Universidade Federal do Piauí

Centro de Ciências da Natureza

Pós-Graduação em Matemática

Mestrado em Matemática

SÓLITON DE RICCI CONTRÁTIL COM INTEGRAL PINÇADA

Christopher Carlisson de Sousa Queiroz

Teresina - 2020

Christopher Carlisson de Sousa Queiroz

Dissertação de Mestrado:

SÓLITON DE RICCI CONTRÁTIL COM INTEGRAL PINÇADA

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Halyson Irene Baltazar

Teresina - 2020

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Sóliton de Ricci Contátil com Integral Pinçada

Christopher Carlisson de Sousa Queiroz

Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 24 de setembro de 2020.

Banca Examinadora:

Halyson Irene Baltazar

Prof. Dr. Halyson Irene Baltazar - Orientador

Adam Oliveira da Silva

Prof. Dr. Adam Oliveira da Silva - UFPA

Rondinelle Marcolino Batista

Prof. Dr. Rondinelle Marcolino Batista - UFPI

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Serviço de Processamento Técnico
Biblioteca Setorial de Ciências da Natureza - CCN

Q3s Queiroz, Christopher Carlisson de Sousa.
Sóliton de Ricci contrátil com integral pinçada / Christopher Carlisson de Sousa Queiroz. – Teresina: 2020.
87 f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2020.
Orientador: Prof. Dr. Halyson Irene Baltazar

1. Integral Pinçada. 2. Sóliton de Ricci. 3. Méttricas de Einstein. I. Titulo.

CDD 516

Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes – CRB3/1461

Dedico este trabalho ao meu pai Carlos Magno (In memoriam), minha amada mãe Franciane Santos e aos meus irmãos.

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço à Deus por me abençoar todos os dias, por ter me dado força nos momentos que pensei em desistir, não tenho dúvidas que tudo de bom na minha vida é graças a ele.

À pessoa mais especial da minha vida, que sempre cuidou de mim, fez de tudo pra me dar todo o suporte necessário no meu caminho escolar e universitário e sempre abdicou de tudo colocando seus filhos em primeiro lugar, minha amada mãe Franciane Santos, a ela serei eternamente grato.

Ao meu pai Carlos Magno, que agora está na graça divina olhando por mim, por sempre se preocupar em me proporcionar uma boa educação desde criança e me presentear com conselhos que me fizeram crescer imensamente, se hoje estou colhendo esses frutos devo muito à ele. Aos meus irmãos Carliane Calessa e Carlos de Jesus, pela confiança depositada em mim e por sempre acreditarem na minha capacidade.

À minha namorada Gabriella Farias, por todo companheirismo, incentivo e compreensão nos momentos que estive ausente por conta dos estudos. Obrigado por todos os ensinamentos no inglês, sua participação na minha vida foi fundamental.

Agradeço ao professor Halyson Irene Baltazar por ter aceito ser meu orientador, sempre servir de exemplo pra mim por ser um profissional exemplar e me conduzir no desenvolvimento de todo este trabalho com ótimas dicas e ensino excelente. Obrigado por acreditar no meu potencial, pela paciência e por todo incentivo.

Aos professores Adam Oliveira e Rondinelle Marcolino por terem aceitado o convite para participar da banca examinadora.

Aos professores da Universidade Estadual do Piauí, em especial Afonso Noberto, Pedro Soares e Pitágoras Pinheiro por participarem da minha Graduação em matemática.

Agradeço a todos os professores da Pós-Graduação em Matemática da UFPI, em especial aos professores Newton Luís, Cícero Aquino, Rondinelle Marcolino, meu coordenador Paulo Alexandre, Isaías Pereira e Marcondes Clark que tiveram contribuição na minha formação acadêmica.

A todos meus amigos da Pós-Graduação, Gustavo, Edimilson, Atécio, Marcio, João Santos, Igor, Dieme, Pedro Paulo, Francimar, Ruan, João Vinicius, Erisvaldo, Lucas, Thiago, Leonardo, Bruno Vasconcelos, Marcelo, Edilson, Nilson, Alexandre, Jefferson, Felipe e, especialmente, Raimundo Bruno, Thassio, Pedro Rodrigues e Emília que me ajudaram diretamente no inicio dessa trajetória.

Agradecimentos também aos meus familiares, amigos de infância e às minhas princesas, Mel e Branquinha, por todo o carinho.

Agradeço à CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro.

“*Muitas vezes perdemos oportunidades por não acreditarmos que podemos ir mais longe, como quando as coisas não saem de acordo com o esperado, ou quando seu tempo foge entre suas mãos e nada dá certo. E agora, o que fazer? Agora é o momento de agir. Desafie a si mesmo e faça do tempo o seu aliado, coloque para fora as suas qualidades e use suas habilidades, assim você pode fazer a diferença nesse exato momento. Acredite que você pode ser mais, se dar mais. Creia no seu sucesso e não crie obstáculos em sua mente, mas comece a agir! Você tem talento, só precisa exercitá-los*".

Márcia Paula.

Resumo

Este trabalho está baseado em [1] e tem como objetivo mostrar que, se um sóliton de Ricci contrátil compacto de dimensão n, $4 \leq n \leq 6$, satisfaz uma condição de integral pinçada, então este é isométrico a um quociente de $\mathbb{S}^n$. A prova baseia-se principalmente em estimativas associadas a curvatura, desigualdade com o invariante de Yamabe e um resultado de rigidez para métricas de Einstein com integral pinçada. Em dimensão 4, fazendo uso da fórmula de Chern-Gauss-Bonnet e a invariância conforme da segunda função elementar dos autovalores do tensor de Schouten, obteremos outra condição $L^{\frac{n}{2}}$-pinçada que nos permitirá caracterizar tais sólitons de Ricci.

Palavras chaves: Sóliton de Ricci, invariante de Yamabe, métricas de Einstein, integral pinçada.

Abstract

This work is based on [1] and aims to show that, if a compact shrinking Ricci soliton of dimension n, $4 \leq n \leq 6$, satisfies an integral pinched condition, then it is isometric at a quotient of $\mathbb{S}^n$. The proof is mainly based in estimates associated with curvature, inequality with Yamabe's invariant and a result of rigidity for Einstein metrics with integral pinched. In dimension 4, using the Chern-Gauss-Bonnet formula and the conformal invariance of the second elementary function of the eigenvalues of the Schouten tensor, we will obtain another condition $L^{\frac{n}{2}}$-pinching that will allow us to characterize such Ricci solitons.

Keywords: Ricci solitons, Yamabe invariant, Einstein metrics, integral pinched.

Sumário

Resumo **v**

Abstract **vi**

1 Noções Preliminares **4**

1.1 Alguns conceitos sobre tensores 4

1.2 Operadores diferencias e curvaturas 6

1.3 Variedades de Einstein 13

1.4 Decomposição ortogonal do tensor de curvatura 14

1.4.1 Decomposição ortogonal do tensor $\mathring{Ric} \owedge \mathring{Ric}$ 22

1.5 Invariante de Yamabe 24

2 O tensor de Weyl e algumas estimativas **34**

3 Sóliton de Ricci gradiente **54**

3.1 Definições e fórmulas em sólitons gradiente 54

4 Resultados principais **60**

4.1 Sóliton de Ricci que satisfazem uma condição de integral pinçada 60

4.2 Soliton de Ricci Contrátil de dimensão 4 68

Referências Bibliográficas **74**

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar sólitons de Ricci contrátil compactos com integral pinçada. Os sólitons de Ricci geram soluções especiais do fluxo de Ricci, desempenham um papel fundamental na formação de singularidades e vem sendo estudado por vários autores nas últimas décadas (para mais detalhes veja H.-D.Cao em [9]).

Vamos nos concentrar apenas em sólitons de Ricci compactos. Em [23] foi provado por G. Perelman que não existe sóliton de Ricci compacto estacionário ou expansivo não triviais. Além disso, em dimensões 2 e 3 R. Hamilton em [14] e T. Ivey em [17] mostraram respectivamente, que todos os sólitons de Ricci contrátil compactos são triviais. A dimensão 4 é a menor dimensão onde existem exemplos interessantes de sólitons de Ricci contrátil compactos não triviais. Nos trabalhos de N. Koiso em [19] e H.-D. Cao em [8] foram construídos os primeiros exemplos de sólitons de Ricci contrátil compactos em dimensão 4 que não tem curvatura escalar constante.

Nos últimos anos, houve muitos resultados interessantes sobre a classificação de sólitons de Ricci contrátil compactos que satisfazem as condições de curvatura pontual. Por exemplo, segue-se pelo trabalho de C. Bohm e B. Wilking em [5] que os únicos sólitons de Ricci compactos contrátil com o operador curvatura positivo são quocientes de $\mathbb{S}^n$.

Nosso objetivo nesta dissertação é estudar os resultados obtidos em [1] que mostra que os quocientes de $\mathbb{S}^n$ são os únicos sólitons de Ricci contrátil compactos satisfazendo uma condição de integral pinçada.

Descreveremos abaixo, alguns dos resultados principais a serem demonstrados nesta dissertação. O primeiro resultado é uma rigidez para variedades de Einstein com curvatura escalar positiva.

Teorema 0.1. *Seja (M^n, g) uma variedade de Einstein com curvatura escalar positiva. Existe uma constante positiva $A(n)$ tal que se*

$$\left(\int_M |W|^{\frac{n}{2}} dV_g\right)^{\frac{2}{n}} < A(n)Y(M, [g]),$$

então a menos de um quociente, (M^n, g) é isométrico a $\mathbb{S}^n$ munida com a métrica canônica. Além disso, temos $A(4) = \frac{5}{9\sqrt{6}}$, $A(5) = \frac{3}{32}$, $A(6) = \frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{70}}$, $A(n) = \frac{n-2}{20(n-1)}$, se $7 \leq n \leq 9$ e $A(n) = \frac{2}{5n}$ se $n \geq 10$.

Como consequência do teorema acima, juntamente com a condição de integral pinçada mostraremos o resultado principal dessa dissertação que caracteriza os sólitons de Ricci contrátil compacto em dimensão $4 \leq n \leq 6$.

Teorema 0.2. *Seja (M^n, g) um sóliton de Ricci contrátil compacto de dimensão n, com $4 \leq n \leq 6$, satisfazendo a seguinte desigualdade*

$$\left(\int_M |W + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}(n-2)}\mathring{Ric} \owedge g|^{n/2} dV_g\right)^{\frac{2}{n}} + \sqrt{\frac{(n-4)^2(n-1)}{8(n-2)}}\lambda V(M)^{\frac{2}{n}}$$
$$< \sqrt{\frac{n-2}{32(n-1)}}Y(M, [g]).$$

Então, a menos de um quociente (M^n, g), é isométrico $\mathbb{S}^n$ munida com a métrica canônica. Além disso, em dimensão $5 \leq n \leq 6$, o mesmo resultado vale assumindo apenas a desigualdade mais fraca.

O resultado a seguir é um caso particular do teorema acima.

Teorema 0.3. *Todo sóliton de Ricci compacto contrátil de dimensão 4 satisfazendo a seguinte desigualdade*

$$\int_M |W|^2 dV_g + \int_M |\mathring{Ric}|^2 dV_g < \frac{1}{48}Y(M, [g])^2,$$

é isométrico a menos de um quociente à esfera canônica $\mathbb{S}^4$.

Como corolário, usando uma limitação por baixo do invariante de Yamabe provado em [12], obtemos o seguinte resultado.

Corolário 0.1. *Todo sóliton de Ricci contrátil compacto de dimensão 4 satisfazendo a seguinte de desigualdade*

$$\int_M |W|^2 dV_g + \frac{5}{4}\int_M |\mathring{Ric}|^2 dV_g \leq \frac{1}{48}\int_M R^2 dV_g,$$

é isométrico a menos de um quociente à esfera canônica $\mathbb{S}^4$.

Observação 0.1. *A condição de integral pinçada no corolário acima é equivalente*

$$\int_M |W|^2 dV_g + \frac{2}{39}\int_M R^2 dV_g \leq \frac{160}{13}\pi^2\chi(M),$$

onde $\chi(M)$ *é função característica de Euler-Poincaré de M.*

Percebemos que no Corolário 0.1 e na Observação 0.1, precisamos assumir apenas a desigualdade estrita. De fato, quando a igualdade ocorre, podemos mostrar que (M^n, g) deve ser conformemente Einstein.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Neste capítulo, iremos apresentar uma série de resultados de geometria Riemanniana que serão utilizados no decorrer do texto. Indicamos como leitura complementar [7] e [11].

1.1 Alguns conceitos sobre tensores

Definição 1.1. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e V^* o espaço dual de V.*

Um s-tensor covariante em V é uma aplicação multilinear

$$T : \underbrace{V \times ... \times V}_{s} \to \mathbb{R}.$$

Um r-tensor contravariante é uma aplicação multilinear

$$T : \underbrace{V^* \times ... \times V^*}_{r} \to \mathbb{R}.$$

Um tensor do tipo (r, s) é um tensor s-covariante e r-contravariante, isto é, uma aplicação multilinear

$$T : \underbrace{V^* \times ... \times V^*}_{r} \times \underbrace{V \times ... \times V}_{s} \to \mathbb{R}.$$

O conjunto de todos os (r, s)-tensores sobre V, com as operações usuais de adição e multiplicação por elemento de K, é um módulo sobre K. Um tensor de tipo $(0, 0)$ é simplesmente um elemento de K.

Em tudo o que segue (M^n, g) denotará uma variedade Riemanniana de dimensão n com métrica g e conexão de Levi-Civita ∇. O anel comutativo das funções diferenciáveis (ou de classe C^∞) sobre M será denotado por $C^\infty(M)$. O espaço dos campos diferenciáveis sobre M será denotado por $\mathfrak{X}(M)$.

Definição 1.2. *Um campo de tensores ou um campo tensorial A em uma variedade M^n é um tensor sobre o $C^\infty(M)$-módulo $\mathfrak{X}(M)$.*

Assim, um (r,s)-tensor A é uma aplicação

$$A : \mathfrak{X}(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \to C^\infty(M)$$

multilinear sobre C^∞. Mais precisamente, A é uma aplicação multilinear sobre $C^\infty(M)$ que associa a cada $(r+s)$-upla $(Y^1, ..., Y^r, X_1, ..., X_s)$ uma função diferenciável

$$f = A(Y^1, ..., Y^r, X_1, ..., X_s) : M^n \to \mathbb{R}.$$

A posição que Y^i ocupa é chamada i-ésima entrada contravariante e a posição que X_j ocupa é chamada de j-ésima entrada covariante. Desta maneira, os $(0,s)$-tensores são ditos covariantes e os $(r,0)$-tensores são ditos contravariantes. Denotamos por $\mathfrak{T}^r_s(M)$ o módulo de todos os (r,s)-tensores sobre $C^\infty(M)$.

Observação 1.1.

I) Como toda função $f \in C^\infty(M)$ é um $(0,0)$-tensor, obtemos a indentificação $\mathfrak{T}^0_0(M) = C^\infty(M)$.

II) Se Y é uma 1-forma em M^n então a função

$$\mathfrak{X}(M) \ni X \mapsto Y(X) \in C^\infty(M)$$

é $C^\infty(M)$-linear. Assim, podemos escrever $\mathfrak{T}^1_0(M) = \mathfrak{X}^*(M)$.

III) De forma análoga, se X é um campo de vetorial em M^n então a função

$$\mathfrak{X}^*(M) \ni Y \mapsto Y(X) \in C^\infty$$

é $C^\infty(M)$-linear. Assim, podemos escrever $\mathfrak{T}^0_1(M) = \mathfrak{X}(M)$.

IV) Se $A : \mathfrak{X}(M)^s \mapsto \mathfrak{X}(M)$ é $C^\infty(M)$-linear então a aplicação

$$\mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}^s \ni (Y, X_1, ..., X_s) = Y(A(X_1, ..., X_s)) \in C^\infty(M)$$

é $C^\infty(M)$-linear. Assim, A pode ser considerado como um $(1,s)$-tensor.

A próxima definição nos ensina como fazer o produto de dois tensores.

Definição 1.3. *Sejam* $A \in \mathfrak{T}_r^s(M)$ *e* $B \in \mathfrak{T}_{r'}^{s'}(M)$. *O produto tensorial do tensor* A *pelo tensor* B *é o tensor*

$$A \otimes B : \mathfrak{X}^*(M)^{r+r'} \times \mathfrak{X}^{s+s'}(M) \to C^\infty(M)$$

tal que

$$\begin{aligned}&(A \otimes B)(Y^1, ..., Y^{r+r'}, X_1, ..., X_{s+s'})\\ =&A(Y^1, ..., Y^r, X_1, ..., X_s)B(Y^{r+1}, ..., Y^{r+r'}, X_{s+1}, ..., X_{s+s'}).\end{aligned}$$

Se $r' = s' = 0$ então B é uma função $f \in C^\infty(M)$. Então definimos

$$A \otimes f = f \otimes A = fA.$$

Além disso, se A é um $(0,0)$-tensor então o produto tensorial reduz-se a multiplicação em $C^\infty(M)$.

Assim, em todo este trabalho sempre que falarmos (r, s)-tensor, iremos trabalhar com este na forma de uma aplicação multilinear. Além disso, em todo o texto usaremos a convenção de Einstein para soma, que consiste em omitir o sinal do somatório quando temos índices cruzados repetidos, por exemplo,

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} x_i^j E_j$$

é equivalente a $y_i = x_i^j E_j$.

1.2 Operadores diferencias e curvaturas

A seguir vamos definir alguns operadores diferenciais com os quais vamos trabalhar nessa dissertação.

Definição 1.4. *Definamos a* ***derivada covariante*** *de um* $(1, s)$*-tensor* T*, como sendo o* $(1, s+1)$*-tensor*

$$\nabla T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times ... \times \mathfrak{X}(M)}_{s+1} \to \mathfrak{X}(M)$$

dado por

$$\begin{aligned}\nabla T(X, Y_1, ..., Y_s) &= (\nabla_X T)(Y_1, ..., Y_s) \\ &= \nabla_X(T(Y_1, ..., Y_s)) - \sum_{i=1}^{s} T(Y_1, ..., \nabla_X Y_i, ..., Y_s).\end{aligned}$$

Dizemos que um tensor T é ***paralelo*** *se $\nabla T \equiv 0$. Observe que uma métrica Riemanniana g é um tensor paralelo. De fato,*

$$\begin{aligned}(\nabla g)(X, Y, Z) &= \nabla_X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) \\ &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) \\ &= 0\end{aligned}$$

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição 1.5. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O* ***gradiente*** *de f é o campo diferenciável ∇f, definido sobre M por*

$$g(\nabla f, X) = \nabla_X f = df(X),$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição 1.6. *Seja X um campo vetorial diferenciável em M. A* ***divergência*** *de X é uma função diferenciável $divX : M \to \mathbb{R}$, dada para $p \in M$ por*

$$(divX)(p) = tr\left\{v \mapsto (\nabla_v X)(p)\right\},$$

onde $v \in T_pM$ e tr denota o traço do operador linear entre chaves.

De maneira similar à definição anterior, podemos definir a divergência de um $(1, r)$-tensor T como sendo o $(0, r)$-tensor

$$\begin{aligned}(divT)(v_1, ..., v_r) &= \{w \mapsto (\nabla_w T)(v_1, ..., v_r)\} \\ &= g^{jk}\nabla_j T_k(v_1, ..., v_r).\end{aligned}$$

Em particular, se T é um $(0, 2)$-tensor, então em coordenadas temos

$$(divT)_i = g^{jk}\nabla_k T_{ij}.$$

Definição 1.7. *Seja f um campo vetorial diferenciável em M. O* ***Laplaciano*** *de f é a função $\Delta f : M \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\Delta f = div(\nabla f).$$

Em coordenadas,

$$\Delta f = div(\nabla f) = g^{ij}\nabla_i\nabla_j f.$$

Definição 1.8. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Definimos o **hessiano** de f como o $(1,1)$-tensor, dado por*

$$(\nabla^2 f)(X) = \nabla_X \nabla f \qquad \forall X \in \mathfrak{X}(M),$$

ou como $(0,2)$-tensor, dado por

$$\nabla^2 f(X,Y) = g(\nabla_X \nabla f, Y) = \nabla^2_{X,Y}(f),$$

$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Em coordenadas,

$$\nabla^2 f(\partial_i, \partial_j) = \nabla_i \nabla_j f.$$

Proposição 1.1. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, então*

$$\Delta f = tr\ \nabla_X \nabla f.$$

Prova: *É suficiente provar a igualdade do enunciado em cada $p \in M$. Assim, seja $U \subset M$ uma vizinhança de p onde esteja definido um referencial ortonormal $\{e_1, ..., e_n\}$. Então*

$$\begin{aligned} tr(\nabla_{e_i} \nabla f)_p &= \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{e_i} \nabla f, e_i)(p) \\ &= div(\nabla f)(p) = \Delta f(p). \end{aligned}$$

*Lembre que um referencial ortonormal $\{E_1, ..., E_n\}$ em um aberto $U \subset M$ é **geodésico** em $p \in U$ se $(\nabla_{E_i} E_j)(p) = 0$ para todo $1 \leq i, j \leq n$. Para a construção de um referencial geodésico em uma vizinhança de p, veja [11].*

Definição 1.9. *Seja (M^n, g) um variedade Riemanniana. O **tensor curvatura de Riemann** é o $(1,3)$-tensor*

$$R_m : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M),$$

dado por

$$R_m(X,Y,Z) = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z,$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Em coordenadas,

$$R_m\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} = R^l_{ijk} \frac{\partial}{\partial x^l}.$$

Além disso, quando necessário, faremos a seguinte convenção $\dfrac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i$.
Usando o tensor métrico podemos interpretar o tensor R_m *como um* $(0,4)$*-tensor, definido por*

$$R_m : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M),$$

onde

$$R_m(X,Y,Z,W) = g(R_m(X,Y)Z,W).$$

Em coordenadas,

$$R_m\left(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l\right) = R_{ijkl}.$$

Proposição 1.2. *O tensor curvatura de Riemann satisfaz as seguintes propriedades*

(1) $R_m(X,Y,Z,W) = -R_m(Y,X,Z,W) = R_m(Y,X,W,Z)$.

(2) $R_m(X,Y,Z,W) = R_m(Z,W,X,Y)$.

(3) Primeira identidade de Bianchi

$$R_m(X,Y,Z,W) + R_m(Y,Z,X,W) + R_m(Z,X,Y,W) = 0.$$

Em coordenadas,

$$R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0.$$

(4) Segunda identidade de Bianchi

$$(\nabla_W R_m)(X,Y,Z,U) + (\nabla_Y R_m)(W,X,Z,U) + (\nabla_X R_m)(Y,W,Z,U) = 0.$$

Em coordenadas,

$$\nabla_l R_{ijks} + \nabla_j R_{liks} + \nabla_i R_{jlks} = 0.$$

Para a prova veja [11].

Definição 1.10. *Dados dois vetores* X *e* Y *não nulos e lineramente independentes em* T_pM *definimos a curvatura seccional do plano* σ *gerado pelos vetores* X *e* Y*, por*

$$K(\sigma) = K(X,Y) = \frac{R(X,Y,X,Y)}{|X|^2|Y|^2 - g(X,Y)^2}.$$

Definição 1.11. *Definimos o* ***tensor curvatura de Ricci*** *o* $(0,2)$*-tensor*

$$Ric : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$$

como sendo o traço do tensor curvatura de Riemann, i.e.,

$$Ric(X,Z) = tr\left\{Y \mapsto R_m(X,Y)Z\right\},$$

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$*.*

Em coordenadas,

$$(Ric)_{ik} = R_{ik} = g^{jl}R_{ijkl}.$$

Definição 1.12. *A* ***curvatura escalar*** *de uma variedade é a função* $R : M \mapsto \mathbb{R}$ *dada por*

$$R = trRic.$$

Em coordenadas,

$$R = g^{ik}R_{ik}.$$

Proposição 1.3. *Em uma variedade Riemanniana* (M^n, g)*, vale*

(1) Identidade de Ricci contraída

$$\nabla_j R_{ik} - \nabla_i R_{jk} = g^{ls}\nabla_l R_{ijks}.$$

(2) Segunda identidade de Bianchi contraída duas vezes

$$g^{jk}\nabla_j R_{ik} = \frac{1}{2}\nabla_i R.$$

Prova:

1. *Tomando o traço na segunda identidade de Bianchi, obteremos:*

$$\begin{aligned} 0 = g^{ls}\nabla_l R_{jiks} + g^{ls}\nabla_j R_{ilks} + g^{ls}\nabla_i R_{ljks} &= g^{ls}\nabla_l R_{jiks} + \nabla_j(g^{ls}R_{ilks}) + \nabla_i(g^{ls}R_{ljks}) \\ &= g^{ls}\nabla_l R_{jiks} + \nabla_j(g^{ls}R_{ilks}) - \nabla_i(g^{ls}R_{jlks}) \\ &= -g^{ls}\nabla_l R_{ijks} + \nabla_j R_{ik} - \nabla_i R_{jk}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\nabla_j R_{ik} - \nabla_i R_{jk} = g^{ls}\nabla_l R_{ijks}.$$

Além disso, podemos reescrever a equação acima da seguinte forma:

$$\nabla_i R_{jk} = \nabla_j R_{ik} + g^{ls}\nabla_l R_{jiks}. \tag{1.1}$$

2. *tomando o traço na equação* (1.1)*, temos:*

$$\begin{aligned}\nabla_i(g^{jk}R_{jk}) &= g^{jk}\nabla_j R_{ik} + g^{ls}\nabla_l(g^{jk}R_{ijsk})\\ \nabla_i R &= g^{jk}\nabla_j R_{ik} + g^{ls}\nabla_l R_{is}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\nabla_i R = 2g^{jk}\nabla_j R_{ik}, \tag{1.2}$$

onde fizemos as trocas convenientes dos índices $s \leftrightarrow k$ *e* $l \leftrightarrow j$.

Uma vez que, a comutação de derivadas covariantes que atuam em campos vetoriais define o tensor de curvatura de Riemann, vamos mostrar a seguir que a comutação de derivadas covariantes que atuam em tensores pode ser expressa em termos da curvatura. Denotaremos, a segunda derivada covariante como

$$\nabla^2 T = \nabla\nabla T.$$

Antes de tudo, vamos mostrar o seguinte lema.

