Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sobre a Aplicação de Gauss de Hipersuperfícies CMC Completas no Espaço Hiperbólico

Alexandre Bezerra do Nascimento Lima

Teresina - 2014

Alexandre Bezerra do Nascimento Lima

Dissertação de Mestrado:

Sobre a Aplicação de Gauss de Hipersuperfícies CMC Completas no Espaço Hiperbólico

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa

Teresina - 2014

Lima, A.B.N.

xxxx Sobre a aplicação de Gauss de hipersuperfícies cmc completas no espaço hiperbólico.

Alexandre Bezerra do Nascimento Lima – Teresina: 2014.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Alexandre araújo Sousa.

1. Geometria diferencial

CDD 516.36

Dedico este trabalho à minha filha Alessandra e meu irmão Jair. (In memoriam).

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus pelo dom da vida, pela saúde e paz que tenho até hoje, sem dúvida sem essa força não teria concluído este trabalho. Em seguida agradeço à minha família, em especial minha mãe Jarmelinda Bezerra da Silva e meu pai Jânio do Nascimento Lima a quem agradeço imensamente pelo dom da vida. Agradeço minha avó Rosa Bezerra Cavalcante que teve e tem um papel fundamental em minha vida, obrigado minha avó.

Agradeço a meus irmãos Jair e Vânia, que tive o prazer de conviver e crescer com eles, meu irmão Jair apesar de não estar mais entre nós foi de suma importância minha convivência com ele para chegar onde cheguei.

Agradeço à minha namorada Nercilia Fernandes Lima Duarte por ter me dado força e carinho, obrigado por me ajudar de todas as formas a ser uma pessoa melhor, tenho certeza que você teve e tem uma participação fundamental na minha vida, obrigado meu amor.

Meus sinceros agradecimentos aos professores da Universidade Estadual do Piauí, em especial Arnaldo, Bian e Gildo por participarem da minha humilde formação matemática.

Agradeço aos professores da Universidade Federal do Piauí, Jurandir, João Xavier, Paulo Alexandre, Juscelino, Humberto, Cícero, Newton, Jeferson.

Agradeço aos colegas de Mestrado em especial aos amigos Joel, Sandoel, Rui, Carlos(auau). Agradeço também aos amigos que conheci na Universidade Federal do Ceará Kelson(Bisurado), Davi, Wilson(Marra), Rondinelle, Tiarlos(Pacato), Leandro(Urso), Dirson, Eraldo, Airton, Edvalter, Valdir, João Vitor, Adan, Jocel, Tiago(Maníaco).

Agradeço aos Professores Juscelino e Ernani por participarem da minha banca. Meus sinceros agradecimentos ao Professor Paulo Alexandre por ter aceito ser meu orientador, pela excelente escolha do tema e por me auxiliar nas diversas etapas deste trabalho. A todos muito Obrigado.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

"*Nunca se vence uma guerra lutando sozinho*".

Raul Seixas.

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar a aplicação de Gauss em hipersuperfícies CMC completas no Espaço hiperbólico. Em particular, vamos usar o Princípio do Máximo Generalizado de Omori-Yau para obter alguns resultados de rigidez para hipersuperfícies nesta classe de variedades.

Palavras-chaves: Espaço Hiperbólico, Hipersuperfícies.

Abstract

The aim of this work is to study the Gauss map on complete CMC hypersurfaces in the hiperbolic space. In particular, we will use the Generalized Omori-Yau Maximum Principle to get some rigidity results for hypersufaces in this class of manifolds.

Keywords: Hyperbolic Space, Hypersufaces.

Sumário

Introdução

Este trabalho tem como principal objetivo demonstrar resultados de rigidez para hipersuperfícies imersas no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$, nossa principal referência é o artigo *On the Gauss map of complete CMC hypersurfaces in the hyperbolic space* [1]. O modelo que usaremos é o modelo de Minkowski para o espaço hiperbólico, ou seja, o modelo do hiperbolóide no espaço de Lorentz $\mathbb{L}^{n+2}$. Mostraremos que $\mathbb{H}^{n+1}$ é uma variedade tipo-espaço, ou seja, quando restringimos a métrica de $\mathbb{L}^{n+2}$ ao espaço $\mathbb{H}^{n+1}$ obtemos uma variedade Riemanniana. Nosso primeiro resultado caracteriza hipersuperfícies CMC completas no espaço hiperbólico mediante restrições em sua aplicação normal de Gauss. Mais precisamente, apresentaremos o seguinte resultado.

Teorema 1. *Seja $\varphi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície completa imersa em $\mathbb{H}^{n+1}$ com curvatura média constante H não-nula. Suponha que Σ^n está contida em uma bola geodésica de $\mathbb{H}^{n+1}$. Se a imagem de Gauss $\mathrm{N}(\Sigma)$ está numa hipersuperfície completa tipo-espaço e totalmente umbílica de $\mathbb{S}_1^{n+1}$, então Σ^n é uma esfera geodésica totalmente umbílica.*

Usando a mesma técnica, aplicada na prova do resultado anterior e uma caracterização das hipersuperfícies umbílicas do espaço hiperbólico obtida em [10], obteremos o próximo resultado.

Teorema 2. *Seja $\varphi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície completa imersa em $\mathbb{H}^{n+1}$, com curvatura média constante H. Suponha que Σ esteja entre duas horoesferas (respect. hiperesferas) de $\mathbb{H}^{n+1}$ determinadas por um vetor não-nulo $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ tipo-luz (respect. tipo-espaço). Se a imagem da aplicação de Gauss $\mathrm{N}(\Sigma)$ está contida numa hipersuperfície tipo-espaço e totalmente umbílica de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ determinada por a, então Σ é uma horoesfera (respect. hiperesfera).*

Neste mesmo contexto, provamos um resultado usando o Princípio do Máximo de Hopf novamente impondo restrições a aplicação normal de Gauss, mais precisamente temos o seguinte resultado.

Teorema 3. *Seja* $\varphi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ *uma hipersuperfície fechada (compacta e sem bordo) com curvatura média* H*, imersa no espaço hiperbólico* $\mathbb{H}^{n+1}$*. Se a imagem da aplicação de Gauss de* Σ^n *está contida no fecho de um passado ou de um futuro cronológico de* $\mathbb{S}^{n+1}_1$*, então* Σ^n *é uma esfera geodésica de* $\mathbb{H}^{n+1}$ *.*

Quando Σ é uma superfície impondo condições sobre a curvatura Gaussiana de Σ e usando um argumento devido a A. Huber [6], sobre superfícies parabólicas, obtemos o seguinte resultado de rigidez.

Teorema 4. *Seja* $\varphi : \Sigma^2 \longrightarrow \mathbb{H}^3$ *uma superfície completa com curvatura Gaussiana não negativa contida na região entre duas horoesferas* L_β *e* L_τ*, onde* $0 < \beta < \tau$*. Suponha que* $\mathrm{N}(\Sigma)$ *esteja contido no fecho do domínio interior determinado pelo plano* $\mathcal{L}_{-\beta}$ *de* $\mathbb{S}^3_1$*. Se a curvatura média* H *de* Σ^2 *satisfaz*

$$\mathrm{H} \geq \frac{\tau}{\beta} \ ,$$

então Σ^2 *é uma horoesfera.*

No capítulo 3 deste trabalho apresentaremos um resultado de rigidez com respeito a cilindros hiperbólicos de $\mathbb{H}^{n+1}$, tal resultado impõe uma condição de dependência linear entre as funções suporte da imersão e usamos como ferramenta um teorema de caracterização devido a H.B. Lawson [9], desta forma temos o último resultado deste trabalho.

Teorema 5. *Seja* $\varphi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ *uma hipersuperfície completa imersa em* $\mathbb{H}^{n+1}$ *com curvatura média constante* H*. Se* $l_a = \lambda f_a$ *para algum vetor não-nulo* $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ *tipo-tempo ou tipo-espaço, e algum* $\lambda \in \mathbb{R}$*, então* Σ^n *ou é uma hipersuperfície totalmente umbílica ou um cilindro hiperbólico* $\mathbb{S}^k(\rho) \times \mathbb{H}^{n-k}(\sqrt{1+\rho^2}\ )$*.*

Capítulo 1

Noções Preliminares

Neste capítulo, introduziremos as definições e resultados que constituem a base para o desenvolvimento dos capítulos subsequentes. As primeiras seções dão uma visão geral da teoria de variedades semi-Riemanniana cuja a principal referência é [12], já nas seções seguintes, daremos as ferramentas necessárias para os resultados posteriores.

1.1 Variedades semi-Riemannianas

Denotaremos por V um espaço vetorial real de dimensão finita. Uma forma bilinear sobre V é uma aplicação $\mathbb{R}$-bilinear $b{:}V \times V \to \mathbb{R}$. Consideraremos o caso em que b é simétrica, ou seja, dados $u, v \in V$ tem-se $b(u, v) = b(v, u)$.

Definição 1. *Uma forma bilinear simétrica b em V é:*

1. *Positiva definida, se $v \neq 0$ implica $b(v, v) > 0$.*

2. *Negativa definida, se $v \neq 0$ implica $b(v, v) < 0$.*

3. *Não-degenerada, se $b(u, v) = 0$ para todo $v \in V$, então $u = 0$.*

Se b é uma forma bilinear simétrica sobre V, então para todo subespaço W de V a restrição $b\mid_{W\times W}$, que denotaremos por $b\mid_W$, é simétrica e bilinear. O *índice* i de uma forma bilinear simétrica b em V é a maior dimensão do subespaço $W \subset V$ tal que $b\mid_W$ é negativa definida.

Definição 2. *Um produto escalar sobre V é uma forma bilinear $b = \langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ simétrica e não-degenerada. Além disso, se b for positivo definido então dizemos que b é um produto interno.*

Observação 1. *Se i=0, então b é produto interno.*

Diremos que V é um espaço vetorial com produto escalar e denotaremos por $(V, \langle , \rangle)$, se está munido de algum produto escalar. Além disso, definimos o índice de um espaço vetorial V como sendo o índice do seu produto escalar.

Dados $v, w \in (V, \langle , \rangle)$ dizemos que w é ortogonal a v isto é, $w \perp v$, se $\langle w, v \rangle = 0$. Se $A \subset V$ então o complemento ortogonal de A com respeito a V é o conjunto

$$A^{\perp} = \{w \in V : \langle w, v \rangle = 0, \forall v \in V\}.$$

A norma de um vetor $v \in V$ é dada por $|v| = \sqrt{|\langle v, v \rangle|}$. Além disso, uma base $\{e_1, e_2, ...e_n\}$ de V é dita ortonormal se $|e_i| = 1, i = 1, 2, .., n$ e os elementos desta base são dois a dois ortogonais.

Definição 3. *Seja $(V, \langle , \rangle)$ então dado $v \in V$ temos que v é dito:*

1. *Tipo-tempo se $\langle v, v \rangle < 0$.*

2. *Tipo-luz se $\langle v, v \rangle = 0$ e $v \neq 0$.*

3. *Tipo-espaço se $\langle v, v \rangle > 0$ ou $v = 0$.*

Exemplo 1. *Considere o espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$ dotado do produto escalar*

$$\langle (x, t), (x', t') \rangle = xx' - tt'.$$

Observe que as relações de ortogonalidade (Figura 1) entram em contraste com a relação usal euclidiana, por exemplo:

$$(b, 1) \perp (1, b).$$

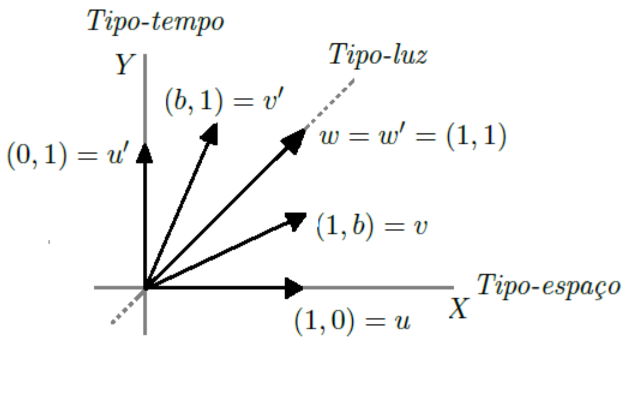


Figura 1

Definição 4. *Dado $(V, \langle , \rangle)$, dizemos que um subespaço $W \subset V$ é não-degenerado se $W \cap W^{\perp} = \{0\}$, ou equivalentemente, se $\langle , \rangle|_W$ é não-generada.*

Proposição 1. *Se W é um subespaço de V então:*

1. *$dimW + dimW^{\perp} = dimV$.*

2. *$(W^{\perp})^{\perp} = W$.*

3. *$V = W + W^{\perp} \Leftrightarrow W$ é não-degenerado($\Leftrightarrow W^{\perp}$ é não-degenerado).*

Demonstração. Veja [12]. □

Admitiremos o fato de que todo espaço vetorial com produto escalar possui uma base ortonormal. Se tivermos somente uma forma bilinear simétrica, então garantimos a existência de uma base ortogonal de modo que, os vetores desta base ou são unitários ou são tipo-luz (Lei da Inércia de Sylverster).

