Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Existência de Solução para o Problema de Equilíbrio via Condição de Palais-Smale.

Rui Marques Carvalho

Teresina - 2014

Rui Marques Carvalho

Dissertação de Mestrado:

Existência de Solução para o Problema de Equilíbrio via Condição de Palais-Smale.

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Paulo Sérgio Marques dos Santos

Teresina - 2014

Carvalho, R.M.

Existência de Solução para o Problema de Equilíbrio via Condição de Palais-Smale.

Rui Marques Carvalho – Teresina: 2014.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Sérgio Marques dos Santos.

1. Área de Concentração

CDD 516.36

Dedico este trabalho ao mestre do meu mestre, meu avô Valdemar Delmira. (In memoriam).

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pois ele é a base de tudo.

Aos meus pais,Maria e Francisco, por serem os principais responsáveis por todas as minhas conquistas.

Aos meus irmãos, Rayara e Ramon, por sempre estarem presentes.

A pequena Manuela por encher de alegria a minha vida.

Aos meus avós maternos, Manuel e Teresa, e os avós paternos, Rosa Deolinda(Dusanto) e Valdemar(in memoriam).

Aos meus Tios ,sem esquecer de mencionar Antônio e João (dandão), por vibrar a cada conquista.

Aos amigos transparentes: Lucas Carvalho, Allan, Danilo, João Paulo, Arnon, Pedro(Pedão) e Lucas Sorriso.

As amigas Luiza, Zilmara, Joicy e Lais, por sempre participar da minha vida.

Aos amigos de Parnaíba: Géssica, Joaquim (Aguiar),Gessiane,Flávia e Elívia por me receber tão bem.

Aos amigos Sandoel, Gilson, Carlos Adriano e Vitaliano por estarem presentes nos melhores e piores momentos.

Aos demais amigos do mestrado: Weslay, Alexandre, Ramon, Lucas Vidal, Emerson, Samara, Sérgio, Joel, Renata, Thiago, Atécio, Elianderson e Leonardo.

Aos amigos da graduação: Lucas Viana, Jordan, Kadu, Jerson, Aline, Elesbão, Lays, Mariane, Whanderson Bruno, Mário Sérgio, Antônio (veludo), Miguel e o Rodolfo (adotado da medicina). Amizades que pretendo levar pra sempre.

A todos os meus primos, tanto maternos (Geymma, Estêfane, Geyffre, Nemonh, Geylla, Geyllany ,Geyça, Israel e Glória) quanto paternos (Romara, Ana Paula, Carola, Raul, Eliane, Raniel, Eliene, Luis Ricardo, Victor ,Heitor e Igor), por serem além de primos, ótimos amigos e por poder considerá-los como irmãos também.

Ao tio Giovani, tia Isaura, Sarah e Samuel por serem a família que eu encontrei durante o mestrado.

Ao meu orientador, Paulo Sérgio, por ser além de um excelente orientador, um grande amigo.

A todos os professores do departamento de matemática , com ênfase maior aos professores do mestrado e ao professor Juscelino Silva por sempre acreditar.

Aos professores, Afonso e Xavier, por compor a banca.

Agradeço a CAPES e ao IFPI pelo apoio financeiro.

“*É preciso força pra sonhar e perceber que a estrada vai além do que se vê.*”.

Marcelo Camelo.

Resumo

No estudo de existência de solução para Problemas de Equilíbrio (PE), as hipóteses mais utilizadas são: a convexidade do domínio, a convexidade generalizada e a monotonicidade da função juntamente com alguma condição de continuidade fraca. Neste trabalho, apresentamos uma extensão dos conceitos de ponto crítico no sentido de Clarke e da Condição de Palais-Smale para funções de Equilíbrio. Usando essa abordagem, mostraremos a existência de solução para o (PE), primeiramente, assumindo que a função tem um ponto crítico no sentido de Clarke e, em segundo lugar, sob uma condição do tipo Palais-Smale para os casos monótono e não-monótono.

Palavra chave: Problema de Equilíbrio; Pontos Críticos; Condição de Palais-Smale.

Abstract

In the study of existence of solution for Equilibrium Problems (EP), the most widely used assumptions are: the convexity of the domain, the generalized convexity and monotonicity of the function along with some weak continuity condition. In this work, we present an extension of the concepts of critical point in the Clarke sense and the Palais-Smale condition for equilibrium functions. Using this approach, we show the existence of solution to (EP), first, by assuming that the function has a critical point in the Clarke sense and, secondly, under a Palais-Smale type condition for the monotone case and non monotone case.

Sumário

Introdução

Seja X um espaço normado real. $K \subset X$ um conjunto convexo não vazio, $D \subset X$ um aberto contendo K e

$$\phi : K \times D \longrightarrow \mathbb{R}$$

uma bifunção satisfazendo:

$$\phi(x, x) = 0 \quad \forall\, x \in K.$$

Conseideremos o seguinte problema de equilibrio:

(PE) Encontrar $\bar{x} \in K$ tal que $\phi(\bar{x}, y) \geqslant 0 \; \forall\, y \in K$.

Procuraremos solução para problemas de equilíbrio via condição de Palais-Smale, abordando de duas formas, o caso monótono e o caso não monótono. Estudaremos ainda solução para o problema de equilíbrio usando apenas a existência de pontos críticos e algumas hipóteses de convexidade sobre o domínio e sobre a função ϕ, que a partir de agora será nossa bifunção de equilíbrio em todo o trabalho.
Este texto foi baseado em Chadli, Chbani e Riachi, [2], com ajuda de Blum e Oettli, [1], e com uso das outras referências faremos a demonstração dos fatos mais importantes relacionados ao trabalho.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Neste capítulo apresentaremos as definições e resultados básicos que serão utilizados nos capítulos posteriores.

1.1 Noções Topológicas

Apresentaremos a seguir algumas definições e resultados importantes de topologia em um espaço de Banach.

Definição 1.1.1. *Um espaço métrico é um par* (X, d) *, onde* X *é um conjunto e* d *é uma métrica em* X *(ou função distância em* X*), que é, uma função definida de* $X \times X$ *tal que para todo* $x, y, z \in X$ *temos:*

(M1) d *assume valores reais, finitos e não negativos.*

(M2) $d(x, y) = 0$ *se , e somente se* $x = y$.

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$ *(Simétrica).*

(M4) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ *(Desigualdade triangular).*

Exemplo 1. ***A reta real*** $\mathbb{R}$***.***

O conjunto de todos os números reais, munido com a métrica usual definida por:

$$d(x, y) = |x - y|$$

é um espaço métrico.

Exemplo 2. ***O espaço euclidiano*** $\mathbb{R}^n$**.**
O conjunto obtido por todas n-uplas de números reais, escrevendo:

$$x = (x_1, ..., x_n), \qquad y = (y_1, ..., y_n)$$

munido com a métrica Euclidiana definida por:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$$

é um espaço métrico.

Exemplo 3. ***O espaço das funções*** $C[a, b]$**.**
O conjunto de todas as funções a valores reais , que dependem de t *e são definidas e contínuas no intervalo* $J = [a, b]$*. Com a métrica definida por:*

$$d(x, y) = \max_{t \in J} |x(t) - y(t)|$$

é um espaço métrico.

Definição 1.1.2. *Se* $x \in X$ *e* $r > 0$ *são fixos então definimos*

$$B(x; r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

$$B[x; r] = \{y \in X : d(x, y) \leqslant r\}$$

$B(x; r)$ *e* $B[x; r]$ *são chamados respectivamente de bola aberta e bola fechada, com centro em* x *e raio* r*.*

Definição 1.1.3. *Seja* (X, d) *um espaço métrico, um conjunto* $G \subset X$ *é aberto, se para cada* x *em* G *existe um* $\epsilon > 0$ *tal que* $B(x; \epsilon) \subset G$*.*

Exemplo 4. *O vazio e o próprio conjunto* X *são conjuntos abertos.*

Exemplo 5. *A bola aberta definida acima é um conjunto aberto.*

Proposição 1.1.1. *Seja* (X, d) *um espaço métrico; então:*
(a) Os conjuntos X *e* $\varnothing$ *são abertos;*
(b) Se $G_1, ..., G_n$ *são conjuntos abertos em* X *então* $\bigcap_{k=1}^{n} G_k$ *também é;*
(c) Se $\{G_j : j \in J\}$ *é uma coleção de abertos em* X*,* J *uma indexação qualquer de conjuntos, então* $G = \cup\{G_j : j \in J\}$ *também é aberto.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [4].

□

Definição 1.1.4. *Um conjunto* $F \subset X$ *é fechado se seu complementar,* $X - F$*, é aberto.*

Exemplo 6. *A bola fechada definida acima é um conjunto fechado.*

Proposição 1.1.2. *Seja* (X, d) *um espaço métrico; então:*

(a) Os conjuntos X *e* $\varnothing$ *são fechados;*

(b) Se $F_1, ..., F_n$ *são conjuntos fechados em* X *então* $\bigcup_{k=1}^{n} F_k$ *também é;*

(c) Se $\{F_j : j \in J\}$ *é uma coleção de fechados em* X*,* J *uma indexação qualquer de conjuntos, então* $G = \cap\{F_j : j \in J\}$ *também é fechado.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [4].

□

Definição 1.1.5. *Seja* (X, d) *um espaço métrico. Se* A *é um subconjunto de* X*, defini-se o diâmetro de* A *como sendo* $\sup\{d(x, y)|x, y \in A\}$ *caso* $A \neq \varnothing$ *e* 0 *caso contrário.*

Definição 1.1.6. *Seja* A *um subconjunto de* X*.*

(1) O interior de A*,* $\text{int}A$*, é o conjunto* $\bigcup\{G : \text{ com } G \text{ aberto e } G \subset A\}$*.*

(2) O fecho de A*,* $\overline{A}$ *, é o conjunto* $\bigcap\{F : \text{ com } F \text{ fechado e } F \supset A\}$*.*

(3) A fronteira de A *é denotada por* ∂A *é definida por* $\partial A = \bar{A} \cap \overline{(X - A)}$ *.*

(4) Um subconjunto A *de um espaço métrico* (X, d) *é denso se* $\overline{A} = X$*.*

Proposição 1.1.3. *Seja* A *subconjunto de um espaço métrico* (X, d)*. Então:*

(a) A *é aberto se , e somente se,* $A = \text{int}A$*;*

(b) A *é fechado se, e somente se,* $A = \overline{A}$*;*

(c) $x_0 \in \text{int}A$ *se, e somente se, existe* $\epsilon > 0$*, tal que* $B(x_0; \epsilon) \subset A$*;*

(d) $x_0 \in \overline{A}$ *se, e somente se, para todo* $\epsilon > 0$*,* $B(x_0; \epsilon) \cap A \neq \varnothing$*.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [4].