Lema 1.1. *Se* T *é um* (r, s)*-tensor a segunda derivada covariante satisfaz*

$$\nabla^2 T(X, Y, Z_1, ...Z_s) = \nabla_X(\nabla_Y T)(Z_1, ..., Z_s) - (\nabla_{\nabla_X Y} T)(Z_1, ..., Z_s).$$

Demonstração. Primeiro, observe que

$$\begin{aligned}\nabla^2 T(X, Y, Z_1, ..., Z_s) =& \nabla(\nabla T)(X, Y, Z_1, ..., Z_s)\\ =& X\Big((\nabla T)(Y, Z_1, ..., Z_s)\Big) - \nabla T(\nabla_X Y, Z_1, ..., Z_s)\\ &- \sum_{i=1}^{s} \nabla T(Y, Z_1, ..., \nabla_X Z_i, ..., Z_s)\\ =& X\Big((\nabla T)(Y, Z_1, ..., Z_s)\Big) - \nabla_{\nabla_X Y} T(Z_1, ..., Z_s)\\ &+ \sum_{i=1}^{s} T(Z_1, ..., \nabla_{\nabla_X Y} Z_i, ..., Z_s)\\ &- \sum_{i=1}^{s} \Big(\nabla_Y T\Big)(Z_1, ..., \nabla_X Z_i, ..., Z_s).\end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}\nabla_X(\nabla_Y T)(Z_1, ..., Z_s) - \Big(\nabla_{\nabla_X Y} T\Big)(Z_1, ..., Z_s) =& X\Big((\nabla_Y T)(Z_1, ..., Z_s)\Big)\\ &- \sum_{i=1}^{s} \nabla_Y T(Z_1, ..., \nabla_X Z_i, ..., Z_s)\\ &- \nabla_{\nabla_X Y} T(Z_1, ..., Z_s)\\ &+ \sum_{i=1}^{s} T(Z_1, ..., \nabla_{\nabla_X Y} Z_i, ..., Z_s).\end{aligned}$$

Portanto, comparando os termos acima provamos o Lema 1.1. $\square$

Teorema 1.1. *(Comutação de derivadas covariantes) Se T é um $(0,s)$-tensor a segunda derivada covariante satisfaz:*

$$\nabla_X\nabla_Y T(Z_1,...,Z_s)-\nabla_Y\nabla_X T(Z_1,...,Z_s)=\sum_{i=1}^{s}T(Z_1,...,R_m(X,Y)Z_i,...,Z_s).$$

Demonstração. Por simplicidade, faremos apenas o caso em que $s=2$. Com efeito, usando o Lema 1.1, segue que

$$\begin{aligned}
&\nabla_X\nabla_Y T(Z_1,Z_2)-\nabla_Y\nabla_X T(Z_1,Z_2)\\
=&\nabla_X(\nabla_Y T)(Z_1,Z_2)-(\nabla_{\nabla_X Y}T)(Z_1,Z_2)-\nabla_Y(\nabla_X T)(Z_1,Z_2)+(\nabla_{\nabla_Y X}T)(Z_1,Z_2)\\
=&X\Big((\nabla_Y T)(Z_1,Z_2)\Big)-\nabla_Y T(\nabla_X Z_1,Z_2)-\nabla_Y T(Z_1,\nabla_X Z_2)-\nabla_X Y\Big(T(Z_1,Z_2)\Big)\\
&+T(\nabla_{\nabla_X Y}Z_1,Z_2)+T(Z_1,\nabla_{\nabla_X Y}Z_2)-Y\Big((\nabla_X T)(Z_1,Z_2)\Big)+(\nabla_X T)(\nabla_Y Z_1,Z_2)\\
&+(\nabla_X T)(Z_1,\nabla_Y Z_2)+\nabla_Y X(T(Z_1,Z_2))-T(\nabla_{\nabla_Y X}Z_1,Z_2)-T(Z_1,\nabla_{\nabla_Y X}Z_2).
\end{aligned}$$

Tal expressão pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned}
&\nabla_X\nabla_Y T(Z_1,Z_2)-\nabla_Y\nabla_X T(Z_1,Z_2)\\
=&X\Big((\nabla_Y T)(Z_1,Z_2)\Big)-Y\Big((\nabla_X T)(Z_1,Z_2)\Big)-Y\Big(T(\nabla_X Z_1,Z_2)\Big)+T(\nabla_Y\nabla_X Z_1,Z_2)\\
&+T(\nabla_X Z_1,\nabla_Y Z_2)-Y(T(Z_1,\nabla_X Z_2))+T(\nabla_Y Z_1,\nabla_X Z_2)+T(Z_1,\nabla_Y\nabla_X Z_2)\\
&+X\Big(T(\nabla_Y Z_1,Z_2)\Big)-T(\nabla_X\nabla_Y Z_1,Z_2)-T(\nabla_Y Z_1,\nabla_X Z_2)+X(T(Z_1,\nabla_Y Z_2))\\
&-T(\nabla_X Z_1,\nabla_Y Z_2)-T(Z_1,\nabla_X\nabla_Y Z_2)+\nabla_Y X\Big(T(Z_1,Z_2)\Big)-\nabla_X Y\Big(T(Z_1,Z_2)\Big)\\
&+T(\nabla_{\nabla_X Y}Z_1-\nabla_{\nabla_Y X}Z_1,Z_2)+T(Z_1,\nabla_{\nabla_X Y}Z_2-\nabla_{\nabla_Y X}Z_2)\\
=&X\Big((\nabla_Y T)(Z_1,Z_2)\Big)-Y\Big((\nabla_X T)(Z_1,Z_2)\Big)-Y\Big(T(\nabla_X Z_1,Z_2)\Big)-Y\Big(T(Z_1,\nabla_X Z_2)\Big)\\
&+X\Big(T(\nabla_Y Z_1,Z_2)\Big)+X\Big(T(Z_1,\nabla_Y Z_2)\Big)+\nabla_Y X(T(Z_1,Z_2))-\nabla_X Y(T(Z_1,Z_2))\\
&+T(\nabla_Y\nabla_X Z_1-\nabla_X\nabla_Y Z_1+\nabla_{[X,Y]}Z_1,Z_2)+T(Z_1,\nabla_Y\nabla_X Z_2-\nabla_X\nabla_Y Z_2+\nabla_{[X,Y]}Z_2).
\end{aligned}$$

Daí, usando a definição do tensor de curvatura de Riemann, é imediato ver que

$$\begin{aligned}
&\nabla_X\nabla_Y T(Z_1,Z_2)-\nabla_Y\nabla_X T(Z_1,Z_2)\\
=&X\Big(Y(T(Z_1,Z_2))-T(\nabla_Y Z_1,Z_2)-T(Z_1,\nabla_Y Z_2)\Big)\\
&-Y\Big(X(T(Z_1,Z_2))-T(\nabla_X Z_1,Z_2)-T(Z_1,\nabla_X Z_2)\Big)-Y\Big(T(\nabla_X Z_1,Z_2)\Big)\\
&-Y\Big(T(Z_1,\nabla_X Z_2)\Big)+X\Big(T(\nabla_Y Z_1,Z_2)\Big)+X\Big(T(Z_1,\nabla_Y Z_2)\Big)+\nabla_Y X(T(Z_1,Z_2))\\
&-\nabla_X Y(T(Z_1,Z_2))+T(R_m(X,Y)Z_1,Z_2)+T(Z_1,R_m(X,Y)Z_2),
\end{aligned}$$

simplificando algumas expressões, obtemos

$$\begin{aligned}
&\nabla_X \nabla_Y T(Z_1, Z_2) - \nabla_Y \nabla_X T(Z_1, Z_2)\\
=&X(Y(T(Z_1, Z_2))) - Y(X(T(Z_1, Z_2))) + \nabla_Y X(T(Z_1, Z_2)) - \nabla_X Y(T(Z_1, Z_2))\\
&+ T(R_m(X, Y)Z_1, Z_2) + T(Z_1, R_m(X, Y)Z_2)\\
=&[X, Y](T(Z_1, Z_2)) - [X, Y](T(Z_1, Z_2)) + T(Z_1, R_m(X, Y)Z_2) + T(R_m(X, Y)Z_1, Z_2)\\
=&T(R_m(X, Y)Z_1, Z_2) + T(Z_1, R_m(X, Y)Z_2),
\end{aligned}$$

o que prova o resultado. □

Corolário 1.1. *(Identidade de Ricci) O tensor de Ricci satisfaz a seguinte igualdade:*

$$\nabla_X \nabla_Y Ric(Z, W) - \nabla_Y \nabla_X Ric(Z, W) = Ric(R_m(X, Y)Z, W) + Ric(Z, R_m(X, Y)W).$$

Demonstração. Como o tensor de Ricci é um (0,2)-tensor, segue direto pelo Teorema 1.1. □

A expressão acima pode ser escrita, em coordenadas, da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\nabla_i \nabla_j R_{kl} - \nabla_j \nabla_i R_{kl} =& Ric(R_m(\partial_i, \partial_j)\partial_k, \partial_l) + Ric(\partial_l, R_m(\partial_i, \partial_j)\partial_k)\\
=& Ric(R_{ijk}^s \partial_s, \partial_l) + Ric(\partial_k, R_{ijl}^s \partial_s)\\
=& R_{ijkm} R_{ml} + R_{ijlm} R_{km}. \qquad (1.3)
\end{aligned}$$

1.3 Variedades de Einstein

Agora falaremos um pouco sobre variedades de Einstein.

Definição 1.13. *Uma variedade Riemanniana (M^n, g) é chamada variedade de* ***Einstein*** *se o tensor de Ricci é um múltiplo da métrica g, ou seja,*

$$Ric(X, Y) = \lambda g(X, Y)$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ em que $\lambda : M \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável.

Em coordenadas,

$$R_{ij} = \lambda g_{ij}. \qquad (1.4)$$

Observe que multiplicando (1.4) por g^{ij} e tomando o traço, temos que $R = \lambda n$. Além disso, quando uma variedade de Einstein é conexa, tem-se o seguinte resultado sobre a função λ.

Teorema 1.2. *Seja (M^n, g) uma variedade de Einstein conexa de dimensão $n \geq 3$, então λ é constante.*

Demonstração. Como a variedade é de Einstein temos $R_{ik} = \lambda g_{ik}$ e, também, $R = \lambda n$. Assim, pela Equação (1.2), obtemos

$$\begin{aligned} n\nabla_i \lambda = \nabla_i R &= 2g^{jk}\nabla_j R_{ik} \\ &= 2\nabla_k R_{ik} \\ &= 2\nabla_k \lambda g_{ik} \\ &= 2\nabla_i \lambda, \end{aligned}$$

o que implica,

$$(n-2)\nabla_i \lambda = 0.$$

Portanto, para $n \geq 3$ temos que λ é contante. □

1.4 Decomposição ortogonal do tensor de curvatura

Nessa seção vamos estudar a decomposição ortogonal do tensor Rm tendo como referência as notas de J. Viaclovsky em [27]. Além disso, vamos definir o tensor de Weyl que será de grande importância no decorrer do nosso trabalho. Em tudo que segue vamos denotar por Λ^k o espaço dos k-tensores alternados e por S^2 o conjunto das aplicações simétricas.

Definição 1.14. *Dizemos que um tensor $A \subset \otimes^4 T^*M$ está no espaço $S^2(\Lambda^2(T^*M))$ se satisfaz as seguintes condições:*

1. $A_{ijkl} = -A_{jikl}$
2. $A_{ijkl} = -A_{ijlk}$
3. $A_{ijkl} = A_{klij}$.

Dessa forma, como o tensor de Riemann visto como um $(0,4)$-tensor satisfaz as condições acima temos que

$$Rm \in S^2(\Lambda^2(T^*M)) \subset \otimes^4 T^*M.$$

Definição 1.15. *Definimos a aplicação $b : S^2\Lambda^2 \to \otimes^4 T^*M$ por*

$$bA_{ijkl} = \frac{1}{3}(A_{ijkl} + A_{jkil} + A_{kijl}).$$

onde essa aplicação é chamada de simetrização de Bianchi.

É fácil verificar que o tensor $Rm \in Ker(b)$.

Proposição 1.4. *A imagem de b está contida em $S^2\Lambda^2$.*

Demonstração. Basta observar que a imagem de b satisfaz as condições da definição 1.14. Com efeito, veja que

$$\begin{aligned} bA_{ijkl} &= \frac{1}{3}(A_{ijkl} + A_{jkil} + A_{kijl}) \\ &= \frac{1}{3}(-A_{jikl} - A_{kjil} - A_{kijl}) \\ &= -bA_{jikl}, \end{aligned}$$

analogamente temos $bA_{ijkl} = -bA_{ijlk}$.

Agora, note que

$$\begin{aligned} bA_{ijkl} &= \frac{1}{3}(A_{ijkl} + A_{jkil} + A_{kijl}) \\ &= \frac{1}{3}(A_{klij} + A_{iljk} + A_{kijl}) \\ &= \frac{1}{3}(A_{klij} + A_{likj} + A_{iklj}) \\ &= bA_{klij}, \end{aligned}$$

como desejado. $\square$

Proposição 1.5. *O espaço $S^2(\Lambda^2)$ pode ser decomposto como*

$$S^2(\Lambda^2) = Ker(b) \oplus Im(b),$$

que é uma soma direta ortogonal.

Demonstração. Primeiramente, veja que b é idempotente, isto é, $b^2 = b$. Com efeito,

$$\begin{aligned} b^2A_{ijkl} =& \frac{1}{3}b(A_{ijkl} + A_{jkil} + A_{kijl}) \\ =& \frac{1}{9}(A_{ijkl} + A_{jkil} + A_{kijl} + A_{jkil} + A_{kijl} + A_{ijkl} \\ & + A_{kijl} + A_{ijkl} + A_{jkil}) \\ =& \frac{1}{9}(3A_{ijkl} + 3A_{jkil} + 3A_{kijl}) \\ =& bA_{ijkl}. \end{aligned}$$

Agora, observe que o tensor $A \in S^2(\Lambda^2)$ pode ser decomposto na forma

$$A = (A - b(A)) + b(A),$$

onde $b(A) \in Im(b)$ e $A - b(A) \in Ker(b)$, pois

$$b(A - b(A)) = b(A) - b^2(A) = 0.$$

Para finalizar, mostremos que b é auto-adjunta. De fato,

$$\begin{aligned} g(A_{ijkl}, bB_{ijkl}) &= \frac{1}{3}A_{ijkl}(B_{ijkl} + B_{jkil} + B_{kijl}) \\ &= \frac{1}{3}A_{ijkl}B_{ijkl} + \frac{1}{3}A_{ijkl}B_{jkil} + \frac{1}{3}A_{ijkl}B_{kij} \\ &= \frac{1}{3}A_{ijkl}B_{ijkl} + \frac{1}{3}\underbrace{A_{ilkj}B_{ijlk}}_{l\leftrightarrow j} + \frac{1}{3}\underbrace{A_{ikjl}B_{jikl}}_{k\leftrightarrow j} \\ &= \frac{1}{3}A_{ijkl}B_{ijkl} + \frac{1}{3}A_{jkil}B_{ijkl} + \frac{1}{3}A_{kijl}B_{ijkl} \\ &= g(bA_{ijkl}, B). \end{aligned}$$

Então, se $A \in Ker(b)$ e $B = b(C) \in Im(b)$, temos

$$g(A, B) = g(A, b(C)) = g(bA, C) = 0,$$

isto é, b é uma projeção ortogonal. $\square$

Em seguida, vamos identificar a imagem da aplicação b.

Proposição 1.6.

$$Im(b) = \Lambda^4 T^* M.$$

Demonstração. Para provar esse resultado, é suficiente mostrar que

$$b(\alpha \odot \beta) = \frac{1}{3}\alpha \wedge \beta \tag{1.5}$$

onde $\alpha, \beta \in \Lambda^2(T^*M)$ e denotamos por $\odot$ o **produto simétrico** que é dado por

$$(\alpha \odot \beta)_{ijkl} = \alpha_{ik}\beta_{jl} + \alpha_{kl}\beta_{ij}.$$

Além disso, é importante ressaltar que estamos pensando em $\Lambda^2(T^*M)$ como o espaço dos $(0, 2)$-tensores anti-simétricos. Por conseguinte, temos que o lado esquerdo de (1.5) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} b(\alpha \odot \beta)_{ijkl} &= \frac{1}{3}\left[(\alpha \odot \beta)_{ijkl} + (\alpha \odot \beta)_{jkil} + (\alpha \odot \beta)_{kijl}\right] \\ &= \frac{1}{3}(\alpha_{ij}\beta_{kl} + \alpha_{kl}\beta_{ij} + \alpha_{jk}\beta_{il} + \alpha_{il}\beta_{jk} + \alpha_{ki}\beta_{jl} + \alpha_{jl}\beta_{ki}). \end{aligned}$$

Por outra lado, sejam $f \in \Lambda^k(V)$ e $g \in \Lambda^l(V)$, o **produto exterior**($\wedge$) entre f e g é a aplicação $\wedge : \Lambda^k(V) \times \Lambda^l(V) \to \Lambda^{k+l}(V)$, dada por

$$(f \wedge g)(v_1, ..., v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} sgn(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(k)}) g(v_{\sigma(k+1)}, ..., v_{\sigma(k+l)})$$

onde S_{k+l} é o grupo de todas as permutações do conjuto $\{1, ..., k+l\}$ e $sgn(\sigma) = (-1)^p$ com p sendo número de inversões de σ.

Em particular, o produto exterior entre α e β é dado por:

$$\alpha \wedge \beta(e_i, e_j, e_k, e_l) = \frac{1}{2!2!} \sum_{\sigma \in S_4} sgn(\sigma) \alpha(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}) \beta(e_{\sigma(3)}, e_{\sigma(4)}),$$

onde a soma é sobre todas as permutações de comprimento 4. Desse modo, temos que

$$\begin{aligned}
\alpha \wedge \beta(e_i, e_j, e_k, e_l) =& sgn(\sigma)\alpha(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)})\beta(e_{\sigma(3)}, e_{\sigma(4)}) + sgn(\sigma)\alpha(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(3)})\beta(e_{\sigma(4)}, e_{\sigma(2)}) \\
&+ sgn(\sigma)\alpha(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(4)})\beta(e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)}) + sgn(\sigma)\alpha(e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)})\beta(e_{\sigma(4)}, e_{\sigma(1)}) \\
&+ sgn(\sigma)\alpha(e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(4)})\beta(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(3)}) + sgn(\sigma)\alpha(e_{\sigma(3)}, e_{\sigma(4)})\beta(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}) \\
=& \alpha_{ij}\beta_{kl} + \alpha_{ik}\beta_{lj} + \alpha_{il}\beta_{jk} - \alpha_{jk}\beta_{li} - \alpha_{jl}\beta_{ik} + \alpha_{kl}\beta_{ij} \\
=& \alpha_{ij}\beta_{kl} + \alpha_{kl}\beta_{ij} + \alpha_{jk}\beta_{il} + \alpha_{il}\beta_{jk} + \alpha_{ki}\beta_{jl} + \alpha_{jl}\beta_{ki} \\
=& 3b(\alpha \odot \beta)_{ijkl}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$b(\alpha \odot \beta)_{ijkl} = \frac{1}{3} \alpha \wedge \beta(e_i, e_j, e_k, e_l),$$

como desejado. □

Definição 1.16. *O espaço dos tensores tipo-curvatura é*

$$C = Ker(b) \subset S^2(\Lambda^2).$$

Observe que, como os tensores tipo-curvatura satisfazem a primeira identidade de Bianchi, temos que b aplicado no tensor de curvatura é zero, ou seja, eles pertencem ao $Ker(b)$.

Assim, vamos considerar a decomposição

$$S^2(\Lambda^2) = C \oplus \Lambda^4$$

e calcularemos a dimensão do espaço C.

Antes de tudo, sabemos que se V é um espaço vetorial de dimensão p, então

$$dim(S^2(V)) = \frac{p(p+1)}{2}.$$

Além disso, se W for um espaço vetorial de dimensão n, então

$$dim(\Lambda^2(W)) = \binom{n}{2}.$$

Portanto, fazendo $V = \Lambda^2$ temos

$$dim S^2(\Lambda^2) = \frac{1}{8}n(n-1)(n^2-n+2)$$

e observando

$$dim(S^2(\Lambda^2)) = dim(C) + dim(\Lambda^4),$$

segue que

$$\begin{aligned} dim(C) &= \frac{1}{8}n(n-1)(n^2-n+2) - \frac{1}{24}n(n-2)(n-2)(n-2) \\ &= \frac{1}{12}n(n-1)(n^2+n) \\ &= \frac{1}{12}n^2(n^2-1). \end{aligned}$$

Em particular, para $n = 3$ temos $dim(C) = 6$.

Definição 1.17. *O traço de um tensor é dado pela aplicação,*

$$c : C \to S^2(T^*M)$$

definido por

$$(c(A))(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} A(X, e_i, Y, e_i),$$

onde $\{e_i\}$ *é uma base ortonormal para* TM.

Em particular, sabemos que $c(Rm) = Ric$.

Definição 1.18. *O produto de* ***Kulkarni-Nomizu*** *é a aplicação*

$$\owedge : S^2(T^*M) \times S^2(T^*M) \to C$$

que obtém um $(0,4)$*-tensor simétrico definido por*

$$\begin{aligned} (A \owedge B)(X,Y,Z,W) &= A(X,Z)B(Y,W) + A(Y,W)B(X,Z) \\ &\quad - A(X,W)B(Y,Z) - A(Y,Z)B(X,W), \end{aligned}$$

onde A *e* B *é um* $(0,2)$*-tensor simétrico.*

Proposição 1.7. *A aplicação* $\psi : S^2(T^*M) \to C$ *definida por*

$$\psi(h) = h \owedge g,$$

é injetiva para todo $n > 2$.

Demonstração. Primeiramente, vamos provar que

$$g(f, h \owedge g) = 4g(cf, h). \tag{1.6}$$

Com efeito, calculando (em uma base ortonormal) o lado esquerdo da igualdade acima segue que

$$\begin{aligned} g\left(f_{ijkl}, (h \owedge g)_{ijkl}\right) &= f_{ijkl}(h_{ik}g_{jl} + h_{jl}g_{ik} - h_{il}g_{jk} - h_{jk}g_{il}) \\ &= f_{ijkj}h_{ik} + f_{ijil}h_{jl} - f_{ijjl}h_{il} - f_{ijki}h_{jk} \\ &= f_{ijkj}h_{ik} + \underbrace{f_{jijk}h_{ik}}_{i \leftrightarrow j, k \leftrightarrow l} - \underbrace{f_{ijjk}h_{ik}}_{l \leftrightarrow k} - \underbrace{f_{jikj}h_{ik}}_{i \leftrightarrow j} \\ &= 4f_{ijkj}h_{ik}, \end{aligned}$$

isto é,

$$g(f, h \owedge g) = 4g(cf, h).$$

Além disso, observe que

$$c(h \owedge g) = (n-2)h + tr(h)g. \tag{1.7}$$

De fato, tomando o traço em $(h \owedge g)$, temos que

$$\begin{aligned} (c(h \owedge g))_{ik} &= g^{jl}(h_{ik}g_{jl} + h_{jl}g_{ik} - h_{il}g_{jk} - h_{jk}g_{il}) \\ &= nh_{ik} + tr(h)g_{ik} - 2h_{ik} \\ &= (n-2)h_{ik} + tr(h)g_{ik}, \end{aligned}$$

o que implica,

$$c(h \owedge g) = (n-2)h + tr(h)g.$$

Daí, para provar a proposição, assuma que $h \owedge g = 0$ e usando as Equações (1.6) e (1.7), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= g(h \owedge g, h \owedge g) \\ &= 4g(h, c(h \owedge g)) \\ &= 4g(h, (n-2)h + tr(h)g) \\ &= 4\left((tr(h))^2 + (n-2)|h|^2\right). \end{aligned}$$

Portanto, isso implica que $h = 0$ se $n > 2$, ou seja, o $Ker(\psi)$ só possui o vetor nulo. Logo, a aplicação é injetiva. $\square$

Corolário 1.2. *Para $n = 2$, a curvatura escalar determina completamente o tensor da curvatura. Para $n = 3$, a curvatura de Ricci determina o tensor da curvatura total.*

Demonstração. No caso $n = 2$, vamos considerar a base $\{e_1, e_2\} \subset T_pM$. Assim, temos

$$R_{ik} = \sum_{j=1}^{2} R_{ijkj} = R_{i1k1} + R_{i2k2}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} R = \sum_{i,k=1}^{2} &= R_{11} + 2R_{12} + R_{22} \\ &= R_{1212} + R_{2121} \\ &= 2R_{1212} \end{aligned}$$

Assim, o único componente diferente de zero de R pode ser o R_{1212}.

Para $n = 3$, pela proposição 1.7, temos que a aplicação

$$\psi : S^2(T^*M) \to C$$

é injetiva.

Por outro lado, temos $\dim(S^2(T^*M)) = 6$ e $dim(C) = 6$. Logo, ψ é sobrejetiva e, portanto, obtemos que ψ é um isomorfismo. Assim, como foi visto $Rm \in C$ e, consequentemente, existe um $A \in S^2(T^*M)$ tal que

$$Rm = A \owedge g.$$

Agora, encontraremos A. Note que,

$$\begin{aligned} Ric = c(Rm) &= c(A \owedge g) \\ &= A + tr(A)g. \end{aligned}$$

Assim,

$$A = Ric - tr(A)g$$

e tomando o traço em ambos os lados na igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} c(A) &= c(Ric - tr(A)g) \\ tr(A) &= R - 3tr(A). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$tr(A) = \frac{R}{4}.$$

Daí, temos

$$A = Ric - \frac{R}{4}g$$

e, portanto,

$$Rm = Ric \owedge g - \frac{R}{4} g \owedge g.$$

□

No caso geral, em qualquer dimensão, temos que o tensor de Riemann não necessariamente pertence a imagem da aplicação ψ, mas como $Rm \in C$ e queremos encontrar uma decomposição ortogonal do tensor de Rm, deve existir um tensor em C cujo traço é nulo tal que

$$Rm = W + A \owedge g,$$

onde $A \in S^2(T^*M)$ e $W \in Ker(c)$.

Em vista disso, vamos encontrar o tensor A tal que $\psi(A)$ e W seja ortogonal com traço de W nulo, isto é,

$$\begin{aligned} 0 = c(W) &= c(Rm - A \owedge g) \\ &= Ric - (tr(A) + (n-2)A), \end{aligned}$$

ou seja,

$$A = \frac{Ric - tr(A)g}{n-2}.$$

Assim, tomando o traço em ambos os lados da igualdade acima

$$\begin{aligned} tr(A) = c(A) &= \frac{c(Ric - tr(A)g)}{n-2} \\ &= \frac{R - tr(A)n}{n-2} \end{aligned}$$

obtemos,

$$tr(A) = \frac{R}{2(n-1)}.$$

Portanto,

$$A = \frac{1}{n-2}\left(Ric - \frac{R}{2(n-1)}g\right), \forall n > 2. \tag{1.8}$$

O tensor A é um $(0,2)$-tensor simétrico conhecido como o tensor de Schouten.

Por fim, concluímos que para $n \geq 3$, a decomposição ortogonal do tensor de Riemann é dada por

$$Rm = \frac{1}{n-2}(Ric \owedge g) - \frac{R}{2(n-1)(n-2)}(g \owedge g) + W,$$

onde $W \in Ker(c)$.