Dada uma base ortonormal B de V pode-se mostrar que o número de vetores tipo-tempo de B não depende desta base, então podemos caracterizar o índice i de um espaço vetorial V como sendo o número de vetores tipo-tempo de uma base ortonormal qualquer desse espaço.

Notação. Se $\{e_1, e_2, ...e_n\}$ é uma base ortonormal de $(V, \langle , \rangle)$, então $\varepsilon_i = \langle e_i, e_i \rangle = \pm 1$. Note que o número de elementos negativos de $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, ...\varepsilon_n\}$ é o índice de V. Com esta notação, dado $v \in V$, temos $v = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \langle e_i, v \rangle e_i$.

Um fato interessante sobre vetores tipo-tempo é o seguinte: Dados v e w vetores tipo-tempo de um espaço vetorial V com produto escalar de índice 1. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $u \in V$ tais que $w = av + u$ com $u \perp v$ (Pelo item 3 da Proposição 1). Portanto,

$$\langle w, w \rangle = a^2 \langle v, v \rangle + \langle u, u \rangle, \quad (*)$$

e ainda $a^2 \langle v, v \rangle = \langle w, w \rangle - \langle u, u \rangle$. Usando a equação $(*)$ e que u é tipo-espaço deduzimos que

$$\langle v, w \rangle^2 = a^2 \langle v, v \rangle^2 = \langle v, v \rangle (\langle w, w \rangle - \langle u, u \rangle) \geq \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle = |v|^2 |w|^2.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, $\langle u, u \rangle = 0$ ou v e w são colineares. Donde obtemos a desigualdade reversa de Cauchy-Schwarz

$$|\langle v, w \rangle| \geq |v||w|.$$

Para o que segue M^n denotará uma variedade diferenciável n-dimensional (Diferenciável significará de classe C^∞). Sempre que não houver possibilidade de confusão denotaremos tal conjunto somente por M. O anel das funções reais diferenciáveis sobre M será denotado por $C^\infty(M)$ e o conjunto de campos de vetores diferenciáveis em M será denotado por $\mathfrak{X}(M)$.

Definição 5. *Uma métrica semi-riemanniana em M é a correspondência que associa a cada $p \in M$ um produto escalar $\langle , \rangle_p$ em T_pM com índice constante que varia diferencialmente ou seja, $\langle X, Y\rangle \in C^\infty(M)$ para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Quando $\langle , \rangle_p$ é positiva definida para todo $p \in M$, então eliminamos o prefixo"semi". Uma variedade semi-riemanniana é uma variedade diferenciável M na qual foi escolhida uma métrica semi-riemanniana $\langle , \rangle$ em M.*

Seja M uma variedade semi-Riemanniana e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, nosso propósito agora é definir um novo campo a partir de X e Y da seguinte maneira.

Definição 6. *Uma conexão afim ∇ é uma aplicação $\mathbb{R}$-bilinear*

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\to \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

que é $C^\infty(M)$-linear no primeiro argumento e se $f \in C^\infty(M)$,

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y.$$

O campo vetorial $\nabla_X Y$ é chamado derivada covariante de Y em relação a X.

Teorema 6 (Levi-Civita). *Seja M uma variedade semi-Riemanniana, então existe uma única conexão ∇ tal que*

1. $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ *e*

2. $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$,

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. ∇ é chamada de conexão de Levi-Civita de M e é caracterizada pela fórmula de Koszul

$$2\langle \nabla_Y Z, X\rangle = Y\langle Z, X\rangle + Z\langle X, Y\rangle - X\langle Y, Z\rangle - \langle Y, [Z, X]\rangle + \langle Z, [X, Y]\rangle + \langle X, [Y, Z]\rangle.$$

Observação 2. *O campo $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$ denota o colchete de Lie dos campos X e Y.*

Demonstração. Veja [12]. □

Daqui em diante, salvo em menção contrário ∇ denotará a conexão de Levi-Civita da variedade semi-Riemanniana M.

Definição 7. *A curvatura de uma variedade semi-Riemanniana M é a aplicação R com argumentos e valores em $\mathfrak{X}(M)$ dada por:*

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z \ , \qquad \forall\ X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Pode-se mostrar que R é uma aplicação $C^{\infty}(M)$-trilinear, logo o valor de $R(X,Y)Z$ em um ponto $p \in M$ depende apenas dos valores $X(p), Y(p)$ e $Z(p)$.

Lema 1. *Seja Π um subespaço 2-dimensional do espaço tangente T_pM, então o número*

$$K(v,w) = \frac{\langle R(v,w)v, w\rangle}{\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2}\ ,$$

independe da escolha da base $\{v, w\}$ de Π e é chamado de curvatura seccional de Π em p, denotada por $K_p(\Pi)$

Demonstração. Seja $\{x, y\}$ uma outra base de Π, então

$$v = ax + by,$$
$$w = cx + dy.$$

Note que o determinante dos coeficientes, $(ad - bc)$ é não-nulo e através de um cálculo direto temos

$$\langle R(v,w)v, w\rangle = (ad - bc)^2 \langle R(x,y)x, y\rangle$$

e

$$\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2 = (ad - bc)^2(\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2).$$

□

Proposição 2. *Se uma variedade semi-Riemanniana M tem curvatura seccional constante C, então*

$$R(X,Y)Z = C(\langle Z,X\rangle Y - \langle Z,Y\rangle X).$$

Demonstração. Veja [12]. □

Definição 8. *Sejam M uma variedade semi-Riemanniana, $p \in M$ e $(E_1, E_2, .., E_n)$ um referencial ortonormal em uma vizinhança de p. A curvatura de Ricci de M em p é a aplicação $Ric : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$, definida por:*

$$Ric(X, Y)(p) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \langle R(X, E_i)Y, E_i \rangle(p)$$

onde $\varepsilon_i = \langle E_i, E_i \rangle$. A curvatura de Ricci não depende do referencial ortonormal escolhido.

Dizemos que a curvatura de Ricci é limitada inferiormente se existe uma constante K tal que $Ric(X, X) \geq K\langle X, X \rangle$, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Faremos agora uma generalização natural para uma variedade semi-Riemanniana M de alguns operadores já conhecidos no espaço euclidiano, tais operadores terão um papel fundamental no desenvolvimento deste trabalho.

Definição 9. *O gradiente de $f \in C^\infty(M)$, indicado por ∇f, é o campo vetorial em M que satisfaz*

$$\langle \nabla f, X \rangle = df(X) = X(f)$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Decorre imediatamente da definição que se $f, g \in C^\infty(M)$, então $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$ e $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$.

Observação 3. *Sejam $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real suave e $f \in C^\infty(M)$ então,*

$$\langle \nabla(\varphi \circ f), X \rangle = X(\varphi \circ f) = (\varphi' \circ f)X(f) = (\varphi' \circ f)\langle \nabla f, X \rangle = \langle (\varphi' \circ f)\nabla f, X \rangle.$$

Logo, $\nabla(\varphi \circ f) = \varphi'(f)\nabla f$.

Definição 10. *O Hessiano de uma função f é o operador linear $Hessf : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ definido por*

$$\mathrm{Hess}f(X) = \nabla_X \nabla f.$$

Ou seja, para cada $p \in M$ e $v \in T_pM$ vale $\mathrm{Hess}f(v) = (\nabla_v \nabla f)(p)$.

A partir do operador Hessiano, definiremos o Laplaciano de uma função f que será de suma importância no decorrer deste trabalho.

Definição 11. *Definiremos o Laplaciano de uma função f e denotaremos por Δf, como sendo a função suave $\Delta f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:*

$$\Delta f = tr(\text{Hess} f).$$

Proposição 3. *Sejam $f, g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ funções suaves, então:*

1. $\Delta(f + g) = \Delta f + \Delta g$

2. $\Delta(f \cdot g) = f \cdot \Delta g + g \cdot \Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle$

Demonstração. Veja [8]. $\square$

1.2 Imersões Isométricas

Definição 12. *Sejam M^n , $\overline{M}^k$ variedades. Uma aplicação diferenciável $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^k$ é uma imersão se $df_p : T_pM^n \longrightarrow T_{f(p)}\overline{M}^k$ é injetiva para todo $p \in M$.*

Seja $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+m=k}$ uma imersão. Então pela forma local das imersões f é localmente um mergulho. Isto quer dizer que dado $p \in M$, existem vizinhanças U de p, $\overline{U} \subset \overline{M}$ de $f(p)$, e um difeomorfismo $\varphi : \overline{U} \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^k$, em um aberto V do $\mathbb{R}^k$, tais que φ aplica difeomorficamente $f(U) \cap \overline{U}$ em um aberto do subespaço $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^k$ (Figura 2).

Para simplificar a notação, identificaremos um aberto $U \subset M$ com $f(U)$, e para cada $v \in T_pM$, $p \in U$, com $df_p(v) \in T_{f(p)}\overline{M}$. Tais identificações servirão para estender, por exemplo, um campo local definido em U, de vetores de M, a um campo local definido em $\overline{U}$, de vetores de $\overline{M}$. Se U é suficientemente pequeno, tal extensão é sempre possível, basta estender o campo para o aberto V usando o transporte paralelo, e transportá-lo via φ, para $\overline{U}$.

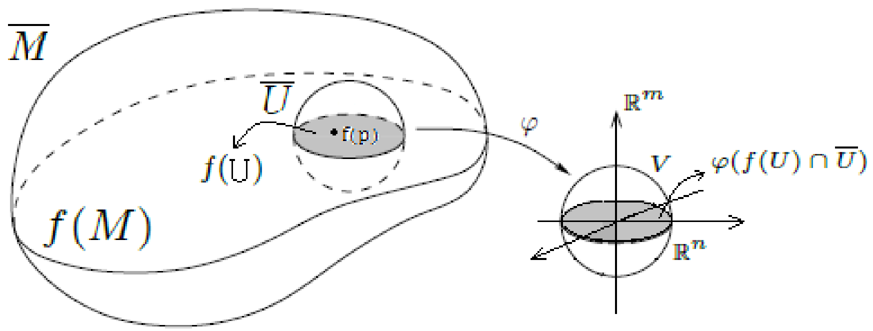


Figura 2

Para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p\overline{M}$ decompõe $T_p\overline{M}$ na soma direta

$$T_p\overline{M} = T_pM + (T_pM)^\perp,$$

onde $(T_pM)^\perp$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. Se $v \in T_p\overline{M}$, $p \in M$, podemos escrever

$$v = v^T + v^N,\ v^T \in T_pM,\ v^N \in (T_pM)^\perp.$$

Denominamos v^T a componente tangencial de v e v^N a componente normal de v.

A conexão de Levi-Civita de $\overline{M}$ será indicada por $\overline{\nabla}$. Se X e Y são campos locais de vetores em M e $\overline{X}$, $\overline{Y}$ são extensões locais a $\overline{M}$, definimos

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^T.$$

É imediato verificar que a definição acima não depende das extensões $\overline{X}$, $\overline{Y}$, ou seja , $\nabla_X Y$ está bem definida. No que segue, indicaremos por $\mathfrak{X}(U)^\perp$ os campos diferenciáveis em U de vetores normais a $f(U) \approx U$. Mostraremos que a conexão definida acima é a conexão de Levi-Civita de M relativa a métrica induzida de $\overline{M}$. De fato se $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, temos:

$$\begin{aligned}\nabla_X(Y+Z) + \alpha(X, Y+Z) &= \overline{\nabla}_{\overline{X}}(\overline{Y} + \overline{Z}) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} + \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z}\\ &= \nabla_X Y + \alpha(X,Y) + \nabla_X Z + \alpha(X,Z).\end{aligned}$$

Onde $\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$ é a componente normal de $\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}$, ou seja $\alpha(X,Y) = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^N$. Daí, agrupando as componentes tangentes, temos

$$\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$$

e agrupando as componentes normais temos

$$\alpha(X, Y+Z) = \alpha(X,Y) + \alpha(X,Z).$$

De maneira análoga verificamos as outras propriedades da conexão e obtemos também que α é $C^\infty(M)-$bilinear. Como $\overline{\nabla}$ é compatível com a métrica $\overline{g} = \langle , \rangle$ tem-se

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z\rangle = X\langle \overline{Y}, \overline{Z}\rangle = \langle \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}, Z\rangle + \langle Y, \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z}\rangle\\ = \langle \nabla_X Y + \alpha(X,Y), Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z + \alpha(X,Z)\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle.\end{aligned}$$

Logo ∇ é compatível com $g = \langle , \rangle$.

