb{R}$.*

b) *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x|$ é um exemplo de função que não é injetora nem sobrejetora. Temos que f não é injetora pois, por exemplo, 3 e -3 têm a mesma imagem. Além disso, f não é sobrejetora pois os valores da imagem de f são todos não-negativos, isto é, $Im(f) = \mathbb{R}^+$. Veja o gráfico desta função na figura 3.19.*

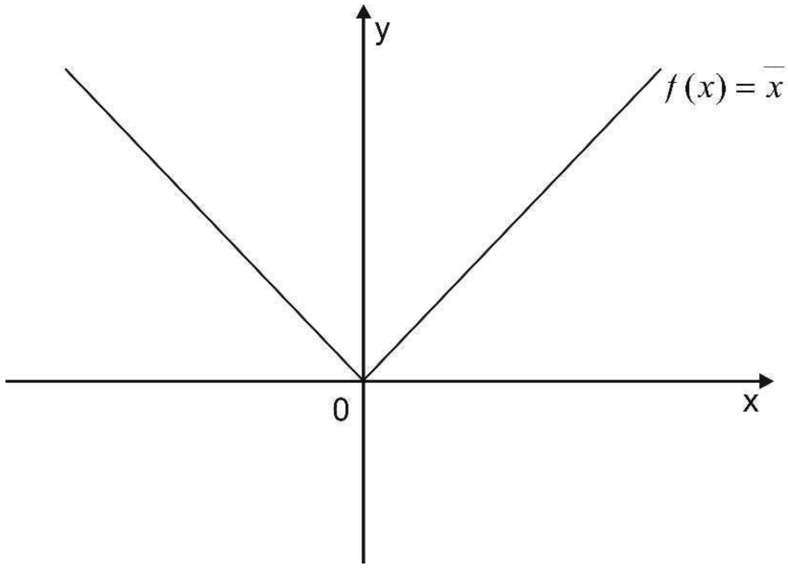


Figura 3.19: Função Modular

Observação 3.2.1. *No último exemplo apresentamos uma função que possui nenhuma das propriedades de injetividade ou sobrejetividade, e isso ocorre também com uma infinidade de funções. Assim, não podemos classificar funções dividindo-as em injetivas ou sobrejetivas.*

Pelo que vimos sobre a representação cartesiana de funções injetoras e sobrejetoras, concluímos que uma função bijetora tem seu gráfico cortado em apenas um ponto por cada reta paralela ao eixo Ox. Observe novamente as figuras 3B e 3D.

Na próxima seção estudaremos funções que possuem, necessariamente, a propriedade de bijeção.

3.3 Inversa de Funções

Apresentamos aqui a definição de função inversa, exemplos e propriedades satisfeitas, e discutimos condições sobre a existência da inversa.

Definição 3.3.1. *Seja uma função* $f : A \to B$*. Consideremos* $\bar{B} \subset B$*. Chamamos imagem inversa de* $\bar{B}$*, segundo* f*, o qual denotamos por* $f^{-1}(\bar{B})$*, o seguinte subconjunto de* A*:*

$$f^{-1}(\bar{B}) = \{x \in A \mid f(x) \in \bar{B}\}.$$

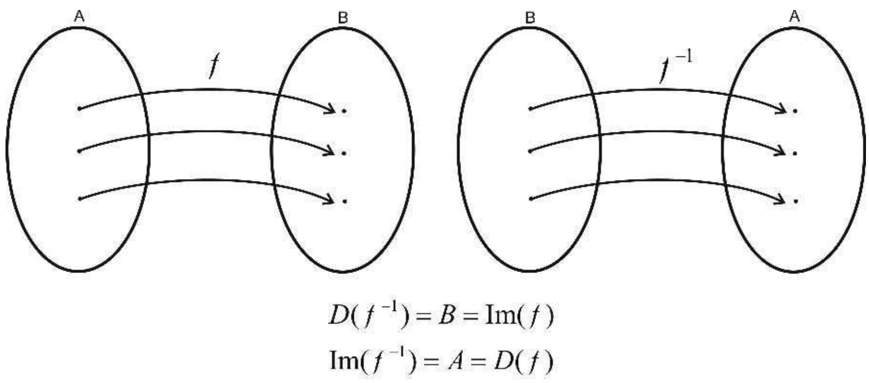


Figura 3.20: Função Inversa

Exemplo 3.3.1.

1. *Sejam* $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$*,* $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 9, 10\}$ *e* $f : A \to B$ *definida por* $y = x + 3$*.*

   a) *Consideremos* $\bar{B} = \{3, 5, 7\}$*, então*

   $$f^{-1}(\bar{B}) = \{f^{-1}(3), f^{-1}(5), f^{-1}(7)\} = \{0, 2, 4\}.$$

   b) *Tomemos agora* $\bar{B} = \{9, 10\}$*, então* $f^{-1} = \emptyset$ *pois não há imagens inversas para os elementos de* $\bar{B}$*.*
   Veja, por exemplo, se $y = 9$ *então, pela lei de definição de* f*, devemos ter* $x = 6$*, o qual não pertence ao conjunto* A*.*

2. *Seja a função $f : I\!R \to I\!R$ tal que $f(x) = 2x + 1$. Consideremos $\bar{B} = \{3, 4, 5\}$. Então a imagem inversa do conjunto $\bar{B}$ é:*

$$f^{-1}(\bar{B}) = \{1, 1.5, 2\}.$$

Sabemos que uma função f é uma relação cujo conjunto de saída coincide com o domínio e, além disso, cada elemento do domínio tem imagem única através da f. Quando determinamos a relação inversa de f, pode acontecer de esta relação não possuir tais propriedades. Veja, por exemplo:

Exemplo 3.3.2. *A função $f : I\!R \to I\!R$, tal que $f(x) = x^2$, tem imagens inversas do valor 1 dadas por 1 e -1. Logo, em $I\!R$, a relação inversa f^{-1} não é uma função (veja a figura 3.21). Mas, observe que se restringirmos o domínio para $I\!R_+$ (ou $I\!R-$), a imagem inversa de cada x^2 passa a ser única.*

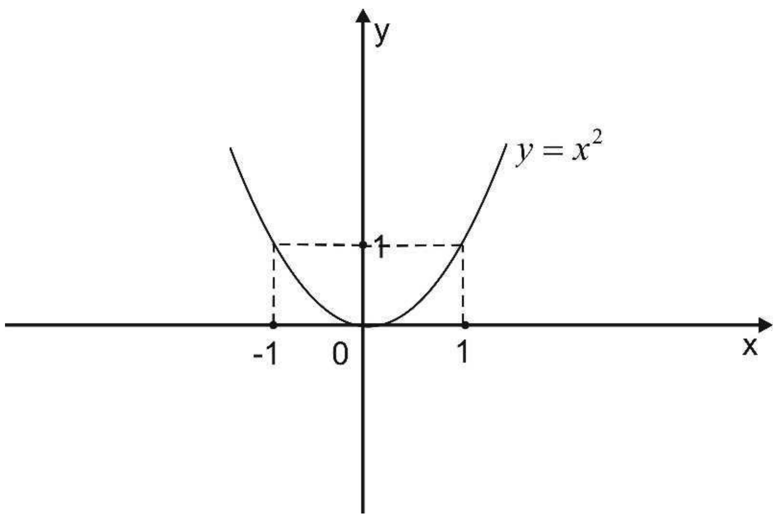


Figura 3.21: Função Quadrática

Precisamos então de uma condição para que a relação inversa seja ainda uma função. Observe que a propriedade de injetividade de f nos garante a unicidade dos elementos da imagem e, para que o conjunto de saída da inversa coincida com o seu domínio devemos ter que f seja sobrejetora. Estas duas propriedades nos garantem que f^{-1} é também uma função. Assim:

Proposição 3.3.2. *Seja uma função $f : A \to B$. A relação inversa f^{-1} é uma função de B em A se, e somente se, f é bijetora.*

Observação 3.3.1. *Quando a função inversa f^{-1} existe, dizemos que f é invertível e, além disso, temos que f^{-1} é única.*

Vimos, na seção de propriedades (Exemplo 3.2.3), dois exemplos de funções que são bijetoras. Vamos agora determinar a função inversa de cada uma daquelas funções.

Exemplo 3.3.3.

a) *A função $f(x) = 2x + 5$ tem inversa $f^{-1}(x) = \{(y, x) \mid y = 2x + 5\}$ ou ainda $f^{-1}(x) = \left\{(x, y) \mid x = \dfrac{y-5}{2}\right\}$. Veja a representação na figura 3.22.*

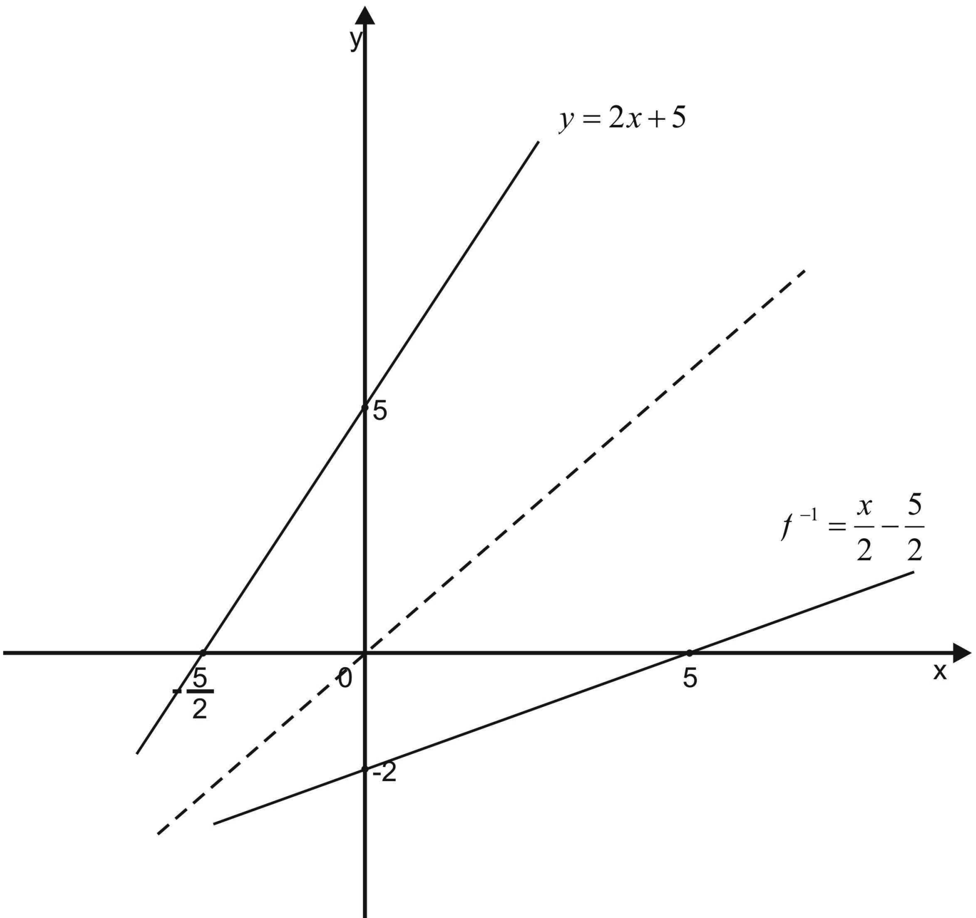


Figura 3.22: Função e sua inversa

b) *A função* $f(x) = x^3$ *tem inversa* $f^{-1}(x) = \{(y, x) \mid y = x^3\}$ *ou ainda* $f^{-1}(x) = \{(x, y) \mid x = \sqrt[3]{x}\}$*. Veja o gráfico na figura 3.23.*

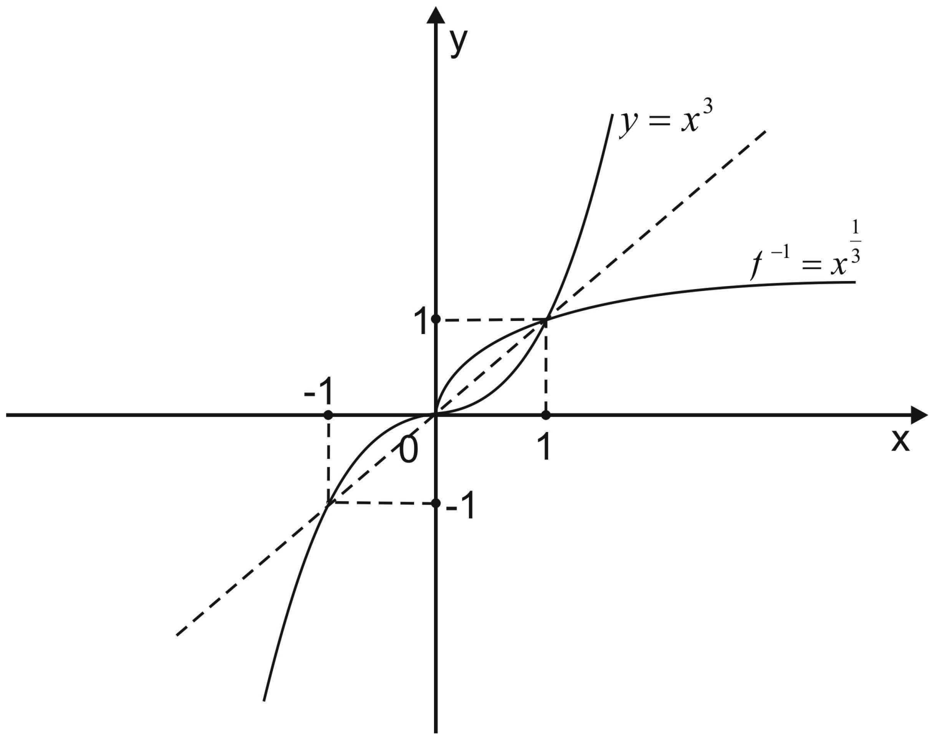


Figura 3.23: Função e sua inversa

A inversa f^{-1} mantem a propriedade bijetora da função f. Além disso, podemos relacionar f^{-1} com uma função particular conhecida como identidade. Lembramos abaixo a definição da aplicação identidade e em seguida apresentamos algumas propriedades.

Definição 3.3.3. *Chamamos de função identidade a aplicação* $I : A \to A$ *tal que* $I(x) = x$*, ou, em outras palavras, quando* $I = \{(x, x) \mid x \in A\}$*.*

A inversa f^{-1} de uma função f satisfaz:

1. $I \circ f = f$

2. $f \circ I = f$

3. $f \circ f^{-1} = I$

Na próxima seção apresentamos uma operação de funções conhecida por composição.

3.4 Composição de Funções

A composição de duas funções g e f somente está definida quando o contra-domínio de f é igual ao domínio da g. Com isto assegurado, podemos definir a composta de g e f.

Definição 3.4.1. *Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$. Definimos por composta de g e f a função $h : A \to C$, a qual denotamos por $g \circ f$ (e lemos "g composta com f"ou "g bola f"), tal que:*

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Veja a figura 3.24.

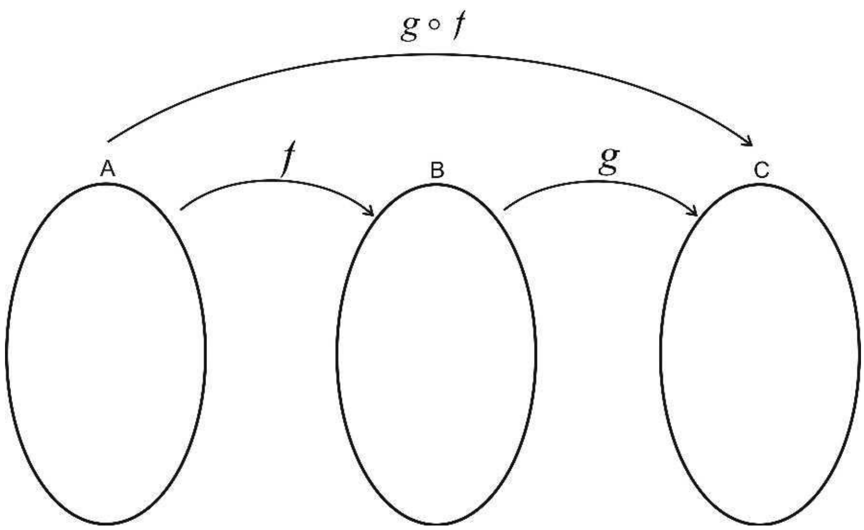


Figura 3.24: Composição de Funções

Note! Aplicamos a função $g \circ f$ da direita para a esquerda, isto é, calculamos primeiramente f e depois g.