□

Definição 1.1.7. *Um conjunto* K *de um espaço métrico* X *é compacto se para toda coleção* $\mathbf{G}$ *de abertos de* X *com a propriedade*

$$K \subset \bigcup\{G : G \in \mathbf{G}\},$$

existir um número finitos de conjuntos $G_1, ..., G_n$ *em* $\mathbf{G}$ *tal que* $K \subset G_1 \cup G_2 \cup ... \cup G_n$. *Esta coleção de conjuntos é chamada de cobertura do conjunto* K*; se os membros da cobertura são conjuntos abertos então chamamos de cobertura aberta.*

Definição 1.1.8. *Uma sequência* (x_n) *em um espaço métrico* (X, d) *é uma função* $x : \mathbb{N} \to X$ *que associa cada natural* n *um elemento* $x_n \in X$. *Ela é dita convergente se existe um* $x_0 \in X$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0.$$

x_0 *é chamado de limite de* x_n *e nos escrevemos*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

ou simplismente,

$$x_n \to x_0.$$

Se (x_n) *não é convergente , a chamamos de divergente.*

Lema 1.1.1. *Seja* (X, d) *um espaço métrico, então:*
(a) Uma sequência convergente em X *é limitada e seu limite é único.*
(b) Se $x_n \to x$ *e* $y_n \to y$ *em* X*, então* $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [6].

□

Definição 1.1.9. *Uma sequência* (x_n) *em um espaço métrico* (X, d) *é dita de Cauchy se para todo* $\epsilon > 0$ *existe um* $N = N(\epsilon)$ *tal que*

$$d(x_m, x_n) < \epsilon \qquad\qquad \text{para todo } m, n > N.$$

O espaço X *é dito completo se toda sequência de Cauchy em* X *for convergente, isto é, tem um limite e ele pertence a* X.

Observação 1.1.1. *Toda sequência convergente em um espaço métrico é uma sequência de Cauchy.*

Exemplo 7. *O espaço* $\mathbb{Q}$ *com a métrica induzida da reta real não é completo.*

De fato, basta olhar para a sequência $x_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ pois sabemos que ela é de Cauchy e que $\lim x_n = e \notin \mathbb{Q}$.

Exemplo 8. *O conjunto dos números reais é completo.*

Lema 1.1.2. *Seja* (X, d) *um espaço métrico completo e* $F_n, n \in \mathbb{N}$, *uma sucessão decrescente de subconjuntos fechados não vazios cujos diâmetros tendem a zero, isto é ,*

$$F_n \supset F_{n+1} \text{ e } \mathrm{diam} F_n \to 0,$$

então existe um único ponto $x \in X$ *tal que*

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} F_n = \{x\}.$$

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, escolhemos um ponto $x_n \in F_n$. Demonstraremos que (x_n) é uma sequência de Cauchy em X. Com efeito, dado $\epsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande , tal que $\mathrm{diam} F_{N_0} < \epsilon$.
Se $n \geqslant N_0$ e $m \geqslant N_0$, como $F_n \subset F_{N_0}$ e $F_m \subset F_{N_0}$ segue que $x_n \in F_{N_0}$ e $x_m \in F_{N_0}$, portanto

$$d(x_n, x_m) \leqslant \mathrm{diam} F_{N_0} < \epsilon.$$

Logo (x_n) é uma sequência de Cauchy em X e como X é completo, existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$.
Dado qualquer F_n , ele contém todos os termos da sequência, exceto um número finito deles, e F_n é fechado, assim temos

$$x \in F_n \forall n \in \mathbb{N}, \text{ portanto } x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_n.$$

Vejamos que x é o único ponto da intersecção de todos os F_n. Com efeito, se existe outro ponto $y \in X$, tal que

$$y \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_n,$$

então x e y pertencem a todos os F_n, portanto $d(x, y) \leqslant \mathrm{diam} F_n \forall n \in \mathbb{N}$. Como $\mathrm{diam} F_n \to 0$ segue que $d(x, y) = 0$, logo $x = y$.

□

Definição 1.1.10. *Uma subsequência de* (x_n), (x_{n_k}), *é a restrição desta função ao subconjunto infinito de* $\mathbb{N}$

$$N' = \{n_1 < n_2 < ... < n_j < ...\} \subset \mathbb{N}.$$

Definição 1.1.11. *Diz-se que* a *é aderente a* X *, quando existe* $(x_n) \subset X$ *tal que* $x_n \to a$.

Nos capítulos posteriores trabalharemos com funções definidas em espaços de Banhach assumindo valores reais, para isso faremos um breve estudo sobre sequência de números reais.

Definição 1.1.12. *Sejam* $(x_n) \subset \mathbb{R}$ *uma sequência limitada,e* A *o conjunto dos valores de aderência, definimos:*
(a) $\liminf x_n = \inf A$.
(b) $\limsup x_n = \sup A$.

Definição 1.1.13. *Dizemos que* $f: \ X \longmapsto \ Y$ *é contínua se para toda sequência* $x_n \to x$ *tivermos* $f(x_n) \to f(x)$.

Definição 1.1.14. *Uma norma em um espaço vetorial (real ou complexo)* X *é uma aplicação de* X *a valores reais, onde para cada* $x \in X$ *denotamos por* $||x||$ *a norma de* x *e a aplicação satisfaz as segintes propriedades:*

N1 $||x|| \geqslant 0$*;*

N2 $||x|| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$*;*

N3 $||\alpha x|| = |\alpha|||x||$*;*

N4 $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$ *(Desigualdade Triangular).*

Onde x *e* y *são vetores quaisquer de* X *e* α *um escalar qualquer.*

Definição 1.1.15. *Um espaço vetorial normado* X *é um espaço vetorial com uma norma definida. Um espaço de Banach é um espaço normado completo.*

Definição 1.1.16. *Dizemos que* $f : X \to \mathbb{R}$ *é sublinear quando:*
i)$f(\alpha x) = \alpha f(x), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}_+$ *(Homogênea Positiva)*
ii)$f(x + y) \leqslant f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in X$ *(Subaditiva)*

1.2 Noções de Convexidade

Apresentaremos agora alguns resultados de análise convexa .

Definição 1.2.1. *Um conjunto* $D \subset X$ *é chamado convexo se , para quaisquer* $x, y \in D$ *e* $\alpha \in [0,1]$*, tem-se:*

$$\alpha x + (1-\alpha)y \ \in D$$

O ponto $\alpha x + (1-\alpha)y$*, se chama combinação convexa de* x *e* y *(com parâmetro* α*).*

Definição 1.2.2. *O fecho convexo de um conjunto* $D \subset X$ *,* $\mathrm{co}(D)$*, é o menor conjunto convexo em* X *que contém* D*, isto é, é a interseção de todos os conjuntos convexos em* X *que contém* D*.*

Definição 1.2.3. *Se* $D \subset X$ *é convexo, diz-se que* $f : D \subset X \longrightarrow \mathbb{R}$ *é convexa em* D *quando, para quaisquer* $x, y \ \in D$ *e* $\alpha \in [0,1]$*, tem-se:*

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leqslant \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

A função f *diz-se estritamente convexa quando a desigualdade acima é estrita para todos* $x \neq y$ *e* $\alpha \in (0,1)$*.*

Definição 1.2.4. *Seja* $D \subset X$ *um conjunto convexo. Dizemos que* $f : D \subset X \to \mathbb{R}$ *é quaseconvexa em* D *se, e somente se,*

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leqslant \max\{f(x), f(y)\}$$

$\forall\ x, y \ \in D$*,* $\forall\ \alpha \in [0,1]$*.*

Definição 1.2.5. *Dizemos que* f *é côncava se, e somente se,* $-f$ *é convexa.*

Faremos agora um breve estudo de convexida em $\mathbb{R}^n$ que será necessária como fundamentação teórica futuramente.

Definição 1.2.6. *Um hiperplano do* $\mathbb{R}^n$ *é um conjunto da forma* $H = \{x \in \mathbb{R}^n | \langle a, x\rangle = c\}$*, onde* $a \in \mathbb{R}^n$ *e* $c \in \mathbb{R}$*.*

Definição 1.2.7. *Sejam* D_1 *e* D_2 *conjuntos não vazios em* $\mathbb{R}^n$ *dizemos que o hiperplano* $H(a, c)$ *separa os conjuntos* D_1 *e* D_2 *se*

$$\langle a, x^1\rangle \leqslant c \leqslant \langle a, x^2\rangle \ \ \forall x^1 \in D_1,\ \forall x^2 \in D_2.$$

Dizemos que $H(a, c)$ *separa estritamente* D_1 *e* D_2 *quando as desigualdades acima são estritas.*

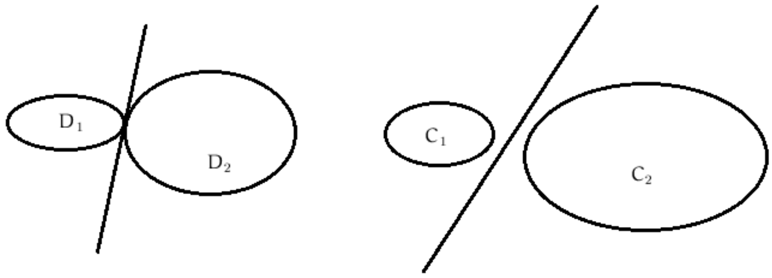

Figura 1.1: Conjuntos separáveis

A noção de separação de conjuntos é muito importante. No sentido geométrico, separação significa que um dos conjuntos fica de um lado do hiperplano e o outro do outro lado, conforme a Figura 1.1.