Observação 4. *Note que estamos usando o mesmo símbolo $\langle , \rangle$ para indicar as duas métricas g e $\overline{g}$, o contexto dos cálculos dirá qual métrica está sendo utilizada.*

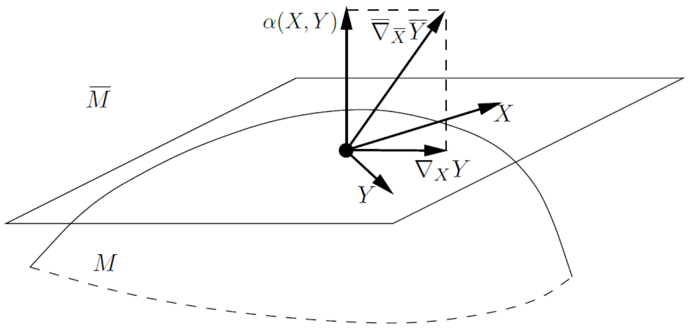
Sabendo que $\overline{\nabla}$ é simétrica, temos $\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X} = [\overline{X}, \overline{Y}]$, o que implica em

$$\nabla_X Y + \alpha(X,Y) - \nabla_Y X - \alpha(X,Y) = [X,Y].$$

Agrupando novamente as componentes normais e tangenciais, teremos que ∇ e α são simétricas. Pelo Teorema 6, existe uma única conexão simétrica e compatível com a métrica, logo ∇ é a conexão procurada.

Observação 5. *É imediato verificar que α tem um caráter tensorial, ou seja, $\alpha(X,Y)_p$ depende somente de X_p e Y_p.*

Definição 13. *A aplicação $\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ definida acima, é chamada a segunda forma fundamental da imersão.*



Às vezes se utiliza também a expressão *segunda forma fundamental* de f em p segundo o vetor normal η, para designar a forma quadrática II definida em T_pM por

$$II(x) = \langle \alpha(x,x), \eta \rangle.$$

De modo análogo ao que foi feito anteriormente, se $\eta \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$ tem sentido falar em $\overline{\nabla}_X \eta$. Sejam $-A_\eta X$ a componente tangencial e $\nabla_X^{\perp}$ a componente normal de $\overline{\nabla}_X \eta$. O símbolo $\nabla_X^{\perp}$ será chamado a conexão normal da imersão.

Proposição 4. *Sejam M uma variedade Riemanniana, $\eta \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ então*

1. *A aplicação $(X, \eta) \to A_\eta X$ é $C^\infty(M)-$bilinear, logo $(A_\eta X)_p$ depende só de η_p e X_p.*

2. *Se $X, Y \in T_pM$ e $\eta \in T_pM^{\perp}$, temos*

$$\langle A_\eta X, Y \rangle = \langle \alpha(X,Y), \eta \rangle.$$

Logo A_η é uma aplicação linear e simétrica.

Demonstração. A prova do primeiro item é análoga à demonstração de que $\alpha(X,Y)$ é $C^\infty(M)-$ bilinear feita anteriormente. Na sequência

$$\langle A_\eta X, Y\rangle = -\langle(\overline{\nabla}_X\eta)^T, Y\rangle = -\langle\overline{\nabla}_X\eta, Y\rangle,$$

mas por hipótese tem-se

$$0 = X\langle\eta, Y\rangle = \langle\overline{\nabla}_X\eta, Y\rangle + \langle\eta, \overline{\nabla}_X Y\rangle.$$

Logo $\langle A_\eta X, Y\rangle = \langle\alpha(X,Y), \eta\rangle$. O que finaliza a prova da proposição. □

O operador simétrico A_η é chamado operador de forma (ou operador de Weingarten) da imersão em relação ao vetor normal η. Apresentaremos a seguir duas fórmulas que serão bastante úteis nesta dissertação. A *Fórmula de Gauss*

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} = \nabla_X Y + \alpha(X,Y), \tag{1.1}$$

onde $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

E a *Fórmula de Weingarten* dada por

$$\overline{\nabla}_X\eta = -A_\eta X + \nabla^\perp_X\eta, \tag{1.2}$$

onde $\eta \in \mathfrak{X}(M)^\perp$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$

Teorema 7 (Gauss). *Seja M uma variedade imersa em uma variedade semi-Riemanniana $\overline{M}$, com curvaturas seccionais K e $\overline{K}$ respectivamente, então dados $p \in M$ e $x, y \in T_pM$ com x e y vetores ortonormais, tem-se :*

$$K(x,y) - \overline{K}(x,y) = \frac{\langle\alpha(x,x), \alpha(y,y)\rangle - \langle\alpha(x,y), \alpha(x,y)\rangle}{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2} \tag{1.3}$$

Demonstração. Veja [12]. □

Uma forma mais geral para a equação acima é a seguinte: seja M^n uma hipersuperfície imersa em uma variedade semi-Riemanniana $\overline{M}^{n+1}$ então para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, tem-se

$$R(X,Y)Z \;=\; -(\overline{R}(X,Y)Z)^T - \varepsilon\langle AX, Z\rangle AY + \varepsilon\langle AY, Z\rangle AX. \tag{1.4}$$

A definição a seguir tem uma importância fundamental nesta dissertação, pois será usada nos principais resultados a serem demonstrados.

Definição 14. *Seja M^n uma variedade imersa na variedade semi-Riemanniana $\overline{M}^{n+m}$, dados $p \in M$ e $\{e_1, e_2, .., e_n\}$ um referencial ortonormal em $\mathfrak{X}(M)$ definido em uma vizinhança de p. O vetor curvatura média H de $M \subset \overline{M}$ em p é definido por*

$$H_p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \alpha(e_i, e_i)$$

onde $\epsilon_i = \langle e_i, e_i \rangle$.

Observação 6. *Para ver que o vetor curvatura média não depende do referencial ortonormal escolhido, basta usar o fato de que a matriz de mudança de base, de uma base ortonormal para uma outra base ortonormal é uma matriz ortogonal.*

Uma outra forma de ver o vetor curvatura média é a seguinte: Seja $\{\eta_1, \eta_2, .., \eta_m\}$ um referencial ortonormal em $\mathfrak{X}(M)^\perp$ definido em uma vizinhança de p, então $\alpha(e_i, e_i) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \eta_j$. Donde

$$\langle \alpha(e_i, e_i), \eta_l \rangle = \langle \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \eta_j, \eta_l \rangle = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \langle \eta_j, \eta_l \rangle = \alpha_l \varepsilon_l,$$

onde $\varepsilon_l = \langle \eta_l, \eta_l \rangle$. Portanto

$$\alpha(e_i, e_i) = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j \langle \alpha(e_i, e_i), \eta_j \rangle \eta_j. \tag{1.5}$$

Usando a Proposição 4 e (1.4) tem-se

$$\alpha(e_i, e_i) = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j \langle A_{\eta_j} e_i, e_i \rangle \eta_j$$
,

então o vetor curvatura média terá seguinte expressão

$$H_p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i (\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j \langle A_{\eta_j} e_i, e_i \rangle \eta_j) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j (\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \langle A_{\eta_j} e_i, e_i \rangle) \eta_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j tr(A_{\eta_j}) \eta_j.$$

Trataremos agora de um tipo especial de imersão, que terá grande importância no decorrer desta dissertação. Seja $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+m}$ uma imersão de codimensão 1, ou seja, $m = 1$, neste caso dizemos que M é uma hipersuperfície imersa em $\overline{M}$. Mostraremos que neste caso obtemos uma expressão mais simples para (1.1). De fato, sejam $p \in M, \eta \in (T_pM)^\perp$ unitário e $\{e_1, e_2, .., e_n\}$ uma base ortonormal de T_pM para a qual A_η é diagonal, isto é, $A_\eta(e_i) = \lambda_i e_i$, $i = 1, 2, .., n$. Então,

$$K(e_i, e_j) - \overline{K}(e_i, e_j) = \langle \alpha(e_i, e_i), \alpha(e_j, e_j) \rangle - \langle \alpha(e_i, e_j), \alpha(e_i, e_j) \rangle.$$

Como M é uma hipersuperfície tem-se, $\alpha(e_i, e_j) = k\eta$ para algum $k \in \mathbb{R}$. Por outro lado, $\langle \alpha(e_i, e_j), \eta \rangle = k\langle \eta, \eta \rangle = k\varepsilon_\eta$, onde $\varepsilon_\eta = \pm 1$, pela Proposição 4 teremos $k = \varepsilon_\eta \langle \alpha(e_i, e_j), \eta \rangle = \varepsilon_\eta \langle A_\eta e_i, e_j \rangle = \varepsilon_\eta \lambda_i \langle e_i, e_j \rangle = \varepsilon_\eta \lambda_i \delta_{ij} \varepsilon_j$. Logo,

$$K(e_i, e_j) - \overline{K}(e_i, e_j) = \langle \alpha(e_i, e_i), \alpha(e_j, e_j) \rangle = \langle \varepsilon_\eta \lambda_i \varepsilon_i \eta, \varepsilon_\eta \lambda_j \varepsilon_j \eta \rangle = \lambda_i \lambda_j \varepsilon_i \varepsilon_j \varepsilon_\eta.$$

Portanto (1.3) pode ser escrito como

$$K(e_i, e_j) - \overline{K}(e_i, e_j) = \varepsilon \lambda_i \lambda_j \qquad \text{onde} \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Observe que no caso em que $M = M^2 \subset \overline{M} = \mathbb{R}^3$, onde $\mathbb{R}^3$ é uma variedade Riemanniana com a métrica usual, tem-se $\varepsilon = 1$ e o produto $\lambda_1 \lambda_2$ é conhecido como a curvatura Gaussiana de M, temos então o famoso *Teorema Egregium de Gauss*, que afirma que a curvatura Gaussiana de $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ é invariante por isometrias locais.

Seja M^n uma hipersuperfície orientável imersa em uma variedade semi-Riemanniana $\overline{M}^{n+1}$, então existe um campo normal unitário ξ globalmente definido sobre M, neste caso o operador de forma é único a menos de sinal e indicaremos A_ξ por apenas A. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\varepsilon = \langle \xi, \xi \rangle = \pm 1$, então $\alpha(X, Y) = h\xi$ onde $h \in C^\infty(M)$, logo

$$\langle \alpha(X, Y), \xi \rangle = h\langle \xi, \xi \rangle = h\varepsilon.$$

Note que

$$h = \varepsilon \langle \alpha(X, Y), \xi \rangle = \varepsilon \langle AX, Y \rangle,$$

e então

$$\alpha(X, Y) = \varepsilon \langle AX, Y \rangle \xi. \tag{1.6}$$

Portanto usando (1.4) obtemos a fórmula de Gauss para hipersuperfícies

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} = \nabla_X Y + \varepsilon \langle AX, Y \rangle \xi.$$

Além disso, dado $X \in \mathfrak{X}(M)$ tem-se

$$0 = X\langle \xi, \xi \rangle = 2\langle \nabla^\perp_X \xi, \xi \rangle,$$

ou seja,

$$\nabla^{\perp}_X \xi = 0.$$

Neste caso, a fórmula de Weingarten se simplifica

$$\overline{\nabla}_X \xi = -AX.$$

Uma outra expressão que pode ser simplificada para hipersuperfície é a de vetor curvatura média, neste caso é dado por

$$H_p = \frac{1}{n} \varepsilon tr(A) \xi,$$

onde $\varepsilon = \langle \xi, \xi \rangle$. A função $H = \frac{1}{n} \varepsilon tr(A)$ é chamada de curvatura média de M em relação a ξ. Dizemos que um ponto $p \in M$ é umbílico se $A_p : T_pM \longrightarrow T_pM$ tem todos os seus autovalores iguais. A hipersuperfície M é dita totalmente umbílica se todos os seus pontos são umbílicos.

Definição 15. *Uma imersão com segunda forma fundamental nula é dita totalmente geodésica.*

Para mais detalhes sobre geodésicas indicamos como referência [8].