Exemplo 3.4.1.

a) *Sejam $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = 2x - 1$. Temos que $Im(f) = \mathbb{R}^+ \subset D(g) = \mathbb{R}$ e, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} - 1$.*

b) *Sejam $f(x) = x^3$ e $g(x) = x + 2$. Neste caso, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3) = x^3 + 2$. Podemos calcular também $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 2) = (x + 2)^3$.*

Observação 3.4.1. *Se quisermos calcular $f \circ g$ no exemplo* **a)** *acima, precisaremos restringir a imagem de g para o conjunto dos números reais não-negativos, para que em seguida possamos aplicar a função f.*

Em geral, a composição não é uma operação comutativa. Por exemplo, basta vermos em **b)** acima que $f \circ g \neq g \circ f$. Porém, a associatividade é uma propriedade atendida por esta operação, isto é:

Associatividade. Dadas as funções $f : A \to B$, $g : B \to C$ e $h : C \to D$, temos:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

A composição de funções mantém as propriedades de sobrejeção e injeção, isto é, se f e g são funções que possuem as propriedades para a existência de $g \circ f$, então:

1. Se f e g são injetoras, a composta $g \circ f$ também é injetora.

2. Se f e g são sobrejetoras, a composta $g \circ f$ também é sobrejetora.

3. Se f e g são bijetoras, a composta $g \circ f$ também é bijetora.

Nas próximas e últimas seções apresentamos alguns exemplos especiais de funções.

3.5 Funções de Permutação

Apresentamos nesta subseção a definição e exemplos das chamadas funções de permutação. Temos aqui uma base para o estudo de uma estrutura algébrica particular que discutiremos no próxima unidade.

Definição 3.5.1. *Seja um conjunto A. Consideremos o conjunto de todas as bijeções em A:*

$$S_A = \{f : A \to A \mid \text{f é uma bijeção}\}.$$

As funções pertencentes à S_A são chamadas de permutações de A.

Exemplo 3.5.1.

a) *Seja $A = \{1, 2, 3\}$. A função $f = \{(1, 2), (2, 1), (3, 3)\}$ é um exemplo de função de permutação.*

b) *Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$. $g = \{(1, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$ é uma função de permutação.*

Note! As funções de permutação representam arranjos ordenados dos elementos do domínio.

Observação 3.5.1. *Quando A é um conjunto finito, digamos com n elementos, denotamos o conjunto das permutações de A por S_n. Da Análise Combinatória concluimos que S_n possui $n!$ elementos.*

As funções de permutação podem também ser representadas matricialmente, da seguinte maneira:

- os elementos do domínio são colocados na primeira linha;
- as imagens são colocadas imediatamente abaixo do elementos correspondentes do domínio.

Assim, as funções dos itens **a)** e **b)** do Exemplo 3.5.1 podem ser representadas, respectivamente, pelas matrizes

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nesta notação, não importa a ordem das colunas. Assim, por exemplo,

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

O conjunto das funções de permutação, munido da operação composição, forma um sistema algébrico importante que apresentamos no próxima unidade, o chamado Grupo das Permutações. Abaixo vemos, através de um exemplo simples, como opera a composição de duas funções de permutação de um conjunto A.

Exemplo 3.5.2. *Sejam* $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ *e* $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ *duas permutações em* S_4*. A composição* $g \circ f$ *é a permutação:*

$$g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Lembre-se! A composição preserva a bijeção. Logo, a composta de duas permutações é ainda uma permutação.

Finalizamos esta unidade com as funções de recursão.

3.6 Funções de Recursão

As funções recursivas são aquelas que podem ser resolvidas através de um processo do tipo mecânico, referindo-se a si mesma. Tais funções determinam uma classe onde um problema pode ser resolvido computacionalmente através delas. Em todas as funções recursivas, temos basicamente dois passos:

- Um passo básico, cujo resultado é conhecido; e,
- um passo recursivo em que se tenta resolver o sub-problema do problema inicial.

Exemplo 3.6.1.

a) *A seqüência de Fibonacci é definida por uma função de recursão:*

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 \\ f(2) &= 2 \\ f(n) &= f(n-2) + f(n-1), \text{ para } n > 2. \end{aligned}$$

b) *A função fatorial é uma recursiva. Temos:*

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f(n+1) &= (n+1)f(n). \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} 0! = \quad f(0) = & \qquad 1 \\ 1! = \quad f(1) = & \quad (1)f(0) = 1 \\ 2! = \quad f(2) = & \quad (2)f(1) = 2 \\ 3! = \quad f(3) = & \quad (3)f(2) = 6... \end{aligned}$$

c) *Consideremos a função recursiva:*

$$\begin{aligned} f(0) &= 3 \\ f(n+1) &= 2f(n) + 5. \end{aligned}$$

Vamos calcular $f(1), f(2), f(3)$*:*

$$\begin{aligned} f1) &= 11 \\ f(2) &= 27 \\ f(3) &= 59. \end{aligned}$$

3.7 Exercícios

1. Determine quais das seguintes relações f, de A em B, determinam funções:

   a) $f = \{(0,1),(1,3),(2,2)\}$, com $A = \{0,1,2,3\}$ e $B = \{1,2,3\}$;

   b) $f = \{(0,0),(0,1),(1,2),(2,3),(3,3)\}$ em $A = B = \{0,1,2,3\}$;

   c) $f = \{(1,0),(2,0),(3,0)\}$ com $A = B = \{0,1,2,3\}$;

   d) $f(x) = |x|$ em $A = B = \mathbb{Z}$;

   e) $f(x) = 2x - 5$ em $A = B = \mathbb{N}$;

   f) $f(x) = 2x - 7$ em $A = B = \mathbb{Z}$;

   g) $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \geq 10 \\ x, & x < 10 \end{cases}$ em $A = B = I\!R$;

   h) f, sendo A o conjunto dos alunos da turma de Matemática Discreta e B o conjunto dos números de matrícula, que associa a cada aluno o seu número de matrícula.

2. Verifique que são funções:

   a) A função teto, denotada por $f(x) = \lceil x \rceil$, que associa a cada $x \in I\!R$ o menor inteiro maior ou igual a x.

   b) A função piso, denotada por $f(x) = \lfloor x \rfloor$, que associa a cada $x \in I\!R$ o maior inteiro menor ou igual a x.

3. Sejam A um conjunto e $\bar{A}$ um subconjunto de A. Chamamos função característica de $\bar{A}$ a função $\delta_{\bar{A}} : A \to \{0,1\}$ tal que $\delta_{\bar{A}}(x) = 1$ somente quando $x \in \bar{A}$. Se $A = \{0,1,2,3,...,10\}$ e $\bar{A} = \{2,4,6,8\}$, determine os pares ordenados que compõem $\delta_{\bar{A}}$.

4. Sejam $A = \{0,1,2\}$ e $B = \{3,4,5,6\}$. Identifique quais das seguintes funções são injetoras e quais são sobrejetoras.

   a) $f = \{(0,3),(1,4),(2,5)\}$

   b) $f = \{(0,6),(1,6),(2,6)\}$

c) $f = \{(0,3),(1,4),(2,4),\}$

d) $f = \{(0,4),(1,4),(2,6))\}$

5. Encontre as funções injetoras e as sobrejetoras, dentre as funções $f : A \to B$ dadas abaixo.

a) $f(x) = x + 1$, com $A = B = I\!R$

b) $f(x) = x^2 - 4$, com $A = B = I\!R$

c) $f(x) = 9 - x^2$, com $A = B = I\!R$

d) $f(x) = |x + 1|$, com $A = I\!R$ e $B = I\!R_+$

e) $f(x) = \frac{1}{x^3}$, com $A = I\!R$ e $B = I\!R^*$

f) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ 2, & x \leq 0. \end{cases}$, com $A = B = I\!R$.

6. Encontre todas as funções injetoras de $A = \{a, b\}$ em $B = \{c, d, e\}$.

7. Encontre todas as funções sobrejetoras de $A = \{a, b, c\}$ em $B = \{d, e\}$.

8. Determine a inversa das seguintes funções:

a) $f : I\!R \to I\!R$ dada por $f(x) = x + 3$

b) $f : I\!R \to I\!R$ dada por $f(x) = \frac{3}{4}x - 1$

c) $f : I\!R \to I\!R$ dada por $f(x) = x^3 - 1$

d) $f : I\!R \to I\!R$ dada por $f(x) = \sqrt{x + 9}$

e) $f : I\!R \to I\!R$ dada por $f(x) = \sqrt[3]{1 - 2x}$

f) $f : I\!R - \{-2\} \to I\!R$ dada por $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 2}$

g) $f : I\!R_+ \to B$, $B = \{y \in I\!R \mid y \leq 9\}$, dada por $f(x) = 9 - x^2$

h) $f : I\!R_- \to B$, $B = \{y \in I\!R \mid y \geq -4\}$, dada por $f(x) = x^2 - 4$

9. Encontre as funções compostas $f \circ g$ e $g \circ f$, sendo:

a) $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x^2 - 2$

b) $f(x) = 2x$ e $g(x) = (3x - 5)^3$

c) $f(x) = 6x - 1$ e $g(x) = |x - 1|$

d) $f(x) = x^2 - 6x + 5$ e $g(x) = \frac{2}{x}$

e) $f(x) = \sqrt{x + 3}$ e $g(x) = x - 11$

f) $f(x) = \cos x$ e $g(x) = 2x + \pi$

g) $f(x) = \lfloor x \rfloor$ e $g(x) = x^2 - 1$

10. Encontre na forma matricial as permutações indicadas nos itens abaixo.

a) $f = \{(a, c), (b, a), (c, b)\}$ de $A = \{a, b, c\}$

b) $f = \{(a, a), (b, d), (c, c), (d, b)\}$ de $A = \{a, b, c, d\}$

c) $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 4)\}$ de $A = \{1, 2, 3, 4\}$

d) $f = \{(1, 3), (2, 5), (3, 4), (4, 2), (5, 1)\}$ de $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

11. Seja S_5 o conjunto de todas as permutações de $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Encontre a composição $g \circ f$, sendo $f, g \in S_5$ dadas abaixo.

a) $f = \{(1, 3), (2, 5), (3, 4), (4, 2), (5, 1)\}$ e
$g = \{(1, 1), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 2)\}$

b) $f = \{(1, 5), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (5, 4)\}$ e
$g = \{(1, 2), (2, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 1)\}$

c) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ e $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

d) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ e $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

12. Encontre $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ e $f(4)$ sendo f a função recursiva dada por:

a) $f(0) = 1$ e, para $n = 1, 2, ...$, $f(n + 1) = f(n) + 4$

b) $f(0) = 0$ e, para $n = 1, 2, ...$, $f(n + 1) = (n + 1)f(n) + 2$

c) $f(0) = 1$ e, para $n = 1, 2, ...$, $f(n + 1) = 2^{f(n)}$

d) $f(0) = -1$ e, para $n = 1, 2, ...$, $f(n+1) = f(n)^2 - 3f(n)$

e) $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ e, para $n = 2, ...$, $f(n+1) = f(n) - 2f(n-1)$

f) $f(0) = 1$, $f(1) = -2$ e, para $n = 2, ...$, $f(n+1) = \dfrac{f(n)}{f(n-1)}$

13. Seja f a função tal que $f(n)$ é a soma dos primeiros n inteiros positivos. Determine uma definição recursiva para f.

Referências Bibliográficas

[1] Matemática Essencial
http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/

[2] Brasil Escola
www.brasilescola.com/matematica.htm

[3] Algo Sobre
http://www.algosobre.com.br/matematica/funcoes.html

[4] Info Escola
http://www.infoescola.com/matematica/

[5] Somatematica
www.somatematica.com.br/emedio.php

[6] DOMINGUES, H. e IEZZI, G. Álgebra Moderna. São Paulo. Ed. Atual. 1982.

[7] GERSTING, J. L. Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação. Rio de Janeiro. LTC. 1995.

[8] IEZZI, G. et al. Fundamentos de Matemática Elementar 1: conjuntos e funções. São Paulo. Ed. Atual. 1977.

[9] MENEZES, P. B. Matemática Discreta para Computação e Informática. Porto Alegre. Ed Sagra Luzzato. 2005.

[10] ROSEM, K. H., Discrete Mathematics and its Applications. McGraw-Hill. 1991.

Unidade 4

Estruturas Algébricas

Resumo

Esta unidade é dedicada ao estudo das Estruturas Algébricas, as quais possuem vastas aplicações nas áreas da Ciência da Computação.

Nesta unidade apresentamos conceitos e importantes propriedades sobre os monóides e semigrupos, bem como sobre os grupos e subgrupos. Por fim, tratamos dos homomorfismos e isomorfismos entre grupos.

Sumário da Unidade

4. Estruturas Algébricas

Nesta unidade estudamos conjuntos munidos de alguma operação binária interna, os Sistemas e as Estruturas Algébricas. A teoria de Estruturas Algébricas é bastante ampla em Matemática. Neste texto nos voltamos aos conceitos, exemplos, propriedades e tipo de estruturas que são vastamente aplicados em Ciência da Computação e áreas correlacionadas. Vale ressaltar que as estruturas algébricas servem de base para modelos computacionais como, por exemplo, as Máquinas de Estado Finito.

Para saber mais sobre Estruturas Algébricas clique AQUI.

Iniciamos a unidade com uma seção sobre operações binárias, onde definimos uma Estrutura Algébrica. Na seções seguintes estudamos alguns tipos de especiais de estruturas e suas propriedades. Por fim, apresentamos aplicações que preservam as operações internas dadas pelas estruturas algébricas envolvidas.

4.1 Operações Binárias

O conceito de estruturas algébricas está fundamentado em elementos apresentados em unidades anteriores, tais como os conjuntos e as operações binárias.

Iniciamos esta seção lembrando a definição de operação binária. Em seguida, apresentamos algumas propriedades que tal operação pode satisfazer e, finalizamos com a definição e exemplos de Estruturas Algébricas.

Definição 4.1.1. *Chamamos de operação binária toda operação cujo* *domínio é um conjunto resultante de um produto cartesiano.*

Exemplo 4.1.1. *Como exemplo simples, podemos citar as operações de soma em* $\mathbb{N}$ *e produto em* $\mathbb{Z}$*:*

$$\begin{array}{rcl} + : \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ (a, b) & \mapsto & a + b \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rcl} \cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ (a, b) & \mapsto & a \cdot b. \end{array}$$

As operações binárias podem ainda ser classificadas em internas e fechadas, conforme a propriedade satisfeita.

Definição 4.1.2. *Seja* A *um conjunto. Dizemos que uma operação em* A *é interna quando o domínio e o contra-domínio desta operação são definidos sobre* A*. Chamamos operação fechada a qualquer operação binária definida para todo* $x \in A \times A$ *e cujo resultado pertence ao conjunto* A*.*

Exemplo 4.1.2. *As operações de soma em* $\mathbb{N}$ *e produto em* $\mathbb{Z}$ *são internas e fechadas.*

Citamos a seguir as principais propriedades que as operações binárias internas e fechadas podem satisfazer.

Seja $*$ uma operação binária em um conjunto A. Então, $*$ pode possuir uma ou mais das seguintes propriedades.

Propriedade Comutativa. Para todo $x, y \in A$, temos:

$$x * y = y * x.$$

Propriedade Associativa. Para todo $x, y, z \in A$, temos:

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

Elemento Neutro. Existe um elemento $e \in A$ tal que:

$$\forall\, x \in A, x * e = e * x = x$$

Elemento Simétrico. Para todo $x \in A$, existe $x^{-1} \in A$ tal que

$$x * x^{-1} = x^{-1} * x = e.$$

Exemplo 4.1.3.

a) *A soma em $\mathbb{N}$ é uma relação binárica comutativa, associativa, admite o elemento neutro $0 \in \mathbb{N}$, mas não possui elemento simétrico.*

b) *A soma em $\mathbb{Z}$ é uma relação binária comutativa, associativa, admite o elemento neutro $0 \in \mathbb{Z}$ e o elemento simétrico $\forall\ x \in \mathbb{Z}, -x \in \mathbb{Z}$.*

c) *A união no conjunto das partes, $\mathcal{P}(A)$, de um conjunto dado A, satisfaz as propriedades comutativa, associativa e existência do elemento neutro, que neste caso é $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$.*

Agora, apresentamos o conceito das estruturas algébricas.

Definição 4.1.3. *Chamamos de Sistema Algébrico todo sistema formado por um conjunto e uma ou mais operações binárias sobre este conjunto. Denominamos Estrutura Algébrica a todo sistema algébrico em que são consideradas também as relações entre os elementos do conjunto.*

Denotamos um sistema algébrico por $(A, f_1, f_2, ...)$, onde A é um conjunto não-vazio e f_i, $i = 1, 2, ...$ são operações em A.