1.4.1 Decomposição ortogonal do tensor $\mathring{Ric} \owedge \mathring{Ric}$

Agora, vamos encontrar uma decomposição ortogonal para o tensor $\mathring{Ric} \owedge \mathring{Ric}$ onde ele vai ser escrito na forma $\mathring{Ric} \owedge \mathring{Ric} = T + U + V$ com T sendo um tensor de traço livre. Antes de tudo, sabemos que o $\mathring{Ric}$ é um $(0,2)$-tensor simétrico, então, pelo produto de Kulkarni-Numizu, obtemos que o $\mathring{Ric} \owedge \mathring{Ric}$ é um $(0,4)$-tensor simétrico e vamos concluir que ele antisimétrico nas duas primeiras e nas duas últimas entradas. De fato,

$$\begin{aligned}
(\mathring{Ric} \owedge \mathring{Ric})_{ijkl} &= 2(\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jl} - \mathring{R}_{il}\mathring{R}_{jk}) \\
&= -2(\mathring{R}_{il}\mathring{R}_{jk} - \mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jl}) \\
&= -(\mathring{Ric} \owedge \mathring{Ric})_{ijlk}.
\end{aligned}$$

Analogamente, temos $(\mathring{Ric} \owedge \mathring{Ric})_{ijkl} = -(\mathring{Ric} \owedge \mathring{Ric})_{jikl}$. Assim, $\mathring{Ric} \owedge \mathring{Ric}$ satisfaz as condições da Definição 1.14 e, portanto, $\mathring{Ric} \owedge \mathring{Ric} \in S^2(\Lambda(T^*M))$. Além disso, note que

$$\begin{aligned}
b(\mathring{Ric} \owedge \mathring{Ric})_{ijkl} &= \frac{1}{3}[(\mathring{Ric} \owedge \mathring{Ric})_{ijkl} + (\mathring{Ric} \owedge \mathring{Ric})_{jkil} + (\mathring{Ric} \owedge \mathring{Ric})_{kijl}] \\
&= \frac{1}{3}(2\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jl} - 2\mathring{R}_{il}\mathring{R}_{jk} + 2\mathring{R}_{ji}\mathring{R}_{kl} - 2\mathring{R}_{jl}\mathring{R}_{ki} + 2\mathring{R}_{kj}\mathring{R}_{il} - 2\mathring{R}_{kl}\mathring{R}_{ij}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo, $\mathring{Ric} \owedge \mathring{Ric} \in Ker(b)$.

Dessa forma, o fato de $\mathring{Ric} \owedge \mathring{Ric} \in C$ não implica que ele pertença a imagem da aplicação ψ, mas conseguimos decompô-lo ortogonalmente na soma direta da imagem da aplicação ψ aplicada em um tensor B e um tensor T cujo traço é livre. Daí, podemos escrevê-lo na forma

$$\mathring{Ric} \owedge \mathring{Ric} = T + B \owedge g,$$

onde $B \in S^2(T^*M)$ e $T \in Ker(c)$.

Em seguida, vamos encontrar o tensor B para que o tensor T tenha traço livre. De fato, devemos ter

$$\begin{aligned} 0 = c(T) &= (c(\overset{\circ}{Ric} \owedge \overset{\circ}{Ric} - B \owedge g))_{ik} \\ &= (c(\overset{\circ}{Ric} \owedge \overset{\circ}{Ric}))_{ik} - (c(B \owedge g))_{ik} \\ &= 2g^{jl}(\overset{\circ}{R}_{ik}\overset{\circ}{R}_{jl} - \overset{\circ}{R}_{il}\overset{\circ}{R}_{jk}) - (c(B \owedge g))_{ik} \\ &= -2\overset{\circ}{R}_{ij}\overset{\circ}{R}_{jk} - tr(B)g_{ik} - (n-2)B_{ik}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$B_{ik} = -\frac{1}{n-2}(2\overset{\circ}{R}_{ij}\overset{\circ}{R}_{jk} + tr(B)g_{ik}).$$

Agora, tirando o traço da igualdade acima, temos

$$\begin{aligned} tr(B) &= -\frac{1}{n-2}g^{ik}(2\overset{\circ}{R}_{ij}\overset{\circ}{R}_{jk} + tr(B)g_{ik}) \\ &= -\frac{1}{n-2}(2|\overset{\circ}{Ric}|^2 + ntr(B)), \end{aligned}$$

o que implica,

$$tr(B) = -\frac{|\overset{\circ}{Ric}|^2}{n-1}.$$

Portanto, para $n \geq 2$ temos que

$$B_{ik} = -\frac{1}{n-2}\left(2\overset{\circ}{R}_{ij}\overset{\circ}{R}_{jk} - \frac{|\overset{\circ}{Ric}|^2}{n-1}g_{ik}\right).$$

Podemos reescrever a igualdade acima da seguinte forma

$$B = -\frac{1}{n-2}\left(2\overset{\circ}{Ric}{}^2 - \frac{|\overset{\circ}{Ric}|^2}{n-1}g\right),$$

onde $\overset{\circ}{R}_{ij}\overset{\circ}{R}_{jk} = (\overset{\circ}{Ric}{}^2)_{ik}$.

Assim, concluímos que

$$\begin{aligned} (\overset{\circ}{Ric} \owedge \overset{\circ}{Ric})_{ijkl} &= T_{ijkl} + (B \owedge g)_{ijkl} \\ &= T_{ijkl} + \left(-\frac{1}{n-2}(2\overset{\circ}{Ric}{}^2 - \frac{|\overset{\circ}{Ric}|^2}{n-1}g) \owedge g\right)_{ijkl} \\ &= T_{ijkl} - \frac{2}{n-2}(\overset{\circ}{Ric}{}^2 \owedge g)_{ijkl} + \frac{|\overset{\circ}{Ric}|^2}{(n-1)(n-2)}(g \owedge g)_{ijkl} \\ &= T_{ijkl} - \frac{2}{n-2}(\overset{\circ}{Ric}{}^2 \owedge g)_{ijkl} + \left(\frac{2}{n(n-2)} - \frac{1}{n(n-1)}\right)|\overset{\circ}{Ric}|^2(g \owedge g)_{ijkl} \\ &= T_{ijkl} - \frac{2}{n-2}(\overset{\circ}{Ric}{}^2 \owedge g)_{ijkl} + \frac{2}{n(n-2)}|\overset{\circ}{Ric}|^2(g \owedge g)_{ijkl} \\ &- \frac{1}{n(n-1)}|\overset{\circ}{Ric}|^2(g \owedge g)_{ijkl}. \end{aligned}$$

Logo,

$$(\mathring{Ric} \owedge \mathring{Ric})_{ijkl} = T_{ijkl} + V_{ijkl} + U_{ijkl},$$

onde

$$V_{ijkl} = -\frac{2}{n-2}(\mathring{Ric}^2 \owedge g)_{ijkl} + \frac{2}{n(n-2)}|\mathring{Ric}|^2(g \owedge g)_{ijkl}$$

e

$$U_{ijkl} = -\frac{1}{n(n-1)}|\mathring{Ric}|^2(g \owedge g)_{ijkl}.$$

1.5 Invariante de Yamabe

O problema de Yamabe em geometria diferencial trata sobre a existência de métricas Riemannianas com curvatura escalar constante e leva este nome em homenagem ao matemático Hidehiko Yamabe. Mais precisamente o problema nos fala que, dada uma variedade Riemanniana compacta (M^n, g), com dimensão $n \geq 3$, é possível encontrar uma métrica conforme a g com curvatura escalar constante. Em 1960, Yamabe [28] apresentou uma solução para o problema, entretanto Trudinger [26] em 1968 descobriu um erro em sua prova, e provou o problema sob a hipótese de curvatura escalar não-positiva. Em 1976, Aubin [2] provou o problema supondo $n \geq 6$ e (M^n, g) não conformemente plana. Os casos restantes foram provados por Schoen [24] em 1984 usando o Teorema da Massa positiva. A seguir, tendo como referência [20], descreveremos uma breve motivação afim de introduzir a constante de Yamabe, a qual tem um papel fundamental no resultado principal desta dissertação.

O primeiro fato que lembraremos aqui é a relação entre as curvaturas de Ricci quando mudamos a métrica g por uma métrica conforme $\tilde{g} = e^{2h}g$, onde $h \in C^\infty(M)$. Para o que segue, não é difícil verificar que, se ∇ e $\tilde{\nabla}$ denotam respectivamente as conexões de Levi-Civita de g e $\tilde{g}$, então para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos a seguinte relação

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X(h)Y + Y(h)X - g(X,Y)\nabla h.$$

Proposição 1.8. *Se Ric e $\tilde{Ric}$ denotam respectivamente as curvarturas de Ricci de M com respeito às métricas g e $\tilde{g} = e^{2h}g$, então*

$$\tilde{R}_{ij} = R_{ij} - (n-2)\nabla_i\nabla_j h + (n-2)\nabla_i h\nabla_j h - (\Delta h + (n-2)|\nabla h|^2)g_{ij}.$$

Demonstração. Considere $\{e_i\}$ um referencial ortonormal geodésico em p na métrica g (note que $\{\tilde{e}_i = e^{-h}e_i\}$ é um referencial ortonormal na métrica $\tilde{g}$). Daí, segue diretamente da definição

$$
\begin{aligned}
\tilde{Ric}(\tilde{e}_i,\tilde{e}_j) =& \langle \tilde{R}(\tilde{e}_i,\tilde{e}_k)\tilde{e}_j,\tilde{e_k}\rangle_{\tilde{g}}\\
=& \langle \tilde{\nabla}_{\tilde{e}_k}\tilde{\nabla}_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_j - \tilde{\nabla}_{\tilde{e}_i}\tilde{\nabla}_{\tilde{e}_k}\tilde{e}_j + \tilde{\nabla}_{[\tilde{e_i},\tilde{e_k}]}\tilde{e_j},\tilde{e}_k\rangle_{\tilde{g}}\\
=& \langle \tilde{\nabla}_{e_k}\tilde{\nabla}_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_j - \tilde{\nabla}_{e_i}\tilde{\nabla}_{\tilde{e}_k}\tilde{e}_j, e_k\rangle_g + \langle \tilde{\nabla}_{\tilde{\nabla}_{e_i}\tilde{e_k}-\tilde{\nabla}_{e_k}\tilde{e_i}}\tilde{e_j}, e_k\rangle_g\\
=& \langle \tilde{\nabla}_{e_k}e^{-h}\tilde{\nabla}_{e_i}\tilde{e}_j - \tilde{\nabla}_{e_i}e^{-h}\tilde{\nabla}_{e_k}\tilde{e}_j, e_k\rangle_g + \langle \tilde{\nabla}_{\tilde{\nabla}_{e_i}\tilde{e_k}-\tilde{\nabla}_{e_k}\tilde{e_i}}\tilde{e_j}, e_k\rangle_g\\
=& \langle \tilde{\nabla}_{e_k}e^{-h}(-e^{-h}e_i(h)e_j + e^{-h}\tilde{\nabla}_{e_i}e_j) - \tilde{\nabla}_{e_i}e^{-h}(-e^{-h}e_k(h)e_j + e^{-h}\tilde{\nabla}_{e_k}e_j), e_k\rangle_g\\
&+ \langle \tilde{\nabla}_{\left(-e^{-h}e_i(h)e_k + e^{-h}\tilde{\nabla}_{e_i}e_k + e^{-h}e_k(h)e_i - e^{-h}\tilde{\nabla}_{e_k}e_i\right)}\tilde{e_j}, e_k\rangle_g.\\
=& \langle -\tilde{\nabla}_{e_k}e^{-2h}e_i(h)e_j + \tilde{\nabla}_{e_k}e^{-2h}(\nabla_{e_i}e_j + e_i(h)e_j + e_j(h)e_i - g_{ij}\nabla h)\\
&+ \tilde{\nabla}_{e_i}e^{-2h}e_k(h)e_j - \tilde{\nabla}_{e_i}e^{-2h}(\nabla_{e_k}e_j + e_k(h)e_j + e_j(h)e_k - g_{jk}\nabla h), e_k\rangle_g\\
&+ \langle \tilde{\nabla}_{\left(-e^{-h}e_i(h)e_k + e^{-h}\tilde{\nabla}_{e_i}e_k + e^{-h}e_k(h)e_i - e^{-h}\tilde{\nabla}_{e_k}e_i\right)}\tilde{e_j}, e_k\rangle_g.
\end{aligned}
$$

Simplificando, temos

$$
\begin{aligned}
\tilde{Ric}(\tilde{e}_i,\tilde{e}_j) =& \langle \tilde{\nabla}_{e_k}e^{-2h}\nabla_{e_i}e_j - \tilde{\nabla}_{e_i}e^{-2h}\nabla_{e_k}e_j, e_k\rangle_g + \langle \tilde{\nabla}_{e_k}e^{-2h}(e_j(h)e_i - g_{ij}\nabla h)\\
&- \tilde{\nabla}_{e_i}e^{-2h}(e_j(h)e_k - g_{jk}\nabla h), e_k\rangle_g\\
&+ e^{-h}\langle \tilde{\nabla}_{\left(-e_i(h)e_k + \tilde{\nabla}_{e_i}e_k + e_k(h)e_i - \tilde{\nabla}_{e_k}e_i\right)}\tilde{e_j}, e_k\rangle_g\\
=& \langle e_k(e^{-2h})\nabla_{e_i}e_j + e^{-2h}\tilde{\nabla}_{e_k}\nabla_{e_i}e_j - e_i(e^{-2h})\nabla_{e_k}e_j - e^{-2h}\tilde{\nabla}_{e_i}\nabla_{e_k}e_j, e_k\rangle_g\\
&+ \langle -2e^{-2h}e_k(h)(e_j(h)e_i - g_{ij}\nabla h) + e^{-2h}\tilde{\nabla}_{e_k}(e_j(h)e_i - g_{ij}\nabla h)\\
&+ 2e^{-2h}e_i(h)(e_j(h)e_k - g_{jk}\nabla h) - e^{-2h}\tilde{\nabla}_{e_i}(e_j(h)e_k - g_{jk}\nabla h), e_k\rangle_g\\
&+ e^{-h}\langle \tilde{\nabla}_{\left(-e_i(h)e_k + e_k(h)e_i + \nabla_{e_i}e_k - \nabla_{e_k}e_i\right)}\tilde{e_j}, e_k\rangle_g.
\end{aligned}
$$

e usando que $\nabla_{e_i}e_j(p) = 0$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\tilde{Ric}(\tilde{e}_i,\tilde{e}_j) =& e^{-2h}\langle \tilde{\nabla}_{e_k}\nabla_{e_i}e_j - \tilde{\nabla}_{e_i}\nabla_{e_k}e_j, e_k\rangle_g\\
&+ 2e^{-2h}\langle -e_k(h)e_j(h)e_i + e_i(h)e_j(h)e_k + (e_k(h)g_{ij} - e_i(h)g_{jk})\nabla h, e_k\rangle_g\\
&+ e^{-2h}\langle \tilde{\nabla}_{e_k}(e_j(h)e_i - g_{ij}\nabla h) - \tilde{\nabla}_{e_i}(e_j(h)e_k - g_{jk}\nabla h), e_k\rangle_g\\
&+ e^{-h}\langle \tilde{\nabla}_{(-e_i(h)e_k + e_k(h)e_i)}\tilde{e_j}, e_k\rangle_g.
\end{aligned}
$$

Tal expressão pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
e^{2h}e^{-2h}\tilde{Ric}(e_i,e_j) =&\langle\tilde{\nabla}_{e_k}\nabla_{e_i}e_j-\tilde{\nabla}_{e_i}\nabla_{e_k}e_j,e_k\rangle_g\\
&+2\langle -e_k(h)e_j(h)e_i+e_i(h)e_j(h)e_k+(e_k(h)g_{ij}-e_i(h)g_{jk})\nabla h,e_k\rangle_g\\
&+\langle\tilde{\nabla}_{e_k}e_j(h)e_i-\tilde{\nabla}_{e_i}e_j(h)e_k,e_k\rangle_g+\langle -g_{ij}\tilde{\nabla}_{e_k}\nabla h+g_{jk}\tilde{\nabla}_{e_i}\nabla h,e_k\rangle_g\\
&+e^h\langle -e_i(h)\tilde{\nabla}_{e_k}\tilde{e_j}+e_k(h)\tilde{\nabla}_{e_i}\tilde{e_j},e_k\rangle_g.
\end{aligned}$$

Calculando cada termo separadamente deve-se obter:

I) $\langle\tilde{\nabla}_{e_k}\nabla_{e_i}e_j-\tilde{\nabla}_{e_i}\nabla_{e_k}e_j,e_k\rangle_g=R_{ij}$.

De fato, devemos notar que

$$\begin{aligned}
\langle\tilde{\nabla}_{e_k}\nabla_{e_i}e_j-\tilde{\nabla}_{e_i}\nabla_{e_k}e_j,e_k\rangle_g =&\langle\nabla_{e_k}\nabla_{e_i}e_j+e_k(h)\nabla_{e_i}e_j+\langle\nabla_{e_i}e_j,\nabla h\rangle_g e_k\\
&-\langle\nabla_{e_i}e_j,e_k\rangle_g\nabla h-\nabla_{e_i}\nabla_{e_k}e_j-e_i(h)\nabla_{e_k}e_j\\
&-\langle\nabla_{e_k}e_j,\nabla h\rangle_g e_i+\langle\nabla_{e_k}e_j,e_i\rangle_g\nabla h,e_k\rangle_g\\
=&\langle\nabla_{e_k}\nabla_{e_i}e_j-\nabla_{e_i}\nabla_{e_k}e_j,e_k\rangle_g\\
=&R_{ij},
\end{aligned}$$

onde simplificamos algumas expressões usando $\nabla_{e_i}e_j(p)=0$, provando o item *I*).

II) $2\langle -e_k(h)e_j(h)e_i+e_i(h)e_j(h)e_k+(e_k(h)g_{ij}-e_i(h)g_{jk})\nabla h,e_k\rangle_g$
$=2\left((n-2)e_i(h)e_j(h)+g_{ij}|\nabla h|^2\right).$

Para este item, basta observar que

$$\begin{aligned}
&2\langle -e_k(h)e_j(h)e_i+e_i(h)e_j(h)e_k+(e_k(h)g_{ij}-e_i(h)g_{jk})\nabla h,e_k\rangle_g\\
&=2\left(\langle -e_k(h)e_j(h)e_i,e_k\rangle_g+\langle e_i(h)e_j(h)e_k,e_k\rangle_g+(e_k(h)g_{ij}-e_i(h)g_{jk})\langle\nabla h,e_k\rangle_g\right)\\
&=2\Big((n-2)e_i(h)e_j(h)+g_{ij}|\nabla h|^2\Big),
\end{aligned}$$

e assim concluímos o item *II*).

III) $\langle\tilde{\nabla}_{e_k}e_j(h)e_i-\tilde{\nabla}_{e_i}e_j(h)e_k,e_k\rangle_g=-(n-1)e_i(e_j(h))$.

Com um simples cálculo,

$$\begin{aligned}
&\langle\tilde{\nabla}_{e_k}e_j(h)e_i-\tilde{\nabla}_{e_i}e_j(h)e_k,e_k\rangle_g\\
&=\langle e_k(e_j(h))e_i+e_j(h)\tilde{\nabla}_{e_k}e_i-e_i(e_j(h))e_k-e_j(h)\tilde{\nabla}_{e_i}e_k,e_k\rangle_g\\
&=\langle e_k(e_j(h))e_i-e_i(e_j(h))e_k,e_k\rangle_g+e^{-2h}e_j(h)\langle\tilde{\nabla}_{e_k}e_i-\tilde{\nabla}_{e_i}e_k,e_k\rangle_g\\
&=e_i(e_j(h))-ne_i(e_j(h))\\
&=-(n-1)e_i(e_j(h)),
\end{aligned}$$

provamos o item III).

IV) $\langle -g_{ij}\tilde{\nabla}_{e_k}\nabla h + g_{jk}\tilde{\nabla}_{e_i}\nabla h, e_k\rangle_g = -\Delta h g_{ij} - (n-1)|\nabla h|^2 g_{ij} + e_i(e_j(h))$.

Observando que

$$
\begin{aligned}
&\langle -g_{ij}\tilde{\nabla}_{e_k}\nabla h + g_{jk}\tilde{\nabla}_{e_i}\nabla h, e_k\rangle_g\\
=&\langle -g_{ij}(\nabla_{e_k}\nabla h + |\nabla h|^2 e_k) + g_{jk}(\nabla_{e_i}\nabla h + |\nabla h|^2 e_i), e_k\rangle_g\\
=&-g_{ij}\langle \nabla_{e_k}\nabla h + |\nabla h|^2 e_k, e_k\rangle_g + g_{jk}\langle \nabla_{e_i}\nabla h + |\nabla h|^2 e_i, e_k\rangle_g\\
=&-\Delta h g_{ij} - (n-1)|\nabla h|^2 g_{ij} + e_i(e_j(h)),
\end{aligned}
$$

obtemos o item IV).

V) $e^h\langle -e_i(h)\tilde{\nabla}_{e_k}\tilde{e_j} + e_k(h)\tilde{\nabla}_{e_i}\tilde{e_j}, e_k\rangle_g = (2-n)e_i(h)e_j(h) - |\nabla h|^2 g_{ij}$.

Para o último item note que

$$
\begin{aligned}
&e^h\langle -e_i(h)\tilde{\nabla}_{e_k}\tilde{e_j} + e_k(h)\tilde{\nabla}_{e_i}\tilde{e_j}, e_k\rangle_g\\
=&e^h\langle -e_i(h)(-e^{-h}e_k(h)e_j + e^{-h}\tilde{\nabla}_{e_k}e_j) + e_k(h)(-e^{-h}e_i(h)e_j + e^{-h}\tilde{\nabla}_{e_i}e_j), e_k\rangle_g\\
=&\langle -e_i(h)(\nabla_{e_k}e_j + e_k(h)e_j + e_j(h)e_k - g_{jk}\nabla h)\\
&+ e_k(h)(\nabla_{e_i}e_j + e_i(h)e_j + e_j(h)e_i - g_{ij}\nabla h), e_k\rangle_g\\
=&(2-n)e_i(h)e_j(h) - |\nabla h|^2 g_{ij},
\end{aligned}
$$

concluindo o item V).

Para finalizar a prova da Proposição, vamos somar os itens I), II), III), IV) e V) para obtermos

$$
\begin{aligned}
\tilde{R}_{ij} =&R_{ij} + 2\left((n-2)e_i(h)e_j(h) + 2g_{ij}|\nabla h|^2\right) - (n-1)e_i(e_j(h))\\
&+\left(-\Delta h g_{ij} - (n-1)|\nabla h|^2 g_{ij} + e_i(e_j(h))\right)\\
&+\left((2-n)e_i(h)e_j(h) - |\nabla h|^2 g_{ij}\right)\\
=&R_{ij} - (n-2)e_i(e_j(h)) - \Delta h g_{ij} + (n-2)e_i(h)e_j(h) - (n-2)|\nabla h|^2 g_{ij}\\
=&R_{ij} - (n-2)\nabla_i\nabla_j h + (n-2)\nabla_i h\nabla_j h - (\Delta h + (n-2)|\nabla h|^2)g_{ij},
\end{aligned}
$$

como desejado.

□

Como consequência imediata temos a relação entre as curvaturas escalares.

Corolário 1.3. *Seja $\tilde{g} = e^{-2h}g$ então*

$$\tilde{R} = e^{-2h}(R - 2(n-1)\Delta h - (n-2)(n-1)|\nabla h|^2). \tag{1.9}$$

Demonstração. Pela a definição da curvatura escalar $\tilde{R}$ podemos escrever

$$\tilde{R} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{Ric}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_i) = e^{-2h}\sum_{i=1}^{n} \tilde{R}_{ij}$$

e, assim, aplicando a Proposição 1.8 segue que

$$\begin{aligned}
\tilde{R} =& e^{-2h}\sum_{i=1}^{n}\Big(R_{ii} - (n-2)\nabla_i\nabla_i h + (n-2)\nabla_i h\nabla_i h - (\Delta h + (n-2)|\nabla h|^2)g_{ii}\Big)\\
=& e^{-2h}(R - (n-2)\Delta h + (n-2)|\nabla h|^2 - n(\Delta h + (n-2)|\nabla h|^2))\\
=& e^{-2h}(R - 2(n-1)\Delta h - (n-2)(n-1)|\nabla h|^2),
\end{aligned}$$

provando assim o resultado. □

Além disso, podemos encontrar uma expressão relacionando as curvaturas de Ricci sem traço.

Corolário 1.4. *Seja $\tilde{g} = e^{2h}g$ então*

$$\mathring{\tilde{R}}_{ij} = \mathring{R}_{ij} - (n-2)\nabla_i\nabla_j h + (n-2)\nabla_i h\nabla_j h + \frac{n-2}{n}\Big(\Delta h - |\nabla h|^2\Big)g_{ij}. \tag{1.10}$$

Demonstração. Pela Proposição 1.8 juntamente com o Corolário 1.3 obtemos

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{ij} - \frac{1}{n}\tilde{R}\tilde{g}_{ij} =& -\frac{1}{n}\tilde{R}\tilde{g}_{ij} + \tilde{R}_{ij}\\
=& -\frac{1}{n}e^{-2h}(R - 2(n-1)\Delta h - (n-2)(n-1)|\nabla h|^2)e^{2h}g_{ij}\\
&+ R_{ij} - (n-2)\nabla_i\nabla_j h + (n-2)\nabla_i h\nabla_j h - (\Delta h + (n-2)|\nabla h|^2)g_{ij}\\
=& R_{ij} - \frac{R}{n}g_{ij} - (n-2)\nabla_i\nabla_j h + (n-2)\nabla_i h\nabla_j h\\
&+ \left(\frac{2(n-1)}{n}\Delta h + \frac{(n-2)(n-1)}{n}|\nabla h|^2 - \Delta h - (n-2)|\nabla h|^2\right)g_{ij}.
\end{aligned}$$

Assim, simplificando algumas expressões segue o resultado

$$\mathring{\tilde{R}}_{ij} = \mathring{R}_{ij} - (n-2)\nabla_i\nabla_j h + (n-2)\nabla_i h\nabla_j h + \frac{n-2}{n}\Big(\Delta h - |\nabla h|^2\Big)g_{ij}.$$

□

Em 1960, Hidehiko Yamabe propôs o seguinte problema

Problema de Yamabe: Toda variedade Riemanniana compacta (M^n, g) de dimensão $n \geq 3$, admite uma métrica conforme a g com curvatura escalar constante.