Proposição 5. *Seja $f : M \longrightarrow \overline{M}$ uma imersão. Então f é totalmente geodésica se, e somente se, cada geodésica de M é geodésica de $\overline{M}$.*

Demonstração. Usaremos na demonstração uma adaptação da fórmula de Gauss para campos de vetores ao longo de curvas, para mais detalhes veja [12]. Se f é totalmente geodésica e γ é uma geodésica de M, então pela Fórmula de Gauss teremos

$$\overline{\nabla}_{\gamma'} \gamma' = \nabla_{\gamma'} \gamma' + \alpha(\gamma', \gamma') = 0$$

Logo γ é uma geodésica de $\overline{M}$. Reciprocamente, sejam $p \in M$ e $v \in T_pM$, consideremos a geodésica γ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$, então como γ é geodésica em $\overline{M}$, temos usando a fórmula de Gauss ao longo de γ que $\alpha(\gamma', \gamma') = 0$, logo $\alpha(v, v) = 0$. Como α é simétrica, segue que $\alpha \equiv 0$. $\square$

1.3 O Espaço de Lorentz-Minkowski

Aqui apresentaremos alguns exemplos de hipersuperfícies que serão utilizadas nesta dissertação. Denotaremos por $\mathbb{L}^{n+2}$ o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+2}$ munido da seguinte métrica, chamada de métrica de Lorentz-Minkowski

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n+1} u_i v_i - u_{n+2}v_{n+2}.$$

Note que a métrica definida acima tem índice 1. $\mathbb{L}^{n+2}$ é chamado de espaço de Lorentz-Minkowski, denotaremos por ∇^0 a conexão de Levi-Civita de $\mathbb{L}^{n+2}$. Veja que $g_{ij} = 1, -1$ ou 0 para $i, j = 1, ..., n+2$, logo os símbolos de Christoffel da conexão ∇^0 são todos nulos. De fato,

$$\Gamma_{ij}^m = \tfrac{1}{2}\sum_k \{\frac{\partial}{\partial x_i} g_{ik} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}\} g^{km} = 0.$$

Assim, se $X = \sum_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $Y = \sum_i y_i \frac{\partial}{\partial x_j}$ são campos de vetores em $\mathfrak{X}(\mathbb{L}^{n+2})$, então usando as propriedades de conexão

$$\nabla_X^0 Y = \sum_k X(y_k)\frac{\partial}{\partial x_k},$$

ou seja, a derivação de campos de vetores em $\mathbb{L}^{n+2}$ é semelhante a derivação usual do $\mathbb{R}^{n+2}$, segue que o tensor de curvatura de $\mathbb{L}^{n+2}$ é nulo e sua curvatura seccional é constante e igual a zero.

Agora, trataremos de uma hipersuperfície de $\mathbb{L}^{n+2}$ que será usada nos resultados mais relevantes deste trabalho. Seja $\mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$ definido por

$$\mathbb{H}^{n+1} = \{x \in \mathbb{L}^{n+2}; \langle x, x\rangle = -1, x_{n+2} > 0\}.$$

Para $n = 1$, o espaço $\mathbb{H}^2$ é a parte superior do hiperbolóide de duas folhas $x^2+y^2-z^2 = -1$ (Figura 4).

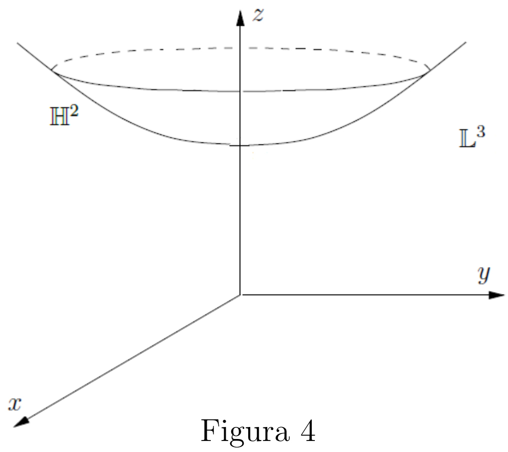


Figura 4

Mostraremos que $\mathbb{H}^{n+1}$ é uma hipersuperfície de $\mathbb{L}^{n+2}$ chamada de espaço hiperbólico, e o modelo no qual é descrito acima é chamado de modelo de Minkowski para o espaço hiperbólico. De fato seja $h : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = x_1^2 + x_2^2 ... + x_{n+1}^2 - x_{n+2}^2$. Note que h é diferenciável e

$$\mathbb{H}^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+2}; x_{n+2} > 0\} \cap h^{-1}(0).$$

Por outro lado o gradiente de h é dado por $\nabla h(x) = 2(x_1, x_2, .., x_{n+1}, -x_{n+2})$. Donde $\nabla h(x) = 0$ implica em $x = 0$, logo $0 \in \mathbb{R}$ é valor regular de h pois $h(0) = 1 \neq 0$. Então pelo Teorema da Função Implícita, $\mathbb{H}^{n+1}$ é uma subvariedade de codimenção 1 do $\mathbb{R}^{n+2}$. Mostraremos que $\mathbb{H}^{n+1}$ é uma hipersuperfície tipo-espaço de $\mathbb{L}^{n+2}$, ou seja, a métrica do espaço de Lorentz-Minkowski restrita ao espaço $\mathbb{H}^{n+1}$ é positiva definida. De fato para cada $x \in \mathbb{H}^{n+1}$, tem-se

$$T_x\mathbb{L}^{n+2} = T_x\mathbb{H}^{n+1} \oplus \mathbb{R}x,$$

onde $\mathbb{R}x$ é o subespaço de $\mathbb{R}^{n+2}$ gerado por x. A igualdade acima decorre do seguinte fato: dada $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{H}^{n+1}$ diferenciável tal que $\alpha(0) = x$ e $\alpha'(0) = v$, como $\langle \alpha(0), \alpha(0) \rangle = -1$ então $\langle \alpha'(0), \alpha(0) \rangle = 0$, ou seja, x é ortogonal a $T_x\mathbb{H}^{n+1}$.

Como $T_x\mathbb{L}^{n+2}$ tem índice 1, teremos que $T_x\mathbb{H}^{n+1}$ tem índice zero, pois $\mathbb{R}x$ tem índice 1. Logo a métrica induzida em $\mathbb{H}^{n+1}$ por $\mathbb{L}^{n+2}$ é positiva definida, ou seja, $\mathbb{H}^{n+1}$ munido desta métrica é uma variedade Riemanniana. Seja N o vetor posição de $\mathbb{H}^{n+1}$, que também é o vetor normal. Então,

$$\nabla^0_X N = X, \qquad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1}).$$

Sendo A_N o operador de forma, tem-se usando a equação de Weingarten que $\nabla^0_X N = -A_N X$. Consequentemente

$$A_N X = -X \qquad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1}),$$

donde concluimos que $\mathbb{H}^{n+1}$ é uma hipersuperfície totalmente umbílica de $\mathbb{L}^{n+2}$.

Outro fato importante sobre o espaço hiperbólico é que sua curvatura seccional é constante e igual a -1. De fato, pelo que vimos anteriormente temos que, dados $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1})$, então $\alpha(X,Y) = \varepsilon\langle AX, Y\rangle N = \langle X, Y\rangle N$, logo usando o Teorema 7 de Gauss e o fato de que o espaço de Lorentz-Minkowski tem curvatura seccional constante igual a zero, tem-se que $\mathbb{H}^{n+1}$ tem curvatura seccional constante igual a -1. Usando a expressão da curvatura média para hipersuperfícies vista anteriormente temos que a curvatura média de $\mathbb{H}^{n+1}$ é constante igual a 1. A proposição seguinte será usada na demonstração dos resultados posteriores.

Proposição 6. *Sejam $a \in \mathbb{H}^{n+1}$ e $v \in T_a\mathbb{H}^{n+1}$ um vetor unitário, então a geodésica que parte de a com velocidade v é dada por*

$$\gamma(t) = (cosh\, t)a + (senh\, t)v.$$

Demonstração. Veja que $\langle \gamma(t), \gamma(t)\rangle = -(\cosh t)^2 + (\operatorname{senh} t)^2 = -1$. Logo $\gamma(t)$ é uma curva em $\mathbb{H}^{n+1}$. Por outro lado, note que

$$\gamma'(t) = (\operatorname{senh} t)a + (\cosh t)v$$

e

$$\gamma''(t) = (\cosh t)a + (\operatorname{senh} t)v.$$

Logo,

$$\overline{\nabla}_{\gamma'}\gamma'(t) = (\nabla^0_{\gamma'}\gamma'(t))^T = (\gamma''(t))^T = 0.$$

Ou seja, γ é uma geodésica em $\mathbb{H}^{n+1}$ que satisfaz $\gamma(0) = a$ e $\gamma'(0) = v$, o que prova o resultado.

□

Observação 7. *O símbolo $\overline{\nabla}$ denotará a conexão de Levi-Civita de $\mathbb{H}^{n+1}$.*

Outra hipersuperfície de $\mathbb{L}^{n+2}$ que será útil neste trabalho é o espaço de de Sitter, que é definido por:

$$\mathbb{S}_1^{n+1} = \{x \in \mathbb{L}^{n+2}; \langle x, x\rangle = 1\}.$$

Pode-se mostrar, do mesmo modo acima, que $\mathbb{S}_1^{n+1}$ é uma hipersuperfície de $\mathbb{L}^{n+2}$ com curvatura seccional constante igual a 1 e sua curvatura média é constante igual ± 1 (depende da escolha do campo normal). Outra informação que pode ser obtida é que $\mathbb{S}_1^{n+1}$ é uma hipersuperfície totalmente umbílica de $\mathbb{L}^{n+2}$. No caso em que $n = 1$ temos que o espaço de de Sitter é o hiperbolóide de uma folha dado por $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ (Figura 5).

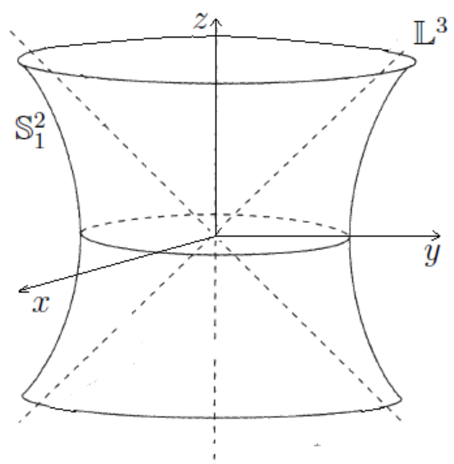


Figura 5

Seja $\varphi : \Sigma^n \to \mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$ uma hipersuperfície orientável no espaço hiperbólico. Denote por N um campo normal unitário globalmente definido sobre Σ^n e A o operador de forma de Σ^n com respeito a N. Denotaremos por ∇ a conexão de Levi-Civita de Σ^n. As fórmulas de Gauss e Weingarten para Σ^n em $\mathbb{H}^{n+1}$ são dadas, respectivamente, por

$$\nabla^0_X Y = \overline{\nabla}_X Y + \langle X, Y\rangle\varphi = \nabla_X Y + \langle AX, Y\rangle N + \langle X, Y\rangle\varphi$$

$$AX = -\overline{\nabla}_X N = -\nabla^0_X N, \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma^n).$$

As fórmulas de Gauss e Weingarten acima seguem imediatamente, basta usar a versão para hipersuperfícies vista anteriormente. Fixado um vetor $a \in \mathbb{L}^{n+2}$, associado a imersão φ existem duas funções denominadas funções suporte de φ, que são definidas por

$$l_a = \langle \varphi, a \rangle \quad \text{e} \quad f_a = \langle N, a \rangle.$$

É imediato verificar que

$$\nabla l_a = a^T \quad \text{e} \quad \nabla f_a = -A(a^T),$$

onde $a^T \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$ é a componente tangencial da imersão φ, isto é

$$a^T = a - f_a N + l_a \varphi.$$

As funções l_a e f_a são de suma importância na demonstração dos teoremas principais deste trabalho.

