Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Curvatura de métricas invariantes à esquerda em grupos de Lie

Bernardo Cardoso de Araújo

Teresina - 2013

Bernardo Cardoso de Araújo

Dissertação de Mestrado:

Curvatura de métricas invariantes à esquerda em grupos de Lie

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Newton Luís Santos

Teresina - 2013

Araújo, B. C.

Axxxc Curvatura de métricas invariantes à esquerda
em grupos de Lie.

Bernardo Cardoso de Araújo – Teresina: 2013.

Orientador: Prof. Dr. Newton Luís Santos.

1. Geometria Diferencial 2. Grupos de Lie

CDD 516.36

Ao meu irmão Giovane Cardoso.

Agradecimentos

Agradeço inicialmente aos meus professores de graduação, em especial ao professor Roberto Ramos que foi um verdadeiro pai à primeira turma de matemática da Universidade Federal do Piauí, Campus de Parnaíba.

Agradeço separadamente ao professor Alexandro Marinho pelo incentivo durante a graduação, pois sem isto com certeza eu não teria enfrentado o verão e, consequentemente, não teria entrado no mestrado. Obrigado meu grande amigo, serei eternamente grato e, tentarei sempre lhe trazer orgulho.

Agradeço aos meus professores de mestrado, Barnabé, Carlos Humberto, Jurandir e Marcos Vinício, que me deram o suporte necessário à essa grande conquista, obrigado, pois vocês fazem parte desta vitória.

Agradeço ao meu orientador, o professor Newton Luís Santos, que me acompanhou durante toda essa jornada, com paciência e dedicação, sempre me mostrando além do que eu posso neste universo desconhecido que é a matemática, agradeço-o, também, pela excelente escolha do tema trabalhado. Obrigado pelo apoio.

Agradeço aos membros da banca, Fernanda Camargo, Juscelino Silva e Paulo Alexandre por terem aceito o convite.

Agradeço aos meus grandes amigos, Diego Prudêncio, Israel e Mykael, que me acompanharam durante graduação e mestrado, obrigado a vocês que são como irmãos para mim.

Agradeço aos meus familiares, pais e irmãos, que na medida do possível me deram o apoio necessário, em especial agradeço meu irmão Giovane, que sempre acreditou em mim, você mais que qualquer outro merece o mérito dessa vitória.

Agradeço aos meus amigos que fiz ao longo do mestrado, que, exageradamente, alguns acreditavam mais em mim do que mesmo, não citarei nomes para não correr o risco de esquecer alguém, pois todos foram muito importantes para serem esquecidos.

Agradeço a CAPES, pelo apoio financeiro.

Por fim, agradeço a Deus, por ter colocado em minha vida todas estas pessoas que, cada uma, em seu tempo, desempenhou um papel fundamental na minha formação. Obrigado Deus, por minhas capacidades, pelo meu passado, presente e futuro, vitórias, derrotas, obrigado, pois tudo que existe em minha vida eu devo a Ti.

"O único lugar onde o sucesso vem antes do trabalho é no dicionário".

Albert Einstein.

Resumo

Neste trabalho, são apresentadas algumas propriedades do tensor de curvatura sobre métricas invariantes à esquerda em grupos de Lie e ainda uma classificação completa das álgebras de Lie de dimensão 3. Os resultados estudados e desenvolvidos foram extraídos em sua maioria do artigo de John Milnor, Curvatures of Left Invariant Metrics on Lie Groups, Advances in Mathematics, vol. 21, no 3, 293-329, 1976. Este trabalho termina com a apresentação de alguns exemplos de grupos de Lie, com ênfase especial ao caso tridimensional.

Abstract

In this paper, we present some properties of the curvature tensor on left invariant metrics on Lie groups and also a complete classification of 3-dimensional Lie algebras. The results presented and developed here were extracted mostly from the paper of John Milnor, Curvatures of Left Invariant Metrics on Lie Groups, Advances in Mathematics, vol. 21, no 3, 293-329, 1976. This work ends with the presentation of some examples of Lie groups with special emphasis on three-dimensional case.

Sumário

Introdução

Um grupo de Lie, munido de uma métrica invariante à esquerda, é uma variedade Riemanniana dotada de uma estrutura de grupo, na qual dados geométricos (geodésicas, curvaturas, etc) são particularmente simples: a álgebra de Lie associada e o valor da métrica na identidade do grupo determinam completamente a conexão Riemanniana e, portanto, o tensor de curvatura.

A coleção de exemplos que se obtém com variedades Riemannianas desse tipo e seus quocientes por subgrupos fechados (variedades homogêneas) é de fundamental importância em geometria.

No capítulo 1, apresentamos algumas noções básicas da geometria Riemanniana, notações a serem utilizadas ao longo do nosso trabalho e alguns dos pré-requisitos para o bom entendimento dos capítulos seguintes.

No capítulo 2, apresentamos uma noção bastante introdutória e elementar dos conceitos básicos da teoria de grupos de Lie e álgebras de Lie. Tal capítulo não contém toda a teoria de grupos de Lie e álgebras de Lie que precisamos ao longo dos capítulos seguintes, por isso tentamos sempre deixar claro quais as referências utilizadas nas demonstrações dos principais resultados estudados.

O foco deste trabalho está nos capítulos 3 e 4 que consiste no estudo do artigo "Curvatures of Left Invariant Metrics on Lie Groups", de John Milnor [7]. Na seção 3.1, apresentamos a curvaturas seccionais de um grupo de Lie munido com uma métrica invariante à esquerda, entre os resultados estudados estão

Lema 1. *Em termos das constantes de estruturas* α_{ijk}*, a curvatura seccional* $\kappa(e_1, e_2)$ *é dada pela fórmula*

$$\begin{aligned}\kappa(e_1,e_2) &= \sum_{k=1}^{n}\big[\tfrac{1}{2}\alpha_{12k}(-\alpha_{12k}+\alpha_{2k1}+\alpha_{k12})-\tfrac{1}{4}(\alpha_{12k}-\alpha_{2k1}+\alpha_{k12})(\alpha_{12k}+\alpha_{2k1}-\alpha_{k12})\\ &\quad -\alpha_{k11}\alpha_{k22}\big].\end{aligned}$$

Esta expressão evidencia a dependência contínua da curvatura seccional em relação às constantes de estrutura da álgebra de Lie associada. Apresentamos a Classificação dos grupos de Lie que, para qualquer métrica invariante à esquerda, tem curvaturas seccionais negativas, resultado este fornecido pelo

Lema 2. *Suponha que a álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *tem a propriedade de que o colchete* $[x, y]$ *é sempre igual a uma combinação linear de* x *e* y*. Assumindo que dim* $\mathfrak{g} \geqslant 2$*, então*

$$[x, y] = \ell(x)y - \ell(y)x$$

onde ℓ *é um funcional linear bem definido de* $\mathfrak{g}$ *no conjunto dos números reais. Escolhendo qualquer métrica positiva definida, as curvaturas seccionais são constantes e dadas por*

$$\kappa(x, y) = -\|\ell\|^2.$$

Na seção 3.2, verificamos que, de fato, estes são os únicos grupos de Lie com essa propriedade.

Na seção 3.2, discutimos o problema de classificação dos grupos de Lie com curvatura de Ricci $\mathsf{Ricci} \leqslant 0$, $\mathsf{Ricci} < 0$ e $\mathsf{Ricci} \geqslant 0$, sendo o primeiro resolvido pelo resultado seguinte.

Teorema 1. *Um grupo de Lie admite métrica invariante à esquerda com todas as curvaturas de Ricci estritamente positivas se, e somente se, ele é compacto e seu grupo é fundamental finito.*

Os dois últimos problemas permanecem em aberto.

Na seção 3.3, tratamos a curvatura escalar, sobre um rápido ponto de vista. Apresentamos condições sobre o sinal da curvatura escalar. Apresentamos o seguinte resultado de classificação.

Teorema 2. *Se o grupo de Lie* G *é solúvel, então toda métrica invariante à esquerda sobre* G *é* flat*, ou possui curvatura escalar estritamente negativa.*

Nas seções 4.1 e 4.2, apresentamos uma classificação completa das álgebras de Lie de dimensão 3, mostramos que uma álgebra de Lie tridimensional é unimodular se, e somente se, existem uma base $\{e_1, e_2, e_3\}$ e números reais $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tais que

$$[e_2, e_3] = \lambda_1 e_1,\ [e_3, e_1] = \lambda_2 e_2 \text{ e } [e_1, e_2] = \lambda_3 e_3.$$

Verificamos, que além de 6 álgebras de Lie unimodulares existem ainda 3 álgebras de Lie não unimodulares de dimensão 3. Em todos os casos apresentamos as possíveis assinaturas de Ricci e completaremos, no capítulo 5, com exemplos de 5 das 6 álgebras de Lie unimodulares de dimensão 3.

Para finalizar o capítulo 3, apresentamos na seção 4.3 condições necessárias e suficientes para que um grupo conexo de Lie admita métrica bi-invariante, que é dado pelo

Lema 3. *Uma métrica invariante à esquerda em um grupo de Lie conexo é invariante à direita se, e somente se,* $\mathrm{ad}(x)$ *é antiadjunta para todo* $x \in \mathfrak{g}$. *Um grupo de Lie conexo, admite métrica bi-invariante se, e somente se, é isomorfo ao produto cartesiano de um grupo de Lie compacto e um grupo comutativo.*

E, ainda, verificamos como se comportam os ideais da álgebra de Lie associada e o recobrimento universal em grupos de Lie que admitem métrica bi-invariantes.

Por fim, apresentamos no Apêndice A uma demonstração de que o conjunto formado pelos tensores de curvatura de uma variedade Riemanniana M de dimensão n em um ponto p é $n^2(n^2-1)/12$.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Neste capítulo apresentamos as noções básicas de geometria Riemanniana e, para este fim, adotamos, principalmente a referência [1]. Apresentaremos vários de seus resultados e conceitos que são de grande importância para o nosso estudo. As demonstrações dos resultados listados, neste capítulo, são omitidas e podem ser encontradas em [1].

Ao longo de todo o texto, faremos o uso da notação de Einstein, que consiste em interpretar índices repetidos com o somatório referente a este índice sobre todos os valores possíveis, por exemplo se tivermos a expressão $a_{ij}x_i$ (na maioria dos textos esta interpretação é feita apenas quando há um índice subscrito e outro sobrescrito que se repetem, como por exemplo $a_j^i x_i$, porém não faremos uso de índice sobrescrito) entenderemos como uma soma sobre todos os possíveis valores de i, isto é $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i$. Note por exemplo que se tivermos a expressão $a_{ij} + b_{ji}$ isso não representará um somatório, pois os índices se repetem, mas isso ocorre em parcelas diferentes.

1.1 Variedades diferenciáveis

Os conceitos e resultados apresentados nessa seção podem ser encontrados em [1], no capítulo 0.

Definição 1.1. *Uma* variedade diferenciável real *de dimensão* n *é um conjunto* M *e uma família de aplicações biunívocas* $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ *de abertos* U_α *de* $\mathbb{R}^n$ *tais que:*

(1) $\bigcup_{\alpha} x_\alpha(U_\alpha) = M$.

(2) *Para todo par* α, β, *com* $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, *os conjuntos* $x_\alpha^{-1}(W)$ *e* $x_\beta^{-1}(W)$ *são abertos em* $\mathbb{R}^n$ *e as aplicações* $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ *são diferenciáveis.*

(3) *A família* $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ *é máxima relativamente às condições (1) e (2).*

Observação 1.1. Sem impor a condição de maximalidade, (3) chamaremos a uma familia $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}_\alpha$ satisfazendo (1) e (2) de estrutura diferenciável para M.

A ideia de aplicação diferenciável em variedades é estabelecida pela definição a seguir.

Definição 1.2. *Sejam* M_1^n *e* M_2^m *variedades diferenciáveis. Dizemos que uma aplicação* $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ *é diferenciável em* $p \in M_1$ *se dada uma parametrização* $y : V \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow M_2$ *em* $\varphi(p)$ *existe uma parametrização* $x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M_1$ *em* p *tal que* $\varphi(x(U)) \subset y(V)$ *e a aplicação*

$$y^{-1} \circ \varphi \circ x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

é diferenciável em $x^{-1}(p)$. φ *é diferenciável em um aberto de* M_1 *se é diferenciável em todos os pontos deste aberto.*

Gostaríamos agora de estender às variedades diferenciáveis o conceito de vetor tangente. Usando nosso conhecimento superfícies de regulares do $\mathbb{R}^3$, em que o vetor tangente, em um ponto p, da superfície é definido como a "velocidade", em $\mathbb{R}^3$, de uma curva da superfície passando por p. Nos caso de variedades, não dispomos de um espaço Euclidiano ambiente, precisaremos encontrar uma propriedade que caracterize os vetores tangentes para substituir a velocidade.

Definição 1.3 (vetor tangente)**.** *Seja* M *uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável* $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ *é chamada curva (diferenciável) em* M. *Suponha que* $\alpha(0) = p \in M$, *e seja* $\mathcal{D}$ *o conjunto das funções de* M *diferenciáveis em* p. *O vetor tangente à curva* α *em* $t = 0$ *é a função* $\alpha'(0) : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$\alpha'(0)f = \left.\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\right|_{t=0}, \quad f \in \mathcal{D}.$$

A definição acima é motivada pela seguinte consideração. Seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva diferenciável de $\mathbb{R}^n$, com $\alpha(0) = p$. Escreva

$$\alpha(t) = (x_1(t), ..., x_n(t)), \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon), \quad (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Então $\alpha'(0) = (x_1'(0), ..., x_2'(0) = v \in \mathbb{R}^n$. Seja agora, f, uma função diferenciável definida em uma vizinhança de p. Podemos restringir f à curva α e calcular a derivada direcional segundo o vetor $v \in \mathbb{R}^n$ como

$$\left.\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_p \left.\frac{dx_i}{dt}\right|_{t=0} = \left(x_i'(0) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \right) f$$

(relembre que aqui estamos usando a notação de Einstein e portanto estamos somando com relação ao índice i). Portanto, a derivada direcional segundo v é um funcional linear sobre funções diferenciáveis que depende unicamente de v.

Proposição 1.1. *Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis se seja $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M_1$ e cada $v \in T_pM_1$, escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M_1$ com $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. Faça $\beta = \varphi \circ \alpha$. A aplicação $d\varphi_p : T_pM_1 \longrightarrow T_{\varphi(p)}M_2$ dada por $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de α.*

Definição 1.4. *A aplicação linear $d\varphi_p$ dada pela proposição 1.1 é chamada diferencial de φ em p.*

Definição 1.5. *Sejam M_1 e M_2 variedades diferenciáveis. Diz-se que aplicação diferenciável $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ é um difeomorfismo se ela bijetiva e sua inversa φ^{-1} é diferenciável. φ é um difeomorfismo local em $p \in M_1$ se existem vizinhanças U de p e V de $\varphi(p) \in M_2$ tais que $\varphi : U \longrightarrow V$ é um difeomorfismo.*

A noção de difeomorfismo é uma noção natural de equivalência no conjunto das variedades diferenciáveis. É ainda uma consequência do teorema da função composta que se $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ é um difeomorfismo, então $d\varphi : T_pM_1 \longrightarrow T_{\varphi(p)}M_2$ é um isomorfismo de espaços vetoriais para todo $p \in M_1$; em particular, as dimensões de M_1 e M_2 são iguais. E podemos ainda ver a recíproca pelo seguinte teorema.

Teorema 1.1. *Seja $\varphi : M_1^n \longrightarrow M_2^n$ uma aplicação diferenciável e seja $p \in M_1$ tal que $d\varphi_p : T_pM_1 \longrightarrow T_{\varphi(p)}M_2$ é um isomorfismo. Então φ é um difeomorfismo local em p.*

Nossa referência [1] não apresenta a demonstração deste fato, mas esta é uma consequência imediata do teorema da função inversa no $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.6. *Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $\varphi : M \longrightarrow N$ é uma imersão se $d\varphi_p : T_pM \longrightarrow T_{\varphi(p)}N$ é injetiva para todo $p \in M$.*

Se, além disto, φ *é um homeomorfismo sobre* $\varphi(M) \subset N$*, onde* $\varphi(M)$ *tem a topologia induzida por N, diz-se que* φ *é um mergulho. Se* $M \subset N$ *e a inclusão* $i : M \hookrightarrow N$ *é um mergulho, diz-se que* M *é uma subvariedade de* N*.*

Observe-se que $\varphi : M^m \longrightarrow N^n$ é uma imersão, então $m \leqslant n$; a diferença $n - m$ é chamada a codimensão de φ.

Quando lidamos com situações de caráter estritamente local, em Geometria, é indiferente tratar como imersões ou mergulhos. Isso provém da seguinte proposição que mostra ser, toda imersão, localmente (no sentido abaixo explicitado) um mergulho.

Proposição 1.2. *Seja* $\varphi : M_1^n \longrightarrow M_2^m$*,* $n \leqslant m$*, uma imersão da variedade* M_1 *na variedade* M_2*. Para todo ponto* $p \in M_1$*, existe uma vizinhança* $V \subset M_1$ *de* p *tal que a restrição* $\varphi|V \longrightarrow M_2$ *é um mergulho.*

Um conceito global muito importante em variedades é o de orientação, o qual definiremos a seguir.

Definição 1.7. *Seja* M *uma variedade diferenciável. Diz-se que* M *é orientável se* M *admite uma estrutura diferenciável* $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ *tal que:*

(i) *para todo par* α, β*, com* $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$*, a diferencial da mudança de coordenadas* $x_\beta \circ x_\alpha^{-1}$ *tem determinante positivo.*

Caso contrário, diz-se que M *é não-orientável. Se* M *é orientável, a escolha de uma estrutura diferenciável satisfazendo* (i) *é chamada uma orientação de* M *e, neste caso, diz-se que* M *é uma variedade orientada. Duas estruturas diferenciáveis que satisfazem* (i) *determinam a mesma orientação se a união ainda satisfaz* (i)*.*

Exemplo 1.1. Seja M^n uma variedade diferenciável e seja $TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_pM\}$. É possível munir o conjunto TM de uma estrutura diferenciável (de dimensão 2n); com tal estrutura TM é chamado fibrado tangente de M. Este é o espaço natural de se trabalhar quando estamos tratando de questões que envolvem posição e velocidades.

Um conceito que será bastante usado em nosso texto é o de campo de vetores em uma variedade.

Definição 1.8. *Um campo de vetores* X*, em uma variedade diferenciável* M*, é uma correspondência que a cada ponto* $p \in M$*, associa um vetor* $X(p) \in T_pM$*. Em termos de* *aplicações,* X *é uma aplicação de* M *no fibrado tangente* TM*. O campo é diferenciável se a aplicação* $X : M \longrightarrow TM$ *é diferenciável.*

Considerando a parametrização $x : U \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ é possível representar localmente

$$X(p) = a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p,$$

onde cada $a_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função em U e $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}_{i=1}^{n}$ é o referencial coordenado local, associado a x. X é diferenciável se e só se as funções a_i são diferenciáveis para alguma parametrização.

Considerando campos de vetores como operadores $X : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ caracterizado em cada sistema local de coordenadas $x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$, por

$$(Xf)(p) = a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p),$$

onde f indica, por abuso de notação, a expressão de f na parametrização $x \quad f = f \circ x = f|_{x(U)}$.

A interpretação de X como um operador em $\mathcal{D}$ permite-nos considerar as iterados de X. Por exemplos, se X e Y são campos de diferenciáveis em M e $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, podemos considerar as funções $X(Yf)$ e $Y(Xf)$. Em geral, tais operações não conduzem a campos de vetores, por envolver derivadas de ordem superior à primeira. No entanto temos o seguinte resultado.

Lema 1.1. *Sejam* X *e* Y *campos de vetores diferenciáveis em uma variedade diferenciável* M*. Então existe um único campo de vetores diferenciável,* Z*, tal que, para toda* $f \in \mathcal{D}$*,* $Zf = (XY - YX)f$.

O campo vetorial Z definido pelo lema 1.1 é chamado o colchete $[X, Y] = XY - YX$ de X e Y.

A operação colchete possui as seguintes propriedades:

Proposição 1.3. *Se* X, Y *e* Z *são campos diferenciáveis em* M*,* a, b *são números reais, e* f, g *são funções diferenciáveis, então:*

(a) $[X, Y] = -[Y, X]$ *(anticomutatividade),*

(b) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ *(linearidade),*

(c) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ *(identidade de Jacobi),*

(d) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

É bem sabido que uma variedade diferenciável é localmente difeomorfa a um $\mathbb{R}^n$, o teorema fundamental de existência, unicidade e dependência das condições iniciais das equações diferenciais ordinárias se estende naturalmente às variedades diferenciáveis.

Seja X *um campo diferenciável de vetores em uma variedade diferenciável* M*, e seja* $p \in M$*. Então existem uma vizinhança* $U \subset M$ *de* p*, um intervalo* $(-\delta, \delta)$*,* $\delta > 0$*, e uma aplicação diferenciável* $\varphi : (-\delta, \delta) \times U \longrightarrow M$ *tais que a curva* $t \longrightarrow \varphi(t, q)$*,* $t \in (-\delta, \delta)$*,* $q \in U$*, é a única curva que satisfaz* $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = X(\varphi(t, q))$ *e* $\varphi(0, q) = q$*. É comum utilizar a notação* $\varphi_t(q) = \varphi(t, q)$ *e chamar* $\varphi_t : U \longrightarrow M$ *o fluxo local de* X*.*

A proposição a seguir nos fornece uma interpretação para o colchete $[X, Y]$ como derivações de Y ao longo das trajetórias de X.

Proposição 1.4. *Sejam* X, Y *campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável* M*, seja* $p \in M$*, e seja* φ_t *o fluxo local de* X *em uma vizinhança* U *de* p*. Então*

$$[X, Y](p) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[Y - d\varphi_t Y](\varphi_t(p)).$$

Até agora não fizemos restrição alguma quanto à topologia das variedades diferenciáveis. Em verdade, a topologia das variedades pode ser bastante estranha. Em particular, pode acontecer que um (ou ambos) dos seguintes axiomas não seja satisfeito:

(A) *Axioma de Hausdorff:* Dados dois pontos distintos de M existem vizinhanças destes dois pontos que não se intersectam.

(B) *Axioma da base enumerável:* M pode ser coberta por uma quantidade enumerável de vizinhanças coordenadas (diz-se então que M *tem base enumerável*).

O Axioma A é essencial à unicidade do limite de uma sequência convergente e o Axioma B é essencial à existência de uma partição da unidade, instrumento fundamental ao estudo de certas questões sobre variedades. Daremos então, sem mais detalhes, a definição de partição da unidade.

Seja M uma variedade diferenciável. Uma família de abertos $V_\alpha \subset M$ com $\bigcup_\alpha V_\alpha = M$ é localmente finita se todo ponto $p \in M$ possui uma vizinhança U tal que $U \cap V_\alpha \neq \emptyset$ apenas para um número finito de índices. O suporte de uma função, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, é o fecho do conjunto dos pontos onde f é diferente de zero.

Dizemos que uma familia $\{f_\alpha\}$ de funções diferenciáveis $f_\alpha : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma partição diferenciável da unidade se:

(1) Para todo α, $f_\alpha > 0$ e o suporte de f_α está contido em uma vizinhança coordenada $V_\alpha \subset x_\alpha(U_\alpha)$ de uma estrutura diferenciável $\{(U_\beta, x_\beta)\}$ de M.

(2) A família $\{V_\alpha\}$ é localmente finita.

(3) $\sum_\alpha f_\alpha = 1$, para todo ponto $p \in M$ (esta condição faz sentido , pois em cada p, $f_\alpha(p) \neq 0$ apenas para um número finito de índices).

Costuma-se dizer que a partição da unidade $\{f_\alpha\}$ está subordinada à cobertura $\{V_\alpha\}$.

1.2 Métricas Riemannianas

Nesta seção nosso objetivo será introduzir em cada ponto uma maneira de medir comprimento de vetores tangentes que varia de diferenciavelmente com o ponto, que veremos explicitamente ao longo desta seção (confronte o capítulo I de [1]).

No restante deste capítulo, assim como em todos os demais as variedades diferenciáveis consideradas serão supostas de Hausdorff e com base enumerável. Diferenciável significará de classe C^∞ e quando $M^n = M$ indicar uma variedade diferenciável, n indicará a dimensão de M.

Definição 1.9. *Uma métrica Riemanniana (ou estrutura Riemanniana) em uma variedade diferenciável* M *é uma correspondência que associa a cada ponto* p *de* M *um produto interno* $\langle\, , \rangle_p$ *(isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente* T_pM*, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se* $x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ *é um sistema de coordenadas locais de* p*, com* $x(x_1, ..., x_n) = q \in x(U)$ *e* $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx(0, ..., 1, ..., 0)$*, então* $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, ..., x_n)$ *é uma função diferenciável em* U*.*

É usual deixar de indicar o índice p em $\langle\, , \rangle_p$ sempre que não houver possibilidade de confusão. As funções g_{ij} são chamadas expressão da métrica Riemanniana no sistema de coordenadas $x : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$. Uma variedade com uma métrica Riemanniana chama-se variedade Riemanniana.

A primeira coisa a fazer depois de definir uma certa estrutura é estabelecer uma noção de equivalência para esta estrutura.

Definição 1.10. *Sejam* M *e* N *variedades Riemannianas. Diz-se que um difeomorfismo* $f : M \longrightarrow N$ *(isto é,* f *é uma bijeção diferenciável com inversa diferenciável) é uma isometria se:*

$$\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)}, \ \textit{para todo } p \in M, \ u, v \in T_pM. \tag{1.1}$$

Definição 1.11. *Sejam* M *e* N *variedades Riemannianas. Uma aplicação diferenciável* $f : M \longrightarrow N$ *é uma isometria local em* $p \in M$ *se existe uma vizinhança* $U \subset M$ *de* p *tal que* $f : U \longrightarrow f(U)$ *é um difeomorfismo satisfazendo a equação 1.1.*

É usual dizer que a variedade Riemanniana M é localmente isométrica à variedade Riemanniana N se para todo p em M existe uma vizinhança U de p em M e uma isometria local $f : U \longrightarrow f(U) \subset N$.

Veremos agora como uma métrica Riemanniana pode ser usada para calcular comprimentos de curvas.

Definição 1.12. *Uma aplicação diferenciável* $c : I \longrightarrow M$ *de um intervalo aberto* $I \subset \mathbb{R}$ *em uma variedade diferenciável* M *chama-se uma curva (parametrizada).*

Definição 1.13. *Um campo vetorial* V *ao longo de uma curva* $c : I \longrightarrow M$ *é uma aplicação que a cada* $t \in I$ *associa um vetor tangente* $V(t) \in T_{c(t)}M$*. Diz-se que* V *é diferenciável se para toda função* f *em* M*, a função* $t \longrightarrow V(t)f$ *é uma função diferenciável em* I.

O campo vetorial $dc\left(\dfrac{d}{dt}\right)$, indicado por $\dfrac{dc}{dt}$, é chamado campo velocidade (ou tangente) de c. Observe que um campo vetorial ao longo de c pode não ser passível de extensão a um campo vetorial definido em um aberto de M.

A restrição de uma curva c a um intervalo fechado $[a, b] \subset I$ chama-se um segmento. Se M é Riemanniana, definimos o comprimento de um segmento por

$$\ell_b^a(c) = \int_a^b \left\langle \frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt} \right\rangle^{\frac{1}{2}} dt.$$

Finalizamos esta seção com um teorema de existência de métricas Riemannianas.

Proposição 1.5. *Uma variedade diferenciável* M *(de Hausdorff e com base enumerável) possui uma métrica Riemanniana.*

1.3 Conexão Afim, Conexão Riemanniana

Indicaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M e por $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M.

Definição 1.14. *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

que se indica por $(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y$ *e que satisfaz as seguintes propriedades:*

i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z,$

ii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$

iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y,$

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Proposição 1.6. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo da curva diferenciável $c : I \longrightarrow M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c, denominado derivada covariante de V ao longo de c, tal que:*

a) $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$, *onde W é um campo de vetores ao longo de c.*

b) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, *onde f é uma função diferenciável em I.*

c) *Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathfrak{X}(M)$, isto é, $V(t) = Y(c(t))$, então* $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y.$

Podemos então introduzir a noção de paralelismo de maneira natural.

