Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Resultados tipo-Liouville para hipersuperfícies em um produto warped com densidade

Gustavo de Sousa Ferreira Dias

Teresina - 2019

Gustavo de Sousa Ferreira Dias

Dissertação de Mestrado:

Resultados tipo-Liouville para hipersuperfícies em um produto warped com densidade

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Cícero Pedro de Aquino

Teresina - 2019

Dedico este trabalho à minha mãe, Clédina.

FICHA CATALOGRÁFICA
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial do CCN

D541r Dias, Gustavo de Sousa Ferreira.
Resultados tipo-Liouville para hipersuperfícies em um produto warped com densidade / Gustavo de Sousa Ferreira Dias. – Teresina, 2019.
52 f. il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática, 2019.
Orientador: Prof. Dr. Cícero Pedro de Aquino.

1. Geometria Diferencial. 2. Produtos Warped. I. Título.

CDD 516.36

Bibliotecária : Caryne Maria da Silva Gomes / CRB3-1461

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Resultados tipo-Liouville para hipersuperfícies em um produto warped com densidade

Gustavo de Sousa Ferreira Dias

Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 05 de Julho de 2019.

Banca Examinadora:

Cícero Pedro de Aquino

Prof. Dr. Cícero Pedro de Aquino - Orientador

Halyson Irene Baltazar

Prof. Dr. Halyson Irene Baltazar (UFPI)

Jonatan Floriano da Silva

Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva (UFC)

Agradecimentos

Agradeço a minha família pelo apoio que recebi em minha jornada em Matemática, e pelo incentivo que sempre recebi. Sem eles eu não teria chegado até aqui. E principalmente, agradeço a minha mãe, que é a verdadeira responsável por toda a felicidade e tranquilidade que tenho hoje.

Agradeço a Swelen por tornar nossas vida cada vez mais uma só. Sua presença é certamente o combustível de todo meu esforço. Minha vida não seria a mesma sem ela.

Agradeço também aos professores do Departamento de Matemática da UFPI por me auxiliarem em várias disciplinas até aqui e aos amigos e colegas da graduação e mestrado pelo ambiente extremamente agradável que tive desde que conheci o curso de Matemática. Em especial, agradeço ao professor Cícero Aquino, que foi um ótimo orientador, e vem guiando meus estudos em Geometria desde a primeira Iniciação Científica, e desde aquela época me enviando textos, sugestões de estudo e me encorajando a estudar e me aperfeiçoar.

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

"*A essência da matemática reside na sua liberdade*".

George Cantor.

Resumo

Neste trabalho, vamos estudar resultados tipo-Liouville para hipersuperfícies two-sided imersas em um produto warped com densidade, com restrições sobre o tensor de Bakry-Émery-Ricci da base do espaço ambiente ou sobre a função altura da hipersuperfície.

Abstract

In this work, we will study Liouville-type results for two-sided hypersurfaces immersed in a weighted warped product, with restrictions on the Bakry-Émery-Ricci tensor of the base ambient space or on the height function of the hypersurface.

Sumário

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar alguns resultados tipo-Liouville para hipersuperfícies *two-sided* Σ^n imersas em um produto warped com densidade $\mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R}$ e munido com um campo de Killing, onde $\mathbb{P}$ é uma variedade Riemanniana. Os teoremas apresentados nessa dissertação foram originalmente obtidos por de Lima et. al. no artigo [4]. Um notável teorema nesse ramo da análise geométrica, que desempenha um papel essencial no Capítulo 3 desta dissertação, é devido a Yau [11] e estabelece o seguinte:

Proposição 0.1. *Toda função harmônica positiva definida em uma variedade riemanniana $n-$dimensional $(n \geq 2)$ completa Σ^n com $\mathrm{Ric} \geq 0$ é constante.*

No Capítulo 2 desta dissertação, iremos considerar a situação em que $\mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R}$ está munido com uma função densidade f que não depende do parâmetro $t \in \mathbb{R}$. Impondo restrições apropriadas no tensor de Bakry-Émery-Ricci, denotado por $\widetilde{\mathrm{Ric}}_f$, da variedade $\mathbb{P}$ definido por

$$\widetilde{\mathrm{Ric}}_f = \widetilde{\mathrm{Ric}} + \widetilde{\mathrm{Hess}} f$$

e na função altura $h = (\pi_\mathbb{R})_\Sigma$ da hipersuperfície Σ^n, onde $\pi_\mathbb{R}(q,t) = t$, $(q,t) \in \mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R}$, apresentaremos neste trabalho essencialmente os seguintes resultados:

Teorema 0.1. *Seja $\overline{M} = \mathbb{P}_f \times_\rho \mathbb{R}$ um produto warped de Killing com densidade tal que $\widetilde{\mathrm{Ric}}_f \geq -\kappa$, para alguma constante $\kappa > 0$, e ρ uma função côncava com $\widetilde{\Delta}_f \rho \leq 0$. Seja $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}$ uma hipersuperfície $f-$parabólica, two-sided, com curvatura $f-$média constante, cuja função ângulo Θ tem sinal estrito. Se*

$$|\nabla h|^2 \leq \frac{\alpha}{\kappa \rho^2} |A|^2 \tag{1}$$

para alguma constante $\alpha \in (0,1)$, então Σ^n está contido em um slice de $\overline{M}$.

Teorema 0.2. *Seja $\overline{M} = \mathbb{P}_f \times_\rho \mathbb{R}$ um produto warped de Killing com densidade tal que $\widetilde{\mathrm{Ric}}_f \geq 0$ e ρ uma função côncava tal que $\widetilde{\Delta}_f \rho \leq 0$. Seja $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}$ uma hipersuperfície*

$f-$parabólica two-sided com curvatura $f-$média constante cuja função ângulo Θ tem sinal estrito. Então Σ^n é totalmente geodésica. Além disso, se $\widetilde{\mathrm{Ric}}_f > 0$, então Σ^n está contida em um slice de $\overline{M}$.

Teorema 0.3. *Seja $\overline{M} = \mathbb{P}_f \times_\rho \mathbb{R}$ um produto warped de Killing com densidade tal que $\widetilde{\mathrm{Ric}}_f \geq -\kappa$, para alguma constante κ, sendo ρ uma função côncava tal que $\widetilde{\Delta}_f \rho \leq 0$. Seja $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}$ uma hipersuperfície $\mathcal{L}^1_f-$Liouville com curvatura $f-$média constante e com a função ângulo Θ tendo sinal estrito e tal que $\Theta \in \mathcal{L}^1_f(\Sigma)$.*

(a) *Se $\kappa = 0$, então Σ^n é totalmente geodésica. Além disso, se $|\nabla h| \leq \alpha |A|^\beta$ para algumas constantes positivas α e β, então Σ^n está contida em um slice de $\overline{M}$.*

(b) *Se $\kappa > 0$ e*

$$|\nabla h|^2 \leq \frac{\alpha}{\kappa \rho^2} |A|^2, \tag{2}$$

para alguma constante $\alpha \in (0, 1)$ então Σ^n está contida em um slice de $\overline{M}$.

(c) *Se $\kappa < 0$, então Σ^n está contida em um slice de $\overline{M}$.*

Na demonstração dos três teoremas acima, desempenha papel fundamental o cálculo de $\Delta_f \Theta$, que pode ser encontrado no Lema 2.1. O que o tornam resultados tipo-Liouville é o fato de que na prática deve-se provar que a função altura h é constante.

No Capítulo 3 da presente dissertação, apresentaremos os seguintes resultados tipo-Liouville, que foram obtidos por meio de restrições apropriadas sobre a função altura h da hipersuperfície Σ^n, que estão elencados a seguir:

Teorema 0.4. *Seja Σ^n uma hipersuperfície two-sided, completa, imersa em $\mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R}$. Suponha que H_ρ e Θ tenham o mesmo sinal. Se a função altura h é não-negativa e $h \in \mathcal{L}^q(\Sigma)$ para algum $q > 1$, então Σ^n é um slice. Além disso, se $\widetilde{\mathrm{Ric}} \geq 0$ e h for positiva, então $\mathbb{P}$ deve ser compacta.*

Teorema 0.5. *Seja Σ^n uma hipersuperfície two-sided, completa, imersa em $\mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R}$ e contida em um slab desta variedade. Suponha que H_ρ e Θ não mudam de sinal em Σ^n. Se $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$, então Σ^n é um slice de $\mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R}$.*

Em seguida, estudamos os chamados *gráficos de Killing inteiros* em $\mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R}$, isto é, o gráfico de uma função $u : \mathbb{P} \to \mathbb{R}$ suave. A pergunta natural aqui é: em que condições u é uma função constante? Como resposta a essa pergunta, apresentamos o seguintes resultado:

Teorema 0.6. *Seja* $\Sigma(u)$ *um gráfico de Killing inteiro que está contido em um slab de* $\mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R}$, *cuja base* $\mathbb{P}$ *é completa. Suponha que* H_ρ *e* Θ *não mudam de sinal em* $\Sigma(u)$. *Se* $|\widetilde{\nabla} u| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$, *então* $\Sigma(u)$ *é um slice de* $\mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R}$.

Para finalizar nosso trabalho de dissertação, estudamos o caso em que Σ^n é uma hipersuperfície two-sided estocasticamente completa imersa em $\mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R}$ e apresentamos o seguinte:

Teorema 0.7. *Seja* Σ^n *uma hipersuperfície two-sided que está contida em um slab de* $\mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R}$. *Se* H_ρ *é constante e* Θ *é não-negativa, então* Σ^n *é* $\rho-$*mínima, isto é,* $\mathrm{H}_\rho = 0$ *em* Σ^n. *Se, além disso,* Σ^n *é completa com* $\mathrm{Ric} \geq 0$, *então ela é um slice de* $\mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R}$.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Neste capítulo, vamos abordar noções que serão necessárias nos capítulos seguintes, além de estabelecer a notação que será usada. Nos restringimos apenas aos resultados que serão usados, indicando referências bibliográficas adequadas em cada seção para uma abordagem mais completa.

1.1 Gradiente, Divergência e Hessiano

Nesta seção, M denotará uma variedade Riemanniana conexa de dimensão n. O conjunto $C^\infty(M)$ é o espaço vetorial das funções infinitamente diferenciáveis em M, também chamadas de funções suaves, e $\mathfrak{X}(M)$ é o espaço vetorial dos campos de vetores suaves em M. Admitiremos conhecidos alguns fatos básicos sobre a métrica e a conexão Riemanniana de M, os quais podem ser encontrados em [5]. Os resultados desta seção seguem imediatamente das definições apresentadas e por isso suas respectivas demonstrações serão omitidas aqui.

Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função suave. Dado $p \in M$, considere o funcional linear $df_p : T_pM \to \mathbb{R}$. Devido a presença do produto interno em T_pM, sabemos da Álgebra Linear que existe um único vetor $\nabla f(p)$ tal que

$$\langle \nabla f(p), v \rangle = df_p(v) = vf,$$

para todo $v \in T_pM$. A este vetor damos o nome de *gradiente* de f em p.

Considere um referencial móvel definido numa vizinhança $U \subset M$ de um ponto $p \in M$, isto é, n campos de vetores em U tais que $\{E_1(q), E_2(q), \ldots, E_n(q)\}$ formam uma base ortonormal de T_qM para todo $q \in M$. Então

$$\nabla f(q) = \sum_{j=1}^{n} \langle \nabla f(q), E_j \rangle E_j = \sum_{j=1}^{n} (E_j)_q(f) E_j.$$

Observe que esta expressão coincide com a do gradiente de uma função suave definida no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ quando os vetores E_j formam a base canônica deste espaço.

Proposição 1.1. *Sejam $f, g \in C^\infty(M)$ e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função suave na reta. Então*

(a) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$;

(b) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$;

(c) $\nabla(\varphi \circ f) = \varphi'(f)\nabla f$.

Proposição 1.2. *Se M é uma variedade Riemanniana e $f \in C^\infty(M)$ é uma função tal que $\nabla f = 0$, então f é constante.*

Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ e ∇ a conexão Riemanniana de M. A *divergência* de X é a função suave $\operatorname{div} X : M \to \mathbb{R}$ definida por

$$(\operatorname{div} X)(p) = \operatorname{tr}\{v \mapsto \nabla_v X(p)\},$$

com $v \in T_pM$. Ou seja, $\operatorname{div}X(p)$ é o traço da aplicação que a cada $v \in T_pM$ associa o vetor $\nabla_v X(p)$. Se $\{E_j\}$ é um referencial ortonormal definido em uma vizinhança $U \subset M$ de um ponto $p \in M$, então

$$\begin{aligned}(\operatorname{div}X)(p) &= \operatorname{tr}\{v \mapsto \nabla_v X(p)\} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \langle E_j, \nabla_{E_j} X(p) \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} \Big[E_j \langle E_j, X \rangle_p - \langle X, \nabla_{E_j} E_j \rangle_p \Big]. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Proposição 1.3. *Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função suave, então*

(a) $\operatorname{div}(X+Y) = \operatorname{div}X + \operatorname{div}Y$;

(b) $\operatorname{div}(fX) = f\operatorname{div}X + \langle \nabla f, X \rangle$.