1.4 As r-ésimas Curvaturas Médias

Nessa seção, faremos a introdução de alguns conceitos que serão de suma importância no decorrer deste trabalho. Seja $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientável imersa em uma variedade Riemanniana orientável. Suponha que N é um campo normal unitário globalmente definido sobre M^n, associado a este campo temos o operador de forma A de M^n, que define em cada ponto $p \in M^n$ um operador simétrico $A_p : T_pM \to T_pM$ e seus auto-valores $\lambda_1(p), \lambda_2(p), .., \lambda_n(p)$ são as curvaturas principais de M em p. Associado ao operador A existem n invariantes algébricos dados por

$$S_0 = 1 \quad \text{e} \quad S_r = \sum_{1 \le i_1 < ... < i_r \le n} \lambda_{i_1} ... \lambda_{i_r}.$$

Definição 16. *Definiremos a r-ésima curvatura média H_r da hipersuperfície M como sendo*

$$\binom{n}{r} H_r = S_r.$$

Observe que, quando $r = 1$ tem-se a curvatura média $H_1 = \frac{1}{n} tr(A) = H$ de M. Uma relação importante sobre as curvaturas médias de ordem superior cuja demonstração pode ser encontrada em [5], é a seguinte

$$H_r^2 \ge H_{r-1} H_{r+1} \tag{1.7}$$

para $1 \le r < n$.

A partir das funções S_r definidas acima, definiremos a r-ésima transformação de Newton $P_r : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ por

$$\begin{cases} P_0 = I \\ P_r = S_r I - AP_{r-1} \qquad 1 \leq r \leq n. \end{cases}$$

Proposição 7. *As transformações de Newton satisfazem a seguinte relação*

$$P_r = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i S_{r-i} A^i \qquad 1 \leq r \leq n.$$

Demonstração. Provaremos por indução sobre r. Para $r = 0$ tem-se $P_0 = \sum_{i=0}^{0} (-1)^i S_{0-i} A^i$. Para $r = 1$, também vale a relação, pois $P_1 = S_1 I - AI = \sum_{i=0}^{1} (-1)^i S_{1-i} A^i$. Suponha que o resultado seja válido para $r \in \{1, .., m-1\}$, então provaremos que vale para $r = m$. Temos por hipótese de indução que

$$P_{m-1} = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i S_{m-1-i} A^i.$$

Por outro lado $P_m = S_m I - AP_{m-1}$, então usando a hipótese de indução temos $P_m = S_m I - A \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i S_{m-1-i} A^i$. Logo $P_m = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i S_{m-i} A^i$, o que finaliza a prova da Proposição. □

Observação 8. *Pelo Teorema de Cayley-Hamilton temos $P_n = 0$. Basta usar a relação*

$$det(tI - A) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r S_r t^{n-r}.$$

Corolário 1. *Em cada ponto $p \in M$ tem-se que $P_r : T_pM \to T_pM$ é um operador linear simétrico que comuta com A.*

Os operadores de Newton satisfazem as seguintes propriedades:

1. $trP_r = (n - r)S_r$

2. $trAP_r = (r + 1)S_{r+1}$

3. $trA^2P_r = S_1 S_{r+1} - (r + 2)S_{r+2}$

Para uma prova das seguintes relações veja [2]. Associaremos a cada transformação de Newton um outro operador denominado operador L_r, da seguinte forma:

Definição 17. *Para cada transformação de Newton P_r temos um operador linear diferenciável de segunda ordem $L_r : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, dado por*

$$L_r(f)(p) = tr[(P_r(A)Hessf)(p)].$$

Note que, se $r = 0$ então $L_0(f) = tr(P_0 Hessf) = \Delta f$, onde $f \in C^\infty(M)$.

Uma relação bastante relevante que foi obtida por A. Caminha em [4], é a seguinte: Seja $\varphi : \Sigma^n \longrightarrow M^{n+1}$ uma imersão isométrica, onde M^{n+1} é um ambinte de curvatura seccional constante c. Se $\{e_k\}$ é um referencial ortonormal em Σ^n, e $0 < r \leq n$. Então,

$$\begin{aligned} L_r(S_r) &= L_{r-1}(S_{r+1}) + S_r[\Delta S_r - L_{r-1}(S_1)] \\ &+ \sum_k |P_{r-1}\nabla_{e_k} A|^2 - |\nabla S_r|^2 \\ &+ tr(AP_{r-1})\{S_r(|A|^2 - cn) - [tr(A^2 P_r) - ctr(P_r)]\} \\ &- (tr(A^2 P_{r-1})[tr(A^2 P_{r-1}) - ctr(P_{r-1})]. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Para o que segue, definiremos o operador traço nulo associado ao operador A, $\phi : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ por

$$\phi(X) = AX - HX.$$

É imediato verificar que tr$\phi = 0$. Tomando a norma do operador ϕ dada por $|\phi|^2 =$ tr$(\phi^*\phi)$, temos a seguinte relação

$$|\phi|^2 = \frac{1}{2n} \sum_{i,j=1}^n (k_i - k_j)^2.$$

De fato,

$$\begin{aligned} |\phi|^2 &= \sum_{i=1}^n (k_i - H)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (k_i^2 - 2k_i H + H^2) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(k_i^2 - 2k_i \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n k_j + H^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^n k_i^2 - \frac{2}{n} \sum_{i,j=1}^n k_i k_j + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n k_j \right)^2. \end{aligned}$$

Note que,

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n k_j \right)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n k_i k_j.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |\phi|^2 &= \sum_{i=1}^{n} k_i^2 - \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n} k_i k_j \\ &= \frac{1}{2n}\sum_{i,j=1}^{n} k_i^2 - \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n} k_i k_j + \frac{1}{2n}\sum_{i,j=1}^{n} k_j^2. \end{aligned}$$

Donde, $|\phi|^2 = \frac{1}{2n}\sum_{i,j=1}^{n}(k_i^2 - 2k_ik_j + k_j^2) = \frac{1}{2n}\sum_{i,j=1}^{n}(k_i - k_j)^2$. Uma importante conclusão da expressão anterior é que $|\phi|^2 = 0$ se, e somente se, M é totalmente umbílica. Uma outra expressão de $|\phi|^2$ que será utilizada é a seguinte

$$\begin{aligned} |\phi|^2 &= tr(A - HI)^2 \\ &= tr(A^2 - 2HI + H^2 I) \\ &= trA^2 - 2HtrA + H^2 trI \\ &= \sum_{i=1}^{n} k_i^2 - 2\frac{1}{n}(trA)^2 + H^2 n \\ &= \sum_{i=1}^{n} k_i^2 - \frac{1}{n}(trA)^2, \end{aligned}$$

ou seja, $|\phi|^2 = |A|^2 - nH^2$.

A demonstração do Lema abaixo pode ser encontrada em [3].

Lema 2. *Seja* $\varphi : \Sigma^n \to \mathbb{H}^{n+1}$ *uma hipersuperfície orientável imersa no espaço hiperbólico* $\mathbb{H}^{n+1}$. *Então,*

1. $L_r(l_a) = (r+1)S_{r+1}f_a + (n-r)S_r l_a$
2. $L_r(f_a) = -(S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})f_a - (r+1)S_{r+1}l_a - \langle \nabla S_{r+1}, a^T \rangle$

onde l_a *e* f_a *são as funções suporte da imersão, e* $a^T \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$ *é a componente tangencial da imersão.*

Como aplicação do Lema anterior iremos calcular o Laplaciano das funções l_a e f_a. Fazendo $r = 0$, na equação 1 do Lema 2, teremos

$$\begin{aligned} \Delta l_a &= L_0(l_a) \\ &= S_1 f_a + nS_0 l_a \\ &= nHf_a + nl_a\ . \end{aligned}$$

Analogamente, fazendo $r = 0$ na equação 2 do Lema 2 resulta em

$$\begin{aligned}\Delta f_a &= L_0(f_a)\\ &= -(S_1^2 - 2S_2)f_a - S_1 l_a - \langle \nabla S_1, a^T\rangle\\ &= -(n^2H^2 - 2S_2)f_a - nHl_a\\ &= -(n^2H^2 - n^2H^2 + |A|^2)f_a - nHl_a\\ &= -|A|^2 f_a - nHl_a.\end{aligned}$$

Observação 9. *Na quarta igualdade acima usamos a seguinte relação*

$$S_1^2 = \left(\sum_{i=1}^n k_i\right)^2 = \sum_{i,j=1}^n k_i k_j = \sum_{i=1}^n k_i^2 + 2\sum_{i<j}^n k_i k_j = |A|^2 + 2S_2.$$

Lema 3. *Sejam l_a e f_a as funções suporte da imersão φ, então*

$$|\mathrm{Hess} l_a|^2 = |A|^2 f_a^2 + 2nHf_a l_a + nl_a^2.$$

Demonstração. Seja $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$, usando a fórmula de Gauss e Weingarten tem-se

$$\begin{aligned}\mathrm{Hess} l_a &= \nabla_X \nabla l_a\\ &= \nabla_X^0(a - f_aN + la\varphi) - \langle AX, a^T\rangle N - \langle X, a^T\rangle\varphi\\ &= -X(f_a)N + f_a AX + X(l_a)\varphi + l_a X - \langle A(a^T), X\rangle\varphi N - X(l_a)\varphi\\ &= (f_a A + l_a I)(X).\end{aligned}$$

Logo, $|\mathrm{Hess} l_a|^2 = tr(f_aA + l_aI) = tr(f_a^2A^2 + 2f_al_aAI + l_a^2I^2) = |A|^2f_a^2 + 2nHf_al_a + nl_a^2$, o que finaliza a prova do Lema.

□

Lema 4. *Sejam $h : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\xi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis, então*

$$\Delta(\xi \circ h) = (\xi'' \circ h)|\nabla h|^2 + (\xi' \circ h)\Delta h.$$

Demonstração. Note que $\mathrm{Hess}(\xi \circ h)(X) = \nabla_X \nabla(\xi \circ h)$, pela Observação 3 tem-se $\mathrm{Hess}(\xi \circ h)(X) = \xi'(h)\nabla h$, então

$$\mathrm{Hess}(\xi \circ h)(X) = X(\xi'(h))\nabla h + \xi'(h)\nabla_X\nabla f = (\xi'' \circ h)X(h)\nabla h + \xi'(h)\mathrm{Hess} h$$

Seja $(e_1, .., e_n)$ um referencial ortonormal local, então

$$\begin{aligned}
\Delta(\xi \circ h) &= tr\mathrm{Hess}(\xi \circ h) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \mathrm{Hess}(\xi \circ h)(e_i), e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle (\xi^{''} \circ h) \langle \nabla h, e_i \rangle \nabla h, e_i \rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle (\xi^{'} \circ h) \mathrm{Hess} h(e_i), e_i \rangle \\
&= (\xi^{''} \circ h) \langle \nabla h, \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla h, e_i \rangle e_i \rangle + (\xi^{'} \circ h) \sum_{i=1}^{n} \langle \mathrm{Hess} h(e_i), e_i \rangle \\
&= (\xi^{''} \circ h) |\nabla h|^2 + (\xi' \circ h) \Delta h.
\end{aligned}$$

□

Também faremos uso do Princípio do Maximo Generalizado de Omori-Yau cuja demonstração pode ser encontrada em [7].

Lema 5. *Seja Σ^n uma variedade Riemanniana completa de dimensão n com curvatura de Ricci limitada inferiormente. Então, para toda função $u : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 tal que $\inf_\Sigma u > -\infty$, existe uma sequência de pontos $\{p_k\}_{(k \geq 1)}$ em Σ^n satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. $u(p_k) < \inf_\Sigma u + \frac{1}{k}$
2. $|\nabla u|(p_k) < \frac{1}{k}$
3. $\Delta u(p_k) > -\frac{1}{k}$

para todo $k \geq 1$.

Capítulo 2

Resultados de Rigidez

2.1 Hipersuperfícies CMC em $\mathbb{H}^{n+1}$ com aplicação de Gauss prescrita

Nesta seção demonstraremos os principais resultados deste trabalho. Daqui em diante iremos supor que todas as hipersuperfícies consideradas são orientáveis e conexas. Para provar nosso primeiro resultado usaremos um fato cuja prova pode ser encontrado em [10], nesse trabalho o autor descreve todas as hipersuperfícies totalmente umbílicas de $\mathbb{H}^{n+1}$ como sendo a interseção de $\mathbb{H}^{n+1}$ com um hiperplano afim de $\mathbb{L}^{n+2}$, ou seja, são da forma

$$L_\tau = \{p \in \mathbb{H}^{n+1}; \langle p, a\rangle = \tau\},$$

onde $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ é um vetor unitário tal que $\tau^2 + \langle a, a\rangle > 0$. A hipersuperfície gerada por tal interseção dependerá do caráter causal de a, por exemplo, se a é um vetor tipo-tempo L_τ será uma esfera em $\mathbb{H}^{n+1}$. Usaremos também um resultado obtido por S.Montiel em [11], onde o autor classifica todas as hipersuperfícies tipo-espaço umbílicas do espaço de de Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$ como sendo os conjuntos da forma

$$M^n = \{p \in \mathbb{S}_1^{n+1}; \langle p, a\rangle = \tau\}\ ,$$

onde $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ e $\tau^2 - \langle a, a\rangle > 0$.