Exemplo 4.1.4.

a) *O sistema algébrico $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, com a soma e o produto usuais, possui as propriedades comutativa, associativa e elemento neutro para a soma e para a multiplicação ($1 \in \mathbb{Z}$); e para a soma, existe o simétrico. Além disso, são válidas:*

Distributividade. *Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Z}$, temos:*

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c).$$

Cancelamento. *Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Z}$, temos:*

$$a + b = a + c \Longrightarrow b = c.$$

E, no caso de $a \neq 0$,

$$a \times b = a \times c \Longrightarrow b = c.$$

b) *O sistema algébrico* $(\mathbb{N}, +, \cdot)$, *com a soma e o produto usuais, possui as mesmas propriedades do sistema* $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, *com excessão da existência do simétrico para a soma.*

c) *Consideremos o sistema* $(A, *)$, *onde* $A = \{a, b\}$ *e a operação* $*$ *é definida através da tabela abaixo.*

*	a	b
a	a	b
b	b	a

- *Tal operação é comutativa pois, observe:*

$$a * b = b * a = b.$$

- *A operação* $*$ *é também associativa, pois:*

- $(a * b) * a = b * a = b$ e $a * (b * a) = a * b = b$, *donde:*

$$(a * b) * a = a * (b * a)$$

- $(a * b) * b = b * b = a$ e $a * (b * b) = a * a = a$, *isto é,*

$$(a * b) * b = a * (b * b).$$

- $(a * a) * b = a * b = b$ e $a * (a * b) = a * b = b$, *donde:*

$$(a * a) * b = a * (a * b).$$

- $(b * b) * a = a * a$ e $b * (b * a) = b * b = a$, *logo:*

$$(b * b) * a = b * (b * a).$$

- *O elemento* $a \in A$ *é o neutro desta operação e, não existe o elemento simétrico.*

Podemos perceber com estes exemplos que é possível obter várias estruturas algébricas com propriedades semelhantes. Sob este ponto de vista, torna-se interessante o estudo de classes de estruturas que satisfazem as mesmas propriedades, ao invés de estudá-las isoladamente.

Apresentamos nas seções seguintes importantes classes de estruturas algébricas. Nos ateremos a aquelas com apenas uma operação interna e iniciamos este estudo com o conceito e algumas propriedades dos monóides e semigrupos.

4.2 Monóides e Semigrupos

Nesta seção apresentamos conceitos e exemplos de monóides e semigrupos, iniciando com a definição do tipo mais simples de sistema algébrico conhecido.

Definição 4.2.1. *Sejam $A = \{e\}$ um conjunto constituído de apenas um elemento e $*$ a única operação binária em S. Chamamos $(A, *)$ de Magma e temos que este é o tipo de estrutura algébrica mais simples.*

As estruturas algébricas $(A, *)$, $A \neq \emptyset$, cuja operação binária $*$ satisfaz a propriedade associativa, determinam uma classe especial, como vemos abaixo.

Definição 4.2.2. *Seja A um conjunto não vazio e $*$ uma operação binária em A. Chamamos $(A, *)$ de semigrupo quando a operação $*$ é associativa, isto é, satisfaz para quaisquer $a, b, c \in A$:*

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

Quando um semigrupo possui o seu elemento neutro, ele constitui outra importante classe de estruturas algébricas, o qual definimos abaixo.

Definição 4.2.3. *Seja $(A, *)$ um semigrupo. Dizemos que $(A, *)$ é um monóide se possuir um elemento neutro com relação a operação $*$. Em outras palavras, $(A, *)$ é um monóide se satisfaz:*

i) *Para quaisquer $a, b, c \in A$, temos $(a * b) * c = a * (b * c)$;*

ii) *Existe um elemento* $e \in A$ *tal que para todo* $a \in A$, *temos* $e * a = a * e = a$.

Exemplo 4.2.1.

a) *São monóides as seguintes estruturas algébricas:*

$$(\mathbb{N}, +), (\mathbb{Z}, +) \text{ e } (I\!R, +),$$

onde $+$ *representa a operação soma usual de cada conjunto.*

b) *São também monóides,*

$$(\mathbb{N}, \cdot), (\mathbb{Z}, \cdot) \text{ e } (I\!R, \cdot),$$

onde $\cdot$ *representa a operação multiplicação usual de cada conjunto.*

c) *Seja* $M_2(\mathbb{Z})$ *o conjunto das matrizes quadradas de ordem* 2 *com entradas em* $\mathbb{Z}$. *A estrutura* $(M_2(\mathbb{Z}), \cdot)$, *onde* $\cdot$ *representa a multiplicação de matrizes, é um monóide. O elemento neutro é a matriz identidade:* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d) *Seja* $A = \{a \in \mathbb{N} \mid a \text{ é ímpar}\}$. *Consideremos* $+$ *e* $\cdot$ *as operações usuais de soma e produto, respectivamente, em* $\mathbb{N}$. *Então:*

- *O sistema* $(A, +)$ *não é uma estrutura algébrica. Observe que a operação soma não é fechada, por exemplo,* $1+3 = 4$, *isto é, somamos dois ímpares e o resultado não é um ímpar.*

- *O sistema* $(A, \cdot)$ *é um monóide. Lembremos que o elemento neutro da multiplicação é* 1.

e) *Consideremos o conjunto* $A = \{a \in \mathbb{N}^* \mid a \text{ é par}\}$ *e a operação soma usual em* $\mathbb{N}$. *A estrutura* $(A, +)$ *é um semigrupo (e não é um monóide: veja que* $0 \notin A$*).*

Estudamos a seguir semigrupos e monóides cuja operação binária interna é comutativa.

Definição 4.2.4. *Seja $(A,*)$ um semigrupo (ou um monóide). Dizemos que $(A,*)$ é um semigrupo (ou monóide) comutativo ou abeliano se a operação $*$ satisfaz a propriedade comutativa, isto é, para quaisquer $a,b \in A$ temos:*

$$a * b = b * a.$$

Exemplo 4.2.2. *Estudamos, quanto a propriedade comutativa, os sistemas apresentados no Exemplo 4.2.1.*

a) *São abelianos os monóides:*

$$(\mathbb{N},+), (\mathbb{Z},+) \text{ e } (I\!R,+),$$

onde $+$ representa a operação soma usual de cada conjunto.

b) *São também monóides abelianos:*

$$(\mathbb{N},\cdot), (\mathbb{Z},\cdot) \text{ e } (I\!R,\cdot),$$

onde $\cdot$ representa a operação produto usual de cada conjunto.

c) *A estrutura $(M_2(\mathbb{Z}),\cdot)$, onde $\cdot$ representa a multiplicação usual de matrizes, é um monóide não comutativo. Por exemplo, sejam as matrizes:*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos que $P \cdot Q = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ *e* $Q \cdot P = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

d) *Sejam $A = \{a \in \mathbb{N} \mid a$ é ímpar$\}$ e $\cdot$ o produto usual em $\mathbb{N}$. Então, $(A,\cdot)$ é um monóide abeliano.*

e) *Sejam $A = \{a \in \mathbb{N}^* \mid a$ é par$\}$ e a adição usual em $\mathbb{N}$. Então $(A,+)$ é um semigrupo abeliano.*

Conhecidos os monóides e os semigrupos, apresentamos na próxima seção alguns conceitos e resultados básicos de uma extensa teoria estudada em Álgebra, os grupos.

4.3 Grupos e Subgrupos

Os Grupos são estruturas algébricas de destaque no estudo de Álgebra. No contexto deste livro, nos restringimos aos conceitos e fatos básicos que envolvem estas estruturas, e servem de base para as aplicações em sua área de estudo.

Definição 4.3.1. *Seja $(A, *)$ um monóide. Dizemos que $(A, *)$ é um grupo quando existe o elemento simétrico com respeito a operação $*$. Em outras palavras, uma estrutura algébrica $(A, *)$ é um grupo quando satisfaz as seguintes propriedades:*

i) *Para todo $a, b, c \in A$, temos $a * (b * c) = (a * b) * c$;*

ii) *Existe $e \in A$ tal que para qualquer $a \in A$, temos $a * e = e * a = a$; e,*

iii) *Para todo $a \in A$, existe o elemento inverso (ou simétrico) $a^{-1} \in A$ tal que $a * a^{-1} = a * a^{-1} = e$.*

Quando, além destas propriedades, $*$ é uma operação comutativa, chamamos $(A, *)$ de grupo abeliano.

Exemplo 4.3.1.

a) *$(\mathbb{N}, +)$ e $(\mathbb{N}, \cdot)$, com $+$ e $\cdot$ as operações usuais de soma e produto, são monóides que não são grupos. Observe que tais estruturas não admitem o elemento inverso (nem quando consideramos a soma, tampouco quando tomamos o produto).*

b) *$(\mathbb{Z}, +)$, sendo $+$ a soma usual, é um grupo, pois já vimos que para todo $x \in \mathbb{Z}$ existe o simétrico (inverso da soma) $-x \in \mathbb{Z}$; além disso, por satisfazer a propriedade comutativa, $(\mathbb{Z}, +)$ é um grupo abeliano. Porém, o monóide $(\mathbb{Z}, \cdot)$, sendo $\cdot$ o produto usual, não é um grupo, por não admitir o inverso em relação ao produto.*

c) *$(\mathbb{R}, +)$, com a soma usual, é um grupo abeliano, pois para cada $x \in \mathbb{R}$, existe o inverso relativo à soma, $-x \in \mathbb{R}$, e a adição é comutativa. Além disso, se tomarmos o conjunto dos números* *reais sem o zero, também existe o inverso multiplicativo $x^{-1} = \frac{1}{x}$, donde temos que $(I\!R^*, \cdot)$ é um grupo abeliano.*

d) *Seja $m > 1$ e consideremos $\mathbb{Z}_m = \{[0], [1], [2], ..., [m-1]\}$. Em $\mathbb{Z}_m$, definimos a operação soma por:*

$$[a] + [b] = [a + b], \ \ \forall\ [a], [b] \in \mathbb{Z}_m.$$

Vejamos, para o caso particular $\mathbb{Z}_3$, a tábua da soma.

$+$	$[0]$	$[1]$	$[2]$
$[0]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$
$[1]$	$[1]$	$[2]$	$[0]$
$[2]$	$[2]$	$[0]$	$[1]$

A operação soma em $\mathbb{Z}_3$ possui as propriedades associativa, comutativa, $[0]$ é o elemento neutro, e para $[a] \in \mathbb{Z}_m$, sempre existe o inverso aditivo $[b] \in \mathbb{Z}_m$ tal que $[a] + [b] = [0]$. Por exemplo, em $\mathbb{Z}_3$ temos que $[1]$ e $[2]$ são inversos aditivos (veja tábua acima). Assim:
O sistema $(\mathbb{Z}_m, +)$ é um grupo abeliano, o qual chamamos de grupo aditivo das classes de restos módulo m.

e) *Seja agora $\mathbb{Z}_m$, $m > 1$, munido da operação produto $\cdot$ definida por:*

$$[a] \cdot [b] = [a \cdot b].$$

Em geral, $(\mathbb{Z}_m, \cdot)$ não é um grupo, pois não é possível garantir a existência do elemento inverso para qualquer $\mathbb{Z}_m,\ m > 1$. Por exemplo, na tábua multiplicativa de $\mathbb{Z}_4$, o elemento $[2]$ não possui seu inverso:

$$[2] \cdot [0] = [0], \qquad [2] \cdot [1] = [2],$$

$$[2] \cdot [2] = [0], \qquad [2] \cdot [3] = [2].$$

Temos que $(\mathbb{Z}_m, \cdot)$ é um grupo se, e somente se, m ($m > 1$) é um primo. Assim, no caso $m > 1$ primo, $(\mathbb{Z}_m, \cdot)$ é um grupo *(abeliano), o qual chamamos grupo multiplicativo das classes de resto módulo m.*

f) $(M_2(\mathbb{Z}), +)$*, sendo* $+$ *a soma usual de matrizes, é um grupo abeliano. Porém, o monóide* $(M_2(\mathbb{Z}), \cdot)$*, onde* $\cdot$ *representa a multiplicação usual de matrizes, não é um grupo pois nem toda matriz em* $M_2(\mathbb{Z})$ *admite inversa, por exemplo,* $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ *não é invertível (observe que* $\det N = 0$*).*

g) *Sejam um conjunto* A *e* S_A *o conjunto de todas as bijeções de* A*,* $f : A \to A$ *(permutações de* A*, conforme vimos na Unidade* 3*). Consideremos* $\circ$ *a operação composição de funções e o sistema algébrico* $(S_A, \circ)$*. Temos:*

- *A composição preserva a bijeção (logo, é uma operação fechada).*
- *A composição é uma operação associativa (como citamos na unidade anterior).*
- *A função identidade* $I : A \to A$ *é uma bijeção, e é o elemento neutro de* $(S_A, \circ)$*.*
- f^{-1} *existe e também é uma bijeção; e mais,* f^{-1} *é o elemento simétrico em relação à composição.*

Assim, $(S_A, \circ)$ *é um grupo, o qual chamamos Grupo das Permutações em* A*. Observe que tal grupo não é abeliano (pois em geral a composição não é comutativa).*

Apresentamos a seguir o primeiro fato básico relativo à teoria de grupos: a unicidade do elemento neutro.

Teorema 4.3.2. *Em qualquer grupo ou monóide* $(G, *)$*, o elemento neutro* $e \in G$ *é único.*

$\square$

Temos também garantida a unicidade do elemento simétrico para cada elemento de um grupo, isto é:

Teorema 4.3.3. *Para qualquer grupo* $(G, *)$*, existe único simétrico* $x^{-1} \in G$ *para cada elemento de* $x \in G$*. Além disso, vale que*

$$(x^{-1})^{-1} = x.$$

□

Quando temos um grupo $(G, *)$, se $x, y \in G$ então $z = x \cdot y \in G$ e os inversos, x^{-1}, y^{-1} e z^{-1} também pertencem a G. A seguir, veremos como tais inversos se relacionam.

Teorema 4.3.4. *Sejam* $(G, *)$ *um grupo e* $x, y \in G$*. Então:*

$$(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}.$$

□

Vimos no Exemplo 4.1.4 que o sistema $(\mathbb{Z}, +)$, o qual é um grupo, possui a propriedade do cancelamento. Neste caso, como $(\mathbb{Z}, +)$ é um grupo abeliano, isto é, comutativo, é imediato pensar na lei de cancelamento, sem se preocupar com a ordem, à direita ou à esquerda. Porém, veremos a seguir que o cancelamento (à direita e à esquerda) é uma propriedade comum a qualquer grupo.

Teorema 4.3.5. *Todo grupo* $(G, *)$ *satisfaz às leis do cancelamento à direita e à esquerda.*

□

A seguir enunciamos o teorema que garante a solução de equações lineares em um grupo.

Teorema 4.3.6. *Sejam* $(G, *)$ *um grupo e* $a, b \in G$*. Então, as equações*

$$a * x = b \quad \text{e} \quad x * a = b$$

possuem soluções únicas em G*.*

□

Exemplo 4.3.2. *Consideremos o grupo* $(\mathbb{Z}, +)$*. A equação* $3 + x = 15$ *possui única solução em* $\mathbb{Z}$*: Somando a ambos os membros da equação o simétrico de* 3*, obtemos* $(-3) + 3 + x = (-3) + 15$*, donde* $x = 15 - 3$*, isto é,* $x = 12 \in \mathbb{Z}$ *é a única solução da equação.*

Quando $(G, *)$ é um grupo onde G é um conjunto finito com n elementos, dizemos que o grupo $(G, *)$ tem ordem n, o qual denotamos por $|G| = n$. Quando G é infinito, dizemos que o grupo é de ordem infinita.

Finalizando esta seção, apresentamos conceitos e fatos básicos sobre os subgrupos.

Definição 4.3.7. *Sejam $(G, *)$ um grupo e $A \subset G$. Dizemos que $(A, *)$ é um subgrupo de $(G, *)$ se $(A, *)$ é um grupo.*

Observação 4.3.1. *Quando nos referimos ao subgrupo $(A, *)$, temos que a operação $*$ é restrita a $(A, *)$.*

Todo grupo $(G, *)$ admite ao menos dois subgrupos, o qual chamamos de subgrupos triviais, a saber:

- o próprio $(G, *)$ e,

- o conjunto costituído apenas pelo elemento neutro $e \in G$: $(e, *)$.

Chamamos os subgrupos triviais de um grupo $(G, *)$ de subgrupos impróprios. Quaisquer outros subgrupos diferentes dos triviais chamamos subgrupos próprios de $(G, *)$.
A seguir apresentamos um resultado que nos dá uma condição necessária e suficiente para um sistema algébrico ser subgrupo de um grupo dado.