Os conjuntos D_1 e D_2 são separáveis e os conjuntos C_1 e C_2 são estritamente separáveis. Como podemos observar fazendo os desenhos , a possibilidade de separar dois conjuntos dados está ligado ao fato da interseção deles ser vazia ou não e a convexidade deles observe as Figuras 1.1 e 1.2.

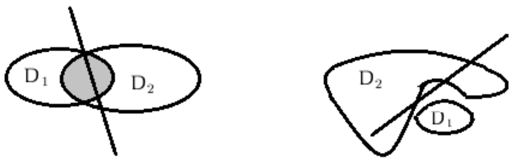

Figura 1.2: Conjuntos não separáveis

Os conjuntos D_1 e D_2 da Figura 1.2 não são separáveis. Enunciaremos um teorema que garante a existência de um hiperplano separando dois conjuntos.

Teorema 1.2.1. ***(Teorema de Separação)***
Sejam $D_1 \subset \mathbb{R}^n$ *e* $D_2 \subset \mathbb{R}^n$ *conjuntos convexos não vazios e dijuntos. Então existe* $a \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ *tais que*

$$\langle a, x^1 \rangle \leqslant c \leqslant \langle a, x^2 \rangle \quad \forall x^1 \in D_1, \ \forall x^2 \in D_2.$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [5].

□

1.3 Semicontinuidade de Funções

Apresentaremos aqui um estudo sobre semicontinuidade, que enfraquece o conceito de continuidade.

Definição 1.3.1. *Dizemos que a função* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *é semicontínua inferiormente, sci, no ponto* x *quando, para toda sequência* $(x_n) \subset X$ *tal que* $\lim x_n = x$*, tem-se*

$$\liminf f(x_n) \geqslant f(x).$$

Analogamente, dizemos que f *é semicontínua superiormente, scs, no ponto* x *quando, para toda sequência* $(x_n) \subset X$ *tal que* $\lim x_n = x$*, tem-se*

$$\limsup f(x_n) \leqslant f(x).$$

Dizemos que f *é sci em* X *se o é em cada ponto de* X*. Da mesma forma,* f *é scs em* X *se o é em cada ponto de* X*.*

Observamos que uma função f é sci em X se, e somente se, $-f$ é scs em X.

Proposição 1.3.1. *Sejam* $D \subset X$*,* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $a \in D$*. Então* f *é contínua em* a *se, e somente se,* f *é sci e scs em* a*. Particularmente,* f *é contínua em* D *se, e somente se,* f *é sci e scs em D.*

Demonstração. Suponha f contínua em $a \in D$. Considere a seqüência $(x_n) \in D$ tal que $\lim x_n = a$. Pela definição de continuidade tem-se

$$\liminf f(x_n) = \limsup f(x_n) = \mathtt{lim} f(x_n) = f(a).$$

Em particular, $\liminf f(x_n) \geqslant f(a)$ e $\limsup f(x_n) \leqslant f(a)$, mostrando que f é sci e scs em a, respectivamente.
Agora se f é sci e scs em a, seja $(x_n) \subset D$ tal que $\lim x_n = a$. Então

$$\limsup f(x_n) \geqslant \liminf f(x_n) \geqslant f(a) \geqslant \limsup f(x_n).$$

Portanto $\limsup f(x_n) = \liminf f(x_n) = f(a)$, isto é, $\mathtt{lim} f(x_n) = f(a)$, o que por definição mostra que f contínua em a.

□

Proposição 1.3.2. *Se* $f; g : D \subset X \longrightarrow \mathbb{R}$ *são funções sci e* $\alpha > 0$ *então* $f + g$ *e* αf *também são sci.*

Demonstração. Seja $(x_n) \subset D$ tal que $\lim x_n = x \in D$. Então pela semicontinuidade inferior de f e g

$$\liminf f(x_n) \geqslant f(x) \;\text{ e }\; \liminf g(x_n) \geqslant g(x):$$

Como $\liminf (f+g)(x_n) \geqslant \lim f(x_n) + \lim g(x_n)$ e usando as desigualdades acima temos

$$\liminf (f+g)(x_n) \geqslant f(x) + g(x).$$

Portanto $f+g$ é sci.

Quanto à αf temos

$$\liminf(\alpha f(x_n)) \geqslant \alpha \liminf f(x_n) \geqslant \alpha f(x)$$

pois $\alpha > 0$. Logo αf também é sci.

$\square$

Capítulo 2

Noção de Pontos Críticos para Problemas de Equilíbrio

2.1 A Derivada de Clarke

Definição 2.1.1. *Uma bifunção* ϕ *é dita localmente Lipschitz com respeito a segunda variável se* $\forall\ y \in K$ *existir* $L_y > 0$ *e uma vizinhança* $U_y \subset D$ *de* y *tal que*

$$|\phi(x, y') - \phi(x, y'')| \leqslant L_y \|y' - y''\|$$

para todos $y', y'' \in U_y$ *e* $x \in K \cap U_y$.

A família de bifunções $\phi : K \times D \longrightarrow \mathbb{R}$ com a propriedade acima é denotada por $\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(K)$.

Exemplo 9. *Seja* ϕ *uma bifunção definida por:*

$$\phi(x, y) = \langle T(x), y - x \rangle$$

onde T *é um operador não linear. A definição acima é satisfeita desde que* T *seja localmente limitado.*

Definição 2.1.2. *Seja* $\phi \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(K)$. *Para todo* $x \in K$ *e* $h \in X$, *a derivada generalizada tipo Clarke de* ϕ *no ponto* (x, x) *com respeito a segunda variável na direção* h *é definida por:*

$$\phi^0(x, x)(h) = \limsup_{\substack{t \to 0^+ \\ (u,v) \to (x,x) \\ v \in K}} \frac{\phi(u, v + th) - \phi(u, v)}{t}$$

No proximo Lema, daremos algumas propriedades de ϕ^0 que precisaremos na sequência.

Lema 2.1.1. *Seja* $\phi \in \mathrm{Lip}_{loc}(K)$. *Então :*

i) Para cada $x \in K$, *a função* $h \longmapsto \phi^0(x,x)(h)$ *é sublinear, lipschitz e contínua em* X;

ii) A função $(x,x,h) \longmapsto \phi^0(x,x)(h)$ *é semicontínua superiormente em* $K \times K \times X$.

Demonstração. Seja $x \in K$ fixado. Podemos mostrar que a função $h \longmapsto \phi^0(x,x)(h)$ é homogênea positiva , basta fazer uma mudança de variável no limite.

Precisamos mostrar somente que $h \longmapsto \phi^0(x,x)(h)$ é subaditiva. Para isso tome $h, w \in X$ então

$$\phi^0(x,x)(h+w) = \limsup_{\substack{t\to 0^+ \\ (u,v)\to(x,x)}} \frac{\phi(u,v+th+tw)-\phi(u,v)}{t}$$

$$= \limsup_{\substack{t\to 0^+ \\ (u,v)\to(x,x)}} \frac{\phi(u,v+th+tw)-\phi(u,v+tw)+\phi(u,v+tw)-\phi(u,v)}{t}$$

$$\leqslant \limsup_{\substack{t\to 0^+ \\ (u,v)\to(x,x)}} \frac{\phi(u,v+th+tw)-\phi(u,v+tw)}{t}$$

$$+ \limsup_{\substack{t\to 0^+ \\ (u,v)\to(x,x)}} \frac{\phi(u,v+tw)-\phi(u,v)}{t}$$

$$= \phi^0(x,x)(h) + \phi^0(x,x)(w).$$

Por outro lado, como ϕ é localmente Lipschitz, temos:

$$\frac{\phi(u,v+th)-\phi(u,v)}{t} \leqslant L_y\|h\| \quad , t > o.$$

Que tomando o limite superior da definição nos dá

$$\phi^0(x,x)(h) \leqslant L_y\|h\| \ \forall h \in X.$$

Usando a subaditividade temos:

$$\phi^0(x,x)(w-h+h) \leqslant \phi^0(x,x)(w-h) + \phi^0(x,x)(h)$$

$$\phi^0(x,x)(w) - \phi^0(x,x)(h) \leqslant \phi^0(x,x)(w-h) \leqslant L_y\|w-h\|$$

de forma análoga temos:

$$\phi^0(x,x)(h-w+w) \leqslant \phi^0(x,x)(h-w) + \phi^0(x,x)(w)$$

$$\phi^0(x,x)(h) - \phi^0(x,x)(w) \leqslant \phi^0(x,x)(h-w) \leqslant L_y\|h-w\|$$

Assim,

$$|\phi^0(x,x)(h) - \phi^0(x,x)(w)| \leqslant L_y\|w-h\|$$

o que completa a demonstração da parte i).

Agora provaremos ii),

Seja $x \in K$, $h \in X$ e considere $\{x_n\},\{h_n\}$ sequências em K, e em X respectivamente , com $x_n \to x$ e $h_n \to h$. Pela definição de ϕ^0, existem sequências $t_n > 0$, $u_n \in K$, $v_n \in K$, tal que

$$t_n < \frac{1}{n}, \quad \|u_n - x_n\| < \frac{1}{n}, \quad \|v_n - x_n\| < \frac{1}{n}$$

e

$$\phi^0(x_n,x_n)(h_n) - \frac{1}{n} \leqslant \frac{\phi(u_n, v_n + t_n h_n) - \phi(u_n, v_n)}{t_n}$$

Para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande , temos $v_n + t_n h_n \ \in U_y$ e assim

$$|\phi(u_n, v_n + t_n h_n) - \phi(u_n, v_n + t_n h)| \leqslant t_n\|h_n - h\|$$

e ainda

$$\phi^0(x_n,y_n)(h_n) - \frac{1}{n} - t_n\|h_n - h\| \leqslant \frac{\phi(u_n, v_n + t_n h) - \phi(u_n, v_n)}{t_n}$$

Passando o lim sup quando $n \to \infty$ na inequação obtemos

$$\limsup_{n\to\infty}(x_n,x_n)(h_n) \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{\phi(u_n, v_n + t_n h) - \phi(u_n, v_n)}{t_n} = \phi^0(x,x)(h)$$

Que completa a demonstração de ii).

□

2.2 Pontos Criticos e Solução do Problema de Equilíbrio

Introduziremos agora a noção de ponto crítico para problemas de equilíbrio.