Definição 1.15. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \longrightarrow M$ é chamado paralelo quando $\frac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.*

Proposição 1.7. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Seja $c : I \longrightarrow M$ uma curva diferenciável em M e V_0 um vetor tangente a M em $c(t_0)$, $t_0 \in I$ (isto é, $V_0 \in T_{c(t_0)}M$). Então existe um único campo de vetores paralelo V ao longo de c tal que $V(t_0) = V_0$, ($V(t)$ é chamado o transporte paralelo de $V(t_0)$ ao longo de c).*

Definição 1.16. *Uma conexão ∇ em uma variedade Riemanniana M é compatível com a métrica se, e somente se,*

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle,\ \ X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Definição 1.17. *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é dita simétrica quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \textit{ para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Uma conexão, ∇, em uma variedade Riemanniana que seja compatível com a métrica e simétrica é chamada conexão de Levi-Civita ou conexão Riemanniana. Podemos então enunciar o mais importante teorema desta seção, que será bastante usado ao longo de todo o texto.

Teorema 1.2 (Levi-Civita)**.** *Dada uma variedade Riemanniana M, existe uma única conexão de Levi-Civita.*

Dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Se ∇ é uma conexão de Levi-Civita em uma variedade Riemanniana (M, g), então vale a identidade

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X Y, Z\rangle &= \frac{1}{2}\{X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\ &\quad +\langle [X, Y], Z\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle + \langle [Z, X], Y\rangle\} \end{aligned} \tag{1.2}$$

A fórmula (1.2) é chamada *fórmula de Koszul* e em algums casos particulares se torna bem mais simples, como por exemplo tomando $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ tais que $\langle X, Y\rangle = \langle X, Z\rangle = \langle Y, Z\rangle = 1$, isso ocorre por exemplo com campos invariantes à esquerda (c.f. definição 2.2 a seguir) então temos $X\langle Y, Z\rangle = Y\langle Z, X\rangle = Z\langle X, Y\rangle = 0$ e portanto a fórmula 1.2 teria a seguinte expressão

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}\{\langle [X, Y], Z\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle + \langle [Z, X], Y\rangle\}.$$

1.4 Geodésicas

No que se segue M é uma variedade Riemanniana munida de uma conexão Riemanniana, e as demonstrações dos resultados aqui apresentados podem ser encontradas em [1] exceto menção contrária.

Definição 1.18. *Uma curva parametrizada* $\gamma : I \longrightarrow M$ *é uma* geodésica *em* $t_0 \in I$ *se* $\frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) = 0$ *no ponto* t_0*; se* γ *é geodésica em* t*, para todo* $t \in I$ *dizemos que* γ *é uma geodésica. Se* $[a, b] \subset I$ *e* $\gamma : I \longrightarrow M$ *é uma geodésica, a restrição de* γ *a* $[a, b]$ *é chamada segmento de geodésica ligando* $\gamma(a)$ *e* $\gamma(b)$.

Às vezes por abuso de linguagem, chamaremos de geodésica γ à imagem $\gamma(I)$ de geodésica γ.

Se $\gamma : I \longrightarrow M$ é uma geodésica, então

$$\frac{d}{dt}\left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 2\left\langle \frac{D}{dt}\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0,$$

ou seja o comprimento do vetor $\frac{d\gamma}{dt}$ e constante, suponha então $|\frac{d\gamma}{dt}| = c \neq 0$, supondo s a função comprimento de arco podemos então observar que

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \left|\frac{d\gamma}{dt}\right| dt = c(t - t_0).$$

Portanto, o parâmetro de uma geodésica é proporcional ao comprimento de arco.

Recordemos o seguinte teorema de equações diferenciais.

Teorema 1.3. *Se* X *é um campo* C^∞ *num aberto* V *de uma variedade* M *e* $p \in V$ *então existem um aberto* $V_0 \subset V$*, um ponto* $p \in V_0$*, um número* $\delta > 0$*, e uma aplicação* C^∞*,* $\varphi : (-\delta, \delta) \times V_0 \longrightarrow V$ *tais que a curva* $t \longrightarrow \varphi(t, q)$*,* $t \in (-\delta, \delta)$*, é a única trajetória de* X *que no instante* $t = 0$ *passa pelo ponto* q *para cada* $q \in V_0$

A aplicação $\varphi_t : V_0 \longrightarrow V$ dada por $\varphi_t(q) = \varphi(t, q)$ é chamada o fluxo de X em V.

Lema 1.2. *Seja* γ *é uma geodésica. Existe um único campo* G *em* TM *cujas trajetórias são da forma* $t \longrightarrow (\gamma(t), \gamma'(t))$.

Definição 1.19. *O campo* G *acima definido é chamado campo geodésico em* TM *e seu fluxo é o fluxo geodésico de* TM.

Aplicando o teorema 1.3 ao campo geodésico G no ponto $(p, 0) \in TM$, obtemos o seguinte resultado:

Para cada $p \in M$ *existem um aberto* $\mathcal{U}$ *em* TU*, onde* (U, x) *é um sistema de coordenadas em* p *e* $(p, 0) \in \mathcal{U}$*, um número* $\delta > 0$ *e uma aplicação* C^∞*,* $\varphi : (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} \longrightarrow TU$*, tais que:* $t \longrightarrow \varphi(t, q, v)$ *é a única trajetória de* G *que satisfaz à condição inicial* $\varphi(0, q, v) = (q, v)$*, para cada* $(q, v) \in \mathcal{U}$.

É possível escolher $\mathcal{U}$ na forma

$$\mathcal{U} = \{(q, v) \in TU; q \in V \text{ e } v \in T_qM \text{ com } |v| = \varepsilon_1\},$$

onde $V \subset U$ é uma vizinhança de $p \in M$. Pondo $\gamma = \pi \circ \varphi$, onde $\pi : TM \longrightarrow M$ é a projeção canônica, podemos escrever o enunciado anterior do seguinte modo.

Proposição 1.8. *Dado $p \in M$, existem uma vizinhança aberta $V \subset M$ de p, números $\delta > 0$ e $\varepsilon_1 > 0$ e uma aplicação C^∞*

$$\gamma : (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} \longrightarrow M, \ \mathcal{U} = \{(q, v); q \in V, v \in T_qM, |v| < \varepsilon_1\}$$

tais que a curva $t \longrightarrow \gamma(t, q, v), t \in (-\delta, \delta)$, é a única geodésica de M que no instante $t = 0$ passa por q com velocidade v, para cada $q \in V$ e cada $v \in T_qM$ com $|v| < \varepsilon_1$.

A proposição 1.8 afirma que se $|v| < \varepsilon_1$, a geodésica $\gamma(t, q, v)$ existe em um intervalo $(-\delta, \delta)$ e é única. Podemos aumentar a velocidade de uma geodésica diminuindo o seu intervalo de definição, ou vice-versa. Como podemos ver no seguinte lema.

Lema 1.3 (Homogeneidade de uma geodésica)**.** *Se a geodésica $\gamma(t, q, v)$ está definida no intervalo $(-\delta, \delta)$, então a geodésica $\gamma(t, q, av)$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, está definida no intervalo $(-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a})$ e*

$$\gamma(t, q, av) = \gamma(at, q, v).$$

Podemos agora introduzir o conceito de aplicação exponencial da maneira seguinte. Seja $\mathcal{U} \subset TM$ um aberto suficientemente pequeno. Então a aplicação $\exp : \mathcal{U} \longrightarrow M$ dada por

$$\exp(q, v) = \gamma(1, q, v) = \gamma\left(|v|, q, \frac{v}{|v|}\right), \ (q, v) \in \mathcal{U},$$

é chamada aplicação exponencial em $\mathcal{U}$.

Na maioria das aplicações, utilizaremos a restrição de exp a um aberto do espaço tangente T_qM, isto é, definiremos

$$\exp_q : B_\varepsilon(0) \subset T_qM \longrightarrow M$$

por $\exp_q(v) = \exp(q, v)$

Proposição 1.9. *Dado $q \in M$, existe um $\varepsilon > 0$ tal que $\exp_q : B_\varepsilon(0) \subset T_qM \longrightarrow M$ é um difeomorfismo de $B_\varepsilon(0)$ sobre um aberto de M.*

1.5 Curvaturas

Nesta seção apresentaremos uma definição de curvatura que, essencialmente, mede o quanto uma variedade Riemanniana deixa de ser euclidiana.

Definição 1.20. *A curvatura* R *de uma variedade Riemanniana,* M, *é uma correspondência que associa a cada par* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *uma aplicação* $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ *dada por*

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, \ \ Z \in \mathfrak{X}(M),$$

onde ∇ *é a conexão Riemanniana de* M.

Às vezes encontramos uma definição que difere da definição 1.20 por um sinal.

Proposição 1.10. *A curvatura,* R, *de uma variedade Riemanniana goza das seguinte propriedades:*

(i) R *é* $\mathcal{D}(M)$*-bilinear em* $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$, *isto é,*

$$R(fX_1 + gX_2, Y) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1),$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(x_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2),$$

$f, g \in \mathcal{D}(M), \ \ X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$.

(ii) *Para todo par* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, *o operador curvatura* $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ *é linear, isto é,*

$$R(X,Y)(Z + W) = R(X,Y)Z + R(X,Y)W,$$

$$R(X,Y)fZ = fR(X,Y)Z,$$

$f \in \mathcal{D}(M), \ \ Z, W \in \mathfrak{X}(M)$.

Os resultados a seguir são de grande importância para o nosso estudo de curvatura.

Proposição 1.11. *A curvatura goza das seguintes propriedades de simetria:*

(a) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$ *(Primeira Identidade de Bianchi)*

(b) $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$

(c) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = -\langle R(X,Y)T, Z\rangle$

(d) $\langle R(X,Y)Z,T\rangle = \langle R(Z,T)X,Y\rangle$

Intimamente relacionado com o operador curvatura está a curvatura seccional (ou Riemanniana).

Usaremos a partir de agora a seguinte notação. Dado um espaço vetorial V como produto interno $\langle\ ,\ \rangle$, indicaremos por $|x \wedge y|$ a expressão

$$\sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x,y\rangle^2},$$

que representa a área do paralelogramo bidimensional determinado pelo par de vetores $x, y \in V$.

Definição 1.21. *Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bidimensional $\sigma \subset T_pM$ o número real*

$$\kappa(x,y) = \frac{\langle R(x,y)x,y\rangle}{|x \wedge y|^2} = \kappa(\sigma),$$

onde $\{x,y\}$ é uma base qualquer de σ, é chamado curvatura seccional de σ em p. Vamos denominar de função de curvatura, k à forma biquadrática $k(x,y) = \langle R(x,y)x,y\rangle$, isto é, quando $x, y \in T_pM$ são ortonormais então $k(x,y) = \kappa(x,y)$

Observação 1.2. $\kappa(x,y)$ independe da particular escolha da base $\{x,y\}$ de σ (uma prova pode ser encontrada em [1]).

Observação 1.3. Uma variedade Riemanniana, M, tem curvatura constante igual a k_0 se, e somente se, sua curvatura R é dada por

$$R(X,Y)Z = k_0(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y),$$

para todo campo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Contrações do tensor de curvatura de uma variedade também desempenham papel fundamental em geometria.

À contração métrica de R, em $p \in M$, chamamos tensor de Ricci, ric_p. Dados $x, y \in T_pM$ definimos

$$ric_p(x,y) = \mathrm{tr}\,\{z \in T_pM \longmapsto R(x,z)y\}$$

isto é, se $\{z_1, ..., z_n\}$ é base ortonormal de T_pM

$$ric_p(x,y) = \langle R(x,z_i)y, z_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} k(x,z_i)$$

é a restrição de $\mathtt{ric}_p$ à diagonal $r_p(x) := \mathtt{ric}_p(x,x)$ chamamos de curvatura de Ricci, em p (diferentemente de [1], aqui não normalizaremos $r_p(x)$).

À contração de $\mathtt{ric}_p$, chamaremos de curvatura escalar de M em p, $\rho(p)$

$$\rho(p) = \mathtt{ric}_p(z_j, z_j)$$

(também não normalizada).

Capítulo 2

Elementos da Teoria de Grupos de Lie e Álgebras Lie

Este capítulo tem como principal referência os textos [2] e [10]. Nele tratamos de noções rudimentares da teoria de grupos de Lie e álgebras de Lie. Todos os resultados aqui citados foram extraídos de [2] e [10].

2.1 Grupos de Lie e Álgebras de Lie

Definição 2.1. *Um grupo de Lie é uma variedade diferenciável* G*, munida de uma estrutura de grupo tal que as aplicações*

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{G}\times\mathsf{G} & \longrightarrow & \mathsf{G} \\ (a,b) & \longmapsto & a\cdot b \end{array} \quad \textit{e} \quad \begin{array}{ccc} \mathsf{G} & \longrightarrow & \mathsf{G} \\ a & \longmapsto & a^{-1}, \end{array}$$

são diferenciáveis.

Decorre imediatamente da definição que, em um grupo de Lie, as aplicações

$$\begin{array}{cccc} L_a: & \mathsf{G} & \longrightarrow & \mathsf{G} \\ & b & \longmapsto & ab \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{cccc} R_a: & \mathsf{G} & \longrightarrow & \mathsf{G} \\ & b & \longmapsto & ba, \end{array}$$

são difeomorfismos, para cada $a \in \mathsf{G}$. Estas aplicações são chamadas, respectivamente, *translação à esquerda por* a e *translação à direita por* a. Indicaremos por e o elemento neutro de G.

Definição 2.2. *Dizemos que um campo de vetores tangentes* X *(não necessariamente diferenciável) a um grupo de Lie* G *é invariante à esquerda se* $X_{ab} = dL_a X_b$*, quaisquer* *que sejam* $a, b \in G$. *O conjunto dos campos invariantes à esquerda de um grupo de Lie* G *é denotado por* $\mathfrak{g}$.

Um campo invariante à esquerda fica completamente determinado quando se conhece X_e, pois $X_a = dL_a X_e$. Claramente $\mathfrak{g}$ é um espaço vetorial e temos o seguinte

Teorema 2.1. (i) *A aplicação*

$$\begin{array}{rccl} \alpha : & \mathfrak{g} & \longrightarrow & T_e G \\ & X & \longmapsto & \alpha(X) = X_e, \end{array}$$

onde $T_a G$ *indica o espaço tangente a* G *no ponto* a*, é um isomorfismo de espaços vetoriais;*

(ii) *Se* $X \in \mathfrak{g}$, *então* X *é diferenciável.*

Para a demonstração, consulte [2], página 6.

Definição 2.3. *Uma álgebra de Lie é um espaço vetorial* $\mathfrak{g}$*, com uma operação bilinear* $[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, *satisfazendo*

(a) $[x, y] = -[y, x]$ *(anticomutatividade),*

(b) $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ *(Identidade de Jacobi),*

para todo x, y *e* z *em* $\mathfrak{g}$.

Proposição 2.1. *Se* X *e* $Y \in \mathfrak{g}$, *então o colchete de Lie* $[X, Y] \in \mathfrak{g}$, *isto é,* $\mathfrak{g}$ *é uma álgebra de Lie.*

Para a demonstração veja [2], p. 11.

Como já sabemos que $\mathfrak{g}$ e $T_e G$ são isomorfos como espaços vetoriais, podemos então induzir em $T_e G$ uma estrutura de álgebra de Lie.

Com esta proposição podemos identificar, de modo natural, $\mathfrak{g}$ com $T_e G$, e sendo $x = X_e, X \in \mathfrak{g}$ podemos escrever apenas $x \in \mathfrak{g}$ para representar o campo X.

2.2 Correspondência de Subgrupos e Subálgebras

Definição 2.4. *Se* G *e* H *são grupos de Lie e se* $\varphi : G \longrightarrow H$ *é diferenciável e também homomorfismo de grupos, chamamos* φ *de* homomorfismo de Lie*; se* φ *é um difeomorfismo* *e um isomorfismo de grupos, então* φ *é chamado* isomorfismo de Lie*; uma aplicação diferenciável* $\varphi : V \subset G \longrightarrow H$*, onde* V *é uma vizinhança em* G *tal que* $a, b, a \cdot b \in V$ *implica em* $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$*, então* φ *é chamado* um homomorfismo local de Lie*; de modo análogo definimos* um isomorfismo local de Lie.

Definição 2.5. *Um par* (H, φ) *é chamado um subgrupo de Lie de um grupo de Lie* G *se;*

(a) *H é um grupo de Lie*

(b) $\varphi : H \longrightarrow G$ *é uma imersão injetiva e é um homomorfismo.*

Veja que, pela definição acima, (H, φ) pode ser um subgrupo de Lie de G sem que este seja um subconjunto de G ou que $\varphi(H)$ tenha a topologia induzida pela aplicação inclusão $i : \varphi(H) \longrightarrow G$, isto é, sem que $\varphi : H \longrightarrow G$ seja um homeomorfismo sobre o subespaço $\varphi(H) \subset G$.

Dizemos que um subespaço vetorial $\mathfrak{h}$ de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é uma subálgebra se $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é fechado relativamente à operação [,] de $\mathfrak{g}$. Evidentemente, $\mathfrak{h}$ é uma álgebra de Lie.

Uma pergunta que surge naturalmente é a seguinte: se (H, φ) é um subgrupo de Lie de um grupo de Lie G e se $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{g}$ são suas respectivas álgebras de Lie, então $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$? O lema abaixo, cuja demonstração pode ser encontrada em [2], p. 18, nos dá como corolário, a resposta a essa pergunta.

Lema 2.1. *Sejam* G *e* H *grupos de Lie e seja* $\varphi : V \longrightarrow H$ *um homomorfismo local de Lie, onde* $V \subset G$ *é uma vizinhança da identidade. Então a aplicação* $d\varphi_e : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ *induzida por* $d\varphi_e : T_eG \longrightarrow T_eH$ *é um homomorfismo de Lie entre suas respectivas álgebras de Lie.*

Deste lema resultam os dois corolário a seguir.

Corolário 2.1. *Grupos de Lie localmente isomorfos têm álgebras de Lie isomorfas.*

Corolário 2.2. *Se* (H, φ) *é um subgrupo de Lie do grupo de Lie* G *e* $\mathfrak{h}$ *e* $\mathfrak{g}$ *são, respectivamente, as álgebras de Lie de* H *e* G*, então* $\mathfrak{h}$ *é isomorfa a uma subálgebra de* $\mathfrak{g}$ *(este corolário responde a pergunta acima).*

Com o corolário 2.2 é natural perguntar se vale a sua recíproca, ou seja, dada uma subálgebra de Lie $\mathfrak{h}$ de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de um grupo de Lie G, existe um subgrupo de Lie (H, φ) de G tal que a álgebra de Lie de (H, φ) é isomorfa a $\mathfrak{h}$?

O teorema a seguir nos dá uma resposta afirmativa para essa pergunta como veremos no corolário 2.3 (a demonstração destes resultados baseia-se no teorema de Frobenius, acerca de integrabilidade de distribuições involutivas em variedades. Para maiores detalhes consulte [2]).

Teorema 2.2. *Seja* G *um grupo de Lie com álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *e seja* $\widetilde{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{g}$ *uma subálgebra de Lie. Então existe um único subgrupo de Lie conexo* (H, φ) *de* G*, de tal modo que* $d\varphi(\mathfrak{h}) = \widetilde{\mathfrak{h}}$*, onde* $\mathfrak{h}$ *denota a álgebra de Lie de* H*.*

Corolário 2.3. *Existe uma correspondência biunívoca entre subgrupos de Lie conexos de um grupo de Lie e as subálgebras da sua álgebra de Lie.*

Teorema 2.3. *Sejam* G *e* H *grupos de Lie e seja* $\Gamma : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ *um homomorfismo entre as respectivas álgebras de Lie. Então existe uma vizinhança* V *de* e*, em* G*, e uma aplicação* C^∞ $\varphi : V \longrightarrow H$ *tal que* $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$*, sempre que* a, b *e* $a \cdot b$ *pertencerem a* V*, e tal que, para todo* $X \in \mathfrak{g}$*,* $d\varphi(X) = \Gamma(X)$*. Além disso, se existirem dois homomorfismos* C^∞ $\varphi, \psi : G \longrightarrow H$ *com* $d\varphi = d\psi = \Gamma$ *e se* G *for conexo então* $\varphi \equiv \psi$*.*

Corolário 2.4. *Se dois grupos de Lie* G *e* H *tem álgebras de Lie isomorfas, então eles são localmente isomorfos.*

2.3 A aplicação exponencial - Homomorfismos contínuos - Subgrupos fechados

Sejam G um grupo de Lie e $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie associada. Seja $x \in \mathfrak{g}$. Pela teoria de equações diferenciais ordinárias, sabemos que, para qualquer $a \in G$, existem $U \subset G$ aberto e $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$, com $a \in U$ e $\varepsilon > 0$ e uma aplicação diferenciável $\varphi : U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow G$ tal que para todo $b \in U$,

$$\varphi(b, 0) = b \quad \text{e} \quad \frac{d\varphi}{dt}(b, t) = x_{\varphi(b,t)}.$$

φ é chamado fluxo local do campo x. Tomaremos agora $a = e$ e adotaremos a seguinte notação: $\varphi(e, t) = \varphi(t) = \varphi_t =$ trajetória (única) de x por e. Temos então o seguinte

Teorema 2.4. *Em um grupo de Lie* G*,* φ_t *está definido para todo* $t \in \mathbb{R}$*, isto é,* $\varepsilon = +\infty$*, e assim* $(\mathbb{R}, \varphi)$*, é subgrupo de Lie de* G*.*

Definição 2.6. *Sejam* G *um grupo de Lie, com álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$, *e* $x \in \mathfrak{g}$. *Se indicarmos por* φ^x *a trajetória de* x *pela origem de* T_eG *(isto,* $\varphi^x(e, 0) = e$*), definimos* $\exp : \mathfrak{g} \cong T_eG \longrightarrow G$ *por* $\exp(x) = \varphi^x(1)$. *A aplicação* $\exp$ *é chamada a aplicação exponencial de* G.

Teorema 2.5. *A aplicação exponencial possui as seguintes propriedades:*

a) $\exp(t_1 + t_2)x = (\exp t_1 x)(\exp t_2 x)$.

b) $\exp(-sx) = (\exp sx)^{-1}$.

c) $\exp$ *é diferenciável.*

d) $\exp$ *é um difeomorfismo em uma vizinhança de* e.

Um fato bem conhecido é que todo homomorfismo contínuo $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável. Veremos que, mais geralmente, todo homomorfismo contínuo entre grupos de Lie é diferenciável.

O item d) nos permite introduzir de maneira natural um sistema de coordenadas locais em e, denominado *sistema de coordenadas normais.*

Lema 2.2. *Se* G *é um grupo de Lie com álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *e* $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ *é uma base de* $\mathfrak{g}$, *então a aplicação*

$$\begin{array}{rccl} \psi : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & G \\ & (t_1, ..., t_n) & \longmapsto & (\exp t_1 x_1) \cdot ... \cdot (\exp t_n x_n) \end{array}$$

é diferenciável e não singular em $0 \in \mathbb{R}^n$

Para demonstração consulte [2], p. 43.

Teorema 2.6. *Seja* $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow G$ *um homomorfismo contínuo, onde* G *é grupo de Lie. Então* φ *é diferenciável.*

Finalmente enunciamos o resultado que havíamos citado anteriormente.

Teorema 2.7. *Todo homomorfismo contínuo* $\varphi : H \longrightarrow G$ *entre grupos de Lie, é diferenciável.*

Um problema famoso que convém ser mencionado, proposto por Hilbert em 1900 (o 5º problema de Hilbert): provar que todo grupo topológico conexo e localmente Euclidiano admite uma única estrutura de variedade diferenciável que o transforma em um grupo de Lie (um grupo topológico é um espaço topológico com uma estrutura de grupo, de tal modo que as operações de produto e passagem ao inverso são contínuas). Este problema foi resolvido em 1952 por Montgomery, Zippin e Gleason (para a maiores detalhes, veja o livro de Montgomery-Zippin, Topological Transformation Groups, Interscience, New York, 1955), que provaram a existência da estrutura diferenciável requerida. A unicidade de uma tal estrutura decorre imediatamente do teorema 2.7.

No que se segue denotaremos por $o(t^n)$ a qualquer função $f : \mathbb{R} \longrightarrow T_e G$ que tenha a propriedade de que $\frac{f(t)}{t^n}$ $t \in \mathbb{R}$, é limitado para t pequeno.

Lema 2.3. *Se* G *é um grupo de Lie e se* $x, y \in \mathfrak{g}$*, então*

(a) $(\exp tx) \cdot (\exp ty) = \exp(t(x + y) + \frac{t^2}{2}[x, y] + o(t^2))$.

(b) $(\exp(-tx)) \cdot (\exp(-ty)) \cdot (\exp tx) \cdot (\exp ty) = \exp(t^2[x, y] + o(t^3))$.

(c) $(\exp tx) \cdot (\exp ty) \cdot (\exp(-tx)) = \exp(ty + t^2[x, y] + o(t^3))$.

Consulte [2], p. 48, para uma demonstração.

O próximo corolário é uma das importantes consequências do lema acima e sua demonstração pode ser encontrada em [2], página 54.

Corolário 2.5. *Sejam* G *um grupo de Lie e* $x, y \in \mathfrak{g}$ *e* $\alpha, \beta, \gamma : \mathbb{R} \longrightarrow G$ *curvas dadas por*

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \exp tx \\ \beta(t) &= \exp ty \\ \gamma(t) &= \alpha(\sqrt{t}) \cdot \beta(\sqrt{t}) \cdot \alpha(\sqrt{t})^{-1} \cdot \beta(\sqrt{t})^{-1}. \end{aligned}$$

Então $\gamma(0) = e$ *e* $\gamma'(0) = [x, y]$.

Ainda, como uma outra aplicação do lema anterior, o teorema a seguir é um dos resultados mais importante desta seção, cuja demonstração pode ser encontrada em [2], página 55.

Teorema 2.8 (Cartan)**.** *Seja* G *um grupo de Lie e seja* $H \subset G$ *um subgrupo algébrico e um subconjunto fechado de* G*. Então é possível dar a* H *uma estrutura de variedade* *diferenciável de tal modo que* H *se torne um subgrupo de Lie de* G*. Em outras palavras, todo subgrupo fechado de um grupo de Lie é um grupo de Lie.*

Para encerrar esta seção apresentamos algumas propriedades da aplicação adjunta que passamos a definir agora e que tem grande importância no estudo de curvaturas em grupos de Lie. Sejam G um grupo de Lie e $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie. Para todo $\mathsf{b} \in \mathsf{G}$, define-se a conjugação por b:

$$\begin{array}{rccc} \mathsf{C}_{\mathsf{b}} : & \mathsf{G} & \longrightarrow & \mathsf{G} \\ & \mathsf{a} & \longmapsto & \mathsf{b}\mathsf{a}\mathsf{b}^{-1}. \end{array}$$

Como C_{b} é um difeomorfismo que deixa fixo a identidade $\mathsf{e} \in \mathsf{G}$, temos pelo teorema da aplicação inversa que a diferencial de C_{b} é um operador linear invertível em $\mathfrak{g}$,

$$\mathsf{d}(\mathsf{C}_{\mathsf{b}})_{\mathsf{e}} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

que indicaremos por $\mathrm{Ad}_{\mathsf{b}} = \mathsf{d}(\mathsf{C}_{\mathsf{b}})_{\mathsf{e}}$.

Definimos, então, a aplicação:

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Ad} : & \mathsf{G} & \longrightarrow & \mathsf{GL}(\mathfrak{g}) \\ & \mathsf{b} & \longmapsto & \mathrm{Ad}(\mathsf{b}) = \mathrm{Ad}_{\mathsf{b}}, \end{array}$$

onde $\mathsf{GL}(\mathfrak{g})$ é o grupo dos operadores lineares invertíveis de $\mathfrak{g}$. A aplicação Ad é diferenciável. Além disto, é fácil verificar que Ad é um homomorfismo de Lie de G em $\mathsf{GL}(\mathfrak{g})$, chamado *a representação adjunta* do grupo G. O subgrupo de Lie $\mathrm{Ad}(\mathsf{G}) \subset \mathsf{GL}(\mathfrak{g})$ é um subgrupo de Lie de transformações lineares chamado o grupo adjunto de G.