Proposição 4.3.8. *Seja $(G, *)$ um grupo, para que $(A, *)$, $A \subset G$, seja um subgrupo de G é necessário e suficiente que*

$$\forall \ a, b \in A \Longrightarrow a * b' \in A,$$

onde b' é o simétrico (ou inverso) de b.

$\square$

Exemplo 4.3.3.

a) $(\mathbb{Z}, +)$ *é subgrupo de* $(I\!R, +)$*, pois dados* $a, b \in \mathbb{Z}$*, e* $-b \in \mathbb{Z}$ *o simétrico de* b*, temos que:*

$$a + (-b) = a - b \in \mathbb{Z}.$$

b) $(I\!R^*_+, \cdot)$ *é um subgrupo de* $(I\!R^*, \cdot)$*, pois dados* $a, b \in I\!R^*_+$*, temos que* $\frac{1}{b} \in I\!R^*_+$ *e, além disso:*

$$a \cdot \frac{1}{b} \in I\!R^*_+.$$

c) *Seja* $A = \{[0], [2], [4], [6]\}$ *um subconjunto de* $\mathbb{Z}_8$*. Temos que* $(A, +)$ *é um subgrupo de* $(\mathbb{Z}_8, +)$*. Veja tábua de* $(A, +)$ *a seguir:*

$+$	$[0]$	$[2]$	$[4]$	$[6]$
$[0]$	$[0]$	$[2]$	$[4]$	$[6]$
$[2]$	$[2]$	$[4]$	$[6]$	$[0]$
$[4]$	$[4]$	$[6]$	$[0]$	$[2]$
$[6]$	$[6]$	$[0]$	$[2]$	$[4]$

O teorema abaixo nos determina todos os subgrupos de $(\mathbb{Z}, +)$.

Teorema 4.3.9. *Os únicos subgrupos de* $(\mathbb{Z}, +)$ *são os grupos* $(n\mathbb{Z}, +)$*, onde* $n \in \mathbb{N}$ *e* $n\mathbb{Z} = \{nz \mid z \in \mathbb{Z}\}$*.*

$\square$

Finalizamos esta seção com um resultado sobre a ordem de subgrupos de grupos finitos, conhecido como Teorema de Lagrange.

Teorema 4.3.10. *A ordem de um subgrupo de um grupo finito divide a ordem do grupo.*

$\square$

Exemplo 4.3.4.

a) *Consideremos o grupo* $(\mathbb{Z}_8, +)$*. Pelo Teorema de Lagrange, os possíveis subgrupos próprios de* $(\mathbb{Z}_8, +)$ *são aqueles de ordem* 2 *e* 4*.*

b) *Seja $(G, *)$ com $|G| = 16$. Então, este grupo não possui subgrupos de ordem 7, pois 7 não divide 16.*

Note! O teorema de Lagrange é uma importante ferramenta na determinação de subgrupos, pois limita as possibilidades de subgrupos de um grupo finito apenas conhecendo-se a ordem do grupo. Como vimos no exemplo acima, ao invés de buscarmos subgrupos dentre os sistemas de ordem 2 a 7, nos limitamos apenas a aqueles de ordem 2 e 4.

Cuidado! O Teorema de Lagrange nos afirma que somente encontraremos subgrupos de um grupo finito $(G, *)$ dentre aqueles cuja ordem divide $|G|$, porém, isto não significa que todos os sistemas $(A, *)$, $A \subset G$ com m elementos tal que m divide $|G|$, sejam grupos.

4.4 Homomorfismos e Isomofismos

A partir de agora, tratamos de aplicações entre conjuntos que, munidos de uma determinada operação, determinam grupos. Em particular, nos interessa as aplicações que preservam as operações dos grupos. Isto é, dados $(G, *)$ e $(J, \circ)$ grupos, estudamos as aplicações $f : G \to J$ tais que

$$f(a * b) = f(a) \circ f(b), \ \ \forall\, a, b \in G.$$

Iniciamos esta seção com a definição e exemplos de homomorfismos entre grupos. Em seguida, finalizando a unidade, apresentamos a definição, exemplos e uma interessante propriedade satisfeita pelos isomorfismos entre grupos.

Definição 4.4.1. *Sejam os grupos $(G, *)$ e $(J, \circ)$. Dizemos que uma aplicação $f : G \to J$ é um homomorfismo de G em J quando para todo $x, y \in G$, temos:*

$$f(x * y) = f(x) \circ f(y).$$

Definição 4.4.2. *Sejam os grupos $(G, *)$ e $(J, \circ)$ e, $f : G \to J$ um homomorfismo de G em J.*

- *Se f for injetora, chamamos f de monomorfismo.*
- *Quando $G = J$, chamamos f de endomorfismo.*

Exemplo 4.4.1.

a) *Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = 0$. Tal função é um homomorfismo do grupo $(\mathbb{Z}, +)$ nele mesmo, isto é, f é um endomorfismo. Veja:*

$$f(x + y) = \ 0 \ = \ 0 + 0 \ = f(x) + f(y).$$

b) *Seja $f : \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \ln x$. A função f é um homomorfismo de $(\mathbb{R}^*_+, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$, e como f é injetora, temos que f é um monomorfismo. Veja:*

- *Para todo $x, y \in \mathbb{R}^*_+$, temos:*

$$f(x \cdot y) = \ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y = f(x) + f(y).$$

Logo, f é um homomorfismo.

- *Se $f(x) = f(y)$ então $\ln x = \ln y$, donde $e^{\ln x} = e^{\ln y}$. Logo, $x = y$. Assim, temos que f é injetora.*

c) *A função $f : \mathbb{Z} \to n\mathbb{Z}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ dada por $f(x) = nx$ é um monomorfismo de $(\mathbb{Z}, +)$ em $(n\mathbb{Z}, +)$. Veja:*

- *Para todo $x, y \in \mathbb{Z}$, temos:*

$$f(x + y) = n(x + y) = nx + ny = f(x) + f(y).$$

Logo, f é um homomorfismo.

- *Além disso,*

$$x \neq y \quad \Longrightarrow \quad nx \neq ny \quad \Longrightarrow f(x) \neq f(y).$$

Logo, f é injetora.

Apresentamos abaixo algumas propriedades dos homomorfismos.

Proposição 4.4.3. *Sejam os grupos* $(G, *)$ *e* $(J, \circ)$*, e* $f : G \to J$ *um homomorfismo de* G *em* J*. Então:*

i) *Se* e_G *é o elemento neutro de* G *e* e_J *representa o elemento neutro de* J*, então:*

$$f(e_G) = e_J.$$

ii) *Se* $(H, *)$ *é um subgrupo de* G *então* $(f(H), \circ)$ *é um subgrupo de* J*.*

$\square$

Finalizamos esta seção apresentado a definição, exemplos e propriedades de uma importante classe de homomorfismos: os isomorfismos.

Definição 4.4.4. *Sejam os grupos* $(G, *)$ *e* $(J, \circ)$*. Dizemos que uma aplicação* $f : G \to J$*, de* G *em* J*, é um isomorfismo quando:*

i) f *é um homomorfismo e,*

ii) f *é bijetora.*

Observação 4.4.1. *Quando na definição acima temos* $G = J$*, dizemos que* f *é automorfismo.*

Note! Os resultados vistos para homomorfismos são válidos para isomorfismos.

Identificamos a seguir quais dos homomorfismos do Exemplo 4.4.1 são isomorfismos.

Exemplo 4.4.2.

a) *O homomorfismo* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$*, tal que* $f(x) = 0$*, não é um isomorfismo de* $(\mathbb{Z}, +)$ *nele mesmo. Observe que* f *não é bijetora, pois não é injetora:*

- *Observe que* $f(x) = f(y) = 0$ *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{Z}$ *com* $x \neq y$*.*

b) *O monomorfismo $f : I\!R_+^* \to I\!R$ dado por $f(x) = \text{ln}x$ é um isomorfismo de $(I\!R_+^*, \cdot) \to (I\!R, +)$. Vejamos que f é sobrejetora:*

- *Seja $y \in I\!R$, temos que $e^y \in I\!R^+$ e $f(e^y) = \ln(e^y) = y$. Portanto, para cada $y \in I\!R$, existe $x = e^y$ tal que $f(x) = y$.*

Assim, como já sabemos que f é injetora, temos que f é bijetora e, portanto, um isomorfismo.

c) *Para $n \in \mathbb{N}$, o homomorfismo $f : \mathbb{Z} \to n\mathbb{Z}$ dado por $f(x) = nx$ é um isomorfismo de $(\mathbb{Z}, +)$ em $(\mathbb{Z}_n, +)$. Vimos anteriormente que f é injetora. Resta-nos mostrar que f é sobrejetora:*

- *Seja $y \in n\mathbb{Z}$, então existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $y = nx = f(x)$. Logo, f é sobrejetora.*

No resultado abaixo, apresentamos como são as tábuas de grupos isomorfos aos grupos de ordem 2, 3 e 4.

Teorema 4.4.5. i) *Seja $(G, *)$, $G = \{e, a\}$, um grupo cuja tábua é dada por:*

$*$	e	a
e	e	a
a	a	e

Todo grupo de ordem 2 é isomorfo a $(G, *)$.

ii) *Seja $(G, *)$, $G = \{e, a, b\}$, um grupo cuja tábua é dada por:*

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Todo grupo de ordem 3 é isomorfo a $(G, *)$.

iii) *Seja $(G, *)$, $G = \{e, a, b, c\}$, um grupo que atende a uma das seguintes tábuas:*

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

ou

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Todo grupo de ordem 4 é isomorfo a $(G, *)$.

$\square$

Note! O teorema acima nos dá uma maneira de identificar grupos isomorfos a grupos de ordem $2, 3, 4$ através das tábuas das operações do sistema algébrico em questão.

Para qualquer grupo $(G, *)$, é sempre possível obter um grupo formado por bijeções e munido da operação de composição que, do ponto de vista algébrico, comporta-se como $(G, *)$. Este interessante resultado, conhecido como Teorema de Cayley, é enunciado a seguir.

Teorema 4.4.6. *Todo grupo é isomorfo a um grupo de permutação.*

$\square$

A seguir, um exemplo sobre o Teorema de Cayley.

Exemplo 4.4.3. *O grupo multiplicativo $(G, \cdot)$, $G = \{1, -1\}$, é isomorfo ao grupo das permutações $(S_2, +)$, onde*

$$S_2 = \left\{ e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Observemos as tábuas de ambos os grupos:

$\cdot$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

e

$\cdot$	e	f
e	e	f
f	f	e

.

Se tomamos $e = 1$ e $f = -1$, temos uma mesma tábua.

4.5 Exercícios

1. Sejam $A = \{a, b, c\}$ e $* : A \times A \to A$ uma operação interna em A dada pela tábua

$*$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	c	a
c	a	a	b

.

   Verifique se $*$ satisfaz as propriedades: fechada, associativa, comutativa, existência do elemento neutro e do elemento simétrico.

2. Seja $*$ uma operação binária no conjunto dado. Verifique quais das seguintes operações atendem as propriedades: fechada, associativa, comutativa, existência do elemento neutro e do elemento simétrico.

   a) Em $\mathbb{Z}$, $x * y = 2x + 3y + 1$.

   b) Em $\mathbb{N}$, $x * y = x^4 + y^2$.

   c) Em $\mathbb{Q}$, $x * y = \frac{x+y}{2}$.

   d) Em $\mathbb{R}^*$, $x * y = \dfrac{1}{x+y}$.

3. Justifique por que $(\mathbb{Z}, -)$, onde $-$ denota a subtração usual de inteiros, não é um semigrupo.

4. Seja $A \neq \emptyset$. Verifique se são grupos os seguintes sistemas

   a) $(\mathcal{P}(A), \cap)$.

   b) $(\mathcal{P}(A), \cup)$.

5. Seja Σ um alfabeto e considere o sistema $(\Sigma^*, conc)$, onde a operação $conc$ representa a concatenação

$$conc : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*.$$

   Identifique em quais dos seguintes casos temos monóides ou semigrupos e, quais deles são abelianos.

a) Σ é um conjunto vazio;

b) Σ é um conjunto unitário;

c) Σ é tal que $|\Sigma| \geq 2$.

6. Identifique dentre os sistemas abaixo, quais são monóides, semi-grupos, grupos ou nenhum deles.

a) $(\mathbb{N}, *)$, onde $x * y = 2x + y$.

b) $(\mathbb{Z}, *)$, onde $x * y = (x - y)^2$.

c) $(A, \cdot)$, onde $A = \{1, -1, i, -i\}$ e $\cdot$ representa o produto usual.

d) $(I\!R, *)$, onde $x * y = max\{x, y\}$.

e) $(I\!R^*, |)$, onde $|$ representa a divisão usual.

f) $(M_2(\mathbb{Z}), +)$, sendo $+$ a soma usual.

g) $(M_2(\mathbb{Z}), \cdot)$, sendo $\cdot$ a multiplicação usual.

h) $(P_5(I\!R), +)$, sendo $+$ a soma usual em P_5, conjunto dos polinômios de grau ≤ 5.

7. Determine todos os subgrupos de $(\mathbb{Z}_{10}, +)$.

8. Verifique se as aplicações $f : G \to J$ dadas abaixo são homomorfismos entre os grupos $(G, *)$ e $(J, \diamond)$ citados.

	$f : G \to J$	$(G, *)$	$(J, \diamond)$
a)	$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$; $f(x) = 1$	$(\mathbb{Z}, +)$	$(\mathbb{Z}, +)$
b)	$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$; $f(x) = 2x$	$(\mathbb{Z}, +)$	$(\mathbb{Z}, +)$
c)	$f : I\!R \to I\!R$; $f(x) = \|x\|$	$(I\!R, +)$	$(I\!R, +)$
d)	$f : I\!R^* \to I\!R^*$; $f(x) = \|x\|$	$(I\!R^*, \cdot)$	$(I\!R^*, \cdot)$
e)	$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$; $f(x) = (0, x)$	$(\mathbb{Z}, +)$	$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$
f)	$f : \mathbb{Z} \to I\!R^*_+$; $f(x) = 3^x$	$(\mathbb{Z}, +)$	$(R^*_+, \cdot)$

.

9. Identifique entre os homomorfismos do exercício anterior, quais são isomorfismos.

10. Mostre que a aplicação $f : M_2(\mathbb{Z}) \to M_2(\mathbb{Z})$ dada por

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

é um isomorfismo de $(M_2(\mathbb{Z}), +)$ em $(M_2(\mathbb{Z}), +)$.

11. Considere o subconjunto de $M_2(\mathbb{Z})$ dado por:

$$M_2^I(\mathbb{Z}) = \left\{ A \in M_2(\mathbb{Z}); A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) Mostre que $(M_2^I(\mathbb{Z}), \cdot)$, onde $\cdot$ representa a multiplicação usual de matrizes, é um grupo.

b) Mostre que a função $f : M_2^I(\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$, dada por

$$f\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = b,$$

é um isomorfismo de $(M_2^I(\mathbb{Z}, \cdot)$ em $(\mathbb{Z}, +)$.

12. Seja $G = \{e, a, b, c\}$. Sabendo que a aplicação $f : \mathbb{Z}_4 \to G$ definida por

$$\begin{aligned} f([0]) &= e \\ f([1]) &= a \\ f([2]) &= b \\ f([3]) &= c \end{aligned}$$

é um isomorfismo de $(\mathbb{Z}_4, +)$ no grupo $(G, *)$, construa a tábua de $(G, *)$.

13. Mostre que qualquer grupo de ordem 2 é abeliano, contruindo a tabela de $(\{e, a\}, *)$. Analogamente, mostre que qualquer grupo de ordem 3, $(\{e, a, b\}, *)$, é também abeliano.

Referências Bibliográficas

[1] Apostila Matemática Discreta
http://hermes.ucs.br/ccet/deme/matcomp/matdiscreta_bcc_36_37/inde

[2] DOMINGUES, H. e IEZZI, G. Álgebra Moderna. São Paulo. Ed. Atual. 1982.

[3] GERSTING, J. L. Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação. Rio de Janeiro. LTC. 1995.

[4] MENEZES, P. B. Matemática Discreta para Computação e Informática. Porto Alegre. Ed Sagra Luzzato. 2005.

Unidade 5

Álgebra de Boole e Reticulados

Resumo

Esta unidade tem por meta introduzir os principais conceitos e propriedades sobre Álgebra Booleana, a qual possui muitas aplicações nas engenharias e ciências.

Fazendo uso das propriedades de álgebra de boole, exemplificamos a simplificação de circuitos de interruptores. Apresentamos ainda isomorfismos de álgebras booleanas e, por fim, fazemos um breve estudo sobre os reticulados.