O próprio Yamabe, no seu artigo [28], apresentou uma solução para este problema usando métodos variacionais e técnicas de equações diferenciais parciais elípticas. Assim, sabendo que qualquer métrica conforme a g pode ser escrita da forma $\tilde{g} = e^{2h}g$, onde $h \in C^{\infty}(M)$, ele percebeu que poderia simplificar a expressão obtida no Corolário 1.3 fazendo a seguinte substituição

$$e^{2h} = u^{\frac{4}{n-2}}.$$

Neste caso, obtemos:

- $\nabla h = \frac{1}{2}e^{-2h}\frac{4}{n-2}u^{\frac{6-n}{n-2}}\nabla u = \frac{2}{n-2}u^{-1}\nabla u$
- $|\nabla h|^2 = \frac{4}{(n-2)^2}u^{-2}|\nabla u|^2$
- $\Delta h = div(\nabla h) = \frac{2}{n-2}(-u^{-2}\langle \nabla u, \nabla u\rangle_g + u^{-1}\Delta u) = -\frac{2}{n-2}u^{-2}|\nabla u|^2 + \frac{2}{n-2}u^{-1}\Delta u.$

Dessa forma, substituindo as igualdades acima na Equação (1.9) obtemos

$$\begin{aligned}
\tilde{R} =& e^{-2h}(R - 2(n-1)\Delta h - (n-2)(n-1)|\nabla h|^2)\\
=& u^{-\frac{4}{n-2}}\Bigg[R - 2(n-1)\Big(-\frac{2}{n-2}u^{-2}|\nabla u|^2 + \frac{2}{n-2}u^{-1}\Delta u\Big)\\
&- (n-2)(n-1)\left(\frac{4}{(n-2)^2}u^{-2}|\nabla u|^2\right)\Bigg]\\
=& u^{-\frac{4}{n-2}}\left(R - \frac{4(n-1)}{n-2}\Delta u u^{-1}\right)\\
=& u^{-\frac{n+2}{n-2}}\left(Ru - \frac{4(n-1)}{n-2}\Delta u\right).
\end{aligned}$$

Assim, $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}}g$ tem curvatura escalar constante λ se, e somente se, u satisfaz a equação de Yamabe

$$\Box u = \lambda u^{\frac{n+2}{n-2}},$$

onde $\Box = R - a\Delta$ e $a = \frac{4(n-1)}{n-2}$.

Yamabe notou que a equação acima representa exatamente a equação de Euler- Lagrange do funcional

$$\mathcal{Q}(\tilde{g}) = \frac{\int_M \tilde{R} dV_{\tilde{g}}}{(\int_M dV_{\tilde{g}})^{\frac{n-2}{n}}},$$

onde $\tilde{g}$ corresponde as métricas conformemente equivalente a métrica g. Para ver isto, observe que $\mathcal{Q}$ pode ser escrito como $\mathcal{Q}(\tilde{g}) = \mathcal{Q}(u^{\frac{4}{n-2}}g) = \mathcal{Q}_g(u)$ e, assim, segue que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Q}(\tilde{g}) =& \frac{\int_M \tilde{R} dV_{\tilde{g}}}{\left(\int_M dV_{\tilde{g}}\right)^{\frac{n-2}{n}}} \\
=& \frac{\int_M u^{-\frac{n+2}{n-2}}\left(Ru - \frac{4(n-1)}{n-2}\Delta u\right) u^{\frac{2n}{n-2}} dV_g}{\left(\int_M u^{\frac{2n}{n-2}} dV_g\right)^{\frac{n-2}{n}}} \\
=& \frac{\int_M Ru^2 dV_g - \frac{4(n-1)}{n-2}\int_M u\Delta u dV_g}{\left(\int_M u^{\frac{2n}{n-2}} dV_g\right)^{\frac{n-2}{n}}}.
\end{aligned} \tag{1.11}
$$

Por outro lado, pelo Teorema de Stokes temos ainda que

$$
0 = \int_M div(\langle \nabla u, u \rangle) dV_g = \int_M u\Delta u dV_g + \int_M |\nabla u|^2 dVg,
$$

consequentemente substituindo a igualdade acima em (1.11) obtemos um nova expressão $\mathcal{Q}(\tilde{g})$ que é dada por

$$
\mathcal{Q}(\tilde{g}) = \frac{\int_M Ru^2 dV_g + \frac{4(n-1)}{n-2}\int_M |\nabla u|^2 dV_g}{\left(\int_M u^{\frac{2n}{n-2}} dV_g\right)^{\frac{n-2}{n}}}.
$$

Além disso, fazendo $a = \frac{4(n-1)}{n-2}$, $p = \frac{2n}{n-2}$, $E(u) = \int_M Ru^2 - au\Delta u dV_g$ e $\|u\| = \left(\int_M |u|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, temos ainda que

$$
\mathcal{Q}_g(u) = \frac{E(u)}{\|u\|_p^2}.
$$

Então, para qualquer função $f \in C^\infty(M)$, temos

$$
\begin{aligned}
Q_g(u+tf) =& \frac{\int_M R(u+tf)^2 - a\Delta(u+tf)(u+tf) dV_g}{\|u+tf\|_p^2} \\
=& \frac{\int_M R(u+tf)^2 - a(\Delta u + t\Delta f)(u+tf) dV_g}{\|u+tf\|_p^2},
\end{aligned}
$$

o que implica,

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathcal{Q}_g(u+tf) \\
=& \frac{\int_M 2(u+tf)fR - a\Delta f(u+tf) - a(\Delta u + \Delta f t) f dV_g \|u+tf\|_p^2}{\|u+tf\|_p^4}\Bigg|_{t=0} \\
&- \frac{\int_M R(u+tf)^2 - a(\Delta u + t\Delta f)(u+tf) dV_g \cdot \frac{2}{p}\|u+tf\|_p^{2-p}\int_M p(u+tf)^{p-1} f dV_g}{\|u+tf\|_p^4}\Bigg|_{t=0} \\
=& \frac{\int_M 2ufR - au\Delta f - af\Delta u dV_g \|u\|_p^2 - 2E(u)\|u\|_p^{2-p}\int_M u^{p-1} f dV_g}{\|u\|_p^4} \\
=& \frac{2\int_M ufR - a\Delta u f dV_g \|u\|_p^2 - 2E(u)\|u\|_p^{2-p}\int_M u^{p-1} f dV_g}{\|u\|_p^4},
\end{aligned}
$$

após algumas simplificações

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\mathcal{Q}_g(u+tf) =&\frac{2}{\|u\|_p^2}\int_M [Ru - a\Delta u - E(u)\|u\|_p^{-p}u^{p-1}]fdV_g\\ =&\frac{2}{\|u\|_p^2}\int_M\left(\Box u - \frac{E(u)}{\|u\|_p^p}u^{p-1}\right)fdV_g.\end{aligned}$$

Daí, u é ponto crítico de $\mathcal{Q}_g$ se, e somente se, satisfaz a equação de Yamabe para $\lambda = \frac{E(u)}{\|u\|_p^p}$, isto é,

$$\Box u = \frac{E(u)}{\|u\|_p^p}u^{p-1} = \frac{E(u)}{\|u\|_p^p}u^{\frac{n-2}{n-1}}.$$

Observe que $\left|\int_M Ru^2 dV_g\right|$ é limitado por um múltiplo de $\|u\|_p^2$. De fato, pela desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned}\left|\int_M Ru^2dV_g\right| \leq& \left(\int_M R^q dV_g\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_M (u^2)^r dV_g\right)^{\frac{1}{r}}\\ =&\left(\int_M R^q dV_g\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_M u^p dV_g\right)^{\frac{2}{p}}\\ =&\left(\int_M R^q dV_g\right)^{\frac{1}{q}}\|u\|_p^2,\end{aligned}$$

onde $p = 2r$, $\frac{1}{q}+\frac{1}{r} = 1$.

Dessa forma, é imediato verificar que $\mathcal{Q}_g$ é limitado por baixo. Com efeito,

$$\mathcal{Q}_g(u) = \frac{\int_M Ru^2 + a|\nabla u|^2 dV_g}{\|u\|_p^2} \geq \frac{\int_M Ru^2 dV_g}{\|u\|_p^2} \geq -\left(\int_M R^q dV_g\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Assim, podemos definir o invariante de Yamabe:

Definição 1.19. *Dada (M^n, g) variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 3$, definimos o* ***invariante de Yamabe*** *$Y(M,[g])$ da variedade como sendo*

$$\begin{aligned}Y(M,[g]) &= \inf_{\tilde{g}\in[g]}\mathcal{Q}(\tilde{g})\\ &= \inf_{u\in W^{1,2}(M)}\mathcal{Q}_g(u)\\ &= \inf_{u\in W^{1,2}(M)}\frac{\int_M Ru^2dV_g + \frac{4(n-1)}{n-2}\int_M|\nabla u|^2dV_g}{\left(\int_M u^{\frac{2n}{n-2}}dV_g\right)^{\frac{n-2}{n}}}.\end{aligned}$$

Esta constante $Y(M,[g])$ é um invariante da classe conforme de (M^n, g).

Logo, pelos resultados anteriores, o problema de Yamabe para uma variedade Riemanniana compacta (M^n, g) pode ser resolvido determinando uma métrica conforme a g tal que minimize o funcional $\mathcal{Q}(\tilde{g})$.

Definição 1.20. *Uma métrica $\tilde{g} \in [g]$ tal que*

$$Y(M,[g]) = \frac{\int_M \tilde{R} dV_{\tilde{g}}}{(\int_M dV_{\tilde{g}})^{\frac{n-2}{n}}}$$

é dita solução do problema de Yamabe.

Destacamos agora que, as soluções do problema de Yamabe para uma variedade de Einstein compacta, é também uma métrica de Einstein. De fato, considere uma função positiva $\varphi : M \to \mathbb{R}$, de modo que $g = \varphi^2 \tilde{g}$ é um elemento arbitrário da classe conforme suave de $\tilde{g}$. Antes de tudo, faça $e^{2h} = \varphi^{-2}$ para obter:

- $\nabla h = -\frac{1}{2}\varphi^2 \cdot 2\varphi^{-3}\nabla\varphi = -\varphi^{-1}\nabla\varphi \Rightarrow |\nabla h|^2 = \varphi^{-2}|\nabla\varphi|^2$
- $\nabla_i h = \langle \nabla h, e_i \rangle_g = -\varphi^{-1}\nabla_i\varphi \Rightarrow \nabla_i h \nabla_j h = \varphi^{-2}\nabla_i\varphi\nabla_j\varphi$
- $\nabla_i\nabla_j h = \langle \nabla_j h, e_i \rangle_g = \varphi^{-2}\nabla_i\varphi\nabla_j\varphi - \varphi^{-1}\nabla_i\nabla_j\varphi$
- $\Delta h = g^{ij}\nabla_i\nabla_j h = \varphi^{-2}|\nabla\varphi|^2 - \varphi^{-1}\Delta\varphi.$

Dessa forma, substituindo as igualdades acima na expressão (1.10) obtida no Corolário 1.4, segue que

$$\begin{aligned}
\mathring{\tilde{R}}_{ij} =& \mathring{R}_{ij} - (n-2)\nabla_i\nabla_j h + (n-2)\nabla_i h\nabla_j h + \frac{n-2}{n}\Big(\Delta h - |\nabla h|^2\Big) g_{ij} \\
=& \mathring{R}_{ij} - (n-2)(\varphi^{-2}\nabla_i\varphi\nabla_j\varphi - \varphi^{-1}\nabla_i\nabla_j\varphi) + (n-2)\varphi^{-2}\nabla_i\varphi\nabla_j\varphi \\
&+ \Big(\varphi^{-2}|\nabla\varphi|^2 - \varphi^{-1}\Delta\varphi - \varphi^{-2}|\nabla\varphi|^2\Big) g_{ij},
\end{aligned}$$

e além disso, simplificando algumas expressões concluímos que

$$\mathring{\tilde{R}}_{ij} = \mathring{R}_{ij} + \frac{(n-2)}{\varphi}\Big[\nabla_i\nabla_j\varphi - \frac{\Delta\varphi}{n} g_{ij}\Big].$$

Pra finalizar, assumindo que $\tilde{g}$ é Einstein e g é uma solução do problema de Yamabe para $(M^n, \tilde{g})$, temos que a igualdade acima se resume

$$\mathring{R}_{ij} = -\frac{(n-2)}{\varphi}\Big[\nabla_i\nabla_j\varphi - \frac{\Delta\varphi}{n} g_{ij}\Big].$$

Agora resta mostrar que g é Einstein e, para isso, observe que

$$\begin{aligned}
\varphi|\mathring{Ric}|^2 =& -(n-2)\mathring{R}_{ij}\Big(\nabla_i\nabla_j\varphi - \frac{\Delta\varphi}{n} g_{ij}\Big) \\
=& -(n-2)\mathring{R}_{ij}\nabla_i\nabla_j\varphi \\
=& -(n-2)\Big(div(\mathring{R}_{ij}\nabla_j\varphi) - \nabla_i\Big(R_{ij} - \frac{R}{n} g_{ij}\Big)\nabla_j\varphi\Big) \\
=& -(n-2)\Big(div(\mathring{R}_{ij}\nabla_j\varphi) - \nabla_i R_{ij}\nabla_j\varphi + \frac{1}{n}\nabla_j R\nabla_j\varphi\Big),
\end{aligned}$$

além disso, pela segunda identidade de Biachi contraída podemos reescrever a expressão acima da seguinte forma

$$\begin{aligned}\varphi|\mathring{Ric}|^2 =& -(n-2)\Big(div(\mathring{R}_{ij}\nabla_j\varphi) - \frac{1}{2}\nabla_j R\nabla_j\varphi + \frac{1}{n}\nabla_j R\nabla_j\varphi\Big)\\ =& -(n-2)\left(div(\mathring{R}_{ij}\nabla_j\varphi) - \frac{(n-2)}{2n}\nabla_j R\nabla_j\varphi\right).\end{aligned} \tag{1.12}$$

Assim, tomando a integral em (M^n, g) em ambos os lados da igualdade (1.12) juntamente com o fato de g ser solução do problema de Yamabe, isto é, g tem curvatura escalar constante, obtemos

$$\begin{aligned}\int_M \varphi|\mathring{Ric}|^2 dV_g =& -(n-2)\int_M div(\mathring{R}_{ij}\nabla_j\varphi)dV_g + \frac{(n-2)^2}{2n}\int_M \langle\nabla R, \nabla\varphi\rangle_g dV_g\\ =& 0.\end{aligned}$$

Sendo assim, como φ é uma função positiva então $\mathring{Ric} \equiv 0$ e, portanto, g é Einstein. Logo, g sendo solução do problema de Yamabe para uma variedade de Einstein compacta concluímos que g também é uma métrica Einstein.

Observação 1.2. *Note ainda que, usando o Teorema de Obata provado em [22] e levando em conta que $\tilde{g}$ é uma métrica de Einstein, temos que $\tilde{g}$ também é solução do problema de Yamabe, isto é,*

$$Y(M, [\tilde{g}]) = \frac{\int_M \tilde{R} dV_{\tilde{g}}}{(\int_M dV_{\tilde{g}})^{\frac{n-2}{n}}}.$$

Capítulo 2

O tensor de Weyl e algumas estimativas

Neste capítulo falaremos sobre o tensor $W \in Ker(c)$, encontrado na seção anterior a partir da decomposição ortogonal do tensor de Riemann, que tem como propriedade o traço livre. Além disso, mostraremos outras propriedades desse $(0,4)$-tensor e algumas estimativas que será de grande importância no decorrer desse trabalho.

Definição 2.1. *Chamaremos de Weyl o tensor $W \in Ker(c)$ definido pela seguinte fórmula de decomposição ortogonal do tensor de Riemann em dimensão $n \geq 3$*

$$W = R_m - A \bigcirc\!\!\!\!\wedge\, g, \tag{2.1}$$

onde $A = \dfrac{1}{n-2}\left(Ric - \dfrac{R}{2(n-1)}g\right).$

Proposição 2.1. *O tensor de Wely satisfaz as seguintes propriedades:*

(1) $W_{ijkl} = -W_{jikl} = W_{jilk}$

(2) $W_{ijkl} = W_{klij}$

(3) O tensor W satisfaz a primeira identidade de Bianchi, isto é,

$$W_{ijkl} + W_{jkil} + W_{kijl} = 0.$$

Demonstração. Para a prova do item (1), observe que

$$\begin{aligned}
W_{ijkl} =& R_{ijkl} - (A \owedge g)_{ijkl} \\
=& - R_{jikl} - (A_{ik}g_{jl} + A_{jl}g_{ik} - A_{il}g_{jk} - A_{jk}g_{il}) \\
=& - R_{jikl} + A_{jk}g_{il} + A_{il}g_{jk} - A_{jl}g_{ik} - A_{ik}g_{jl} \\
=& - (R_{jikl} - (A \owedge g)_{jikl}) \\
=& - W_{jikl}.
\end{aligned}$$

Analogamente, temos $W_{ijkl} = W_{jilk}$.

Com um simples cálculo

$$\begin{aligned}
W_{ijkl} =& R_{ijkl} - (A \owedge g)_{ijkl} \\
=& R_{klij} - (A \owedge g)_{klij} \\
=& W_{klij},
\end{aligned}$$

obtemos o item (2).

Para a prova do item (3), basta substituir a Equação (2.1) na primeira identidade de Bianchi, para obter:

$$\begin{aligned}
0 = R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} =& (W_{ijkl} + (A \owedge g)_{ijkl}) + (W_{jkil} + (A \owedge g)_{jkil}) \\
&+ (W_{kijl} + (A \owedge g)_{kijl}).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
W_{ijkl} + W_{jkil} + W_{kijl} =& - (A \owedge g)_{ijkl} - (A \owedge g)_{jkil} - (A \owedge g)_{kijl} \\
=& - A_{ik}g_{jl} - A_{jl}g_{ik} + A_{il}g_{jk} + A_{jk}g_{il} \\
&- A_{ji}g_{kl} - A_{kl}g_{ji} + A_{jl}g_{ki} + A_{ki}g_{jl} \\
&- A_{kj}g_{il} - A_{il}g_{kj} + A_{kl}g_{ij} + A_{ij}g_{kl} \\
=& 0,
\end{aligned}$$

como desejado. □

O próximo resultado é uma consequência direta do Teorema 1.1.

Corolário 2.1. *O tensor de Weyl satisfaz a seguinte igualdade*

$$\nabla_p\nabla_m W_{ijkl} - \nabla_m\nabla_p W_{ijkl} = R_{pmih}W_{hjkl} + R_{pmjh}W_{ihkl} + R_{pmkh}W_{ijhl} + R_{pmlh}W_{ijkh}. \tag{2.2}$$

Demonstração. Como o tensor de Weyl é um $(0,4)$-tensor, pelo Teorema 1.1 temos que

$$
\begin{aligned}
&\nabla_P \nabla_M W(X,Y,Z,S) - \nabla_M \nabla_P W(X,Y,Z,S) \\
=&W(R_m(P,M)X,Y,Z,S) + W(X,R_m(P,M)Y,Z,S) + W(X,Y,R_m(P,M)Z,S) \\
&+ W(X,Y,Z,R_m(P,M)S).
\end{aligned}
$$

Assim, segue que a expressão acima pode ser escrita, em coordenadas, da seguinte maneira

$$
\begin{aligned}
\nabla_p \nabla_m W_{ijkl} - \nabla_m \nabla_p W_{ijkl} =&W(R^r_{pmi}\partial_r, \partial_j, \partial_k, \partial_l) + W(\partial_i, R^r_{pmj}\partial_r, \partial_k, \partial_l) \\
&+ W(\partial_i, \partial_j, R^r_{pmk}\partial_r, \partial_l) + W(\partial_i, \partial_j, \partial_k, R^r_{pml}\partial_r) \\
=&R_{pmih}W_{hjkl} + R_{pmjh}W_{ihkl} + R_{pmkh}W_{ijhl} + R_{pmlh}W_{ijkh}.
\end{aligned}
$$

□

A seguir, apresentaremos algumas definições e resultados com o tensor de Weyl.

Definição 2.2. *Uma variedade Riemanniana (M^n, g) é chamada localmente conformemente plana se para todo ponto $p \in M$, existe uma vizinhança V de p e uma função $h \in C^\infty(V)$ tal que $(V, e^{2h}g)$ é flat.*

Aqui, dizemos que uma métrica $\tilde{g}$ é flat se ela é localmente isométrica à métrica euclidiana, isto é, para todo $p \in M$ existe uma vizinhança V de p e uma isometria $h : V \to h(V) \subset \mathbb{R}^n$.

O resultado a seguir, caracteriza métricas localmente conformemente planas tendo como papel fundamental o tensor Wely.

Teorema 2.1 (Weyl, Shouten)**.** *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n. Então,*

(1) *Se $n = 2$, então (M^n, g) é localmente conformemente plana.*

(2) *Se $n = 3$, então (M^n, g) é localmente conformemente plana se, e somente se, o tensor de Cotton dado por*

$$
\begin{aligned}
C_{ijk} =&\nabla_i A_{jk} - \nabla_j A_{ik} \\
=&\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} - \frac{1}{2(n-1)}(\nabla_i R g_{jk} - \nabla_j R g_{ik})
\end{aligned}
$$

é nulo.

(3) *Se $n \geq 4$, então (M^n, g) é localmente conformemente plana se, e somente se, o tensor de Weyl é nulo.*

O Teorema acima, primeiramente foi provado por Cotton (1897) em dimensão três e por Weyl (1918) e Schouten (1921) em dimensão $n \geq 4$. Para mais detalhes da demonstração veja a Proposição 1.62 em [7].

Em seguida, vamos mostrar algumas identidades satisfeitas pelo tensor de Weyl quando a variedade é de Einstein. Antes de tudo, observe que, quando a variedade é de Einstein, temos que para $n \geq 3$ a decomposição ortogonal do tensor curvatura de Riemann é dada por

$$Rm = W + \frac{R}{2n(n-1)}(g \owedge g).$$

Assim, se (M^n, g) é variedade de Einstein e localmente conformemente plana ($i.e.$, $W \equiv 0$), então a variedade tem que ser uma forma espacial.

Observação 2.1. *(M^n, g) tem curvatura seccional constante, se e somente se, $Ric = \frac{R}{n}g$ e $W = 0$.*

Além disso, veja que substituindo a decomposição ortogonal do tensor de Riemann em variedade de Einstein na segunda identidade de Bianchi e usando o fato que a curvatura escalar em uma variedade de Einstein é constante, obtemos

$$0 = \nabla_l R_{ijkm} + \nabla_k R_{ijml} + \nabla_m R_{ijlk} = \nabla_l W_{ijkm} + \nabla_k W_{ijml} + \nabla_m W_{ijlk}, \tag{2.3}$$

ou seja, quando a variedade é de Einstein temos que o tensor de Weyl satisfaz a segunda identidade de Bianchi.

Lema 2.1. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana Einstein de dimensão $n \geq 3$. Então a seguinte identidade é válida:*

$$\frac{1}{2}\Delta|W|^2 = |\nabla W|^2 + \frac{2}{n}R|W|^2 - 2\left(2W_{ijkl}W_{ipkq}W_{pjql} + \frac{1}{2}W_{ijkl}W_{klpq}W_{pqij}\right). \tag{2.4}$$

Demonstração. Iniciaremos com o calculo do laplaciano do tensor de Weyl, para isso, lembre que

$$\Delta W_{ijkl} = \nabla_p \nabla_p W_{ijkl}.$$

Assim, substituindo a Equação (2.3) e, posteriormente, a igualdade (2.2) (comutação de derivadas covariante com o tensor de Weyl) na expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta W_{ijkl} =& \nabla_p \nabla_p W_{ijkl} \\
=& \nabla_p(-\nabla_i W_{jpkl} - \nabla_j W_{pikl}) \\
=& \nabla_p \nabla_i W_{lkjp} + \nabla_p \nabla_j W_{klip} \\
=& \nabla_i \nabla_p W_{lkjp} + R_{pilq} W_{qkjp} + R_{pikq} W_{lqjp} + R_{pijq} W_{lkqp} + R_{pipq} W_{lkjq} \\
&+ \nabla_j \nabla_p W_{klip} + R_{pjkq} W_{qlip} + R_{pjlq} W_{kqip} + R_{pjiq} W_{klqp} + R_{pjpq} W_{kliq} \\
=& R_{pilq} W_{qkjp} + R_{pikq} W_{lqjp} + R_{pijq} W_{lkqp} + R_{pipq} W_{lkjq} + R_{pjkq} W_{qlip} \\
&+ R_{pjlq} W_{kqip} + R_{pjiq} W_{klqp} + R_{pjpq} W_{kliq}
\end{aligned}$$

e como a variedade é Einsten, temos ainda que

$$\begin{aligned}
\Delta W_{ijkl} =& \left(W_{pilq} + \frac{R}{2n(n-1)} (g \owedge g)_{pilq} \right) W_{qkjp} + \left(W_{pikq} + \frac{R}{2n(n-1)} (g \owedge g)_{pikq} \right) W_{lqjp} \\
&+ \left(W_{pijq} + \frac{R}{2n(n-1)} (g \owedge g)_{pijq} \right) W_{lkqp} + \frac{R}{2n(n-1)} (g \owedge g)_{pipq} W_{lkjq} \\
&+ \left(W_{pjkq} + \frac{R}{2n(n-1)} (g \owedge g)_{pjkq} \right) W_{qlip} + \left(W_{pjlq} + \frac{R}{2n(n-1)} (g \owedge g)_{pjlq} \right) W_{kqip} \\
&+ \left(W_{pjiq} + \frac{R}{2n(n-1)} (g \owedge g)_{pjiq} \right) W_{klqp} + \frac{R}{2n(n-1)} (g \owedge g)_{pjpq} W_{kliq} \\
=& W_{pilq} W_{qkjp} + W_{pikq} W_{lqjp} + W_{pijq} W_{lkqp} + \frac{R}{n(n-1)} (W_{ikjl} + W_{lijk} + W_{lkij}) \\
&+ W_{pjkq} W_{qlip} + W_{pjlq} W_{kqip} + W_{pjiq} W_{klqp} + \frac{R}{n(n-1)} (W_{jlik} + W_{kjil} + W_{klji}) \\
&+ \frac{R}{n-1} W_{lkji} + \frac{R}{n-1} W_{klij} - \frac{R}{n(n-1)} W_{lkji} - \frac{R}{n(n-1)} W_{klij} \\
=& 2W_{pilq} W_{qkjp} + 2W_{pikq} W_{lqjp} + (W_{ipjq} + W_{pjiq}) W_{klqp} + \frac{R}{n} W_{lkji} + \frac{R}{n} W_{klij} \\
=& 2W_{pilq} W_{qkjp} + 2W_{pikq} W_{lqjp} + W_{ijpq} W_{klqp} + \frac{2}{n} R W_{ijkl}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\Delta W_{ijkl} = -2(W_{ipkq} W_{pjql} - W_{iplq} W_{pjqk} + \frac{1}{2} W_{ijpq} W_{klpq}) + \frac{2}{n} R W_{ijkl}. \tag{2.5}$$

Agora, para a prova da Equação (2.4), observe primeiro que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \Delta |W|^2 =& \frac{1}{2} \left(\nabla_p \nabla_p W_{ijkl} W_{ijkl} \right) \\
=& \frac{1}{2} \nabla_p (2 W_{ijkl} \nabla_p W_{ijkl}) \\
=& |\nabla W|^2 + \langle W, \Delta W \rangle_g.
\end{aligned}$$

Dessa forma, substituindo a igualdade (2.5) na expressão acima, teremos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta|W|^2 =& |\nabla W|^2 + \langle W_{ijkl}, \Delta W_{ijkl}\rangle_g \\
=& |\nabla W|^2 + \langle W_{ijkl}, -2(W_{ipkq}W_{pjql} - W_{iplq}W_{pjqk} + \frac{1}{2}W_{ijpq}W_{klpq}) + \frac{2}{n}RW_{ijkl}\rangle_g \\
=& |\nabla W|^2 + \frac{2}{n}R|W|^2 - 2(W_{ijkl}W_{ipkq}W_{pjql} - \underbrace{W_{ijlk}W_{ipkq}W_{pjql}}_{k\leftrightarrow l} + \frac{1}{2}W_{ijkl}W_{ijpq}W_{klpq}) \\
=& |\nabla W|^2 + \frac{2}{n}R|W|^2 - 2(2W_{ijkl}W_{ipkq}W_{pjql} + \frac{1}{2}W_{ijkl}W_{ijpq}W_{klpq}).
\end{aligned}$$

□

Para finalizar esse capítulo vamos apresentar algumas estimativas para o tensor de Weyl.