Teorema 8. *Seja $\varphi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície completa imersa em $\mathbb{H}^{n+1}$ com curvatura média constante H não-nula. Suponha que Σ^n está contida em uma bola geodésica de $\mathbb{H}^{n+1}$. Se a imagem de Gauss $\mathrm{N}(\Sigma)$ está contida numa hipersuperfície completa tipo-espaço e totalmente umbílica de $\mathbb{S}_1^{n+1}$, então Σ^n é uma esfera geodésica totalmente umbílica.*

Demonstração. Pelo Exemplo 1 de [11], existe $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ não-nulo e $\tau \in \mathbb{R}$ com

$$\mathrm{N}(\Sigma) \subset M^n = \{x \in \mathbb{S}_1^{n+1}; \langle x, a\rangle = \tau\}.$$

Logo, $f_a(x) = \langle N(x), a\rangle = \tau$ em Σ. Inicialmente suponha que a é um vetor unitário tipo-tempo, ou seja, $\langle a, a\rangle = -1$. Afirmamos que $\tau \neq 0$. Suponha por contradição que $\tau = 0$, ou seja, $f_a \equiv 0$. Então temos pelo Lema 2 $\Delta f_a = -|A|^2 f_a - nHl_a$, implicando $l_a = 0$. Por outro lado, $a^T = a - f_a N + l_a\varphi$ então $a = a^T$. Assim $\langle a, a\rangle = 1$, implicando que a é tipo-espaço o que gera uma contradição. Note que $f_a = \tau$ implica em $\Delta f_a = 0$, então pela expressão do Laplaciano de f_a

$$|A|^2 \;=\; -\frac{nH}{\tau} l_a. \tag{2.1}$$

Pela Proposição 6, a aplicação exponencial de $\mathbb{H}^{n+1}$ é dada por

$$\exp_q(rv) = (\cosh r)q + (\operatorname{senh} r)v \quad \text{onde } v \in T_q\mathbb{H}^{n+1} \text{ e } |v| = 1.$$

Seja $B_b(\rho)$ a bola geodésica de raio ρ e centro $b \in \mathbb{H}^{n+1}$ que contém Σ. Tome $r \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq r < \rho$ e $v \in T_b\mathbb{H}^{n+1}$ com v unitário, então se $p \in B_b(\rho)$ temos que $p = (\cosh r)b + (\operatorname{senh} r)v$, pois exp é difeomorfismo. Logo

$$\begin{aligned}\langle p, b\rangle &= (\cosh r)\langle b, b\rangle + (\operatorname{senh} r)\langle v, b\rangle \\ &= -(\cosh r).\end{aligned}$$

Note que $\cosh 0 \leq \cosh r \leq \cosh \rho$, donde , $-\cosh \rho < \langle p, b\rangle \leq -1$, ou seja,

$$p \in B_b(\rho) \quad \text{se, e somente se,} \quad -\cosh \rho < \langle p, b\rangle \leq -1.$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $a \in \mathbb{H}^{n+1}$. Seja $\xi > 0$ tal que $B_b(\rho) \subset B_a(\xi)$, logo dado $p \in \Sigma$ temos $-\cosh \xi < \langle p, a\rangle \leq -1$. Então l_a é limitada e pela expressão (2.1), $|A|^2$ é limitado.

O espaço hiperbólico tem curvatura seccional constante igual a -1, então dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ temos pela expressão (1.4) que

$$R(X,Y)Z = \langle Z, Y\rangle X - \langle Z, X\rangle Y + \langle AX, Z\rangle AY - \langle AY, Z\rangle AX.$$

Seja $(e_1, .., e_n)$ um referencial ortonormal em torno de um ponto de Σ, então

$$R(X, e_i)Y = \langle Y, e_i\rangle X - \langle Y, X\rangle e_i + \langle AX, Y\rangle Ae_i - \langle Ae_i, Y\rangle AX.$$

Segue que a curvatura de Ricci de Σ é dada por

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) &= \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\langle R(X,e_i)Y,e_i\rangle\\ &= \langle X,Y\rangle - n\langle X,Y\rangle + nH\langle AX,Y\rangle - \langle AX,AY\rangle\\ &= (1-n)\langle X,Y\rangle + nH\langle AX,Y\rangle - \langle AX,AY\rangle.\end{aligned}$$

Mostraremos que a curvatura de Ricci de Σ é limitada inferiormente. De fato

$$\begin{aligned}nH\langle AX,X\rangle - |AX|^2 &= |AX|^2 + nH\langle AX,X\rangle + \frac{n^2H^2}{4}\langle X,X\rangle - 2|AX|^2 - \frac{n^2H^2}{4}\langle X,X\rangle\\ &= \left|AX + \frac{nHX}{2}\right|^2 - 2|AX|^2 - \frac{n^2H^2}{4}|X|^2.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(\mathrm{X},\mathrm{X}) &= (1-n)|X|^2 + nH\langle AX,X\rangle - \langle AX,AX\rangle\\ &= (1-n)|X|^2 + \left|AX + \frac{nHX}{2}\right|^2 - 2|AX|^2 - \frac{n^2H^2}{4}|X|^2\\ &\geq (1-n)|X|^2 + \left|AX + \frac{nHX}{2}\right|^2 - 2|A|^2|X|^2 - \frac{n^2H^2}{4}|X|^2\\ &\geq \left(1-n-2|A|^2 - \frac{n^2H^2}{4}\right)|X|^2, \quad \forall\ X\in\mathfrak{X}(\Sigma).\end{aligned}$$

Então usando (2.1) temos que a curvatura de Ricci é limitada inferiormente. Agora considere a função positiva $u:\Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$u = \frac{1}{\sqrt{1+|\phi|^2}}\ ,$$

onde ϕ é o operador traço nulo. Note que ϕ é limitada e vale a seguinte relação

$$nu^2(1-u^2) = 6|\nabla u|^2 - 2u\Delta u.$$

Além disso, $0 < u \leq 1$ e $u = \xi\circ h$ onde $\xi = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ e $h = 1+|\phi|^2$. Pela Observação 3, $\nabla u = (\xi'\circ h)\nabla h$. Logo $\nabla u = -\dfrac{1}{2}h^{-3/2}\nabla h$, donde obtemos que

$$|\nabla u|^2 = \langle\nabla u,\nabla u\rangle = \frac{1}{4}h^{-3}|\nabla h|^2.$$

Por outro lado,

$$\nabla h = \nabla(|\phi|^2) = \nabla(|A|^2 - nH^2) = \nabla(|A|^2) = -\frac{nH}{\tau}\nabla l_a = -\frac{nH}{\tau}a^T.$$

Assim,

$$|\nabla u|^2 = \frac{1}{4}u^6\frac{n^2H^2}{\tau^2}\ . \tag{2.2}$$

Usando o Lema 4 temos

$$\Delta u = \frac{3}{4}h^{-5/2}|\nabla h|^2 - \frac{1}{2}h^{-3/2}\Delta h,$$

Logo

$$\Delta h = -\frac{nH}{\tau}\Delta l_a = n|\phi|^2.$$

o que implica em

$$\Delta u = \frac{3}{4}u^5\frac{n^2H^2}{\tau^2} - \frac{1}{2}nu + \frac{1}{2}nu^3\ . \tag{2.3}$$

Agora usando (2.2) e (2.3) teremos

$$\begin{aligned} 6|\nabla u|^2 - 2u\Delta u &= \frac{6}{4}u^6\ \frac{n^2H^2}{\tau^2} - \frac{6}{4}u^6\frac{n^2H^2}{\tau^2} + nu^2 - nu^4 \\ &= nu^2(1-u^2). \end{aligned}$$

Pelo Lema 5 existe uma sequência de pontos p_k em Σ^n tal que, $\lim u(p_k) = \inf_\Sigma \mathrm{u}$, $|\nabla u|(p_k) < \dfrac{1}{k}$ e $\Delta u(p_k) > -\dfrac{1}{k}$, para todo $k \geq 1$. Como $0 < u \leq 1$, tem-se $0 \leq u^2(p_k)(1-u^2(p_k))$, mas por outro lado temos que $6|\nabla u|^2 - 2u\Delta u < \dfrac{6}{k} + \dfrac{2u}{k}$. Logo,

$$\lim_{k\to\infty} u^2(p_k)(1-u^2(p_k)) = 0.$$

O limite acima implica $(\inf_\Sigma \mathrm{u})^2(1-(\inf_\Sigma \mathrm{u})^2) = 0$, ou seja, $\inf_\Sigma \mathrm{u} = 0$ ou $\inf_\Sigma \mathrm{u} = 1$. Suponha que $\inf_\Sigma \mathrm{u} = 0$ então para todo $\varepsilon > 0$ existe um ponto em Σ tal que

$$0 < \frac{1}{\sqrt{1+|\phi|^2}} < \varepsilon,$$

logo $1+|\phi|^2 > \dfrac{1}{\varepsilon^2}$, o que implica em $|A|^2 > \dfrac{1}{\varepsilon^2} + nH^2 - 1$. Ou seja, $|A|^2$ seria ilimitado, então $\inf_\Sigma \mathrm{u} = 1$, portanto $u \equiv 1$ em Σ e $|\phi|^2 = 0$ em Σ. Isto significa que Σ é uma hipersuperfície totalmente umbílica de $\mathbb{H}^{n+1}$, como a é tipo-tempo tem-se que Σ é uma esfera geodésica.

Suponha agora que $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ é um vetor tipo-espaço ou tipo-luz, de modo análogo existe $\tau \in \mathbb{R}$ tal que $f_a = \langle \mathrm{N}, a\rangle = \tau$. Inicialmente observe que $\{a, b\}$ é L.I. pois caso contrário existiria $\alpha \in \mathbb{R}$ não-nulo com $b = \alpha a$, logo $\langle \alpha a, \alpha a\rangle = -1$, pois $b \in \mathbb{H}^{n+1}$. Ou seja, $\langle a, a\rangle < 0$ donde a seria tipo-tempo. Novamente $\tau \neq 0$, basta usar a desigualdade reversa de Cauchy-Schwarz.

Seja $\Pi_{a,b}$ o subespaço 2-dimencional gerado por a e b, tome $c \in \Pi_{a,b} \cap \mathbb{H}^{n+1} - \{b\}$, logo existem $\eta, \theta \in \mathbb{R} - \{0\}$ tais que $c = \eta a + \theta b$. Considere $B_c(r)$, tal que $B_b(\rho) \subset B_c(r)$, logo l_c é limitada em Σ. Observe que

$$\langle \varphi, a\rangle = \langle \varphi, \frac{c}{\eta} - \frac{\theta}{\eta} b\rangle = \frac{1}{\eta}\langle \varphi, c\rangle - \frac{\theta}{\eta}\langle \varphi, b\rangle,$$

ou seja, l_a é limitada em Σ. Agora usando o mesmo argumento anterior conclui-se que Σ é uma esfera geodésica, logo a deveria ser tipo-tempo, o que finaliza a prova do Teorema. $\square$

Antes de provarmos nosso próximo resultado daremos mais detalhes sobre o que foi dito no início desta seção. Seja L_τ uma hipersuperfície totalmente umbílica de $\mathbb{H}^{n+1}$, então

$$L_\tau = \{p \in \mathbb{H}^{n+1}; \langle p, a\rangle = \tau\},$$

onde $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ é um vetor unitário tal que $\tau^2 + \langle a, a\rangle > 0$. Defina a função suave $\mu : \mathbb{H}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ pondo $\mu(x) = \langle x, a\rangle$, temos que $L_\tau = \mu^{-1}(\tau)$. Note que

$$\langle \nabla\mu(x), X\rangle \;=\; X\langle x, a\rangle = \langle \nabla^0_X x, a\rangle = \langle X, a\rangle = \langle X, a^T\rangle$$

onde $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^{n+1})$, $x \in \mathbb{H}^{n+1}$ e a^T é a componente tangente do vetor a em $T_x\mathbb{H}^{n+1}$. como $a = a^T + a^N$ e $a^N = fx$ pois x é normal a $\mathbb{H}^{n+1}$, temos $a^N = -\langle x, a\rangle x$. Ou seja, $a = a^T - \langle x, a\rangle x$. Logo dado $x \in L_\tau$ tem-se

$$\langle \nabla\mu(x), \nabla\mu(x)\rangle = \langle a, a\rangle + \tau^2.$$

De posse disso, a aplicação de Gauss de L_τ é dada por

$$\mathrm{N(p)}{=}\frac{1}{\sqrt{\tau^2 + \langle a, a\rangle}}(a + \tau p) \in \mathbb{S}^{n+1}_1,$$

consequentemente seu operador de forma é dado por

$$\nabla^0_X \mathrm{N}{=}{-AX} = -\frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + \langle a, a\rangle}}X.$$

Novamente pelo Exemplo 1 de [11], tem-se que $\mathrm{N(L_\tau)}$ é uma hipersuperfície tipo-espaço e totalmente umbílica de $\mathbb{S}^{n+1}_1$, a qual é isométrica ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ se a é um vetor tipo-luz, e é isométrico a $\mathbb{H}^n$ se a for tipo-espaço.