Sumário da Unidade

5. Álgebra de Boole e Reticulados

Estudamos nesta unidade um tipo especial de sistema algébrico, formado por um conjunto munido de três operações básicas que satisfazem certas propriedades, a Álgebra de Boole. Tal Álgebra é vastamente aplicada nas diversas áreas das engenharias e ciências; um exemplo disto é a teoria de interruptores e de circuitos lógicos digitais. Fazemos aqui um breve comentário sobre os circuitos de interruptores e exemplificamos o uso desta álgebra na simplificação de alguns circuitos. Apresentamos também os reticulados e sua relação com a Álgebra Booleana.

Para conhecer mais sobre Álgebra de Boole e Reticulados, clique AQUI.

5.1 Álgebra Booleana

Na unidade anterior estudamos alguns tipos de sistemas algébricos, com apenas um operação binária interna e, que receberam denominação particular segundo as propriedades satisfeitas pelo operador: semi-grupo, monóide, grupo, subgrupos. Nesta seção estudamos sistemas algébricos com duas operações binárias e uma unária que satisfazem determinadas propriedades, os quais denominamos Álgebras de Boole. Apresentamos conceitos e propriedades relacionadas a esta Álgebra.

Definição 5.1.1. *Chamamos Álgebra de Boole a todo sistema algébrico* $(B, +, \cdot)$ *que satisfaz, para todo* $a, b, c \in B$*, os seguintes axiomas (conhecidos como Postulados de Huntington):*

(A1) Fechado para $+$ *, isto é,*

$$a + b \in B.$$

(A2) Fechado para $\cdot$ *, isto é,*

$$a \cdot b \in B.$$

(A3) Comutatividade para $+$ *, isto é,*

$$a + b = b + a.$$

(A4) Comutatividade para $\cdot$ *, isto é,*

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

(A5) Distributividade para $+$ *, isto é,*

$$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c).$$

(A6) Distributividade para $\cdot$ *, isto é,*

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c).$$

(A7) Elemento neutro para $+$ *, isto é,*

$$\exists\, 0 \in B \textit{ tal que para cada } a \in B, a + 0 = 0 + a = a.$$

(A8) Elemento neutro para $\cdot$ *, isto é,*

$$\exists\, 1 \in B \textit{ tal que para cada } a \in B, a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

(A9) Complemento para $+$ *, isto é,*

$$\textit{Para cada } a \in B,\ \exists\, \bar{a} \textit{ tal que } a + \bar{a} = 1$$

(A10) Complemento para $\cdot$ *, isto é,*

$$\textit{Para cada } a \in B,\ \exists\, \bar{a} \textit{ tal que } a \cdot \bar{a} = 0$$

Chamamos o elemento $\bar{a}$ de complemento de a, e denotamos a Álgebra de Boole pela sêxtupla ordenada $(B, +, \cdot, \bar{}, 0, 1)$.

Quando na definição acima temos que os elementos neutros são iguais, isto é, $0 = 1$, dizemos que a Álgebra de Boole é degenerada. No contexto deste livro, consideramos apenas as álgebras booleanas não-degeneradas, ou seja, aquelas em que $0 \neq 1$.

Exemplo 5.1.1.

a) $B = \{0, 1\}$, *cujas operações $+$ e $\cdot$ são definidas pelas tábuas:*

$+$	0	1
0	0	0
1	0	1

e

$\cdot$	0	1
0	0	1
1	1	1

e,

cuja operação unária é descrita através da tábua:

a	$\bar{a}$
0	1
1	0

,

é uma Álgebra de Boole. Tal estrutura, conhecida como Álgebra dos Interruptores ou da Comutação, é muito usada em projetos de circuitos de interruptores ou de comutação que constituem um sistemal digital.

b) $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot, \bar{}, [0], [1])$ *não é uma Álgebra de Boole. Observemos as tábuas da soma e da multiplicação:*

$+$	$[0]$	$[1]$	$[2]$
$[0]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$
$[1]$	$[1]$	$[2]$	$[0]$
$[2]$	$[2]$	$[0]$	$[1]$

e

$\cdot$	$[0]$	$[1]$	$[2]$
$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$
$[1]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$
$[2]$	$[0]$	$[2]$	$[1]$

.

E consideremos a tábua de complementação dada por:

a	$\bar{a}$
$[0]$	$[1]$
$[1]$	$[0]$
$[2]$	$[2]$

.

Temos que $[2]$ não atende ao axioma da complementação **(A10)***:*

$$[2] \cdot [2] = [1] \neq [0].$$

c) *Seja A um conjunto qualquer. $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, \bar{}, \emptyset, A)$, onde $\bar{}$ representa a complementação de conjuntos, é uma Álgebra Booleana. Observe que pelas propriedades das operações união, interseção e complementação de conjuntos, estudados na Unidade 1, obtemos os axiomas* **(A1)-(A10)***.*

d) *$B = \{0, a, b, 1\}$ determina uma Álgebra Booleana com as operações definidas pelas tábuas:*

$+$	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

,

$\cdot$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

e

x	$\bar{x}$
0	1
a	b
b	a
1	0

.

e) *Seja o conjunto $B = \{0, 1, 2, 3\}$. Denotamos a_2 o elemento $a \in B$ escrito na base dois. Lembremos que para escrevermos um número n na base dois dividimos n por 2, determinamos o quociente q e o resto r desta divisão e, escrevemos então $n = qr$. Consideremos o conjunto B_2 formado pelos elementos a_2 tais que $a \in B$, isto é, $B = \{00, 01, 10, 11\}$. Temos que $(B_2, +, \cdot, 00, 11)$ é uma Álgebra de Boole, onde as tábuas das operações $+$ e $\cdot$ são semelhantes às tábuas de soma e produto do exemplo imediatamente acima, fazendo $0 = 00$, $a = 01$, $b = 10$, $1 = 11$.*

Definimos dualidade em uma Álgebra booleana como segue.

Definição 5.1.2. *Em Álgebra de Boole, o dual de uma expressão é outra expressão obtida a partir da primeira quando trocamos $+$ por $\cdot$ e 0 por 1.*

Note! A definição de uma Álgebra de Boole é simétrica quanto às operações $+$ e $\cdot$, portanto, podemos trocar tanto os operadores quanto os elementos neutros 0 e 1. Assim:

Teorema 5.1.3 (Princípio da Dualidade.)**.** *Todo resultado dedutível dos axiomas de uma Álgebra de Boole permanece válido quando trocamos $+$ por $\cdot$ e 0 por 1, e vice-versa.*

Exemplo 5.1.2.

a) Seja a expressão

$$a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b \cdot c + b \cdot \bar{c}.$$

Obtemos o dual desta expressão ao mudarmos $+$ por $\cdot$ e, vice-versa. Assim,

$$(a + \bar{b}) \cdot (\bar{a} + b + c) \cdot (b + \bar{c}),$$

é o dual da afirmação dada.

b) Consideremos a equação

$$(a + 0) \cdot (b + \bar{b}) = a.$$

Para obtermos o dual desta expressão, trocamos as operações $+$ por $\cdot$ e vice-versa e, 0 por 1. Assim, obtemos

$$(a \cdot 1) + (b \cdot \bar{b}) = a,$$

o dual da afirmação dada.

Listamos a seguir algumas propriedadades das álgebras booleanas.

Proposição 5.1.4. *Seja $(B, +, \cdot, \bar{}, 0, 1)$ uma Álgebra de Boole. Então,*

i) (Unicidade dos elementos neutros) *Os elementos $0 \in B$ e $1 \in B$ são únicos.*

i) (Idempotência) *Para todo elemento* $a \in B$*, temos:*

$$a + a = a \text{ e } a \cdot a = a.$$

iii) (Identidade) *Para todo elemento* $a \in B$*, temos:*

$$a + 1 = 1 \text{ e } a \cdot 0 = 0.$$

iv) (Complemento dos elementos neutros) $\bar{0} = 1$ *e* $\bar{1} = 0$*.*

v) (Absorção) *Para todo* $a, b \in B$*, temos:*

$$a + (a \cdot b) = a \text{ e } a \cdot (a + b) = a.$$

vi) (Unicidade do complementar) *O complementar de qualquer elemento* $x \in B$ *é único, isto é, se* $a + b = 1$ *e* $a \cdot b = 0$ *para algum* $b \in B$*, então* $b = \bar{a}$*.*

vii) (Involução) *Para todo* $a \in B$*, temos* $\bar{\bar{a}} = a$*.*

viii) (Associatividade) *Para todo* $a, b, c, \in B$*, temos:*

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad \text{e} \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

ix) (Lei de DeMorgan) *Para todo* $a, b \in A$*, temos:*

$$\overline{(a + b)} = \bar{a} \cdot \bar{b} \quad \text{e} \quad \overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b}.$$

□

Usando as propriedades acima, podemos mostrar a validade das seguintes igualdades.

Exemplo 5.1.3. *Seja* $(B, +, \cdot, \bar{\ }, 0, 1)$ *uma Álgebra Booleana. Para quaisquer* $a, b, c \in B$*, temos:*

a) $a + (\bar{a} \cdot b) = a + b$ *e* $a \cdot (\bar{a} + b) = a \cdot b$

Verificação.

$$\begin{aligned} a + (\bar{a} \cdot b) &= (a + \bar{a}) \cdot (a + b) \\ &= 1 \cdot (a + b) \\ &= a + b. \end{aligned}$$

□

b) $a \cdot b + a \cdot \bar{b} = a$

Verificação.

$$\begin{aligned} a \cdot b + a \cdot \bar{b} &= a \cdot (b + \bar{b}) \\ &= a \cdot 1 \\ &= a. \end{aligned}$$

□

c) $a \cdot b + \bar{a} \cdot c + b \cdot c = a \cdot b + \bar{a} \cdot c$

Verificação.

$$\begin{aligned} a \cdot b + \bar{a} \cdot c + b \cdot c &= a \cdot b + \bar{a} \cdot c + b \cdot c \cdot (a + \bar{a}) \\ &= a \cdot b + \bar{a} \cdot c + b \cdot c \cdot a + b \cdot c \cdot \bar{a} \\ &= a \cdot b \cdot (1 + c) + \bar{a} \cdot c \cdot (1 + b) \\ &= a \cdot b + \bar{a} \cdot c. \end{aligned}$$

□

d) $(a + b) \cdot (\bar{a} + c) = a \cdot c + \bar{a}b$

Verificação.

$$\begin{aligned} (a + b) \cdot (\bar{a} + c) &= a \cdot \bar{a} + a \cdot c + \bar{a} \cdot b + b \cdot c \\ &= a \cdot c + \bar{a} \cdot b + b \cdot c \\ &= a \cdot c + \bar{a} \cdot b + b \cdot c \cdot (a + \bar{a}) \\ &= a \cdot c + \bar{a} \cdot b + a \cdot b \cdot c + \bar{a} \cdot b \cdot c \\ &= \bar{a} \cdot b \cdot (1 + c) + a \cdot c \cdot (b + 1) \\ &= \bar{a} \cdot b + a \cdot c. \end{aligned}$$

□

Os resultados anteriores nos serve de ferramenta na simplificação de expressões booleanas e circuitos de interruptores. Trataremos brevemente sobre os circuitos de interruptores.

Definição 5.1.5. *Chamamos interruptor ao dispositivo ligado a um ponto de um circuito elétrico, que pode assumir um dos seguintes estados: aberto (*0*) ou fechado (*1*).*

Seja B o conjunto de todos os interruptores. As operações $+$ e $\cdot$ representam, respectivamente, interruptores ligados em paralelo e, interruptores ligados em série, como representados pela figuras 5.1 e 5.2.

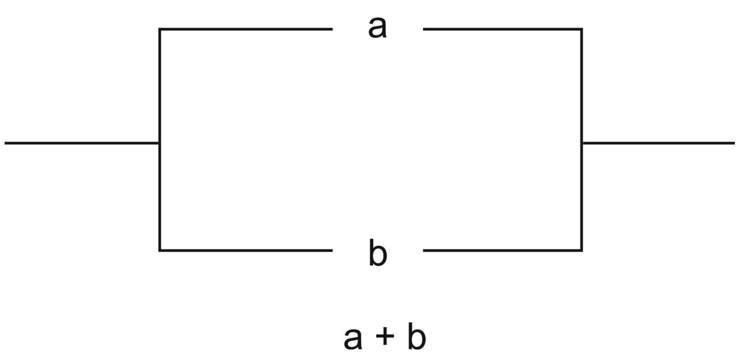


Figura 5.1: Circuitos em Paralelo

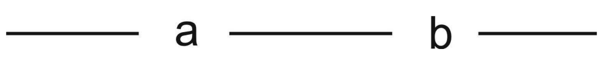


Figura 5.2: Circuitos em Série

Abaixo, damos exemplos da simplificação de circuitos através da Álgebra de Boole.

Exemplo 5.1.4.

a) *Consideremos o circuito da figura 5.3. Usando as propriedades de Álgebra de Boole para simplificar o circuito em questão, obtemos:*

$$\begin{aligned}
[(a+b)+(\bar{c}+\bar{b})]\cdot(\bar{a}\cdot\bar{b}+c) &= [a+\bar{c}+(b+\bar{b})]\cdot(\bar{a}\cdot\bar{b}+c) \\
&= (a+\bar{c}+1)\cdot(\bar{a}\cdot\bar{b}+c) \\
&= (a+1)\cdot(\bar{a}\cdot\bar{b}+c) \\
&= \bar{a}\cdot\bar{b}+c.
\end{aligned}$$

O circuito simplificado está representado na figura 5.4.

b) *Consideremos o circuito da figura 5.5. Simplificando o circuito em questão usando as propriedades de Álgebra de Boole, obtemos:*

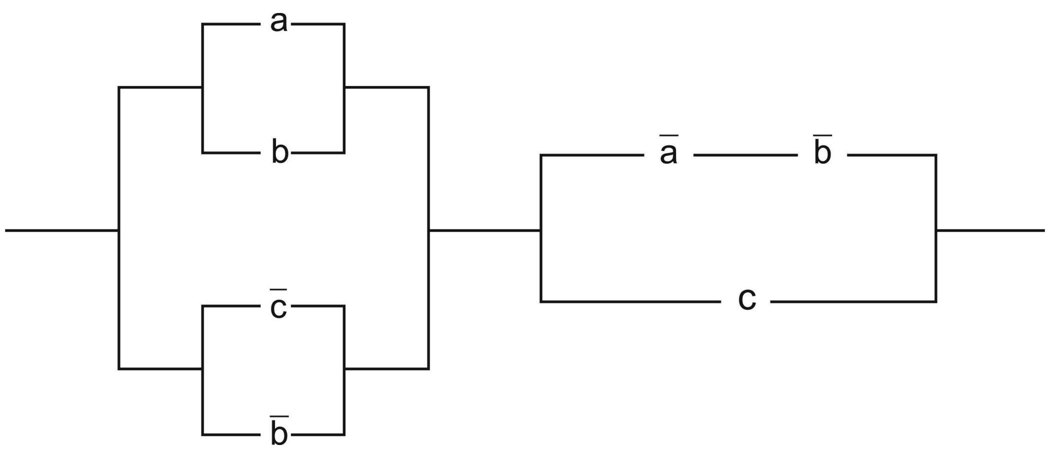


Figura 5.3: Circuito **a)**

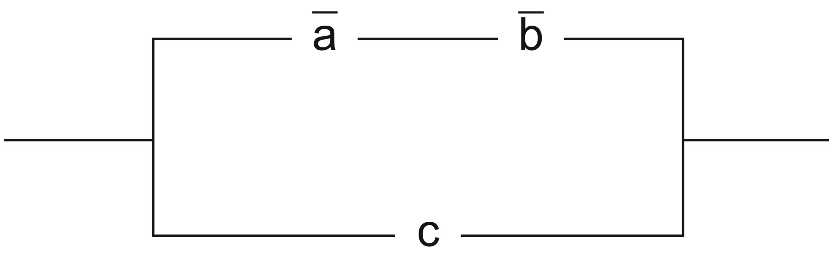


Figura 5.4: Circuito Resultante de **a)**

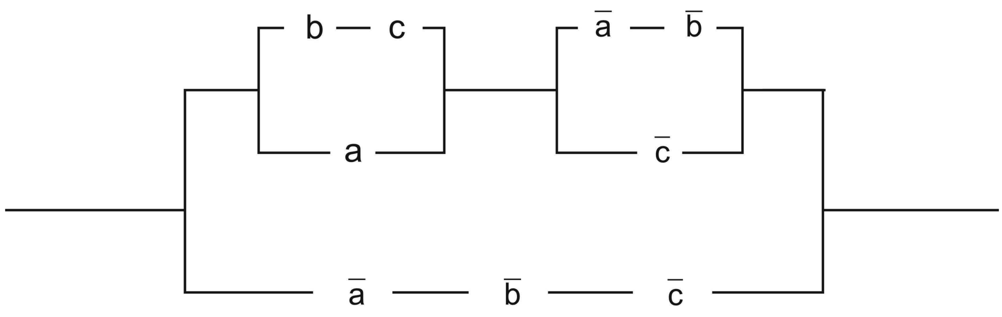


Figura 5.5: Circuito **b)**

$$
\begin{aligned}
(a+(b\cdot c))(\bar{c}+\bar{a}\cdot\bar{b})+\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c} &= a\cdot\bar{c}+a(\bar{a}\cdot\bar{b})+b\cdot c\cdot\bar{c} \\
&\quad +b\cdot c\cdot\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c} \\
&= a\cdot\bar{c}+\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c} \\
&= (a+\bar{a}\cdot\bar{b})\cdot\bar{c}. \\
&= (a+\bar{b})\cdot\bar{c}.
\end{aligned}
$$