Definição 2.2.1. *Um ponto $\overline{x} \in K$ é chamado ponto crítico de ϕ, se*

$$\phi^0(\overline{x},\overline{x})(h) \geqslant 0, \quad \forall\ h \in K - \{\overline{x}\}.$$

Definição 2.2.2. *Um ponto* $\overline{x} \in K$ *é chamado ponto crítico estrito de* ϕ*, se*

$$\phi^0(\overline{x}, \overline{x})(h) > 0, \quad \forall\ h \in K - \{\overline{x}\}, \quad \text{com} \ \ h \neq 0.$$

Proposição 2.2.1. *Seja* $\phi \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(K)$ *e* $\overline{x}$ *um ponto crítico estrito de* ϕ*. Assuma que:*
i) Para todo $x \in K$ *fixo,* $y \longmapsto \phi(x, y)$ *é quaseconvexa em* K*;*
ii) Para todo $y \in K$ *fixo,* $x \longmapsto \phi(x, y)$ *é contínua em* K*.*

Então $\overline{x}$ *é uma solução do Problema de Equilíbrio.*

Demonstração. Seja $\overline{x}$ um ponto crítico extrito de ϕ, então

$$\phi^0(\overline{x}, \overline{x})(h) > 0 \qquad \forall\ h \in K - \{\overline{x}\} \text{ com } h \neq 0.$$

Seja $\{t_n\}, \{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sequências tais que $t_n \searrow 0^+$, $x_n \to \overline{x}$, $y_n \to \overline{x}$ e

$$\phi^0(\overline{x}, \overline{x})(h) = \lim_{n \to \infty} \frac{\phi(x_n, y_n + t_n h) - \phi(x_n, y_n)}{t_n} > 0.$$

Como $y \longmapsto \phi(x, y)$ é quase convexa, então:

$$\phi(x_n, y_n + t_n h) \leqslant \max\{\phi(x_n, y_n + h), \phi(x_n, y_n)\}$$

assim

$$\frac{\phi(x_n, y_n + t_n h) - \phi(x_n, y_n)}{t_n} \leqslant \frac{1}{t_n} \max\{\phi(x_n, y_n + h) - \phi(x_n, y_n), 0\}. \qquad (*)$$

Por outro lado dado $\epsilon > 0$ com $\epsilon < \phi^0(\overline{x}, \overline{x})(h)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n > N$ temos

$$\frac{\phi(x_n, y_n + t_n h) - \phi(x_n, y_n)}{t_n} > \phi^0(\overline{x}, \overline{x})(h) - \epsilon.$$

Tendo em conta $(*)$ temos

$$\max\{\phi(x_n, y_n + h) - \phi(x_n, y_n), 0\} > t_n(\phi^0(\overline{x}, \overline{x})(h) - \epsilon) > 0.$$

Assim, $\phi(x_n, y_n + h) - \phi(x_n, y_n) > 0\ \forall\ n > N$. Portanto,

$$\limsup_{n \to \infty} \phi(x_n, y_n + h) \geqslant \limsup_{n \to \infty} \phi(x_n, y_n).$$

Usando (ii) temos

$$\phi(\overline{x}, \overline{x} + h) \geqslant \phi(\overline{x}, \overline{x}) = 0.$$

Assim, $\overline{x}$ é uma solução do Problema de Equilíbrio.

□

Definição 2.2.3. *Seja* $f : K \to \mathbb{R}$ *uma função localmente lipschitz. Então* f *é chamada pseudoconvexa se para todos* $x, y \in K$ *tivermos a seguinte implicação:*

$$f^0(x)(y-x) \geqslant 0 \Rightarrow f(z) \leqslant f(y) \qquad \forall z \in [x, y].$$

Inspirada na definição anterior, nós introduziremos na próxima definição a noção de pseudoconvexidade para a classe das bifunções $\phi \in \mathrm{Lip}_{loc}K$.

Definição 2.2.4. *Seja* $\phi \in \mathrm{Lip}_{loc}K$*,* ϕ *é chamada de pseudoconvexa se para todo* $x, y \in K$ *tivermos a seguinte implicação:*

$$\phi^0(x, x)(y-x) \geqslant 0 \Rightarrow \phi(x, tx + (1-t)y) \leqslant \phi(x, y) \qquad \forall t \in [0, 1]$$

Observação 2.2.1. *Se* $\phi(x, y) = f(y) - f(x)$ *onde* $f : K \to \mathbb{R}$ *é localmente lipschitz, podemos verificar que* f *ser pseudoconvexa é equivalente a* ϕ *ser pseudoconvexa.*

Proposição 2.2.2. *Seja* $\phi \in \mathrm{Lip}_{loc}K$ *e* $\bar{x}$ *um ponto crítico de* ϕ*. Assuma que* ϕ *é pseudoconvexa, então* $\bar{x}$ *é solução do (P.E).*

Demonstração. Seja $\bar{x}$ um ponto crítico de ϕ então

$$\phi^0(\bar{x}, \bar{x})(y - \bar{x}) \geqslant 0, \qquad \forall y \in K.$$

Por outro lado a bifunção é pseudoconvexa, então para $y \in K$ e para todo $t \in [0, 1]$,

$$\phi(\bar{x}, t\bar{x} + (1-t)y) \leqslant \phi(\bar{x}, y).$$

Se $t = 1$, obtemos

$$0 = \phi(\bar{x}, \bar{x}) \leqslant \phi(\bar{x}, y).$$

Assim $\bar{x}$ é solução do (P.E).

□

2.3 A Condição de Palais-Smale

Apresentaremos agora a condição de Palais-Smale para funções.

Definição 2.3.1. *Seja* $f : X \to \mathbb{R}$ *um funcional localmente lipschitz. Dizemos que* f *satisfaz a condição de Palais-Smale se para toda sequência* $\{u_n\} \subset X$ *tal que* $\{f(u_n)\}$ *é limitada e*

$$f^0(u_n)(v - u_n) \geqslant -\epsilon_n \|v - u_n\| \qquad \forall v \in X$$

com a sequência $\{\epsilon_n\} \subset \mathbb{R}^+$ *e* $\lim_{n\to 0} \epsilon_n = 0$*,* $\{u_n\}$ *contém uma subsequência convergente, onde* f^0 *é a derivada de Clarke.*

A extensão da condição de Palais-Smale para o caso de bifunções pode ser dada pela seguinte definição:

Definição 2.3.2. *Seja* $\phi \in \mathrm{Lip}_{loc} K$*, dizemos que* ϕ *satisfaz a condição de Palais-Smale se para toda sequência* $\{u_n\} \subset K$ *tal que a sequência* $\{\inf_{v \in K} \phi(u_n, v)\}$ *é limitada por baixo e*

$$\phi^0(u_n, u_n)(h) \geqslant -\epsilon_n \|h\|, \qquad \forall h \in K - \{u_n\},$$

para a sequência $\{\epsilon_n\} \subset \mathbb{R}^+$ *com* $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$*,* $\{u_n\}$ *contém uma subsequência convergente.*

Definição 2.3.3. *Dizemos que* $f : K \to \mathbb{R}$ *é coerciva se, e somente se,*

$$\|x_n\| \to +\infty \Longrightarrow \limsup_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$$

Baseado nessa definição extendemos para o caso de bifunções.

Definição 2.3.4. *Uma bifunção* $\phi : K \times K \to \mathbb{R}$ *é dita coerciva se existe* $a \in K$ *tal que*

$$\phi(u, a) \to -\infty \quad \textit{quando} \quad \|u - a\| \to +\infty.$$

Observação 2.3.1. *Basta olhar para* $\phi(u, a) = f(a) - f(u)$*, daí vemos que* ϕ *é coerciva se, e somente se,* f *é.*

Assim obtemos a seguinte propriedade:

Proposição 2.3.1. *Seja* $\phi \in \mathsf{Lip}_{\mathsf{loc}}\mathsf{K}$*, se* ϕ *é coerciva então ela satisfaz a condição de Palais- Smale.*

Demonstração. Suponha o contrário, então existe $\{u_n\} \subset K$ tal que $\{\inf\limits_{v\in K} \phi(u_n, v)\}$ é limitada e

$$\phi^0(u_n, u_n)(h) \geqslant -\epsilon_n \|h\|, \qquad \forall h \in K - u_n,$$

para $\{\epsilon_n\} \subset \mathbb{R}^+$ com $\lim \epsilon_n = 0$, e $\{u_n\}$, não tem uma subsequência convergente.

Como ϕ é coerciva, então $\phi(u_n, a) \to -\infty$ quando $n \to \infty$. Por outro lado, temos

$$\inf_{v\in K} \phi(u_n, v) \leqslant \phi(u_n, a)$$

então $\inf\limits_{v\in K} \phi(u_n, v) \longrightarrow -\infty$ quando $n \to +\infty$. Contradizendo o fato de $\{\inf\limits_{v\in K} \phi(u_n, v)\}$ ser limitada.

$\square$

Capítulo 3

Existência de Solução do Problema de Equilíbrio

Estudaremos agora a existência de solução do problema de equilíbrio sujeito algumas condições.

3.1 Existência de Solução no Caso Monótono

Lema 3.1.1. *(Ekeland)*
Assuma que f *é uma função propria semicontinua inferiormente em um espaço de Banach* X. *Suponha que* $\varepsilon > 0$ *e que* $f(x_0) < \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon$. *Então para todo* λ *com* $0 < \lambda < 1$ *existe* $z \in \operatorname{dom}(f)$ *tal que:*

i) $\lambda \|z - x_0\| \leqslant f(x_0) - f(z)$;

ii) $\|z - x_0\| < \frac{\varepsilon}{\lambda}$;

iii) $f(z) < f(x) + \lambda \|x - z\|$ *sempre que* $x \neq z$.

Demonstração. Para $\lambda > 0$, definimos a seguinte relação em X:

$$u \leqslant v \Longleftrightarrow f(u) \leqslant f(v) - \frac{\varepsilon}{\lambda}\|u - v\|$$

Provaremos inicialmente que esta relação é de ordem parcial. Claramente $u \leqslant u$, assim a relação é reflexiva.