A definição seguinte será utilizada no próximo resultado.

Definição 18. *Seja* Σ^n *uma hipersuperfície de* $\mathbb{H}^{n+1}$. *Dizemos que* Σ^n *está entre duas horoesferas (respect. hiperesferas)* L_{τ_1} *e* L_{τ_2} *determinadas por um vetor não-nulo* $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ *tipo-luz (respect. tipo-espaço) se sua função auxiliar* l_a *satisfaz*

$$\tau_1 \leq l_a \leq \tau_1.$$

Teorema 9. *Seja* $\varphi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ *uma hipersuperfície completa imersa em* $\mathbb{H}^{n+1}$, *com curvatura média constante* H. *Suponha que* Σ *esteja entre duas horoesferas (respect. hiperesferas) de* $\mathbb{H}^{n+1}$ *determinadas por um vetor não-nulo* $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ *tipo-luz (respect. tipo-espaço). Se a imagem da aplicação de Gauss* $\mathrm{N}(\Sigma)$ *está contida numa hipersuperfície tipo-espaço e totalmente umbílica de* $\mathbb{S}_1^{n+1}$ *determinada por* a, *então* Σ *é uma horoesfera (respect. hiperesfera).*

Demonstração. Pela hipótese feita sobre $\mathrm{N}(\Sigma)$ tem-se que $f_a = \langle \mathrm{N}, a\rangle = \tau =$cte, e $\tau \neq 0$. Sabemos que $\Delta f_a = -|A|^2 f_a - nHl_a$, logo

$$|A|^2 = -\frac{nH}{\tau} l_a.$$

Como Σ está entre duas horoesferas (hiperesferas) teremos que l_a é limitada, ou seja, $|A|^2$ é limitada. Usando o mesmo argumento do Teorema 8 temos que a curvatura de Ricci de Σ é limitada inferiormente, aplicando novamente o Lema de Omori-Yau à função $u = \dfrac{1}{\sqrt{1+|\phi|^2}}$, onde $\phi = A - HI$, e seguindo o argumento usado para prova do Teorema 3 concluimos que Σ é uma hipersuperfície totalmente umbílica, e então Σ é uma horoesfera (hiperesfera), o que finaliza a prova. $\square$

Sejam $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ um vetor unitário tipo-tempo e ε_0 o seguinte subconjunto de $\mathbb{L}^{n+2}$

$$\varepsilon_0 = \{p \in \mathbb{S}_1^{n+1}; \langle p, a\rangle = 0\}.$$

Note que ε_0 é uma hipersuperfície tipo-espaço e totalmente geodésica em $\mathbb{S}_1^{n+1}$ que é isométrica a uma esfera euclidiana, pelo caráter causal de a. Tal hipersuperfície divide o espaço de de sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$ em duas componentes conexas , o futuro cronológico dado por

$$\{p \in \mathbb{S}_1^{n+1}; \langle p, a\rangle < 0\}$$

e o passado cronológico

$$\{p \in \mathbb{S}_1^{n+1}; \langle p, a\rangle > 0\}.$$

Chamaremos a hipersuperfície ε_0 de equador do espaço de de Sitter determinado pelo vetor a. Tomando o vetor tipo-tempo $a = (0, 0, 1) \in \mathbb{L}^3$ é fácil ver que o futuro cronológico e o passado cronológico são dados respectivamente por (Figura 6)

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 - z^2 = 1 \text{ e } z > 0\},$$

e

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 - z^2 = 1 \text{ e } z < 0\}.$$

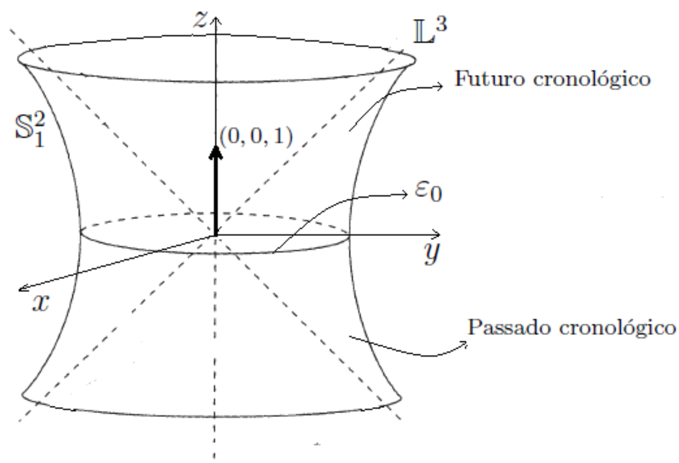


Figura 6

Para provarmos nosso próximo resultado faremos uso de um Lema conhecido como Princípio do Máximo de Hopf, cuja demonstração pode ser encontrada em [13].

Lema 6 (**Princípio do Maximo de Hopf**). *Seja M uma variedade Riemanniana orientável, compacta e conexa. Dada uma função diferenciável f em M com $\Delta f \geq 0$. Então f é constante.*

Lema 7. *Seja Σ^n uma variedade Riemanniana compacta, completa com dimensão $n \geq 2$, métrica g e curvatura escalar K. Se Σ^n admite uma função não-constante ρ tal que*

$$\text{Hess}\rho = \frac{1}{n}(\Delta\rho)g \qquad e \qquad \mathcal{L}_{\nabla_\rho} K = 0,$$

então Σ^n é isométrica a uma esfera Euclidiana $\mathbb{S}^n$.

Teorema 10. *Seja $\varphi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície fechada (compacta e sem bordo) com curvatura média* H, *imersa no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$. Se a imagem da aplicação de Gauss de Σ^n está contida no fecho de um passado ou de um futuro cronológico de $\mathbb{S}^{n+1}_1$, então Σ^n é uma esfera geodésica de $\mathbb{H}^{n+1}$.*

Demonstração. Por hipótese, existe um vetor unitário tipo-tempo a tal que f_a não muda de sinal em Σ^n. Além disso, vimos anteriormente que

$$\Delta l_a = nHf_a + nl_a \tag{2.4}$$

e

$$\Delta f_a = -|A|^2 f_a - nHl_a \ . \tag{2.5}$$

Usando (2.4) e (2.5) teremos que

$$\begin{aligned}
\Delta(f_a + Hl_a) &= -|A|^2 f_a - nHl_a + nH^2 f_a + nHl_a \\
&= -|A|^2 f_a + nH^2 f_a \\
&= -(|A|^2 - nH^2) f_a \\
&= -|\phi|^2 f_a.
\end{aligned}$$

Como f_a não muda de sinal em Σ^n , temos que $\Delta(f_a + Hl_a) \geq 0$ ou $\Delta(f_a + Hl_a) \leq 0$, então usando o Lema 6 temos que $f_a + Hl_a$ é constante em Σ^n, donde $-|\phi|^2 f_a = 0$, o que implica em $|\phi|^2 = 0$, pois $f_a \neq 0$. Desta forma concluimos que Σ^n é uma hipersuperfície totalmente umbílica de $\mathbb{H}^{n+1}$. Veja que

$$|Hessl_a - \frac{1}{n}(\Delta l_a)g| = |Hessl_a|^2 - \frac{1}{n}(\Delta l_a)^2 = 0.$$

Usando o Lema 7, concluímos que Σ^n é uma esfera geodésica de $\mathbb{H}^{n+1}$.

□

Para provarmos nosso próximo resultado precisaremos das seguintes definições.

Definição 19. *Seja M uma variedade Riemanniana. Dizemos que uma aplicacão diferenciável $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é subharmônica se*

$$\Delta f \geq 0,$$

onde Δf é o operador Laplaciano de f. Se -f é subharmônica, então diz-se que f é superharmônica.

Definição 20. *Diz-se que uma Superfície Riemanniana M é parabólica se é completa, não compacta e toda função subharmônica e negativa em M é constante.*

Observação 10. *Se f é uma função subharmônica e limitada superiormente sobre uma variedade parabólica M, então $f < k$ para algum $k \in \mathbb{R}$. Logo a função $f - k$ é subharmônica e negativa sobre M, então f é constante.*

O próximo resultado foi obtido por A.Huber e a demonstração pode ser encontrada em [6].

Lema 8. *Toda superfície Riemanniana completa, não compacta e com curvatura Gaussiana não negativa é parabólica.*

Para o que segue diremos que Σ^n está contida no domínio interior determinado pelo plano $\mathcal{L}_\beta$ de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ se $f_a < \beta$.

Teorema 11. *Seja $\varphi : \Sigma^2 \longrightarrow \mathbb{H}^3$ uma superfície completa com curvatura Gaussiana não negativa contida na região entre duas horoesferas L_β e L_τ, onde $0 < \beta < \tau$. Suponha que $\mathrm{N}(\Sigma)$ esteja contido no fecho do domínio interior determinado pelo plano $\mathcal{L}_{-\beta}$ de $\mathbb{S}_1^3$. Se a curvatura média H de Σ^2 satisfaz*

$$\mathrm{H} \geq \frac{\tau}{\beta} \ ,$$

então Σ^2 é uma horoesfera.

Demonstração. Seja $a \in \mathbb{L}^4$ o vetor tipo-luz não nulo que determina as horoesferas L_β e L_τ e o plano $\mathcal{L}_{-\beta}$. Sabemos que

$$\Delta l_a = nHf_a + nl_a.$$

Por hipótese, temos as seguintes desigualdades

$$\beta \leq l_a \leq \tau \quad \text{e} \quad f_a \leq -\beta.$$

Logo teremos

$$\Delta l_a \leq -n(\mathrm{H}\beta - \tau).$$

Usando o fato de que $\mathrm{H} \geq \dfrac{\tau}{\beta}$ temos que $\Delta l_a \leq 0$, donde $-l_a$ é uma função subharmônica e negativa. Por outro lado, usando o Lema 7 temos que Σ^2 é parabólica, então l_a é constante. Assim Σ^2 é uma horoesfera, pois a é tipo-luz e Σ^2 é completa.

□

Capítulo 3

Cilindros Hiperbólicos em $\mathbb{H}^{n+1}$

3.1 O Produto $\mathbb{S}^k(\rho) \times \mathbb{H}^{n-k}(\sqrt{1+\rho^2}\ )$

Neste capítulo, definiremos o cilindro hiperbólico Riemanniano que é uma hipersuperfície do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$. Faremos, inicialmente, algumas considerações sobre o produto de imersões . Sejam M e N variedades Riemannianas com métricas $g_M = \langle \cdot, \cdot \rangle^M$ e $g_N = \langle \cdot, \cdot \rangle^N$, respectivamente. Ponha (como variedade produto) $M \times N$ e sejam $\pi : M \times N \to M$ e $\sigma : M \times N \to N$ as projeções canônicas de $M \times N$ sobre M e N. A métrica Remanniana produto $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em $M \times N$ é dada por

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \pi^* \langle \cdot, \cdot \rangle^M + \sigma^* \langle \cdot, \cdot \rangle^N.$$

Denotando por ∇^M, ∇^N, as conexões Riemannianas de M e N respectivamente, tem-se

$$\nabla_X^{M \times N} Y = \nabla_{X_M}^M Y_M + \nabla_{X_N}^N Y_N,$$

onde $X = (X_M, X_N)$ e $Y = (Y_M, Y_N)$ são campos de vetores em $\mathfrak{X}(M \times N)$.