A estimativa que segue foi provada inicialmente em dimensão 4 por V. Bour em [6]. Aqui, seguiremos os passos do artigo do Catino [1] para obtenção da estimativa em dimensão arbitrária.

Proposição 2.2. *Para toda variedade Riemanniana n-dimensional a seguinte estimativa é válida:*

$$\left|-W_{ijkl}\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jl} + \frac{2}{n-2}\mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{jk}\mathring{R}_{ik}\right| \leq \sqrt{\frac{n-2}{2(n-1)}}\left(|W|^2 + \frac{8}{n(n-2)}|\mathring{R}ic|^2\right)^{1/2}|\mathring{R}ic|^2. \tag{2.6}$$

Demonstração. Primeiramente, observe que usando o produto de **Kulkarni-Nomizu** obtemos

$$\begin{aligned}
(\mathring{R}ic \owedge g)_{ijkl} &= (\mathring{R}_{ik}g_{jl} + \mathring{R}_{jl}g_{ik} - \mathring{R}_{il}g_{jk} - \mathring{R}_{jk}g_{il}) \\
(\mathring{R}ic \owedge \mathring{R}ic)_{ijkl} &= 2(\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jl} - \mathring{R}_{il}\mathring{R}_{jk})
\end{aligned}$$

Assim, como consequência destas expressões podemos deduzir que

$$W_{ijkl}\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jl} = \frac{1}{4}W_{ijkl}(\mathring{R}ic \owedge \mathring{R}ic)_{ijkl} \tag{2.7}$$

$$\mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{jk}\mathring{R}_{ik} = -\frac{1}{8}(\mathring{R}ic \owedge g)_{ijkl}(\mathring{R}ic \owedge \mathring{R}ic)_{ijkl}. \tag{2.8}$$

De fato, desenvolvendo o lado direito da Equação (2.7)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}W_{ijkl}(\mathring{R}ic \owedge \mathring{R}ic)_{ijkl} &= \frac{1}{2}W_{ijkl}\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jl} - \frac{1}{2}W_{ijkl}\mathring{R}_{il}\mathring{R}_{jk} \\
&= \frac{1}{2}W_{ijkl}\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jl} - \frac{1}{2}\underbrace{W_{ijlk}\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jl}}_{l\leftrightarrow k} \\
&= \frac{1}{2}W_{ijkl}\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jl} + \frac{1}{2}W_{ijkl}\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jl} \\
&= W_{ijkl}\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jl},
\end{aligned}$$

e o lado direito da Equação (2.8)

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{8}(\mathring{Ric} \owedge g)_{ijkl}(\mathring{Ric} \owedge \mathring{Ric})_{ijkl} =& -\frac{1}{4}(\mathring{R}_{ik}g_{jl} + \mathring{R}_{jl}g_{ik} - \mathring{R}_{il}g_{jk} - \mathring{R}_{jk}g_{il})(\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jl} \\
&- \mathring{R}_{il}\mathring{R}_{jk}) \\
=& \frac{1}{4}\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jk}\mathring{R}_{il}g_{jl} + \frac{1}{4}\mathring{R}_{il}\mathring{R}_{jl}\mathring{R}_{jk}g_{ik} + \frac{1}{4}\mathring{R}_{il}\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jl}g_{jk} \\
&+ \frac{1}{4}\mathring{R}_{jk}\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jl}g_{il} \\
=& \frac{1}{4}\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jk}\mathring{R}_{ij} + \frac{1}{4}\mathring{R}_{il}\mathring{R}_{jl}\mathring{R}_{ij} + \frac{1}{4}\mathring{R}_{il}\mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{jl} + \frac{1}{4}\mathring{R}_{jk}\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{ij} \\
=& \frac{1}{2}\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jk}\mathring{R}_{ij} + \frac{1}{4}\underbrace{\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jk}\mathring{R}_{ij}}_{l\leftrightarrow k} + \frac{1}{4}\underbrace{\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{jk}}_{l\leftrightarrow k} \\
=& \mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{jk}\mathring{R}_{ik},
\end{aligned}
$$

provamos o resultado pretendido.

Daí, usando as Equações (2.7) e (2.8), obtemos:

$$
\begin{aligned}
-W_{ijkl}\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jl} + \frac{2}{n-2}\mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{jk}\mathring{R}_{ik} =& -\left(\frac{1}{4}W_{ijkl}(\mathring{Ric} \owedge \mathring{Ric})_{ijkl}\right) \\
&+ \frac{2}{n-2}\left(-\frac{1}{8}(\mathring{Ric} \owedge g)_{ijkl}(\mathring{Ric} \owedge \mathring{Ric})_{ijkl}\right) \\
=& -\frac{1}{4}W_{ijkl}(\mathring{Ric} \owedge \mathring{Ric})_{ijkl} - \frac{1}{4(n-2)}(\mathring{Ric} \owedge g)_{ijkl}(\mathring{Ric} \owedge \mathring{Ric})_{ijkl} \\
=& -\frac{1}{4}\left(W + \frac{1}{n-2}\mathring{Ric} \owedge g\right)_{ijkl}(\mathring{Ric} \owedge \mathring{Ric})_{ijkl}. \quad (2.9)
\end{aligned}
$$

Além disso, como foi visto na Seção 1.4.1 $\mathring{Ric} \owedge \mathring{Ric}$ é um $(0,4)$-tensor e tem as mesmas propriedades do tensor curvatura de Riemann. Logo, pode ser ortogonalmente decomposto como

$$\mathring{Ric} \owedge \mathring{Ric} = T + U + V,$$

onde T tem traço livre,

$$V_{ijkl} = -\frac{2}{n-2}(\mathring{Ric}^2 \owedge g)_{ijkl} + \frac{2}{n(n-2)}|\mathring{Ric}|^2(g \owedge g)_{ijkl}$$

e

$$U_{ijkl} = -\frac{1}{n(n-1)}|\mathring{Ric}|^2(g \owedge g)_{ijkl}$$

em que $(\mathring{Ric}^2)_{ik} = \mathring{R}_{ip}\mathring{R}_{kp}$. Antes de tudo, vamos calcular a norma ao quadrado dos tensores $\mathring{Ric} \owedge \mathring{Ric}$, V e U da seguinte maneira:

$I)$

$$\begin{aligned}
|\mathring{Ric} \owedge \mathring{Ric}|^2 &= (\mathring{Ric} \owedge \mathring{Ric})_{ijkl}(\mathring{Ric} \owedge \mathring{Ric})_{ijkl} \\
&= 4(\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jl} - \mathring{R}_{il}\mathring{R}_{jk})^2 \\
&= 4(\mathring{R}_{ik})^2(\mathring{R}_{jl})^2 - 8\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jk}\mathring{R}_{il}\mathring{R}_{jl} + 4(\mathring{R}_{il})^2(\mathring{R}_{jk})^2 \\
&= 8|\mathring{Ric}|^4 - 8\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jk}\underbrace{\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jk}}_{l\leftrightarrow k} \\
&= 8|\mathring{Ric}|^4 - 8|\mathring{Ric}^2|^2.
\end{aligned}$$

$II)$

$$\begin{aligned}
|U|^2 &= U_{ijkl}U_{ijkl} \\
&= \frac{1}{n^2(n-1)^2}|\mathring{Ric}|^4(g \owedge g)^2_{ijkl} \\
&= \frac{4}{n^2(n-1)^2}|\mathring{Ric}|^4(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})^2 \\
&= \frac{4}{n^2(n-1)^2}|\mathring{Ric}|^4(g^2_{ik}g^2_{jl} - 2g_{ik}g_{il}g_{jl}g_{jk} + g^2_{il}g^2_{jk}) \\
&= \frac{4}{n^2(n-1)^2}|\mathring{Ric}|^4(n^2 - 2n + n^2) \\
&= \frac{4}{n^2(n-1)^2}|\mathring{Ric}|^4 \cdot 2n(n-1) \\
&= \frac{8}{n(n-1)}|\mathring{Ric}|^4.
\end{aligned}$$

$III)$

$$\begin{aligned}
|V|^2 =& V_{ijkl}V_{ijkl} \\
=& \left(-\frac{2}{n-2}(\mathring{Ric}^2 \owedge g)_{ijkl} + \frac{2}{n(n-2)}|\mathring{Ric}|^2(g \owedge g)_{ijkl}\right)^2 \\
=& \frac{4}{(n-2)^2}(\mathring{Ric}^2 \owedge g)^2_{ijkl} - \frac{8}{n(n-2)^2}|\mathring{Ric}|^2(\mathring{Ric}^2 \owedge g)_{ijkl}(g \owedge g)_{ijkl} \\
&+ \frac{4}{n^2(n-2)^2}|\mathring{Ric}|^4(g \owedge g)^2_{ikjl}.
\end{aligned}$$

Note que

$$(\mathring{Ric}^2 \owedge g)^2_{ijkl} = \Big((\mathring{Ric}^2)_{ik}g_{jl} + (\mathring{Ric}^2)_{jl}g_{ik} - (\mathring{Ric}^2)_{il}g_{jk} - (\mathring{Ric}^2)_{jk}g_{il}\Big)^2.$$

Daí, desenvolvendo a expressão do lado direito da igualdade acima teremos

$$
\begin{aligned}
&\Big((\mathring{Ric}^2)_{ik}g_{jl} + (\mathring{Ric}^2)_{jl}g_{ik} - (\mathring{Ric}^2)_{il}g_{jk} - (\mathring{Ric}^2)_{jk}g_{il}\Big)^2 \\
&= (\mathring{Ric}^2)^2_{ik}g^2_{jl} + (\mathring{Ric}^2)^2_{jl}g^2_{ik} + (\mathring{Ric}^2)^2_{il}g^2_{jk} + (\mathring{Ric}^2)^2_{jk}g^2_{il} + 2(\mathring{Ric}^2)_{ik}g_{ik}(\mathring{Ric}^2)_{jl}g_{jl} \\
&\quad -2(\mathring{Ric}^2)_{ik}g_{jk}(\mathring{Ric}^2)_{il}g_{jl} - 2(\mathring{Ric}^2)_{ik}g_{il}(\mathring{Ric}^2)_{jk}g_{jl} - 2(\mathring{Ric}^2)_{jl}g_{jk}(\mathring{Ric}^2)_{il}g_{ik} \\
&\quad -2(\mathring{Ric}^2)_{jl}g_{il}(\mathring{Ric}^2)_{jk}g_{ik} + 2(\mathring{Ric}^2)_{il}g_{il}(\mathring{Ric}^2)_{jk}g_{jk} \\
&= 4n|\mathring{Ric}^2|^2 + 4|\mathring{Ric}|^4 - 8|\mathring{Ric}^2|^2 \\
&= 4|\mathring{Ric}^2|^2(n-2) + 4|\mathring{Ric}|^4.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
(\mathring{Ric}^2 \owedge g)^2_{ijkl} = 4|\mathring{Ric}^2|^2(n-2) + 4|\mathring{Ric}|^4. \tag{2.10}
$$

Além disso, temos

$$
\begin{aligned}
(\mathring{Ric}^2 \owedge g)_{ijkl}(g \owedge g)_{ijkl} =&((\mathring{Ric}^2)_{ik}g_{jl} + (\mathring{Ric}^2)_{jl}g_{ik} - (\mathring{Ric}^2)_{il}g_{jk} \\
&- (\mathring{Ric}^2)_{jk}g_{il}) \cdot 2(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}),
\end{aligned}
$$

o que implica,

$$
\begin{aligned}
&(\mathring{Ric}^2 \owedge g)_{ijkl}(g \owedge g)_{ijkl} \\
&= 2((\mathring{Ric}^2)_{ik}g_{ik}g^2_{jl} - (\mathring{Ric}^2)_{ik}g_{jk}g_{jl}g_{il} + (\mathring{Ric}^2)_{jl}g_{jl}g^2_{ik} - (\mathring{Ric}^2)_{jl}g_{ik}g_{jk}g_{il} \\
&\quad -(\mathring{Ric}^2)_{il}g_{ik}g_{jk}g_{jl} + (\mathring{Ric}^2)_{il}g_{il}g^2_{jk} - (\mathring{Ric}^2)_{jk}g_{jl}g_{il}g_{ik} + (\mathring{Ric}^2)_{jk}g_{jk}g^2_{il}) \\
&= 8n|\mathring{Ric}|^2 - 8|\mathring{Ric}|^2 \\
&= 8|\mathring{Ric}|^2(n-1),
\end{aligned}
$$

seque que

$$
(\mathring{Ric}^2 \owedge g)_{ijkl}(g \owedge g)_{ijkl} = 8|\mathring{Ric}|^2(n-1). \tag{2.11}
$$

Logo, pelas Equações (2.10) e (2.11), temos

$$
\begin{aligned}
|V|^2 =&\frac{4}{(n-2)^2}\left(4|\mathring{Ric}^2|^2(n-2) + 4|\mathring{Ric}|^4\right) - \frac{8}{n(n-2)^2}|\mathring{Ric}|^2\left(8|\mathring{Ric}|^2(n-1)\right) \\
&+ \frac{4}{n^2(n-2)^2}|\mathring{Ric}|^4\left(8n(n-1)\right) \\
=&\frac{16}{n-2}|\mathring{Ric}^2|^2 + \frac{16}{(n-2)^2}|\mathring{Ric}|^4 - \frac{32(n-1)}{n(n-2)}|\mathring{Ric}|^4 \\
=&\frac{16}{n-2}|\mathring{Ric}^2|^2 - \frac{16}{n(n-2)}|\mathring{Ric}|^4.
\end{aligned}
$$

Em particular, usando os itens $I)$, $II)$ e $III)$ obtemos

$$
\begin{aligned}
|T|^2+\frac{n}{2}|V|^2 =& \left(|\mathring{Ric} \owedge \mathring{Ric}|^2-|V|^2-|U|^2\right)+\frac{n}{2}|V|^2\\
=&|\mathring{Ric} \owedge \mathring{Ric}|^2+\frac{(n-2)}{2}|V|^2-|U|^2\\
=&\left(8|\mathring{Ric}|^4-8|\mathring{Ric}^2|^2\right)+\frac{(n-2)}{2}\left(\frac{16}{n-2}|\mathring{Ric}^2|^2-\frac{16}{n(n-2)}|\mathring{Ric}|^4\right)\\
&-\left(\frac{8}{n(n-1)}|\mathring{Ric}|^4\right)\\
=&8|\mathring{Ric}|^4-\frac{8}{n}|\mathring{Ric}|^4-\frac{8}{n(n-1)}|\mathring{Ric}|^4\\
=&\frac{8(n-2)}{n-1}|\mathring{Ric}|^4. \qquad (2.12)
\end{aligned}
$$

Agora, pelo fato de W e T terem traço livre e V ter componentes $(\mathring{Ric}^2 \owedge g)_{ijkl}$ e $(g \owedge g)_{ijkl}$ concluímos então que $W_{ijkl}V_{ijkl}=0$ e $T_{ijkl}\cdot(\mathring{Ric} \owedge g)_{ijkl}=0$. Além disso, observe que

$$
\begin{aligned}
&\left((W+\frac{1}{n-2}\mathring{Ric} \owedge g\right)_{ijkl}\cdot U=\left(W+\frac{1}{n-2}\mathring{Ric} \owedge g\right)_{ijkl}\left(-\frac{1}{n(n-1)}|\mathring{Ric}|^2(g \owedge g)_{ijkl}\right)\\
&=-\frac{2|\mathring{Ric}|^2}{n(n-1)(n-2)}(\mathring{R}_{ik}g_{jl}+\mathring{R}_{jl}g_{ik}-\mathring{R}_{il}g_{jk}-\mathring{R}_{jk}g_{il})(g_{ik}g_{jl}-g_{il}g_{jk})\\
&=-\frac{2|\mathring{Ric}|^2}{n(n-1)(n-2)}(-\mathring{R}_{ik}g_{jl}g_{il}g_{jk}-\mathring{R}_{jl}g_{ik}g_{il}g_{jk}-\mathring{R}_{il}g_{jk}g_{ik}g_{jl}-\mathring{R}_{jk}g_{il}g_{ik}g_{jl})\\
&=0
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\left(W+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}(n-2)}\mathring{Ric} \owedge g\right)_{ijkl}\left(T+\sqrt{\frac{n}{2}}V\right)_{ijkl} =& W_{ijkl}\cdot T_{ijkl}+\sqrt{\frac{n}{2}}W_{ijkl}\cdot V_{ijkl}\\
&+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}(n-2)}T_{ijkl}(\mathring{Ric} \owedge g)_{ijkl}\\
&+\frac{1}{n-2}V_{ijkl}(\mathring{Ric} \owedge g)_{ijkl}\\
=&W_{ijkl}\cdot T_{ijkl}+\frac{1}{n-2}V_{ijkl}(\mathring{Ric}^2 \owedge g)_{ijkl}\\
=&\left(W+\frac{1}{n-2}\mathring{Ric} \owedge g\right)_{ijkl}(T+V)_{ijkl}.
\end{aligned}
$$

Dessa forma, iremos estimar (2.9) aplicando a desigualdade de Cauchy-Shcwarz, a Equação (2.12) e as observações feitas acima da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
&\left|\left(W+\frac{1}{n-2}\overset{\circ}{Ric}\owedge g\right)_{ijkl}(\overset{\circ}{Ric}\owedge\overset{\circ}{Ric})_{ijkl}\right|^2=\left|\left(W+\frac{1}{n-2}\overset{\circ}{Ric}\owedge g\right)_{ijkl}(T+U+V)_{ijkl}\right|^2\\
&=\left|\left(W+\frac{1}{n-2}\overset{\circ}{Ric}\owedge g\right)_{ijkl}(T+V)_{ijkl}\right|^2\\
&=\left|\left(W+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}(n-2)}\overset{\circ}{Ric}\owedge g\right)_{ijkl}\left(T+\sqrt{\frac{n}{2}}V\right)_{ijkl}\right|^2\\
&\leq\left|\left(W+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}(n-2)}\overset{\circ}{Ric}\owedge g\right)_{ijkl}\right|^2\left|\left(T+\sqrt{\frac{n}{2}}V\right)_{ijkl}\right|^2\\
&=\left(|W|^2+\frac{2}{n(n-2)^2}|\overset{\circ}{Ric}\owedge g|^2\right)\left(|T|^2+\frac{n}{2}|V|^2\right)\\
&=\left(|W|^2+\frac{2}{n(n-2)^2}\cdot 4(n-2)|\overset{\circ}{Ric}|^2\right)\cdot\frac{8(n-2)}{n-1}|\overset{\circ}{Ric}|^4\\
&=\frac{8(n-2)}{n-1}\left(|W|^2+\frac{8}{n(n-2)}|\overset{\circ}{Ric}|^2\right)|\overset{\circ}{Ric}|^4.
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
\left|-W_{ijkl}\overset{\circ}{R}_{ik}\overset{\circ}{R}_{jl}+\frac{2}{n-2}\overset{\circ}{R}_{ij}\overset{\circ}{R}_{jk}\overset{\circ}{R}_{ik}\right|^2&=\frac{1}{16}\left|\left(W+\frac{1}{n-2}\overset{\circ}{Ric}\owedge g\right)_{ijkl}(\overset{\circ}{Ric}\owedge\overset{\circ}{Ric})_{ijkl}\right|^2\\
&\leq\frac{(n-2)}{2(n-1)}\left(|W|^2+\frac{8}{n(n-2)}|\overset{\circ}{Ric}|^2\right)|\overset{\circ}{Ric}|^4,
\end{aligned}$$

podendo ser escrito como

$$\left|-W_{ijkl}\overset{\circ}{R}_{ik}\overset{\circ}{R}_{jl}+\frac{2}{n-2}\overset{\circ}{R}_{ij}\overset{\circ}{R}_{jk}\overset{\circ}{R}_{ik}\right|\leq\sqrt{\frac{(n-2)}{2(n-1)}}\left(|W|^2+\frac{8}{n(n-2)}|\overset{\circ}{Ric}|^2\right)^{1/2}|\overset{\circ}{Ric}|^2,$$

concluindo a demonstração. □

Para provar a próxima proposição, que será fundamental na demonstração do resultado principal dessa dissertação, precisaremos de alguns resultados. O primeiro deles é o seguinte lema encontrado no artigo [15] escrito por G. Huskein (para mais detalhes veja [3]).

Lema 2.2. *Seja $T=\{T_{ij}\}_{1\leq i,j\leq n}$ um operador simétrico sem traço com auto-valores $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ satisfazendo:*

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=0 \quad e \quad |T|^2=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2.$$

Então,

1. $\lambda_i^2 \leq \dfrac{n-1}{n}|T|^2, \ \ 1 \leq i \leq n.$

2. $|tr(T^3)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^3\right| \leq \dfrac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|T|^3.$

Demonstração. ·

Para provar 1, observe que

$$\begin{aligned}
(n-1)|T|^2 - n\lambda_i^2 =&(n-1)\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \lambda_j^2 + (n-1)\lambda_i^2 - n\lambda_i^2 \\
=&(n-1)\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \lambda_j^2 - \lambda_i^2 \\
=&(n-1)\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \left(\lambda_j^2 - \frac{\lambda_i^2}{(n-1)^2}\right).
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \left(\lambda_j + \frac{\lambda_i}{n-1}\right)^2 =&\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \lambda_j^2 + \frac{2\lambda_i}{n-1}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \lambda_j + \frac{\lambda_i^2}{n-1} \\
=&\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \lambda_j^2 - \frac{2\lambda_i^2}{n-1} + \frac{\lambda_i^2}{n-1} \\
=&\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \left(\lambda_j^2 - \frac{\lambda_i^2}{(n-1)^2}\right).
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$(n-1)|T|^2 - n\lambda_i^2 =(n-1)\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \left(\lambda_j^2 - \frac{\lambda_i^2}{(n-1)^2}\right) \geq 0$$

e, portanto,

$$\lambda_i \leq \frac{n-1}{n}|T|^2.$$

Por fim, para a prova do item 2 vamos considerar a função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^3$$

e a subvariedade $B = \{\lambda \in \mathbb{R}^n; \lambda_1^2 + ... + \lambda_n^2 = |T|^2 \ e \ \lambda_1 + ... + \lambda_n = 0\}$ de dimensão 2 em $\mathbb{R}^n$. Assim, usando o método multiplicadores de Lagrange para encontrar os pontos críticos da função f restrita a B, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 3(\lambda_1^2, ..., \lambda_n^2) = 2\alpha(\lambda_1, ..., \lambda_n) + \beta(1, ..., 1) \\ \lambda_1^2 + ... + \lambda_n^2 = |T|^2 \\ \lambda_1 + ... + \lambda_n = 0 \end{cases}$$

Então, segue do sistema acima que os pontos críticos são dados pelos valores de λ_i que satisfazem a equação quadrática

$$3\lambda_i^2 = 2\alpha\lambda_i + \beta, \quad \forall i = 1, ..., n.$$

Além disso, pela igualdade $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$, temos que pelo menos um λ_i muda de sinal. Assim, sendo p índices tal que cada $\lambda_i > 0$ e $n - p$ a quantidade de índices tal que cada $\lambda_i < 0$, ou seja, os pontos críticos de f são dados por:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_p = a > 0, \qquad \lambda_{p+1} = \lambda_{p+2} = ... = \lambda_n = -b < 0.$$

Portanto, nos pontos críticos, temos

$$|T|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = pa^2 + (n-p)b^2 \tag{2.13}$$

$$0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i = pa - (n-p)b \tag{2.14}$$

$$f = \sum_{i=1}^n \lambda_i^3 = pa^3 - (n-p)b^3. \tag{2.15}$$

Daí, elevando ao quadrado a igualdade (2.14) e substituindo em (2.13), obtemos:

$$\begin{aligned} |T|^2 =& pa^2 + (n-p)b^2 \\ =& pa^2 + \frac{p^2a^2}{n-p} \\ =& pa^2\left(1 + \frac{p}{n-p}\right) \\ =& a^2\frac{pn}{n-p}, \end{aligned}$$

ou seja, $a^2 = \dfrac{(n-p)}{np}|T|^2$. Analogamente, temos que $b^2 = \dfrac{p}{(n-p)n}|T|^2$.

Finalmente, pela Equação (2.15) temos

$$\begin{aligned} f =& pa^3 - (n-p)b^3 \\ =& pa\frac{(n-p)}{n}|T|^2 - (n-p)b\frac{p}{(n-p)n}|T|^2 \\ =& \left(\frac{n-p}{n}a - \frac{p}{n}b\right)|T|^2. \end{aligned}$$

Dessa forma, segue que f diminui quando p aumenta. Portanto, f atinge o máximo em $p = 1$ e o mínimo em $p = n-1$. Logo, o máximo de f é

$$\begin{aligned} a^3 - (n-1)b^3 =& (n-1)^3 - (n-1)b^3 \\ =& ((n-1)^2 - 1)(n-1)b^3 \\ =& n(n-1)(n-2)b^3 \\ =& n(n-1)(n-2)\frac{1}{n(n-1)}|T|^2 b \\ =& (n-2)|T|^2 b \\ =& (n-2)|T|^2 \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}|T| \\ =& \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|T|^3 \end{aligned}$$

e o mínimo de f é

$$\begin{aligned} (n-1)a^3 - b^3 =& (n-1)a^3 - (n-1)^3 a^3 \\ =& (1 - (n-1)^2)(n-1)a^3 \\ =& - n(n-1)(n-2)a^3 \\ =& - n(n-1)(n-2)\frac{1}{n(n-1)}|T|^2 a \\ =& - (n-2)|T|^2 a \\ =& - (n-2)|T|^2 \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}|T| \\ =& - \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|T|^3. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que

$$-\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|T|^3 \leq f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^3 \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|T|^3,$$

isto é,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^3 \right| \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|T|^3.$$

□

Corolário 2.2. *Seja K um autovalor do operador simétrico $T : \Lambda^2(M) \to \Lambda^2(M)$ de traço nulo. Então,*

$$K^2 \leq \frac{N-1}{N}\|T\|^2_{\Lambda^2} = \frac{(n-2)(n+1)}{4n(n-1)}|T|^2.$$

Demonstração. ·

Pelo Lema 2.2 item 1, temos que

$$K^2 \leq \frac{N-1}{N}\|T\|^2_{\Lambda^2},$$

onde $N = dim(\Lambda^2(M)) = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Daí, segue que

$$\begin{aligned} K^2 \leq \frac{N-1}{N}\|T\|^2_{\Lambda^2} =& \frac{\frac{n(n-1)}{2} - 1}{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{|T|^2}{4} \\ =& \frac{(n-2)(n+1)}{4n(n-1)}|T|^2. \end{aligned}$$

□

Agora, vamos mostrar outra estimativa envolvendo o tensor Wely. Antes de tudo, vamos considerar um tensor $T = \{T_{ijkl}\}$ com as mesmas simetrias que o tensor de Riemann. Assim, definimos um operador simétrico $T : \Lambda^2(M) \to \Lambda^2(M)$ no espaço das 2-forma por

$$(T\omega)_{kl} := \frac{1}{2}T_{ijkl}\omega_{ij},$$

onde $\omega \in \Lambda^2(M)$. Além disso, temos que μ é um autovalor de T se

$$T_{ijkl}\omega_{ij} = 2\mu\omega_{kl},$$

para algum $0 \neq \omega \in \Lambda^2(M)$ e, também, temos que $||T||^2_{\Lambda^2} = \dfrac{1}{4}|T|^2$.