A relação é antisimétrica. Com efeito, se $u \leqslant v$ e $v \leqslant u$ então:

$$f(u) \leqslant f(v) - \frac{\varepsilon}{\lambda}\|u-v\| \;\; e \;\; f(v) \leqslant f(u) - \frac{\varepsilon}{\lambda}\|u-v\|$$

e portanto

$$f(u) + f(v) \leqslant f(u) + f(v) - 2\frac{\varepsilon}{\lambda}\|u-v\|$$

logo $\|u-v\| = 0$ e assim $u = v$.

A relação é transitiva. Com efeito, se $u \leqslant v$ e $v \leqslant w$ então

$$f(u) \leqslant f(v) - \frac{\varepsilon}{\lambda}\|u-v\| \;\; e \;\; f(v) \leqslant f(w) - \frac{\varepsilon}{\lambda}\|v-w\|$$

logo

$$f(u) \leqslant f(w) - \frac{\varepsilon}{\lambda}\left(\|u-v\| + \|v-w\|\right)$$
$$f(u) \leqslant f(w) - \frac{\varepsilon}{\lambda}\|u-v\|$$

assim, concluimos que $u \leqslant w$.

Definimos uma sucessão (s_n) de subconjuntos de X da seguinte maneira.Tomemos $u_0 = X_0$ e seja

$$S_0 = \{u \in X; u \leqslant u_0\}$$

Pela definição de ínfimo existe $u_1 \in S_0$ tal que

$$f(u_1) \leqslant \inf_{S_0} f + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Definamos $S_1 = \{u \in X; u \leqslant u_1\}$. Obviamente $S_1 \subset S_0$ e continuando assim construímos os conjuntos S_n, com

$$S_n = \{u \in X; u \leqslant u_n\}$$

e os pontos

$$u_{n+1} \in S_n \;\; tais \;\; que \;\; f(u_{n+1}) \leqslant \inf_{S_n} f + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Portanto

$$S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset \cdots$$

Provaremos que cada S_n é fechado. Com efeito, se $(x_j) \subset S_n$ e $x_j \to x \in X$ então

$$f(x_j) \leqslant f(u_n) - \frac{\varepsilon}{\lambda}\|x_j - u_n\|$$

tomando limite innferior e usando que f é semicontínua inferiormente temos que:

$$f(x) \leqslant \liminf_{j\to+\infty} f(x_j) \leqslant \liminf_{j\to+\infty} \left(f(u_n) - \frac{\varepsilon}{\lambda}\|x_j - u_n\|\right) = f(u_n) - \lim_{j\to+\infty} \frac{\varepsilon}{\lambda}\|x_j - u_n\|$$

usando a continuidade do módulo, temos:

$$f(x) \leqslant f(u_n) - \frac{\varepsilon}{\lambda}\|x - u_n\|.$$

Portanto, $x \leqslant u_n$, e $x \in S_n$. Assim provamos que S_n é fechado.

Demonstraremos agora que $\mathrm{diam}\ S_n \to 0$. Com efeito, se $x \in S_n$, $x \leqslant u_n$, então

$$f(x) \leqslant f(u_n) - \frac{\varepsilon}{\lambda}\|x - u_n\|$$

agora

$$f(u_n) \leqslant \inf_{S_{n-1}} f + \frac{\varepsilon}{2^n} \leqslant f(x) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

já que $x \in S_{n-1}$. Juntando com a desigualdade anterior temos:

$$\|x - u_n\| \leqslant \lambda\, 2^{-n}$$

logo se $x, y \in S_n$, então $\|x - y\| \leqslant \|x - u_n\| + \|y - u_n\|$ implicando $\|x - y\| \leqslant \lambda\, 2^{-n+1}$, logo

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{diam}\ S_n = 0.$$

Aplicando o Lema 1.1.2, temos que existe um único elemento $z \in X$ tal que

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} S_n = \{z\}$$

Note que:

Como $z \in S_0$ segue que $z \leqslant x_0$, portanto, $f(z) \leqslant f(x_0) - \frac{\varepsilon}{\lambda}\|z - x_0\|$ ou ainda

$$\frac{\varepsilon}{\lambda}\|z - x_0\| \leqslant f(x_0) - f(z). \qquad (*)$$

Seja $x \in X$ com $x \neq z$, afirmamos que $x \nleqslant z$, por que se $x \leqslant z$, com $z \leqslant u_n \quad \forall n$ teriamos $x \leqslant u_n \quad \forall n$, logo $x \in S_n \quad \forall n$, assim $\bigcap_{n=0}^{\infty} S_n = \{z\}$, assim $x = z$, absurdo!

Portanto $x \nleqslant z$, assim:

$$f(x) > f(z) - \frac{\varepsilon}{\lambda}\|x - z\|$$

ou seja

$$f(z) < f(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda}\|z - x\| \quad \forall x \neq z \qquad (***)$$

Como

$$\frac{\|x_0 - u_n\|}{\lambda} \leqslant \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda}\|u_j - u_{j+1}\| \leqslant \sum_{j=1}^{n-1} 2^{-j}$$

tomando limite quando $n \to \infty$, com $u_n \to z$ e $\sum 2^{-j} = 1$, temos

$$\|x_0 - z\| \leqslant \lambda \qquad (**)$$

sem perda de generalidade, tome $\hat{\lambda}$, com $0 < \varepsilon < \hat{\lambda}$, assim temos :

$(*)$ $\frac{\varepsilon}{\hat{\lambda}}\|z - x_0\| \leqslant f(x_0) - f(z)$;

$(**)$ $\|z - x_0\| \leqslant \hat{\lambda}$;

$(***)$ $f(z) < f(x) + \frac{\varepsilon}{\hat{\lambda}}\|z - x\| \quad \forall x \neq z$.

faça $\lambda = \frac{\varepsilon}{\hat{\lambda}}$, observe que $0 < \lambda < 1$ e encerra a demonstração.

□

Lema 3.1.2. *Assuma que $K \subset X$ é um conjunto fechado, onde X é um espaço normado e $\phi : K \times K \to \mathbb{R}$. Suponha que ϕ satisfaz as seguintes suposições:*

i) Para $x \in K$ fixo, a função $\phi(x, .)$ é limitada inferiormente e semicontínua inferiormente;

ii) Para todo $x \in K$, $\phi(x, x) = 0$;

iii) Para todo $x, y, z \in K$, $\phi(x, y) \leqslant \phi(x, z) + \phi(z, y)$.

Então, para $\varepsilon > 0$ e para todo $x_0 \in K$, existe $\bar{x} \in K$ tal que

(a) $\phi(x_0, x) + \varepsilon\|x_o - \bar{x}\| \leqslant 0$

(b) $\phi(\bar{x}, x) + \varepsilon\|\bar{x} - x\| > 0, \quad \forall x \in K,\ x \neq \bar{x}$.

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos tomar o caso $\varepsilon = 1$.

Denote por $F(x)$ o conjunto:

$$F(x) := \{y \in K;\ \phi(x, y) + \|y - x\| \leqslant 0\}$$

Por (i), $F(x)$ é fechado, $\forall x \in K$, por (ii) $x \in F(x)$, assim $F(x)$ não é vazio para todo $x \in K$.

Assuma que $y \in F(x)$, isto é, $\phi(x, y) + \|y - x\| \leqslant 0$, e seja $z \in F(y)$, isto é, $\phi(y, z) + \|y - z\| \leqslant 0$, Somando ambos os lados, usando (iii) e a desigualdade triangular temos:

$$0 \geqslant \phi(x, y) + \|y - x\| + \phi(y, z) + \|y - z\| \geqslant \phi(x, z) + \|z - x\|$$

isto é, $z \in F(x)$.

Portanto $y \in F(x)$ implica $F(y) \subseteq F(x)$.

Defina

$$\nu(x) := \inf_{z \in F(x)} \phi(x, z)$$

Para todo $z \in F(x)$,

$$\|x - z\| \leqslant -\phi(x, z) \leqslant \sup_{z \in F(x)} (-\phi(x, z)) = -\inf_{z \in F(x)} \phi(x, z) = -\nu(x),$$

isto é $\|x - z\| \leqslant -\nu(x), \quad \forall z \in F(x)$.

Em particular, se $x_1, x_2 \in F(x)$,

$$\|x_1 - x_2\| \leqslant \|x - x_1\| + \|x - x_2\| \leqslant -\nu(x) - \nu(x) = -2\nu(x)$$

implicando que

$$\mathrm{diam}\,(F(x)) \leqslant -2\nu(x), \qquad \forall x \in K.$$

Fixando $x_0 \in D$, existe $x_1 \in F(x_0)$ tal que

$$\phi(x_0, x_1) \leqslant \nu(x_0) + 2^{-1}$$

Denote por x_2, qualquer ponto de $F(x_1)$ tal que

$$\phi(x_1, x_2) \leqslant \nu(x_1) + 2^{-2}.$$

Prosseguindo analogamente obtemos uma sequência de pontos $\{x_n\}$ de K tal que $x_{n+1} \in F(x_n)$ e

$$\phi(x_n, x_{n+1}) \leqslant \nu(x_n) + 2^{-(n+1)}.$$

Observe que:

$$\nu(x_{n+1}) = \inf_{y \in F(x_{n+1})} \phi(x_{n+1}, y) \geqslant \inf_{y \in F(x_n)} \phi(x_{n+1}, y) \geqslant$$

$$\geqslant \inf_{y \in F(x_n)} (\phi(x_n, y) - \phi(x_n, x_{n+1})) \left(\inf_{y \in F(x_n)} \phi(x_n, y)\right) - \phi(x_n, x_{n+1}) = \nu(x_n) - \phi(x_n, x_{n+1}).$$

Portanto,

$$\nu(x_{n+1}) \geqslant \nu(x_n) - \phi(x_n, x_{n+1})$$

e

$$-\nu(x_n) \leqslant -\phi(x_n, x_{n+1}) + 2^{-(n+1)} \leqslant (\nu(x_{n+1}) - \nu(x_n)) + 2^{-(n+1)}$$

que implica

$$0 \leqslant \nu(x_{n+1}) + 2^{-(n+1)}$$

daí resulta que

$$\mathrm{diam}(F(x_n)) \leqslant -2\nu(x_n) \leqslant 2 \cdot 2^{-n} \to 0, \ n \to \infty.$$

Os conjuntos $\{F(x_n)\}$ são fechados e $F(x_{n+1}) \subset F(x_n)$. Logo temos

$$\bigcap_n F(x_n) = \{\bar{x}\}.$$

Seja $\bar{x} \in F(x_0)$, então $\phi(x_0, \bar{x}) + \|\bar{x} - x_0\| \leqslant 0$. Além disso, $\bar{x}$ pertence a todos $F(x_n)$, e, assim $F(\bar{x}) \subseteq F(x_n)$, $\forall n$, que implica $F(\bar{x}) = \{\bar{x}\}$. Daí resulta que se $x \notin F(\bar{x})$, sempre que $x \neq \bar{x}$, implica que

$$\phi(\bar{x}, x) + \|x + \bar{x}\| > 0$$

$\square$

Observação 3.1.1. *Sempre que* $\phi(x, y) = f(y) - f(x)$ *a bifunção* ϕ *satisfaz* iii).