Seja $f : M \to \mathbb{R}$ suave. O Laplaciano de f é a função suave $\Delta f : M \to \mathbb{R}$, definida por

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f),$$

isto é, a divergência do gradiente de f. Num referencial móvel $\{E_j\}_{j=1}^n$ definido em uma vizinhança $U \subset M$ de p, por (1.1), vale

$$\Delta f = \sum_{j=1}^{n} \left[E_j(E_j f) - \langle \nabla f, \nabla_{E_j} E_j \rangle \right].$$

Proposição 1.4. *Se $f, g \in C^\infty(M)$ e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é suave, então*

(a) $\Delta(\varphi \circ f) = (\varphi'' \circ f)|\nabla f|^2 + (\varphi' \circ f)\Delta f$;

(b) $\Delta(fg) = g\Delta f + f\Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle$.

Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função suave. O *hessiano* de f no ponto $p \in M$ é o operador linear $(\mathrm{Hess} f)_p : T_pM \to T_pM$ dado por

$$(\mathrm{Hess} f)_p(v) = \nabla_v(\nabla f)(p).$$

O operador $(\mathrm{Hess} f)_p$ é auto-adjunto: de fato, se $v, w \in T_pM$ e $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ são extensões locais de v, w respectivamente, em uma vizinhança de p em M, então

$$\begin{aligned}
\langle (\mathrm{Hess} f)_p(v), w \rangle &= \langle \nabla_V(\nabla f), W \rangle_p \\
&= V\langle \nabla f, W \rangle_p - \langle \nabla f, \nabla_V W \rangle_p \\
&= (VWf)_p - \langle \nabla f, \nabla_W V + [V, W] \rangle_p \\
&= (VWf)_p - \langle \nabla f, [V, W] \rangle_p - \langle \nabla f, \nabla_W V \rangle_p \\
&= (VWf)_p - [V, W]f - \langle \nabla f, \nabla_W V \rangle_p \\
&= (WVf)_p - \langle \nabla f, \nabla_W V \rangle_p \\
&= \langle (\mathrm{Hess} f)_p(w), v \rangle.
\end{aligned}$$

Assim, podemos considerar a forma bilinear Hessiana, definida por

$$(v, w) \mapsto \langle \mathrm{Hess} f_p(v), w \rangle = \langle \nabla_v \nabla f, w \rangle. \tag{1.2}$$

1.2 Campos de Killing

Dado um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$, numa variedade diferenciável M, vale a seguinte proposição, que se encontra no capítulo 5 de [10].

Proposição 1.5. *Sejam $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $p \in M$. Então existem um aberto $V \subset M$ contendo p, um $\varepsilon > 0$ e uma coleção de difeomorfismos $\varphi_t : V \to \varphi_t(V) \subset M$ para $|t| < \varepsilon$ com as seguintes propriedades:*

(a) *$\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times V \to M$, definida por $\varphi(t, q) = \varphi_t(q)$, é C^∞.*

(b) *Se $|s|, |t|, |s+t| < \varepsilon$ e $q, \varphi_t(q) \in V$, então*

$$\varphi_{s+t}(q) = \varphi_s \circ \varphi_t(q).$$

(c) *Se $q \in V$, então X_q é o vetor velocidade em $t = 0$ da curva $t \mapsto \varphi(t, q)$.*

A aplicação φ obtida na proposição acima é chamada de *fluxo local* de X numa vizinhança de p. Nosso objetivo aqui é provar a Proposição 1.11, que nos dá uma caracterização dos campos de Killing em termos da métrica de M. Para isso precisamos introduzir o conceito de *Derivada de Lie* de um tensor B. Por brevidade, faremos apenas o caso em que B é um $2-$tensor. Indicamos a referência [10] para uma abordagem mais completa sobre tensores e derivadas de Lie. Começaremos com a derivada de Lie de campos de vetores.

Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $p \in M$, seja $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times V \to M$ o fluxo local de X numa vizinhança V de p. Definimos a *derivada de Lie de Y com relação a X* como o campo de vetores $\mathcal{L}_X Y$ em M dado em p por

$$(\mathcal{L}_X Y)_p = \frac{d}{dt}\left[d(\varphi_{-t})_{\varphi_t(p)}(Y_{\varphi_t(p)})\right]_{t=0}, \tag{1.3}$$

onde φ é o fluxo local de X ao redor de $p \in M$. A existência dessa derivada é feita na proposição abaixo.

Proposição 1.6. *Seja M uma variedade diferenciável e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Então $(\mathcal{L}_X Y)_q$ existe para todo $q \in M$ e $\mathcal{L}_X Y$ é um campo vetorial suave, ou seja, $\mathcal{L}_X Y \in \mathfrak{X}(M)$.*

Demonstração. Seja $p \in M$ e $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times V \to M$ o fluxo local de X numa vizinhança $V \subset M$ de p. Considere um sistema de coordenadas $x : U \to \mathbb{R}^n$ num aberto $U \subset V$, com $p \in U$. Tome um $\delta \in (0, \varepsilon)$ e um aberto $U_0 \subset U$ tais que $p \in U_0$ e $\varphi((-\delta, \delta) \times U_0) \subset U$. Para cada $t \in (-\delta, \delta)$, escreva $\varphi_t : U_0 \to M$ em coordenadas pondo $x \circ \varphi_t = (\varphi_t^1, \varphi_t^n)$. Então, para qualquer $q \in U_0$, a matriz jacobiana de $d(\varphi_{-t})_{\varphi_t(q)} : T_{\varphi_t(q)} \to T_q M$ é

$$\left[\frac{\partial \varphi_{-t}^i}{\partial x^j}(\varphi_t(q))\right]_{n \times n}. \tag{1.4}$$

Portanto,

$$d(\varphi_{-t})_{\varphi_t(q)}(Y_{\varphi_t(q)}) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \varphi_{-t}^i}{\partial x^j}(\varphi_t(q)) y^j(\varphi_t(q)) \frac{\partial}{\partial x^i}(q),$$

onde $Y = \sum_{j=1}^n y^j \dfrac{\partial}{\partial x^j}$. Como φ_{-t}^i e y^j são suaves, a expressão acima possui derivada em $t = 0$, a qual por definição é $(\mathcal{L}_X Y)_q$. $\square$

Observação 1.1. *Para justificar a expressão da matriz jacobiana em* (1.4), *lembremos que se* $g : M \to N$ *é uma função suave da variedade* M *na variedade* N, $x : U \to \mathbb{R}^m$ *e* $y : V \to \mathbb{R}^n$ *são sistemas de coordenadas em* $U \subset M$ *e* $V \subset N$ *com* $g(U) \subset V$, *então a matriz jacobiana de* $dg_p : T_pM \to T_{g(p)}N$ *nos sistemas* x *e* y *é*

$$J(y \circ g \circ x^{-1})(x(p)) = \left[D_j(y \circ g \circ x^{-1})^i(x(p))\right],$$

onde $D_j(y \circ g \circ x^{-1})^i$ *representa a derivada parcial, no espaço euclidiano, da* $i-$*ésima coordenada da função* $y \circ g \circ x^{-1}$ *em relação à* $j-$*ésima variável. Agora, veja que*

$$(y \circ g \circ x^{-1})^i = y^i \circ g \circ x^{-1} \quad \text{e} \quad D_j(y^i \circ g \circ x^{-1})(x(p)) = \frac{\partial(y^i \circ g)}{\partial x^j}(p),$$

onde $\dfrac{\partial}{\partial x^j}$ *representa a derivada na variedade* M.

Ainda sobre derivadas de Lie de campos de vetores, precisaremos das duas proposições abaixo, que omitiremos as demonstrações, pois já estão provados no Capítulo 5 de [10].

Proposição 1.7. *Se* M *é uma variedade diferenciável e* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *é um campo com* $X(p) \neq 0$, *então existe um sistema de coordenadas* $x : U \to \mathbb{R}^m$ *ao redor de* p *tal que* $X = \dfrac{\partial}{\partial x^1}$ *em* U.

Proposição 1.8. *Se* X *e* Y *são campos vetoriais suaves numa variedade diferenciável* M, *então* $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$.

Seja (M, g) é uma variedade Riemanniana. O conjunto $\mathfrak{X}(M)$, além de espaço vetorial real, é um módulo sobre o anel $C^\infty(M)$, com as operações de soma $(X + Y)_p = X_p + Y_p$ e $(fX)_p = f(p)X_p$, para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in C^\infty(M)$. Um $r-$tensor em M (covariante) é uma aplicação $B : [\mathfrak{X}(M)]^r \to C^\infty(M)$ $r-$linear considerando a estrutura de módulo em $\mathfrak{X}(M)$. Em outras palavras, para todos $X_1, X_2, \ldots, X_r, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e toda $f \in C^\infty(M)$, vale a seguinte propriedade:

$$B(X_1, \ldots, X_i + fY, \ldots, X_r) = B(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_r) + fB(X_1, \ldots, Y, \ldots, X_r).$$

Um $r-$tensor também pode ser visto como uma aplicação que a cada $p \in M$ associa uma função $r-$linear $B_p : [T_pM]^r \to \mathbb{R}$.

Se $B : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ é um $2-$tensor em M, definimos o $2-$tensor $\varphi_t^* B$ em p por

$$(\varphi_t^* B)_p(Y_p, Z_p) = B_{\varphi_t(p)}(d(\varphi_t)_p Y, d(\varphi_t)_p Z),$$

para todos $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

E a *derivada de Lie de B em relação a X* é definida como o 2−tensor que em $p \in M$ é dado por

$$(\mathcal{L}_X B)_p = \frac{d}{dt}\left[\varphi_t^* B_p\right]_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{(\varphi_t^* B)_p - B_p}{t}. \tag{1.5}$$

O limite acima ocorre inteiramente no espaço dos funcionais bilineares em T_pM e a prova de sua existência é análoga a da derivada de Lie de campos de vetores.

Proposição 1.9. *Sejam M uma variedade diferenciável, $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e B um 2−tensor (covariante) em M. Então*

$$X(B(Y,Z)) = (\mathcal{L}_X B)(Y,Z) + B(\mathcal{L}_X Y, Z) + B(Y, \mathcal{L}_X Z). \tag{1.6}$$

Demonstração. Por continuidade, basta provar a proposição para os pontos $p \in M$ tais que $X(p) \neq 0$. Seja então p com $X(p) \neq 0$. Pela proposição 1.7, existe um sistema de coordenadas $x = (x^1, \ldots, x^m) : U \to M$ ao redor de $p \in U$ com $X = \dfrac{\partial}{\partial x^1}$ em U. As curvas integrais de X em U são aquelas em que $x^2, \ldots, x^n$ são constantes. Ou seja, a curva integral de X passando por $q \in U$ é $\varphi_q(t) = x^{-1}(x(q) + te_1)$, com e_1 vetor da base canônica do $\mathbb{R}^m$, pois $\varphi_q(0) = q$ e $\varphi_q'(0) = dx^{-1}_{x(q)}(x(q)) = \dfrac{\partial}{\partial x^1}(q) = X_q$. Logo, $\varphi(t,q) = x^{-1}(x(q) + te_1)$.

Tomando t suficientemente pequeno e q próximo de p, temos $\varphi(t,q) \in U$. Logo, a expressão de $\varphi_t : U_0 \subset U \to U$ (U_0 é um aberto contendo p tal que $\varphi_t(U_0) \subset U$ para todo t suficientemente pequeno) em coordenadas é, para $q_0 \in x(U_0)$,

$$(x \circ \varphi_t \circ x^{-1})(q_0) = (x \circ \varphi_t)(x^{-1}(q_0)).$$

Mas

$$\varphi_t(x^{-1}(q_0)) = x^{-1}(x(x^{-1}(q_0)) + te_1) = x^{-1}(q_0 + te_1),$$

donde $(x \circ \varphi_t \circ x^{-1}(q_0) = q_0 + te_1$. Logo, $J(x \circ \varphi_t \circ x^{-1}(q_0)) = I_m$ (matriz identidade). Portanto, se $v \in T_pM$ é um vetor de coordenadas $v = \sum_{j=1}^m v^j \dfrac{\partial}{\partial x^j}$, então

$$d(\varphi_t)_p(v) = \sum_{j=1}^m v^j \frac{\partial}{\partial x^j}(\varphi_t(p)).$$

(v e $d(\varphi_t)_p(v)$ não são o mesmo vetor, mas tem as mesmas coordenadas no sistema x.)