O circuito resultante está representado na figura 5.6.

c) *Consideremos o circuito da figura 5.7. Simplificaremos o circuito em questão usando as propriedades de Álgebra de Boole. Temos:*

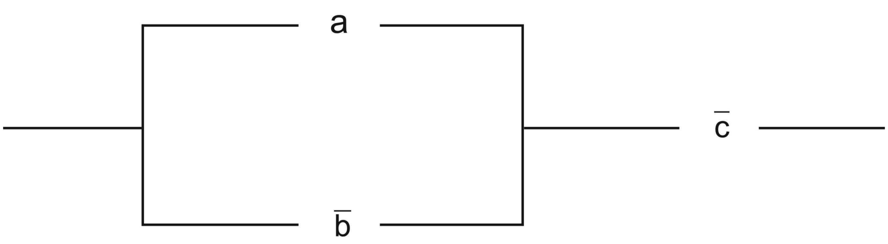


Figura 5.6: Circuito Resultante de **b)**

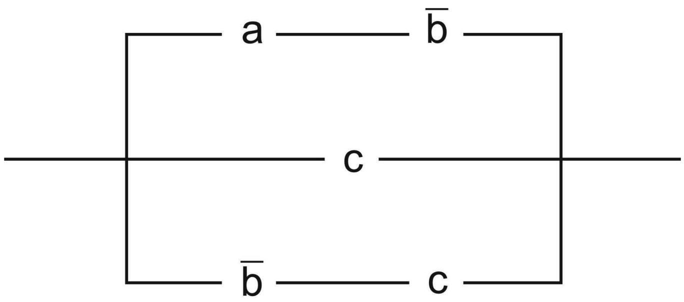


Figura 5.7: Circuito **c)**

$$\begin{aligned} a \cdot \bar{b} + c + \bar{b} \cdot c &= a \cdot \bar{b} + c \cdot (1 + \bar{b}) \\ &= a \cdot \bar{b} + c. \end{aligned}$$

O circuito simplificado está representado na figura 5.8.

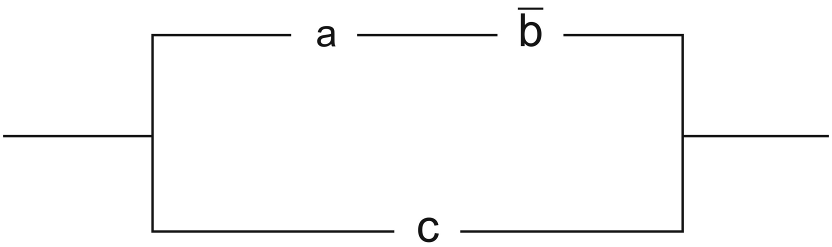


Figura 5.8: Circuito Resultante de **c)**

d) *Consideremos o circuito da figura 5.9. Usando as propriedades de Álgebra de Boole, obtemos:*

$$\begin{aligned} a \cdot b + \bar{a} \cdot b + a \cdot \bar{b} &= (a + \bar{a}) \cdot b + a \cdot \bar{b} \\ &= b + \bar{b} \cdot a \\ &= a + b. \end{aligned}$$

O circuito resultante está representado na figura 5.10.

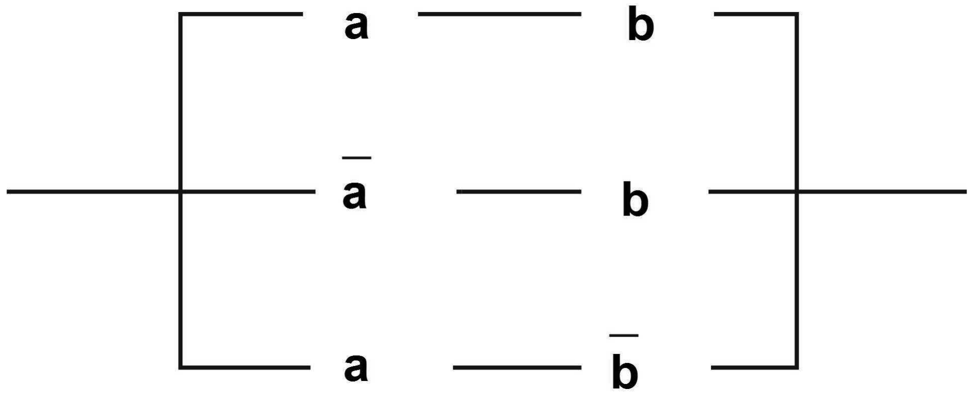


Figura 5.9: Circuito **d)**

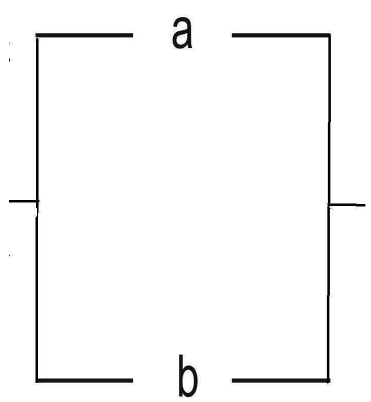


Figura 5.10: Circuito Resultante de **d)**

Finalizamos esta seção com o seguinte comentário sobre os circuitos digitais.

Observação 5.1.1. *Circuitos digitais também são modelados em termos de uma Álgebra Booleana cujo conjunto possui dois elementos: verdadeiro e falso. Basicamente, um circuito digital é escrito por dois tipos de portas* E *e* OU *e um inversor, chamado usualmente de porta NÃO. A Álgebra de Boole que representa um circuito digital é dada por* $(B, +, \cdot, \bar{}, 0, 1)$*, onde*

$+$ *representa* OU*;*

$\cdot$ *representa* E;

$^{-}$ *representa o inversor;*

1 *representa verdadeiro; e,*

0 *falso.*

5.2 Isomorfismos de Álgebras Booleanas

Na unidade anterior apresentamos o isomorfismo de grupos e, vimos que um isomorfismo é uma bijeção, entre os conjuntos relacionados aos grupos, que preserva a operação binária interna de cada grupo. Para definirmos isomorfismos entre álgebras booleanas, devemos primeiramente lembrar que em uma Álgebra de Boole estão definidas duas operações binárias e uma operação unária. Logo:

Definição 5.2.1. *Sejam $(B,+,\cdot,^{-},0,1)$ e $(A,\triangle,\bullet,',\oslash,e)$ duas álgebras de boole. Dizemos que uma aplicação $f : B \to A$ é um isomorfismo de $(B,+,\cdot,^{-},0,1)$ em $(A,\triangle,\bullet,',\oslash,e)$ se:*

i) *f é uma bijeção de B em A;*

ii) *$f(x+y) = f(x) \triangle f(y)$;*

iii) *$f(x \cdot y) = f(x) \bullet f(y)$;*

iv) *$f(\bar{x}) = (f(x))'$.*

Exemplo 5.2.1. *Sejam $B = \{0,a,b,1\}$ e a Álgebra Booleana $(B,+,\cdot,^{-},0,1)$, cujas operações $+$, $\cdot$ e $^{-}$ são definidas pelas tábuas a seguir (e já citadas no Exemplo 5.1.1).*

$+$	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

,

$\cdot$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

e

x	$\bar{x}$
0	1
a	b
b	a
1	0

.

Consideremos $A = \{1,2\}$ *e o conjunto das partes de A, isto é,* $A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.

As álgebras de Boole $(B, +, \cdot, \bar{}, 0, 1)$ *e* $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, ', \emptyset, A)$*, onde* $'$ *representa o complementar do conjunto, são isomorfas. Basta ver que a aplicação* $f : B \to \mathcal{P}(A)$*, definida por:*

$$\begin{aligned} f(0) &= \emptyset \\ f(a) &= \{1\} \\ f(b) &= \{2\} \\ f(1) &= A, \end{aligned}$$

é um isomorfismo.

- *A bijeção é imediata pela definição de* f.

- *As demais propriedades, a saber:*

$$f(x+y) = f(x) \cup f(y) \quad \text{e} \quad f(x \cdot y) = f(x) \cap f(y) \quad \text{e} \quad f(\bar{x}) = (f(x))'$$

podem ser observadas pela verificação de todos os casos possíveis. Veja as três seguintes tabelas.

x	y	$x+y$	$f(x+y)$	$f(x)$	$f(y)$	$f(x) \cup f(y)$
0	0	0	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
0	a	a	$\{1\}$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{1\}$
0	b	b	$\{2\}$	$\emptyset$	$\{2\}$	$\{2\}$
0	1	1	A	$\emptyset$	A	A
a	a	a	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
a	b	1	A	$\{1\}$	$\{2\}$	A
a	1	1	A	$\{1\}$	A	A
b	b	b	$\{2\}$	$\{2\}$	$\{2\}$	$\{2\}$
b	1	1	A	$\{2\}$	A	A
1	1	1	A	A	A	A

,

x	y	$x \cdot y$	$f(x \cdot y)$	$f(x)$	$f(y)$	$f(x) \cap f(y)$
0	0	0	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
0	a	0	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\emptyset$
0	b	0	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{2\}$	$\emptyset$
0	1	0	$\emptyset$	$\emptyset$	A	$\emptyset$
a	a	a	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
a	b	0	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\emptyset$
a	1	a	$\{1\}$	$\{1\}$	A	$\{1\}$
b	b	b	$\{2\}$	$\{2\}$	$\{2\}$	$\{2\}$
b	1	b	$\{2\}$	$\{2\}$	A	$\{2\}$
1	1	1	A	A	A	A

,

e

x	$\bar{x}$	$f(\bar{x})$	$f(x)$	$(f(x))'$
0	1	A	$\emptyset$	A
a	b	$\{2\}$	$\{1\}$	$\{2\}$
b	a	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1\}$
1	0	$\emptyset$	A	$\emptyset$

.

Finalizamos esta seção com um interessante resultado, o qual nos diz que qualquer Álgebra de Boole finita pode ser identificada com uma Álgebra Booleana de um conjunto de partes.

Teorema 5.2.2. *Seja $(B, +, \cdot, \bar{}, 0, 1)$ um Álgebra Booleana com n elementos. Então, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que*

i) $n = 2^m$ *e,*

ii) $(B, +, \cdot, \bar{}, 0, 1)$ *é isomorfa a* $P(\{1, 2, ..., m\})$.

□

5.3 Reticulados

Na Unidade 2 estudamos, dentre outros tipos de relação, as relações de ordem parcial, isto é, as endorrelações que são reflexivas, anti-simétricas e transitivas. Aqui, apresentamos um tipo especial de relação de ordem, os reticulados. E veremos uma interessante relação entre reticulados e Álgebras de Boole.

Definição 5.3.1. *Seja $\Re$ uma relação de ordem parcial em um conjunto A. Dizemos que $\Re$ é um reticulado se qualquer par de elementos de A possui um ínfimo e um supremo em A.*

Dado um par $a, b \in A$, denotamos o ínfimo de $\{a, b\}$ por $a \wedge b$ e o supremo de $\{a, b\}$ por $a \vee b$. Os operadores $\wedge$ e $\vee$, chamamos, respectivamente, de conjunção e união.

Note! As operaçõs $\vee$ e $\wedge$ são comutativas, pela definição.

Exemplo 5.3.1.

A) *Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Temos:*

- *A relação $\leq$ em A é um reticulado.*

- *A relação $\subseteq$ no conjunto das partes de A é um reticulado, onde $\wedge$ e $\vee$ indicam, respectivamente, interseção e união de conjuntos.*

b) *Seja D_6 o conjunto dos divisores de 6, isto é, $D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$. A relação de divisibilidade $|$ definida por*

$$x|y \text{ se, e somente se, } x \text{ divide } y,$$

é um reticulado, onde $\wedge$ e $\vee$ indicam, respectivamente, **mmc** *(menor múltiplo comum) e* **mdc***(máximo divisor comum).*

c) *De forma geral, se D_n denota o conjunto dos divisores de $n \in \mathbb{N}^*$ então a relação de divisibilidade, tal como definida acima, é um reticulado.*

Apresentamos a seguir alguns tipos de reticulados. A partir daqui, denotamos um reticulado $\Re$ em A por $(A, \Re)$.

Definição 5.3.2. *Seja $(A, \Re)$ um reticulado.*

- *Chamamos* $(A, \Re)$ *de reticulado distributivo se as operações união e conjunção são distributivas, isto é, para quaisquer* $a, b, c \in A$*, temos:*

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \quad \textit{e} \quad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

- *Chamamos* $(A, \Re)$*, com* 0 *e* 1*, de reticulado complementado se todo elemento de* A *possui um complemento, isto é,*

$$\forall\, a \in A, \;\; \exists \bar{a} \;\; \textit{tal que} \;\; a \vee \bar{a} = 1 \;\; \textit{e} \;\; a \wedge \bar{a} = 0.$$

Observe! Um reticulado distributivo e complementado $(A, \Re)$, com as operações $\vee$, $\wedge$, $^{-}$e com 0, seu elemento mínimo e, 1 seu elemento máximo, atende as seguintes propriedades:

i) As operações $\vee$ e $\wedge$ são fechadas e comutativas, por definição, e distributivas, por se tratar de um reticulado distributivo;

ii) Possui os complementos para $\vee$ e para $\wedge$, por se tratar de um reticulado complementado; e,

iii) Temos $a \vee 0 = a$ e $a \wedge 1 = 1$, para qualquer a em A, pois 0 é o elemento mínimo e 1 o máximo de $(A, \Re)$

Note! As propriedades **i)** a **iii)** equivalem aos axiomas **(A1)** a **(A10)** da definição de uma Álgebra de Boole. Assim, mostramos que:

Teorema 5.3.3. *Todo reticulado* $(A, \Re)$ *distributivo e complementado é uma Álgebra de Boole.*

$\square$

Seja $(B, +, \cdot, ^{-}, 0, 1)$ uma Álgebra Booleana. Definimos uma relação de ordem parcial em B, por:

$$\forall\, a, b \in B, \quad a \Re b \iff a + b = b.$$

O resultado abaixo nos descreve os elementos máximo e mínimo de qualquer par $a, b \in B$, onde $(B, +, \cdot, ^{-}, 0, 1)$ é uma Álgebra Booleana.

Teorema 5.3.4. *Seja* $(B, +, \cdot, \bar{}, 0, 1)$ *uma Álgebra Booleana. Sejam* $a, b \in B$*, então* $a + b$ *e* $a \cdot b$ *são, respectivamente, o supremo e o ínfimo de* $\{a, b\}$*.*

Observe! Pelo teorema acima, podemos concluir que $(B, +, \cdot, \bar{}, 0, 1)$ é um reticulado.

Finalizamos esta Unidade enunciando este resultado.

Teorema 5.3.5. *Toda Álgebra de Boole* $(B, +, \cdot, \bar{}, 0, 1)$ *é um reticulado.*

□

5.4 Exercícios

Para efeito de simplificação da notação, usamos nos exercícios abaixo ab para representar $a \cdot b$.