Usando os Lemas acima temos os seguintes resultados.

Teorema 3.1.1. *Seja* $\phi \in \mathrm{Lip}_{loc}(K)$, *onde* K *é um subconjunto de um espaço normado* X, *fechado e convexo. Suponha que* ϕ *satisfaz as seguintes condições:*

i) Para $x \in K$ *fixo, a função* $\phi(x, .)$ *é limitada inferiormente e semicontínua inferiormente;*

ii) Para todo $x \in K$, $\phi(x, x) = 0$;

iii) Existe $x_0 \in K$ *tal que* $\phi(x_0, .)$ *é limitada superiormente;*

iv) Para todo $x, y, z \in K$, $\phi(x, y) \leqslant \phi(x, z) + \phi(z, y)$;

v) ϕ *satisfaz a condição de Palais - Smale.*

Então, ϕ tem um ponto crítico $\bar{x}$. Além disso, se ϕ é pseudoconvexa então $\bar{x}$ é solução do (P.E).

Demonstração. Seja $\{\varepsilon_n\}$ uma sequência de números positivos tal que $\varepsilon_n \to 0^+$, pelo Lema 3.1.2, temos para um $\varepsilon_n > 0$ que existe $x_{\varepsilon_n} \in K$ tal que:

$$\phi(x_{\varepsilon_n}, x) + \varepsilon_n \|x_{\varepsilon_n} - x\| > 0, \quad \forall x \in K, \quad x \neq x_{\varepsilon_n}$$

então para $x = x_{\varepsilon_n} + th$ com $h \in K - \{x_{\varepsilon_n}\}$ e $t > 0$, temos

$$\phi(x_{\varepsilon_n}, x_{\varepsilon_n} + th) - \phi(x_{\varepsilon_n}, x_{\varepsilon_n}) > -\varepsilon_n t \|h\|.$$

Portanto

$$\frac{\phi(x_{\varepsilon_n}, x_{\varepsilon_n} + th) - \phi(x_{\varepsilon_n}, x_{\varepsilon_n})}{t} > -\varepsilon_n \|h\|$$

Se $t \to 0^+$ obtemos:

$$\phi^0(x_{\varepsilon_n}, x_{\varepsilon_n})(h) \geqslant -\varepsilon_n \|h\|, \quad \forall h \in K - \{\varepsilon_n\}. \tag{4}$$

Por outro lado, por (iii) existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\phi(x_0, x_{\varepsilon_n}) \leqslant \alpha, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Seja $x \in K$, então por (iv) temos

$$\phi(x_0, x) \leqslant \phi(x_0, x_{\varepsilon_n}) + \phi(x_{\varepsilon_n}, x) \leqslant \alpha + \phi(x_{\varepsilon_n}, x).$$

Assim, $\phi(x_{\varepsilon_n}, x) \geqslant \phi(x_0, x) - \alpha \quad \forall x \in K$.
Usando (i), deduzimos que $\{\inf_{x \in K} \phi(x_{\varepsilon_n}, x)\}$ é limitada inferiormente.
Então pela condição de Palais - Smale, deduzimos que $x_{\varepsilon_n} \to \bar{x} \in K$. Passando o limite em (4), e usando o Lema 2.1.1 temos

$$\phi^0(\bar{x}, \bar{x})(h) \geqslant 0 \qquad \forall h \in K - \{\bar{x}\}.$$

Concluímos que $\bar{x}$ é um ponto crítico de ϕ. Usando a Proposição 2.2.2 temos $\bar{x}$ solução do Problema de Equilíbrio.

□

3.2 Existência de Solução no Caso Não Monótono

Estudaremos condições de Existência de solução para o Problema de Equilíbrio quando K não é necessariamente compacto e sem assumir monotonicidade. Para isso supomos ϕ, uma bifunção lipschitziana na segunda variável. Para $x, y \in K$, a derivada generalizada de Clarke de ϕ no ponto (x, y) na segunda variável e direção h é dada por:

$$\phi^0(x,y)(h) = \lim_{\substack{t \to 0^+ \\ (u,v)\to(x,y)}} \frac{\phi(u, v + th) - \phi(u,v)}{t}.$$

Definição 3.2.1. *Dizemos que ϕ satisfaz a condição generalizada de Palais - Smale se para toda sequência $\{(u_n, v_n)\} \subset K \times K$ tal que $\phi(u_n, v_n) = \sup_{u \in K} \phi(u, v_n)$, a sequência $\{\phi(u_n, v_n)\}$ é limitada e*

$$\phi^0(u_n, v_n)(h) \geqslant -\varepsilon_n \|h\|, \qquad \forall h \in K - \{v_n\}$$

Para a sequência $\{\varepsilon_n\} \subset \mathbb{R}^+$ com $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$, então $\{(u_n, v_n)\}$ contém uma subsequência convergente.

Lema 3.2.1. *Seja E um conjunto compacto , convexo e F um conjunto convexo. Se $p : E \times F \to \mathbb{R}$ é quaseconvexa e semicontínua superiormente na primeira variável e convexa na segunda. Assuma também que:*

$$\max_{\xi \in E} p(\xi, y) \geqslant 0 \qquad \forall y \in F.$$

Então existe $\bar{\xi} \in E$ tal que $p(\bar{\xi}, y) \geqslant 0$ para todo $y \in F$.

Demonstração. Suponha, por contradição, que a afirmação não acontece. Então para todo $\xi \in E$ existe um $y \in F$ e $\epsilon > 0$ tal que $p(\xi, y) < -\epsilon$. Assim o conjunto aberto definido por:

$$S(y,\epsilon) = \{\xi \in E |\ p(\xi, y) < -\epsilon\} \qquad\qquad (y \in F, \epsilon > 0)$$

cobre o conjunto compacto E. Assim existe uma subcobertura finita

$$S(y_i, \epsilon_i) \qquad\qquad (i = 1, ..., m).$$

Seja $\epsilon = \max_i\{\epsilon_i\}$. Então $E \subset \bigcup_i S(y_\epsilon, \epsilon)$ e temos

$$\min_i p(\xi, y_i) \leqslant -\epsilon \quad \forall \xi \in E$$

isto é , $\forall \xi \in E$ existe $i \in \{1, ..., m\}$ tal que $p(\xi, y_i) < -\epsilon$.

Definamos agora $f_i(x) = -p(x, y_i) - \epsilon$, assim temos f_i convexa e para todo $x \in E$, existe i tal que $f_i(x) \geqslant 0$. Logo não existe $x \in E$ satisfazendo

$$f_1(x) < 0, f_2(x) < 0, ..., f_m(x) < 0 \qquad (1)$$

Definamos agora

$$C_1 = \{z = (z_1, z_2, ..., z_m) \in \mathbb{R}^m \mid \exists\, \xi \in E\ ; f_i(\xi) < z_i\}$$

Observe que $C_1 \neq \emptyset$ e C_1 é convexo uma vez que f_i é convexa e por (1) temos $\mathbb{R}^m_- \cap C_1 = \emptyset$. Assim pelo teorema da separação, existe $\{\lambda_1, ..., \lambda_m\} \subset \mathbb{R}_+$ tal que

$$0 \leqslant \lambda_1 z_1 + ... + \lambda_m z_m, \quad \forall z \in C_1$$

Logo $\forall\, x \in E$, tome $z_i = f_i(x) + \delta$, com δ arbitrário, e temos:

$$0 \leqslant \lambda_1[f_1(x) + \delta] + ... + \lambda_m[f_m(x) + \delta]$$

dividindo a expressão por $\sum \lambda_i$ e considerando $\mu_j = \dfrac{\lambda_j}{\sum \lambda_i}$, então

$$0 \leqslant \sum \mu_i f_i(x)$$

ou ainda

$$0 \leqslant \sum \mu_i(-p(x, y_i)) + \sum \mu_i(-\epsilon) = -\sum \mu_i p(x, y_i) - \epsilon$$

Logo $\sum \mu_i p(x, y_i) \leqslant -\epsilon\ \forall x \in E$. Como $p(\xi, \cdot)$ é convexa temos $\bar{y} = \sum \mu_i y_i \in F$ e $p(\xi, \bar{y}) \leqslant -\epsilon\ \forall\, \xi \in E$.

Assim $\max_{\xi \in E} p(\xi, \bar{y}) < 0$, contradição.

$\square$

Lema 3.2.2. *Seja K um conjunto fechado e convexo em um espaço de Banach X e seja $f : K \to \mathbb{R}$ uma função localmente lipschitz e limitada por baixo e satisfazendo a condição de Palais - Smale. Então o conjunto*

$$S = \{\bar{x} \in K; f(\bar{x}) = \min_{x \in K} f(x)\}$$

é não vazio e compacto. Além disso, se f *é quaseconvexa então* S *é convexo. Se* N *é um conjunto aberto contendo* S *e* ∂N *é a fronteira, então*

$$\inf_{x\in\ K\cap\partial N} f(x) > \inf_{x\in K} f(x).$$

Demonstração. Pelo Princípio Variacional de Ekeland, temos $\lambda_n > 0$ com $\lambda_n \to 0^+$, então existe $x_n \in K$ tal que

$$\lambda_n\|x - x_n\| + f(x) > f(x_n), \qquad \forall x \neq x_n. \tag{5}$$

Para $h \in X$ e $t > 0$, tome $x = x_n + th$. Então por (5), temos

$$\frac{f(x_n + th) - f(x_n)}{t} > -\lambda_n\|h\|.$$

Assim

$$f^0(x_n)(h) \geqslant \limsup_{t\to 0^+} \frac{f(x_n + th) - f(x_n)}{t} > -\lambda_n\|h\|.$$

Tendo em conta a condição de Palais - Smale, deduzimos que $\{x_n\}$ tem uma subsequência $x_{n_k} \to \bar{x}$. Por (5), temos $\bar{x} \in S$.