Como Ad é uma transformação diferenciável, podemos tomar a sua diferencial em e, que é chamada de *representação adjunta* de $\mathfrak{g}$ e indicada por

$$\mathrm{ad} = \mathsf{d}(\mathrm{Ad})_{\mathsf{e}} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{gl}(\mathfrak{g}),$$

onde $\mathrm{gl}(\mathfrak{g})$ é a álgebra de Lie do grupo $\mathsf{GL}(\mathfrak{g})$, isto é, o conjunto das transformações lineares de $\mathfrak{g}$. A situação é descrita pelo diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\mathsf{d}(\mathrm{Ad})_{\mathsf{e}} = \mathrm{ad}"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathrm{gl}(\mathfrak{g}) \arrow[d, "\exp"] \\ \mathsf{G} \arrow[r, "\mathrm{Ad}"] & \mathsf{GL}(\mathfrak{g}) \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

Os dois teoremas a seguir podem ser encontrados em [2], páginas 62 e 63, com suas respectivas demonstrações.

Teorema 2.9. *O diagrama acima é comutativo, isto é,*

$$\mathrm{Ad} \circ \exp = \exp \circ \mathrm{ad}$$

Teorema 2.10. *Se* $x, y \in \mathfrak{g}, \mathrm{ad}(y) \cdot x = [x, y]$.

2.4 Álgebras de Lie

Nesta seção algumas das definições e conceitos que formam a linguagem básica da teoria de álgebras de Lie são apresentados.

Definição 2.7. *Uma transformação linear* $\psi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ *(com* $\mathfrak{g}$ *e* $\mathfrak{h}$ *álgebras de Lie) é um*

- *homomorfismo, se* $\psi[x, y] = [\psi x, \psi y]$;
- *isomorfismo, se* ψ *for um homomorfismo invertível;*
- *automorfismo, se* ψ *for um isomorfismo e* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$.

As álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ *e* $\mathfrak{h}$ *são isomorfas se existe um isomorfismo* $\psi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$.

Uma maneira de verificar que álgebras de Lie de dimensão finita são isomorfas é verificar através do colchete entre os elementos de suas bases. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie $\{x_1, ..., x_n\}$ uma base de $\mathfrak{g}$. Tomando dois elemento x_i, x_j desta base, o colchete $[x_i, x_j]$ pode ser escrito como uma combinação linear

$$[x_i, x_j] = c_{ijk} x_k$$

(vale lembrar que estamos usando a notação de Einstein e nas expressões acima o que temos na verdade é um somatório).

Os coeficientes c_{ijk} são denominados *constantes de estrutura* da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ em relação à base $\{x_1, ..., x_n\}$. Estas constantes determinam a álgebra a menos de isomorfismo. Com efeito, seja $\mathfrak{h}$ uma álgebra de Lie com uma base $\{y_1, ..., y_n\}$ com as mesmas constantes de estrutura c_{ijk} que $\mathfrak{g}$, considere a transformação linear $\psi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ tal que $\psi(x_i) = y_i$. Então,

$$\psi[x, y] = a_i b_j c_{ijk} \psi(x_k) = a_i b_j [y_i, y_j] = [\psi x, \psi y]$$

onde $a_i, b_j; i, j = 1, ..., n$ são as coordenadas de x e y respectivamente em relação a base de $\mathfrak{g}$. O que mostra que ψ é um isomorfismo e, portanto, $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ são isomorfas.

Tomando uma métrica Riemanniana em G e uma base ortonormal $e_1, ..., e_n$ de $\mathfrak{g}$ então as constantes de estrutura são facilmente calculadas, observando que

$$[e_i, e_j] = c_{ijk} e_k.$$

Assim, como a base $e_1, e_2, ..., e_n$ é ortonormal temos que

$$\langle [e_i, e_j], e_l \rangle = \langle c_{ijk} e_k, e_l \rangle = c_{ijl}.$$

Para toda terna i, j, k as constante de estrutura satisfazem as seguintes igualdades:

$$c_{ijk} = -c_{jik}$$
$$c_{ijl} c_{lkm} + c_{jkl} c_{lim} + c_{kil} c_{ljm} = 0$$

a primeira, devido à antissimetria do colchete, e a segunda, devido a identidade de Jacobi. Reciprocamente, se existem constantes c_{ijk} satisfazendo as duas identidades acima, elas são constantes de estrutura para alguma álgebra de Lie, isto é, podemos tomar uma base $\{x_1, ..., x_2\}$ de um espaço vetorial e definir $[x_i, x_j] = c_{ijk} x_k$, estender bilinearmente e teremos uma álgebra de Lie cujas constantes de estrutura são os c_{ijk}.

Estes fatos nos dizem que para conhecermos uma álgebra de Lie, a menos de isomorfismo, basta conhecermos os colchetes dos elementos de uma base.

Definição 2.8. *Um subespaço* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ *é um ideal de* $\mathfrak{g}$ *se*

$$\forall\, y \in \mathfrak{h}, x \in \mathfrak{g}, [x, y] \in \mathfrak{h},$$

isto é,

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] = \{[x, y] : x \in \mathfrak{g}, y \in \mathfrak{h}\} \subset \mathfrak{h}.$$

Seja $\psi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ um homomorfismo entre álgebras de Lie. As seguintes afirmações são de verificação imediata.

- $\ker \psi$ é um ideal de $\mathfrak{g}$.
- $\operatorname{im} \psi$ é uma subálgebra de $\mathfrak{h}$.

Definição 2.9. *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie e* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ *um ideal. Defina no espaço vetorial quociente* $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$*, o colchete* $[\ ,\ ]$ *por*

$$[\overline{x}, \overline{y}] = \overline{[x, y]},$$

onde $\overline{x}$ *denota a classe* $x + \mathfrak{h}$*.*

Aqui é de fundamental importância que $\mathfrak{h}$ seja um ideal, pois caso contrário a operação não fica bem definida.

Teorema 2.11 (de isomorfismo). (1) *Seja* $\psi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ *um homomorfismo. Então*

$$\mathfrak{g}/\ker\psi \cong \mathrm{im}\psi.$$

O isomorfismo é dado por $\overline{x} \in \mathfrak{g}/\ker\psi \longmapsto \psi(x) \in \mathrm{im}\psi$

(2) *Sejam* $\mathfrak{g}$ *álgebra de Lie e* $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{g}$ *ideais de* $\mathfrak{g}$. *Então,*

$$(\mathfrak{h}_1 + h_2)/\mathfrak{h}_1 \approx \mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2.$$

Definição 2.10. *Sejam* $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, ..., \mathfrak{g}_n$ *álgebras de Lie e*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus ... \oplus \mathfrak{g}_n$$

sua soma direta como espaços vetoriais. Isto é, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times ... \times \mathfrak{g}_n$ *com a estrutura vetorial produto. Para* $x = (x_1, ..., x_n)$ *e* $y = (y_1, ..., y_n)$, *a expressão*

$$[x, y] = ([x_1, y_1], ..., [x_n, y_n])$$

define uma estrutura de álgebra de Lie em $\mathfrak{g}$ *em que a* i*-ésima componente é um ideal isomorfo a* $\mathfrak{g}_i$.

Tomando, como sempre, $\mathfrak{g}$ como sendo uma álgebra de Lie, para dois subconjuntos A e B de $\mathfrak{g}$ será usado a notação $[A, B]$ para indicar o subespaço gerado por

$$\{[X, Y] : X \in A, \ Y \in B\}.$$

Define-se, por indução, os seguintes subespaços de $\mathfrak{g}$ (denominados álgebras derivadas):

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{g}^{(0)} & = & \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}' & = & [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \\ & \vdots & \\ \mathfrak{g}^{(k)} & = & [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}]. \end{array}$$

Esses subespaços são ideais de $\mathfrak{g}$. A *série central descendente* da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é definida, por indução, como

$$\begin{array}{rcll} \mathfrak{g}^1 & = & \mathfrak{g} & \\ \mathfrak{g}^2 & = & [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] & = \mathfrak{g}' \\ & \vdots & & \\ \mathfrak{g}^k & = & [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(k-1)}]. & \end{array}$$

Definição 2.11. *Uma álgebra de Lie é solúvel se alguma de suas álgebras derivadas se anula, isto é,*

$$\mathfrak{g}^{(k_0)} = \{0\}$$

para algum $k_0 \geqslant 1$ *(e, portanto,* $\mathfrak{g}^{(k)} = \{0\}$ *para todo* $k \geqslant k_0$*).*

Subálgebras e imagens homomorfas de álgebras de Lie solúveis são também solúveis, como mostra a proposição a seguir.

Proposição 2.2. (1) *Se* $\mathfrak{g}$ *é solúvel e* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ *é uma subálgebra, então* $\mathfrak{h}$ *também é solúvel.*

(2) *Se* $\mathfrak{g}$ *é solúvel e* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ *é um ideal, então* $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ *também é solúvel.*

A demonstração é simples e pode encontrada em [10], página 44.

Definição 2.12. *Uma álgebra de Lie é nilpotente se sua série central descendente se anula em algum momento, isto é,*

$$\mathfrak{g}^{k_0} = \{0\}$$

para algum $k_0 \geqslant 1$ *(e, portanto* $\mathfrak{g}^{k} = \{0\}$ *para todo* $k \geqslant k_0$*)*

Proposição 2.3. *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie de dimensão finita. Então,* $\mathfrak{g}$ *é solúvel se, e somente se, a álgebra derivada* $\mathfrak{g}'$ *é nilpotente.*

Para uma demonstração dessa proposição veja [10], página 71.

Corolário 2.6. *Se* $\mathfrak{g}$ *é uma álgebra de Lie solúvel de dimensão finita, então* $\mathfrak{g}$ *possui um ideal de codimensão 1.*

Demonstração. Com efeito, pela proposição 2.3, temos que $\mathfrak{g}'$ é nilpotente: Neste caso, $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{g}'$, pois, caso contrário, teríamos

$$\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}].$$

Portanto $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}^2$ e, por um raciocínio análogo, obtemos que a *série central descendente* é constante, o que contraria a hipótese de $\mathfrak{g}'$ ser nilpotente, assim $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{g}'$. Tomando, então, $\mathfrak{b}$ no complemento ortogonal de $\mathfrak{g}'$, obtemos que $\mathfrak{u} = \mathfrak{b}^{\perp}$ é um ideal de codimensão 1. □

Capítulo 3

Curvaturas de métricas invariantes à esquerda

Os resultados apresentados neste capítulo foram todos extraídos de [7], exceto o lema 3.4 e o teorema 3.7 que foram extraídos de [5].

3.1 Curvaturas Seccionais

Sejam G um grupo de Lie de dimensão n, e $\mathfrak{g}$ a sua álgebra de Lie associada, constituída de todos os campos de vetores diferenciáveis sobre G que são invariantes à esquerda. Escolhendo uma base $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ para o espaço vetorial $\mathfrak{g}$, é fácil verificar que existe uma única métrica Riemanniana em G tal que estes campos sejam ortonormais. Mais ainda, dada qualquer matriz $n \times n$ simétrica, positiva definida (β_{ij}) de números reais existe uma única métrica Riemanniana tal que o produto interno riemanniano satisfaz $\langle e_i, e_j \rangle = \beta_{ij}$ $i, j = 1, ..., n$. Evidentemente, esta construção fornece de forma geral as métricas Riemanniana invariantes à esquerda (diz-se invariante à esquerda quando $L_a : G \longrightarrow G$ é isometria para todo $a \in G$). Assim, cada grupo de Lie de dimensão n possui uma família de métricas invariantes à esquerda de dimensão $\frac{1}{2}n(n+1)$. Veremos neste trabalho que a escolha de diferentes métricas em um grupo de Lie implicam em diferença substanciais sobre as propriedades da curvatura.

Escolhendo uma métrica invariante à esquerda em G, G torna-se uma variedade homogênea, isto é, dados $a, b \in G$ existe uma isometria que leva a em b, isto é fácil de comprovar, basta tomarmos a translação à esquerda $L_{ba^{-1}}$ e tem-se $L_{ba^{-1}}(a) = b$. Segue, então, que G é completo. De fato, escolhendo $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{B(e,\varepsilon)}$ seja compacta, e portanto por translações á esquerda desta bola temos que toda bola de raio ε é compacta, segue assim que toda sequência de Cauchy a partir de um certo termo estará dentro de um compacto, e logo será convergente.

A curvatura Riemanniana de uma variedade pode ser descrita facilmente pela forma bi-quadrática *função de curvatura*

$$k(x,y) = \langle R(x,y)x, y\rangle, \quad x, y \in T_a G.$$

Uma dada função $k(x,y)$ pode ocorrer como função curvatura para alguma métrica se, e somente se, é simétrica, biquadrática como função de x e y, e é nula sempre que $x = y$. A coleção de todas as funções simétricas e bi-quadráticas com $k(x,x) \equiv 0$ forma um espaço vetorial de dimensão $\frac{1}{12}n^2(n^2-1)$[1].

Em outras palavras devemos prescrever $\frac{1}{12}n^2(n^2-1)$ números reais para prescrever a curvatura Riemanniana de uma variedade em um ponto.

Se u e v são vetores ortonormais e unitários (ou mais geralmente, se o determinante $\langle u,u\rangle\langle v,v\rangle - \langle u,v\rangle^2$ é igual a 1) então o número real $\kappa = \kappa(u,v)$ é chamado *a curvatura seccional* do espaço gerado por u e v. Geometricamente, κ pode ser descrita como a curvatura Gaussiana, no ponto, de uma superfície composta por todas as geodésicas cujo vetor tangente nesse ponto é combinação linear de u e v.

Estudaremos os grupos de Lie com métricas invariantes à esquerda, escolhendo uma base ortonormal $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ de $\mathfrak{g}$. A curvatura seccional pode ser descrita como uma complicada fórmula envolvendo as constantes de estrutura a_{ijk} de $\mathfrak{g}$

Lema 3.1. *Com constantes de estruturas a_{ijk} a curvatura seccional $\kappa(e_1, e_2)$ é dada pela fórmula*

$$\begin{aligned}\kappa(e_1,e_2) &= \tfrac{1}{2}a_{12k}(-a_{12k} + a_{2k1} + a_{k12}) - \tfrac{1}{4}(a_{12k} - a_{2k1} + a_{k12})(a_{12k} + a_{2k1} - a_{k12}) \\ &\quad - a_{k11}a_{k22}\end{aligned}$$

(vale lembrar que estamos usando a notação de Einstein e, nas expressões acima, o que temos, na verdade são somatórios).

Demonstração. De $\langle \nabla_x y, z\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle [x,y],z\rangle - \langle [y,z],x\rangle + \langle [z,x],y\rangle\right)$, temos, em particular, para uma base ortonormal e_1, e_2, ..., e_n e tomando $a_{ijk} = \langle [e_i, e_j], e_k\rangle$, as constantes

[1]Veja a demonstração desse fato no Apêndice A

de estrutura da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, que $\langle \nabla_{e_i} e_j, e_k\rangle = \frac{1}{2}(a_{ijk} - a_{jki} + a_{kij})$ ou, ainda, em outras palavras que

$$\nabla_{e_i} e_j = \frac{1}{2}(a_{ijk} - a_{jki} + a_{kij})e_k.$$

Agora usando a fórmula da curvatura seccional dada pela definição

$$\begin{aligned}
\kappa(e_1, e_2) &= \left\langle \nabla_{[e_1,e_2]} e_1 - \nabla_{e_1}\nabla_{e_2} e_1 + \nabla_{e_2}\nabla_{e_1} e_1, e_2 \right\rangle \\
&= \langle \nabla_{a_{12k}e_k} e_1, e_2\rangle - \left\langle \nabla_{e_1} \tfrac{1}{2}(a_{21k} - a_{1k2} + a_{k21})e_k, e_2 \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \nabla_{e_2} \tfrac{1}{2}(a_{11k} - a_{1k1} + a_{k11})e_k, e_2 \right\rangle \\
&= \tfrac{1}{2} a_{12k}(a_{k12} - a_{12k} + a_{2k1}) - \tfrac{1}{4}(a_{21k} - a_{1k2} + a_{k21})(a_{1k2} - a_{k21} + a_{21k}) \\
&\quad + \tfrac{1}{4}(-a_{1k1} + a_{k11})(a_{2k2} - a_{k22}) \\
&= \tfrac{1}{2} a_{12k}(a_{k12} - a_{12k} + a_{2k1}) \\
&\quad - \tfrac{1}{4}(-a_{12k} + a_{k12} - a_{2k11})(-a_{k12} + a_{2k1} - a_{12k}) + \tfrac{1}{4}(-2a_{k11})(-2a_{k22}) \\
&= \tfrac{1}{2} a_{12k}(-a_{12k} + a_{2k1} + a_{k12}) - \tfrac{1}{4}(a_{12k} - a_{2k1} + a_{k12})(a_{12k} + a_{2k1} - a_{k12}) \\
&\quad - a_{k11} a_{k22},
\end{aligned}$$

o que garante o resultado. $\square$

Esta fórmula mostra que a curvatura seccional pode ser calculada completamente usando informações sobre álgebra de Lie. Mais ainda, a curvatura depende, continuamente, das constantes de estrutura a_{ijk} e é nula sempre que as constantes são nulas (álgebra comutativa).

Para ilustrar este conceito, considere o seguinte caso especial. Suponha que a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ contém um ideal $\mathfrak{u}$ de codimensão 1. Escolha um vetor b ortogonal a $\mathfrak{u}$ e seja

$$L : \mathfrak{u} \longrightarrow \mathfrak{u}$$

a transformação linear ad(b) restrita a $\mathfrak{u}$, isto é, tal que $L(u) = [b, u]$. Seja L^* a transformação linear adjunta, e ainda $S = \frac{1}{2}(L + L^*)$ a parte autoadjunta de L.

Além disso, pensando em $\mathfrak{u}$ como uma álgebra de Lie com uma métrica particular induzida de $\mathfrak{g}$. Seja $\overline{\nabla}$ a conexão Riemanniana para esta métrica em $\mathfrak{u}$. O símbolo ∇ será usando para denotar a conexão Riemanniana da álgebra $\mathfrak{g}$.

Lema 3.2. *Com esta notação, o operador derivada covariante ∇_b satisfaz*

$$\nabla_b b = 0 \qquad e \qquad \nabla_b u = \frac{1}{2}(L - L^*)u$$

para cada $u \in \mathfrak{u}$. Similarmente, o operador ∇_u satisfaz

$$\nabla_u b = -Su \qquad e \qquad \nabla_u v = \overline{\nabla}_u v + \langle Su, v\rangle b,$$

para quaisquer u *e* v *pertencentes a* $\mathfrak{u}$.

Demonstração. Usando sempre $u \in \mathfrak{u}$ e $b \in \mathfrak{u}^{\perp}$, demonstremos separadamente as quatro afirmacões.

- Sendo $\mathfrak{u}$ um ideal então $[v, u] \in \mathfrak{u}$ para quaisquer $v \in \mathfrak{g}$ e $u \in \mathfrak{u}$. Calculando as componentes de $\nabla_b b$ na direção de b e na direção de u, temos que
$$\langle \nabla_b b, b\rangle = \frac{1}{2}(\langle [b,b],b\rangle - \langle [b,b],b\rangle + \langle [b,b],b\rangle) = 0$$
e
$$\langle \nabla_b b, u\rangle = \frac{1}{2}(\langle [b,b],u\rangle - \langle [b,u],b\rangle + \langle [u,b],b\rangle) = 0$$
portanto temos que $\nabla_b b \equiv 0$.

- Tomando um vetor $w \in \mathfrak{u}$ qualquer e calculando as componentes de $\nabla_b u$ na direção de b e na direção w obtemos
$$\langle \nabla_b u, b\rangle = \tfrac{1}{2}(\langle [b,u],b\rangle - \langle [u,b],b\rangle + \langle [b,b],u\rangle) = 0$$
$$\begin{aligned}\langle \nabla_b u, w\rangle &= \tfrac{1}{2}(\langle [b,u],w\rangle - \langle [u,w],b\rangle + \langle [w,b],u\rangle)\\ &= \tfrac{1}{2}(\langle [b,u],w\rangle - \langle [b,w],u\rangle)\\ &= \tfrac{1}{2}(\langle L(u),w\rangle - \langle L^*(u),w\rangle)\\ &= \tfrac{1}{2}(\langle L(u)-L^*(u),w\rangle).\end{aligned}$$
Assim temos $\nabla_b u = \frac{1}{2}(L - L^*)u$.

- Ainda com $w \in \mathfrak{u}$, calculando $\nabla_u b$ na direção de b e na direção de w, vemos que
$$\langle \nabla_u b, b\rangle = \frac{1}{2}\big(\langle [b,u],b\rangle - \langle [u,b],b\rangle + \langle [b,b],u\rangle\big) = 0$$
$$\begin{aligned}\langle \nabla_u b, w\rangle &= \tfrac{1}{2}\big(\langle [u,b],w\rangle - \langle [b,w],u\rangle + \langle [w,u],b\rangle\big)\\ &= \tfrac{1}{2}\big(-\langle [b,u],w\rangle - \langle [b,w],u\rangle\big)\\ &= -\tfrac{1}{2}\big(\langle L(u)+L^*(u),w\rangle\big)\\ &= -Su.\end{aligned}$$
Portanto temos $\nabla_u b = -Su$.

- Por fim, para $u, v \in \mathfrak{u}$, calculando também as componentes de $\nabla_u v$ na direção de b e na direção de w, obtemos

$$
\begin{aligned}
\langle \nabla_u v, b\rangle &= \tfrac{1}{2}\big(\langle [u,v],b\rangle - \langle [v,b],u\rangle + \langle [b,u],v\rangle\big)\\
&= \tfrac{1}{2}\big(\langle [b,v],u\rangle + \langle [b,u],v\rangle\big)\\
&= \tfrac{1}{2}\big(\langle L^*(u) + L(u),v\rangle\big)\\
&= \langle Su, v\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle \nabla_u v, w\rangle &= \tfrac{1}{2}\big(\langle [u,v],w\rangle - \langle [v,w],u\rangle + \langle [w,u],v\rangle\big)\\
&= \langle \overline{\nabla}_u v, w\rangle.
\end{aligned}
$$

Daí temos $\nabla_u v = \overline{\nabla}_u v + \langle Su, v\rangle b$. □

A seguir, veremos uma aplicação deste lema que é a mais importante de suas aplicações. Dado um grupo de Lie G com uma métrica invariante à esquerda, seja u um vetor da álgebra de Lie associada.

Lema 3.3. *Se a transformação linear* $\mathrm{ad}(u)$ *é antiadjunta, então*

$$\kappa(u,v) \geqslant 0$$

para todo v*, onde a igualdade ocorre se, e somente se,* u *é ortogonal à imagem* $[v,\mathfrak{g}]$.

Demonstração. Assumiremos, sem perda de generalidade, que u e v são ortonormais. Escolha $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ uma base ortonormal com $e_1 = u$ e $e_2 = v$. Admitindo que $\mathrm{ad}(u)$ é antiadjunta, temos que $\langle [e_1,y],z\rangle = -\langle y,[e_1,z]\rangle = -\langle [e_1,z],y\rangle$, ou seja, que as constantes de estrutura a_{ijk} satisfazem $a_{1jk} = -a_{1kj} = a_{jk1}$. Do lema 3.1, temos que:

$$
\begin{aligned}
\kappa(e_1,e_2) &= \tfrac{1}{2}a_{12k}(-a_{12k}+a_{2k1}+a_{k12}) - \tfrac{1}{4}(a_{12k}-a_{2k1}+a_{k12})(a_{12k}-a_{2k1}-a_{k12})\\
&\quad -a_{k11}a_{k22}\\
&= \tfrac{1}{2}a_{12k}(-a_{2k1}+a_{2k1}+a_{k12}) - \tfrac{1}{4}(a_{12k}-a_{12k}+a_{k12})(a_{12k}+a_{12k}-a_{k12})\\
&= \tfrac{1}{2}(a_{2k1})(a_{2k1}) - \tfrac{1}{4}(a_{2k1})(a_{2k1})\\
&= \sum_k \tfrac{1}{4}(a_{2k1})^2 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Assim $\kappa(e_1,e_2) \geqslant 0$, como afirmamos e, mais ainda, $\kappa(e_1,e_2) = 0$ se, e somente se, $a_{2k1} = 0$, ou seja, $\langle e_1,[e_k,e_2]\rangle = 0$ para todo k, logo e_1 é ortogonal à $[e_2,\mathfrak{g}]$. □

A hipótese do lema acima depende de uma particular escolha da métrica.

Corolário 3.1. *Se* u *pertence ao centro da álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *(isto é* $[u,v] = 0\,\forall v \in \mathfrak{g}$*), então para qualquer métrica invariante à esquerda a desigualdade* $\kappa(u,v) \geqslant 0$ *é satisfeita para todo* v.

Demonstração. De fato, como u pertence ao centro da álgebra, então $[u, v] = 0$ para todo $v \in \mathfrak{g}$. Portanto $\operatorname{ad}(u)$ é antiadjunta e assim temos $\kappa(u, v) \geqslant 0$. □

Mostraremos mais adiante que os elementos do centro são os únicos com esta propriedade. Para isto, usaremos o seguinte lema.

Lema 3.4. *Seja* G *um grupo de Lie com* $\mathfrak{g}$ *sua álgebra de Lie associada. Suponha que* x *não pertence ao centro de* $\mathfrak{g}$ *e que*

$$[x, y] = \alpha(y)x + \beta y,$$

para todo y *em* $\mathfrak{g}$. *Então existe uma base* $\{e_1, ..., e_n\}$ *de* $\mathfrak{g}$, *com* $x = e_1$ *tal que*

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_1 + \beta e_2 \\ [e_1, e_i] &= \beta e_i, \qquad\qquad i \geqslant 3 \\ [e_2, e_i] &= a_i e_1 + \sum_{k \geqslant 2} b_{ik} e_k, \quad \textit{com} \sum_{i \leqslant 3} a_i^2 \leqslant 4. \end{aligned}$$

Demonstração. Sabendo que $e_1 = x$ não pertence ao centro de $\mathfrak{g}$, então existe e_2 tal que $\alpha(e_2) = 1$. Caso contrário, teríamos $\alpha \equiv 0$ e $[x, y] = \beta y$. Daí $[x, x] = \beta x = 0$ e, portanto, $\beta = 0$ segue que $[x, y] = 0$ para todo y em $\mathfrak{g}$, absurdo.

Podemos agora encontrar uma base $\{e_1, e_2, f_3, ..., f_n\}$ satisfazendo $[e_1, f_i] = \beta f_i,\ i \geqslant 3$. Para isto, basta observarmos que $\alpha : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear e, tomando $\{f_3, ...f_n\}$ no núcleo de α, temos que $[e_1, f_i] = \beta f_i,$ para $i \geqslant 3$.

Finalmente podemos tomar $e_i = \varepsilon f_i,\ i \geqslant 3$, onde $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno de modo que a condição $\sum_{i \geqslant 3} a_i^2 \leqslant 4$ seja satisfeita. □

Alguns grupos de Lie possuem métrica que, além de serem invariantes por translações à esquerda, são ainda invariantes por translações à direita. Este fato sobre tais métricas bi-invariantes pode ser resumido como segue.