Assim, se $Y = \sum_{j=1}^m y^j \dfrac{\partial}{\partial x^j}$, $Z = \sum_{j=1}^m z^j \dfrac{\partial}{\partial x^j}$ e $B = \sum_{1 \leq j,k \leq m} B_{jk} dx^j \otimes dx^k$ são as representações de Y, Z e B no sistema x, então

$$(\varphi_t^* B)_p(Y,Z) = B_{\varphi(t,p)}(d(\varphi_t)_p(Y), d(\varphi_t)_p(Z)) = \sum_{1 \leq j,k \leq m} B_{jk}(\varphi_t(p)) y^j(\varphi_t(p)) z^k(\varphi_t(p)).$$

E também

$$B_p(Y,Z) = \sum_{1\le j,k\le m} B_{jk}(p)y^j(p)z^k(p).$$

Então

$$(\mathcal{L}_X B)_p(Y,Z) = \frac{d}{dt}\left[\sum_{1\le j,k\le m} (B_{jk}y^j z^k)(\varphi_t(p))\right]_{t=0}.$$

O resto da demonstração agora segue da regra de derivada de produto de funções reais. □

Proposição 1.10. *Seja M uma variedade diferenciável, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e φ o fluxo de X. Se B é um $2-$tensor em M, então para todo $p \in M$,*

$$\frac{d}{dt}\left[(\varphi_t^* B)_p\right]_{t=t_0} = (\varphi_{t_0}^*(\mathcal{L}_X B))_p. \tag{1.7}$$

Demonstração. Devemos mostrar que dado $p \in M$ e $v, w \in T_pM$ quaisquer,

$$\frac{d}{dt}\left[(\varphi_t^* B)_p(v,w)\right]_{t=t_0} = (\varphi_{t_0}^*(\mathcal{L}_X B))_p(v,w),$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}\Big[B_{\varphi(t,p)}(d(\varphi_t)_p(v), d(\varphi_t)_p(w))\Big]_{t=t_0} = (\mathcal{L}_X B)_{\varphi(t_0,p)}(d(\varphi_{t_0})_p(v), d(\varphi_{t_0})_p(w)).$$

Façamos $t = s + t_0$. Então $t \to t_0$ equivale a $s \to 0$. Daí,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big[B_{\varphi(t,p)}(d(\varphi_t)_p(v), d(\varphi_t)_p(w))\Big]_{t=t_0} &= \frac{d}{ds}\Big[B_{\varphi(t_0+s,p)}(d\varphi_s(d(\varphi_{t_0})_p(v)), d\varphi_s(d(\varphi_t)_p(w)))\Big]_{s=0}\\ &= (\mathcal{L}_X B)_{\varphi(t_0,p)}(d(\varphi_{t_0})_p(v), d(\varphi_{t_0})_p(w)),\end{aligned}$$

onde na última igualdade acima usamos a definição de derivada de Lie de um $2-$tensor. □

Sejam M uma variedade Riemanniana e $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Dado $p \in M$ e $V \subset M$ uma vizinhança de p onde o fluxo local $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times V \to M$ de Y está definido. Dizemos que Y é um *campo de Killing* se, para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, a aplicação $\varphi_t : V \to \varphi_t(V)$, dada por $\varphi_t(q) = \varphi(t,q)$, é uma isometria, isto é,

$$\langle u, v\rangle_q = \langle d(\varphi_t)u, d(\varphi_t)v\rangle_{\varphi_t(q)}. \tag{1.8}$$

Proposição 1.11. *Em uma variedade Riemanniana M, $X \in \mathfrak{X}(M)$ é campo de Killing se, e somente se,*

$$\langle \nabla_Y X, Z\rangle + \langle \nabla_Z X, Y\rangle = 0 \tag{1.9}$$

para todos $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. Observe inicialmente que se $g = \langle , \rangle$ é a métrica Riemanniana de M, então pela proposição 1.9 e pelas propriedades da conexão Riemanniana ∇, a derivada de Lie de g em relação a X é

$$(\mathcal{L}_X g)(Y, Z) = \langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle \nabla_Z X, Y \rangle.$$

Seja $p \in M$ e $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times V \to M$ o fluxo local de X ao redor de p. Veja que dizer que φ_t é isometria é equivalente a dizer que $\varphi_t^* g = g$.

Se φ_t é isometria para todo para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, então pela definição de $\mathcal{L}_X g$, temos $0 = (\mathcal{L}_X g)_p(Y, Z)$, provando assim a equação (1.9). Reciprocamente, se vale (1.9), ou seja, se $(\mathcal{L}_X g) = 0$, a proposição 1.10 mostra que

$$\frac{d}{dt}\left[(\varphi_t^* g)_p\right]_{t=t_0} = 0$$

para todo $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, isto é, $(\varphi_t^* g)_p$ é constante e daí $(\varphi_t^* g)_p = g_p$. Portanto, o fluxo de X é isometria, completando a demonstração. □

Proposição 1.12. *A divergência de um campo de Killing é identicamente nula.*

Demonstração. Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo de Killing. Dado $p \in M$, considere um referencial móvel ortonormal $\{E_j\}_{j=1}^n$ numa vizinhança de p. Então

$$\langle E_j, \nabla_{E_j} X \rangle + \langle E_j, \nabla_{E_j} X \rangle = 0,$$

pela proposição 1.11. Logo,

$$(\mathrm{div} X)(p) = \sum_{j=1}^{n} \langle E_j, \nabla_{E_j} X(p) \rangle = 0.$$

□

1.3 Imersões Isométricas

Nesta seção, e na próxima, faremos um pequeno resumo dos resultados sobre imersões isométricas e variedades completas que usaremos nos capítulos seguintes. A referência base para este resumo é o livro [5], capítulos VI e VII.

Seja $f : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ uma imersão de uma variedade diferenciável $n-$dimensional M em uma variedade Riemanniana $\overline{M}$ $(n+k)-$dimensional $(k \geq 1)$. Para cada $p \in M$, o Teorema da Função Inversa garante que existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que

$f : U \to f(U)$ é um mergulho, e assim $f(U)$ é uma subvariedade de $\overline{M}$. Podemos usar a Forma local das Imersões (veja o capítulo 2 de [10]) para estender um campo de vetores tangentes a $f(U)$ definido em uma vizinhança de $f(p)$ em um campo de vetores num aberto de $\overline{M}$ contendo $f(p)$.

Vamos identificar U com $f(U)$, isto é, $q \in U$ com $f(q)$, e cada vetor $v \in T_qM$ com $df_q(v) \in T_{f(q)}\overline{M}$, ou seja, identificamos T_qM com sua imagem $df_q(T_qM) \subset T_{f(q)}\overline{M}$.

Além disso, definimos o produto interno em T_pM pondo

$$\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)}.$$

Isto torna nossa imersão em uma imersão isométrica. A presença do produto interno nos permite escrever

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^\perp, \tag{1.10}$$

onde $(T_pM)^\perp$ é o complemento ortogonal de $T_pM \subset T_p\overline{M}$. Para cada $v \in T_p\overline{M}$, $p \in M$, podemos escrever de modo único $v = v^\top + v^\perp$, pela soma direta (1.10).

Indicando a conexão Riemanniana de $\overline{M}$ por $\overline{\nabla}$, é possível mostrar que a conexão de M é dada por

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^\top,$$

onde X, Y são campos locais tangentes a M e $\overline{X}, \overline{Y}$ são suas respectivas extensões locais a $\overline{M}$.

Neste trabalho, estamos interessados apenas no caso em que $k = 1$, ou seja, M é uma *hipersuperfície* de $\overline{M}$. Assim, o espaço $(T_pM)^\perp$ tem dimensão um e podemos definir diretamente o *operador forma* da imersão da seguinte maneira: dado $p \in M$, considere um campo de vetores normais a M e unitários definido em uma vizinhança de p. O *operador forma* $\mathrm{A}_p : T_pM \to T_pM$ em p é definido por

$$\mathrm{A}_p(x) = -(\overline{\nabla}_x N). \tag{1.11}$$

Para que A esteja bem definido, precisamos mostrar que $\overline{\nabla}_x N$ é de fato um campo de vetores tangentes a M. Para isso, seja $x \in T_pM$ e X uma extensão local de x tangente a M. Como $\langle N, N\rangle = 1$, temos

$$0 = X\langle N, N\rangle = 2\langle\overline{\nabla}_X N, N\rangle$$

provando assim o resultado.

Precisaremos utilizar o fato de que A_p é um operador auto-adjunto, mas não faremos a demonstração aqui. Indicamos o capítulo VI de [5] para a demonstração.

O traço de A_p é chamado a *curvatura média* $H(p)$ de M em p. Observe que o sinal da curvatura média depende da escolha do campo local de vetores normais unitários N. Dizemos que uma imersão $f : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ é *mínima* se $\mathrm{tr}A_p = H(p) = 0$ para todo ponto $p \in M$. E dizemos que a imersão é *geodésica* em $p \in M$ se A_p é identicamente nulo. A imersão é dita *totalmente geodésica* se for geodésica para todo $p \in M$. Observe que ser totalmente geodésica é uma condição mais forte que ser mínima. A explicação para o termo "imersão geodésica" é dada pela proposição abaixo, a qual é um caso particular da proposição 2.9 do Capítulo VI de [5].

Proposição 1.13. *Uma imersão $f : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ é geodésica no ponto p se, e somente se, toda geodésica γ de M partindo de p é geodésica de $\overline{M}$ em p.*

Terminamos esta seção com a proposição abaixo.

Proposição 1.14. *Seja $f : M^{n+1} \to \mathbb{R}$ uma função suave em que $0 \in \mathbb{R}$ é valor regular e $\Sigma = \{p \in M; f(p) = 0\} = f^{-1}(0)$. Então:*

(a) *Σ é uma subvariedade de M e o vetor $\nabla f(p)$, $p \in \Sigma$, é normal a Σ.*

(b) *A curvatura média* H *de Σ é dada por*

$$n\mathrm{H} = -\mathrm{div}\left(\frac{\nabla f}{|\nabla f|}\right).$$

(c) *Se N é um campo de vetores normais unitários definido numa vizinhança de uma hipersuperfície P de M, então*

$$n\mathrm{H} = -\mathrm{div}N.$$

Demonstração. (a) A prova de que Σ é uma subvariedade de M é consequência do Teorema da Função Implícita, e pode ser vista em [10], Proposição 2 do Capítulo 2.

Para mostrar a última afirmação, seja $p \in \Sigma$ e considere uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \Sigma$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v \in T_p\Sigma$. Então $(f \circ \alpha)(t) = 0$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, logo

$$0 = (f \circ \alpha)'(0) = df_p(v) = v(f) = \langle \nabla f(p), v \rangle,$$

e assim $\nabla f(p) \perp v$ para todo $v \in T_p\Sigma$.

(b) Denote por ∇ a conexão riemanniana de M. Seja $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ um referencial móvel em Σ definido numa vizinhança de $p \in \Sigma$, e $E_{n+1} = \dfrac{\nabla f}{|\nabla f|}$. Sabemos que

$$n\mathrm{H} = \mathrm{trA} = \sum_{j=1}^{n} \langle AE_j, E_j \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle -\nabla_{E_j} E_{n+1}, E_j \rangle.$$

Como $\langle E_{n+1}, E_{n+1} \rangle = 1$, então $0 = E_{n+1}\langle E_{n+1}, E_{n+1} \rangle = 2\langle \nabla_{E_{n+1}} E_{n+1}, E_{n+1} \rangle$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\left(\frac{\nabla f}{|\nabla f|}\right) &= \sum_{j=1}^{n+1} \langle \nabla_{E_j} E_{n+1}, E_j \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \langle \nabla_{E_j} E_{n+1}, E_j \rangle + \langle \nabla_{E_{n+1}} E_{n+1}, E_{n+1} \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \langle \nabla_{E_j} E_{n+1}, E_j \rangle = -n\mathrm{H}.
\end{aligned}$$

(c) Observe que localmente P é a imagem inversa de um valor regular de uma função real f definida num aberto de M, e $N = \dfrac{\nabla f}{|\nabla f|}$. Obtemos o resultado aplicando o item (b).

□

1.4 Variedades completas

Uma variedade Riemanniana M é dita estendível se existe uma variedade Riemanniana $\overline{M}$ tal que M é isométrica a um subconjunto aberto próprio de $\overline{M}$. Se isto não é possível, dizemos que M é *não-estendível*. M é dita completa se para todo $p \in M$, as geodésicas que partem de p podem ser definidas em toda a reta $\mathbb{R}$. Rigorosamente, a apliação exponencial exp_p está definida para todo $v \in T_pM$. Toda variedade completa é não estendível (mas a recíproca não é verdadeira), como mostra proposição 2.3 do capítulo VII de [5].

Vamos apenas enunciar o importante Teorema de Hopf-Rinow, cuja demonstração pode ser vista no capítulo VII de [5].