Considere um inteiro k satisfazendo $0 \leq k < n$, e seja $f : \mathbb{H}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave dada por

$$f(p) = p_1^2 + ... + p_{k+1}^2,$$

onde $p = (p_1, ..., p_{n+2})$. Seja $\rho > 0$ e tome $\Sigma^n = f^{-1}(\rho)$, então pelo Teorema da Função Implícita Σ^n é uma hipersuperfície mergulhada em $\mathbb{H}^{n+1}$. Note que $f(p) = \langle p, \nu(p) \rangle$ onde $\nu(p) = (p_1, ..., p_{k+1}, 0, ..., 0)$, análogo como foi feito anteriormente, pode-se mostrar que

$$\overline{N}(p) = \frac{\overline{\nabla} f}{|\overline{\nabla} f|}(p) = \frac{1}{\rho\sqrt{1+\rho^2}}(\nu(p) + \rho^2 p)$$

define um campo vetorial unitário normal a Σ, onde $\overline{\nabla}$ denota a conexão de Levi-Civita de $\mathbb{H}^{n+1}$. Seja $p = (p_1, ..., p_{n+2}) \in \Sigma^n$, e considere as imersões canônicas

$$h : \mathbb{S}^k(\rho) \hookrightarrow \mathbb{R}^{k+1} \ ; \ h(p) = p$$

e

$$j : \mathbb{H}^{n-k}(\sqrt{1+\rho^2}\ ) \hookrightarrow \mathbb{L}^{n-k+1}; \ j(p) = p.$$

Por construção, temos que $\Sigma^n = \{p \in \mathbb{H}^{n+1}; p_1^2 + ... + p_{k+1}^2 = \rho^2\}$, logo tomando a imersão produto

$$h \times j : \mathbb{S}^k(\rho) \times \mathbb{H}^{n-k}(\sqrt{1+\rho^2}\ ) \hookrightarrow \mathbb{H}^{n+1}$$

temos $\Sigma^n = \mathbb{S}^k(\rho) \times \mathbb{H}^{n-k}(\sqrt{1+\rho^2}\ )$, chamaremos Σ^n de *Cilindro hiperbólico* de $\mathbb{H}^{n+1}$. Calcularemos o operador de forma de Σ^n com respeito ao campo $\mathrm{N} = -\overline{\mathrm{N}}$. Usando a formúla de Weingarten para hipersuperfícies teremos

$$AX = \nabla_X^0 \mathrm{N} = \frac{\sqrt{1+\rho^2}}{\rho}(\mathrm{X}_1, 0) + \frac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2}}(0, \mathrm{X}_2),$$

onde $X = (X_1, X_2)$ é um campo de vetores tangente a Σ^n com X_1 tangente a $\mathbb{S}^k(\rho)$ e X_2 tangente a $\mathbb{H}^{n-k}(\sqrt{1+\rho^2})$. Logo vemos que $\mathbb{S}^k(\rho) \times \mathbb{H}^{n-k}(\sqrt{1+\rho^2}\ )$ tem curvatura média constante.

Seja $\mathbb{S}^k(\rho) \times \mathbb{H}^{n-k}(\sqrt{1+\rho^2}\ )$ um cilindro hiperbólico imerso em $\mathbb{H}^{n+1}$ e fixe o vetor tipo-luz $a = (0, ..., 1) \in \mathbb{L}^{n+2}$, logo

$$f_a = \langle -\overline{\mathrm{N}}(\mathrm{p}), a\rangle = \frac{1}{\rho\sqrt{1+\rho^2}}(\langle \nu(p), a\rangle + \rho^2\langle p, a\rangle) = -\frac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2}} l_a,$$

onde f_a e l_a são as funções suporte da imersão $h \times j : \mathbb{S}^k(\rho) \times \mathbb{H}^{n-k}(\sqrt{1+\rho^2}\ ) \hookrightarrow \mathbb{H}^{n+1}$. Dada uma hipersuperfície totalmente umbílica de $\mathbb{H}^{n+1}$ temos que sua curvatura média H e a função suporte l_a são constantes, então

$$l_a = -\mathrm{H} f_a.$$

Para a prova do nosso próximo resultado usaremos o seguinte Lema cuja prova pode ser vista em [9].

Lema 9. *Seja $\varphi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície com operador de forma A. Suponha que $\nabla A = 0$, então a menos de isometrias, Σ^n é uma subvariedade aberta de $\mathbb{S}^k(\rho) \times \mathbb{H}^{n-k}(\sqrt{1+\rho^2}\ )$ para $\rho > 0$ e $k = 0, ..., n$ ou de $F^n = \{x \in \mathbb{H}^{n+1}; x_{n+1} = x_n + 1\}$.*

Nosso próximo resultado garante que se tivermos uma hipersuperfície no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$ com uma dependência linear de suas funções auxiliares, teremos uma hipersuperfície umbílica ou um cilindro hiperbólico, mais precisamente:

Teorema 12. *Seja $\varphi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ uma hipersuperfície completa imersa em $\mathbb{H}^{n+1}$ com curvatura média constante* H. *Se $l_a = \lambda f_a$ para algum vetor não-nulo $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ tipo-tempo ou tipo-espaço, e algum $\lambda \in \mathbb{R}$, então Σ^n ou é uma hipersuperfície totalmente umbílica ou um cilindro hiperbólico $\mathbb{S}^k(\rho) \times \mathbb{H}^{n-k}(\sqrt{1+\rho^2}\ )$.*

Demonstração. Suponha que $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ é um vetor tipo-tempo tal que $l_a = \lambda f_a$, neste caso $\mathrm{H} \neq 0$ e $\lambda \neq 0$, basta usar a desigualdade reversa de Cauchy-Schwarz e a linearidade do Laplaciano. Por linearidade, temos que $\Delta l_a = \lambda \Delta f_a$. Usando o Lema 2 temos

$$\Delta l_a = S_1 f_a + n l_a$$

e

$$\Delta f_a = -(S_1^2 - 2S_2) f_a - S_1 l_a.$$

Substituindo $\Delta l_a = \lambda \Delta f_a$ nas equações acima teremos

$$\lambda^2 \Delta f_a \quad = \quad S_1 l_a + \lambda n l_a \tag{3.1}$$

e

$$\lambda^2 \Delta f_a \quad = \quad -\lambda(S_1^2 - 2S_2) l_a - \lambda^2 S_1 l_a. \tag{3.2}$$

Subtraindo as equações (3.1) e (3.2) teremos

$$(S_1 + \lambda n + \lambda S_1^2 - 2\lambda S_2 + \lambda^2 S_1) l_a = 0.$$

Usando a desigualdade reversa de Cauchy-Schwarz temos que l_a não pode ser nulo logo

$$S_2 = \frac{S_1 + \lambda n + \lambda S_1^2 + \lambda^2 S_1}{2\lambda}. \tag{3.3}$$

A equação (3.3) implica que S_2 é constante em Σ^n pois $S_1 = \mathrm{H}$. Fazendo o mesmo cálculo para L_1 tem-se

$$S_3 = \frac{2S_2 + (n-1)\lambda S_1 + \lambda S_1 S_2 + 2\lambda^2 S_2}{3\lambda}. \tag{3.4}$$

Usando a equação (1.6) teremos

$$\begin{aligned}
L_1(S_1) &= L_0(S_2) + S_1[\Delta S_1 - L_0(S_1)] \\
&+ \sum_k |P_0 \nabla_{e_k} A|^2 - |\nabla S_1|^2 \\
&+ tr(AP_0)\{S_1(|A|^2 + n) - [tr(A^2 P_1) + tr(P_1)]\} \\
&- (tr(A^2 P_0)[tr(A^2 P_0) + tr(P_0)].
\end{aligned}$$

Usando as propreiedades dos operadores de Newton e a Observação 9 temos

$$\begin{aligned}
L_1(S_1) &= \Delta S_2 + \{|\nabla A|^2 - |\nabla S_1|^2\} \\
&+ S_1\{S_1(|A|^2 + n) - [S_1 S_2 - 3S_3 + (n-1)S_1]\} \\
&- (S_1^2 - 2S_2)[S_1^2 - 2S_2 + n].
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
L_1(S_1) &= \Delta S_2 + \{|\nabla A|^2 - |\nabla S_1|^2\} \\
&- S_1[S_1 S_2 - 3S_3 + (n-1)S_1]\} \\
&+ 2S^2(|A|^2 + n).
\end{aligned}$$

Agora observando que S_1 e S_2 são constantes, obtemos que

$$|\nabla A|^2 + S_1^2 S_2 + 3S_1 S_3 + 2nS_2 + S_1^2 - 4S_2^2 - nS_1^2 = 0$$

em Σ^n. Substituindo a equação (3.4) na equação acima teremos que a seguinte igualdade é válida em Σ^n

$$\lambda|\nabla A|^2 + 2\lambda S_1^2 S_2 + 2S_1 S_2 + 2\lambda^2 S_1 S_2 + 2\lambda n S_2 - 4\lambda S_2^2 = 0. \tag{3.5}$$

Note que $S_2 \neq 0$ pois caso contrário pela equação (3.4) teríamos $S_3 = \dfrac{(n-1)S_1}{3}$, mas pela desigualdade (1.5) temos $0 = H_2^2 \geq H_1 H_3$, donde $\dfrac{S_1^2}{3n^2(n-2)} \leq 0$.

Dividindo a equação (3.5) por $2S_2$ e comparando com a equação (3.3) teremos que $|\nabla A|^2 = 0$, o que implica em $\nabla A = 0$. Usando o Lema 8 e o fato de que Σ^n é completa temos que, Σ^n ou é uma hipersuperfície umbílica ou um cilindro hiperbólico $\mathbb{S}^k(\rho) \times \mathbb{H}^{n-k}(\sqrt{1+\rho^2}\ )$. Suponha agora que a é um vetor não nulo tipo-espaço de $\mathbb{L}^{n+2}$. Se $\lambda = 0$, então Σ^n é uma hipersuperfície totalmente geodésica, suponha que $\lambda \neq 0$,então usando novamente que

$$(S_1 + \lambda n + \lambda S_1^2 - 2\lambda S_2 + \lambda^2 S_1) l_a = 0$$

em Σ^n. Defina $h : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$h = S_1 + \lambda n + \lambda S_1^2 - 2\lambda S_2 + \lambda^2 S_1.$$

Suponha que existe $p_0 \in \Sigma^n$ tal que $h(p_0) \neq 0$, então por continuidade existe uma vizinhança δ de p_0 em Σ^n tal que $h(p) \neq 0$ para todo $p \in \delta$. Logo $l_a = 0$ em δ e pela dependência linear $f_a = 0$ em δ. Mas por outro lado, usando a decomposição $a^T = a - f_a N + l_a \varphi$ e o fato de que a é tipo-espaço teremos

$$|\nabla l_a|^2 - l_a^2 + f_a^2 = 1$$

em Σ^n, donde $h = 0$ em Σ^n. Repetindo o mesmo argumento anterior segue o resultado.

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] AQUINO, C. P.; DE LIMA, H. F.*On the Gauss map of complete CMC hypersurfaces in the hyperbolic space*. J. Math. Anal. Appl. v. 386, p. 862-869, 2012.

[2] AQUINO, C. P.; *Uma caracterização de hipersuperfícies na esfera com curvatura escalar constante*. Dissertação de mestrado-UFC,2003.

[3] AQUINO, C. P.; *Sobre Rigidez de hipersuperfícies completas*. Tese de doutorado-UFC,2011.

[4] A. CAMINHA , *On hypersurfaces into Riemannian spaces of constant sectional curvature*. Kodai Math. J. 29 (2006) 185-210.

[5] A. CAMINHA ,*On spacelike hypersurfaces of constant sectional curvature lorentz manifolds* Geometry and Physics,1144-1774.

[6] A. HUBER, *On subharmonic functions and differential geometry in the large*. Comment. Math. Helv. 32 (1957) 13-72.

[7] ALÍAS,L.J.; RIGOLI M. *An introduction to the Omory-Yau Maximum Principle and applications*. XVI Escola de geometria duferencial, USP.2010.

[8] DO CARMO, M. P. - *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides - IMPA, 2005.

[9] H.B. LAWSON, *Local rigitity theorems for minimal Hypersurfaces*. Ann. of Math. (2) 89 (1969) 187-197.

[10] LÓPEZ, R. ; MONTIEL, S. *Existence of constant mean curvature graphs in hyperbolic space*. Calc. Var., v.8, p177-190, 1999.

[11] MONTIEL S., *An integral inequality for compact spacelike hypersurfaces in de Sitter space and applications to the case of constat mean curvature* Indiana Univ. Math. J.37 (1988) 909-917.

[12] O'NEILL, B. *Semi-Riemannian Geometry with applications to Relativity.* Academic Press, Londres, 1983.

[13] SOUSA,P.A., *O laplaciano de uma função tipo suporte e aplicações.* Dissertação de mestrado-UFC,2004.