Lema. *Uma métrica invariante à esquerda em um grupo de Lie conexo é invariante à direita se, e somente se,* $\operatorname{ad}(x)$ *é antiadjunta para todo* $x \in \mathfrak{g}$. *Um grupo de Lie conexo, admite métrica bi-invariante se, e somente se, é isomorfo ao produto cartesiano de um grupo de Lie compacto e um grupo comutativo.*

A demonstração deste lema será apresentada na seção 4.3 e será dividida em dois lemas, a saber os lemas 4.4 e 4.7

Corolário 3.2. *Todo grupo de Lie compacto admite métrica invariante à esquerda (de fato, bi-invariante) tal que a curvatura seccional satisfaz* $\kappa \geqslant 0$*. Além disto,*

$$\kappa(u, v) = \frac{1}{4}\|[u, v]\|^2.$$

Demonstração. Com efeito, temos que, sendo o grupo de Lie compacto, este possui métrica bi-invariante (veja por exemplo [8] proposição 6.8) e, portanto $ad(x)$ é antiadjunta para todo $x \in \mathfrak{g}$, donde $\kappa(x, y) \geqslant 0$, para todos $x, y \in \mathfrak{g}$. Para a segunda parte seja $e_1, e_2, ..., e_n$ uma base ortonormal de $\mathfrak{g}$ e mostremos inicialmente que $\nabla_{e_i} e_j = \frac{1}{2}[e_i, e_j]$. De fato, temos que

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{e_i} e_j, e_k \rangle &= \tfrac{1}{2}\big(\langle [e_i, e_j], e_k \rangle - \langle [e_j, e_k], e_i \rangle + \langle [e_k, e_i], e_j \rangle\big) \\
&= \tfrac{1}{2}\big(\langle [e_i, e_j], e_k \rangle + \langle [e_j, e_i], e_k \rangle - \langle [e_i, e_k], e_j \rangle\big) \\
&= \tfrac{1}{2}\big(\langle [e_i, e_j], e_k \rangle - \langle [e_i, e_j], e_k \rangle + \langle [e_i, e_j], e_k \rangle\big) \\
&= \tfrac{1}{2}\langle [e_i, e_j], e_k \rangle.
\end{aligned}$$

Portanto, temos que $\nabla_{e_i} e_j = \frac{1}{2}[e_i, e_j]$. Para o cálculo da curvatura seccional, tome $u = e_1$ e $v = e_2$, então

$$\begin{aligned}
\kappa(e_1, e_2) &= \langle \nabla_{[e_1,e_2]} e_1 - \nabla_{e_1}\nabla_{e_2} e_1 + \nabla_{e_2}\nabla_{e_1} e_1, e_2 \rangle \\
&= \langle \tfrac{1}{2}[[e_1, e_2], e_1] - \tfrac{1}{2}\nabla_{e_1}[e_2, e_1] + \tfrac{1}{2}\nabla_{e_2}[e_1, e_1], e_2 \rangle \\
&= \langle \tfrac{1}{2}[[e_1, e_2], e_1] - \tfrac{1}{4}[e_1, [e_2, e_1]], e_2 \rangle \\
&= \langle -\tfrac{1}{2}[e_1, [e_1, e_2]] + \tfrac{1}{4}[e_1, [e_1, e_2]], e_2 \rangle \\
&= -\tfrac{1}{4}\langle [e_1, [e_1, e_2]], e_2 \rangle \\
&= \tfrac{1}{4}\langle [e_1, e_2], [e_1, e_2] \rangle \\
&= \tfrac{1}{4}\|[e_1, e_2]\|^2.
\end{aligned}$$

□

Teorema 3.1 (Wallach)**.** *O grupo* $SU(2)$*, consistindo das matrizes unitárias* 2×2 *de determinante 1, é o único grupo de Lie simplesmente conexo que admite métrica invariante à esquerda com todas as curvaturas seccionais estritamente positivas.*

Demonstração. Em nosso texto, mostraremos apenas a primeira parte do teorema. Uma demonstração da segunda parte pode ser encontrada em [6] p. 25. Provemos então, que $SU(2)$ possui uma métrica invariante á esquerda (na verdade bi-invariante) com $\kappa \equiv 1$.

Com efeito, a álgebra de Lie de $SU(2)$ consiste de todas as matrizes complexas da forma $\begin{bmatrix} a & \overline{b} \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{bmatrix}$, onde a é imaginário puro. Definindo em $su(2)$ (aqui $su(2)$ denotará a álgebra de Lie de $\mathrm{SU}(2)$) o produto interno $\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\ x\overline{y}^T$, verifica-se, por propriedades do traço, que esta métrica é invariante à esquerda (na verdade bi-invariante). As matrizes

$$e_1 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

formam uma base ortonormal relativamente a essa métrica.

Efetuando o colchete, $[x, y] = xy - yx$, obtemos

$$[e_1, e_2] = -2e_3, \quad [e_1, e_3] = -2e_2 \quad \text{e} \quad [e_2, e_3] = -2e_1,$$

portanto $\|[e_i, e_j]\| = 2$, para $i \neq j$.

Para calcularmos $\|[x, y]\|$ em um par de vetores x, y ortonormais quaisquer, observemos que, sendo $x = x_i e_i$ e $y = y_i e_i$, $i = 1, 2, 3$, temos

$$\begin{aligned} [x, y] &= [x_i e_i, y_j e_j] \\ &= x_i y_j [e_i, e_j] \\ &= (x_1y_2 - x_2y_1)[e_1, e_2] + (x_1y_3 + x_3y_1)[e_1, e_3] + (x_2y_3 - x_3y_2)[e_2, e_3] \\ &= -2[(x_1y_2 - x_2y_1)e_3 + (x_1y_3 + x_3y_1)e_2 + (x_2y_3 - x_3y_2)e_1]. \end{aligned}$$

Como estamos supondo x, y ortonormais, temos $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0$. Daí

$$\begin{aligned} \|[x, y]\|^2 &= 4\big[(x_1y_2 - x_2y_1)^2 + (x_1y_3 + x_3y_1)^2 + (x_2y_3 - x_3y_2)^2\big] \\ &= 4\big[x_1^2y_2^2 - 2x_1y_2x_2y_1 + x_2^2y_1^2 + x_1^2y_3^2 - 2x_1y_3x_3y_1 + x_3^2y_1^2 \\ &\quad +x_2^2y_3^2 - 2x_2y_3x_3y_2 + x_3^2y_2^2\big] \\ &= 4\big[x_1^2(y_2^2 + y_3^2) + x_2^2(y_1^2 + y_3^2) + x_3(y_1^2 + y_2^2) \\ &\quad -(2x_1y_1x_2y_2 + 2x_1y_1x_3y_3 + 2x_2y_2x_3y_3)\big] \\ &= 4\big[x_1^2(y_1^2y_2^2 + y_3^2) + x_2^2(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + x_3(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \\ &\quad -(x_1^2y_1^2 + 2x_1y_1x_2y_2 + x_2^2y_2^2 + 2x_1y_1x_3y_3 + x_3^2y_3^2 + 2x_2y_2x_3y_3)\big] \\ &= 4\big[(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2\big] \\ &= 4. \end{aligned}$$

Consequentemente $\|[x, y]\| = 2$. Como esta métrica é bi-invariante, segue do corolário 3.2 que $\kappa = \frac{1}{4}\|[x, y]\|^2 \equiv 1$. □

As variedades Riemannianas de geometria mais simples são as ditas *flat*, as quais possuem curvaturas seccionais identicamente nulas. No caso de métricas invariantes à esquerda, um critério preciso para a classificação das variedades que admitem métrica com todas as curvaturas seccionais nulas é dado pelo

Teorema 3.2. *Um grupo de Lie com métrica invariante à esquerda é* flat *se, e somente se, a álgebra de Lie associada se decompõe como uma soma direta ortogonal* $\mathfrak{b} \oplus \mathfrak{u}$ *onde*

$\mathfrak{b}$ *é uma subálgebra comutativa e* $\mathfrak{u}$ *é um ideal comutativo, e onde a transformação* $\mathrm{ad}(\mathsf{b})$ *é antiadjunta para todo* $\mathsf{b} \in \mathfrak{b}$.

A demonstração desse teorema será feita apenas no final da seção 4.3.

Assim, existem grupos de Lie não comutativo com métricas invariantes *flat*, mas estes são todos solúveis, pois sendo G um grupo de Lie que admite métrica invariante á esquerda *flat* e $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie associada, observe que $\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{u}$, conforme o teorema 3.2 então, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{u}$, pois $\mathfrak{u}$ é ideal, assim $[[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] = \{0\}$, pelo fato de $\mathfrak{u}$ ser comutativo, portanto, $\mathfrak{g}$ é solúvel. Um exemplo simples é provado para o grupo $\mathsf{E}(2)$ dos movimentos rígidos do plano Euclidiano.

Aqueles grupos de Lie que admitem métrica invariante à esquerda de curvatura seccional estritamente negativa foram classificados por Heintze (veja "On Homogeneous Manifolds of Negative Curvature" de Ernst Heintze). A condição necessária e suficiente é que $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + \mathbb{R}\mathsf{x}$ para algum x tal que todos os autovalores de $\mathrm{ad}(\mathsf{x})|[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ possuam parte real positiva. Segue, por exemplo, que o produto cartesiano não admite uma métrica invariante à esquerda de curvatura seccional estritamente negativa.

Aqueles com $\kappa \leqslant 0$ foram classificadas por Azencott e Wilson (Veja "Homogeneous manifolds with negative curvature, Part I" de Azencott e Wilson). Pelo fato de seus desenvolvimentos serem bastante complicados apresentaremos apenas o seguinte resultado sem demonstração.

Teorema 3.3. *Se um grupo de Lie conexo* G *possui métrica invariante à esquerda com todas as curvaturas seccionais* $\kappa \leqslant 0$*, então* G *é solúvel. Se* G *é unimodular (veja a definição 3.1), então qualquer métrica tal que* $\kappa \leqslant 0$ *é, na verdade,* flat *(*$\kappa \equiv 0$*).*

Dizemos que uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, é simples se seus únicos ideais são os ideais triviais ($\{0\}$ e $\mathfrak{g}$). Dizemos que um grupo de Lie é simples se sua álgebra de Lie é simples. Quando uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é soma direta de álgebras de Lie simples, dizemos que $\mathfrak{g}$ é semissimples. Um grupo de Lie é dito semissimples se sua álgebra de Lie associada é semissimples.

Passaremos a descrever algumas propriedades acerca de grupos unimodulares. Relembre que cada elemento, g, de um grupo de Lie G determina um automorfismo

$$\mathsf{h} \longmapsto \mathsf{g}\mathsf{h}\mathsf{g}^{-1}$$

do grupo G. Lembre ainda que o automorfismo induzido da álgebra de Lie é chamado $\mathrm{Ad}(\mathsf{g})$. Aqui, daremos a seguinte definição para grupo de Lie unimodular.

Definição 3.1. *Um grupo de Lie* G *é dito unimodular se a transformação linear* $\mathrm{Ad}(\mathsf{g})$ *tem determinante* ± 1 *para todo* $\mathsf{g} \in \mathsf{G}$.

Como um exemplo, se G é compacto ou conexo e semissimples, então o homomorfismo

$$\mathsf{g} \longmapsto |\det \mathrm{Ad}(\mathsf{g})|$$

de G sobre o conjunto dos reais positivos deve ser certamente trivial. De fato, primeiramente se G é compacto, temos uma aplicação contínua, leva compacto em compacto, portanto o homomorfismo seria trivial, por sua vez se é G semissimples, temos $\mathbb{R}^+$ comutativo e um homomorfismo não trivial implica na existência de um subgrupo comutativo não trivial de G, absurdo, assim G é unimodular.

Observação 3.1. Na verdade, define-se grupo de Lie unimodular como o grupo de Lie tal que sua medida de Haar (veja [9]) é invariante à esque e à direita e esta definição é, na verdade, um resultado equivalente que usaremos como definição para nos poupar um pouco de trabalho com esta teoria. O leitor interessado pode consultar, por exemplo, a referência [9] para ver a citada equivalência.

Dado um espaço topológico e um grupo agindo sobre ele, as imagens de um único ponto sob a ação do grupo formam uma órbita da ação. Um domínio fundamental é um subconjunto do espaço, que contém exatamente um ponto de cada uma destas órbitas. Ele serve como uma realização geométrica para o conjunto abstrato de representantes das órbitas. Temos, então, o seguinte resultado.

Lema 3.5. *Se* G *admite um subgrupo discreto* Γ *com quociente* G/Γ *compacto, então* G *é unimodular.*

Demonstração. Escolha um domínio fundamental compacto D por ações de Γ à esquerda em G (tomando, por exemplo, a ação $\varphi : \Gamma \times \mathsf{G} \longrightarrow \mathsf{G},\ \varphi((\gamma, \mathsf{g})) = \gamma\mathsf{g}$, observarmos que qualquer domínio fundamental é difeomorfo a G/Γ, que é compacto), que é um subconjunto $\mathsf{D} \subset \mathsf{G}$ tal que as translações à esquerda $\gamma\mathsf{D}$ cobrem G e que a interseção $\gamma\mathsf{D} \cap \gamma'\mathsf{D}$ tem medida nula para $\gamma \neq \gamma'$. Escolhendo uma medida de Haar invariante à esquerda ω, note que a medida $\omega(\mathsf{D}) \neq 0$ é independente da escolha da medida, pois caso contrário teríamos $\omega(G) \leqslant \sum \omega(\gamma D) = 0$ o que não pode acontecer. Agora se E for outro domínio fundamental então

$$\omega(E) = \sum \omega(\gamma D \cap E) = \sum \omega(D \cap \gamma^{-1} E) = \omega(D),$$

onde o somatório se estende sobre todos os γ de Γ.

Para qualquer elemento g do grupo, note que o transladado à direita Dg é também um domínio fundamental para a ação de Γ à esquerda. Assim $\omega(D) = \omega(Dg)$, segue então que a medida de Haar ω invariante à esquerda é também invariante à direita. Portanto G é unimodular. □

Em termos de álgebras de Lie, temos o seguinte critério.

Lema 3.6. *Um grupo de Lie conexo é unimodular se, e somente se, a transformação linear* $\mathrm{ad}(x)$ *tem traço nulo para qualquer* x *na álgebra de Lie associada.*

Demonstração. Usaremos duas aplicações exponenciais. Se ℓ é uma transformação linear de um espaço vetorial de dimensão finita sobre si mesmo, seja

$$e^{\ell} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\ell^i}{i!}.$$

Usando a forma canônica de Jordan temos que

$$\det(e^{\ell}) = e^{\operatorname{tr} \ell}.$$

Por outro lado, para qualquer grupo de Lie G podemos considerar a aplicação suave

$$\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$$

caracterizada pela propriedade que, para cada $x \in G$,a aplicação define um homomorfismo

$$t \longmapsto \exp(tx)$$

do grupo de Lie dos números reais sobre G, o homomorfismo de álgebra de Lie associado sendo a multiplicação por x. Estas duas exponenciais estão relacionados pela seguinte identidade

$$\mathrm{Ad}(\exp(x)) = e^{\mathrm{ad}(x)}$$

como no diagrama 2.1.

Agora se $|\det \mathrm{Ad}(g)|$ é identicamente 1, segue

$$\det \mathrm{Ad}(\exp(x)) = \det e^{\mathrm{ad}(x)} = e^{\mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}(x))}$$

é identicamente 1, assim $\mathrm{tr}\ \mathrm{ad}(x) \equiv 0$. Reciprocamente, se $\mathrm{tr}\ \mathrm{ad}(x) \equiv 0$ este argumento mostra que $\det \mathrm{Ad}(g) = 1$ para todo g na imagem da aplicação exponencial. Usando o teorema da função inversa, isto inclui todo g em uma vizinhança da identidade. Porém sendo G conexo, é gerado por uma vizinhança da identidade, assim $\det \mathrm{Ad}(g)$ é identicamente igual a 1. $\square$

Como exemplo, se $\mathfrak{g}$ é nilpotente, então toda $\mathrm{ad}(x)$ é nilpotente, ou seja $\mathrm{ad}^n(x) = \mathrm{ad}(x) \circ ... \circ \mathrm{ad}(x) = 0$, e tem traço nulo.

Uma álgebra de Lie que satisfaz a condição $\mathrm{tr}\ \mathrm{ad}(x) \equiv 0$ é chamada uma álgebra de Lie unimodular.

Agora, seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie completamente arbitrária. Da identidade de Jacobi, obtemos

$$\mathrm{ad}([x, y]) = \mathrm{ad}(x)\mathrm{ad}(y) - \mathrm{ad}(y)\mathrm{ad}(x),$$

donde segue que $\mathrm{tr}\ \big(\mathrm{ad}([x, y])\big) = \mathrm{tr}\ (\mathrm{ad}(x)\mathrm{ad}(y) - \mathrm{ad}(y)\mathrm{ad}(x)) = 0$. Portanto, a aplicação linear

$$x \longmapsto \mathrm{tr}\ \mathrm{ad}(x)$$

de $\mathfrak{g}$ sobre a álgebra de Lie comutativa $\mathbb{R}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie. Em particular, o seu núcleo

$$\mathfrak{u} = \{x \in \mathfrak{g} | \mathrm{tr}\ \mathrm{ad}(x) = 0\}$$

é um ideal, contendo o comutador ideal $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Chamaremos $\mathfrak{u}$ o núcleo unimodular de $\mathfrak{g}$. Podemos, ainda, observar que $\mathfrak{u}$ é uma álgebra de Lie unimodular. Com efeito, tomando $\{u_1, ..., u_k, e_{k+1}, ..., e_n\}$ uma base ortonormal de $\mathfrak{g}$ onde $\{u_1, ..., u_k\}$ é uma base de $\mathfrak{u}$, temos

$$\mathrm{tr}\ \mathrm{ad}(x) = \langle \mathrm{ad}(x)u_i, u_i\rangle + \langle \mathrm{ad}(x)e_j, e_j\rangle,$$

desde que $\langle \mathrm{ad}(x)e_j, e_l\rangle = 0\ \forall j, l = k+1, ..., n$. Portanto, temos

$$\langle \mathrm{ad}(x)u_i, u_i\rangle = 0,$$

assim considerando $\mathfrak{u}$ como uma álgebra de Lie, temos $\mathrm{tr}\ \mathrm{ad}(x) = 0$, portanto $\mathfrak{u}$ é uma álgebra de Lie unimodular.

Como dito antes, aqui temos uma interessante aplicação do lema 3.2.

Exemplo Especial. Suponha que a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ tem a propriedade de que o colchete $[x, y]$ é sempre igual a uma combinação linear de x e y. Assumindo que dim $\mathfrak{g} \geqslant 2$, temos de fato

$$[x, y] = \ell(x)y - \ell(y)x$$

onde ℓ é um funcional linear bem definido de $\mathfrak{g}$ no conjunto dos números reais. Escolhendo qualquer métrica positiva definida, as curvaturas seccionais são constantes:

$$\kappa(x, y) = -\|\ell\|^2$$

Assim, no caso não comutativo $\ell \neq 0$, toda possível métrica em $\mathfrak{g}$ possui curvatura seccional constante negativa.

Verificação: Mostremos inicialmente que $[x, y] = \ell(x)y - \ell(y)x$. De fato, como $[x, y]$ é uma combinação linear de x e y, tomemos uma base $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ortonormal. Assim devemos ter $[e_i, e_j] = a_{ij}e_i + b_{ij}e_j$ (observe que neste caso não temos uma soma, pois mesmo i e j sendo arbitrários, estão fixados). Observemos que da anticomutatividade temos:

$$[e_i, e_j] = a_{ij}e_i + b_{ij}e_j = -a_{ji}e_j - b_{ji}e_i = -[e_j, e_i]$$

donde para $e_i \neq e_j$ tem-se $a_{ij} = -b_{ji}$. Fazendo a substituição temos $[e_i, e_j] = a_{ij}e_i - a_{ji}e_j$, observando agora que a_{ii} pode assumir qualquer valor, vamos assumir que $a_{ii} = 0$, afirmamos que a_{ij} para $i \neq j$ não depende de i. Com efeito, temos que:

$$\begin{aligned} [e_i, e_1 + e_2 + ... + e_n] &= [e_i, e_1] + [e_i, e_2] + ... + [e_i, e_n] \\ &= a_{i1}e_i - a_{1i}e_1 + a_{i2}e_i - a_{2i}e_2 + ... + a_{in}e_i - a_{ni}e_n \\ &= (a_{i1} + a_{i2} + ... + a_{in})e_i - a_{1i}e_1 - a_{2i}e_2 - ... - a_{ni}e_n, \end{aligned}$$

mas por outro lado, obtemos que

$$[e_i, e_1 + e_2 + ... + e_n] = \lambda e_i + \beta(e_1 + e_2 + ... + e_n).$$

Do fato que $e_1, e_2, ..., e_n$ é uma base, temos que $\beta = -a_{ij}, \quad i \neq j$. Assim no lugar de escrevermos a_{ij}, podemos escrever apenas a_j para $i \neq j$ e, como $a_{ii} = 0$, este não vai ser importante nas somas, então não o levaremos em consideração. Obtemos, assim, $[e_i, e_j] = a_je_i - a_ie_j$. Tomando $x = x_ie_i$ e $y = y_ie_i$ $x, y \in \mathfrak{g}$, temos que

$$\begin{aligned}
[x,y] &= [x_ie_i, y_je_j]\\
&= x_iy_j[e_i,e_j]\\
&= x_iy_j(a_je_i - a_ie_j)\\
&= a_jy_j(x_ie_i) - a_ix_j(y_je_j)\\
&= (a_jy_j)x - (a_ix_i)y\\
&= \ell(x)y - \ell(y)x,
\end{aligned}$$

onde ℓ é o funcional linear $\ell : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\ell(e_i) = -a_i$. Evidentemente, esta fórmula é também verdadeira no caso trivial onde x e y são linearmente dependentes.

O caso comutativo não é interessante neste exemplo, seja então $\ell \neq 0$. Seja $\mathfrak{u}$ o núcleo de ℓ. Claramente $\mathfrak{u}$ é um ideal comutativo, pois dados $u, v \in \mathfrak{u}$ temos que $[u,v] = \ell(u)v - \ell(v)u = 0$. Escolha, então, um vetor unitário, b, ortogonal a $\mathfrak{u}$, e seja $\lambda = \ell(b)$. (Evidentemente, podemos supor $\lambda > 0$ e identificar λ com $\|\ell\|$, a norma da transformação linear). Relembrando, então, do Lema 3.2 a transformação $L(u) = [b,u]$ é dada por $L(u) = \lambda u$, que é, claramente, autoadjunta. Assim, $\nabla_b \equiv 0$ pelo Lema 3.2. Observando que $\overline{\nabla}_u v = 0, \forall u, v \in \mathfrak{u}$, temos, novamente, pelo Lema 3.2 que, sendo $z = \alpha b + w \in \mathfrak{g}$, onde $w \in \mathfrak{u}$, então

$$\begin{aligned}
\nabla_u z &= \nabla_u \alpha b + \nabla_u w\\
&= -\alpha L(u) + \langle L(u), w\rangle b\\
&= \lambda\big(\langle u, z\rangle b - u\langle b, z\rangle\big),
\end{aligned}$$

para qualquer $u \in \mathfrak{u}$ e qualquer $z \in \mathfrak{g}$. Tomando $x, y, z \in \mathfrak{g}$ e escrevendo $x = x_1b + w_x,\ y = y_1b + w_y$ e $z = z_1b + w_z$ onde $w_x, w_y, w_z \in \mathfrak{u}$, podemos então calcular a curvatura

$$\begin{aligned}
R(x,y)z &= \nabla_y\nabla_x z - \nabla_x\nabla_y z + \nabla_{[x,y]}z\\
&= \nabla_{w_y}\nabla_{w_x} z - \nabla_{w_x}\nabla_{w_y} z + \nabla_{\lambda(x_1y - y_1x)}z\\
&= \nabla_{w_y}\big(\lambda(\langle w_x, z\rangle - w_x\langle b, z\rangle)\big) - \nabla_{w_x}\big((\lambda\langle w_y, z\rangle - w_y\langle b, z\rangle)\big)\\
&\quad +\lambda\nabla_{x_1w_y}z - \lambda\nabla_{y_1w_x}z\\
&= \lambda^2\big(b\big\langle w_y, b\langle w_x, z\rangle - w_x\langle b, z\rangle\big\rangle - w_y\big\langle b, b\langle w_x, z\rangle - w_x\langle b, z\rangle\big\rangle\big)\\
&\quad -\lambda^2\big(b\big\langle w_x, b\langle w_y, z\rangle - w_y\langle b, z\rangle\big\rangle - w_x\big\langle b, b\langle w_y, z\rangle - w_y\langle b, z\rangle\big\rangle\big)\\
&\quad +\lambda^2\big(b\langle x_1w_y, z\rangle - x_1w_y\langle b, z\rangle\big) - \lambda^2\big(b\langle y_1w_x, z\rangle - y_1w_x\langle b, z\rangle\big)\\
&= \lambda^2\big(b\big\langle w_y, -w_x\langle b, z\rangle\big\rangle - w_y\langle w_y, z\rangle - b\big\langle w_x, w_y\langle b, z\rangle\big\rangle + w_x\langle w_y, z\rangle\big)\\
&\quad +\lambda^2\big(b\langle x_1w_y, z\rangle - x_1w_y\langle b, z\rangle\big) - \lambda^2\big(b\langle y_1w_x, z\rangle - y_1w_x\langle b, z\rangle\big)\\
&= \lambda^2\big(-w_y\langle w_x, z\rangle + w_x\langle w_y, z\rangle + x_1b\langle w_y, z\rangle - x_1w_y\langle b, z\rangle - y_1b\langle w_x, z\rangle\\
&\quad +y_1w_x\langle b, z\rangle\big) + \lambda^2x_1b\langle y_1b, z\rangle - \lambda^2y_1b\langle x_1b, z\rangle\\
&= \lambda^2\big(-y\langle w_x, z\rangle + x\langle w_y, z\rangle - y\langle x_1b, z\rangle + x\langle y_1b, z\rangle\big)
\end{aligned}$$

portanto

$$R(x,y)z = \lambda^2\big(x\langle y,z\rangle - y\langle x,z\rangle\big)$$

para quaisquer x, y e $z \in \mathfrak{g}$. Calculando a curvatura seccional $\kappa(x,y) = \langle R(x,y)x, y\rangle$, obtemos

$$\begin{aligned}
\kappa(x,y) &= \langle R(x,y)x, y\rangle \\
&= \lambda^2\big\langle x\langle y,x\rangle - y\langle x,x\rangle, y\big\rangle \\
&= \lambda^2\big(\langle x,y\rangle\langle y,x\rangle - \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle\big) \\
&= -\lambda^2\big(\langle y,y\rangle\langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle^2\big).
\end{aligned}$$

Logo $\kappa(x,y) = -\lambda^2$ sempre que x e y forem ortonormais. Em outras palavras, a curvatura seccional é constante e $\kappa \equiv -\lambda^2$.

Podemos, ainda, calcular ℓ explicitamente. De fato, tomando, novamente uma base ortonormal de $\mathfrak{g}$, para $x \in \mathfrak{g}$, escrevemos $x = x_i e_i$, façamos

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{ad}(x)(e_i), e_i\rangle &= \langle [x, e_i], e_i\rangle \\
&= \langle \ell(x)e_i - \ell(e_i)x, e_i\rangle \\
&= \ell(x) - \ell(x_i e_i)
\end{aligned}$$

somando sobre i, obtemos $\mathrm{tr}\ \mathrm{ad}(x) = n\ell(x) - \ell(x)$ e, portanto, temos que $(n-1)\ell(x) = \mathrm{tr}\ \mathrm{ad}(x)$.

Veremos mais adiante que este exemplo poder ser caracterizado como a única álgebra de Lie que, para qualquer métrica invariante, possui curvatura seccional com sinal constante.

3.2 Curvatura de Ricci

Recordemos que a curvatura de Ricci de uma variedade Riemanniana M^n em um ponto $p \in M$ segundo a direção $x \in T_pM$ pode ser interpretada como uma média das curvaturas seccionais segundo planos tangentes a x, no seguinte sentido: tomando x unitário e completando de modo a obter uma base ortonormal de T_pM $\{x, e_2, \ldots, e_n\}$, então

$$r_p(x) = \sum_{i=2}^{n} \kappa(x, e_i) = \langle R(x,e_i)x, e_i\rangle$$

onde κ é a bi-quadrática função de curvatura.

Como o tensor de Ricci ric, em cada ponto, define uma forma bilinear simétrica, podemos representá-lo pelo operador autoadjunto (transformação de Ricci) $\widetilde{r}$ definido por

$$\widetilde{r}(x) = R(e_i, x)e_i.$$

Este é relacionado com o tensor de Ricci pela seguinte identidade

$$\mathrm{ric}(x, y) = \langle \widetilde{r}(x), y \rangle.$$

Os autovalores de $\widetilde{r}$ são chamados curvaturas principais de Ricci. Se escolhermos uma base $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ formada por autovetores, notemos que a forma quadrática é diagonalizável.

$$r(\xi_1 e_1 + ... + \xi_n e_n) = r(e_i)\xi_i^2.$$

Em particular, os números $r(e_i)$ podem ser identificados com as curvaturas de Ricci principais e a coleção $\{\mathrm{sgn} r(e_1), ..., \mathrm{sgn} r(e_n)\}$ pode ser identificado, com assinatura da forma quadrática r.

Retornemos ao nosso estudo das métricas invariantes à esquerda. Aqui temos um critério para obtermos uma direção positiva da curvatura de Ricci.