Proposição 1.15. *Seja M uma variedade Riemanniana e $p \in M$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $\exp_p$ *está definida em todo o* T_pM.

(b) *Os limitados e fechados em M são compactos.*

(c) *M é completa como espaço métrico, com a métrica sendo dada pela distância geodésica d ($d(p,q) =$ ínfimo dos comprimentos de todas as curvas γ_{pq}, onde γ_{pq} é uma curva suave por partes ligando p e q).*

(d) *M é completa.*

(e) *Existe uma sequência de compactos $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com $K_n \subset \operatorname{int} K_{n+1}$ e $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = M$, tais que se $q_n \notin K_n$, então $d(p,q_n) \to +\infty$. Além disso, cada uma das afirmações acima implica que*

(f) *Para todo $q \in M$, existe uma geodésica γ ligando p a q com comprimento $L(\gamma) = d(p,q)$.*

Uma curva divergente em uma variedade Riemanniana M é uma aplicação suave $\alpha : [0,+\infty) \to M$ tal que para todo compacto $K \subset M$, existe um $t_0 \in (0,+\infty)$ com $\alpha(t) \notin K$ se $t \geq t_0$. O comprimento de uma curva divergente é dado por

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t |\alpha'(s)|ds = L(\alpha). \tag{1.12}$$

Como consequência to Teorema de Hopf-Rinow, provaremos a seguinte proposição:

Proposição 1.16. *Uma variedade Riemanniana M é completa se, e somente se o comprimento de toda curva divergente é infinito.*

Demonstração. Suponhamos primeiro que M seja completa. Pela Proposição 1.15, dado $p \in M$ fixado, existe uma sequência de compactos $K_n \subset M$, com $K_n \subset \operatorname{int} K_{n+1}$ e $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = M$, tais que se $q_n \notin K_n$, então $\lim_{n\to+\infty} d(p,q_n) = +\infty$.

Seja $\alpha : [0,+\infty) \to M$ uma curva divergente em M. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um $t_n > 0$ tal que $\alpha(t) \notin K_n$ se $t \geq t_n$. Como $K_n \subset \operatorname{int} K_{n+1}$, t_n é crescente. Além disso, ela não pode ser limitada, pois neste caso existiria $b = \lim t_n$, e assim $t > b \Rightarrow \alpha(t) \notin \bigcup K_n = M$, absurdo. Então $\lim t_n = +\infty$.

Pela Proposição 1.15(f), existe uma geodésica minimizante γ_n ligando $\alpha(0)$ a $\alpha(t_n)$, ou seja,

$$\begin{aligned} L(\gamma_n) &= d(\alpha(0), \alpha(t_n)) \\ &\leq \int_0^{t_n} |\alpha'(s)|ds. \end{aligned}$$

Como $\alpha(t_n) \notin K_n$, temos

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{t_n}|\alpha'(s)|ds \geq \lim_{n\to+\infty} d(\alpha(0),\alpha(t_n)) = +\infty,$$

logo α tem comprimento infinito.

Reciprocamente, suponha que M não seja completa. Então existe uma geodésica γ que não está definida em $\mathbb{R}$, isto é, $\gamma : [0,b) \to M$. Vamos mostrar que γ é divergente, e considerando uma reparametrização $\overline{\gamma} : [0,+\infty) \to M$ de γ, teremos

$$L(\overline{\gamma}) = L(\gamma) = \lim_{\epsilon\to b^-}\int_0^{\epsilon}|\gamma'(s)|ds = \lim_{\varepsilon\to b^{-1}} \varepsilon v_\gamma < +\infty,$$

onde $v_\gamma = |\gamma'(s)|$, a qual é constante, pois γ é geodésica. Isto provará a proposição, uma vez que $\overline{\gamma}$ é divergente (tem o mesmo traço de γ) e $L(\overline{\gamma}) < +\infty$.

Suponha por absurdo que γ não seja divergente e seja $K \subset M$ um compacto tal que $\gamma([0,b)) \subset K$. Considere uma sequência crescente $t_n \in [0,b)$ com $\lim t_n = b$. Como $\gamma(t_n) \in K$, passando a uma subsequência, se necessário, podemos admitir que $\lim_{n+\infty}\gamma(t_n) = p \in K$. Mas existe uma vizinhança B de p em M tal que quaisquer $q_1, q_2 \in B$ podem ser ligados por uma única geodésica γ_{12} contida em B ligando q_1 e q_2 (isto segue da proposição 4.2 do Capítulo III de [5].) Como B é aberto, $\gamma(t_n) \in B$ para todo n suficientemente grande, digamos $n \geq n_0$. Isto mostra que se $m, n \geq n_0$, a geodésica em B ligando $\gamma(t_m)$ a $\gamma(t_n)$ é a própria γ. Tomando $n \geq n_0$ de modo que a aplicação exponencial $\exp_{\gamma(\mathrm{t_n})}$ seja difeomorfismo de uma vizinhança de $0 \in T_{\gamma(t_n)}M$ sobre um aberto contendo p, vemos que γ pode ser prolongada além de b, um absurdo. $\square$

1.5 Produtos Warped

Sejam M e N variedades Riemannianas. A estrutura de variedade produto em $M \times N$ faz com que as projeções canônicas $\pi_M : M \times N \to M$ e $\pi_N : M \times N \to N$ sejam funções suaves. A métrica usual em $M \times N$ é (veja [7], Lema 3.5) dada por

$$\langle,\rangle = \pi_M^*(\langle,\rangle_M) + \pi_N^*(\langle,\rangle_N). \tag{1.13}$$

Vamos definir uma nova métrica Riemanniana, que será utilizada ao longo deste texto. Sejam $(M,\langle,\rangle_M)$ e $(N,\langle,\rangle_N)$ variedades Riemannianas e $g : M \to \mathbb{R}$ uma função suave positiva em M. Na variedade produto $M \times N$, definimos a métrica *warped* por

$$\langle,\rangle = \pi_M^*(\langle,\rangle_M) + (g\circ\pi_M)^2\pi_N^*(\langle,\rangle_N). \tag{1.14}$$

Explicitamente, como $T_{(p,q)}M \times N \cong T_pM \oplus T_qN$, dados $u = (u_M, u_N)$ e $v = (v_M, v_N)$ em $T_{(p,q)}M \times N$, (1.14) se escreve assim:

$$\langle u, v\rangle = \langle u_M, v_M\rangle_M + g(p)^2\langle u_N, v_N\rangle_N. \tag{1.15}$$

Para provar que (1.14) define de fato uma métrica Riemanniana em $M \times N$, basta fazer os seguintes cálculos:

(a) Como $\langle , \rangle_M$ e $\langle , \rangle_N$ são bilineares,

$$\begin{aligned} \langle \lambda u + w, v\rangle &= \langle \lambda u_M + w_M, v_M\rangle_M + g(p)^2\langle \lambda u_N + w_N, v_N\rangle_N \\ &= \lambda\langle u_M, v_M\rangle_M + \langle w_M, v_M\rangle_M + g(p)^2\lambda\langle u_N, v_N\rangle + g(p)^2\langle w_N, v_N\rangle_N \\ &= \lambda\langle u, v\rangle + \langle w, v\rangle. \end{aligned}$$

(b) Como $\langle , \rangle_M$ e $\langle , \rangle_N$ são simétricos, então

$$\begin{aligned} \langle u, v\rangle &= \langle u_M, v_M\rangle_M + g(p)^2\langle u_N, v_N\rangle_N \\ &= \langle v_M, u_M\rangle_M + g(p)^2\langle v_N, u_N\rangle_N \\ &= \langle v, u\rangle. \end{aligned}$$

(c) Finalmente, como $\langle , \rangle_M$ e $\langle , \rangle_N$ são positivos,

$$\langle u, u\rangle = \langle u_M, u_M\rangle_M + g(p)^2\langle u_N, u_N\rangle_N \geq 0$$

e $\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u_M = 0$ e $u_N = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

O resultado abaixo será usado na Proposição 2.2 e sua demonstração pode ser encontrada na referência [7], capítulo 7.

Proposição 1.17. *No produto warped $M \times_g N$, os slices $M \times \{q\}$, $q \in N$, são totalmente geodésicos.*

Exemplo 1.1. *Podemos considerar $M = \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$, com a métrica usual, como o produto warped $\mathbb{S}^n \times_\rho (0, +\infty)$, onde $\rho : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é a função $\rho(t) = t$ e $\mathbb{S}^n$ a esfera unitária. De fato, dado $x \in M$, com $|x| = t > 0$, $T_xM = \mathbb{R}^n = T_{x/|x|}\mathbb{S}^n \oplus \mathrm{span}\{x\}$, pois $T_x\mathbb{S}^n = [x]^\perp$. Então dados quaisquer vetores $u, v \in T_xM$, eles se escrevem de modo único como*

$$u = u_0 + \lambda_1 x \quad \text{e} \quad v = v_0 + \lambda_2 x,$$

com $u_0, v_0 \in T_{x/|x|}\mathbb{S}^n$. *Logo,*

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \langle u_0, v_0 \rangle_{\mathbb{S}^n} + |x|^2 \lambda_1 \lambda_2 \\ &= \langle u_0, v_0 \rangle_{\mathbb{S}^n} + t^2 \lambda_1 \lambda_2 \end{aligned}$$

Assim, podemos associar $x \in M$ *com* $(x/|x|, |x|) \in \mathbb{S}^n \times_\rho (0, +\infty)$, *e* $u \in T_x M$ *com* $(u_0, \lambda_1) \in T_{(x,t)}\mathbb{S}^n \times_\rho (0, +\infty)$, *onde* $|x| = t$. *Portanto, a métrica de* M *em* x, $|x| = t$, *coincide com a métrica de* $\mathbb{S}^n \times_\rho (0, +\infty)$ *no ponto* (x, t).

Capítulo 2

Resultados tipo-Liouville para hipersuperfícies two-sided

2.1 Variedades com campos de Killing

Apenas a título de motivação para introduzirmos o produto warped $\mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R}$, considere a situação seguinte. Seja $\overline{M}$ uma variedade Riemanniana $(n+1)-$dimensional munida de um campo de Killing $Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$. Considere a distribuição que a cada $p \in \overline{M}$ associa o complemento ortogonal $[Y_p]^\perp \subset T_p\overline{M}$. Suponha que esta distribuição seja integrável e tenha posto constante n. Seja $\mathbb{P}$ uma folha integral desta distribuição e considere o fluxo $\Psi : J \times \mathbb{P} \to \overline{M}$ de Y começando em pontos de $\mathbb{P}$. Vamos considerar que $J = \mathbb{R}$.

Como Y é campo de Killing, se $q \in \mathbb{P}$ e $V \subset \overline{M}$ é um aberto contendo q onde está definido o fluxo local de Y, então a aplicação $\Psi_t : V \to \Psi_t(V)$ é uma isometria, isto é, dados $u, v \in T_q\overline{M}$, vale

$$\langle u, v\rangle_q = \langle d\Psi_t u, d\Psi_t v\rangle_x, \tag{2.1}$$

onde $x = \Psi_t(q)$. No entanto, $q \in \mathbb{P} \subset \overline{M}$ e assim $T_q\overline{M} \cong T_q\mathbb{P} \oplus \operatorname{span}(Y_q)$, pois $T_q\mathbb{P} = [Y_q]^\perp$. Segue-se que $u \in T_q\overline{M}$ se escreve como $u = u_{\mathbb{P}} + u_{\mathbb{R}} Y_q$ e então

$$\langle u, v\rangle_q = \langle u_{\mathbb{P}}, v_{\mathbb{P}}\rangle + u_{\mathbb{R}} v_{\mathbb{R}} \langle Y_q, Y_q\rangle_q. \tag{2.2}$$

Denotando por $\rho : \mathbb{P} \to \mathbb{R}$ a função $\rho(q) = |Y_q|$, obtemos de (2.1) e (2.2) a expressão

$$\langle d\Psi_t u, d\Psi_t v\rangle_x = \langle u_{\mathbb{P}}, v_{\mathbb{P}}\rangle + \rho^2(q) u_{\mathbb{R}} v_{\mathbb{R}}. \tag{2.3}$$

Como todo vetor $\overline{u} \in T_x\overline{M}$ se escreve como $\overline{u} = d\Psi_t u$, podemos dizer que o produto interno $\langle , \rangle_x$, $x = \Psi_t(x)$, coincide com a métrica do produto warped $\mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R}$ em (q, t).