Agora seja $\{\bar{x}_n\}$ uma sequência em S. Para $\delta_n \searrow 0^+$ e $x \neq \bar{x}_n$, temos

$$f(\bar{x}_n) < f(x) + \delta_n\|x - \bar{x}_n\| \qquad \forall x \neq \bar{x}_n$$

resultando

$$f^0(\bar{x}_n)(h) \geqslant \limsup_{t\to 0^+} \frac{f(\bar{x}_n + th) - f(\bar{x}_n)}{t} > -\lambda_n\|h\|.$$

Assim pela condição de Palais - Smale, $\{\bar{x}_n\}$ tem uma subsequência convergente $\bar{x}_{n_k} \to \bar{x}$ e podemos ver que $\bar{x} \in S$.

Para ver que S é convexo, considere $\bar{x}, \bar{y} \in S$, $\lambda \in [0, 1]$ e mostraremos que $\lambda\bar{x}+(1-\lambda)\bar{y} \in S$. Assim $\bar{x}, \bar{y} \in S$, então $f(\bar{x}) = f(\bar{y}) = \min_{x\in K} f(x)$. Por outro lado temos que f é quaseconvexa, então

$$f(\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\bar{y}) \leqslant \max\{f(\bar{x}, f(\bar{y})\} = \min_{x\in K} f(x) \leqslant f(\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\bar{y}).$$

Assim $\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\bar{y} \in S$.

Agora, seja N um conjunto aberto tal que $S \subset N$. Vamos denotar por $\alpha = \mathtt{dist}(S, \partial N)$, que existe pois S é compacto.

Por contradição suponha

$$\inf_{x \in K \cap \partial N} f(x) = \inf_{x \in K} f(x)$$

Seja $\{x_n\} \subset K \cap \partial N$ uma sequência tal que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = \inf\limits_{x \in K} f(x)$ e seja, $\varepsilon_n > 0$ tal que

$$f(x_n) < \inf_{x \in K} f(x) + \varepsilon_n.$$

Então pelo Princípio Variacional de Ekeland com $\lambda_n = \dfrac{2}{\alpha}\varepsilon_n$, existe $w_n \in K$ tal que

$$f(w_n) \leqslant f(x_n), \quad \|w_n - x_n\| \leqslant \frac{\alpha}{2}$$

e

$$f(w_n) - \frac{2}{\alpha}\varepsilon_n \|x - w_n\| < f(x) \qquad \forall x \neq w_n.$$

Portanto, $f^0(w_n)(h) \geqslant -\dfrac{2}{\alpha}\varepsilon_n\|h\|$. Assim pela condição de Palais - Smale, temos $w_{n_k} \to \bar{w}$, para alguma subsequência. Assim $f(w_{n_k}) \leqslant f(x_{n_k})$, então

$$f(\bar{w}) = \lim f(w_{n_k}) \leqslant \lim f(x_{n_k}) = \inf f(x).$$

Assim $\bar{w} \in S$. Por outro lado temos,

$$\mathtt{dist}(\bar{w}, \partial N) \leqslant \|\bar{w} - x_n\| \leqslant \|\bar{w} - w_n\| + \|w_n - x_n\| \leqslant \|\bar{w} - w_n\| + \frac{\alpha}{2}.$$

Portanto, $\mathtt{dist}(\bar{w}, \partial N) \leqslant \dfrac{\alpha}{2}$ e assim $\mathtt{dist}(S, \partial N) \leqslant \dfrac{\alpha}{2}$. Que é um absurdo.

□

Lema 3.2.3. *Suponha que para* $y \in K$, *a função* $x \to -\phi(x, y)$ *é limitada inferiormente, localmente lipschitz, quaseconvexa e satisfaz a condição de Palais - Smale. Então a aplicação ponto conjunto* $S : K \to 2^K$ *definida por*

$$S(y) = \{\bar{x} \in K : \phi(\bar{x}, y) = \sup_{x \in K} \phi(x, y)\}$$

é semicontínua superiormente com valores compactos, convexos e não vazio.

Demonstração. Pelo Lema 3.2.2, $S(y)$ é não vazio, compacto e convexo para cada $y \in K$. Resta mostrar que a aplicação ponto conjunto S é semicontínua superiormente.

Precisamos mostrar que para cada $y_0 \in K$ e N um aberto contento $S(y_0)$, existe uma vizinhança aberta $U(y_0)$ de y_0 tal que $\forall y \in U(y_0)$ temos $S(y) \subset N$.

Por contradição, suponha que existe $y_0 \in K$ e um conjunto aberto N tal que

$$\forall n \in \mathbb{N}^+, \ \exists y_n \in B\left(y_0, \frac{1}{n}\right), \ \exists x_n \in S(y_n) \ \text{com} \ x_n \notin N.$$

Seja $x_0 \in S(y_0) \subset N$. Como $\alpha_n \in (0,1)$ tal que $w_n = (1-\alpha_n)x_0 + \alpha_n x_n \in \partial N$ a fronteira de N.

Temos:

$$\sup_{n\ in\mathbb{N}} \phi(w_n, y_0) \leqslant \sup_{x \in \partial \cap K} \phi(x, y_0) < \sup_{x \in K} \phi(x, y_0) = \phi(x_0, y_0).$$

Por outro lado, pela propriedade lipschitz da ϕ, existe $L_y > 0$ tal que:

$$\phi(w_n, y_n) - \phi(w_n, y_0) \leqslant L_y \|y_n - y_0\|$$

Pela quaseconvexidade da $x \to \phi(x, y)$ temos:

$$\phi(w_n, y_n) = \phi\left((1-\alpha_n)x_0 + \alpha_n x_n, y_n\right) \geqslant \min\{\phi(x_0, y_n), \phi(x_n, y_n)\} \geqslant \phi(x_0, y_n)$$

Portanto,

$$\phi(x_0, y_n) \ \leqslant \ \phi(x_n, y_n) \ \leqslant \ \phi(w_n, y_0) + L_y \|y_n - y_0\|$$

logo

$$\phi(x_0, y_n) \leqslant \phi(w_n, y_n) + L_y \|y_n - y_0\|.$$

Assim,

$$\phi(x_0, y_0) \ \leqslant \ \liminf \phi(x_0, y_n) \ \leqslant \ \liminf \phi(w_n, y_0) \ \leqslant \ \sup_{n \in \mathbb{N}} \phi(w_n, y_0) \ < \ \phi(x_0, y_0)$$

absurdo, logo S é semicontínua superiormente. □

Lema 3.2.4. *Sejam* X *e* Y *dois espaços métricos e* $S : X \to 2^Y$ *uma aplicação ponto conjunto superiormente com valores compactos e não vazio. Seja* $\{x_n\} \subset X$ *uma sequência tal que* $x_n \to \bar{x}$*. Para* $n \in \mathbb{N}$*, considere* $y_n \in S(x_n)$*.*

Então a sequência $\{y_n\}$ *tem uma subsequência convergente para um ponto* $\bar{y} \in S(\bar{x})$*.*

Demonstração. Para $p \in \mathbb{N}^*$, considere o conjunto aberto definido por

$$N_p = \left\{ y \in Y;\ \mathtt{dist}(y, S(\bar{x})) < \frac{1}{p} \right\}.$$

Assim $S(\bar{x}) \subset N_p$, S é semicontínua superiormente e $x_n \to \bar{x}$, então existe $N(p) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \leqslant N(p)$ temos $S(x_n) \subset N_p$.

Assim existe $z_p \in S(\bar{x})$ tal que $\mathtt{dist}\left(y_{N(p)}, z_p\right) < \dfrac{1}{p}$. Como $S(\bar{x})$ é compacto, então a sequência $\{z_p\}$ tem uma subsequência convergente para $\bar{y} \in S(\bar{x})$. Pela desigualdade triangular

$$\mathtt{dist}(y_{N_p}, \bar{y}) \leqslant \mathtt{dist}(y_{N_p}, z_p) + \mathtt{dist}(z_p, \bar{y}),$$

e assim $y_{N_p} \to \bar{y}$.

$\square$

Definição 3.2.2. *Uma bifunção* ϕ *é dita Regular em* $(\bar{x}, \bar{y})$ *se*

$$\phi^0(\bar{x}, \bar{y})(h) = \limsup_{\substack{t \to 0^+ \\ (u,v) \to (\bar{x}, \bar{y}) \\ v \in K}} \frac{\phi(u, v + th) - \phi(u, v)}{t} =$$

$$= \limsup_{t \to 0^+} \frac{\phi(\bar{x}, \bar{y} + th) - \phi(\bar{x}, \bar{y})}{t}.$$

Agora podemos enunciar um resultado de existência de solução para Problema de Equilíbrio no caso não monótono.

Teorema 3.2.1. *Suponha que* ϕ *é regular e assuma:*

i) Existe $x_0 \in K$ *tal que a função* $y \mapsto \phi(x_0, y)$ *é limitada inferiormente;*

ii) Para $y \in K$ *fixo, a função* $x \mapsto -\phi(x, y)$ *é limitada por baixo, localmente lipschitz, quaseconvexa e satisfaz a condição de Palais - Smale;*

iii) ϕ *satisfaz a condição generalizada de Palais - Smale.*

Então existem $\bar{x}, \bar{y} \in K$ *tal que* $\phi^0(\bar{x}, \bar{y})(h) \geqslant 0\ \forall h \in K - \{\bar{y}\}$. *E ainda, se* $\forall x \in K$ *a função* $y \mapsto \phi(x, y)$ *for pseudoconvexa então* $\bar{x}$ *é uma solução do P.E. .*

Demonstração. Considere a função $V : K \to \mathbb{R}$ definida por

$$V(y) = \sup_{x \in K} \phi(x, y)$$

Podemos ver que V é semicontínua inferiormente e limitada por baixo. Pelo Princípio Variacional de Ekeland, temos $\forall\ \varepsilon > 0$ existe $y_\varepsilon \in K$ tal que

$$V(y_\varepsilon) \leqslant \inf_{y \in K} V(y) + \varepsilon \qquad (7)$$

$$V(y_\varepsilon) < V(y) + \varepsilon \|y - y_\varepsilon\|, \quad \forall y \neq y_\varepsilon \qquad (8)$$

Considere $h \in K - \{y_\varepsilon\}$ e seja $y = y_\varepsilon + th$, com $t > 0$.