Proposição 2.3. *Para toda variedade Riemanniana de dimensão n existe uma constante $C(n)$ tal que a seguinte estimativa é válida*

$$\left|2W_{ijkl}W_{ipkq}W_{pjql} + \frac{1}{2}W_{ijkl}W_{klpq}W_{pqij}\right| \leq C(n)|W|^3.$$

Além disso, para $n \geq 7$ temos que $C(4) = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$, $C(5) = 1$, $C(6) = \dfrac{\sqrt{70}}{2\sqrt{3}}$ e $C(n) = \dfrac{5}{2}$.

Demonstração. Primeiro, observe que pela desigualdade de Cauchy-Schwarz vale:

$$\begin{aligned} \left|2W_{ijkl}W_{ipkq}W_{pjql} + \frac{1}{2}W_{ijkl}W_{klpq}W_{pqij}\right| &\leq 2|W_{ijkl}W_{ipkq}W_{pjql}| + \frac{1}{2}|W_{ijkl}W_{klpq}W_{pqij}| \\ &\leq 2|W|^3 + \frac{1}{2}|W|^3 \\ &\leq \frac{5}{2}|W|^3. \end{aligned}$$

Entretanto, nos casos que $n = 4, 5$ *e* 6 obtêm-se, em cada caso, uma estimativa melhor que a desigualdade acima. De fato, em dimensão $n = 4$, a constante é ótima $C(4) = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$, para uma prova deste fato veja Lema 3.5 em [15].

Para verificar em dimensão $n = 5$, vamos considerar uma identidade algébrica que se verifica em todas as variedades Riemanniana de dimensão 5 a qual foi provada por Jack I. e Parker L. em [18], a saber,

$$W_{ijkl}W_{ipkq}W_{pjql} = 4W_{ijkl}W_{klpq}W_{pqij}.$$

Em seguida, em dimensão $n = 5$, por Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned}\left|2W_{ijkl}W_{ipkq}W_{pjql} + \frac{1}{2}W_{ijkl}W_{klpq}W_{pqij}\right| &= \left|2\cdot\frac{1}{4}W_{ijkl}W_{klpq}W_{pqij} + \frac{1}{2}W_{ijkl}W_{klpq}W_{pqij}\right|\\ &= |W_{ijkl}W_{klpq}W_{pqij}|\\ &\leq |W|^3.\end{aligned}$$

Finalmente, para obtermos a estimativa para $n = 6$, foi provada em [15] por Huskein inspirado na ideia de Tachibana S. em [25], a qual considerou o tensor anti-simétrico $\omega = \{\omega_{ij}^{pqrs}\}$ dado por

$$\begin{aligned}\omega_{ij}^{pqrs} :=& W_{iqrs}g_{jp} + W_{pirs}g_{jq} + W_{pqis}g_{jr} + W_{pqri}g_{js}\\ &- W_{jqrs}g_{ip} - W_{pjrs}g_{iq} - W_{pqjs}g_{ir} - W_{pqrj}g_{is}.\end{aligned}$$

Note que, o tensor ω satisfaz as seguintes propriedades:

(1) $\omega_{ij}^{pqrs} = -\omega_{ji}^{pqrs}$

(2) $\omega_{ij}^{pqrs} = -\omega_{ij}^{qprs}$

(3) $\omega_{ij}^{pqrs} = -\omega_{ij}^{pqsr}$

(4) $\omega_{ij}^{pqrs} = \omega_{ij}^{rspq}$

Prova: Para a prova do item (1), observe que

$$\begin{aligned}\omega_{ij}^{pqrs} =& W_{iqrs}g_{jp} + W_{pirs}g_{jq} + W_{pqis}g_{jr} + W_{pqri}g_{js}\\ &- W_{jqrs}g_{ip} - W_{pjrs}g_{iq} - W_{pqjs}g_{ir} - W_{pqrj}g_{is}\\ =& -(-W_{iqrs}g_{jp} - W_{pirs}g_{jq} - W_{pqis}g_{jr} - W_{pqri}g_{js}\\ &+ W_{jqrs}g_{ip} + W_{pjrs}g_{iq} + W_{pqjs}g_{ir} + W_{pqrj}g_{is})\\ =& -\omega_{ji}^{pqrs}.\end{aligned}$$

Além disso, fazendo alguns cálculos

$$\begin{aligned}\omega_{ij}^{pqrs} =& W_{iqrs}g_{jp} + W_{pirs}g_{jq} + W_{pqis}g_{jr} + W_{pqri}g_{js} \\ &- W_{jqrs}g_{ip} - W_{pjrs}g_{iq} - W_{pqjs}g_{ir} - W_{pqrj}g_{is} \\ =& - W_{qirs}g_{jp} - W_{iprs}g_{jq} - W_{qpis}g_{jr} - W_{qpri}g_{js} \\ &+ W_{qjrs}g_{ip} + W_{jprs}g_{iq} + W_{qpjs}g_{ir} + W_{qprj}g_{is} \\ =& - (W_{iprs}g_{jq} + W_{qirs}g_{jp} + W_{qpis}g_{jr} + W_{qpri}g_{js} \\ &- W_{jprs}g_{iq} - W_{qjrs}g_{ip} - W_{qpjs}g_{ir} + W_{qprj}g_{is}) \\ =& - \omega_{ij}^{qprs},\end{aligned}$$

provamos o item (2). Analogamente, segue o item (3).

Para finalizar, a prova do item (4) segue dos cálculos

$$\begin{aligned}d\omega_{ij}^{pqrs} =& W_{iqrs}g_{jp} + W_{pirs}g_{jq} + W_{pqis}g_{jr} + W_{pqri}g_{js} \\ &- W_{jqrs}g_{ip} - W_{pjrs}g_{iq} - W_{pqjs}g_{ir} - W_{pqrj}g_{is} \\ =& W_{ispq}g_{jr} + W_{ripq}g_{js} + W_{rsiq}g_{jp} + W_{rspi}g_{jq} \\ &- W_{jspq}g_{ir} - W_{rjpq}g_{is} - W_{rsjq}g_{ip} - W_{rspj}g_{iq} \\ =& \omega_{ij}^{rspq}.\end{aligned}$$

Dessa forma, conseguimos mostrar que

$$2W_{ijkl}W_{ipkq}W_{pjql} + \frac{1}{2}W_{ijkl}W_{klpq}W_{pqij} = -\frac{1}{16}W_{ijkl}\omega_{ij}^{(pqrs)}\omega_{kl}^{(pqrs)} \tag{2.16}$$

$$|\omega|^2 = 8(n-1)|W|^2. \tag{2.17}$$

Para a prova da Equação (2.16), note que

$$\begin{aligned}W_{ijkl}\omega_{ij}^{pqrs} =& W_{ijkl}(W_{iqrs}g_{jp} + W_{pirs}g_{jq} + W_{pqis}g_{jr} + W_{pqri}g_{js} \\ &- W_{jqrs}g_{ip} - W_{pjrs}g_{iq} - W_{pqjs}g_{ir} - W_{pqrj}g_{is}) \\ =& W_{ipkl}W_{iqrs} + W_{iqkl}W_{pirs} + W_{irkl}W_{pqis} + W_{iskl}W_{pqri} \\ &- W_{pjkl}W_{jqrs} - W_{qjkl}W_{pjrs} - W_{rjkl}W_{pqjs} - W_{sjkl}W_{pqrj} \\ =& W_{ipkl}W_{iqrs} + W_{iqkl}W_{pirs} + W_{irkl}W_{pqis} + W_{iskl}W_{pqri} \\ &+ \underbrace{W_{ipkl}W_{iqrs}}_{i\leftrightarrow j} + \underbrace{W_{iqkl}W_{pirs}}_{i\leftrightarrow j} + \underbrace{W_{irkl}W_{pqis}}_{i\leftrightarrow j} + \underbrace{W_{iskl}W_{pqri}}_{i\leftrightarrow j} \\ =& 2(W_{ipkl}W_{iqrs} + W_{iqkl}W_{pirs} + W_{irkl}W_{pqis} + W_{iskl}W_{pqri})\end{aligned}$$

e, assim, temos

$$\begin{aligned}
W_{ijkl}\omega_{ij}^{pqrs}\omega_{kl}^{pqrs} =& 2(W_{ipkl}W_{iqrs} + W_{iqkl}W_{pirs} + W_{irkl}W_{pqis} + W_{iskl}W_{pqri})\omega_{kl}^{pqrs} \\
=& 2W_{ipkl}W_{iqrs}\omega_{kl}^{pqrs} + 2W_{iqkl}W_{pirs}\omega_{kl}^{pqrs} + 2W_{irkl}W_{pqis}\omega_{kl}^{pqrs} \\
& + 2W_{iskl}W_{pqri}\omega_{kl}^{pqrs} \\
=& 2W_{ipkl}W_{iqrs}\omega_{kl}^{pqrs} + 2\underbrace{W_{ipkl}W_{qirs}\omega_{kl}^{qprs}}_{p\leftrightarrow q} + 2\underbrace{W_{ipkl}W_{rsiq}\omega_{kl}^{rspq}}_{p\leftrightarrow r, q\leftrightarrow s} \\
& + 2\underbrace{W_{ipkl}W_{srqi}\omega_{kl}^{srqp}}_{s\leftrightarrow p, r\leftrightarrow q} \\
=& 8W_{ipkl}W_{iqrs}\omega_{kl}^{pqrs}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, veja que

$$\begin{aligned}
W_{ipkl}W_{iqrs}\omega_{kl}^{pqrs} =& W_{ipkl}W_{iqrs}(W_{kqrs}g_{lp} + W_{pkrs}g_{lq} + W_{pqks}g_{lr} + W_{pqrk}g_{ls} \\
& - W_{lqrs}g_{kp} - W_{plrs}g_{kq} - W_{pqls}g_{kr} - W_{pqrl}g_{ks}) \\
=& W_{ipkl}W_{ilrs}W_{pkrs} + W_{ipkl}W_{iqls}W_{pqks} + W_{ipkl}W_{iqrl}W_{pqrk} \\
& - W_{ipkl}W_{ikrs}W_{plrs} - W_{ipkl}W_{iqks}W_{pqls} - W_{ipkl}W_{iqrk}W_{pqrl} \\
=& \underbrace{W_{ijkl}W_{ilrs}W_{jkrs}}_{p\leftrightarrow j} + \underbrace{W_{iplk}W_{iqks}W_{pqls}}_{l\leftrightarrow k} + \underbrace{W_{iplk}W_{iqsk}W_{pqsl}}_{l\leftrightarrow k, r\leftrightarrow s} \\
& - \underbrace{W_{ijkl}W_{ikrs}W_{jlrs}}_{p\leftrightarrow j} - W_{ipkl}W_{iqks}W_{pqls} - \underbrace{W_{ipkl}W_{iqsk}W_{pqsl}}_{r\leftrightarrow s},
\end{aligned}$$

e fazendo mais algumas trocas de índices, segue que

$$\begin{aligned}
W_{ipkl}W_{iqrs}\omega_{kl}^{pqrs} =& \underbrace{W_{ijkl}W_{ilpq}W_{jkpq}}_{p\leftrightarrow r, q\leftrightarrow s} - \underbrace{W_{ijkl}W_{ikpq}W_{jlpq}}_{p\leftrightarrow r, q\leftrightarrow s} + 4W_{iplk}W_{iqks}W_{pqls} \\
=& \underbrace{W_{ilkj}W_{ijpq}W_{lkpq}}_{j\leftrightarrow l} - \underbrace{W_{ikjl}W_{ijpq}W_{klpq}}_{k\leftrightarrow j} + 4\underbrace{W_{ijlk}W_{iskq}W_{jslq}}_{j\leftrightarrow p, q\leftrightarrow s} \\
=& (W_{kjil} + W_{ikjl})W_{ijpq}W_{lkpq} + 4\underbrace{W_{ijlk}W_{ipkq}W_{jplq}}_{s\leftrightarrow p} \\
=& -4W_{ijkl}W_{ipkq}W_{pjql} - W_{ijkl}W_{pqij}W_{klpq}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
W_{ijkl}\omega_{ij}^{pqrs}\omega_{kl}^{pqrs} =& 8W_{ipkl}W_{iqrs}\omega_{kl}^{pqrs} \\
=& -32W_{ijkl}W_{ipkq}W_{pjql} - 8W_{ijkl}W_{pqij}W_{klpq},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$2W_{ijkl}W_{ipkq}W_{pjql} + \frac{1}{2}W_{ijkl}W_{pqij}W_{klpq} = -\frac{1}{16}W_{ijkl}\omega_{ij}^{pqrs}\omega_{kl}^{pqrs}.$$

Agora, exibiremos a prova da Equação (2.17). Com efeito,

$$\begin{aligned}
|\omega|^2 =& \omega_{ij}^{pqrs}\omega_{ij}^{pqrs} \\
=& (W_{iqrs}g_{jp} + W_{pirs}g_{jq} + W_{pqis}g_{jr} + W_{pqri}g_{js} \\
& - W_{jqrs}g_{ip} - W_{pjrs}g_{iq} - W_{pqjs}g_{ir} - W_{pqrj}g_{is})\omega_{ij}^{pqrs} \\
=& W_{iqrs}g_{jp}\omega_{ij}^{pqrs} + W_{pirs}g_{jq}\omega_{ij}^{pqrs} + W_{pqis}g_{jr}\omega_{ij}^{pqrs} + W_{pqri}g_{js}\omega_{ij}^{pqrs} \\
& - W_{jqrs}g_{ip}\omega_{ij}^{pqrs} - W_{pjrs}g_{iq}\omega_{ij}^{pqrs} - W_{pqjs}g_{ir}\omega_{ij}^{pqrs} - W_{pqrj}g_{is}\omega_{ij}^{pqrs} \\
=& W_{iqrs}\omega_{ij}^{jqrs} + W_{pirs}\omega_{ij}^{pjrs} + W_{pqis}\omega_{ij}^{pqjs} + W_{pqri}\omega_{ij}^{pqrj} \\
& - W_{jqrs}\omega_{ij}^{iqrs} - W_{pjrs}\omega_{ij}^{pirs} - W_{pqjs}\omega_{ij}^{pqis} - W_{pqrj}\omega_{ij}^{pqri} \\
=& W_{iqrs}\omega_{ij}^{jqrs} + W_{pirs}\omega_{ij}^{pjrs} + W_{pqis}\omega_{ij}^{pqjs} + W_{pqri}\omega_{ij}^{pqrj} \\
& - \underbrace{W_{iqrs}\omega_{ji}^{jqrs}}_{i\leftrightarrow j} - \underbrace{W_{pirs}\omega_{ji}^{pjrs}}_{i\leftrightarrow j} - \underbrace{W_{pqis}\omega_{ji}^{pqjs}}_{i\leftrightarrow j} - \underbrace{W_{pqri}\omega_{ji}^{pqrj}}_{i\leftrightarrow j} \\
=& 2W_{iqrs}\omega_{ij}^{jqrs} + 2\underbrace{W_{qirs}\omega_{ij}^{qjrs}}_{q\leftrightarrow p} + 2W_{pqis}\omega_{ij}^{pqjs} + 2\underbrace{W_{pqsi}\omega_{ij}^{pqsj}}_{r\leftrightarrow s} \\
=& 4W_{iqrs}\omega_{ij}^{jqrs} + 4\underbrace{W_{rsiq}\omega_{ij}^{rsjq}}_{q\leftrightarrow s, p\leftrightarrow r} \\
=& 8W_{iqrs}\omega_{ij}^{jqrs}.
\end{aligned}$$

No entanto, temos

$$\begin{aligned}
W_{iqrs}\omega_{ij}^{jqrs} =& W_{iqrs}(W_{iqrs}g_{jj} + W_{jirs}g_{jq} + W_{jqis}g_{jr} + W_{jqri}g_{js} \\
& - W_{jqrs}g_{ij} - W_{jjrs}g_{iq} - W_{jqjs}g_{ir} - W_{jqrj}g_{is}) \\
=& n|W|^2 + W_{ijrs}W_{jirs} + W_{iqrs}W_{rqis} + W_{iqrs}W_{sqri} - |W|^2 \\
=& n|W|^2 - 2|W|^2 + (W_{rqis} + W_{sqri})W_{iqrs} \\
=& n|W|^2 - 2|W|^2 - W_{qirs}W_{iqrs} \\
=& (n-1)|W|^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$|\omega|^2 = 8(n-1)|W|^2.$$

Por conseguinte, denotando por μ o valor próprio máximo de W, uma vez que W tem traço livre, segue do Corolário 2.2 juntamente com a Equação (2.16) que

$$\begin{aligned}
|W_{ijkl}\omega_{ij}^{pqrs}\omega_{kl}^{pqrs}| &\leq 2\mu\omega_{kl}^{pqrs}\omega_{kl}^{pqrs} \\
&= 2\mu|\omega|^2 \\
&\leq 2\left(\sqrt{\frac{(n-2)(n+1)}{4n(n-1)}}|W|\right)|\omega|^2 \\
&= 8(n-1)\sqrt{\frac{(n-2)(n+1)}{n(n-1)}}|W|^3.
\end{aligned}$$

Daí, pela Equação (2.17) obtemos

$$\begin{aligned}
\left|2W_{ijkl}W_{ipkq}W_{pjql} + \frac{1}{2}W_{ijkl}W_{pqij}W_{klpq}\right| &= \left|-\frac{1}{16}W_{ijkl}\omega_{ij}^{(pqrs)}\omega_{kl}^{(pqrs)}\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(n-1)(n-2)(n+1)}{n}}|W|^3.
\end{aligned}$$

Portanto, para em $n = 6$, temos $C(6) = \dfrac{\sqrt{70}}{2\sqrt{3}} < \dfrac{5}{2}$. $\square$

Capítulo 3

Sóliton de Ricci gradiente

O conceito de sóliton de Ricci foi introduzido por Hamilton [14] por volta dos anos 80. Os sólitons de Ricci são generalizações naturais de métricas Einstein e correspondem a soluções auto-similares do fluxo de Ricci. Neste capítulo tentaremos entender a geometria dos sólitons de Ricci. Assim, definiremos sóliton de Ricci gradiente, mostraremos algumas propriedades e fórmulas gerais. Além disso, (M^n, g) denotará uma variedade completa e conexa de dimensão n.

3.1 Definições e fórmulas em sólitons gradiente

Definição 3.1. *Seja M uma variedade Riemanniana, um **sóliton de Ricci** (M, g, X, λ) é uma métrica Riemanniana junto com um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ e uma constante $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que, satisfaz a seguinte condição*

$$Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \lambda g, \tag{3.1}$$

*onde $\mathcal{L}_X$ é a derivada de Lie. Além disso, dizemos que um sóliton de Ricci é expansivo, estacionário ou contrátil, se $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ ou $\lambda > 0$, respectivamente. Quando X for o gradiente de uma função $f \in C^\infty(M)$ a variedade é chamada de **sóliton de Ricci gradiente** e a Equação* (3.1) *vai ser escrita da seguinte forma*

$$Ric + \nabla^2 f = \lambda g$$

onde $\nabla^2 f$ é a Hessiana de f .

Em coordenadas,

$$R_{ik} + \nabla_i \nabla_k f = \lambda g_{ik}. \tag{3.2}$$

Como nessa dissertação vamos nos concentrar apenas em sólitons de Ricci gradiente contrátil, a seguir exibiremos alguns exemplos clássicos no caso contrátil ($\lambda > 0$).

1. **Esfera.** Como $(\mathbb{S}^n, g_{\mathbb{S}^n})$ é uma variedade de Einstein com constante de Einstein $\lambda > 0$, tomando $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ constante temos $\nabla^2 f = 0$, assim

$$Ric + \nabla^2 f = \lambda g_{\mathbb{S}^n}.$$

   Portanto, $(\mathbb{S}^n, g_{\mathbb{S}^n}, f, \lambda)$ é um sóliton de Ricci gradiente contrátil.

   Observação 3.1. *Até o momento não exite exemplos de sólitons de Ricci compacto contrátil não triviais na estrutura da $\mathbb{S}^n$, ou seja, não sabemos ainda se existe uma função $f \in C^\infty(\mathbb{S}^n)$ não constante tal que a condição (3.2) é satisfeita. Por outro lado, nos trabalhos de N. Koiso em [19] e H.-D. Cao em [8], utilizando estruturas complexas, foram construídos os primeiros exemplos de sólitons de Ricci contrátil compactos em dimensão 4 não triviais.*

2. **Sóliton Gaussiano contrátil:** $(\mathbb{R}^n, g_{eucl}, f, \lambda)$ onde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dada por $f = \frac{\lambda}{2}|x|^2$, $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$ e g_{eucl} é a métrica canônica do $\mathbb{R}^n$ é um sóliton de Ricci gradiente chamado sóliton Gaussiano contrátil.

3. **Sóliton de Ricci cilíndrico contrátil:** Consideremos o produto da esfera contrátil com a reta, isto é, $(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R})$, $t \in (-\infty, 0)$, $n \geq 3$, onde $g(t) = 2(n-2)|t| g_{\mathbb{S}^{n-1}} + dr^2$. Se tomarmos

$$f(\theta, r, t) = \frac{r^2}{4|t|}, \theta \in \mathbb{S}^{n-1}, r \in \mathbb{R}, t < 0,$$

   então temos $(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}, g_{prod}, f, \lambda)$ é um sóliton de Ricci gradiente contrátil.

No próximo lema iremos trabalhar com algumas consequências da Equação (3.2).

Definição 3.2. *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ suave. Então,*

$$g^{ij} \nabla_i f = \nabla_j f.$$

Lema 3.1. *Seja (M^n, g) um sóliton de Ricci gradiente, então valem as seguintes equações:*

$$\Delta f = n\lambda - R \tag{3.3}$$

$$R_{ijks}\nabla_s f = \nabla_j R_{ik} - \nabla_i R_{jk} \tag{3.4}$$

$$\nabla_i R = 2R_{is}\nabla_s f \tag{3.5}$$

$$\Delta_f R = 2\lambda R - 2|Ric|^2 \tag{3.6}$$

$$\Delta_f R_{ik} = 2\lambda R_{ik} - 2W_{ijkl}R_{jl} + \frac{2}{(n-1)(n-2)}(R^2 g_{ik} - nRR_{ik} + 2(n-1)R_{ij}R_{jk} - (n-1)|Ric|^2 g_{ik}), \tag{3.7}$$

onde Δ_f denota o $f-$ Laplaciano, dado por $\Delta_f = \Delta - \langle \nabla f, \cdot \rangle_g$.

Demonstração. Tomando o traço na equação fundamental do sóliton, Equação (3.2), obtemos

$$\Delta f = n\lambda - R.$$

Para provar a Equação (3.4), desenvolva o seu lado direito substituindo a Equação (3.2) e, posteriormente, use o Teorema 1.1 para obter

$$\begin{aligned}
\nabla_j R_{ik} - \nabla_i R_{jk} &= \nabla_j(\lambda g_{ik} - \nabla_i \nabla_k f) - \nabla_i(\lambda g_{jk} - \nabla_j \nabla_k f) \\
&= -\nabla_j \nabla_i \nabla_k f + \nabla_i \nabla_j \nabla_k f \\
&= R^l_{ijk}\nabla_l f \\
&= R_{ijks}g^{ls}\nabla_l f \\
&= R_{ijks}\nabla_s f.
\end{aligned}$$

Agora, para provarmos a Equação (3.5), é suficiente combinar a segunda identidade de Bianchi contraída duas vezes juntamente com a Equação (3.4). Com efeito,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\nabla_i R &= g^{jk}\nabla_j R_{ik} \\
&= g^{jk}(\nabla_i R_{jk} + R_{ijks}\nabla_s f) \\
&= \nabla_i R - R_{is}\nabla_s f
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\nabla_i R = 2R_{is}\nabla_s f.$$

Finalmente, para mostrarmos as Equações (3.6) e (3.7) é necessário encontrar uma expressão para o ΔR_{ik} e, para tal, vamos utilizar as igualdades (1.3) e (3.4) da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
\Delta R_{ik} &= \nabla_j\nabla_j R_{ik}\\
&= \nabla_j(\nabla_i R_{jk} + R_{ijks}\nabla_s f)\\
&= \nabla_j\nabla_i R_{jk} + \nabla_j R_{ijks}\nabla_s f + R_{ijks}\nabla_j\nabla_s f\\
&= \nabla_i\nabla_j R_{jk} + R_{ijsj}R_{sk} + R_{ijsk}R_{sj} + \nabla_j R_{ijks}\nabla_s f + R_{ijks}\nabla_j\nabla_s f\\
&= \frac{1}{2}\nabla_i\nabla_k R + R_{is}R_{sk} + R_{ijsk}R_{sj} + (\nabla_s R_{ik}\nabla_s f - \nabla_k R_{is}\nabla_s f) + R_{ijks}\nabla_j\nabla_s f\\
&= \frac{1}{2}\nabla_k\nabla_i R - \nabla_k R_{is}\nabla_s f + R_{is}R_{sk} - R_{ijks}R_{sj} + \nabla_s R_{ik}\nabla_s f + R_{ijks}\nabla_j\nabla_s f. \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

Observe que, diferenciando em k a igualdade (3.5), obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\nabla_k(\nabla_i R) &= \nabla_k(R_{is}\nabla_s f)\\
&= \nabla_k R_{is}\nabla_s f + R_{is}\nabla_k\nabla_s f,
\end{aligned}
$$

o que implica,

$$\frac{1}{2}\nabla_k\nabla_i R - \nabla_k R_{is}\nabla_s f = R_{is}\nabla_k\nabla_s f.$$

Assim, substituindo a igualdade acima em (3.8), temos

$$
\begin{aligned}
\Delta R_{ik} &= R_{is}\nabla_k\nabla_s f + R_{is}R_{sk} - R_{ijks}R_{sj} + \nabla_s R_{ik}\nabla_s f + R_{ijks}\nabla_j\nabla_s f\\
&= \langle\nabla R_{ik}, \nabla f\rangle_g - R_{iskj}R_{sj} + R_{is}R_{sk} + R_{is}\nabla_k\nabla_s f + R_{ijks}\nabla_j\nabla_s f\\
&= \langle\nabla R_{ik}, \nabla f\rangle_g - \underbrace{R_{ijks}R_{js}}_{s\leftrightarrow j} + R_{is}R_{sk} + R_{is}(\lambda g_{ks} - R_{ks}) + R_{ijks}(\lambda g_{js} - R_{js})\\
&= \langle\nabla R_{ik}, \nabla f\rangle_g + 2\lambda R_{ik} - 2R_{ijks}R_{sj}. \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

Continuando, tome o traço na Equação (3.9) para deduzir

$$\Delta R = \langle\nabla R, \nabla f\rangle_g + 2\lambda R - 2|Ric|^2$$

e isso prova a Equação (3.6).