Na realidade, isto mostra que $\overline{M}$ pode ser considerada localmente como $\mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R}$, cuja métrica, como sabemos, é

$$\langle\, \rangle = \pi_M^*(\langle\, , \rangle_M) + (\rho \circ \pi_M)^2 \pi_{\mathbb{R}}^*(dt^2). \tag{2.4}$$

Podemos ainda tratar $Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ simplesmente como o campo $\partial_t = (0, \partial_t) \in \mathfrak{X}(\mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R})$ (lembre que $T_{(q,t)}\mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R} \cong T_q\mathbb{P} \oplus T_t\mathbb{R}$ e ∂_t é o campo associado ao sistema de coordenadas em $\mathbb{R}$ dado pela função identidade). De fato, veja que

$$\langle \partial_t, \partial_t \rangle_{(q,t)} = \langle d\pi_{\mathbb{P}}\partial_t, d\pi_{\mathbb{P}}\partial_t \rangle_{q\in\mathbb{P}} + \rho^2(q)dt^2(\partial_t) = \rho^2(q) \cdot 1 = \langle Y_q, Y_q \rangle_{q \in \overline{M}}, \tag{2.5}$$

logo eles tem a mesma norma, e além disso ∂_t é ortogonal a $T_q\mathbb{P} \times \{0\}$ assim como Y_q em $\overline{M}$.

Observe ainda que as curvas integrais de ∂_t em $\mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R}$ são as funções $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R}$, dadas por $\alpha(s) = (q, s)$, com $\alpha(0) = (q, 0)$. O fluxo de ∂_t é portanto (começando em $(q, 0)$)

$$\Psi(s, (q, 0)) = (q, s).$$

Ao longo do trabalho, porém, continuaremos usando a notação Y para significar ∂_t, a fim de manter a notação usada no trabalho de de Lima et. al. [4].

2.2 Hipersuperfícies two-sided em $\mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R}$

Dizemos que uma hipersuperfície $\varphi : \Sigma^n \to \overline{M}^{n+1}$ é *two-sided* quando existe um campo de vetores suaves N, definido globalmente em Σ^n, unitários e normais a Σ^n.

Para superfícies bidimensionais $S \subset \mathbb{R}^3$, é bem conhecido o fato de que S é orientável se, e somente se, existe um campo de vetores suaves normais unitários a S definido globalmente em tal superfície. No entanto, ser two-sided não é o mesmo que ser orientável, em geral. Por exemplo, o cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ é orientável, mas podemos mergulhá-lo em $M^2 \times \mathbb{R}$ de modo que ele não seja two-sided, onde M^2 é uma faixa de Möbius em $\mathbb{R}^3$. Tomando a "linha de centro" C de M^2, que é difeomorfa a S^1, concluímos que $C \times \mathbb{R}$ é hipersuperfície de $M^2 \times \mathbb{R}$ difeomorfa ao cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$, mas não é two-sided. É possível também que uma variedade não-orientável seja uma hipersuperfície two-sided, como mostra o exemplo $M^2 \times \{0\} \subset M^2\mathbb{R}$. Neste caso, o campo de vetores normais é simplesmente ∂_t, o campo de vetores tangentes a $\mathbb{R}$.

Neste trabalho, consideraremos hipersuperfícies two-sided $\varphi : \Sigma^n \to \mathbb{P}\times_\rho\mathbb{R}$ imersas em um produto warped $\mathbb{P}\times_\rho\mathbb{R}$, onde $\mathbb{P}$ é uma variedade Riemanniana com dimensão n. Vamos considerar em especial com duas funções suaves associadas à imersão φ, a saber a *função altura* $h = (\pi_\mathbb{R})_{|\Sigma} : \Sigma^n \to \mathbb{R}$, que é a restrição a Σ^n da projeção canônica $\pi_\mathbb{R} : \mathbb{P}\times_\rho\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e a *função ângulo* $\Theta : \Sigma^n \to \mathbb{R}$ definida por $\Theta = \langle N, Y\rangle$, onde N é um campo de vetores unitários e normais definido globalmente em Σ^n e Y é um campo de Killing definido em $\mathbb{P}\times_\rho\mathbb{R}$.

Além disso, vamos denotar por $\overline{\nabla}, \nabla$, e $\widetilde{\nabla}$ os gradientes (e outros operadores) com respeito as métricas de $\mathbb{P}\times_\rho\mathbb{R}, \Sigma^n$ e $\mathbb{P}$, respectivamente. Por exemplo, $\widetilde{\mathrm{Ric}}$ denota o tensor de Ricci de $\mathbb{P}$, enquanto Ric denota o tensor de Ricci de Σ^n. E $X^\top$ representa a componente tangencial de um campo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{P}\times_\rho\mathbb{R})$ ao longo de Σ^n.

Proposição 2.1. *Sejam h e Θ as funções altura e ângulo definidas acima e N^* a componente tangencial de N ao longo de $\mathbb{P}$. Então:*

(a) $\nabla h = \dfrac{1}{\rho^2}Y^\top$;

(b) $N^* = N - \dfrac{1}{\rho^2}\Theta Y$;

(c) $|\nabla h|^2_\Sigma = \dfrac{1}{\rho^2}|N^*|^2_{\mathbb{P}\times_\rho\mathbb{R}}$.

Demonstração. (a) Como $\pi_\mathbb{R} : \mathbb{P}\times_\rho\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $\pi_\mathbb{R}(q,t) = t$, temos $h(q,t) = t$ para $(q,t) \in \Sigma^n$. Observe que se $\alpha : (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{P}\times_\rho\mathbb{R}$ é um caminho suave dado por $\alpha(s) = (q(s), t(s))$, com $\alpha(0) = (q,t)$, com $q : (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{P}$, $t : (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}$, $q'(0) = v$ e $t'(0) = \lambda$, temos $\pi_\mathbb{R}(\alpha(s)) = t(s)$. Assim, $d\pi_\mathbb{R}(v,\lambda) = \lambda$. Logo,

$$\langle (v,\lambda), \overline{\nabla}\pi_\mathbb{R}\rangle = d\pi_\mathbb{R}(v,\lambda) = \lambda. \tag{2.6}$$

Portanto, se $\overline{\nabla}\pi_\mathbb{R} = (X_\mathbb{P}, X_\mathbb{R})$, usando (2.6) obtemos

$$\lambda = \langle v, X_\mathbb{P}\rangle_\mathbb{P} + \rho^2\lambda X_\mathbb{R}.$$

Fazendo $\lambda = 0$, obtemos $\langle v, X_\mathbb{P}\rangle = 0$ para todo $v \in T_q\mathbb{P}$, e portanto $X_\mathbb{P} = 0$. Por outro lado, fazendo $v = 0$ e $\lambda = 1$, obtemos $X_\mathbb{R} = \dfrac{1}{\rho^2}$, e então

$$\overline{\nabla}\pi_\mathbb{R} = \frac{1}{\rho^2}\partial_t.$$

Concluímos que $\nabla h = (\overline{\nabla}\pi_\mathbb{R})^\top = \dfrac{1}{\rho^2}(\partial_t)^\top = \dfrac{1}{\rho^2}Y^\top$.

(b) N é um campo normal a Σ^n, cuja componente em $\mathbb{R}$ é λY, onde λ é um número real que devemos determinar. Para isto, façamos a conta

$$\Theta = \langle N, Y\rangle = \langle N^* + \lambda Y, Y\rangle = \langle N^*, Y\rangle + \lambda\langle Y, Y\rangle = \lambda\rho^2, \tag{2.7}$$

pois $\langle N^*, Y\rangle = 0$, já que o primeiro é tangente a $\mathbb{P}$ e o segundo é normal. Assim, $\lambda = \dfrac{\Theta}{\rho^2}$. Portanto,

$$N = N^* + \frac{\Theta}{\rho^2}Y$$

e $N^* = N - \dfrac{\Theta}{\rho^2}Y$.

(c) De

$$Y = Y^\top + \langle N, Y\rangle N = Y^\top + \Theta N,$$

temos

$$\begin{aligned} |Y^\top|^2 = |Y - \Theta N|^2 &= |Y|^2 - 2\Theta\langle Y, N\rangle + \Theta^2|N|^2 \\ &= \rho^2 - 2\Theta^2 + \Theta^2 \\ &= \rho^2 - \Theta^2. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Por outro lado,

$$N = N^* + \frac{1}{\rho^2}\Theta Y,$$

logo observando que $N^* \perp Y$, teremos

$$\begin{aligned} 1 = |N|^2 &= |N^*|^2 + |\frac{1}{\rho^2}\Theta Y|^2 \\ &= |N^*|^2 + \frac{\Theta^2}{\rho^2} \\ &\Rightarrow |N^*|^2 = 1 - \frac{\Theta^2}{\rho^2} = \frac{\rho^2 - \Theta^2}{\rho^2} = \frac{|Y^\top|^2}{\rho^2}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Portanto,

$$|\nabla h|^2 = \frac{1}{\rho^4}|Y^\top|^2 = \frac{1}{\rho^2}|N^*|^2.$$

□

2.3 Variedades com densidade

Dadas uma variedade Riemanniana $n-$dimensional (M, g) e uma função suave $f : M \to \mathbb{R}$, uma *variedade com densidade* é uma tripla ordenada $M_f = (M, g, d\mu = e^{-f}dM)$, onde

dM denota o elemento de volume de M. A função f é chama de *função densidade* de M_f. Se Ric denota o tensor de Ricci de M, definimos o tensor de Bakry-Émery-Ricci de M_f por

$$\mathrm{Ric}_f = \mathrm{Ric} + \mathrm{Hess} f.$$

Seja f uma função densidade em $\mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R}$. O operador $f-$divergência em Σ^n é definido por

$$\mathrm{div}_f(X) = e^f \mathrm{div}(e^{-f} X).$$

De modo semelhante ao laplaciano, o $f-$laplaciano de uma função $u : \Sigma^n \to \mathbb{R}$ suave é definido por $\Delta_f u = \mathrm{div}_f(\nabla u)$. Usando as propriedades do operador divergência, temos

$$\begin{aligned} \Delta_f u = \mathrm{div}_f(\nabla u) = e^f \mathrm{div}(e^{-f} \nabla u) &= e^f (e^{-f} \mathrm{div} \nabla u + \langle \nabla(e^{-f}), \nabla u \rangle) \\ &= \Delta u + e^f (-1) e^{-f} \langle \nabla f, \nabla u \rangle \\ &= \Delta u - \langle \nabla u, \nabla f \rangle. \end{aligned}$$

Seguindo a nomenclatura estabelecida por Gromov em [6], a curvatura $f-$média H_f de uma hipersuperfície two-sided $\varphi : \Sigma^n \to \mathbb{P}_f \times_\rho \mathbb{R}$ é definida por

$$n\mathrm{H}_f = n\mathrm{H} + \langle \overline{\nabla} f, N \rangle, \tag{2.10}$$

onde H representa a curvatura média de Σ^n em $\mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R}$ com respeito ao vetor normal N. Observe que (2.10) é simplesmente $n\mathrm{H}_f = -\mathrm{div}_f(N)$, assim como $n\mathrm{H} = -\mathrm{div} N$. Nesse contexto, dizemos que uma hipersuperfície Σ^n numa variedade com densidade M_f é $f-$mínima quando H_f é identicamente nula em Σ^n.

Proposição 2.2. *Seja $\mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R}$ um produto warped com função peso f. Então:*

(a) *os slices $\mathbb{P} \times \{t\}$ são mínimos.*

(b) *se a função densidade $f : \mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não depende do parâmetro $t \in \mathbb{R}$, então os slices $\mathbb{P} \times \{t\}$ são $f-$mínimos.*

Demonstração. (a) Isto é consequência imediata da Proposição 1.17, pois os slices $\mathbb{P} \times \{t\}$ são totalmente geodésicos em $\mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R}$.

(b) Do item (a), obtemos $\mathrm{H} = 0$ em $\mathbb{P} \times \{t\}$, pois eles são hipersuperfícies mínimas. Como a função densidade f não depende de t, segue-se que

$$0 = \partial_t f = \langle \overline{\nabla} f, \partial_t \rangle = 0.$$

Mas $\partial_t = N$ é o vetor normal aos slices $\mathbb{P} \times \{t\}$, logo

$$n\mathrm{H}_f = n\mathrm{H} + \langle \overline{\nabla} f, N \rangle = 0.$$

$\square$

A proposição acima sugere a seguinte pergunta: se os slices são $f-$mínimos, então dada uma hipersuperfície $\varphi : \Sigma^n \to \mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R}$, num produto warped com densidade cuja função densidade f não depende de $t \in \mathbb{R}$, em que condições podemos garantir que Σ^n é um slice do espaço ambiente?

Tanto na seção seguinte, quanto no próximo capítulo, apresentaremos algumas respostas a essa questão.

2.4 Resultados tipo-Liouville com hipóteses sobre $\widetilde{\mathrm{Ric}}_f$

Com base na Proposição 2.2, vamos considerar produtos warped com densidade $\mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R}$ cuja função densidade f não depende do parâmetro $t \in \mathbb{R}$. Denotaremos este espaço por $\mathbb{P}_f \times_\rho \mathbb{R}$, e o chamaremos de *produto warped de Killing com densidade.* O Lema a seguir servirá para a demonstração dos próximos três teoremas que o seguem.