1. Simplifique as expressões, justificando cada passagem.

   a) $ab + \bar{a}b$

   b) $abc + a\bar{c} + a\bar{b}$

   c) $(a + b)(a + \bar{b} + c)$

   d) $ab + bc + ac$

   e) $a + \bar{a}\bar{b} + \bar{a}bc + \bar{a}\bar{b}\bar{c}$

   f) $(a + bc)(a + \bar{b}c)$

   g) $(a + b)(\bar{b} + \bar{c})(c + d)(\bar{d} + \bar{a})$

   h) $abc + \bar{a}bc + \bar{a}b\bar{c} + ab\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c$

   i) $\bar{(}ab) + \bar{(}bc)$

   j) $a\overline{(ab + c)}$

2. Encontre o complemento da seguintes expressões.

   a) $\overline{(a + b)} + \bar{c} + b$

   b) $\bar{a}b + a\bar{b} + ab$

   c) $\overline{(abc)}(a + b + \bar{c})$

   d) $ab(c + \bar{c}d) + b(\bar{a} + a\bar{c}\bar{d})$

3. Verifique as seguintes igualdades.

   a) $\overline{(abc)} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$

   b) $\overline{(a + b + c)} = \bar{a}\bar{b}\bar{c}$

   c) $(a + b + c)(a + b) = a + b$

   d) $a\bar{b} + \bar{a}b + a\bar{c} + \bar{a}c = a\bar{b} + b\bar{c} + c\bar{a}$

   e) $(a + \bar{b} + ab)(a + \bar{b})(\bar{a}b) = 0$

4. Usando as propriedades de Álgebra de Boole, simplifique os seguintes circuitos e desenhe o circuito resultante.

a) Ver circuito da figura 5.11.

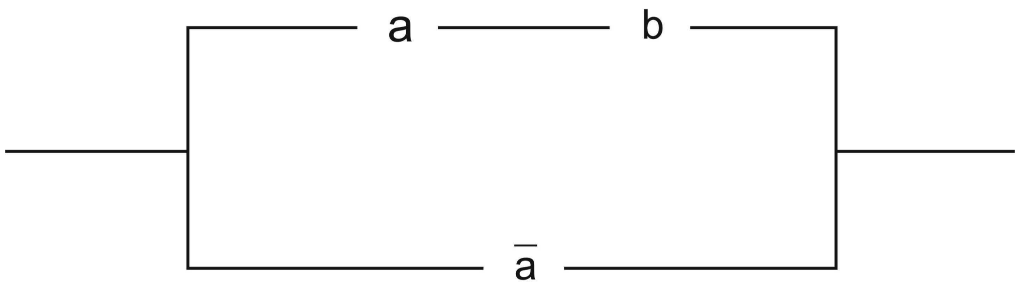


Figura 5.11: Exercício **a)**

b) Ver circuito da figura 5.12.

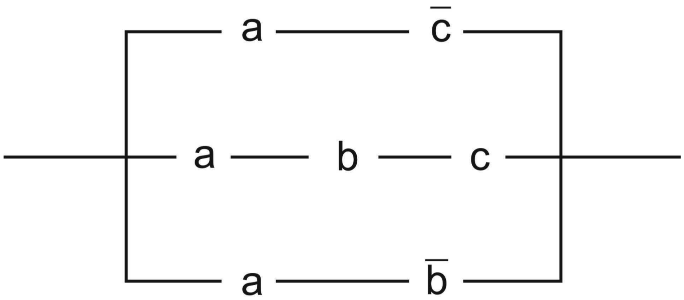


Figura 5.12: Exercício **b)**

c) Ver circuito da figura 5.13.

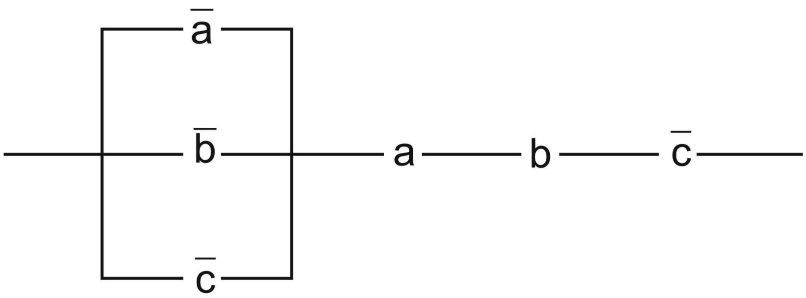


Figura 5.13: Exercício **c)**

d) Ver circuito da figura 5.14.

e) Ver circuito da figura 5.15.

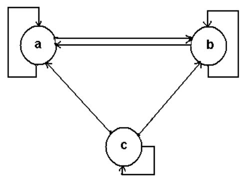


Figura 5.14: Exercício **d)**

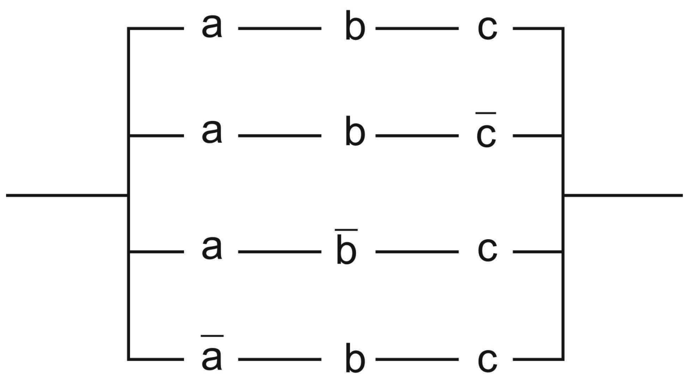


Figura 5.15: Exercício **e)**

5. Sejam $(B, +\cdot, \bar{\ }, 0, 1)$ uma Álgebra Booleana e dois elementos quaisquer $a, b \in B$. Verifique que:

   a) $a + b = 0 \implies a = 0$ e $b = 0$

   b) $a\bar{b} = 0 \iff ab = a$.

   c) $a + b = b \iff ab = a$.

6. Verifique se são reticulados as seguintes relações de ordem.

   a) $\mathbb{N}^*$, com a relação de divisibilidade $|$ e as operações $a \vee b =$ mmc(a, b) e $a \wedge b =$ mdc(a, b) .

   b) $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$ com a relação de divisibilidade $|$ e as operações $a \vee b =$ mmc(a, b) e $a \wedge b =$ mdc(a, b).

   c) $\mathcal{P}(A)$, o conjunto das partes de um conjunto qualquer A, com a relação de inclusão usual $\subseteq$ e, o supremo dado pela união de conjuntos e o ínfimo pela interseção.

Referências Bibliográficas

[1] Álgebra de Boole
http://200.19.92.57/wschui/goodbit/Boole.htm

[2] Matemática Essencial
http://www.mat.uel.br/matessencial/superior/elementos/elementos10.pdf

[3] Notas de Aula da USP
http://www.vision.ime.usp.br/~nina/cursos/mac0329-03/pasta0329.html

[4] DAGHLIAN, J. Lógica e Álgebra de Boole. São Paulo. Ed. Atlas. 2006.

[5] GERSTING, J. L. Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação. Rio de Janeiro. LTC. 1995.

[6] MENEZES, P. B. Matemática Discreta para Computação e Informática. Porto Alegre. Ed. Sagra Luzzato. 2005.

Unidade 6

Grafos

Resumo

Nesta unidade, apresentamos noções de grafos e exemplos de como esta teoria pode ser aplicada em situações de nosso cotidiano. Além disso, estudamos alguns tipos e estruturas de representação.

Sumário da Unidade

6. Grafos

6.1 Introdução

Muitas situações práticas podem ser descritas através de um conjunto de pontos, juntamente com linhas interligando pares destes pontos. Por exemplo, em processos industriais, logística, fluxo em redes, genética, economia, jogos, etc. Mais especificamente, na fabricação de circuitos integrados temos o problema de encontrar esquemas de ligação que evitem cruzamentos, o que é crucial para diminuir os custos de manufatura. A abstração matemática de tais problemas dá lugar ao conceito de GRAFO (não confunda com gráfico). A seguir vamos formalizar tal conceito.

Para saber mais sobre grafos, acesse AQUI.

Definição 6.1.1. *Um grafo G consiste de um conjunto finito de pontos ou nós (denominados vértices), e alguns pares desses (não necessariamente todos os pares) são conectados por linhas que são denominadas arestas.*

Observação 6.1.1. *É importante destacar que:*

- *As arestas podem ser retas ou curvas;*
- *O conjunto de vértices de um grafo é normalmente designado por V, e o conjunto das arestas por E. Portanto, um grafo G pode ser visto como um par ordenado $G = (V, E)$;*
- *Se um aresta conecta um vértice a ele mesmo, ela recebe o nome de laço;*

- *Se dois vértices são conectados por uma aresta, eles são denominados adjacentes*

- *O conjunto E pode ser visto como um subconjunto do conjunto das partes de V, onde cada elemento de E é um subconjunto de V contendo dois elementos.*

Exemplo 6.1.1. *A Federação Nordestina de Futebol (FNF) resolveu organizar um torneio envolvendo os estados do Piauí, Ceará e Maranhão. Participam do torneio as equipes P1, P2, C1, C2, M1 e M2. Até agora foram realizados os seguintes jogos:*

- *P1 jogou com C1, C2, M2*
- *P2 jogou com C1, M1, M2*
- *C1 jogou com P1, P2*
- *C2 jogou com P1, M1, M2*
- *M1 jogou com P2, C2, M2*
- *M2 jogou com P1, P2, C2, M1*

Parece confuso não? um grafo representa bem esta situação e pode esclarecer quaisquer dúvidas sobre quem jogou e quem ainda não se enfrentou.

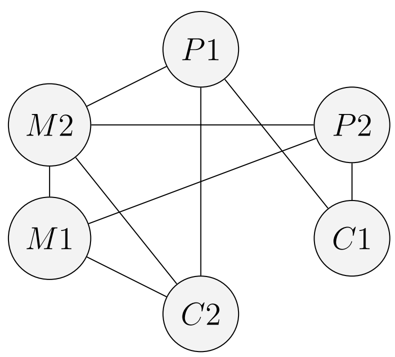


Figura 6.1: Jogos entre times do Piauí, Ceará e Maranhão

No Exemplo 6.1.1, temos $V = \{P1, P2, C1, C2, M1, M2\}$ e o conjunto de arestas $E = \{(P1, C1); (P1, C2); (P1, M2); (P2, C1);$

$(P2, M1); (P2, M2); (C2, M1); (C2, M2); (M1, M2)\}$. No exemplo, vemos que o conjunto dos vértices representa o conjunto dos times envolvidos no torneio, enquanto o conjunto das arestas representa o conjunto dos jogos já realizados. Em particular, o jogo $(P1, C1)$ coincide com o jogo $(C1, P1)$ que, por esse motivo, não aparece no conjunto das arestas. Doravante, usaremos a seguinte notação:

- A cardinalidade ou o número de elementos do conjunto V será simbolizada por $|V|$ (também denominada ordem de G);

Na seqüência, apresentamos algumas definições que são importantes para a continuidade de nosso estudo.

Definição 6.1.2. *Se dois vértices são ligados por uma aresta, eles são ditos adjacentes. A aresta é incidente aos vértices.*

Definição 6.1.3. *Um vértice é dito isolado se não há nenhuma aresta incidindo sobre ele.*

Na figura abaixo, v_1 é um vértice isolado.

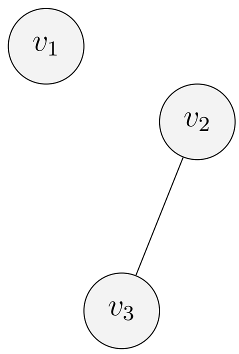


Figura 6.2: v_1, um vértice isolado

Em particular, o vértice v_1 está desconectado dos vértices v_2, v_3. Neste caso, dizemos que o grafo da figura acima é um grafo **desconexo**, com duas componentes conexas.

Definição 6.1.4. *O grau de um vértice v, $d(v)$ (do inglês degree), é o número de vezes que as arestas incidem sobre o vértice v.*

Exemplo 6.1.2. *Na Figura 6.1, podemos observar o grau de cada um dos vértices, contando a quantidade de jogos de cada uma das 6 (seis) equipes. Para ilustrar, temos:*

- $P1$ *- 3 jogos* $\Rightarrow d(P1) = 3$
- $C1$ *- 2 jogos* $\Rightarrow d(C1) = 2$
- $M2$ *- 4 jogos* $\Rightarrow d(M2) = 4$

Observação 6.1.2. *Na definição de grau, os laços são contados 2 (duas) vezes. Por exemplo, se um grafo G tem um único vértice v e um laço, então, $d(v) = 2$.*

A seguir, um resultado teórico, mas facilmente visualizado na prática.

Teorema 6.1.5. *A soma dos graus dos vértices em um grafo é igual a duas vezes o número de arestas. Isto é,*

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E|.$$

A demonstração do resultado acima pode ser feita observando-se o seguinte fato: Quando contamos os graus dos vértices estamos contando as extremidades da arestas uma vez. Como cada aresta tem duas extremidades, cada aresta foi contada duas vezes.

Como uma conseqüência direta do resultado acima, temos:

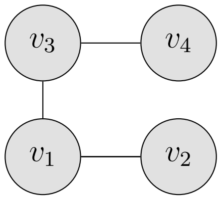
Corolário 6.1.1. *Todo grafo G possui um número par de vértices de grau ímpar.*

De fato, se a quantidade de vértices de grau ímpar fosse também ímpar, teríamos que a soma dos graus dos vértices de G resultaria em número ímpar, contrariando o Teorema 6.1.5.

Exemplo 6.1.3. *Qual a diferença entre os grafos da Figura 6.3?*

Se fizermos uma associação

$$\begin{aligned} v_1 &\longleftrightarrow A \\ v_2 &\longleftrightarrow B \\ v_3 &\longleftrightarrow C \\ v_4 &\longleftrightarrow D, \end{aligned}$$



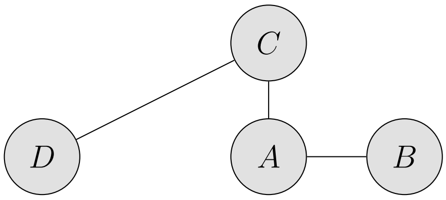


Figura 6.3: Grafos isomorfos

teremos uma correspondência entre as arestas,

$$\begin{array}{ccc} (v_1, v_2) & \longleftrightarrow & (A, B) \\ (v_1, v_3) & \longleftrightarrow & (A, C) \\ (v_3, v_4) & \longleftrightarrow & (C, D) \end{array}$$

Desse modo, dizemos que os grafos da figura acima são isomorfos.

Definição 6.1.6. *Dois grafos G_1 e G_2 são ditos isomorfos se existe uma correspondência biunívoca entre os seus conjuntos de vértices que preserve as adjacências.*

6.2 Tipos de Grafos

Alguns grafos, por suas características, tem nomes especiais:

Regular: Quando todos os seus vértices têm o mesmo grau.

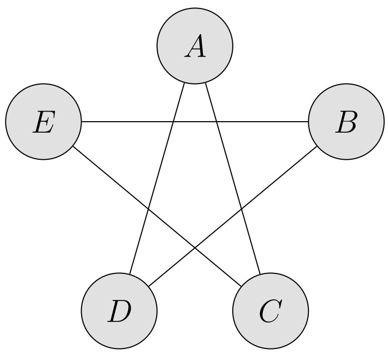


Figura 6.4: Grafo regular

Simples: Se um par de vértices é conectado por no máximo uma aresta, e nenhum vértice é conectado a si mesmo.

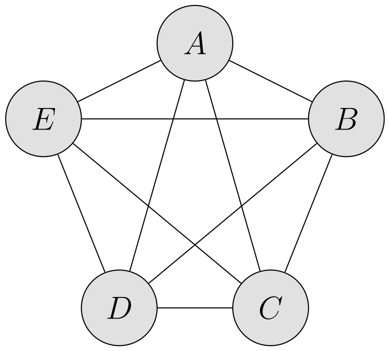


Figura 6.5: Grafo completo ou *clique*

Completo: Se ele é simples e quaisquer dois vértices são adjacentes.

Biparticionável: Quando o seu conjunto de vértices V puder ser particionado em dois subconjuntos V_1 e V_2, tais que $V = V_1 \cup V_2,\ V_1 \cap V_2 = \emptyset$ e cada aresta de G unir um vértice de V_1 a outro de V_2.

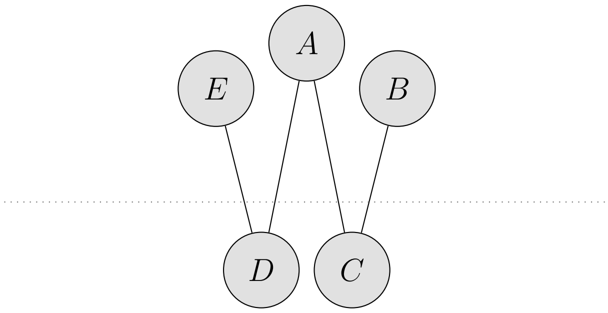


Figura 6.6: Grafo Bipartiocionável, $V_1 = \{A, B, E\},\ V_2 = \{C, D\}$

Valorado: Quando a cada aresta é associado um número real, denominado peso (ou custo, ou distância, etc, dependendo da aplicação).