Além disso, substituindo

$$Rm = \frac{1}{n-2}(Ric \owedge g)_{ijkl} - \frac{R}{2(n-1)(n-2)}(g \owedge g)_{ijkl} + W_{ijkl}$$

na igualdade (3.9), teremos

$$
\begin{aligned}
\Delta R_{ik} =& \langle \nabla R_{ik}, \nabla f\rangle_g + 2\lambda R_{ik} + \frac{2R}{(n-1)(n-2)}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})R_{jl} \\
&- \frac{2}{n-2}(R_{ik}g_{jl} + R_{jl}g_{ik} - R_{il}g_{jk} - R_{jk}g_{il})R_{jl} - 2W_{ijkl}R_{jl} \\
=& \langle \nabla R_{ik}, \nabla f\rangle_g + 2\lambda R_{ik} + \frac{2R}{(n-1)(n-2)}(Rg_{ik} - R_{ik}) \\
&- \frac{2}{n-2}(RR_{ik} - R_{il}g_{jk}R_{jl} + |Ric|^2 g_{ik} - R_{jk}g_{il}R_{jl}) - 2W_{ijkl}R_{jl} \\
=& \langle \nabla R_{ik}, \nabla f\rangle_g + 2\lambda R_{ik} - 2W_{ijkl}R_{jl} \\
&+ \frac{2}{(n-1)(n-2)}[R^2 g_{ik} - R_{ik}R - (n-1)(RR_{ik} - 2R_{ij}R_{jk} + |Ric|^2 g_{ik})].
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\Delta_f R_{ik} = 2\lambda R_{ik} - 2W_{ijkl}R_{jl} + \frac{2}{(n-1)(n-2)}[R^2 g_{ik} - nRR_{ik} + 2(n-1)R_{ij}R_{jk} - (n-1)|Ric|^2 g_{ik}].
$$

□

Em particular, pelo lema acima, Equação (3.7), podemos encontrar o $\Delta_f \mathring{R}_{ik}$ da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\Delta_f \left(R_{ik} - \frac{R}{n}g_{ik}\right) =& -\frac{g_{ik}}{n}\Delta_f R + 2\lambda\left(R_{ik} - \frac{R}{n}g_{ik}\right) + 2\lambda\frac{R}{n}g_{ik} - 2W_{ijkl}\left(R_{jl} - \frac{R}{n}g_{jl}\right) \\
&+ \frac{2R^2 g_{ik}}{(n-1)(n-2)} - \frac{2nR}{(n-1)(n-2)}\left(R_{ik} - \frac{R}{n}g_{ik}\right) \\
&- \frac{2R^2}{(n-1)(n-2)}g_{ik} + \frac{4}{n-2}R_{ij}R_{jk} - \frac{2}{n-2}|Ric|^2 g_{ik}
\end{aligned}
$$

e, portanto, temos

$$
\begin{aligned}
\Delta_f \mathring{R}_{ik} =& -\frac{g_{ik}}{n}\Delta_f R + 2\lambda \mathring{R}_{ik} + 2\lambda\frac{R}{n}g_{ik} - 2W_{ijkl}\mathring{R}_{jl} + \frac{2R^2 g_{ik}}{(n-1)(n-2)} \\
&- \frac{2nR}{(n-1)(n-2)}\mathring{R}_{ik} - \frac{2R^2}{(n-1)(n-2)}g_{ik} \\
&+ \frac{4}{n-2}\left(\mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{jk} + \frac{2R}{n}\mathring{R}_{ik} + \frac{R^2}{n^2}g_{ik}\right) - \frac{2}{n-2}|Ric|^2 g_{ik}, \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
\mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{jk} =& \left(R_{ij} - \frac{R}{n}g_{ij}\right)\left(R_{jk} - \frac{R}{n}g_{jk}\right) \\
=& R_{ij}R_{jk} - \frac{2R}{n}R_{ik} + \frac{R^2}{n^2}g_{ik} \\
=& R_{ij}R_{jk} - \frac{2R}{n}\left(R_{ik} - \frac{R}{n}g_{ik}\right) - \frac{R^2}{n^2}g_{ik}.
\end{aligned}
$$

Lema 3.2. *Seja (M^n, g) um soliton de Ricci gradiente, então a seguinte fórmula é válida:*

$$\frac{1}{2}\Delta_f|\mathring{Ric}|^2 = |\nabla\mathring{Ric}|^2 + 2\lambda|\mathring{Ric}|^2 - 2W_{ijkl}\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{jl} + \frac{4}{n-2}\mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{jk}\mathring{R}_{ik} - \frac{2(n-2)}{n(n-1)}R|\mathring{Ric}|^2$$

Demonstração. Primeiro, note que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|\mathring{Ric}|^2 =& \frac{1}{2}\left(\nabla_j\nabla_j\mathring{R}_{ik}\mathring{R}_{ik}\right)\\ =&\frac{1}{2}\nabla_j(2\mathring{R}_{ik}\nabla_j\mathring{R}_{ik})\\ =&\nabla_j\mathring{R}_{ik}\nabla_j\mathring{R}_{ik} + \mathring{R}_{ik}\nabla_j\nabla_j\mathring{R}_{ik}\\ =&|\nabla\mathring{Ric}|^2 + \langle\mathring{Ric}, \Delta\mathring{Ric}\rangle_g.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|\mathring{Ric}|^2 - \frac{1}{2}\langle\nabla f, \nabla|\mathring{Ric}|^2\rangle =& |\nabla\mathring{Ric}|^2 + \langle\mathring{Ric}, \Delta\mathring{Ric}\rangle_g - \frac{1}{2}\langle\nabla f, \nabla|\mathring{Ric}|^2\rangle_g\\ =&|\nabla\mathring{Ric}|^2 + \langle\mathring{Ric}, \Delta\mathring{Ric}\rangle_g - \langle\nabla f, \nabla\mathring{Ric}\mathring{Ric}\rangle_g\\ =&|\nabla\mathring{Ric}|^2 - \langle\mathring{Ric}, \Delta\mathring{Ric} - \langle\nabla f, \nabla\mathring{Ric}\rangle_g\rangle_g,\end{aligned}$$

donde deduzimos

$$\frac{1}{2}\Delta_f|\mathring{Ric}|^2 = |\nabla\mathring{Ric}|^2 + \langle\mathring{Ric}, \Delta_f\mathring{Ric}\rangle_g. \tag{3.11}$$

Por fim, substituindo (3.10) em (3.11), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta_f|\mathring{Ric}|^2 =& |\nabla\mathring{Ric}|^2 + \langle\mathring{R}_{ik}, \Delta_f\mathring{R}_{ik}\rangle_g\\ =&|\nabla\mathring{Ric}|^2 + 2\lambda|\mathring{Ric}|^2 - 2W_{ijkl}\mathring{R}_{jl}\mathring{R}_{ik} + \frac{4}{n-2}\mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{jk}\mathring{R}_{ik}\\ &- \frac{2nR}{(n-1)(n-2)}|\mathring{Ric}|^2 + \frac{8R}{n(n-2)}|\mathring{Ric}|^2\\ =&|\nabla\mathring{Ric}|^2 + 2\lambda|\mathring{Ric}|^2 - 2W_{ijkl}\mathring{R}_{jl}\mathring{R}_{ik} + \frac{4}{n-2}\mathring{R}_{ij}\mathring{R}_{jk}\mathring{R}_{ik} - \frac{2(n-2)}{n(n-1)}R|\mathring{Ric}|^2.\end{aligned}$$

□

Capítulo 4

Resultados principais

Neste capítulo vamos apresentar os principais resultados dessa dissertação, os quais caracterizam os soliton de Ricci contrátil em dimensão $n = 4, 5$ *e* 6 satisfazendo a condição de integral pinçada.

4.1 Sóliton de Ricci que satisfazem uma condição de integral pinçada

O primeiro resultado que veremos caracteriza variedades de Einstein com curvatura escalar positiva e satisfazendo uma determinada estimativa da $L^{\frac{n}{2}}$-norma do tensor de Weyl, como sendo a menos de um quociente isométrico a $\mathbb{S}^n$ com a métrica canônica. Antes de tudo, vamos relembrar a definição do invariante de Yamabe $Y(M,[g])$ vista na Seção 1.5,

$$Y(M,[g]) = \frac{4(n-1)}{n-2} \inf_{u\in W^{1,2}(M)} \frac{\int_M |\nabla u|^2 dV_g + \frac{n-2}{4(n-1)}\int_M Ru^2 dV_g}{\left(\int_M |u|^{2n/(n-2)} dV_g\right)^{(n-2)/n}},$$

segue da definição de ínfimo que, para cada função $u \in W^{1,2}(M)$

$$\frac{n-2}{4(n-1)} Y(M,[g]) \left(\int_M |u|^{2n/(n-2)} dV_g\right)^{\frac{n-2}{n}} \leq \int_M |\nabla u|^2 dV_g + \frac{n-2}{4(n-1)}\int_M Ru^2 dV_g. \quad (4.1)$$

Teorema 4.1 (Catino, 2016). *Seja (M^n, g) uma variedade de Einstein com curvatura escalar positiva. Existe uma constante positiva $A(n)$ tal que se*

$$\left(\int_M |W|^{\frac{n}{2}} dV_g\right)^{\frac{2}{n}} < A(n) Y(M,[g]), \quad (4.2)$$

então a menos de um quociente, (M^n, g) é isométrico a $\mathbb{S}^n$ munida com a métrica canônica. Além disso, temos $A(4) = \frac{5}{9\sqrt{6}}$, $A(5) = \frac{3}{32}$, $A(6) = \frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{70}}$, $A(n) = \frac{n-2}{20(n-1)}$, se $7 \leq n \leq 9$ e $A(n) = \frac{2}{5n}$ se $n \geq 10$.

Demonstração. Primeiro, observe que substituindo a equação de Kato para o tensor de Weyl ($|\nabla W|^2 \geq |\nabla |W||^2$) na igualdade

$$\frac{1}{2}\Delta|W|^2 = |\nabla W|^2 + \frac{2}{n}R|W|^2 - 2(2W_{ijkl}W_{ipkq}W_{pjql} + \frac{1}{2}W_{ijkl}W_{klpq}W_{pqij}),$$

teremos

$$0 \geq -\frac{1}{2}\Delta|W|^2 + |\nabla |W||^2 + \frac{2}{n}R|W|^2 - 2(2W_{ijkl}W_{ipkq}W_{pjql} + \frac{1}{2}W_{ijkl}W_{klpq}W_{pqij}).$$

Usando a Proposição 2.3 na desigualdade acima, obtemos

$$0 \geq -\frac{1}{2}\Delta|W|^2 + |\nabla |W||^2 + \frac{2}{n}R|W|^2 - 2\left(C(n)|W|^3\right)$$

e integrando em M^n, temos ainda que

$$0 \geq -\frac{1}{2}\int_M \Delta|W|^2 dV_g + \int_M |\nabla |W||^2 dV_g + \frac{2}{n}\int_M R|W|^2 dV_g - 2C(n)\int_M |W|^3 dV_g$$

onde $C(4) = \frac{\sqrt{6}}{4}$, $C(5) = 1$, $C(6) = \frac{\sqrt{70}}{2\sqrt{3}}$ e $C(n) = \frac{5}{2}$ para $n \geq 7$.
Assim, usando o teorema de Stokes na desigualdade acima, chegamos a seguinte expressão

$$0 \geq \int_M |\nabla |W||^2 dV_g + \frac{2}{n}\int_M R|W|^2 dV_g - 2C(n)\int_M |W|^3 dV_g. \tag{4.3}$$

Por outro lado, pela desigualdade de Hölder sabemos que

$$\int_M |W||W|^2 dV_g \leq \|W\|_{\frac{n}{2}}\|W^2\|_{\frac{n}{n-2}} = \left(\int_M |W|^{\frac{n}{2}} dV_g\right)^{\frac{2}{n}}\left(\int_M |W|^{\frac{2n}{n-2}} dV_g\right)^{\frac{n-2}{n}} \tag{4.4}$$

e pela desigualdade (4.1) para $u := |W|$, obtemos

$$\frac{n-2}{4(n-1)}Y(M,[g])\left(\int_M |W|^{2n/(n-2)} dV_g\right)^{\frac{n-2}{n}} \leq \int_M |\nabla |W||^2 dV_g + \frac{n-2}{4(n-1)}\int_M R|W|^2 dV_g. \tag{4.5}$$

Dessa forma, substituindo as equações (4.4) e (4.5) na desigualdade (4.3), segue que

$$\begin{aligned}
0 &\geq \int_M |\nabla |W||^2 dV_g + \frac{2}{n}\int_M R|W|^2 dV_g - 2C(n)\left(\int_M |W|^{\frac{n}{2}} dV_g\right)^{\frac{2}{n}}\left(\int_M |W|^{\frac{2n}{n-2}} dV_g\right)^{\frac{n-2}{n}} \\
0 &\geq \int_M |\nabla |W||^2 dV_g + \frac{2}{n}\int_M R|W|^2 dV_g \\
&\quad - 2C(n)\left(\int_M |W|^{\frac{n}{2}} dV_g\right)^{\frac{2}{n}} \cdot \frac{1}{Y(M,[g])}\left(\frac{4(n-1)}{n-2}\int_M |\nabla |W||^2 dV_g + \int_M R|W|^2 dV_g\right).
\end{aligned}$$

Além disso, pela nossa hipótese, ver Equação (4.2), podemos concluir ainda que

$$
\begin{aligned}
0 \geq & \int_M |\nabla|W||^2 dV_g + \frac{2}{n}\int_M R|W|^2 dV_g \\
& - 2C(n)A(n)\left(\frac{4(n-1)}{n-2}\int_M |\nabla|W||^2 dV_g + \int_M R|W|^2 dV_g\right) \\
= & \int_M |\nabla|W||^2 dV_g + \frac{2}{n}\int_M R|W|^2 dV_g \\
& - 2C(n)A(n)\frac{4(n-1)}{n-2}\int_M |\nabla|W||^2 dV_g - 2C(n)A(n)\int_M R|W|^2 dV_g \\
= & \left(1 - 2C(n)A(n)\frac{4(n-1)}{n-2}\right)\int_M |\nabla|W||^2 dV_g + \left(\frac{2}{n} - 2C(n)A(n)\right)\int_M R|W|^2 dV_g.
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Entretanto, para provar que a curvatura seccional de uma variedade de Einstein é constante, basta mostrar $|W| = 0$. Pela desigualdade acima conseguimos garantir que $|W| = 0$, se $A(n)$ satisfazer as seguintes desigualdades:

$$
\begin{cases}
2C(n)A(n) \leq \frac{n-2}{4(n-1)} \\
2C(n)A(n) \leq \frac{2}{n}
\end{cases}
$$

Dessa forma, note que

- Para $n = 5$, temos que $C(5) = 1$, então $A(5) = \frac{3}{32}$.
- Para $n = 6$, temos que $C(6) = \frac{\sqrt{70}}{2\sqrt{3}}$, então $A(6) = \frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{70}}$.
- Para $n \geq 7$, temos que $C(n) = \frac{5}{2}$, então $\begin{cases} A(n) = \frac{n-2}{20(n-1)} & se \quad 7 \leq n \leq 9 \\ A(n) = \frac{2}{5n} & se \quad n \geq 10 \end{cases}$.

Logo, concluímos a demonstração do teorema para $n \neq 4$. Para provar o teorema em dimensão $n = 4$, podemos melhorar a estimativa usando a desigualdade de Kato refinada provada em [13] que se aplica a variedade Riemanniana de Einstein em dimensão 4 dada por

$$|\nabla|W||^2 \leq \frac{3}{5}|\nabla W|^2.$$

Daí, note pela equação (4.6) e a desigualdade de Kato em dimensão 4, temos

$$
\begin{aligned}
0 \geq & \frac{5}{3}\int_M |\nabla|W||^2 dV_g + \frac{1}{2}\int_M R|W|^2 dV_g \\
& - 2C(4)A(4)\left(6\int_M |\nabla|W||^2 dV_g + \int_M R|W|^2 dV_g\right) \\
= & \left(\frac{5}{3} - 12C(4)A(4)\right)\int_M |\nabla|W||^2 dV_g + \left(\frac{1}{2} - 2C(4)A(4)\right)\int_M R|W|^2 dV_g.
\end{aligned}
$$

Da mesma forma, para que $|W| = 0$, $A(4)$ tem que satisfazer as seguintes desigualdades:

$$\begin{cases} 2C(4)A(4) \leq \frac{5}{18} \\ 2C(4)A(4) \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

e como $C(4) = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$, então $A(4) = \dfrac{5}{9\sqrt{6}}$.
Dessa forma, como a variedade é Einstein com curvatura escalar positiva e $W \equiv 0$ segue que a curvatura seccional é constante positiva. Logo, a menos de um quociente (M^n, g), é isométrica a $\mathbb{S}^n$ munida com a métrica canônica. $\square$

Agora vamos provar o resultado principal deste trabalho, que caracteriza os sólitons de Ricci compactos contrátil com integral pinçada em dimensão $n = 4, 5$ *e* 6.

Inicialmente, observe que, combinando a Equação (3.3) e o princípio do máximo obtemos que todo sóliton de Ricci contrátil compacto tem curvatura escalar positiva (veja [17]). Além disso, é bem conhecido que, em uma variedade compacta, $Y(M, [g])$ é positivo (respectivamente zero ou negativo), se e somente se, existir uma métrica em $[g]$ com curvatura escalar positiva em todos os pontos (para mais detalhes veja [16], p. 24). Então, como os sólitons de Ricci contrátil compactos tem curvatura escalar positiva, segue que $Y(M, [g]) > 0$. Dessa forma, fazendo $u := |\mathring{Ric}|$ na Equação (4.1) temos:

$$\frac{n-2}{4(n-1)} Y(M, [g]) \left(\int_M |\mathring{Ric}|^{2n/(n-2)} dV_g \right)^{\frac{n-2}{n}} \leq \int_M |\nabla |\mathring{Ric}||^2 dV_g + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M R |\mathring{Ric}|^2 dV_g. \tag{4.7}$$

Teorema 4.2 (Catino, 2016)**.** *Seja (M^n, g) um sóliton de Ricci contrátil compacto de dimensão n, com $4 \leq n \leq 6$, satisfazendo a seguinte desigualdade*

$$\left(\int_M |W + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}(n-2)} \mathring{Ric} \owedge g|^{n/2} dV_g \right)^{\frac{2}{n}} + \sqrt{\frac{(n-4)^2(n-1)}{8(n-2)} \lambda V(M)^{\frac{2}{n}}} < \sqrt{\frac{n-2}{32(n-1)}} Y(M, [g]). \tag{4.8}$$

Então, a menos de um quociente (M^n, g), é isométrico $\mathbb{S}^n$ munida com a métrica canônica. Além disso, em dimensão $5 \leq n \leq 6$, o mesmo resultado vale assumindo apenas a desigualdade mais fraca.

Demonstração. Observe que substituindo a desigualdade de Kato ($|\nabla \mathring{Ric}|^2 \geq |\nabla |\mathring{Ric}||^2$) e a proposição 2.2 no lema 3.2

$$\frac{1}{2} \Delta_f |\mathring{Ric}|^2 = |\nabla \mathring{Ric}|^2 + 2\lambda |\mathring{Ric}|^2 - 2W_{ijkl} \mathring{R}_{ik} \mathring{R}_{jl} + \frac{4}{n-2} \mathring{R}_{ij} \mathring{R}_{jk} \mathring{R}_{ik} - \frac{2(n-2)}{n(n-1)} R |\mathring{Ric}|^2$$

obtemos

$$
\begin{aligned}
0 \geq & -\frac{1}{2}\Delta_f|\mathring{Ric}|^2 + \left(|\nabla|\mathring{Ric}|^2\right) + 2\lambda|\mathring{Ric}|^2 \\
& - 2\left(\sqrt{\frac{n-2}{2(n-1)}}\left(|W|^2 + \frac{8}{n(n-2)}|\mathring{Ric}|^2\right)^{1/2}|\mathring{Ric}|^2\right) - \frac{2(n-2)}{n(n-1)}R|\mathring{Ric}|^2
\end{aligned}
$$

Integrando sobre M, segue que

$$
\begin{aligned}
0 \geq & -\frac{1}{2}\int_M \Delta_f|\mathring{Ric}|^2 dV_g + \int_M |\nabla|\mathring{Ric}||^2 dV_g + 2\lambda\int_M |\mathring{Ric}|^2 dV_g \\
& - 2\sqrt{\frac{n-2}{2(n-1)}}\int_M \left(|W|^2 + \frac{8}{n(n-2)}|\mathring{Ric}|^2\right)^{1/2}|\mathring{Ric}|^2 dV_g - \frac{2(n-2)}{n(n-1)}\int_M R|\mathring{Ric}|^2 dV_g
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

como M é compacta, pelo teorema de Stokes temos

$$
\begin{aligned}
\int_M \Delta_f|\mathring{Ric}|^2 dV_g &= \int_M \Delta|\mathring{Ric}|^2 dV_g - \int_M \langle\nabla f, \nabla|\mathring{Ric}|^2\rangle_g dV_g \\
&= \int_M div(\nabla|\mathring{Ric}|^2) dV_g + \int_M \Delta f|\mathring{Ric}|^2 dV_g - \int_M div(|\mathring{Ric}|^2\nabla f) dV_g \\
&= \int_M \Delta f|\mathring{Ric}|^2 dV_g.
\end{aligned}
$$

Assim, podemos reescrever a Equação (4.9) da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
0 \geq & -\frac{1}{2}\int_M \Delta f|\mathring{Ric}|^2 dV_g + \int_M |\nabla|\mathring{Ric}||^2 dV_g + 2\lambda\int_M |\mathring{Ric}|^2 dV_g \\
& - 2\sqrt{\frac{n-2}{2(n-1)}}\int_M \left(|W|^2 + \frac{8}{n(n-2)}|\mathring{Ric}|^2\right)^{1/2}|\mathring{Ric}|^2 dV_g - \frac{2(n-2)}{n(n-1)}\int_M R|\mathring{Ric}|^2 dV_g
\end{aligned}
$$

e pela Equação (3.3), temos ainda

$$
\begin{aligned}
0 \geq & -\frac{1}{2}\int_M (n\lambda - R)|\mathring{Ric}|^2 dV_g + \int_M |\nabla|\mathring{Ric}||^2 dV_g + 2\lambda\int_M |\mathring{Ric}|^2 dV_g \\
& - 2\sqrt{\frac{n-2}{2(n-1)}}\int_M \left(|W|^2 + \frac{8}{n(n-2)}|\mathring{Ric}|^2\right)^{1/2}|\mathring{Ric}|^2 dV_g - \frac{2(n-2)}{n(n-1)}\int_M R|\mathring{Ric}|^2 dV_g \\
= & -\frac{n}{2}\int_M \lambda|\mathring{Ric}|^2 dV_g + \frac{1}{2}\int_M R|\mathring{Ric}|^2 dV_g + \int_M |\nabla|\mathring{Ric}||^2 dV_g + 2\lambda\int_M |\mathring{Ric}|^2 dV_g \\
& - \sqrt{\frac{2(n-2)}{(n-1)}}\int_M \left(|W|^2 + \frac{8}{n(n-2)}|\mathring{Ric}|^2\right)^{1/2}|\mathring{Ric}|^2 dV_g - \frac{2(n-2)}{n(n-1)}\int_M R|\mathring{Ric}|^2 dV_g \\
= & \int_M |\nabla|\mathring{Ric}||^2 dV_g - \left(\frac{n}{2} - 2\right)\lambda\int_M |\mathring{Ric}|^2 dV_g + \left(\frac{1}{2} - \frac{2(n-2)}{n(n-1)}\right)\int_M R|\mathring{Ric}|^2 dV_g \\
& - \sqrt{\frac{2(n-2)}{(n-1)}}\int_M \left(|W|^2 + \frac{8}{n(n-2)}|\mathring{Ric}|^2\right)^{1/2}|\mathring{Ric}|^2 dV_g,
\end{aligned}
$$

simplificando algumas expressões, segue que

$$
\begin{aligned}
0 \geq & \int_M |\nabla|\overset{\circ}{Ric}||^2 dV_g - \frac{n-4}{2}\lambda \int_M |\overset{\circ}{Ric}|^2 dV_g + \frac{n^2-5n+8}{2n(n-1)} \int_M R|\overset{\circ}{Ric}|^2 dV_g \\
& - \sqrt{\frac{2(n-2)}{(n-1)}} \int_M \left(|W|^2 + \frac{8}{n(n-2)}|\overset{\circ}{Ric}|^2\right)^{1/2} |\overset{\circ}{Ric}|^2 dV_g \\
= & \int_M |\nabla|\overset{\circ}{Ric}||^2 dV_g + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M R|\overset{\circ}{Ric}|^2 dV_g + \frac{(n-4)^2}{4n(n-1)} \int_M R|\overset{\circ}{Ric}|^2 dV_g \\
& - \frac{n-4}{2}\lambda \int_M |\overset{\circ}{Ric}|^2 dV_g - \sqrt{\frac{2(n-2)}{(n-1)}} \int_M \left(|W|^2 + \frac{8}{n(n-2)}|\overset{\circ}{Ric}|^2\right)^{1/2} |\overset{\circ}{Ric}|^2 dV_g.
\end{aligned}
$$