Lema 3.7. *Se a transformação* $\mathrm{ad}(u)$ *é antiadjunta, então* $r(u) \geqslant 0$*, onde a igualdade ocorre se, e somente se,* u *é ortogonal ao comutador ideal* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Demonstração. Pelo Lema 3.3, sendo $\mathrm{ad}(u)$ antiadjunta então $k(u, v) \geqslant 0$ para todo $v \in \mathfrak{g}$, em particular, para uma base ortonormal $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Logo

$$r(u) = \sum_{i=1}^{n} k(u, e_i)$$

$k = 0$ se, e somente se, $u \perp [e_i, \mathfrak{g}]$ $i = 1, 2, ..., n$, assim como $e_1, e_2, ..., e_n$ é base pela linearidade no primeiro termo, temos que necessariamente $u \perp [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. □

Por exemplo, se u pertence ao centro de $\mathfrak{g}$, então $r(u) \geqslant 0$.

Teorema 3.4. *Um grupo de Lie admite métrica invariante à esquerda com todas as curvaturas de Ricci estritamente positivas se, e somente se, é compacto com grupo fundamental finito.*

Demonstração. Primeiramente, temos, pelo teorema de Myers, que qualquer variedade Riemanniana completa com curvatura de Ricci limitada inferiormente por uma constante positiva é compacta com grupo fundamental finito.

Reciprocamente, se G é compacto, então podemos escolher uma métrica bi-invariante, tal que cada $\mathrm{ad}(x)$ é antissimétrica, pelo Lema 4.4 a seguir. Se G ainda possui grupo fundamental finito, tal que o recobrimento universal $\widetilde{G}$ é compacto, note que $\mathfrak{g}$ deve coincidir com o ideal comutador, $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ (veja por exemplo [8] teorema 6.22). Agora, usando o Lema 3.7, segue que todas as curvaturas de Ricci são estritamente positivas. □

É também interessante caracterizar os grupos de Lie conexos que admitem métricas com todas as curvaturas de Ricci $\geqslant 0$. Veremos, mais adiante, que estes grupos devem ser necessariamente unimodulares.

Similarmente, é interessante saber quais grupos de Lie admitem métricas invariantes à esquerda com curvatura de Ricci não positiva. Veremos que o grupo simples $\mathsf{SL}(2,\mathbb{R})$ e o grupo unimodular $\mathsf{E}(1,1)$ admitem métrica invariante à esquerda não *flat* com curvatura de Ricci não positiva.

Finalmente, quais grupos de Lie admitem métricas invariantes à esquerda com curvatura de Ricci identicamente nula, ou curvatura de Ricci estritamente negativa (constante ou não constante)?

O próximo resultado apresenta um critério completamente análogo ao do lema 3.7 para obtermos a direção de curvatura de Ricci negativa.

Lema 3.8. *Se* b *é ortogonal ao ideal comutador* $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$*, então* $r(b) \leqslant 0$ *onde a igualdade ocorre se, e somente se,* $\mathrm{ad}(b)$ *é antiadjunta.*

Demonstração. Se b é ortogonal ao ideal comutador $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, segue de imediato que o complemento ortogonal de b contém $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ e, assim, é um ideal, pois, claramente, temos que $[u,v] \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subset b^{\perp}$, e daí estamos nas hipóteses do Lema 3.2. Calculemos a curvatura de Ricci $r(b)$. Temos

$$r(b) = \kappa(b,u_1) + ... + \kappa(b,u_{n-1})$$

onde $u_1, ..., u_{n-1}$ é qualquer base ortonormal de $\mathfrak{u} = b^{\perp}$. De fato, é mais fácil trabalhar com uma base formada de autovetores

$$Su_i = \lambda_i u_i$$

do operador auto adjunto S. Para cada vetor unitário em $\mathfrak{u}$, a curvatura seccional poder ser computada como

$$\begin{aligned}
\kappa(b,u) &= \langle R(b,u)b,u\rangle \\
&= \langle \nabla_{[b,u]}b,u\rangle - \langle \nabla_b\nabla_u b,u\rangle + \langle \nabla_u\nabla_b b,u\rangle \\
&= \langle \nabla_{L(u)}b,u\rangle - \langle \nabla_b(-Su),u\rangle + 0 \\
&= \langle -SL(u),u\rangle + \langle \tfrac{1}{2}(L-L^*)Su,u\rangle.
\end{aligned}$$

Tomando u_i como sendo um autovetor de S, observamos que

$$\begin{aligned}\lambda_i &= \langle Su_i, u_i\rangle \\ &= \langle \tfrac{1}{2}(L+L^*)u_i, u_i\rangle \\ &= \langle \tfrac{1}{2}Lu_i, u_i\rangle + \langle \tfrac{1}{2}L^*u_i, u_i\rangle \\ &= \langle \tfrac{1}{2}Lu_i, u_i\rangle + \langle u_i, \tfrac{1}{2}Lu_i\rangle \\ &= \langle Lu_i, u_i\rangle.\end{aligned}$$

De forma análoga, obtemos que $\lambda_i = \langle L^*u_i, u_i\rangle$, ou seja

$$\langle Lu_i, u_i\rangle = \langle L^*u_i, u_i\rangle = \lambda_i.$$

Então, para cada u_i, temos que

$$\begin{aligned}\kappa(b, u_i) &= \langle -SLu_i, u_i\rangle + \langle \tfrac{1}{2}(L-L^*)Su_i, u_i\rangle \\ &= \langle Lu_i, -Su_i\rangle + \langle \tfrac{1}{2}\lambda_i Lu_i, u_i\rangle - \langle \tfrac{1}{2}\lambda_i L^*u_i, u_i\rangle \\ &= \langle Lu_i, -\lambda u_i\rangle + 0 \\ &= -\lambda_i^2.\end{aligned}$$

Assim

$$r(b) = -\lambda_1^2 - \ldots - \lambda_{n-1}^2 = -\mathrm{tr}\ S^2.$$

Portanto $r(b) \leqslant 0$ e a igualdade ocorre se, e somente se $S = 0$, ou seja $\frac{1}{2}(L + L^*) = 0$, em outras palavras L é antiadjunta. □

Cuidado: Não é verdade que $\kappa(b, u) \leqslant 0$ para todo $u \in \mathfrak{u}$. Pode acontecer que, para uma particular escolha de u (u não autovalor de S), se tenha $\kappa(b, u) \geqslant 0$ pelo Lema 3.3. Isto acontece, por exemplo, no caso do grupo de Heisenberg.

Lema 3.9. *Se um grupo de Lie conexo G possui métrica invariante à esquerda com todas as curvaturas de Ricci não negativas, então G é unimodular.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que G não seja unimodular. Escolha um vetor unitário b ortogonal ao núcleo unimodular. Necessariamente, temos $\mathrm{tr}\ \mathrm{ad}(b) \neq 0$. Temos ainda que $\mathrm{ad}(b)$ não pode ser antiadjunta (pois o traço é diferente de zero), e do lema 3.8, temos $r(b) < 0$. Isto contraria nossa hipótese e finaliza nossa demonstração. □

Combinando os Lemas 3.7 e 3.8, obtemos a seguinte versão do teorema de Wolf [12].

Teorema 3.5. *Suponha que a álgebra de Lie de G é nilpotente, mas não comutativa. Então, pra qualquer métrica invariante à esquerda, existe uma direção de curvatura de Ricci estritamente negativa e uma direção de curvatura de Ricci estritamente positiva.*

Demonstração. Sendo $\mathfrak{g}$ nilpotente, temos que algum termo da série

$$\mathfrak{g} \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset [\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] \subset ...$$

deve se anular. Escolhendo então um vetor unitário u no último termo não nulo desta sequência de ideais, segue que $[u, v] = 0$, para todo $v \in \mathfrak{g}$. Portanto u pertence ao centro de $\mathfrak{g}$ e, ainda, temos que $u \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Pelo Lema 3.7, segue que $r(u) > 0$.

Note agora que o espaço vetorial $\mathfrak{g}$ não poder ser gerado por $\{[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \mathfrak{z}\}$, onde $\mathfrak{z}$ é o centro da álgebra $\mathfrak{g}$, pois caso $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + \mathfrak{z}$, teríamos $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + \mathfrak{z}] = [\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]]$ e, assim, a cadeia se estabiliza. Como temos que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq 0$ a álgebra não seria nilpotente, contrariando nossa hipótese. Portanto existe um vetor unitário v ortogonal a $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ que não pertence a $\mathfrak{z}$. A transformação linear $\mathrm{ad}(v)$ é nilpotente e não nula e não pode ser antiadjunta, pois, caso a transformação L seja antiadjunta, com $L \neq 0$, assumindo que $L^k x \neq 0$, segue que

$$\langle L^{2k} x, x \rangle = \pm \langle L^k x, L^k x \rangle \neq 0$$

sendo $+$ no caso de k ser par e $-$ no caso de k ser ímpar, portanto $L^{2k} \neq 0$. Desse modo, L não é nilpotente, pois como $L \neq 0$ então $L^2, L^4, ... \neq 0$. Como temos v ortogonal a $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ e $\mathrm{ad}(v)$ não antiadjunta segue que $r(v) < 0$ pelo Lema 3.8. □

De forma mais geral, temos o seguinte

Teorema 3.6. *Se a álgebra de Lie de* G *possui vetores linearmente independente* x, y, z *tais que*

$$[x, y] = z,$$

então existe métrica invariante à esquerda tal que $\mathrm{r}(x) < 0$ *e* $\mathrm{r}(z) > 0$.

Demonstração. Escolha uma base fixada $b_1, ..., b_n$ com $b_1 = x,\ b_2 = y,\ b_3 = z$. Para qualquer número real $\varepsilon > 0$, considere uma base auxiliar $e_1, ..., e_n$ definida por $e_1 = \varepsilon b_1,\ e_2 = \varepsilon b_2$ e $e_i = \varepsilon^2 b_i$ para $i \geqslant 3$. Defina a métrica invariante à esquerda que torna $e_1, ..., e_n$ uma base ortonormal. Seja $\mathfrak{g}_\varepsilon$ a álgebra de Lie obtida de $\mathfrak{g}$ com essa particular métrica e esta particular base ortonormal. Denotando por α_{ijk} as constantes de estrutura de $\mathfrak{g}$ e por β_{ijk} as constantes de estrutura de $\mathfrak{g}_\varepsilon$ podemos observar que $\alpha_{123} = \langle [b_1, b_2], b_3 \rangle = 1 = -\alpha_{213}$. Por outro lado, temos $[e_1, e_2] = e_3$ e $\beta_{123} = \langle [e_1, e_2], e_3 \rangle = 1 = -\beta_{213}$. As demais constantes de estrutura dependem continuamente de ε e tem-se ainda

$\lim_{\varepsilon \to 0} \beta_{ijk} = 0$. Obtemos uma álgebra de Lie limite $\mathfrak{g}_0$ com métrica prescrita e uma base ortonormal prescrita. Mais ainda, a operação colchete é dada por

$$[e_1, e_2] = [e_2, e_1] = 0$$

com $[e_i, e_j] = 0$ nos demais casos. Vemos então que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \{\text{espaço gerado por} e_3\}$. Podemos, então, calcular explicitamente $r(e_1)$ e $r(e_3)$. Usando o Lema 3.1, obtemos

$$\begin{array}{lcll} \kappa(e_1, e_2) & = & \frac{1}{2}(a_{123})(-a_{123}) - \frac{1}{4}(a_{123})(a_{123}) & = -\frac{3}{4} \\ \kappa(e_1, e_3) & = & -\frac{1}{4}(a_{213})(-a_{213}) & = \frac{1}{4} \\ \kappa(e_1, e_j) & = & 0, & i > 3. \end{array}$$

Portanto $r(e_1) = -\frac{1}{2}$. Calculando agora $r(e_3)$, obtemos

$$\begin{array}{lcll} \kappa(e_3, e_1) & = & -\frac{1}{4}(a_{213})(-a_{213}) & = \frac{1}{4} \\ \kappa(e_3, e_2) & = & -\frac{1}{4}(-a_{213})(a_{213}) & = \frac{1}{4} \\ \kappa(e_3, e_i) & = & 0, & i > 2, \end{array}$$

logo $r(e_3) = \frac{1}{2}$. Isso garante o enunciado para $\mathfrak{g}_0$, mas as curvaturas de Ricci variam continuamente com ε, segue que $r(e_1) < 0 < r(e_3)$, para todo ε suficientemente próximo de zero, onde as álgebras de Lie $\mathfrak{g}_\varepsilon$ são isomorfas à $\mathfrak{g}$. □

Recordando o Corolário 3.1, mostraremos o resultado já mencionado de que os elementos do centro são os únicos elementos com tal propriedade.

Teorema 3.7. *Seja* G *um grupo de Lie com álgebra de Lie associada* $\mathfrak{g}$. *Se* x *não pertence ao centro de* $\mathfrak{g}$, *então existe uma métrica invariante à esquerda e um elemento* $y \in \mathfrak{g}$ *tal que* $\kappa(x, y) < 0$.

Demonstração. Se existe $y \in \mathfrak{g}$ tal que os vetores x, y e $[x, y]$ são linearmente independentes, então existe uma métrica invariante à esquerda tal que $r(x) < 0$ (veja o Teorema 3.6). Portanto $\kappa(x, z) < 0$, para algum $z \in \mathfrak{g}$.

Assumindo que, para todo $y \in \mathfrak{g}$,

$$[x, y] = \alpha(y)x + \beta(y)y$$

e tomando uma base $e_1 = x, e_2, ..., e_n$, observemos que, por um lado, temos

$$[x, e_2 + ... + e_n] = \alpha(e_2 + ... + e_n)x + \beta(e_2 + ... + e_n)e_2 + ... + \beta(e_2 + ... + e_n)e_n$$

e, por outro lado, temos

$$\begin{aligned}[x, e_2 + ... + e_n] &= [x, e_2] + ... + [x, e_n] \\ &= \alpha(e_2)x + \beta_2(e_2)e_2 + ... + \alpha(e_n)x + \beta_n(e_n)e_n \\ &= \big[\alpha(e_2) + ... + \alpha(e_n)\big]x + \beta(e_2)e_2 + ... + \beta(e_n)e_n.\end{aligned}$$

Pelo fato de $e_1 = x, e_2, ..., e_n$ ser base que $\alpha(e_2 + ... + e_n) = \alpha(e_2) + ... + \alpha(e_n)$ e $\beta(e_2) = ... = \beta(e_n) = \beta(e_2 + ... + e_n)$ para qualquer base $e_1 = x, e_2, ..., e_n$, obtemos que β é constante e, portanto,

$$[x, y] = \alpha(y)x + \beta y.$$

Estamos nas condições do Lema 3.4. Tomando uma base $e_1 = x, e_2, ..., e_n$ em tais condições e a métrica invariante à esquerda de modo que esta base seja ortonormal, mostremos que $\kappa(e_1, e_2) < 0$.

Como ∇ é simétrica e compatível com a métrica, temos

$$\begin{aligned}\kappa(u, v) &= \langle \nabla_{[u,v]}u - \nabla_u(\nabla_u v - [u, v]), v\rangle - \langle \nabla_u u, \nabla_v v\rangle \\ &= \langle \nabla_{[u,v]}u, v\rangle + \|\nabla_u v\|^2 + \langle \nabla_u[u, v], v\rangle - \langle \nabla_u u, \nabla_v v\rangle.\end{aligned}$$

Além disto,

$$\begin{aligned}\langle \nabla_{[u,v]}u, v\rangle + \langle \nabla_u[u, v], v\rangle &= \tfrac{1}{2}\big(\langle [[u, v], u], v\rangle - \langle [u, v], [u, v]\rangle + \langle [v, [u, v]], u\rangle \\ &\quad + \langle [u, [u, v]], v\rangle - \langle [[u, v], v], u\rangle + \langle [v, u], [u, v]\rangle\big) \\ &= \tfrac{1}{2}\big(- 2\|[u, v]\|^2 + 2\langle [v, [u, v]], u\rangle\big) \\ &= \langle [v, [u, v]], u\rangle - \|[u, v]\|^2\end{aligned}$$

e daí

$$\kappa(u, v) = \langle [v, [u, v]], u\rangle - \|[u, v]\|^2 + \|\nabla_u v\|^2 - \langle \nabla_u u, \nabla_v v\rangle. \tag{3.1}$$

Façamos os cálculos separadamente:

$$\begin{aligned}\langle [e_2, [e_1, e_2]], e_1\rangle &= \langle [e_2, e_1 + \beta e_2], e_1\rangle \\ &= \langle -e_1 + \beta e_2, e_1\rangle = -1,\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\|[e_1, e_2]\|^2 = \|e_1 + \beta e_2\|^2 = 1 + \beta^2, \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}\|\nabla_{e_1} e_2\|^2 &= \tfrac{1}{4}\sum_i (\langle [e_1, e_2], e_i\rangle - \langle [e_2, e_i], e_1\rangle + \langle [e_i, e_1], e_2\rangle)^2 \\ &= \tfrac{1}{4}\big[(2\langle e_1 + \beta e_2, e_1\rangle)^2 + (\langle e_1 + \beta e_2, e_2\rangle - \langle e_1 + \beta e_2, e_2\rangle)^2 \\ &\quad + \sum_{i\geqslant 3}\langle a_i e_1 + \sum_{k\geqslant 2} b_{ik}e_k, e_1\rangle^2\big] \\ &= 1 + \tfrac{1}{4}\sum_{i\geqslant 3} a_i^2,\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}\langle \nabla_{e_1} e_2, \nabla_{e_2} e_3 \rangle &= \langle ((\langle [e_1, e_1], e_i \rangle - \langle [e_1, e_i], e_1 \rangle + \langle [e_i, e_1], e_1 \rangle) e_i, \\ &\qquad (\langle [e_2, e_2], e_j \rangle - \langle [e_2, e_j], e_j \rangle + \langle [e_j, e_2], e_2 \rangle) e_j \rangle = 0.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Substituindo as equações (3.2), (3.3), (3.4) e (3.5) na equação (3.1) obtemos

$$\kappa(e_1, e_2) = -1 - \beta^2 - \frac{1}{4} \sum_{i \geqslant 3} a_i^2 < 0,$$

e, assim, concluímos a demonstração. □

3.3 Curvatura Escalar

Escolhendo agora uma base ortonormal $e_1, e_2, ..., e_n$ para o espaço tangente em um ponto de uma variedade Riemanniana, o número real

$$\rho = r(e_1) + r(e_2) + ... + r(e_n) = 2 \sum_{i<j} \kappa(e_i, e_j)$$

é chamada curvatura escalar no ponto.

Conforme Eliasson [4], qualquer variedade suave de dimensão $n \geqslant 3$ admite uma métrica Riemanniana de curvatura escalar estritamente negativa. Porém, uma métrica de curvatura escalar estritamente positiva nem sempre existe.

No lema a seguir calcularemos a curvatura escalar $\rho(\mathfrak{g})$, considerando $\mathfrak{u}$ como álgebra de Lie, onde $\mathfrak{u}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$ de codimensão 1 e supondo b um vetor unitário no complemento ortogonal de $\mathfrak{u}$, como nas hipóteses do Lema 3.2. Seja $\rho(\mathfrak{u})$ a curvatura escalar de $\mathfrak{u}$, provamos então o seguinte

Lema 3.10. *A curvatura escalar $\rho(\mathfrak{g})$, associada a métrica da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é igual a*

$$\rho(\mathfrak{u}) - \text{tr } S^2 - (\text{tr } S)^2.$$

Demonstração. Dados os vetores ortonormais u, v em $\mathfrak{u}$. As curvaturas seccionais de $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{u}$ são dadas respectivamente por

$$\kappa(u, v) = \langle \nabla_{[u,v]} u, v \rangle - \langle \nabla_u \nabla_v u, v \rangle + \langle \nabla_v \nabla_u u, v \rangle$$
$$\overline{\kappa}(u, v) = \langle \overline{\nabla}_{[u,v]} u, v \rangle - \langle \overline{\nabla}_u \overline{\nabla}_v u, v \rangle + \langle \overline{\nabla}_v \overline{\nabla}_u u, v \rangle$$

Usando então o Lema 3.2, obtemos que

$$\begin{aligned}
\kappa(u,v) &= \langle \nabla_{[u,v]}u, v\rangle - \langle \nabla_u \nabla_v u, v\rangle + \langle \nabla_v \nabla_u u, v\rangle \\
&= \left\langle \overline{\nabla}_{[u,v]}u + \langle S[u,v],u\rangle b, v\right\rangle - \left\langle \nabla_u(\overline{\nabla}_v u + \langle Su,v\rangle b), v\right\rangle \\
&\quad + \left\langle \nabla_v(\overline{\nabla}_u u + \langle Su,u\rangle b), v\right\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_{[u,v]}u, v\rangle + \langle S[u,v],u\rangle\langle b,v\rangle - \langle \nabla_u \overline{\nabla}_v u, v\rangle - \langle Su,v\rangle\langle \nabla_u b, v\rangle \\
&\quad + \langle \nabla_v \overline{\nabla}_u u, v\rangle + \langle Su,u\rangle\langle \nabla_v b, v\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_{[u,v]}u, v\rangle - \left\langle \overline{\nabla}_u \overline{\nabla}_v u + \langle S\overline{\nabla}_v u, u\rangle b, v\right\rangle - \langle Su,v\rangle\langle -Su, v\rangle \\
&\quad + \left\langle \overline{\nabla}_v \overline{\nabla}_u u + \langle S\overline{\nabla}_u u, v\rangle b, v\right\rangle + \langle Su,u\rangle\langle -Sv, v\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_{[u,v]}u, v\rangle - \langle \overline{\nabla}_u \overline{\nabla}_v u, v\rangle + \langle S\overline{\nabla}_v u, u\rangle\langle b,v\rangle + \langle Su,v\rangle\langle Su,v\rangle \\
&\quad + \langle \overline{\nabla}_v \overline{\nabla}_u u, v\rangle + \langle S\overline{\nabla}_u u, v\rangle\langle b,v\rangle - \langle Su,u\rangle\langle Sv,v\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_{[u,v]}u, v\rangle - \langle \overline{\nabla}_u \overline{\nabla}_v u, v\rangle + \langle Su,v\rangle\langle Su,v\rangle \\
&\quad + \langle \overline{\nabla}_v \overline{\nabla}_u u, v\rangle - \langle Su,u\rangle\langle Sv,v\rangle \\
&= \overline{\kappa}(u,v) + \langle Su,v\rangle^2 - \langle Su,u\rangle\langle Sv,v\rangle.
\end{aligned}$$

Escolhendo uma base ortonormal formada por autovetores de S, $Su_i = \lambda_i u_i$, obtemos que

$$\kappa(u_i,u_j) = \overline{\kappa}(u_i,u_j) - \lambda_i\lambda_j$$

para $i \neq j$. Combinando com a fórmula

$$\kappa(b,u_i) = -\lambda_i^2$$

da demonstração do Lema 3.8, vemos que a curvatura de Ricci na direção de u_i é dada por

$$r(u_i) = \overline{r}(u_i) - \lambda_i \mathrm{tr}\, S.$$

Somando sobre i para obtermos a curvatura escalar e adicionando $r(b) = -\mathrm{tr}\, S^2$, obtemos

$$\rho(\mathfrak{g}) = \rho(\mathfrak{u}) - \mathrm{tr}\, S^2 - (\mathrm{tr}\, S)^2$$

que é a fórmula requerida. □

Voltando ao nosso problema de métricas com curvatura escalar estritamente positiva, temos o seguinte resultado para métricas invariantes.

Teorema 3.8. *Se o grupo de Lie G é solúvel, então toda métrica invariante à esquerda sobre G é* flat*, ou possui curvatura escalar estritamente negativa.*

Demonstração. Se $\mathfrak{g}$ é solúvel de dimensão n, provaremos por indução sobre n que $\rho(\mathfrak{g}) \leqslant 0$. Toda álgebra de Lie solúvel contém um ideal de $\mathfrak{u}$ de codimensão 1. Mais ainda, $\mathfrak{u}$ é solúvel. Assumiremos, por indução, que $\rho(\mathfrak{u}) \leqslant 0$. Portanto

$$\rho(\mathfrak{g}) \leqslant -\text{tr } S^2 - (\text{tr } S)^2 \leqslant 0,$$

onde a igualdade ocorre se, e somente se, $S = 0$, e $\rho(\mathfrak{u}) = 0$.

Se estas condições são satisfeitas simultaneamente, devemos mostrar que $\mathfrak{g}$ é *flat*. Desde que $S = 0$, as fórmulas do Lema 3.2 implicam em

$$\nabla_u v = \overline{\nabla}_u v \in \mathfrak{u},$$

para quaisquer u, v no ideal $\mathfrak{u}$ (em outras palavras $\mathfrak{u}$ é totalmente geodésico em $\mathfrak{g}$). Segue, imediatamente, que

$$R(u, v)w = \overline{R}(u, v)w,$$

para quaisquer u, v e w no ideal $\mathfrak{u}$. Assumiremos que a curvatura escalar $\rho(\mathfrak{u})$ é zero, pois por hipótese de indução $\mathfrak{u}$ é *flat*. Assim $\overline{R} = 0$, ou seja $R(u, v)w = 0$.

Novamente, aplicando o Lema 3.2 com $S = 0$, temos $\nabla_x b = 0$ para qualquer x na álgebra de Lie, assim $R(x, y)b = 0$ para quaisquer x e y. Usando a propriedade simétrica

$$\langle R(x, y)b, z\rangle = \langle R(b, z)x, y\rangle$$

do tensor de Riemann, segue que $R(b, z) = 0$ para qualquer z. Combinando estes fatos com o fato que $R(x, y)z$ é trilinear como função de x, y, z, então segue que R é identicamente zero. □

Corolário 3.3. *Se G é solúvel e unimodular, então toda métrica invariante à esquerda sobre* G *é* flat*, ou possui curvaturas seccionais positivas e negativas.*

Demonstração. Se G é unimodular, e a métrica não é *flat*, então existe uma curvatura seccional positiva pelo Teorema 3.3, enquanto se G é solúvel e a métrica não é *flat*, então existe uma curvatura seccional negativa pelo Teorema 3.8. □

Teorema 3.9. *Se a álgebra de Lie de* G *é não-comutativa, então* G *possui uma métrica invariante à esquerda de curvatura escalar estritamente negativa.*

Demonstração. Primeiramente, suponha que existam vetores linearmente independente x, y, z na álgebra $\mathfrak{g}$ tais que $[x, y] = z$. Como na prova do teorema 3.6, podemos escolher uma base $\{b_1, ..., b_n\}$ de modo que $b_1 = x$ $b_2 = y$ e $b_3 = z$ e para cada $\varepsilon > 0$, podemos escolher uma métrica invariante à esquerda tal que os vetores

$$b_1^\varepsilon = \varepsilon b_1, \quad b_2^\varepsilon = \varepsilon b_2, \quad b_3^\varepsilon = \varepsilon^2 b_3, \quad ..., \quad b_n^\varepsilon = \varepsilon^2 b_n$$

formam uma base ortonormal. Denote por $\mathfrak{g}_\varepsilon$ esta álgebra com a métrica prescrita e base ortonormal prescrita. Afirmamos que, quando ε tende a zero, $\mathfrak{g}_\varepsilon$ tende a uma álgebra $\mathfrak{g}_0$ bem definida, com $\mathfrak{g}_0$ nilpotente, mas não comutativa. De fato, verifiquemos como se comportam as constantes de estrutura a_{ijk}^ε da álgebra $\mathfrak{g}_\varepsilon$, relativamente às constantes de estrutura a_{ijk} da álgebra $\mathfrak{g}$, quando $\varepsilon \longrightarrow 0$. Podemos observar que, para qualquer $\varepsilon > 0$, temos $a_{123}^\varepsilon = 1 = -a_{213}^\varepsilon$. De fato, sabendo que $[b_i, b_j] = a_{ijk} b_k$ e que

$$[b_1^\varepsilon, b_2^\varepsilon] = [\varepsilon b_1, \varepsilon b_2] = \varepsilon^2 [b_1, b_2] = \varepsilon^2 b_3 = b_3^\varepsilon,$$

temos esse fato. Por outro lado as demais constante tenderão a zero quando ε tender a zero. Por exemplo, para $j \geqslant 3$,

$$\begin{aligned}
[b_1^\varepsilon, b_j^\varepsilon] &= a_{1jk}^\varepsilon b_k^\varepsilon = a_{1j2}^\varepsilon b_2^\varepsilon + \sum_{k=3}^{n} a_{1jk}^\varepsilon b_k^\varepsilon \\
&= \varepsilon a_{1j2}^\varepsilon b_2 + \sum_{k=3}^{n} \varepsilon^2 a_{1jk}^\varepsilon b_k \\
&= \varepsilon^3 a_{1j2} b_2 + \sum_{k=3}^{n} \varepsilon^3 a_{1jk} b_k,
\end{aligned}$$

donde segue que $a_{1j2}^\varepsilon = \varepsilon^2 a_{1j2}$ e $a_{1jk}^\varepsilon = \varepsilon a_{1jk}$, para todo $k \geqslant 3$.