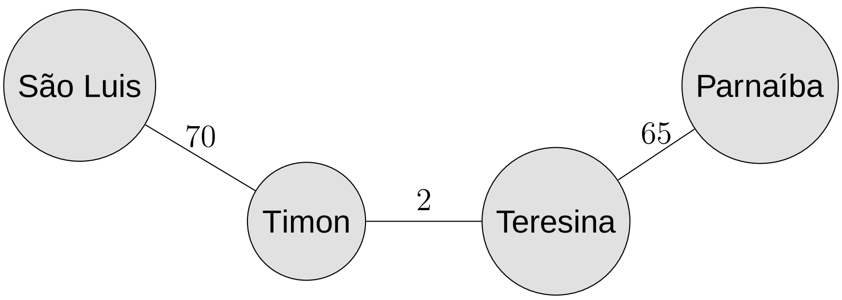


Figura 6.7: Grafo valorado

Multigrafo: Quando possui laços ou mais que uma aresta entre pares de vértices.

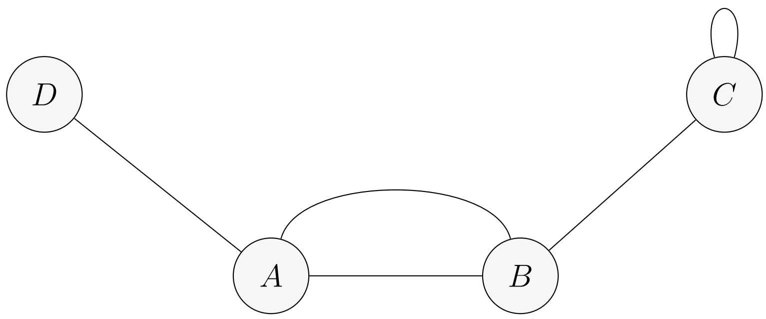


Figura 6.8: Multigrafo

Dirigido: Se suas arestas possuem orientação, é também denominado *digrafo (nesse caso a aresta* (v, w) *é diferente de* (w, v)*).*

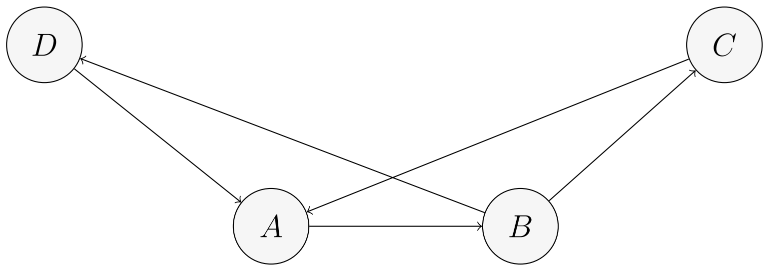


Figura 6.9: Dirigido ou Digrafo

Complementar: *Um grafo* $G_1(V_1, E_1)$ *é complementar de um grafo* $G_2(V_2, E_2)$ *se eles possuem o mesmo conjunto de vértices e não possuem aresta em comum. Isto é,* $V_1 = V_2$ *e* $E_1 \cap E_2 = \emptyset$*.*

Figura 6.10: Grafos complementares

Ciclo: *É um grafo conexo regular de grau 2 (todos os vértices tem grau 2). A notação usada é C_n, onde n representa a ordem de grafo.*

Figura 6.11: Ciclos: C_3 e C_4

Caminho: *É um ciclo do qual retiramos uma aresta. O comprimento da caminho P_n é dado pelo número n de arestas do grafo correspondente.*

Figura 6.12: Caminhos: P_2 e P_3

Subgrafo: *O grafo $G_1(V_1, E_1)$ é um subgrafo de um grafo $G(V, E)$, se $V_1 \subseteq V$ e $E_1 \subseteq E$.*

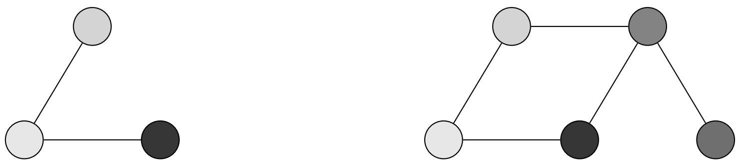


Figura 6.13: Subgrafo

Árvore: *É um grafo conexo sem ciclos como subgrafo.*

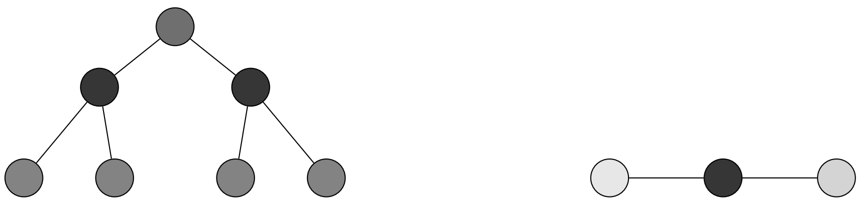


Figura 6.14: Árvores

6.3 Representação de Grafos

No que foi visto até o momento, usamos duas formas de representação de um grafo: uma representação por meio de conjuntos e uma representação gráfica. A seguir apresentamos outras que são muito importantes, principalmente quando queremos resolver no computador problemas que são colocados em forma de grafos.

6.3.1 Matriz de Adjacência

Definição 6.3.1. *Dado um grafo $G(V, E)$, sua matriz de adjacência $A = (a_{i,j})$ é uma matriz de ordem $n = |V|$ tal que*

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \textit{se e somente se} \quad (v_i, v_j) \in E, \\ 0 & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 6.3.1. *Qual a matriz de adjacência do grafo da figura abaixo?*

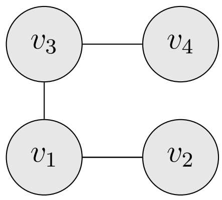


Figura 6.15: Grafo

Para encontrar A devemos construir uma tabela da seguinte forma:

	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	1	1	0
v_2	1	0	0	0
v_3	1	0	0	1
v_4	0	0	1	0

Tabela 6.1: Construíndo a matriz de adjacência

Portanto, a matriz de adjacência do grafo do Exemplo 6.3.1 é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ainda sobre a estrutura de Matriz de Adjacência, vejamos que:

- Um laço é representado por 1 na diagonal principal;
- Arestas paralelas podem ser representadas pela quantidade delas, mesmo sendo incomum;
- Para grafos não dirigidos a matriz é sempre simétrica.

Exemplo 6.3.2. *Para ilustrar o que foi dito na observação acima, vejamos o seguinte grafo.*

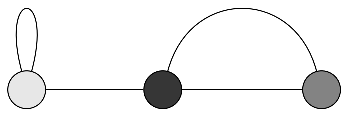


Figura 6.16: Casos especiais

O grafo da figura acima tem a seguinte matriz de adjacência: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

6.3.2 Matriz de Custo

Se um grafo $G(V, E)$ tem associado às suas arestas pesos ou custos, então, podemos construir uma matriz que nos apresente tais informações de modo bastante eficiente.

Definição 6.3.2. *A matriz de custos,* $W = (w_{i,j})$*, de um grafo* $G(V, E)$ *simples valorado é uma matriz com a ordem* $n = |V|$*, onde:*

$$w_{i,j} = \begin{cases} \text{custo da aresta } (v_i, v_j), & \text{se } (v_i, v_j) \in E, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 6.3.3. *Qual a matriz de custos do grafo apresentado na figura abaixo?*

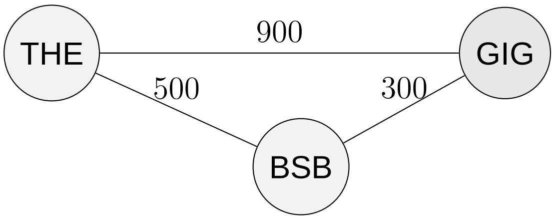


Figura 6.17: Preços de passagens aéreas (Teresina, Brasilia e Rio de Janeiro)

Para obter a resposta, vamos construir a seguinte tabela:

	THE	BSB	GIG
THE	0	500	900
BSB	500	0	300
GIG	900	300	0

Tabela 6.2: Construíndo a matriz de custos

Dessa forma, a matriz de custos do grafo acima é:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 500 & 900 \\ 500 & 0 & 300 \\ 900 & 300 & 0 \end{bmatrix}$$

6.3.3 Matriz de Incidência

Definição 6.3.3. *Dado um grafo $G(V, E)$ (não-dirigido), com $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ e $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$, sua matriz de incidência $B = (b_{i,j})$ é uma matriz de ordem $n \times m$ tal que*

$$b_{i,j} = \begin{cases} 1 & \textit{se} \quad v_i \quad \textit{for vértice de} \quad e_j, \\ 0 & \textit{caso contrário ou se } e_j \textit{ for um laço.} \end{cases}$$

No caso do grafo ser orientado (dirigido), temos:

Definição 6.3.4. *Dado um grafo dirigido $G(V,E)$, sua matriz de incidência $B = (b_{i,j})$ é uma matriz de ordem $n \times m$ tal que*

$$b_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad v_i \text{ for vértice inicial de } e_j, \\ -1 & \text{se} \quad v_i \text{ for vértice final de } e_j, \\ 0 & \text{caso contrário ou se } e_j \text{ for um laço.} \end{cases}$$

Exemplo 6.3.4. *Qual a matriz de incidência do grafo apresentado na figura abaixo?*

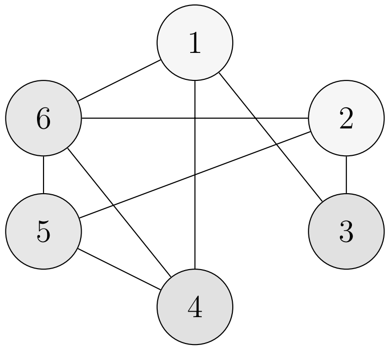


Figura 6.18: Exemplo de grafo não-dirigido.

Para obter a resposta, vamos construir a seguinte tabela:

	(1,3)	(1,4)	(1,6)	(2,3)	(2,5)	(2,6)	(4,5)	(4,6)	(5,6)
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	1	1	0	0	0
3	1	0	0	1	0	0	0	0	0
4	0	1	0	0	0	0	1	1	0
5	0	0	0	0	1	0	1	0	1
6	0	0	1	0	0	1	0	1	1

Tabela 6.3: Construíndo a matriz de incidência

Desse modo a matriz de incidência do grafo acima é dada por:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, vamos apresentar o caso em que o grafo é orientado ou dirigido (ou digrafo).

Exemplo 6.3.5. *Qual a matriz de incidência do grafo apresentado na figura abaixo?*

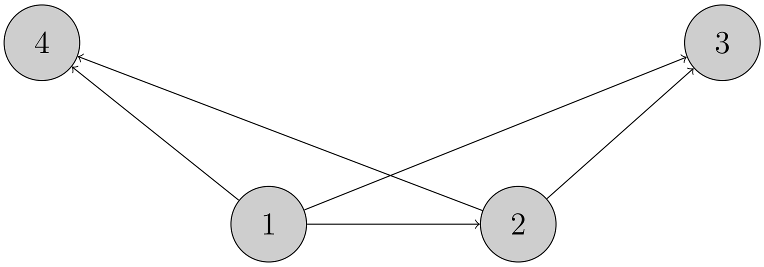


Figura 6.19: Digrafo

Para obter a resposta, vamos construir a seguinte tabela:

	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(2,4)$
1	$+1$	$+1$	$+1$	0
2	-1	0	0	$+1$
3	0	-1	0	0
4	0	0	-1	-1

Tabela 6.4: Construíndo a matriz de incidência

Portanto, a matriz de incidência do grafo apresentado na figura acima é dada por:

$$B = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

6.4 Saiba Mais

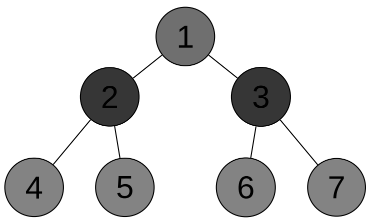
O aluno interessado em mais exemplos e em um enfoque mais computacional para os conceitos de grafos deve procurar o material didático da disciplina de Estrutura de Dados do Curso de Bacharelado em Sistemas de Informação da UAPI.

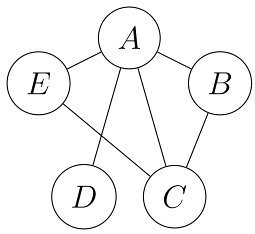
6.5 Exercícios

1. Dê exemplos de grafos simples de 1,2,3 e 4 vértices;

2. Dê 5 situações envolvendo jogos, viagens e outros exemplos da vida real, que podem ser representadas por grafos. Em cada uma das situações, explique o significado do conjunto de vértices e do conjunto de arestas;

3. Calcule o grau de cada um dos vértices dos grafos apresentados abaixo:

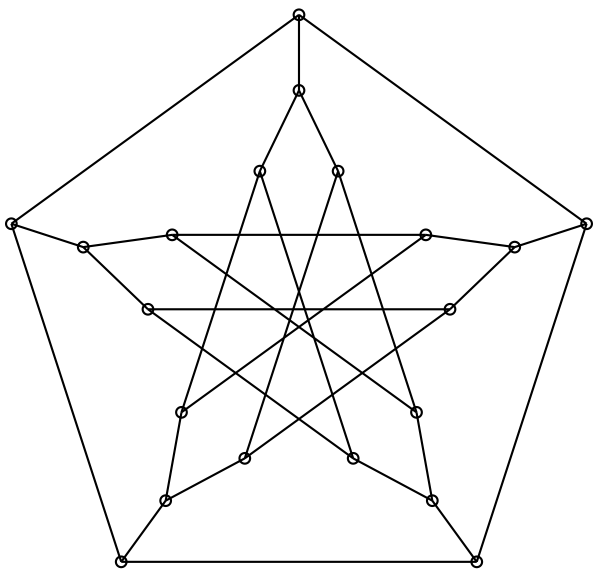




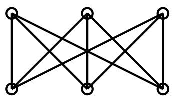
4. Dê exemplos de dois grafos isomorfos de ordem 10;

5. Classifique os grafos abaixo:

(a)



(b)



6. Para cada um dos grafos $G(V, E)$ calcule a matriz de adjacência e a matriz de incidencia.

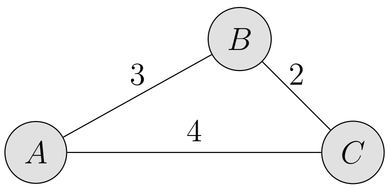
   (a) $V = \{1, 2, 3\}$, $E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$;

   (b) $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $E = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (3, 4)\}$;

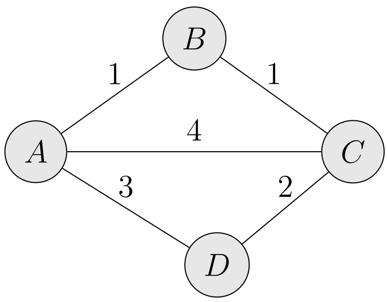
   (c) $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $E = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (4, 5), (5, 6)\}$;

7. Calcule a Matriz de custos dos grafos abaixo:

   (a)



   (b)



8. Dê um exemplo de grafo com a seguinte matriz de adjacência:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

9. Dê um exemplo de grafo com a seguinte matriz de incidência:

$$A = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & +1 & 0 & +1 \\ -1 & +1 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

10. Dê um exemplo de grafo orientado (Digrafo) com a seguinte matriz de custos:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 & 30 & 100 \\ 0 & 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 20 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

11. Dê um exemplo de um grafo desconexo sem vértices isolados.

Referências Bibliográficas

[1] Um curso de Matemática Discreta
http://www.ptmat.fc.ul.pt/~lsequeir/md/teoricas/aula24print.pdf

[2] Minicurso SBMAC
http://www.sbmac.org.br/boletim/arquivos2006/minicurso-24.pdf

[3] Curso de Grafos
http://www.dimap.ufrn.br/~dario/arquivos/Cap2_Grafos-2001.pdf

[4] GERSTING, J. L. Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação. Rio de Janeiro. LTC. 1995.

[5] JURKIEWICZ, S. Grafos: Uma introdução. Estágio dos alunos bolsistas - OBMEP - 2006. SBM. Rio de Janeiro, 2006.

[6] LOVÁSZ, L. et al. Matemática Discreta. Coleção Textos Universitários. SBM. Rio de Janeiro. 2003.

[7] LUCCHESI, C. L. Introdução à Teoria dos Grafos. 12o. Colóquio de Matemática - IMPA. Poços de Caldas, 1979.

[8] MENEZES, P. B. Matemática Discreta para Computação e Informática. Porto Alegre. Ed Sagra Luzzato.2005.

[9] RABUSKE, M. A. Introdução à Teoria dos Grafos. Editora UFSC, Florianopólis, 1992.