Lema 2.1. *Seja Σ^n uma hipersuperfície two-sided imersa em $\mathbb{P}_f \times_\rho \mathbb{R}$. Se Σ^n tem curvatura $f-$média constante, então*

$$\Delta_f \Theta = -\left(\widetilde{\mathrm{Ric}}_f(N^*, N^*) - \frac{1}{\rho}\widetilde{\mathrm{Hess}}\rho(N^*, N^*) - \Theta^2 \frac{\widetilde{\Delta}_f \rho}{\rho^3} + |A|^2 \right) \Theta. \tag{2.11}$$

Demonstração. Para calcular $\Delta_f \Theta$, devemos calcular $\Delta\Theta$ e $\langle \nabla\Theta, \nabla f \rangle$.

De [1], Proposição 2.12, sabemos o valor do laplaciano de Θ, o qual vale

$$\Delta\Theta = -nY^\top \mathrm{H} - \Theta(\overline{\mathrm{Ric}}(N, N) + |A|^2). \tag{2.12}$$

Além disso, vale

$$\nabla\Theta = -AY^\top - (\overline{\nabla}_N Y)^\top. \tag{2.13}$$

Com efeito, seja $v \in T\Sigma$. Então

$$
\begin{aligned}
v\Theta = v\langle Y, N\rangle &= \langle \overline{\nabla}_v Y, N\rangle + \langle Y, \overline{\nabla}_v N\rangle \\
&= \langle -\overline{\nabla}_N Y, v\rangle + \langle Y^\top, -Av\rangle \qquad (2.14) \\
&= -\langle (\overline{\nabla}_N Y)^\top, v\rangle + \langle -AY^\top, v\rangle \qquad (2.15) \\
&= \langle -AY^\top - (\overline{\nabla}_N Y)^\top, v\rangle \\
&= \langle -AY^\top - (\overline{\nabla}_N Y)^\top, v\rangle,
\end{aligned}
$$

o que prova (2.13). Em (2.14), usamos o fato de Y ser Killing, e $\overline{\nabla}_v N = -Av \in T\Sigma$, enquanto em (2.15) o fato de A ser auto-adjunto.

Como f não depende de $t \in \mathbb{R}$, temos

$$0 = \partial_t f = \langle \partial_t, \overline{\nabla} f\rangle = \langle Y, \overline{\nabla} f\rangle, \qquad (2.16)$$

logo

$$0 = N\langle Y, \overline{\nabla} f\rangle = \langle \overline{\nabla}_N Y, \overline{\nabla} f\rangle + \langle Y, \overline{\nabla}_N \overline{\nabla} f\rangle$$

e daí

$$\langle \overline{\nabla}_N Y, \overline{\nabla} f\rangle = -\langle Y, \overline{\nabla}_N \overline{\nabla} f\rangle = -\langle Y, (\overline{\mathrm{Hess}} f)N\rangle. \qquad (2.17)$$

Além disso, como Y é Killing,

$$\langle \overline{\nabla}_N Y, N\rangle + \langle \overline{\nabla}_N Y, N\rangle = 2\langle \overline{\nabla}_N Y, N\rangle = 0,$$

isto é, $\overline{\nabla}_N Y$ é tangente a Σ.

Usando (2.17), temos

$$
\begin{aligned}
\langle \nabla\Theta, \overline{\nabla} f\rangle &= -\langle AY^\top + (\overline{\nabla}_N T)^\top, \overline{\nabla} f\rangle \\
&= -\langle AY^\top, \overline{\nabla} f\rangle - \langle \overline{\nabla}_N Y, \overline{\nabla} f\rangle \\
&= -\langle AY^\top, \overline{\nabla} f\rangle - \langle \overline{\nabla}_N Y, \nabla f\rangle \\
&= -\langle AY^\top, \overline{\nabla} f\rangle + \langle Y, (\mathrm{Hess} f)N\rangle, \qquad (2.18)
\end{aligned}
$$

e de (2.18), obtemos

$$-\langle AY^\top, \overline{\nabla} f\rangle = \langle \nabla\Theta, \overline{\nabla} f\rangle - \langle Y, (\mathrm{Hess} f)N\rangle. \qquad (2.19)$$

Agora, voltemos nossa atenção para o primeiro termo no lado direito de (2.12):

$$-nY^\top \mathrm{H} = -Y^\top(n\mathrm{H}_f - \langle \overline{\nabla} f, N\rangle) = -nY^\top \mathrm{H}_f + Y^\top \langle \overline{\nabla} f, N\rangle. \tag{2.20}$$

Observe que

$$\begin{aligned} Y^\top \langle \overline{\nabla} f, N\rangle &= \langle \overline{\nabla}_{Y^\top} \overline{\nabla} f, N\rangle + \langle \overline{\nabla} f, \overline{\nabla}_{Y^\top} N\rangle \\ &= \langle (\mathrm{Hess} f) Y^\top, N\rangle + \langle \overline{\nabla} f, \overline{\nabla}_{Y^\top} N\rangle \\ &= \langle (\mathrm{Hess} f)(Y - \Theta N), N\rangle + \langle \overline{\nabla} f, -AY^\top + (\overline{\nabla}_{Y^\top} N)^\perp\rangle \\ &= \langle (\mathrm{Hess} f) Y, N\rangle - \Theta\langle (\mathrm{Hess} f) N, N\rangle - \langle \overline{\nabla} f, AY^\top\rangle \end{aligned} \tag{2.21}$$

pois $(\overline{\nabla}_{Y^\top} N)^\perp = 0$, já que $\overline{\nabla}_{Y^\top} N$ é tangente a Σ. Assim, de (2.20) e (2.21), obtemos

$$-nY^\top \mathrm{H} = -nY^\top \mathrm{H}_f + \langle (\mathrm{Hess} f) Y, N\rangle - \Theta\langle (\mathrm{Hess} f) N, N\rangle - \langle \overline{\nabla} f, AY^\top\rangle. \tag{2.22}$$

Usando as equações (2.22) e (2.19), podemos escrever

$$-nY^\top \mathrm{H} = -nY^\top - \Theta\overline{\mathrm{Hess}} f(N,N) + \langle \nabla\Theta, \overline{\nabla} f\rangle. \tag{2.23}$$

Substituindo (2.23) em (2.12),

$$\Delta\Theta = -nY^\top \mathrm{H}_f - \Theta(\overline{\mathrm{Hess}} f(N,N) + \overline{\mathrm{Ric}}(N,N) + |A|^2) + \langle \nabla\Theta, \overline{\nabla} f\rangle, \tag{2.24}$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta_f\Theta &= \Delta\Theta - \langle \nabla\Theta, \overline{\nabla} f\rangle \\ &= -nY^\top \mathrm{H}_f - \Theta(\overline{\mathrm{Hess}} f(N,N) + \overline{\mathrm{Ric}}(N,N) + |A|^2) \\ &= -nY^\top \mathrm{H}_f - \Theta(\overline{\mathrm{Ric}}_f(N,N) + |A|^2) \end{aligned} \tag{2.25}$$

Agora, vamos encontrar expressões para $\overline{\mathrm{Hess}} f(N,N)$ e $\overline{\mathrm{Ric}}(N,N)$. Este último é obtido no Corolário 7.43 de [7], e vale

$$\overline{\mathrm{Ric}}(N,N) = \widetilde{\mathrm{Ric}}(N^*,N^*) - \frac{1}{\rho}\widetilde{\mathrm{Hess}}\rho(N^*,N^*) - \Theta^2\frac{\widetilde{\Delta}_f\rho}{\rho^3}. \tag{2.26}$$

Quanto ao outro, temos

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{Hess}} f(N,N) &= \langle \overline{\nabla}_N \overline{\nabla} f, N\rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_N \overline{\nabla} f, N^* + \frac{1}{\rho^2}\Theta Y\rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_N \widetilde{\nabla} f, N^*\rangle + \langle \overline{\nabla}_N \widetilde{\nabla} f, \frac{1}{\rho^2}\Theta Y\rangle \\ &= (\widetilde{\mathrm{Hess}} f)(N^*,N^*) - \frac{1}{\rho^2}\Theta\langle \widetilde{\nabla} f, \overline{\nabla}_N Y\rangle && (2.27) \\ &= (\widetilde{\mathrm{Hess}} f)(N^*,N^*) + \frac{1}{\rho^3}\Theta^2\langle \widetilde{\nabla} f, \widetilde{\nabla}\rho\rangle. && (2.28) \end{aligned}$$

Para justificar (2.27), observe que

$$0 = N\langle \widetilde{\nabla} f, Y\rangle = \langle \overline{\nabla}_N \widetilde{\nabla} f, Y\rangle + \langle \widetilde{\nabla} f, \overline{\nabla}_N Y\rangle. \tag{2.29}$$

Quanto a (2.28), se v é tangente a $\mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R}$, então

$$2\rho\langle \overline{\nabla}\rho, v\rangle = \langle \overline{\nabla}\rho^2, v\rangle = v\rho^2 = v\langle Y, Y\rangle = 2\langle \overline{\nabla}_v Y, Y\rangle = -2\langle \overline{\nabla}_Y Y, v\rangle,$$

pois Y é Killing. Logo,

$$\overline{\nabla}\rho = \widetilde{\nabla}\rho = -\frac{1}{\rho}\overline{\nabla}_Y Y. \tag{2.30}$$

Mas, dado qualquer campo V tangente a $\mathbb{P}$, temos

$$\begin{aligned} 0 = N^*\langle Y, V\rangle &= \langle \overline{\nabla}_{N^*} Y, V\rangle + \langle Y, \overline{\nabla}_{N^*} V\rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_{N^*} Y, V\rangle, \end{aligned}$$

então $\overline{\nabla}_{N^*} V$ é tangente a $\mathbb{P}$. Assim, $\overline{\nabla}_{N^*} Y$ é ortogonal a $\mathbb{P}$.

Como $\overline{\nabla}_N Y = \overline{\nabla}_{N^*} Y + \dfrac{1}{\rho^2}\Theta\overline{\nabla}_Y Y$, concluímos de (2.30) que

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{\nabla} f, \overline{\nabla}_N Y\rangle &= \langle \widetilde{\nabla} f, \overline{\nabla}_{N^*} Y + \frac{1}{\rho^2}\Theta\overline{\nabla}_Y Y\rangle \\ &= \langle \widetilde{\nabla} f, -\frac{1}{\rho}\Theta\widetilde{\nabla}\rho\rangle, \end{aligned}$$

completando a justificativa de (2.28).

Somando (2.26) e (2.28), temos

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{Ric}}_f(N, N) &= \widetilde{\mathrm{Ric}}(N^*, N^*) + \widetilde{\mathrm{Hess}} f(N^*, N^*) - \frac{1}{\rho}\widetilde{\mathrm{Hess}}\rho(N^*, N^*) \\ &\quad - \frac{1}{\rho^3}\Theta^2\left[\widetilde{\Delta}\rho - \langle \widetilde{\nabla} f, \widetilde{\nabla}\rho\rangle\right] \\ &= \widetilde{\mathrm{Ric}}_f(N^*, N^*) - \frac{1}{\rho}\widetilde{\mathrm{Hess}}\rho(N^*, N^*) - \frac{1}{\rho^3}\Theta^2\widetilde{\Delta}_f\rho. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Substituíndo (2.31) em (2.25) e lembrando que H_f é constante, obtemos o resultado. $\square$

Dizemos que uma variedade Riemanniana Σ^n com função densidade f é *$f-$parabólica* se toda função $u : \Sigma^n \to \mathbb{R}$ suave limitada inferiormente tal que $\Delta_f u \leq 0$ deve ser constante. Nesse sentido, apresentamos agora o seguinte

Teorema 2.1. *Seja $\overline{M} = \mathbb{P}_f \times_\rho \mathbb{R}$ um produto warped de Killing com densidade tal que $\widetilde{\mathrm{Ric}}_f \geq -\kappa$, para alguma constante $\kappa > 0$, e ρ uma função côncava com $\widetilde{\Delta}_f\rho \leq 0$.*

Seja $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}$ uma hipersuperfície $f-$parabólica, two-sided, com curvatura $f-$média constante, cuja função ângulo Θ tem sinal estrito. Se

$$|\nabla h|^2 \leq \frac{\alpha}{\kappa\rho^2}|A|^2 \tag{2.32}$$

para alguma constante $\alpha \in (0,1)$, então Σ^n está contido em um slice de $\overline{M}$.