Desta forma, temos $a_{ijk}^0 = 0$, exceto nos casos $a_{123}^0 = 1$ e $a_{213}^0 = -1$. Segue que $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$ tem dimensão 1 e, portanto, é comutativo, logo $[[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0], \mathfrak{g}_0] = 0$. Fazendo o cálculo explícito das curvaturas seccionais em $\mathfrak{g}_0$ e usando a Lema 3.1, temos

$$\begin{aligned}
\kappa(b_1^0, b_2^0) &= -\tfrac{1}{2}(a_{123}^0)^2 - \tfrac{1}{4}(a_{123}^0)^2 &&= -\tfrac{3}{4} \\
\kappa(b_2^0, b_3^0) &= -\tfrac{1}{4}(a_{213}^0)(-a_{213}^0) &&= \tfrac{1}{4} \\
\kappa(b_2^0, b_3^0) &= -\tfrac{1}{4}(a_{123}^0)(-a_{123}^0) &&= \tfrac{1}{4} \\
\kappa(b_i^0, b_j^0) &= 0, \quad \text{nos demais casos.}
\end{aligned}$$

Assim

$$\rho = 2 \sum_{i<j} \kappa(b_i^0, b_j^0) = 2(-\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}) = -\frac{1}{2} < 0.$$

Por continuidade, $\rho(\mathfrak{g}_\varepsilon) < 0$, para todo ε suficientemente próximo de zero onde a métrica está bem definida.

Por outro lado, caso não existam $x, y \in \mathfrak{g}$ tais que x, y e $[x, y]$ sejam linearmente independentes, então $\mathfrak{g}$ é isomorfa ao EXEMPLO ESPECIAL da seção 3.1 e, portanto, possui curvatura escalar estritamente negativa para qualquer escolha da métrica. $\square$

Resta ainda saber em quais condições um grupo de Lie admite métrica invariante à esquerda de curvatura escalar estritamente positiva. O teorema a seguir nos dá uma condição suficiente para esse fato. Suponha G um grupo de Lie conexo.

Teorema 3.10 (Wallach)**.** *Se o recobrimento universal de* G *não é homeomorfo ao espaço Euclidiano (ou equivalentemente se* G *possui um subgrupo compacto não comutativo) então* G *admite uma métrica invariante à esquerda com curvatura escalar estritamente positiva.*

Provaremos este resultado no final da seção 4.3.

Capítulo 4

Classificação em álgebras de Lie

Neste capítulo apresentaremos uma classificação completa das álgebras de Lie de dimensão 3 e, ainda, classificamos as álgebras de Lie que admitem métrica bi-invariante.

4.1 Álgebras de Lie unimodulares tridimensionais

Estudaremos agora o caso especial das álgebras de Lie de dimensão 3 e faremos aqui o uso do *produto vetorial* Euclidiano. Se u e v são elementos de um espaço vetorial de dimensão 3 com uma métrica positiva definida e com uma orientação fixada, então o produto vetorial $u \times v$ está definido. Este produto é bilinear e antissimétrico como função de u e v. O vetor $u \times v$ é ortogonal a u e a v e $\langle u \times v, u \times v \rangle = \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle - \langle u, v \rangle^2$, e os vetores $u, v, u \times v$ formam uma base orientada positivamente nessa ordem.

Seja G um grupo de Lie conexo de dimensão 3 com métrica invariante à esquerda. Escolha uma orientação para uma a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, de modo que o produto vetorial esteja bem definido.

Lema 4.1. *O colchete nesta álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ está relacionada com o produto vetorial pela fórmula*

$$[u, v] = L(u \times v),$$

onde L é um operador linear sobre $\mathfrak{g}$ bem definido e único. O grupo de Lie G é unimodular se, e somente se, L é autoadjunto.

Demonstração. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão 3 com uma métrica positiva definida e com uma orientação fixada. Escolha uma base ortonormal orientada, $\{e_1, e_2, e_3\}$, e defina o operador linear $L : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ por $L(e_1) = [e_2, e_3], L(e_2) = [e_3, e_1], L(e_3) = [e_1, e_2]$. A identidade $L(e_i \times e_j) = [e_i, e_j]$ é verdadeira para todos os elementos da base e, consequentemente, $L(x \times y) = [x, y]$, para todo x e $y \in \mathfrak{g}$. Definindo

$$L(e_i) = \alpha_{ij} e_j,$$

podemos calcular o traço de $\mathrm{ad}(e_i)$, $\quad i = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\ \mathrm{ad}(e_1) &= \langle [e_1, e_1], e_1 \rangle + \langle [e_1, e_2], e_2 \rangle + \langle [e_1, e_3], e_3 \rangle \\
&= 0 + \langle L(e_3), e_2 \rangle + \langle -L(e_2), e_3 \rangle \\
&= \langle \alpha_{3j} e_j, e_2 \rangle + \langle \alpha_{2j} e_j, e_3 \rangle \\
&= \alpha_{32} - \alpha_{23}.
\end{aligned}$$

Analogamente, calculamos $\mathrm{tr}\ \mathrm{ad}(e_2) = -\alpha_{31} + \alpha_{13}$ e $\mathrm{tr}\ \mathrm{ad}(e_3) = -\alpha_{12} + \alpha_{21}$.

Assim, $\mathfrak{g}$ é unimodular se, e somente se, $\mathrm{tr}\ \mathrm{ad}(x) \equiv 0$. Nessas condições, devemos ter necessariamente, que $-\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = 0$, ou seja, α_{ij} é uma matriz simétrica ou equivalentemente, L é autoadjunta. $\square$

Analisaremos o caso unimodular. Se L é autoadjunta, então existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ de autovetores, tal que $L(e_i) = \lambda_i e_i$. Trocando e_1 por $-e_1$ caso necessário, podemos assumir que esta base e_1, e_2, e_3 está orientada positivamente. A operação colchete é dada por $[e_1, e_2] = L(e_1 \times e_2) = \lambda_3 e_3$, de forma análoga para $[e_i, e_j]$. Obtemos, então, que

$$[e_2, e_3] = \lambda_1 e_1, \quad [e_3, e_1] = \lambda_2 e_2 \ \text{ e } \ [e_1, e_2] = \lambda_3 e_3.$$

Os três autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ estão, aparentemente, bem definidos. Porém, a construção foi baseada em uma escolha de orientação. Se revertermos a orientação de $\mathfrak{g}$, então os sinais dos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ irão mudar.

As propriedades da curvatura da métrica da álgebra de Lie pode ser descrita como segue. É conveniente definir os números μ_1, μ_2, μ_3 pela fórmula

$$\mu_i = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - \lambda_i.$$

Observemos que, dado $v \in \mathfrak{g}, v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$ temos que $e_1 \times v = v_1(e_1 \times e_1) + v_2(e_1 \times e_2) + v_3(e_1 \times e_3) = v_2 e_3 - v_3 e_2$ e, por um cálculo análogo, $e_2 \times v = v_3 e_2 - v_2 e_3$ e $e_3 \times v = v_1 e_2 - v_2 e_1$

Teorema 4.1. *A base ortonormal e_1, e_2, e_3 escolhida como acima diagonaliza a forma quadrática de Ricci. Além disto as curvaturas principais são dadas por*

$$r(e_1) = 2\mu_2\mu_3, \quad r(e_2) = 2\mu_1\mu_3, \quad r(e_3) = 2\mu_1\mu_2.$$

Demonstração. Calculando a curvatura sobre a hipótese de que $\mathfrak{g}$ possui uma base ortonormal com

$$[e_2, e_3] = \lambda_1 e_1, \quad [e_3, e_1] = \lambda_2 e_2 \ \text{ e } \ [e_1, e_2] = \lambda_3 e_3 \text{ e}$$

usando a fórmula de Koszul para campos invariantes à esquerda, obtemos

$$\nabla_{e_i} v = \mu_i e_i \times v$$

para qualquer vetor v. De fato, temos

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{e_1} e_2, e_3 \rangle &= \tfrac{1}{2}(\langle [e_1, e_2], e_3 \rangle - \langle [e_2, e_3], e_3 \rangle + \langle [e_3, e_1], e_2 \rangle) = \tfrac{1}{2}(\lambda_3 - \lambda_1 + \lambda_2) \\
&= \mu_1 \\
\langle \nabla_{e_1} e_3, e_2 \rangle &= \tfrac{1}{2}(\langle [e_1, e_3], e_2 \rangle - \langle [e_3, e_2], e_1 \rangle + \langle [e_2, e_1], e_3 \rangle) = \tfrac{1}{2}(-\lambda_2 + \lambda_1 - \lambda_3) \\
&= -\mu_1 \\
\langle \nabla_{e_1} e_i, e_j \rangle &= 0 \text{ nos demais casos.}
\end{aligned}$$

De forma análoga,

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{e_2} e_1, e_3 \rangle &= \tfrac{1}{2}(-\lambda_3 + \lambda_2 - \lambda_1) &&= -\mu_2 \\
\langle \nabla_{e_2} e_3, e_1 \rangle &= \tfrac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3) &&= \mu_2 \\
\langle \nabla_{e_2} e_i, e_j \rangle &= 0, \text{ nos demais casos}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{e_3} e_1, e_2 \rangle &= \tfrac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_1) &&= \mu_3 \\
\langle \nabla_{e_3} e_2, e_1 \rangle &= \tfrac{1}{2}(-\lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_2) &&= -\mu_3 \\
\langle \nabla_{e_3} e_i, e_j \rangle &= 0, \text{ nos demais casos.}
\end{aligned}$$

Segue que

$$\nabla_{e_1} e_1 = 0, \quad \nabla_{e_1} e_2 = \mu_1 e_3 \quad \text{e} \quad \nabla_{e_1} e_3 = -\mu_1 e_2,$$

$$\nabla_{e_2} e_1 = -\mu_2 e_3, \quad \nabla_{e_2} e_2 = 0 \quad \text{e} \quad \nabla_{e_2} e_3 = \mu_1 e_2,$$

$$\nabla_{e_3} e_1 = \mu_3 e_2, \quad \nabla_{e_3} e_2 = -\mu_3 e_1 \quad \text{e} \quad \nabla_{e_3} e_3 = 0.$$

Agora podemos calcular $\nabla_{e_i} v$. Façamos ocaso $i = 1$, pois os demais casos são análogos.

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_1} v &= v_1 \nabla_{e_1} e_1 + v_2 \nabla_{e_1} e_2 + v_3 \nabla_{e_1} e_3 \\
&= 0 + v_2 \mu_1 e_3 - v_3 \mu_1 e_2 \\
&= \mu_1 (v_2 e_3 - v_3 e_2) \\
&= \mu_1 e_1 \times v
\end{aligned}$$

e, analogamente, temos $\nabla_{e_2} v = \mu_2 e_2 \times v$ e $\nabla_{e_3} v = \mu_3 e_3 \times v$. Podemos, ainda, escrever

$$\nabla_{e_i} \cdot = \mu_i e_i \times \cdot.$$

Observemos agora que

$$
\begin{aligned}
e_1 \times (e_2 \times e_1) + e_2 \times (e_1 \times e_1) + e_1 \times (e_1 \times e_2) &= e_1 \times (-e_3) + e_2 \times 0 + e_1 \times e_3 &= 0,\\
e_1 \times (e_2 \times e_2) + e_2 \times (e_2 \times e_1) + e_2 \times (e_1 \times e_2) &= e_1 \times 0 + e_2 \times (-e_3) + e_2 \times e_3 &= 0,\\
e_1 \times (e_2 \times e_3) + e_2 \times (e_3 \times e_1) + e_3 \times (e_1 \times e_2) &= e_1 \times e_1 + e_2 \times e_2 + e_3 \times e_3 &= 0
\end{aligned}
$$

e concluimos por linearidade que, para todo ν, tem-se

$$e_1 \times (e_2 \times \nu) - e_2 \times (e_1 \times \nu) = (e_1 \times e_2) \times \nu.$$

(Na verdade o produto vetorial pode ser definido com uma operação colchete em qualquer espaço de dimensão 3, fazendo do mesmo uma álgebra de Lie de dimensão 3 não comutativa e o resultado acima é apenas uma conclusão imediata da identidade de Jacobi). Segue que o tensor de curvatura é dado por

$$
\begin{aligned}
R(e_1, e_2) &= \nabla_{[e_1,e_2]} - \nabla_{e_1}\nabla_{e_2} + \nabla_{e_2}\nabla_{e_1}\\
&= \lambda_3 \nabla_{e_3} - \nabla_{e_1}(\mu_2 e_2 \times \cdot) + \nabla_{e_2}(\mu_1 e_1 \times \cdot)\\
&= \lambda_3\mu_3 e_3 \times \cdot - \mu_1 e_1 \times (\mu_2 e_2 \times \cdot) + \mu_2 e_2 \times (\mu_1 \times \cdot)\\
&= \lambda_3\mu_3 e_3 \times \cdot - \mu_1\mu_2 \left[e_1 \times (e_2 \times \cdot) - e_2(e_1 \times \cdot)\right]\\
&= \lambda_3\mu_3 e_3 \times \cdot - \mu_1\mu_2 (e_1 \times e_2) \times \cdot\\
&= (\lambda_3\mu_3 - \mu_1\mu_2) e_3 \times \cdot.
\end{aligned}
$$

Logo

$$R(e_1, e_2)e_1 = (\lambda_3\mu_3 - \mu_1\mu_2)e_3 \times e_1 = (\lambda_3\mu_3 - \mu_1\mu_2)e_2.$$

Fazendo um cálculo similar para os demais casos $R(e_i, e_j)e_k$ e recordando a forma quadrática de Ricci,

$$\widetilde{r}(x) = R(e_i, x)e_i,$$

obtemos

$$
\begin{aligned}
\widetilde{r}(e_2) &= R(e_1, e_2)e_1 + R(e_2, e_2)e_2 + R(e_3, e_2)e_3\\
&= (\lambda_3\mu_3 - \mu_1\mu_2)e_2 + 0 + (\lambda_1\mu_1 - \mu_2\mu_3)e_2\\
&= (\lambda_3\mu_3 - \mu_1\mu_2 + \lambda_1\mu_1 - \mu_2\mu_3)e_2\\
&= \left[\lambda_1\mu_1 + \lambda_3\mu_3 - \mu_2(\mu_1 + \mu_3)\right] e_2\\
&= \tfrac{1}{2}\left[(-\lambda_1\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3) + (\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 - \lambda_3\lambda_3) - (\lambda_1\lambda_2 - \lambda_2\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3)\right] e_2\\
&= \tfrac{1}{2}(-\lambda_1\lambda_1 + 2\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_2 - \lambda_3\lambda_3)e_2\\
&= 2\mu_1\mu_3 e_2.
\end{aligned}
$$

Através de cálculos semelhantes, encontramos que $\widetilde{r}(e_1) = 2\mu_2\mu_3 e_1$ e $\widetilde{r}(e_3) = 2\mu_1\mu_2 e_3$. Assim e_1, e_2 e e_3 são autovetores da transformação de Ricci com autovalores $2\mu_2\mu_3, 2\mu_1\mu_3$ e $\mu_1\mu_2$ respectivamente. $\square$

Como consequência, segue que a curvatura escalar é dada pela fórmula explícita

$$\rho = 2(\mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_3 + \mu_1\mu_2).$$

Usando a descrição da curvatura de Ricci, a curvatura seccional pode ser facilmente calculada. De fato, em um ponto qualquer de uma variedade Riemanniana de dimensão 3, podemos tomar uma base ortonormal orientada $\{u, v \text{ e } w\}$, onde temos $u \times v = w$ e

$$\begin{array}{rcl} r(u) & = & \kappa(u,u) + \kappa(u,v) + \kappa(u,w) \\ r(v) & = & \kappa(v,u) + \kappa(v,v) + \kappa(v,w) \\ r(w) & = & \kappa(w,u) + \kappa(w,v) + \kappa(w,w) \end{array}$$

temos também que

$$\rho = r(u) + r(v) + r(w) = 2\big[\kappa(u,v) + \kappa(u,w) + \kappa(v,w)\big].$$

Obtemos então a seguinte relação

$$\begin{array}{rcl} \kappa(u,v) & = & \frac{\rho}{2} - \kappa(u,w) - \kappa(v,w) \\ & = & \frac{\rho}{2} - r(w) \\ & = & \frac{\rho}{2} - r(u \times v). \end{array}$$

Pode ser que não exista uma fórmula semelhante em dimensões maiores que 3, pois os $\frac{1}{2}n(n+1)$ *parâmetros necessários para descrever a curvatura de Ricci podem não ser suficientes para determinar os* $n^2(n^2-1)$ *parâmetros necessários para descrever a curvatura seccional.*

Corolário 4.1. *No caso unimodular de dimensão 3, o determinante* $r(e_1)r(e_2)r(e_3)$ *da forma quadrática de Ricci é sempre não negativo. Se este determinante é zero, então pelo menos duas das curvaturas de Ricci principais devem ser nulas.*

Demonstração. Temos que $r(e_1) = 2\mu_2\mu_3, r(e_2) = 2\mu_1\mu_3$ e $r(e_3) = 2\mu_1\mu_2$. Daí o determinante, é não negativo, pois $r(e_1)r(e_2)r(e_3) = 8\mu_1^2\mu_2^2\mu_3^2 \geqslant 0$. Caso este determinante seja zero, então, necessariamente, $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0$ ou $\mu_3 = 0$. Suponha por exemplo, que $\mu_1 = 0$. Então $r(e_2) = r(e_3) = 0$, o que mostra que pelo menos duas das curvaturas principais devem ser nulas. □

Se o determinante $r(e_1)r(e_2)r(e_3)$ for diferente de zero, então é fácil calcular μ_1, μ_2 e μ_2. Daí, para constantes de estrutura λ_1, λ_2 e λ_3 vistas como funções das curvaturas de Ricci principais estão bem definidas e mudam de sinal simultaneamente.

Agora suponha que alteremos a métrica, mantendo a operação colchete fixada. Se escolhermos uma nova métrica tal que a base

$$\eta\zeta e_1,\ \xi\zeta e_2,\ \xi\eta e_3$$

seja ortonormal, então as novas constantes de estrutura serão

$$\xi^2\lambda_1,\ \eta^2\lambda_2,\ \zeta^2\lambda_3.$$

Assim, podemos multiplicar $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ por números positivos arbitrários sem mudar a álgebra subjacente. Neste caso, a maneira mais simples de verificar um isomorfismo entre álgebras é olhar para o sinal das constantes de estrutura das álgebras em análise. Existem 6 álgebras distintas, como mostra a tabela a seguir, de acordo com o sinal das constantes de estrutura. Por mudança de sinal, se necessário, podemos assumir que a maioria das constantes de estrutura $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ são não negativas.

Sinal de $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$	Associado ao grupo de Lie	Descrição
$+ \quad + \quad +$	$SU(2)$ ou $SO(3)$	Compacto, Simples
$+ \quad + \quad -$	$SL(2,\mathbb{R})$ ou $O(1,2)$	Não compacto, Simples
$+ \quad + \quad 0$	$E(2)$	Solúvel
$+ \quad - \quad 0$	$E(1,1)$	Solúvel
$+ \quad 0 \quad 0$	Grupo de Heisenberg	Nilpotente
$0 \quad 0 \quad 0$	$\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$	Comutativo

Não é difícil mostrar que estas 6 possibilidades são álgebras de Lie não isomorfas, porém não o faremos aqui. Estas podem ser distinguidas pelo cálculo do sinal da forma de Killing

$$\beta(x,y) = \text{tr}\ (\text{ad}(x)\text{ad}(y))$$

em cada caso.

Corolário 4.2. *Dependendo da escolha da métrica, a forma quadrática de Ricci de* $SU(2)$ *pode ter sinal* $(+,+,+)$, $(+,0,0)$ *ou* $(+,-,-)$, *e a curvatura escalar pode ser positiva, negativa ou nula.*

Demonstração. Já sabemos que

$$r(e_1) = 2\mu_2\mu_3, \quad r(e_2) = 2\mu_1\mu_3 \quad \text{e} \quad r(e_3) = 2\mu_1\mu_2.$$

Podemos tomar métricas de modo que as constantes de estrutura satisfaçam, por exemplo, $\mu_1, \mu_2, \mu_2 > 0$. Assim teremos $(+,+,+)$ como assinatura de Ricci. Para ver isso basta tomar $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ como lados de um triângulo. Podemos, ainda, ter $\mu_1 < 0$ ou $\mu_1 = 0$, mas podemos observar que em qualquer um dos casos teremos $\mu_2, \mu_3 < 0$. Logo as assinaturas de Ricci serão $(+,-,-)$ e $(+,0,0)$, respectivamente. Como exemplo, vejamos a tabela abaixo com possíveis valores para as constantes de estrutura.

λ_1	λ_2	λ_3	μ_1	μ_2	μ_3	$r(e_1)$	$r(e_2)$	$r(e_3)$	ρ
3	2	1	0	1	2	4	0	0	4
4	1	1	-1	2	2	8	-4	-4	0
7	2	1	-2	3	4	24	-16	-12	-4

Observemos que, na primeira linha, temos $\rho > 0$, na segunda linha, temos $\rho = 0$ e, por fim, na terceira linha, temos $\rho < 0$. Isso conclui a demonstração. □

Essencialmente, no caso comutativo, onde todas as métricas invariantes à esquerda são *flat* e, no caso nilpotente, as propriedades da curvatura não dependem da métrica.

Corolário 4.3. *Para qualquer métrica invariante à esquerda no grupo de Heisenberg, a forma quadrática de Ricci possui sinal* $(+,-,-)$ *e a curvatura escalar* ρ *é estritamente negativa. Mais ainda, as curvaturas principais de Ricci satisfazem*

$$|r(e_1)| = |r(e_2)| = |r(e_3)| = |\rho|.$$

Demonstração. Tomando $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ e $\lambda_1 > 0$, temos

$$\begin{array}{rclcl} \mu_1 &=& \frac{1}{2}(-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) &=& -\frac{\lambda_1}{2}, \\ \mu_2 &=& \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3) &=& \frac{\lambda_1}{2}, \\ \mu_1 &=& \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) &=& \frac{\lambda_1}{2}, \end{array}$$

donde

$$r(e_1) = \frac{\lambda_1^2}{2}, \;\; r(e_2) = -\frac{\lambda_1^2}{2} \;\text{ e }\; r(e_3) = -\frac{\lambda_1^2}{2}.$$

Portanto $\rho = \frac{1}{2}(\lambda_1^2 - \lambda_1^2 - \lambda_1^2) = \frac{\lambda_1^2}{2}$, e

$$r(e_1) = -r(e_2) = -r(e_3) = -\rho < 0,$$

o que conclui nossa demonstração. □

Corolário 4.4. *Seja* G *o grupo* $\mathsf{SL}(2,\mathbb{R})$ *ou* $\mathsf{E}(1,1)$. *Então dependendo da escolha da métrica invariante à esquerda, o sinal da forma quadrática de Ricci pode ser* $(+,-,-)$ *ou* $(0,0,-)$. *Porém, a curvatura escalar* ρ *é sempre estritamente negativa.*

Demonstração. Verifiquemos inicialmente a assinatura para o $\mathsf{SL}(2,\mathbb{R})$ que está na classe $(+,+,-)$ quanto aos sinais dos λ_i's. Nestas condições observamos que μ_3 é sempre positivo. Verifiquemos, então, os casos onde $\mu_1 > 0$, $\mu_1 = 0$ e $\mu_1 < 0$.

i) $\mu_1 > 0$: Assim temos $-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 > 0$ e, portanto, $\lambda_1 < \lambda_2 + \lambda_3 < \lambda_2$. Portanto $\mu_2 < 0$ e a assinatura de Ricci é $(+,-,-)$.

ii) $\mu_1 = 0$: Neste caso, obtemos $-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 0$ e, consequentemente $\lambda_1 = \lambda_2+\lambda_3 < \lambda_2$, o que nos fornece $\mu_2 < 0$. Logo a assinatura de Ricci é $(-,0,0)$.

iii) $\mu_1 < 0$: Neste caso, pode ocorrer $\mu_2 = 0$ ou $\mu_2 > 0$, mas não pode ocorrer o caso $\mu_2 < 0$. Para vermos, basta fazer os casos $i)$ e $ii)$ para μ_2 no lugar de μ_1, obtendo, então, que a assinatura de Ricci é $(-,0,0)$, no caso de $\mu_2 = 0$, e $(+,+,-)$, para o caso de $\mu_2 > 0$.

Agora, verifiquemos a assinatura de Ricci para o $\mathsf{E}(1,1)$ onde o sinal dos λ_i's é $(+,-,0)$. Neste caso, obtemos, de início, que $\mu_1 < 0$ e $\mu_2 > 0$ e μ_3 pode ser positivo, negativo ou nulo, conforme tenha-se $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ ou $|\lambda_1| = |\lambda_2|$, respectivamente. Logo a assinatura de Ricci é $(-,0,0)$, caso $\mu_3 = 0$, e é $(+,+,-)$ caso contrário.

Calculemos a curvatura escalar. Inicialmente, calculemos para $\mathsf{E}(1,1)$, onde $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ e $\lambda_3 = 0$. Assim, temos

$$\mu_1 = \frac{1}{2}(-\lambda_1 + \lambda_2), \quad \mu_2 = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2) \quad \text{e} \quad \mu_3 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2),$$

donde obtemos

$$r(e_1) = \frac{1}{2}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2), \quad r(e_2) = -\frac{1}{2}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \quad \text{e} \quad r(e_3) = -\frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)^2.$$

Logo $\rho = -\frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)^2 < 0$, para quaisquer $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$. Observe que, fazendo o mesmo cálculo para $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ e $\lambda_3 = 0$, obtemos $\rho = -\frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \leqslant 0$. Tomando agora o caso em que todos os λ_i's são não nulos e escolhendo $\lambda_3 < 0 < \lambda_1, \lambda_2$ tal como em $\mathsf{SL}(2,\mathbb{R})$ obtemos por um cálculo simples que

$$\rho = \rho(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{1}{2}(-\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_1\lambda_3 + 2\lambda_2\lambda_3).$$

Derivando a expressão acima com respeito a λ_3, temos que $\partial\rho/\partial\lambda_3 = -\lambda_3 + \lambda_1 + \lambda_2$. Portanto, para λ_1, λ_2 fixados e $\lambda_3 < 0$, temos que ρ é estritamente crescente como função de λ_3. Segue que

$$\rho(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) < \rho(\lambda_1, \lambda_2, 0) = -\frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \leqslant 0.$$

Consequentemente, $\rho < 0$ em qualquer um dos casos. □

Corolário 4.5. *O grupo Euclidiano* $\mathsf{E}(2)$ *é não comutativo, mas admite uma métrica invariante à esquerda* flat. *Toda métrica invariante à esquerda não* flat *possui assinatura de Ricci* $(+,-,-)$, *com curvatura escalar* $\rho < 0$.

Demonstração. Temos que a configuração de $\mathsf{E}(2)$ é dada por $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ e $\lambda_3 = 0$. Assim, temos a seguinte condição

$$\mu_1 = \frac{1}{2}(-\lambda_1 + \lambda_2),\ \ \mu_2 = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)\ \text{ e }\ \mu_3 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Isso nos garante que μ_1 e μ_2 possuem sinais opostos ou são ambos nulos e $\mu_3 \geqslant 0$. Portanto as únicas possibilidades para a assinatura de Ricci são $(+,-,-)$ e $(0,0,0)$. Temos, também, que as curvaturas de Ricci são dadas por

$$\begin{aligned} r(e_1) &= 2\mu_2\mu_3 = \tfrac{1}{2}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \\ r(e_2) &= 2\mu_1\mu_3 = \tfrac{1}{2}(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \\ r(e_2) &= 2\mu_1\mu_2 = -\tfrac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \end{aligned}$$

Logo $\rho = -\frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \leqslant 0$, e a igualdade vale se, e somente se, $\lambda_1 = \lambda_2$. Mas, neste caso, teríamos que $r(e_1) = r(e_2) = r(e_2) = \rho = 0$ e, portanto, as curvaturas seccionais obtidas por $\kappa(u,v) = \rho/2 - r(u \times v) = 0$ e, assim, a métrica seria *flat*. □

4.2 Álgebras de Lie não unimodulares de dimensão 3

Estudaremos agora caso não unimodular. As possíveis álgebras de Lie não unimodulares de dimensão 3 são descritas pelo lema a seguir.