Usando a Equação (4.7) obtemos

$$
\begin{aligned}
0 \geq & \left(\frac{n-2}{4(n-1)} Y(M,[g]) \left(\int_M |\overset{\circ}{Ric}|^{2n/(n-2)} dV_g\right)^{\frac{n-2}{n}}\right) + \frac{(n-4)^2}{4n(n-1)} \int_M R|\overset{\circ}{Ric}|^2 dV_g \\
& - \frac{n-4}{2}\lambda \int_M |\overset{\circ}{Ric}|^2 dV_g - \sqrt{\frac{2(n-2)}{(n-1)}} \int_M \left(|W|^2 + \frac{8}{n(n-2)}|\overset{\circ}{Ric}|^2\right)^{1/2} |\overset{\circ}{Ric}|^2 dV_g.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, pela Desigualdade de Hölder temos

$$
\int_M |\overset{\circ}{Ric}|^2 dV_g \leq \left(\int_M dV_g\right)^{\frac{2}{n}} \left(\int_M |\overset{\circ}{Ric}|^{\frac{2n}{n-2}} dV_g\right)^{\frac{n-2}{n}} = \|1\|_{\frac{n}{2}} \|\overset{\circ}{Ric}^2\|_{\frac{n}{n-2}}
$$

e, também,

$$
\begin{aligned}
\int_M \left(|W|^2 + \frac{8}{n(n-2)}|\overset{\circ}{Ric}|^2\right)^{1/2} |\overset{\circ}{Ric}|^2 dV_g \leq & \left(\int_M (|W|^2 + \frac{8}{n(n-2)}|\overset{\circ}{Ric}|^2)^{\frac{n}{4}} dV_g\right)^{\frac{2}{n}} \\
& \left(\int_M |\overset{\circ}{Ric}|^{\frac{2n}{n-2}} dV_g\right)^{\frac{n-2}{n}}.
\end{aligned}
$$

Portanto, segue que

$$
\begin{aligned}
0 \geq & \frac{n-2}{4(n-1)} Y(M,[g]) \left(\int_M |\overset{\circ}{Ric}|^{\frac{2n}{n-2}} dV_g\right)^{\frac{n-2}{n}} + \frac{(n-4)^2}{4n(n-1)} \int_M R|\overset{\circ}{Ric}|^2 dV_g \\
& - \frac{n-4}{2}\lambda \left(\int_M dV_g\right)^{\frac{2}{n}} \left(\int_M |\overset{\circ}{Ric}|^{\frac{2n}{n-2}} dV_g\right)^{\frac{n-2}{n}} \\
& - \sqrt{\frac{2(n-2)}{(n-1)}} \left(\int_M (|W|^2 + \frac{8}{n(n-2)}|\overset{\circ}{Ric}|^2)^{\frac{n}{4}} dV_g\right)^{\frac{2}{n}} \left(\int_M |\overset{\circ}{Ric}|^{\frac{2n}{n-2}} dV_g\right)^{\frac{n-2}{n}}. \\
= & \left(\frac{n-2}{4(n-1)} Y(M,[g]) - \frac{n-4}{2}\lambda V(M)^{\frac{2}{n}}\right. \\
& \left. - \sqrt{\frac{2(n-2)}{(n-1)}} \left(\int_M \left(|W|^2 + \frac{8}{n(n-2)}|\overset{\circ}{Ric}|^2\right)^{\frac{n}{4}} dV_g\right)^{\frac{2}{n}}\right) \\
& \left(\int_M |\overset{\circ}{Ric}|^{\frac{2n}{n-2}} dV_g\right)^{\frac{n-2}{n}} + \frac{(n-4)^2}{4n(n-1)} \int_M R|\overset{\circ}{Ric}|^2 dV_g.
\end{aligned}
$$

Assim, podemos concluir da desigualdade acima que $|\mathring{Ric}| = 0$ ou a seguinte desigualdade é válida

$$\begin{aligned}0 \geq & \frac{n-2}{4(n-1)}Y(M,[g]) - \frac{n-4}{2}\lambda V(M)^{\frac{2}{n}} \\ & - \sqrt{\frac{2(n-2)}{(n-1)}}\left(\int_M \left(|W|^2 + \frac{8}{n(n-2)}|\mathring{Ric}|^2\right)^{\frac{n}{4}} dV_g\right)^{\frac{2}{n}}.\end{aligned} \tag{4.10}$$

Mas, se a desigualdade (4.10) fosse satisfeita, teríamos que

$$\begin{aligned}&\sqrt{\frac{2(n-2)}{(n-1)}}\left(\int_M \left(|W|^2 + \frac{8}{n(n-2)}|\mathring{Ric}|^2\right)^{\frac{n}{4}} dV_g\right)^{\frac{2}{n}} + \frac{n-4}{2}\lambda V(M)^{\frac{2}{n}} \\ &\geq \frac{n-2}{4(n-1)}Y(M,[g])\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}&\sqrt{\frac{2(n-2)}{(n-1)}}\left(\left(\int_M \left(|W|^2 + \frac{8}{n(n-2)}|\mathring{Ric}|^2\right)^{\frac{n}{4}} dV_g\right)^{\frac{2}{n}} + \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{2(n-2)}}\frac{n-4}{2}\lambda V(M)^{\frac{2}{n}}\right) \\ &\geq \frac{n-2}{4(n-1)}Y(M,[g]).\end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned}&\left(\int_M \left(|W|^2 + \frac{8}{n(n-2)}|\mathring{Ric}|^2\right)^{\frac{n}{4}} dV_g\right)^{\frac{2}{n}} + \sqrt{\frac{(n-4)^2(n-1)}{8(n-2)}}\lambda V(M)^{\frac{2}{n}} \\ &\geq \sqrt{\frac{n-2}{32(n-1)}}Y(M,[g])\end{aligned}$$

e, como W tem traço livre temos

$$\left|W + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}(n-2)}\mathring{Ric} \owedge g\right|^2 = |W|^2 + \frac{8}{n(n-2)}|\mathring{Ric}|^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned}&\left(\int_M |W + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}(n-2)}\mathring{Ric} \owedge g|^{n/2} dV_g\right)^{\frac{2}{n}} + \sqrt{\frac{(n-4)^2(n-1)}{8(n-2)}}\lambda V(M)^{\frac{2}{n}} \\ &\geq \sqrt{\frac{n-2}{32(n-1)}}Y(M,[g]),\end{aligned}$$

contradizendo a condição de pinche (4.8). Portanto, $\mathring{Ric} \equiv 0$ e, assim, temos que (M^n, g) é Einstein.

Para finalizar, como g é Einstein então pela observação 1.2 feita na Seção 1.6 seque que $Y(M,[g]) = \mathcal{Q}(g)$, isto é,

$$\begin{aligned} Y(M,[g]) =& \frac{\int_M RdV_g}{(\int_M dV_g)^{\frac{n-2}{n}}} \\ =& (V(M))^{\frac{2-n}{n}} \int_M RdV_g. \end{aligned}$$

Além disso, integrando a Equação (3.3) e usando o teorema de Stokes, obtemos

$$\int_M \Delta f dV_g = \lambda n \int_M dV_g - \int_M RdV_g$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \int_M RdV_g =& \lambda n \int_M dV_g \\ =& \lambda n \left(\int_M dV_g \right)^{\frac{2}{n}} \left(\int_M dV_g \right)^{\frac{n-2}{n}}. \end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} \lambda (V(M))^{\frac{2}{n}} =& \frac{1}{n} \left(\int_M dV_g \right)^{\frac{2-n}{n}} \int_M RdV_g \\ =& \frac{1}{n} (V(M))^{\frac{2-n}{n}} \int_M RdV_g \\ =& \frac{1}{n} Y(M,[g]). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Assim, pela condição de integral pinçada e como g é Einstein temos que

$$\left(\int_M |W|^{\frac{n}{2}} dV_g \right)^{\frac{2}{n}} + \sqrt{\frac{(n-4)^2(n-1)}{8(n-2)}} \lambda V(M)^{\frac{2}{n}} \leq \sqrt{\frac{n-2}{32(n-1)}} Y(M,[g])$$

donde substituindo a Equação (4.11) temos ainda

$$\begin{aligned} \left(\int_M |W|^{\frac{n}{2}} dV_g \right)^{\frac{2}{n}} \leq & \left(\frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{32(n-1)}} - \frac{(n-4)\sqrt{n-1}}{\sqrt{8(n-2)n^2}} \right) Y(M,[g]) \\ =& \frac{8n - n^2 - 8}{4n\sqrt{2(n-1)(n-2)}} Y(M,[g]). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Para finalizar, considere a constante positiva $A(n)$ encontrada no Teorema 4.1 e observe que a seguinte desigualdade é satisfeita

$$0 \leq \frac{8n - n^2 - 8}{4n\sqrt{2(n-1)(n-2)}} < A(n),$$

para $n = 4, 5$ *e* 6. Portanto, segue que a desigualdade (4.12) pode ser escrita da seguinte forma

$$\left(\int_M |W|^{\frac{n}{2}} dV_g \right)^{\frac{2}{n}} < A(n) Y(M,[g]).$$

Logo, pelo Teorema 4.1 temos o desejado. □

Observação 4.1. *Em um sóliton de Ricci contrátil compacto de dimensão* $n \geq 7$*, a condição de integral pinçada* (4.8) *não é satisfeita. Com efeito, pela definição do invariante de Yamabe temos que*

$$\lambda V(M)^{\frac{2}{n}} = \frac{1}{n} V(M)^{\frac{2-n}{n}} \int_M R dV_g \geq \frac{1}{n} Y(M, [g]).$$

Portanto, pela expressão acima verifica-se que a seguinte desigualdade é satisfeita

$$\left(\int_M |W + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}(n-2)} \mathring{Ric} \owedge g|^{n/2} dV_g \right)^{\frac{2}{n}} + \sqrt{\frac{(n-4)^2(n-1)}{8(n-2)} \lambda V(M)^{\frac{2}{n}}}$$
$$\geq \sqrt{\frac{n-2}{32(n-1)} Y(M, [g])},$$

para $n \geq 7$*. Logo, contradiz a condição de integral pinçada* (4.8).

4.2 Soliton de Ricci Contrátil de dimensão 4

Nesta seção, vamos finalizar este trabalho com alguns resultados obtidos em sólitons de Ricci contrátil em dimensão 4.

Teorema 4.3 (Catino, 2016)**.** *Todo sóliton de Ricci compacto contrátil de dimensão* 4 *satisfazendo a seguinte desigualdade*

$$\int_M |W|^2 dV_g + \int_M |\mathring{Ric}|^2 dV_g < \frac{1}{48} Y(M, [g])^2 \tag{4.13}$$

é isométrico a menos de um quociente à esfera canônica $\mathbb{S}^4$.

Demonstração. Basta observar que a desigualdade (4.13) é mesma desigualdade para $n = 4$ na hipótese do Teorema (4.2) e, assim, temos o desejado. □

A seguir, veja como consequência do Teorema 4.3 uma outra condição de integral pinçada para solitons de Ricci contráil compactos de dimensão 4.

Antes de tudo, consideremos o tensor de Shouten A dado em (1.8) como um operador linear auto-adjunto e denotando por $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ os autovalores de A com respeito a métrica g, segue que, para, $1 \leq k \leq n$, as k-ésima funções simétricas elementares de A, são dadas por

$$\sigma_k(A) = \sum_{i_1 < ... < i_k} \lambda_{i_1} ... \lambda_{i_k}.$$

Em particular, para $k = 2$ temos que

$$\sigma_2(A) = \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j.$$

Além disso, como A tá sendo visto como um operador linear auto-adjunto, pelo Teorema Espectral, existe uma base ortonormal de vetores $\{e_i\}_{i=1}^n$ tal que $A(e_i) = \lambda_i e_i$. Assim, temos que

$$trA = \sum_{i=1}^n \lambda_i \;\; e \;\; |A|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2.$$

Dessa forma, com um simples cálculo vemos que a igualdade

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + 2\sum_{i<j}^n \lambda_i \lambda_j,$$

assim $\sigma_2(A)$ pode ser escrita da seguinte forma

$$\sigma_2(A) = \frac{1}{2}(trA)^2 - \frac{1}{2}|A|^2.$$

Por fim, fazendo $n = 4$ na definição do tensor de Shouten vista em (1.8) temos que $A = \frac{1}{2}(Ric - \frac{R}{6}g)$. Portanto, segue que

- $trA = \frac{R}{6}$
- $|A|^2 = \frac{1}{4}\Big(|Ric|^2 - \frac{1}{3}R^2 + \frac{1}{9}R^2\Big) = \frac{1}{4}\Big(|Ric|^2 - \frac{2}{9}R^2\Big) = \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{36}R^2 + |\mathring{Ric}|^2\Big).$

Daí, substituindo as igualdades acima na segunda função elementar do tensor de Shouten, obtemos

$$\sigma_2(A) = \frac{1}{96}R^2 - \frac{1}{8}|\mathring{Ric}|^2. \tag{4.14}$$

Lembrando a fórmula de Chern-Gauss-Bonnet (veja Equação 6.13 em [4]) dada por

$$\int_M |W|^2 dV_g - 2\int_M |\mathring{Ric}|^2 dV_g + \frac{1}{6}\int_M R^2 dV_g = 32\pi\chi(M), \tag{4.15}$$

onde $\chi(M)$ é função característica de Euler-Poincaré de M, podemos reescreve-la usando a Equação (4.14) da seguinte forma

$$\int_M |W|^2 dV_g + 16\int_M \sigma_2(A) dV_g = 32\pi^2\chi(M). \tag{4.16}$$

Para o Corolário a seguir, precisamos do seguinte resultado provado por M. J. Gursky em [12] e como a prova é curta vamos incluir neste trabalho.

Lema 4.1 (Gursky)**.** *Seja (M^4, g) uma variedade compacta de dimensão 4. Então, a seguinte estimativa vale*

$$Y(M,[g])^2 \geq 96\int_M \sigma_2(A) = \int_M R^2 dV_g - 12\int_M |\mathring{Ric}|^2 dV_g. \tag{4.17}$$

Além disso, a desigualdade é estrita, a menos que (M^4, g) admita uma métrica conforme de Einstein.

Demonstração. Considere $\tilde{g} \in [g]$ solução do problema de Yamabe para M. Então,

$$\begin{aligned} Y(M,[g])^2 =& \frac{(\int_M \tilde{R} dV_{\tilde{g}})^2}{\int_M dV_{\tilde{g}}} = \int_M \tilde{R}^2 dV_{\tilde{g}} \\ \geq& \int_M \tilde{R}^2 dV_{\tilde{g}} - 12\int_M |\tilde{\mathring{Ric}}|^2 dV_{\tilde{g}} \\ =& 96\int_M \sigma_2(\tilde{A}) dV_{\tilde{g}}. \end{aligned}$$

Afirmamos que a integral de $\sigma_2(A)$ em M é um invariante conforme. De fato, escrevendo $\tilde{g} = e^{2h}g$ com $h \in C^\infty(M)$ e considerando $\{e_i\}$ um referencial ortonormal geodésico em p na métrica g (note que $\{\tilde{e}_i = e^{-h}e_i\}$ é um referencial ortonormal na métrica $\tilde{g}$), podemos concluir pela invariância conforme do tensor de Wely $\big($ou seja, $W(\tilde{g}) = e^{2h}W(g)\big)$ que

$$\begin{aligned} \int_M |\tilde{W}|^2 dV_{\tilde{g}} &= \int_M \tilde{W}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j, \tilde{e}_k, \tilde{e}_l)\tilde{W}(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j, \tilde{e}_k, \tilde{e}_l) dV_{\tilde{g}} \\ &= \int_M e^{-8h}\tilde{W}_{ijkl}\tilde{W}_{ijkl} dV_{\tilde{g}} \\ &= \int_M e^{-4h} W_{ijkl} W_{ijkl} e^{4h} dV_g \\ &= \int_M |W|^2 dV_g, \end{aligned}$$

ou seja, em dimensão 4 a integral da norma ao quadrado do tensor Wely é um invariante conforme. Assim, substituindo a igualdade acima na Equação (4.16) temos ainda que

$$\begin{aligned} 16\int_M \sigma_2(\tilde{A}) dV_{\tilde{g}} =& 32\pi^2\chi(M) - \int_M |\tilde{W}|^2 dV_{\tilde{g}} \\ =& 32\pi^2\chi(M) - \int_M |W|^2 dV_g \\ =& 16\int_M \sigma_2(A) dV_g, \end{aligned}$$

provando a afirmação. Daí, segue que

$$\begin{aligned} Y(M,[g])^2 \geq& 96\int_M \sigma_2(\tilde{A}) dV_{\tilde{g}} \\ =& 96\int_M \sigma_2(A) dV_g = \int_M R^2 dV_g - 12\int_M |\mathring{Ric}|^2 dV_g, \end{aligned}$$

como desejado. Além disso, considerando o caso da igualdade

$$\begin{aligned} Y(M,[g])^2 =& 96\int_M \sigma_2(\tilde{A})dV_{\tilde{g}} \\ =& \int_M \tilde{R}^2 dV_{\tilde{g}} - 12\int_M |\tilde{\mathring{Ric}}|^2 dV_{\tilde{g}}, \end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned} 12\int_M |\tilde{\mathring{Ric}}|^2 dV_{\tilde{g}} =& \int_M \tilde{R}^2 dV_{\tilde{g}} - Y(M,[g])^2 \\ =& \int_M \tilde{R}^2 dV_{\tilde{g}} - \frac{(\int_M \tilde{R} dV_{\tilde{g}})^2}{\int_M dV_{\tilde{g}}} \\ =& 0. \end{aligned}$$

Dessa forma, segue que $\tilde{\mathring{Ric}} \equiv 0$, ou seja, $\tilde{g}$ é Einstein. Portanto, se (M^4, g) admite uma métrica conformemente Einstein, temos a igualdade na expressão (4.17). □

Antes de tudo, consideremos o tensor de Bach em uma variedade Riemanniana (M^n, g), $n \geq 4$, o qual foi introduzido no início de 1920 por Bach e definido em termos dos componentes do tensor de Weyl como

$$B_{ij} = \frac{1}{n-3}\nabla_k \nabla_l W_{ikjl} + \frac{1}{n-2} R_{kl} W_{ikjl}.$$

Dizemos que a métrica é Bach-flat se $B_{ij} = 0$. Em dimensão 4, as métricas Bach-flat são precisamente pontos críticos do funcional conformemente invariante

$$\mathcal{W}(g) = \int_M |W|^2 dV_g,$$

definido no espaço das métricas Riemannianas. Em particular, métricas localmente conformemente plana, métricas Einstein, ou ainda métricas que são localmente conformes a uma métrica Einstein, são Bach-Flat.

Agora, estamos em condições de apresentar o último resultado dessa dissertação que estabelece o seguinte:

Corolário 4.1. *Todo sóliton de Ricci contrátil compacto de dimensão* 4 *satisfazendo a seguinte de desigualdade*

$$\int_M |W|^2 dV_g + \frac{5}{4}\int_M |\mathring{Ric}|^2 dV_g \leq \frac{1}{48}\int_M R^2 dV_g \tag{4.18}$$

é isométrico a menos de um quociente à esfera canônica $\mathbb{S}^4$.

Demonstração. Substituindo a expressão (4.17) na condição de integral pinçada do Teorema 4.3, obtemos a seguinte relação

$$\begin{aligned}\int_M |W|^2 dV_g + \int_M |\mathring{Ric}|^2 dV_g - \frac{1}{48} Y(M,[g])^2 &\leq \int_M |W|^2 dV_g + \int_M |\mathring{Ric}|^2 dV_g - 2\int_M \sigma_2(A) dV_g \\ &= \int_M |W|^2 dV_g + \frac{5}{4}\int_M |\mathring{Ric}|^2 dV_g - \frac{1}{48}\int_M R^2 dV_g,\end{aligned} \tag{4.19}$$

onde a desigualdade vai ser estrita, a menos que (M^4, g) seja conformemente Einsten.

Se desigualdade em (4.18) for estrita, então, pela expressão (4.19) deduziremos que

$$\int_M |W|^2 dV_g + \int_M |\mathring{Ric}|^2 dV_g < \frac{1}{48} Y(M,[g])^2,$$

que é a condição de pinche do Teorema 4.3. Assim, aplicando o Teorema 4.3 segue que a menos de um quociente (M^4, g), é isométrico a menos de um quociente à esfera canônica $\mathbb{S}^4$.

Por outro lado, considerando o caso da igualdade em (4.18), temos que o lado direito de (4.19) é igual a zero e, portanto, chegaremos a duas possibilidades:

a) (M^4, g) não sendo conformemente Einstein segue do Lema 4.1 a desigualdade estrita em (4.19), recaindo novamente na condição de integral pinçada do Teorema 4.3.

b) (M^4, g) sendo conformemente Einstein temos a igualdade em (4.19), isto é,

$$\begin{aligned}\int_M |W|^2 dV_g + \int_M |\mathring{Ric}|^2 dV_g - \frac{1}{48} Y(M,[g])^2 &= \int_M |W|^2 dV_g + \frac{5}{4}\int_M |\mathring{Ric}|^2 dV_g - \frac{1}{48}\int_M R^2 dV_g \\ &= 0.\end{aligned}$$

Além disso, a Proposição 4.78 em [4], implica que (M^4, g) é Bach-flat e como M^4 é compacta, segue do resultado de H. D. Cao e Q. Chen em [10] que (M^4, g) é Einstein. Portanto, pela igualdade acima obtemos a seguinte expressão

$$\left(\int_M |W|^2 dV_g\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4\sqrt{3}} Y(M,[g]).$$

Por fim, considerando a constante $A(4) = \frac{5}{9\sqrt{6}}$ encontrada no Teorema 4.1, temos ainda que

$$\left(\int_M |W|^2 dV_g\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4\sqrt{3}} Y(M,[g]) < A(4) Y(M,[g]).$$

Então segue do Teorema 4.1 que a menos de um quociente (M^4, g) é isométrico a $\mathbb{S}^4$. □

Observação 4.2. *A condição de pinche no Corolário* 4.1 *é equivalente*

$$\int_M |W|^2 dV_g + \frac{2}{39}\int_M R^2 dV_g \leq \frac{160}{13}\pi^2 \chi(M)$$

onde $\chi(M)$ *é função caracteristica de Euler-Poincaré de M.*

Basta substituir a fómula de Chern-Gauss-Bonnet (4.15) na condição de integral pinçada (4.18) para obter:

$$\begin{aligned}\int_M |W|^2 dV_g + \int_M |\mathring{Ric}|^2 dV_g - \frac{1}{48}\int_M R^2 dV_g =& \int_M |W|^2 dV_g - \frac{1}{48}\int_M R^2 dV_g \\ &+ \frac{5}{4}\left(\frac{1}{2}\int_M |W|^2 dV_g + \frac{1}{12}\int_M R^2 dV_g - 16\pi\chi(M)\right) \\ =& \frac{13}{8}\int_M |W|^2 dV_g + \frac{1}{12}\int_M R^2 dV_g - 20\pi^2\chi(M) \leq 0,\end{aligned}$$

e fazendo algumas simplificações temos

$$\int_M |W|^2 dV_g + \frac{2}{39}\int_M R^2 dV_g \leq \frac{160}{13}\pi^2\chi(M)$$

como desejado.

Referências Bibliográficas

[1] Catino, G.: *Integral pinched shrinking Ricci solitons*, Adv. Math., 303 (2016) 279-294.

[2] Aubin, T.: *Equation differentielles non lineaires et problemes de Yamabe concernant la courbure scalaire*, J. Math. Pures Appl. 55, p. 269-296, 1976.

[3] Alencar, H.; do Carmo, M.: *Hypersurfaces with constant mean curvature in spheres*, vol. 77. Previdence: American Mathematical Society, n. 4, 1994. Vol. 120, 1994.

[4] Besse, A.: *Einstein manifolds*, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[5] Böhm, C.; Wilking B.: *Manifolds with positive curvature operators are space forms*, Ann. of Math. (2) 167 (2008), no. 3, p. 1079-1097.

[6] Bour,V.: *Fourth order curvature flows and geometric applications*, arXiv Preprint Server -http://arxiv.org, 2010.

[7] Chow, B.; Lu, P.; Ni, L.: *Hamilton's Ricci Flow*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 77. Previdence: American Mathematical Society, 2006.

[8] Cao, H.-D.: *Existence of gradient Kähler-Ricci solitons*. Elliptic and parabolic methods in geometry (Minneapolis, MN, 1994), A K Peters, Wellesley, MA, p. 1-16, 1996.

[9] Cao, H.-D.: *Recent progress on Ricci solitons, Recent advances in geometric analysis*, Adv. Lect. Math. (ALM), vol. 11, Int. Press, Somerville, MA, p. 1-38, 2010.

[10] Cao, H.-D.; Chen, Q.: *On Bach-flat gradient shrinking Ricci solitons*, Duke Math. J. 162 (2013), no. 6, p. 1149-1169.

[11] do Carmo, M. P.: *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides - IMPA, 2005.

[12] Gursky, M. J.: *Locally conformally flat four- and six-manifolds of positive scalar curvature and positive Euler characteristic*, Indiana Univ. Math. J. 43 , no. 3, p. 747-774, 1994.

[13] Gursky, M. J.; Lebrun, C.: *On einstein manifolds of positive sectional curvature*, Ann. Global Anal. Geom. 17, no. 4, 315-328, 1999.

[14] Hamilton, R.: *The Ricci flow on surfaces*, Contemporary Mathematics, v. 71, p. 237-261, 1988.

[15] Huisken, G.: *Ricci deformation of the metric on a Riemannian manifold*, J. Differential Geom., p. 47-62, 1985.

[16] Hebey, E.: *Variational methods and elliptic equations in Riemannian geometry*, Notes from lectures at ICTP, 2003.

[17] Ivey, T.: *Ricci solitons on compact three-manifolds*, Differential Geom. Appl., v.3 p.301-307, 1993.

[18] Jack, I.; Parker, L.: *Linear independence of renormalisation counterterms in curved space-times of arbitrary dimensionality*, J. Math. Phys. 28, p. 1137-1139, 1987.

[19] Koiso, N.: *On rotationally symmetric Hamilton's equation for Kähler-Einstein metrics*, Recent topics in differential and analytic geometry, Adv. Stud. Pure Math., vol. 18, Academic Press, Boston, MA, p. 327-337, 1990.

[20] Lee, J.; Parker, T.: *The Yamabe Problem.* Bull. Amer. Math. Soc., 17:37-91,1987.

[21] Munteanu, O.; Wang J.: *Positively curved shrinking Ricci solitons are compact*, T. Differential Geom., 106, 499-505, 2015.

[22] Obata, M.: *Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere*, J. Math. Soc. Japan 14, 333-340, 1962.

[23] Perelman, G.: *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, arXiv Preprint Server-http://arxiv.org, 2002.

[24] Schoen, R.: *Conformal Deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature*, J. Di. Geom. 20, 479-495, 1984.

[25] Tachibana, S.: *A theorem of Riemannian manifolds of positive curvature operator*, Proc. Japan Acad. 50, p. 301-302, 1974.

[26] Trudinger, N.: *Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa 22, 265-274, 1968.

[27] Viaclovsky, J.: *Course Web Page: Math 865, Advanced Topics in Geometry*, 2011. Fall, Topics course in Riemannian Geometry.

[28] Yamabe, H.: *On a deformation of Riemannian structures on a compact manifolds*, Osaka Math. J. 12, 21-37, 1960.