Demonstração. Por hipótese, Θ não muda de sinal. Então podemos escolher o campo normal N de modo que $\Theta > 0$. Como $\rho > 0$ é côncava, podemos garantir que

$$\frac{1}{\rho}\widetilde{\mathrm{Hess}}\rho(N^*, N^*) \leq 0.$$

Como $\widetilde{\Delta}_f\rho \leq 0$, temos

$$-\Theta^2\frac{\widetilde{\Delta}_f\rho}{\rho^3} \geq 0.$$

Lembremos que a afirmação $\widetilde{\mathrm{Ric}}_f \geq -\kappa$ deve ser entendida no contexto de formas quadráticas, ou seja, $\widetilde{\mathrm{Ric}}_f(v,v) \geq -\kappa\langle v, v\rangle$. Logo, da hipótese,

$$\widetilde{\mathrm{Ric}}_f(N^*, N^*) \geq -\kappa|N^*|^2.$$

Mas então aplicando o Lema 2.1 e levando em conta o que obtivemos acima temos

$$\begin{aligned}
\Delta_f\Theta &= -\left(\widetilde{\mathrm{Ric}}_f(N^*, N^*) - \frac{1}{\rho}\widetilde{\mathrm{Hess}}\rho(N^*, N^*) - \Theta^2\frac{\widetilde{\Delta}_f\rho}{\rho^3} + |A|^2\right)\Theta \\
&\leq (\kappa|N^*|^2 - |A|^2)\Theta \\
&\leq (\kappa\rho^2|\nabla h|^2 - |A|^2)\Theta \\
&\leq (\alpha|A|^2 - |A|^2)\Theta = (\alpha - 1)|A|^2\Theta.
\end{aligned}$$

onde na penúltima desigualdade usamos o item (c) da Proposição 2.1 e na última usamos a hipótese (2.32). Da última desigualdade acima e como $\alpha - 1 < 0$, concluímos que $\Delta_f\Theta \leq 0$ em Σ^n e, como esta é $f-$parabólica, Θ deve ser constante. Mas então

$$0 = \Delta_f\Theta \leq (\alpha - 1)|A|^2\Theta,$$

e assim $|A|^2 = 0$. Pela hipótese (2.32), $\nabla h = 0$, e portanto a função altura em Σ^n é constante, mostrando assim que ela está contida em um slice de $\overline{M}$. □

O teorema a seguir contempla o caso $\kappa = 0$. Observe que agora não precisamos fazer estimativas sobre $|\nabla h|$.

Teorema 2.2. *Seja $\overline{M} = \mathbb{P}_f \times_\rho \mathbb{R}$ um produto warped de Killing com densidade tal que $\widetilde{\mathrm{Ric}}_f \geq 0$ e ρ uma função côncava tal que $\widetilde{\Delta}_f \rho \leq 0$. Seja $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}$ uma hipersuperfície $f-$parabólica two-sided com curvatura $f-$média constante cuja função ângulo Θ tem sinal estrito. Então Σ^n é totalmente geodésica. Além disso, se $\widetilde{\mathrm{Ric}}_f > 0$, então Σ^n está contida em um slice de $\overline{M}$.*

Demonstração. Da mesma forma que no teorema anterior, podemos escolher N de modo que Θ seja uma função positiva em Σ^n. Como ρ é côncava e $\widetilde{\Delta}_f \rho \leq 0$, podemos garantir que

$$\frac{1}{\rho}\widetilde{\mathrm{Hess}}\rho(N^*, N^*) \leq 0 \quad \text{ e } \quad -\Theta^2 \frac{\widetilde{\Delta}_f \rho}{\rho^3} \geq 0,$$

em $\mathbb{P}$. Como por hipótese temos $\widetilde{\mathrm{Ric}}_f \geq 0$, podemos agora voltar ao Lema 2.1 e escrever

$$\Delta_f \Theta \leq -(\widetilde{\mathrm{Ric}}_f(N^*, N^*) + |A|^2)\Theta \leq 0. \tag{2.33}$$

Pela $f-$parabolicidade de Σ^n, Θ deve ser constante em Σ^n. Retornando a (2.33), nós temos $\widetilde{\mathrm{Ric}}_f(N^*, N^*) = |A|^2 = 0$, logo Σ^n é totalmente geodésica. Além disso, se $\widetilde{\mathrm{Ric}}_f > 0$, então concluímos que $N^* = 0$, logo $|\nabla h| = 0$, pela proposição 2.1 item (c), e portanto h é constante e Σ^n está contida em um slice. □

Para o próximo teorema, adotaremos a seguinte terminologia estabelecida na literatura. Uma variedade com densidade Σ_f é dita $\mathcal{L}^1_f-$Liouville quando toda função superharmônica (isto é, com $f-$laplaciano ≤ 0) não-negativa $u \in \mathcal{L}^1_f(\Sigma)$ é constante, onde

$$\mathcal{L}^1_f(\Sigma) = \left\{ u : \Sigma^n \to \mathbb{R}; \int_\Sigma u e^{-f} d\Sigma < +\infty \right\}. \tag{2.34}$$

Teorema 2.3. *Seja $\overline{M} = \mathbb{P}_f \times_\rho \mathbb{R}$ um produto warped de Killing com densidade tal que $\widetilde{\mathrm{Ric}}_f \geq -\kappa$, para alguma constante κ, sendo ρ uma função côncava tal que $\widetilde{\Delta}_f \rho \leq 0$. Seja $\psi : \Sigma^n \to \overline{M}$ uma hipersuperfície $\mathcal{L}^1_f-$Liouville com curvatura $f-$média constante e com a função ângulo Θ tendo sinal estrito e tal que $\Theta \in \mathcal{L}^1_f(\Sigma)$.*

(a) *Se $\kappa = 0$, então Σ^n é totalmente geodésica. Além disso, se $|\nabla h| \leq \alpha |A|^\beta$ para algumas constantes positivas α e β, então Σ^n está contida em um slice de $\overline{M}$.*

(b) *Se $\kappa > 0$ e*

$$|\nabla h|^2 \leq \frac{\alpha}{\kappa \rho^2}|A|^2, \tag{2.35}$$

para alguma constante $\alpha \in (0,1)$ então Σ^n está contida em um slice de $\overline{M}$.

(c) *Se $\kappa < 0$, então Σ^n está contida em um slice de $\overline{M}$.*

Demonstração. Escolhendo N apropriadamente, podemos fazer com que $\Theta > 0$. Então:

(a) Da mesma forma que nos dois Teoremas acima, temos

$$\Delta_f \Theta \leq -(\widetilde{\mathrm{Ric}}_f(N^*, N^*) + |A|^2)\Theta. \tag{2.36}$$

Da hipótese $\widetilde{\mathrm{Ric}} f \geq 0$, (2.36) mostra que $\Delta_f \Theta \leq 0$. Como $\Theta \in \mathfrak{L}^1(\Sigma)$ e Σ é $\mathfrak{L}^1_f$−Liouville, concluímos que Θ é constante. Portanto,

$$0 = \Delta_f \Theta \leq -(\widetilde{\mathrm{Ric}}_f(N^*, N^*) + |A|^2)\Theta \leq 0, \tag{2.37}$$

e daí $\widetilde{\mathrm{Ric}}_f(N^*, N^*) = |A|^2 = 0$. Portanto, Σ^n é totalmente geodésica. Se $|\nabla h| \leq \alpha |A|^\beta$, então $|\nabla h| = 0$ e assim h será constante, mostrando que Σ^n está contida em um *slice*.

(b) Como

$$\widetilde{\mathrm{Ric}}_f(N^*, N^*) \geq -\kappa \langle N^*, N^* \rangle = -\kappa \rho^2 |\nabla h|^2,$$

obtemos de (2.36) e da hipótese que

$$\begin{aligned} \Delta_f \Theta &\leq (\kappa \rho^2 |\nabla h|^2 - |A|^2)\Theta \\ &\leq (\alpha |A|^2 - |A|^2)\Theta \\ &\leq (\alpha - 1)|A|^2 \Theta \leq 0. \end{aligned}$$

Pelo mesmo motivo quem em (a), Θ será constante e $|A|^2 = 0$, logo $|\nabla h|^2 = 0$ e portanto h é constante. Segue que Σ^n está contida em um *slice*.

(c) De (2.36), como $\kappa < 0$, temos

$$\begin{aligned} \Delta_f \Theta &\leq (\kappa |N^*|^2 - |A|^2)\Theta \\ &= (\kappa \rho^2 |\nabla h|^2 - |A|^2)\Theta \leq 0. \end{aligned}$$

Analogamente a (b) e (a), Θ será constante, assim

$$\begin{aligned} 0 = \Delta_f \Theta &\leq (\kappa \rho^2 |\nabla h|^2 - |A|^2)\Theta \leq 0 \\ &\Rightarrow \kappa \rho^2 |\nabla h|^2 - |A|^2 = 0 \\ &\Rightarrow |A|^2 = |\nabla h|^2 = 0, \end{aligned}$$

logo Σ^n está contida em um *slice*.

□

Observação 2.1. *Observe que nos dois primeiros teoremas acima podemos concluir que* ρ *é constante. De fato,* $\rho > 0$ *e nos três teorema existe a hipótese* $\Delta_f \rho \leq 0$. *Como* Σ *é um slice* $\mathbb{P} \times \{t_0\}$, *concluímos nos Teoremas 2.1 e 2.2 que* $\mathbb{P}$ *é* $f-$ *parabólica, logo* ρ *é constante nestes casos.*

Observação 2.2. *A hipótese feita nos teoremas acima de a função ângulo* Θ *não mudar de sinal é uma condição necessária, pois em um slice* $\mathbb{P} \times \{c\}$, *o vetor normal é* $N = \partial_t$ *e assim* $\Theta = \langle N, \partial_t \rangle = \langle \partial_t, \partial_t \rangle = \rho^2 > 0$. *Logo, se* Θ *mudasse de sinal, então não haveria como* Σ^n *ser slice.*

Observação 2.3. *Ser totalmente geodésica é uma condição mais fraca que ser um slice. Por exemplo, tomando uma geodésica* $\Gamma \in \mathbb{H}^2$ *no plano hiperbólico* $\mathbb{H}^2$ *(no modelo do semiplano, por exemplo), vemos que* $\Gamma \times \mathbb{R}$ *é totalmente geodésica em* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, *embora não necessariamente seja um slice.*

Capítulo 3

Resultados de rigidez via restrições na função altura

3.1 Resultados tipo-Liouville com hipóteses sobre h

Nesta seção, vamos inicialmente apresentar a demonstração de uma fórmula para o laplaciano da função altura h de uma hipersuperfície two-sided imersa em $\mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R}$.

Lema 3.1. *Seja Σ^n uma hipersuperfície two-sided imersa em $\overline{M} = \mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R}$. Então*

$$\Delta h = n\mathrm{H}_\rho \rho^{-2}\Theta,$$

onde $n\mathrm{H}_\rho = n\mathrm{H} + 2\langle \overline{\nabla} \log \rho, N\rangle$.

Demonstração. Lembrando que $\mathrm{div}Y = 0$, veja que

$$\begin{aligned}
\rho^{-2}\Delta h = \rho^{-2}\mathrm{div}(\nabla h) &= \rho^{-2}\mathrm{div}(\rho^{-2}Y^\top) \\
&= \rho^{-2}(\rho^{-2}\mathrm{div}Y^\top + \langle \nabla \rho^{-2}, Y^\top\rangle) \\
&= \rho^{-2}(\rho^{-2}\mathrm{div}(Y - \Theta N) + \langle \nabla \rho^{-2}, Y^\top\rangle) \\
&= \rho^{-4}(\mathrm{div}Y - \mathrm{div}(\Theta N)) + \rho^{-2}\langle \nabla \rho^{-2}, Y^\top \\
&= -\rho^{-4}\Theta\mathrm{div}N - \rho^{-4}\langle \nabla\Theta, N\rangle + \rho^{-2}\langle \nabla \rho^{-2}, Y^\top\rangle \\
&= \rho^{-4}nH + \rho^{-2}\langle \nabla \rho^{-2}, Y^\top\rangle \\
&= \rho^{-4}\Theta n\mathrm{H} + \langle \nabla \rho^{-2}, \nabla h\rangle.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\Delta h &= \rho^{-2}\Theta n\mathrm{H} + \langle \rho^2 \nabla \rho^{-2}, \nabla h\rangle \\
&= \rho^{-2}\Theta n\mathrm{H} + \langle \nabla \log \rho^{-2}, \nabla h\rangle \\
&= \rho^{-2}\Theta n\mathrm{H} + \langle \overline{\nabla} \log \rho^{-2}, \rho^{-2} Y^{\top}\rangle \\
&= \rho^{-2}\Theta n\mathrm{H} + \rho^{-2}\langle \overline{\nabla} \log \rho^{-2}, Y^{\top}\rangle \\
&= \rho^{-2}\Theta n\mathrm{H} + \rho^{-2}\langle \overline{\nabla} \log \rho^{-2}, Y - \Theta N\rangle \\
&= \rho^{-2}\Theta n\mathrm{H} - \rho^{-2}\Theta\langle \overline{\nabla} \log \rho^{-2}, N\rangle \\
&= \rho^{-2}\Theta(n\mathrm{H} - \langle \overline{\nabla} \log \rho^{-2}, N\rangle) \\
&= \rho^{-2}\Theta(n\mathrm{H} + 2\langle \overline{\nabla} \log \rho, N\rangle) \\
&= \rho^{-2}\Theta n\mathrm{H}_\rho.
\end{aligned}$$

No argumento anterior, usamos o fato de $\rho : \mathbb{P} \to \mathbb{R}$ não depender do parâmetro $t \in \mathbb{R}$, logo $\overline{\nabla} \log \rho^{-2} \in T\mathbb{P}$, e assim $\langle \overline{\nabla} \log \rho^{-2}, Y\rangle = 0$. □

No que segue, consideraremos o espaço das funções integráveis a Lebesgue definido numa variedade Riemanniana Σ^n

$$\mathcal{L}^p(\Sigma) = \left\{ u : \Sigma^n \to \mathbb{R}; \int_{\Sigma^n} |u|^p d\Sigma < +\infty \right\}.$$

Acima, $d\Sigma$ é a *elemento de volume* de Σ^n. Além disso, o volume de Σ^n é dado por $\int_\Sigma d\Sigma$, podendo ser infinito. Para estabelecer o próximo teorema, precisaremos dos seguintes resultados clássicos, ambos encontrados no trabalho de Yau [12].