Lema 4.2. *Se o grupo de Lie conexo* G *é não unimodular, então a álgebra de Lie possui uma base* e_1, e_2, e_3 *tal que*

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= \alpha e_2 + \beta e_3 \\ [e_1, e_3] &= \gamma e_2 + \delta e_3 \end{aligned}$$

com $[e_2, e_3] = 0$*, tal que a matriz*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

possui traço $\alpha + \delta = 2$*. Se excluirmos o caso excepcional onde* A *é a matriz identidade, então o determinante* $D = \alpha\delta - \beta\gamma$ *classifica uma álgebra de Lie a menos de isomorfismo.*

Demonstração. O núcleo unimodular $\mathfrak{u}$ da álgebra de Lie não unimodular associada a G, sendo bidimensional e unimodular, deve ser comutativo. Para vermos isso, tomemos uma base ortonormal u_1, u_2 de $\mathfrak{u}$ e observemos as matrizes das transformações $\mathrm{ad}(u_1)$ e $\mathrm{ad}(u_2)$

$$\mathrm{ad}(u_1) = \begin{pmatrix} \langle \mathrm{ad}(u_1)u_1, u_1\rangle & \langle \mathrm{ad}(u_1)u_2, u_1\rangle \\ \langle \mathrm{ad}(u_1)u_1, u_2\rangle & \langle \mathrm{ad}(u_1)u_2, u_2\rangle \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{ad}(u_2) = \begin{pmatrix} \langle \mathrm{ad}(u_2)u_1, u_1\rangle & \langle \mathrm{ad}(u_2)u_2, u_1\rangle \\ \langle \mathrm{ad}(u_2)u_1, u_2\rangle & \langle \mathrm{ad}(u_2)u_2, u_2\rangle \end{pmatrix}$$

uma vez que $\mathfrak{u}$ é unimodular, temos $\mathrm{tr}\ \mathrm{ad}(u_1) = \mathrm{tr}\ \mathrm{ad}(u_2) = 0$ e, portanto, $\langle \mathrm{ad}(u_1)u_2, u_2\rangle = 0$ e $\langle \mathrm{ad}(u_2)u_1, u_1\rangle = 0$. Consequentemente $\langle \mathrm{ad}(u_2)u_1, u_2\rangle = 0$ e $\langle \mathrm{ad}(u_1)u_2, u_1\rangle = 0$ e, portanto, $\mathrm{ad}(u_1) \equiv 0 \equiv \mathrm{ad}(u_2)$, ou seja, $\mathfrak{u}$ é comutativo. Escolha $e_1 \in \mathfrak{g}$ tal que que $\mathrm{tr}\ \mathrm{ad}(e_1) = 2$. Desde que $\mathfrak{u}$ é comutativo, o operador linear

$$L(u) = [e_1, u]$$

de $\mathfrak{u}$, com traço 2, independe da particular escolha de e_1.

Se L aplica cada vetor sobre um múltiplo de si mesmo, então este é o caso do Exemplo Especial (neste caso L é a aplicação identidade). Caso contrário, o determinante D de L define uma álgebra de Lie, a menos de isomorfismo. Escolhendo e_2 tal que e_2 e $L(e_2) = e_3$ sejam linearmente independentes, as condições $\mathrm{tr}\, L = 2,\ \det L = D$ implicam que

$$\begin{aligned} L(e_2) &= e_3 \\ L(e_3) &= -De_2 + 2e_3. \end{aligned}$$

Assim, o colchete (com respeito a esta escolha da base) está unicamente definida. □

Suponha dada uma métrica positiva definida sobre uma álgebra de Lie não unimodular $\mathfrak{g}$. Escolha uma base ortonormal e_1, e_2, e_3 tal que e_1 seja ortogonal a $\mathfrak{u}$, e os dois vetores $[e_1, e_2]$ e $[e_1, e_3]$ sejam ortogonais. O colchete pode ser expresso por

$$\begin{aligned}[e_1, e_2] &= \alpha e_2 + \beta e_3\\ [e_1, e_3] &= \gamma e_2 + \delta e_3\end{aligned}$$

e $[e_2, e_3] = 0$; com $\alpha + \delta \neq 0$ e $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$.

Observação 4.1. Se exigirmos $\alpha \geqslant \delta$, $\beta \geqslant \gamma$, e $\alpha + \delta \geqslant 0$ então estas constantes de estrutura $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ são unicamente determinadas por $D = 4(\alpha\delta - \beta\gamma)/(\alpha^2 + \delta^2)$.

Lema 4.3. *Esta base também diagonaliza a forma quadrática de Ricci, com as curvaturas principais de Ricci dadas por*

$$\begin{aligned} r(e_1) &= -\alpha^2 - \delta^2 - \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma)^2\\ r(e_2) &= -\alpha(\alpha + \delta) + \tfrac{1}{2}(\gamma^2 - \delta^2)\\ r(e_3) &= -\delta(\alpha + \delta) + \tfrac{1}{2}(\beta^2 - \delta^2).\end{aligned}$$

Demonstração. Recordando a notação usada no Lema 3.2, temos $b = e_1$ e u como o espaço gerado por e_2 e e_3 que contém o ideal comutador $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Além disto, das condições acima,

$$[e_1, e_2] = \alpha e_2 + \beta e_3,\ [e_1, e_3] = \gamma e_2 + \delta e_3 \text{ e } [e_2, e_3] = 0$$

Calculemos $\overline{r}(e_i) = R(e_j, e_i)e_j$ $i = 1, 2, 3$, ou seja

$$\begin{aligned}\widetilde{r}(e_1) &= \nabla_{e_1}\nabla_{e_2}e_2 - \nabla_{e_2}\nabla_{e_1}e_2 + \nabla_{[e_2,e_1]}e_2 + \nabla_{e_1}\nabla_{e_3}e_3 - \nabla_{e_3}\nabla_{e_1}e_3 + \nabla_{[e_3,e_1]}e_3,\\ \widetilde{r}(e_2) &= \nabla_{e_2}\nabla_{e_1}e_1 - \nabla_{e_1}\nabla_{e_2}e_1 + \nabla_{[e_1,e_2]}e_1 + \nabla_{e_2}\nabla_{e_3}e_3 - \nabla_{e_3}\nabla_{e_2}e_3 + \nabla_{[e_3,e_2]}e_3,\\ \widetilde{r}(e_3) &= \nabla_{e_3}\nabla_{e_1}e_1 - \nabla_{e_1}\nabla_{e_3}e_1 + \nabla_{[e_1,e_3]}e_1 + \nabla_{e_3}\nabla_{e_2}e_2 - \nabla_{e_2}\nabla_{e_3}e_2 + \nabla_{[e_2,e_3]}e_2.\end{aligned}$$

Vejamos, inicialmente, que, usando a mesma notação do Lema 3.2, temos as seguintes matrizes para L e L^*

$$L(x) = \begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{pmatrix} X^T \quad \text{e} \quad L^*(x) = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} X^T,$$

onde X^T representa a matriz coluna das coordenadas de x na base $\{e_2, e_3\}$. Por um cálculo simples, obtemos

$$Se_2 = \alpha e_2 + \frac{\beta + \gamma}{2}e_3 \quad \text{e} \quad Se_3 = \frac{\beta + \gamma}{2}e_2 + \delta e_3,$$

$$\frac{1}{2}(L - L^*)e_2 = \frac{\beta - \gamma}{2}e_3 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}(L - L^*)e_3 = \frac{\gamma - \beta}{2}e_2.$$

Observemos que $\overline{\nabla} \equiv 0$, pois $\mathfrak{u}$ é uma álgebra comutativa. Finalmente usando que $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$, calculemos $\widetilde{r}(e_1)$.

$$\begin{aligned}
\widetilde{r}(e_1) &= R(e_2,e_1)e_2 + R(e_3,e_1)e_3 \\
&= \nabla_{e_1}\nabla_{e_2}e_2 - \nabla_{e_2}\nabla_{e_1}e_2 + \nabla_{[e_2,e_1]}e_2 + \nabla_{e_1}\nabla_{e_3}e_3 + \nabla_{e_3}\nabla_{e_1}e_3 + \nabla_{[e_3,e_1]}e_3 \\
&= \nabla_{e_1}\left(\overline{\nabla}_{e_2}e_2 + \langle Se_2,e_2\rangle e_1\right) - \nabla_{e_2}\left(\tfrac{1}{2}(L-L^*)e_2\right) + \nabla_{(-\alpha e_2 - \beta e_3)}e_2 \\
&\quad + \nabla_{e_1}\left(\overline{\nabla}_{e_3}e_3 + \langle Se_3,e_3\rangle e_1\right) - \nabla_{e_3}\left(\tfrac{1}{2}(L-L^*)e_3\right) + \nabla_{(-\gamma e_2 - \delta e_3)}e_3 \\
&= -\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\nabla_{e_2}e_3 - \beta\nabla_{e_3}e_2 - \tfrac{1}{2}(\gamma-\beta)\nabla_{e_3}e_2 - \gamma\nabla_{e_2}e_3 - \delta\nabla_{e_3}e_3 \\
&= -\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\left(\overline{\nabla}_{e_2}e_3 + \langle Se_2,e_3\rangle e_1\right) - \alpha\left(\overline{\nabla}_{e_2}e_2 + \langle Se_2,e_2\rangle e_1\right) \\
&\quad -\beta\left(\overline{\nabla}_{e_3}e_2 + \langle Se_3,e_2\rangle e_1\right) - \tfrac{1}{2}(\gamma-\beta)\left(\overline{\nabla}_{e_3}e_2 + \langle Se_3,e_2\rangle e_1\right) \\
&\quad -\gamma\left(\overline{\nabla}_{e_2}e_3 + \langle Se_2,e_3\rangle e_1\right) - \left(\overline{\nabla}_{e_3}e_3 + \langle Se_3,e_3\rangle e_1\right) \\
&= -\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\left(\langle \alpha e_2 + \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)e_3, e_3\rangle e_1\right) - \alpha\left(\langle \alpha + e_2\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)e_3, e_2\rangle e_1\right) \\
&\quad -\beta\left(\langle \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)e_2 + \delta e_3, e_2\rangle e_1\right) - \tfrac{1}{2}(\gamma-\beta)\left(\langle \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)e_2 + \delta e_3, e_2\rangle e_1\right) \\
&\quad -\gamma\left(\langle \alpha e_2 + \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)e_3, e_3\rangle e_1\right) - \left(\langle \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)e_2 + \delta e_3, e_3\rangle e_1\right) \\
&= \left[\tfrac{1}{4}(\gamma-\beta)(\beta+\gamma) - \alpha^2 - \tfrac{1}{2}\beta(\beta+\gamma) - \tfrac{1}{4}(\gamma-\beta)(\beta+\gamma) - \tfrac{1}{2}\gamma(\beta+\gamma) - \delta^2\right]e_1 \\
&= \left[-\alpha^2 - \delta^2 - \tfrac{1}{2}\beta^2 - \tfrac{1}{2}\beta\gamma - \tfrac{1}{2}\gamma^2 - \tfrac{1}{2}\gamma\beta\right]e_1 \\
&= \left[-\alpha^2 - \delta^2 - \tfrac{1}{2}(\beta^2 + 2\beta\gamma + \gamma^2)\right]e_1 \\
&= \left[-\alpha^2 - \delta^2 - \tfrac{1}{2}(\gamma+\delta)^2\right]e_1.
\end{aligned}$$

Calculemos agora $\widetilde{r}(e_2)$, poupando-nos do trabalho de escrever $\overline{\nabla}_{e_i}e_j = 0$ para simplificarmos os cálculos.

$$\begin{aligned}
\widetilde{r}(e_2) &= R(e_1,e_2)e_1 + R(e_3,e_2)e_3 \\
&= \nabla_{e_2}\nabla_{e_1}e_1 - \nabla_{e_1}\nabla_{e_2}e_1 + \nabla_{[e_1,e_2]}e_1 + \nabla_{e_2}\nabla_{e_3}e_3 - \nabla_{e_3}\nabla_{e_2}e_3 + \nabla_{[e_3,e_2]}e_3 \\
&= -\nabla_{e_1}(-Se_2) + \nabla_{(\alpha e_2 + \beta e_3)}e_1 + \nabla_{e_2}(\langle Se_3,e_3\rangle e_1) - \nabla_{e_3}(\langle Se_2,e_3\rangle e_1) \\
&= \alpha\nabla_{e_1}e_2 + \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)\nabla_{e_1}e_3 + \alpha\nabla_{e_2}e_1 + \beta\nabla_{e_3}e_1 + \langle \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)e_2 + \delta e_3, e_3\rangle\nabla_{e_2}e_1 \\
&\quad -\langle \alpha e_2 + \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)e_3, e_3\rangle\nabla_{e_3}e_1 \\
&= \alpha(\tfrac{1}{2}(L-L^*)e_2) + \tfrac{1}{4}(\beta+\gamma)(L-L^*)e_3 + \alpha(-Se_2) + \beta(-Se_3) + \delta(-Se_2) \\
&\quad -\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)(-Se_3) \\
&= \tfrac{1}{2}\alpha(\beta-\gamma)e_3 + \tfrac{1}{4}(\beta+\gamma)(\gamma-\beta)e_2 - \alpha\left[\alpha e_2 + \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)e_3\right] \\
&\quad -\beta\left[\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)e_2 + \delta e_3\right] - \delta\left[\alpha e_2 + \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)e_3\right] + \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)\left[\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)e_2 + \delta e_3\right] \\
&= \left[\tfrac{1}{4}(\beta+\gamma)(\gamma-\beta) - \tfrac{1}{2}\alpha^2 - \tfrac{1}{2}\beta(\beta+\gamma) - \alpha\delta + \tfrac{1}{4}(\beta+\gamma)(\beta+\gamma)\right]e_2 \\
&\quad +\left[\tfrac{1}{2}\alpha(\beta-\gamma) - \tfrac{1}{2}\alpha(\beta+\gamma) - \beta\delta - \tfrac{1}{2}\delta(\beta+\gamma) + \tfrac{1}{2}\delta(\beta+\gamma)\right]e_3 \\
&= \left[\tfrac{1}{4}(\gamma^2-\beta^2) - \alpha^2 - \tfrac{1}{2}\beta^2 - \tfrac{1}{2}\beta\gamma - \alpha\delta + \tfrac{1}{4}(\beta^2 + 2\beta\gamma + \gamma^2)\right]e_2 \\
&\quad +\left[\tfrac{1}{2}\alpha\beta - \tfrac{1}{2}\alpha\gamma - \tfrac{1}{2}\alpha\beta - \tfrac{1}{2}\alpha\gamma - \beta\delta - \tfrac{1}{2}\delta\beta - \tfrac{1}{2}\delta\gamma + \tfrac{1}{2}\beta\delta + \tfrac{1}{2}\gamma\delta\right]e_3 \\
&= \left[\tfrac{1}{2}(\gamma^2-\beta^2) - \alpha^2 - \alpha\delta - \tfrac{1}{2}\beta\gamma + \tfrac{1}{2}\beta\gamma\right]e_2 - \left[\alpha\gamma + \beta\delta\right]e_3
\end{aligned}$$

portanto

$$\widetilde{r}(e_2) = \big[-\alpha(\alpha+\delta)+\tfrac{1}{2}(\gamma^2-\beta^2)\big]e_2.$$

Finalmente, calculemos $\widetilde{r}(e_3)$

$$\begin{aligned}
\widetilde{r}(e_3) &= R(e_1,e_3)e_1 + R(e_2,e_3)e_2\\
&= \nabla_{e_3}\nabla_{e_1}e_1 - \nabla_{e_1}\nabla_{e_3}e_1 + \nabla_{[e_1,e_3]}e_1 + \nabla_{e_3}\nabla_{e_2}e_2 - \nabla_{e_2}\nabla_{e_3}e_2 + \nabla_{[e_2,e_3]}e_2\\
&= -\nabla_{e_1}(-Se_3) + \nabla_{(\gamma e_2+\delta e_3)}e_1 + \nabla_{e_3}(\langle Se_2,e_2\rangle e_1) - \nabla_{e_2}(\langle Se_3,e_2\rangle e_1)\\
&= \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)\nabla_{e_1}e_2 + \delta\nabla_{e_1}e_3 + \gamma\nabla_{e_2}e_1 + \delta\nabla_{e_3}e_1 + \langle\alpha e_2 + \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)e_3, e_2\rangle\nabla_{e_3}e_1\\
&\quad -\langle\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)e_2 + \delta e_3, e_2\rangle\nabla_{e_2}e_1\\
&= \tfrac{1}{4}(\beta+\gamma)(L-L^*)e_2 + \tfrac{1}{2}\delta(L-L^*)e_3 + \gamma(-Se_2) + \delta(-Se_3) + \alpha(-Se_3)\\
&\quad -\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)(-Se_2)\\
&= \tfrac{1}{4}(\beta+\gamma)(\beta-\gamma)e_3 + \tfrac{1}{2}\delta(\gamma-\beta)e_2 - \gamma[\alpha e_2 + \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)e_3]\\
&\quad -\delta[\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)e_2+\delta e_3] - \alpha[\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)e_2+\delta e_3] + \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)[\alpha e_2 + \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)e_3]\\
&= \big[\tfrac{1}{2}\delta\gamma - \tfrac{1}{2}\delta\beta - \alpha\gamma - \tfrac{1}{2}\delta\beta - \tfrac{1}{2}\delta\gamma - \tfrac{1}{2}\alpha\beta - \tfrac{1}{2}\alpha\gamma + \tfrac{1}{2}\alpha\beta + \tfrac{1}{2}\alpha\gamma\big]e_2\\
&\quad +\big[\tfrac{1}{4}(\beta^2-\gamma^2) - \tfrac{1}{2}\gamma\beta - \tfrac{1}{2}\gamma^2 - \delta^2 - \alpha\delta + \tfrac{1}{4}\beta^2 + \tfrac{1}{2}\beta\gamma + \tfrac{1}{4}\gamma^2\big]e_3\\
&= \big[-\alpha\gamma - \beta\delta\big]e_2 + \big[-\delta(\alpha+\delta) + \tfrac{1}{4}(\beta^2-\gamma^2-2\gamma^2+\beta^2+\gamma^2)\big]e_3\\
&= \big[-\delta(\alpha+\delta) + \tfrac{1}{2}(\beta^2-\gamma^2)\big]e_3.
\end{aligned}$$

Concluí que e_1, e_2, e_3 são autovetores de $\widetilde{r}$ cujos autovalores são dados conforme o enunciado. □

Teorema 4.2. *Se o determinante* D *é negativo então toda métrica invariante à esquerda possui assinatura de Ricci* $(+,-,-)$. *Mas, se* $D \geqslant 0$, *a assinatura* $(0,-,-)$ *também é possível e, se* $D > 0$, *a assinatura* $(-,-,-)$ *também é possível. De fato, para* $D > 0$, *existe uma métrica invariante à esquerda de curvatura seccional estritamente negativa e, para* $D > 1$, *existe uma métrica invariante á esquerda de curvatura constante negativa. Em todos os casos, a curvatura escalar é estritamente negativa.*

Demonstração. Para simplificar as fórmulas obtidas no Lema 4.3, escolhemos os escalares, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tais que $\alpha + \delta = 2$. da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\alpha &= 1+\xi, & \beta &= (1+\xi)\eta\\
\gamma &= -(1-\xi)\eta, & \delta &= 1-\xi.
\end{aligned}$$

Assumiremos que $\xi \geqslant 0,\ \eta \geqslant 0$. O caso especial $\xi = \eta = 0$ (correspondente ao Exemplo Especial) será desconsiderado. Temos, do Lema 4.3, as seguintes curvaturas principais

$$r(e_1) = -2(1+\xi^2(1+\eta^2)) \leqslant -2$$

$$\begin{aligned} r(e_2) &= -2(1+\xi(1+\eta^2)) \leqslant -2 \\ r(e_3) &= -2(1-\xi(1+\eta^2)), \end{aligned}$$

e o determinante é dado por

$$D = (1-\xi^2)(1+\eta^2).$$

Agora observemos cada caso separadamente.

- Se $D < 0$, então $1-\xi < 0$ e, portanto, $\xi > 0$. Daí, temos $r(e_3) = -2(1-\xi(1+\eta^2)) > 0$ e, finalmente a assinatura de Ricci é $(+,-,-)$.

- Se $D = 0$, então $\xi = 1$ e, portanto, $r(e_3) = -2[1-(1+\eta^2)]$. Se $\eta = 0$, temos $r(e_3) = 0$. Caso contrário, temos $r(e_3) > 0$. Assim as possíveis assinaturas de Ricci são $(+,-,-)$ e $(0,-,-)$.

- Se $D > 0$, então $\xi < 1$ e, assim, obtemos $r(e_3) = -2(1-\xi(1-\eta^2))$, com $r(e_3) > 0$ caso $(1+\eta^2) > \xi^{-1}$, $r(e_3) = 0$, caso $(1+\eta^2) = \xi^{-1}$, e $r(e_3) < 0$, caso $(1+\eta^2) < \xi^{-1}$. As possíveis assinaturas de Ricci são $(+,-,-)$, $(0,-,-)$ e $(-,-,-)$.

No caso em que $D > 1$, tomando, por exemplo $\xi = 0$, obtemos $r(e_1) = r(e_2) = r(e_3) = -2$, onde tanto as curvaturas seccionais quanto as curvaturas de Ricci são constantes e negativas. E, portanto,

$$\rho = r(e_1) + r(e_2) + r(e_3) = -6 - \xi^2(1+\eta^2) \leqslant -6$$

em qualquer um dos casos acima. □

Em todos os casos não unimodular pelo menos duas das curvaturas principais de Ricci são negativas. Comparando com o Corolário 4.1, podemos concluir, que no caso de um grupo de Lie tridimensional, este não admite métrica invariante à esquerda com assinatura de Ricci $(+,+,-)$ ou $(+,\pm,0)$.

4.3 Métricas Bi-invariantes

Recordamos que uma métrica Riemanniana em um grupo de Lie G é dita bi-invariante se é invariante por translações à esquerda e à direita.

Lema 4.4. *Uma métrica invariante à esquerda em um grupo de Lie* G *é também invariante à direita se, e somente se, para cada elemento* g *do grupo de Lie* G*, a transformação linear*

$$\mathrm{Ad}(g) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

é uma isometria com relação à métrica induzida na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$*.*

Demonstração. Sejam $l_g : G \longrightarrow G$ a translação à esquerda por g e seja r_g a translação à direita por g. Assim $\mathrm{Ad}(g)$ é induzida por uma aplicação suave $l_g r_{g^{-1}}$ de G em G. Desde que a métrica μ é invariante à esquerda, temos $l_g^* \mu = \mu$. Se μ é também invariante à direita, vale que $r_g^* \mu = \mu$. Então, temos

$$(l_g r_g^{-1})^* \mu = \mu.$$

Portanto $\mathrm{Ad}(g)$ é uma isometria. □

Lema 4.5. *No caso de um grupo de Lie conexo* G*, uma métrica invariante à esquerda é também invariante à direita se, e somente se, a transformação linear* $\mathrm{ad}(x)$ *é antiadjunta para qualquer* x *na álgebra de Lie de* G*.*

Demonstração. Se $g \in G$ é suficientemente próximo da identidade, então $g = \exp(x)$ para um único e bem definido $x \in \mathfrak{g}$, próximo de zero. Pelo diagrama (2.1), temos

$$\mathrm{Ad}(g) = \mathrm{Ad}(\exp(x)) = e^{\mathrm{ad}(x)}.$$

Recordemos que $\mathrm{Ad}(g)$ é ortogonal se, e somente se,

$$\mathrm{Ad}(g)^{-1} = \mathrm{Ad}(g)^*.$$

Desde que o lado esquerdo da igualdade é igual a $e^{-\mathrm{ad}(x)}$ pelo Teorema 2.5, e o lado direito é igual a $e^{\mathrm{ad}(x)^*}$, tal condição é satisfeita se, e somente se,

$$-\mathrm{ad}(x) = \mathrm{ad}(x)^*,$$

ou seja, se $\mathrm{ad}(x)$ é antiadjunta. Uma vez que um grupo de Lie conexo é gerado por uma vizinhança qualquer da identidade e que o produto de transformações ortogonais é ortogonal, segue o resultado. □

Passaremos então a usar, por conveniência, que uma métrica em $\mathfrak{g}$ é bi-invariante se $\mathrm{ad}(x)$ é antiadjunta para todo $x \in \mathfrak{g}$. Notemos também que uma métrica bi-invariante em $\mathfrak{g}$ induz uma métrica bi-invariante em qualquer subálgebra de $\mathfrak{g}$.

Podemos, então, dar uma fórmula explícita para a forma quadrática de Ricci como segue. Recordemos que a forma de Killing β é definida por $\beta(x, y) = \mathrm{tr}\ (\mathrm{ad}(x)\mathrm{ad}(y))$. Desde que $r(x)$ pode ser definida como o traço da transformação linear

$$y \longmapsto R(x, y)x = \frac{1}{4}\,[[x, y], x] = -\frac{1}{4}\mathrm{ad}(x)^2 y,$$

segue que $r(x) = -\frac{1}{4}\beta(x, x)$. Assim, a forma quadrática $r(x)$ é independente da particular escolha da métrica bi-invariante.

Uma importante propriedade das métricas bi-invariantes é a seguinte.

Lema 4.6. *Se a métrica em $\mathfrak{g}$ é bi-invariante, então o complemento ortogonal de qualquer ideal é um ideal. Assim $\mathfrak{g}$ pode ser expresso como uma soma ortogonal direta de ideais simples.*

Demonstração. Se y é ortogonal ao ideal $\mathfrak{a}$, então devemos mostrar que $[x, y]$ é ortogonal a $\mathfrak{a}$, para todo $x \in \mathfrak{g}$. Mas

$$\langle [x, y], a\rangle = -\langle y, [x, a]\rangle = 0,$$

para qualquer $a \in \mathfrak{a}$. Assim, $\mathfrak{g}$ é escrito como a soma ortogonal direta de ideais $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^{\perp}$. A conclusão segue de forma indutiva. $\square$

Se $\mathfrak{g}$ é igual à soma ortogonal direta $\mathfrak{a}_1 \oplus ... \oplus \mathfrak{a}_k$ de ideais simples, então o grupo de Lie $\widetilde{G}$ simplesmente conexo pode ser expresso como o produto cartesiano $A_1 \times ... \times A_k$ de subgrupos normais. Para cada fator A_i simplesmente conexo, existem duas possibilidades.

1º: Se $\mathfrak{a}_i$ é comutativo e, portanto, unidimensional, então $A_i \cong \mathbb{R}$.

2º: Se $\mathfrak{a}_i$ é não comutativo, então o centro de $\mathfrak{a}_i$ deve ser trivial e, daí, $\mathfrak{a}_i$ possui curvatura de Ricci estritamente positiva. Aplicando o teorema de Myers segue que A_i é compacto.

Lema 4.7. *O grupo de Lie conexo G admite métrica bi-invariante se, e somente se, é isomorfo ao produto de um grupo compacto e um grupo vetorial aditivo.*

Demonstração. Se G admite métrica bi-invariante, então o argumento acima mostra que o recobrimento universal $\widetilde{G}$ se divide como o produto cartesiano de um grupo compacto H e um grupo vetorial $\mathbb{R}^n$. O grupo G pode ser identificado como o quociente $\widetilde{G}/\Pi$ onde Π é um subgrupo normal discreto de $\widetilde{G}$. Projetando Π em $\mathbb{R}^n$, seja V o espaço vetorial gerado pela imagem e seja $V^\perp$ o complemento ortogonal. Então G é o produto cartesiano do grupo compacto $(H \times V)/\Pi$ e o grupo vetorial $V^\perp$.

Reciprocamente, vemos que qualquer grupo comutativo certamente admite métrica bi-invariante (neste caso qualquer métrica invariante à esquerda será também invariante à direita, pois $L_a = R_a$), e qualquer grupo compacto pode ser munido de uma métrica bi-invariante (veja, por exemplo [8], Proposição 6.8). Temos, portanto, o produto de métricas bi-invariantes, que é, de fato, bi-invariante. □

No caso de grupos simples, a métrica é essencialmente única.