Usando a equção (8) temos:

$$\frac{V(y_\varepsilon + th) - V(y_\varepsilon)}{t} > -\varepsilon \|h\|$$

assim

$$\liminf_{t \to 0^+} \frac{V(y_\varepsilon + th) - V(y_\varepsilon)}{t} \geqslant -\varepsilon \|h\|.$$

Seja $\{t_n\}$ uma sequência de números positivos tal que $t_n \searrow 0$, então

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{V(y_\varepsilon + t_n h) - V(y_\varepsilon)}{t_n} \geqslant \liminf_{t \to 0^+} \frac{V(y_\varepsilon + th) - V(y_\varepsilon)}{t} \geqslant -\varepsilon \|h\|. \qquad (9)$$

Por outro lado, pelo Lema 3.2.2, $S(y_\varepsilon + t_n h) \neq \emptyset$ e existe $x_n \in K$ tal que $V(y_\varepsilon + t_n h) = \phi(x_n, y_\varepsilon + t_n h)$. Como $V(y_\varepsilon) \geqslant \phi(x_n, y_\varepsilon)$, usando a equação (9) temos:

$$\liminf_{n \to +\infty} \frac{\phi(x_n, y_\varepsilon + t_n h) - \phi(x_n, y_\varepsilon)}{t_n} \geqslant -\varepsilon \|h\|$$

Para $\{\delta_n\} \subset \mathbb{R}^+$ com $\delta_n \searrow 0^+$ e

$$\frac{\phi(x_n, y_\varepsilon + t_n h) - \phi(x_n, y_\varepsilon)}{t_n} < \phi^0(x_n, y_\varepsilon)(h) + \delta_n$$

Assim

$$\liminf_{n \to +\infty} \left[\phi^0(x_n, y_\varepsilon)(h) + \varepsilon_n\right] \geqslant -\varepsilon \|h\| \qquad (10)$$

Por outro lado, $x_n \in S(y_\varepsilon + t_n h)$ e como S é semicontínua superiormente não vazio e compacto, pelo Lema 3.2.4 deduzimos que $\{x_n\}$ tem uma subsequência $x_{n_k} \to x \in S(y_\varepsilon)$, pois $y_\varepsilon + t_n h \to y_\varepsilon$. Portanto, pelo Lema 2.1.1 e (10), deduzimos

$$\phi^0(x, y_\varepsilon)(h) \geqslant -\varepsilon \|h\| \qquad (1)$$

temos então o seguinte:

$$\forall h \in X, \exists x \in K \ \text{tal} \quad \text{que} \ \ \phi^0(x, y_\varepsilon)(h) \geqslant -\varepsilon\|h\|.$$

Consideraremos agora a seguinte bifunção $\varphi_\varepsilon : S(y_\varepsilon) \times (K - \{y_\varepsilon\}) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\varphi_\varepsilon(x, h) = \phi^0(x, y_\varepsilon)(h) + \varepsilon\|h\|.$$

O conjunto $S(y_\varepsilon)$ é compacto e $K - \{y_\varepsilon\}$ é convexo.

Podemos ver que $\varphi_\varepsilon(x, \cdot)$ é convexa e provar que $\varphi_\varepsilon(\cdot, h)$ é quaseconcava. Para isso, seja $\alpha \in [0, 1]$ e $x, y \in S(y_\varepsilon)$. Precisamos mostrar que

$$\phi^0(\alpha x + (1-\alpha)y, y_\varepsilon)(h) \geqslant \min\{\phi^0(x, y_\varepsilon)(h), \phi^0(y, y_\varepsilon)(h)\}$$

Como ϕ é regular, então

$$\phi^0(\alpha x + (1-\alpha)y, y_\varepsilon)(h) = \limsup_{t \to 0^+} \frac{\phi(\alpha x + (1-\alpha)y, y_\varepsilon + th) - \phi(\alpha x + (1-\alpha)y, y_\varepsilon)}{t}$$

Como $\phi(\cdot, y_\varepsilon + th)$ é quaseconcava, então

$$\phi(\alpha x + (1-\alpha)y, y_\varepsilon + th) \geqslant \min\{\phi(x, y_\varepsilon + th), \phi(y, y_\varepsilon + th)\}$$

Por outro lado, como $S(y_\varepsilon)$ é convexo então $\alpha x + (1-\alpha)y \ \in \ S(y_\varepsilon)$ e

$$\phi(\alpha x + (1-\alpha)y, y_\varepsilon) = \phi(x, y_\varepsilon) = \phi(y, y_\varepsilon).$$

Portanto,

$$\frac{\phi(\alpha x + (1-\alpha)y, y_\varepsilon + th) - \phi(\alpha x + (1-\alpha)y, y_\varepsilon)}{t} \geqslant$$
$$\geqslant \min\left\{\frac{\phi(x, y_\varepsilon + th) - \phi(x, y_\varepsilon)}{t}, \frac{\phi(y, y_\varepsilon + th) - \phi(y, y_\varepsilon)}{t}\right\}$$

assim passando ao limite quando $t \to 0^+$,deduzimos que

$$\phi^0(\alpha x + (1-\alpha)y, y_0)(h) \geqslant \min\{\phi^0(x, y_\varepsilon)(h), \phi^0(y, y_\varepsilon)(h)\}.$$

Consequentemente , observando (1) vemos que $\varphi_\varepsilon \geqslant 0$ satisfazendo as condições do Lema 3.2.1. Então $\exists x_\varepsilon \in S(y_\varepsilon)$ tal que

$$\phi^0(x_\varepsilon, y_\varepsilon)(h) + \varepsilon\|h\| \geqslant 0 \qquad \forall h \in K - \{y_\varepsilon\}$$

Para $\varepsilon_n \to 0^+$, temos :

$$\phi^0(x_{\varepsilon_n}, y_{\varepsilon_n})(h) \geqslant -\varepsilon_n \|h\| \ \text{ com } \ x_{\varepsilon_n} \in S(y_{\varepsilon_n}) \ \text{ e } \ h \in K - \{y_{\varepsilon_n}\}. \tag{11}$$

Assim pela condição generalizada de Palais - Smale,existem $\bar{y} \in K$ e $\bar{x} \in S(\bar{y})$ tais que $x_{\varepsilon_n} \to \bar{x}$ e $y_{\varepsilon_n} \to \bar{y}$, para subsequências. Passando ao limite em (11) temos:

$$\phi^0(\bar{x}, \bar{y})(h) \geqslant 0 \qquad \forall h \in K - \{\bar{y}\}$$

Por outro lado $\bar{x} \in S(\bar{y})$, então

$$\phi(\bar{x}, \bar{y}) = \sup_{x \in K} \phi(x, \bar{y}) \geqslant \phi(\bar{y}, \bar{y}) = 0$$

Assim, se a função $y \mapsto \phi(\bar{x}, y)$ é pseudoconvexa, defina $f(y) = \phi(\bar{x}, y)$, como f é pseudo convexa , temos $\forall \ x, y \ \in K$, que $f^0(x)(y - x) \geqslant 0 \Rightarrow f(ty + (1-t)x) \leqslant f(y), t \in [0, 1]$. Tome $x = \bar{y}$.Assim:

$$f^0(\bar{y})(y - \bar{y}) = \phi^0(\bar{x}, \bar{y})(y - \bar{y}) \geqslant o \Rightarrow f(ty + (1-t)\bar{y}) \leqslant f(y), \ t \in [0, 1].$$

Tomando $t = 0$ temos:

$$f(\bar{y}) \leqslant f(y) \Leftrightarrow 0 \leqslant \phi(\bar{x}, \bar{y}) \leqslant \phi(\bar{x}, y) \quad \forall y \in \ K.$$

Mostrando que $\bar{x}$ é solução do Problema de Equilíbrio.

$\square$

Capítulo 4

Considerações Finais

Antes de abordar a existência de solução do Problema de Equilíbrio via condição de Palais-Smale, foi feito um estudo de solução do Problema de Equilíbrio com funções que tem ponto crítico, no sentido de Clarke, e carregam algumas hipóteses de continuidade (ou semicontinuidade) e convexidade (ou pseudoconvexidade,ou quaseconvexidade).
A abordagem do Problema satisfazendo a condição de Palais-Smale foi dada de duas formas: A primeira assumindo monotonicidade da função, encontramos solução de forma um pouco mais simples. A segunda , não foi assumido monotonicidade da função, para isso tivemos que definir a condição generalizada de Palais-Smale além de pedir que a função seja regular e algumas hipóteses boas para garantir tal existência. Nosso cenário foi um espaço de Banach e utilizamos como ferramentas em diversos momentos o princípio variacional de Ekeland, algumas propriedades da derivada de Clarke e conhecimentos básicos tanto de análise funcional quanto de análise convexa.

Referências Bibliográficas

[1] Blum, E. and Oettli, W. - *From optimization and variational inequalities to equilibrium problems.* Math Student 63: 123-145.

[2] Chadli, O., Chbani, Z. and Riahi, H - *Equilibrium Problems Via the Palais-Smale Condition.* Springer, 2006.

[3] Clarke, F.B. - *Nonsmooth analysis and optimization.* Willey, New York.

[4] Conway, J.B. - *Functions of One Complex Variable I.* Springer, New York 1973.

[5] Ismailov, A., Solodov, M. *Otimização - volume 1 - Condções de Otimalidade, Elementos de Análise Convexa e de Dualidade.* IMPA, Rio de Janeiro. 2005.

[6] Kreyszig, E. - *Intriductory Funtional Analysys With Applications.* New York : Wiley.

[7] Lima, E.L. - *Espaçoes Métricos.* Rio de Janeiro: IMPA, 2004.

[8] Rockafellar, R.T. *Convex Analysis.* Princeton Mathematical Series, 468.