Lema 4.8. *Se a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de um grupo de Lie compacto é simples, então a métrica bi-invariante é única a menos de uma possível multiplicação por uma constante positiva. Tal métrica possui curvatura de Ricci constante.*

Demonstração. Seja $\langle x, y\rangle$ uma métrica bi-invariante sobre $\mathfrak{g}$. Então qualquer outra métrica $\langle\langle x, y\rangle\rangle$ bi-invariante em $\mathfrak{g}$ pode ser obtida por $\langle\langle x, y\rangle\rangle = \langle Sx, y\rangle$, onde S é alguma matriz autoadjunta. Usando o fato de $\mathrm{ad}(u)$ ser antiadjunta em ambas as métricas, observamos

$$\begin{aligned}\langle S(\mathrm{ad}(u)x), y\rangle &= \langle\langle \mathrm{ad}(u)x, y\rangle\rangle \\ &= -\langle\langle x, \mathrm{ad}(u)y\rangle\rangle \\ &= -\langle Sx, \mathrm{ad}(u)y\rangle \\ &= \langle \mathrm{ad}(u)Sx, y\rangle,\end{aligned}$$

para quaisquer $x, y, u \in \mathfrak{g}$. Assim, $\mathrm{ad}(u)$ comuta com S e, portanto, aplica cada autoespaço de S sobre si mesmo, pois dado $x \in \mathfrak{g}$, tal que $Sx = \lambda x$, temos $S(\mathrm{ad}(u)x) = \lambda \mathrm{ad}(u)x$. Isto nos fornece que cada autoespaço de S é um ideal. Sendo $\mathfrak{g}$ simples, segue que S possui um único auto espaço, digamos $Sx = \lambda x$ para todo $x \in \mathfrak{g}$. Logo a métrica bi-invariante é essencialmente única.

Escolhendo uma tal métrica bi-invariante, considere a forma quadrática de Ricci $r(x)$, dada por $r(x) = \langle \widetilde{r}(x), x\rangle$, onde $\widetilde{r}$ é autoadjunta. O produto $\langle \widetilde{r}(x), y\rangle$ pode ser considerado como uma métrica Riemanniana sobre G, desde que r é positiva definida. Evidentemente, esta métrica é bi-invariante, de modo que o argumento acima mostra que

$$r(u) = \langle \widetilde{r}(u), u \rangle = \lambda,$$

para qualquer vetor unitário u, onde $\lambda > 0$ é constante. $\square$

Se resolvermos mudar a escala, que é multiplicar a métrica por $\langle x, y \rangle$ por uma constante positiva, é fácil verificar que a conexão ∇, o tensor Riemanniano R, e a forma quadrática de Ricci $r(x)$ não mudam. Portanto, podemos escolher uma métrica tal que

$$\langle x, x \rangle \equiv r(x)$$

ou tal que a curvatura de Ricci é identicamente $+1$.

Corolário 4.6. *Qualquer grupo de Lie, cujo recobrimento universal é compacto, admite uma métrica bi-invariante de curvatura de Ricci constante* $+1$.

Demonstração. Como vimos anteriormente, $\widetilde{G}$ se expressa como o produto cartesiano $A_1 \times ... \times A_k$ de grupos simples. Cada grupo simples possui uma única métrica bi-invariante com curvatura de Ricci $+1$ e o produto das métricas também possui curvatura de Ricci identicamente igual a $+1$. $\square$

Um fato fácil de observar é que existe precisamente uma métrica bi-invariante, a saber $\langle x, y \rangle = -\frac{1}{4}\beta(x, y)$ onde $\beta(x, y) = \mathrm{tr}\ (\mathrm{ad}(x)\mathrm{ad}(y))$ é a forma de Killing.

Demonstraremos agora o Teorema 3.2 o qual classifica as métricas invariantes à esquerda *flat*.

Demonstração. (do Teorema 3.2) Seja G um grupo de Lie simplesmente conexo que admite uma métrica invariante à esquerda *flat*. Se ignorarmos a estrutura de grupo e olharmos G apenas como uma variedade Riemanniana completa, segue que G é isométrico ao espaço Euclidiano (veja o teorema de Hadamard). Como consequência imediata, segue que todo subgrupo compacto de G deve ser trivial. Para algum subgrupo compacto, agindo por translações à esquerda, obtemos um grupo compacto de isometrias do espaço Euclidiano (que, claramente, depende da métrica). Qualquer grupo de isometrias tem um ponto fixo, mas translações à esquerda não trivial não podem ter pontos fixos.

Para $\mathfrak{g}$ com qualquer métrica, a correspondência $x \longrightarrow \nabla_x$ define uma aplicação linear de $\mathfrak{g}$ sobre a álgebra de Lie $\mathfrak{o}(n)$ consistindo de todas as aplicações antissimétricas de $\mathfrak{g}$

sobre $\mathfrak{g}$. Se o tensor curvatura é identicamente nulo, então

$$\nabla_{[x,y]} = \nabla_x \nabla_y - \nabla_y \nabla_x.$$

Esta correspondência é um homomorfismo de álgebras de Lie (observe que o colchete de $\mathfrak{o}(n)$ está sendo definida por $[x, y] = xy - yx$). Assim, o núcleo $\mathfrak{u}$ é um ideal. Usando a identidade

$$[x, y] = \nabla_x y - \nabla_y x,$$

segue que $\mathfrak{u}$ é comutativo, pois se $u, v \in \mathfrak{u}$ então $\nabla_u = \nabla_v = 0$ e, portanto, $[u, v] = \nabla_u v - \nabla_v u = 0$.

Seja $\mathfrak{b}$ o complemento ortogonal de $\mathfrak{u}$. Para cada $b \in \mathfrak{b}$, a identidade

$$[b, u] = \nabla_b u - \nabla_u b = \nabla_b u$$

mostra que a transformação antissimétrica ∇_b aplica o ideal $\mathfrak{u}$ sobre si mesmo. Assim, aplica o complemento ortogonal $\mathfrak{b}$ sobre si mesmo. Segue, então, que $\mathfrak{b}$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$.

Claramente $\mathfrak{b}$ é aplicado de modo isomorfo sobre a álgebra de Lie de $\mathfrak{o}(n)$. Desde que $\mathfrak{o}(n)$ é uma álgebra de Lie do grupo compacto $\mathsf{O}(n)$ e possui uma métrica bi-invariante, que satisfaz as condições do Lema 4.4. Portanto, pelo Lema 4.6, $\mathfrak{b}$ se escreve como soma ortogonal direta $\mathfrak{b}_1 \oplus ... \oplus \mathfrak{b}_k$ de ideais simples. Se um destes ideais simples $\mathfrak{b}_i$ for não comutativo, então a inclusão $\mathfrak{b}_i \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ induz um homomorfismo não trivial $B_i \longrightarrow \mathsf{G}$. Assim, G possuirá um subgrupo compacto não trivial, o que é impossível. Concluímos, então, que cada $\mathfrak{b}_i$ é comutativo. Portanto a álgebra de Lie $\mathfrak{b}$ é comutativa.

Para cada $b \in \mathfrak{b}$, note que $\mathrm{ad}(b)$ é antissimétrica. Além disto $\mathrm{ad}(b)$ restrita a $\mathfrak{b}$ é trivial, enquanto $\mathrm{ad}(b)$ restrita a $\mathfrak{u}$ coincide com a transformação antissimétrica ∇_b.

Logo $\mathfrak{g}$ se divide como uma soma ortogonal direta $\mathfrak{u} \oplus \mathfrak{b}$ onde $\mathfrak{u}$ é um ideal comutativo e $\mathfrak{b}$ é uma subálgebra comutativa e cada $\mathrm{ad}(b)$ é antissimétrica. Reciprocamente, se estas condições são satisfeitas, usando a fórmula de Koszul, vemos que

$$\nabla_u = 0, \quad \nabla_b = \mathrm{ad}(b),$$

e segue que o tensor curvatura é identicamente nulo. □

Como uma aplicação final, construiremos uma métrica de curvatura positiva. Para isso precisamos do seguinte resultado.

Teorema 4.3 (de Iwasawa)**.** *Se* G *é um grupo de Lie conexo, então*

(a) *Todo subgrupo compacto está contido em um subgrupo maximal compacto* H*, que é necessariamente um grupo de Lie conexo.*

(b) *Este subgrupo compacto maximal é único a menos de conjugação.*

(c) *Como espaço topológico,* G *é homeomorfo ao produto de* H *e algum espaço Euclidiano* $\mathbb{R}^m$*.*

Demonstração. (do Teorema 3.10) Seja G um grupo de Lie conexo e suponha que G possui um subgrupo não comutativo H. Devemos construir uma métrica de curvatura escalar estritamente positiva. Pela parte (a) do Teorema de Iwasawa, assumiremos que H é conexo. Desde que H é compacto, podemos definir uma métrica positiva definida em $\mathfrak{g}$ que é invariante por translações lineares

$$\mathrm{Ad}(h) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

para todo h em H. Usando esta métrica, seja $e_1, ..., e_m$ uma base ortonormal da álgebra de Lie de H, e comple-a para uma base ortonormal $e_1, ..., e_n$ de $\mathfrak{g}$. Se seguirmos os passos da demonstração do Teorema 4.4, veremos que as transformações lineares

$$\mathrm{ad}(e_1), ..., \mathrm{ad}(e_m)$$

devem ser antissimétricas (porém as demais transformações $\mathrm{ad}(e_{m+1}), ..., \mathrm{ad}(e_n)$ não são antissimétricas.)

Fixando qualquer $\varepsilon > 0$, considere a nova base $e_1', ..., e_n'$ definida por

$$e_1' = e_1, ..., e_m' = e_m,\ e_{m+1}' = \varepsilon e_{m+1}, ..., e_n' = \varepsilon e_n.$$

Escolha uma nova métrica tal que esta base $e_1', ..., e_n'$ seja ortonormal. Usaremos o símbolo $\mathfrak{g}_\varepsilon$ para denotar a álgebra de Lie obtida com essa nova métrica e gerada por esta base ortonormal. Como na demonstração do Teorema 3.6, notemos que as constantes de estrutura $\langle [e_i', e_j'], e_k' \rangle$ associadas a $\mathfrak{g}_\varepsilon$ possuem um limite bem definido quando $\varepsilon \to 0$. Assim, existe uma álgebra de Lie limite $\mathfrak{g}_0$ bem definida, gerado por esta métrica e base ortonormal fixada. Evidentemente, $\mathfrak{g}_0$ se escreve como a soma direta $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{u}$, onde $\mathfrak{h}$ é a subálgebra gerada por $e_{m+1}', ..., e_n'$. Note ainda que $\mathrm{ad}(b)$ é antissimétrica, para cada $b \in \mathfrak{h}$. Aplicando a fórmula de Koszul, vemos que $\nabla_u = 0$, para todo $u \in \mathfrak{u}$ assim

$R(x,u) = 0$ e $\kappa(x,u) = 0$, para todo x. Em particular, a curvatura de Ricci $r(x)$ é zero para u em $\mathfrak{u}$. Por outro lado para b em $\mathfrak{h}$, temos $r(b) \geqslant 0$ pelo Lema 3.7, onde a igualdade nem sempre ocorre, pois $\mathfrak{h}$ não é comutativo. Portanto a curvatura escalar

$$\rho(\mathfrak{g}_0) = r(e_1') + ... + r(e_n')$$

é estritamente positiva. Segue, por continuidade, que $\rho(\mathfrak{g}_\varepsilon) > 0$ sempre que ε é suficientemente pequeno. □

Observação 4.2. Esta álgebra de Lie limite $\mathfrak{g}_0$ fornece um exemplo bastante interessante de álgebra de Lie com métrica de curvatura seccional $\kappa \geqslant 0$.

Capítulo 5

Exemplos de Grupos de Lie

Neste capítulo, apresentamos alguns exemplos de grupos de Lie (lineares) e suas respectivas álgebras de Lie, preenchendo algumas das lacunas deixadas na seção 3.4 do Capítulo 3, acerca de grupos de Lie tridimensionais unimodulares. Durante todo o capítulo, G denotará um grupo de Lie e $\mathfrak{g}$, sua álgebra de Lie, por exemplo o grupo $SL(2,\mathbb{R})$ tem $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ como álgebra de Lie. Sempre que tratarmos de grupos lineares usaremos o seguinte colchete da álgebra de Lie associada $[A, B] = AB - BA$.

Exemplo 5.1 (Grupo ortogonal). Considerando

$$SO(n) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}); AA^T = I \text{ e } \det(A) = 1\}$$

(respectivamente, $O(n) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}); AA^T = I\}$), é um grupo de Lie chamado grupo ortogonal especial (respectivamente, grupo ortogonal) e sua álgebra de Lie é o conjunto

$$\mathfrak{so}(n) = \{A \in M_n; A = -A^T\}$$

(respectivamente, $\mathfrak{o}(n) = \mathfrak{so}(n)$)

Podemos observar que $SO(n)$ (respectivamente $O(n) \supset SO(n)$) é um subgrupo compacto de $GL(n,\mathbb{R})$, onde $GL(n,\mathbb{R})$ é o grupo das matrizes invertíveis $n \times n$. Como $O(n) \subset S^{n-1} \times \ldots \times S^{n-1}$ é limitado e $SO(n)$ é a imagem inversa do valor regular I da função diferenciável $\varphi : M_n \longrightarrow \mathcal{S}_n,\ \varphi(A) = AA^T$, onde $\mathcal{S}_n$ é o conjunto das matrizes simétricas $n \times n$, segue o afirmado. Observando agora que $d\varphi_I(X) = X + X^T$, então $\mathfrak{so}(n)$ que é o núcleo de $d\varphi_I$ é o conjunto das matrizes antissimétricas conforme afirmamos.

Para $n = 3$ temos $\dim(\mathsf{SO}(3)) = 3$ e podemos tomar a seguinte base para $\mathfrak{so}(3)$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\text{ e }\; e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos então observar que

$$[e_2, e_3] = e_2, \;\; [e_3, e_1] = e_2 \;\text{ e }\; [e_1, e_2] = e_3.$$

Exemplo 5.2 (Grupo especial linear)**.** Chamamos de grupo especial linear, $\mathsf{SL}(n, \mathbb{R})$, ao conjunto das matrizes $n \times n$ de determinate 1. $\mathsf{SL}(n, \mathbb{R})$ é um grupo de Lie de dimensão $n^2 - 1$ e sua álgebra de Lie, $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, é o conjunto das matrizes de traço nulo.

$\mathsf{SL}(n, \mathbb{R})$ é uma variedade diferenciável (de fato, uma hipersuperfície de $\mathsf{M}(n, \mathbb{R})$), $\mathsf{SL}(n, \mathbb{R})$ é a imagem inversa do valor regular 1 da função diferenciável

$$\begin{array}{rccl} \det : & \mathsf{M}_n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & A & \longmapsto & \det(A) \end{array}.$$

Para verificarmos que $\mathsf{SL}(n, \mathbb{R})$ é grupo de Lie basta observar que $\mathsf{SL}(n, \mathbb{R})$ é um subgrupo fechado do grupo de Lie $\mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$ e portanto $\mathsf{SL}(n, \mathbb{R})$ é um grupo de Lie. Mais ainda, $\mathsf{SL}(n, \mathbb{R})$ tem dimensão $n^2 - 1$ por ser a imagem inversa do valor regular de uma função diferenciável (polinomial) que assume valores reais.

Para encontrarmos a algebra de Lie $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ olhemos para o núcleo da aplicação derivada $d \det_{I_n} = \mathrm{tr}$, onde I_n é a matriz identidade $n \times n$. Assim temos que $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ é o conjunto das matrizes de traço nulo.

Observemos agora que para o caso $n = 2$, $\mathsf{SL}(2, \mathbb{R})$ é um grupo de Lie de dimensão 3 e uma base para $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ é dada por

$$e_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

tem-se então

$$[e_2, e_3] = 2e_1, \quad [e_3, e_1] = 2e_2 \quad \text{e} \quad [e_1, e_3] = -2e_3.$$

Exemplo 5.3 (Grupo Euclidiano)**.** Chamando de $\mathsf{E}(2)$ ao conjunto dos movimentos rígidos do plano Euclidiano. Então $\mathsf{E}(2)$ é um grupo de Lie e se decompõe como o produto semi-direto $\mathsf{O}(2) \ltimes \mathbb{R}^2$.

Qualquer movimento rígido de $\mathbb{R}^2$ pode ser obtido por composição de rotações e translações, assim como as rotações são transformações lineares que preservam o produto interno canônico, ou seja $AA^T = I$ obtendo assim $O(2)$ e o grupo das translações pode ser identificado de modo natural com $(\mathbb{R}^2, +)$ (dado $p \in \mathbb{R}^2$, a translação por p, $T_p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é definida como $t_p(q) = p + q$. A associação entre pontos do plano e translações é dada por $p \mapsto T_p$ com inversa $T_p \mapsto T_p(0)$). Assim, o conjunto dos movimentos rígidos do plano é dado pelo produto semi-direto $O(2) \ltimes \mathbb{R}^2$. De forma bem geral temos em [3] que o conjunto das isometrias de uma métrica é sempre um grupo. Fazemos agora a uma identificação para $E(2)$ que tonará mais claro que de fato $E(2)$ é um subgrupo fechado de $GL(3, \mathbb{R})$. Passaremos então a representar

$$E(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t & x \\ -\operatorname{sen} t & \cos t & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; t, x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

e

$$\mathbb{R}^2 = \{(u, v, 1) \in \mathbb{R}^3\}$$

não é difícil verificar o isomorfismo de Lie entre as duas representações de $E(2)$ e ganha-se ainda sem dificuldade que $E(2)$ é um grupo de Lie. Observe que $E(2)$ opera sobre $\mathbb{R}^2$ da seguinte maneira

$$\begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t & x \\ -\operatorname{sen} t & \cos t & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \cos t + v \operatorname{sen} t + x \\ v \cos t - u \operatorname{sen} t + y \\ 1 \end{pmatrix}$$

que coincide com a ideia que tínhamos anteriormente. Agora podemos facilmente observar que a álgebra de Lie de $E(2)$ é dada por

$$\mathfrak{e}(2) = \left\{ A \in GL(3, \mathbb{R}); A = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Tomando para $\mathfrak{e}(2)$ a base composta por

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

temos que

$$[e_2, e_3] = e_1, \quad [e_3, e_1] = e_2 \quad \text{e} \quad [e_1, e_2] = 0.$$

Exemplo 5.4 (Grupo Lorentziano)**.** Denotando por $E(1,1)$ o conjunto dos movimento rígidos do espaço bidimensional de Minkowski (denotaremos por $\mathfrak{M}^2$), ou seja, o conjunto das isometrias $\varphi : \mathcal{M}^2 \longrightarrow \mathcal{M}^2$ com a métrica dada por $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2, (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathcal{M}^2$ é um grupo de Lie e pode ser escrito como o produto semi-direto $SO(1,1) \ltimes \mathbb{R}^2$, onde

$$SO(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} \cosh t & \operatorname{senh} t \\ \operatorname{senh} t & \cosh t \end{pmatrix} ; \; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Facilmente vemos que as translações são isometrias, pois tomando $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, temos que

$$d((x_1 + u, y_1 + v), (x_2 + u, y_2 + v)) = (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 = d((x_1, y_1), (x_2, y_2)).$$

Verifiquemos, então, quais transformações lineares que preservam essa métrica, ou seja, as transformações lineares tais que

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

onde A é a matriz da transformação linear. Escrevendo

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

obtemos que as entradas da matriz A devem satisfazer

$$\begin{cases} a^2 - b^2 &= 1 \\ ac - bd &= 0 \\ d^2 - c^2 &= 1 \end{cases}$$

nessas condições devem existir $s, t \in \mathbb{R}$ tais que $a = \cosh t$, $b = \operatorname{senh} t$, $c = \operatorname{senh} s$ e $d = \cosh s$. Além disto devemos ter

$$ac - bd = \cosh t \operatorname{senh} s - \cosh s \operatorname{senh} t = \operatorname{senh}(t + s) = 0,$$

ou seja, $t = s$ e, portanto,

$$A = \begin{pmatrix} \cosh t & \operatorname{senh} t \\ \operatorname{senh} t & \cosh t \end{pmatrix}.$$

Agora faremos as seguintes identificações para $\mathsf{E}(1,1)$ e $\mathcal{M}^2$,

$$\mathsf{E}(1,1) = \left\{ A \in \mathsf{GL}(3,\mathbb{R}); A = \begin{pmatrix} \cosh t & \operatorname{senh} t & x \\ \operatorname{senh} t & \cosh t & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e

$$\mathcal{M}^2 = \{(u,v,1); u,v \in \mathbb{R}\}.$$

Verifica-se, o isomorfismo de Lie entres as duas identificações de $\mathsf{E}(1,1)$ e nota-se sem dificuldade que, de fato, $\mathsf{E}(1,1)$ é um subgrupo de Lie do grupo de Lie $\mathsf{GL}(3,\mathbb{R})$. Observe, que com as novas representações de $\mathsf{E}(1,1)$ e $\mathcal{M}^2$, a maneira com que $\mathsf{E}(1,1)$ opera sobre $\mathcal{M}^2$ é dada por

$$\begin{pmatrix} \cosh t & \operatorname{senh} t & x \\ \operatorname{senh} t & \cosh t & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\cosh t + v \operatorname{senh} t + x \\ v \cosh t + u \operatorname{senh} t + y \\ 1 \end{pmatrix},$$

o qual coincide com a ideia inicial.

Como essa representação podemos obter sem dificuldade que a álgebra de Lie de $\mathsf{E}(1,1)$ é dada por

$$\mathfrak{e}(1,1) = \left\{ A \in \mathsf{GL}(3,\mathbb{R});\ A = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ x & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Tomando para $\mathfrak{e}(1,1)$ a base

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtemos

$$[e_2, e_3] = e_1, \quad [e_3, e_1] = -e_2 \quad \text{e} \quad [e_1, e_2] = 0.$$

Exemplo 5.5 (Grupo de Heisenberg)**.** O grupo de Heisenberg de dimensão 3 é o grupo

$$\mathcal{H}_3 = \left\{ A \in \mathsf{GL}(3,\mathbb{R}); A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

.

Não é difícil verificarmos que $\mathcal{H}_3$ é um subgrupo do grupo de Lie $\mathsf{GL}(3, \mathbb{R})$. Para verificarmos que $\mathcal{H}_3$ é um subgrupo fechado, podemos observar que $\mathcal{H}_3$ é a imagem inversa do valor regular I da projeção canônica $\varphi : M_3 \longrightarrow T_i$, onde T_i é o subespaço das matrizes triangulares inferiores. Para obtermos a álgebra de Lie de $\mathcal{H}_3$, observemos que, sendo φ uma transformação linear, então sua derivada $d\varphi_I = \varphi$ e o núcleo de $d\varphi$ é o conjunto das matrizes triangulares superiores. Assim

$$\mathfrak{h}_3 = \left\{ A \in M_3;\ A = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ com } x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Agora tome em $\mathfrak{h}_3$ a seguinte base

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos, também, observar que

$$[e_2, e_3] = e_1, \quad [e_3, e_2] = 0, \quad \text{e} \quad [e_1, e_2] = 0.$$

Apêndice A

Nosso objetivo neste apêndice é mostrar que o espaço vetorial dos tensores de curvatura de uma variedade Riemanniana de dimensão n em um ponto p é $n^2(n^2-1)/12$.

Para vermos isso, observemos que um tensor de curvatura em um um ponto p de uma variedade Riemanniana M de dimensão n é uma forma quadrilinear $\langle R(x,y)z, w\rangle$: $T_pM \times T_pM \times T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $\langle R(x,y)z,w\rangle + \langle R(y,z)x,w\rangle + \langle R(z,x)y,w\rangle = 0$

(b) $\langle R(x,y)z,w\rangle = -\langle R(y,x)z,w\rangle$

(c) $\langle R(x,y)z,w\rangle = -\langle R(x,y)w,z\rangle$

(d) $\langle R(x,y)z,w\rangle = \langle R(z,w)x,y\rangle$.

Tomando $\{e_1, ..., e_l\}$ uma base de T_pM, então a forma quadrilinear está associada a uma matriz R_{ijkl} onde escrevemos $R_{ijkl} = \langle R(e_i,e_j)e_k, e_l\rangle$. Para calcularmos a dimensão do espaço dos tensores de curvatura, basta verificarmos a quantidade de entradas livres desta matriz. Para isso, verifiquemos as condições (a), (b), (c) e (d) dividindo em três partes.

(i) Para satisfazer as condições (b) e (c) devemos ter $R_{ijkl} = -R_{jikl}$, $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$ o que nos deixa com apenas $\frac{n(n-1)}{2}$ entradas livres, quando fixados os dois primeiros ou os dois últimos índices. Neste caso, poderíamos tratar a matriz (R_{ijkl}) como uma matriz quadrada $\frac{n(n-1)}{2} \times \frac{n(n-1)}{2}$.

(ii) Satisfazendo as condições (b) e (c), acrescentemos, então, a condição (d), e devemos, portanto, ter $R_{ijkl} = R_{klij}$, o que torna a matriz uma matriz simétrica, ou seja, R_{ijkl} terá $\frac{n(n-1)}{4}(\frac{n(n-1)}{2}+1)$ entradas livres.

(iii) Acrescentando por fim a condição (a), devemos ter

$$R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0.$$

Observe que sempre que tivermos índices repetidos a condição (a) é satisfeita. Com efeito, como estamos trabalhando com permutações cíclicas dos três primeiros índices, basta verificarmos para os termos do tipo R_{iijk} e R_{ijkk}, que, de fato, temos

$$R_{iijk} + R_{ijik} + R_{jiik} = 0 \text{ e } R_{ijkk} + R_{jkik} + R_{kijk} = 0,$$

por satisfazerem as condições (b) e (c).

Fixando a atenção agora apenas nos termos onde todos os índices são diferentes temos então $n(n-1)(n-2)(n-3)$ no total, mas devem satisfazer as condições (b), (c) e (d), portanto temos $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$ termos livres. Para satisfazer a condição (a) devemos ter $R_{ijkl} = -(R_{jkil} + R_{kijl})$, ou seja, restam apenas $\frac{2}{3}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$ termos livres. Assim, precisamos retirar $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$ termos que satisfazem (b), (c) e (d) e não satisfazem (a) dos $\frac{n(n-1)}{4}\left(\frac{n(n-1)}{2}+1\right)$ termos que satisfazem (b), (c) e (d). Assim, obtemos

$$\frac{n(n-1)}{4}\left(\frac{n(n-1)}{2}+1\right) - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = \frac{n^2(n^2-1)}{12}$$

que é a dimensão do nosso espaço.

Referências Bibliográficas

[1] do Carmo, M. P. - *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides - IMPA, 2008.

[2] do Carmo, M. P. - *Notas de um curso de Grupos de Lie*. IMPA, Rio de Janeiro, 1974.

[3] Dubrovin, B. A., Fomenko, A. T., Novikov, A. P. - *Modern Geometry - Methods and Aplications, Part I. The Geometry of Surfaces, Transformation Groups, and Fields.* Graduate texts in mathematics: 93, New York, 1984

[4] Eliasson, H. I. - *On variations of metrics*. Math Scand. 29, p. 317-327, 1971.

[5] Leite, M. L., Miatello, I. D. - *A Geometric Property of Central Elements*. Math Z. 175, p. 139-141, 1980.

[6] Miatello, I. D., Leite, M. L. - *Métricas invariantes em grupos de Lie*. Recife, 1980.

[7] Milnor, J. - Curvartures of Left Invariant Metrics on Lie Groups, Advences in Mathematics 21, 1976, p. 293-329.

[8] Poor, W. A. - *Diferential geometric structures*. Dover Pub., 2007

[9] S. Helgason, - *Diferential Geometry and Simmetric Spaces,* Academic Press, New York, 1962.

[10] San Martin, L. A. B. - *Álgebras de Lie*. Editora Unicamp, 2010

[11] Warner, F.W - *Fundations of Diferentiable manifolds and Lie Goups*, Scoot - Foresman and Co., S. Francisco, 1971.

[12] Wolf, J. - *Curvature in nilpotent Lie groups*. Proc. Am. Math. Soc. 15, p. 271-274. 1964