Lema 3.2. *Seja $u \geq 0$ uma função subharmônica em uma variedade Riemanniana Σ^n completa. Se $u \in \mathcal{L}^p(\Sigma)$ para algum $p > 1$, então u é constante em Σ^n.*

Lema 3.3. *Toda variedade Riemanniana completa não-compacta com curvatura de Ricci não-negativa tem volume infinito.*

Podemos agora enunciar e apresentar a prova do próximo resultado destas notas.

Teorema 3.1. *Seja Σ^n uma hipersuperfície two-sided, completa, imersa em $\mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R}$. Suponha que H_ρ e Θ tenham o mesmo sinal. Se a função altura h é não-negativa e $h \in \mathcal{L}^q(\Sigma)$ para algum $q > 1$, então Σ^n é um slice. Além disso, se $\widetilde{\mathrm{Ric}} \geq 0$ e h for positiva, então $\mathbb{P}$ deve ser compacta.*

Demonstração. Pela hipótese, $\mathrm{H}_\rho \Theta \geq 0$, logo o Lema 3.1 garante que $\Delta h \geq 0$. Como $h \geq 0$ e $h \in \mathcal{L}^q(\Sigma)$ para algum $q > 1$, o Lema 3.2 nos assegura que h é uma função constante e isto significa que Σ^n é um slice $\mathbb{P} \times \{c\} \subset \mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R}$.

Se $\widetilde{\mathrm{Ric}} \geq 0$ e $h > 0$, então

$$|h|^q \mathrm{vol}\Sigma = |h|^q \int_\Sigma d\Sigma = \int_\Sigma |h|^q d\Sigma < +\infty$$

e assim o volume de Σ^n é finito. Pelo Lema 3.3, $\Sigma^n = \mathbb{P} \times \{c\}$ deve necessariamente ser uma variedade compacta. $\square$

Para apresentar a prova do próximo resultado, precisaremos da seguinte extensão de um teorema devido a Hopf e que obtida por Yau em [12].

Lema 3.4. *Seja $u : \Sigma^n \to \mathbb{R}$ uma função suave em uma variedade Riemanniana Σ^n completa cujo laplaciano Δu não muda de sinal em Σ^n. Se $|\nabla u| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$, então Δu é identicamente nulo em Σ^n.*

Observação 3.1. *O resultado acima foi generalizado por Caminha et. al. em [2] da seguinte maneira:* Seja M uma variedade Riemanniana $n-$dimensional completa, não-compacta e orientada, e $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $\mathrm{div}X$ não muda de sinal em M. Se $|X| \in \mathcal{L}^1(M)$, então $\mathrm{div}X = 0$ em M.

Para os próximos resultados, consideraremos hipersuperfícies completas imersas em um slab $\mathbb{P} \times [a, b]$ de $\mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R}$, onde $[a, b]$ é um intervalo da reta.

Teorema 3.2. *Seja Σ^n uma hipersuperfície two-sided, completa, imersa em $\mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R}$ e contida em um slab desta variedade. Suponha que H_ρ e Θ não mudam de sinal em Σ^n. Se $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$, então Σ^n é um slice de $\mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R}$.*

Demonstração. Pelo Lema 3.1, segue que $\Delta h = n\mathrm{H}_\rho \rho^{-2}\Theta \geq 0$, pois da hipótese, temos $\mathrm{H}_\rho\Theta \geq 0$. Como $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$, o Lema 3.4 garante que Δh é identicamente nulo em Σ^n. Observe agora que

$$\begin{aligned} \Delta(h^2) &= 2h\Delta h + 2\langle \nabla h, \nabla h \rangle \\ &= 2|\nabla h|^2 \geq 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Como Σ^n está contida num slab, a função altura h é limitada, digamos $|h| \leq b$, com $b \in \mathbb{R}$ positivo. Portanto, observando que $|\nabla(h^2)| = 2|h||\nabla h|$, segue que

$$\int_\Sigma |\nabla(h^2)| d\Sigma = \int_\Sigma 2|h||\nabla h| d\Sigma \leq 2b \int_\Sigma |\nabla h| d\Sigma < +\infty, \tag{3.2}$$

pois $|\nabla h| \in \mathfrak{L}^1(\Sigma)$. Portanto, de (3.2), concluímos que $|\nabla(h^2)| \in \mathfrak{L}^1(\Sigma)$, e usando o Lema 3.4 novamente, obtemos que $\Delta(h^2) = 0$. Segue de (3.1) que $|\nabla h|^2 = 0$ e portanto h é constante, logo Σ^n está contida em um slice. Como Σ^n é completa, ela é não-estendível, e portanto deve ser um slice de $\mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R}$. □

O corolário abaixo segue imediatamente do Teorema 3.2.

Corolário 3.1. *Seja Σ^n uma hipersuperfície two-sided completa, que está contida em um slab de $\mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R}$. Suponha que H_ρ e Θ não mudam de sinal Σ^n. Se Σ^n é parabólica, então Σ^n é um slice de $\mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R}$.*

Observação 3.2. *Parabolicidade significa que toda função $u : \Sigma^n \to \mathbb{R}$ limitada inferiormente suave com $\Delta u \leq 0$ deve ser constante. A demonstração do corolário é imediata, pois h é limitada e $\Delta(-h) \leq 0$,*

3.2 Gráficos de Killing inteiros

Seja $\overline{M}$ é uma variedade Riemanniana $(n+1)-$dimensional, $Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ é um campo de Killing cuja distribuição ortogonal é integrável (nas mesmas condições da seção 1 do Capítulo 2 deste texto) e $\mathbb{P}$ é uma folha integral deste distribuição. Dada $u : \mathbb{P} \to \mathbb{R}$ é suave, de acordo com [3], a hipersuperfície

$$\Sigma(u) = \{\Psi(u(x), x); x \in \mathbb{P}\} \subset \overline{M}$$

é chamada de *gráfico de Killing inteiro* associada a função $u \in C^\infty(\mathbb{P})$.

Da mesma maneira que fizemos no capítulo 2, não trabalharemos com $\Sigma(u)$ da maneira definida acima. Na realidade, consideraremos o produto warped $\mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R}$ em vez de $\overline{M}$, o campo ∂_t em vez de Y, e dada $u : \mathbb{P} \to \mathbb{R}$ suave, $\Sigma(u)$ será simplesmente

$$\Sigma(u) = \{(x, u(x)) \in \mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R}; x \in \mathbb{P}\}. \tag{3.3}$$

Observamos que a situação em (3.3) é análoga a de um gráfico em $\mathbb{R}^{n+1}$ de uma função suave $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Por isso, faremos o exemplo abaixo para motivar o cálculo da métrica Riemanniana de (3.3).

Exemplo 3.1. *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ suave e $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ o seu gráfico, isto é, o conjunto*

$$G = \left\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1}; x \in \mathbb{R}^n\right\}.$$

Vamos calcular a primeira forma fundamental de G, *ou seja, sua métrica Riemanniana. A função* $F : \mathbb{R}^n \to G$ *dada por* $F(x) = (x, f(x))$ *é um sistema de coordenadas global em* G. *A diferencial de* F *em* $x \in \mathbb{R}^n$ *é*

$$dF_x(v) = (v, df_x(v)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

Logo, dados $v, w \in T_{F(x)}G$, *temos* $v = dF_x(v_0)$ *e* $w = dF_x(w_0)$, *para alguns* $v_0, w_0 \in T_x\mathbb{R}^n$. *Então*

$$\begin{aligned}\langle v, w\rangle_G &= \langle dF_x(v_0), dF_x(w_0)\rangle_G \\ &= \langle (v_0, df_x(v_0)), (w_0, df_x(w_0)\rangle_G \\ &= \langle v_0, w_0\rangle_{\mathbb{R}^n} + df_x(v_0)df_x(w_0).\end{aligned} \tag{3.5}$$

Motivados pelo exemplo acima, seja $F : \mathbb{P} \to \Sigma(u)$ dada por $F(x) = (x, u(x))$. Mostremos primeiro que F é um difeomorfismo. De fato, F é por definição de $\Sigma(u)$ uma função sobrejetiva e injetiva. A inversa de F é a projeção $F^{-1}(x,t) = x$, com $(x,t) \in \Sigma(u)$. Como F e a projeção são suaves, ela é difeomorfismo. Portanto, dados $v, w \in T_{F(x)}\Sigma(u)$, existem $v_0, w_0 \in T_x\mathbb{P}$ tais que $v = dF_x(v_0) = (v_0, du_x(v_0))$ e $w = dF_x(w_0) = (w_0, du_x(w_0))$. Então

$$\begin{aligned}\langle v, w\rangle_{\Sigma(u)} &= \langle dF_x(v_0), dF_x(w_0)\rangle_{\mathbb{P}\times_\rho\mathbb{R}} \\ &= \langle v_0, w_0\rangle_{\mathbb{P}} + \rho^2(x)du_x(v_0)du_x(w_0).\end{aligned}$$

Podemos, com um abuso de notação, dizer que a métrica Riemanniana em $\Sigma(u)$ é dada por

$$\langle , \rangle_\Sigma = \langle , \rangle_{\mathbb{P}} + \rho^2 du^2.$$

No exemplo 3.1, uma pergunta natural é a seguinte: em que condições podemos garantir que f é constante, isto é, que $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é um hiperplano? Uma resposta a esta pergunta foi dada por Bernstein, supondo que a curvatura média de G é constante.

Da mesma forma, existe a pergunta: em que condições $u : \mathbb{P} \to \mathbb{R}$ é constante, ou seja, $\Sigma(u)$ é um slice? Uma resposta é dada no Teorema 3.3. Antes de enunciá-lo, precisamos calcular o campo N, normal unitário a $\Sigma(u)$, e a função ângulo $\Theta = \langle \partial_t, N\rangle_{\Sigma(u)}$.

Dado um vetor X tangente a $\mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R}$, escreva $X = X^* + \lambda\partial_t$, com X^* tangente a $\mathbb{P}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então

$$\langle X, \partial_t\rangle = \langle X^*, \partial_t\rangle + \rho^2\lambda\langle X, \partial_t\rangle = \rho^2\lambda, \tag{3.6}$$

logo

$$\lambda = \frac{1}{\rho^2}\langle X, \partial_t\rangle.$$

Se $g : \mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função $g(x,t) = t - u(x)$, então

$$\begin{aligned} Xg &= X^*g + \frac{1}{\rho^2}\langle X, \partial_t\rangle \partial_t g \\ &= X^*g + \frac{1}{\rho^2}\langle X, \partial_t\rangle \\ &= -du(X^*) + \frac{1}{\rho^2}\langle X, \partial_t\rangle \\ &= \langle -\widetilde{\nabla} u, X\rangle + \frac{1}{\rho^2}\langle X, \partial_t\rangle \\ &= \langle -\widetilde{\nabla} u + \frac{1}{\rho^2}\partial_t, X\rangle. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Isto mostra que $\overline{\nabla} g = -\widetilde{\nabla} u + \frac{1}{\rho^2}\partial_t$, e como $\Sigma(u) = g^{-1}(0)$, o vetor normal unitário a $\Sigma(u)$, pela Proposição 1.14, é

$$N = \frac{\overline{\nabla} g}{|\overline{\nabla} g|}.$$

Mas, observe que

$$\begin{aligned} |\overline{\nabla} g|^2 &= |\widetilde{\nabla} u|^2 + |\frac{1}{\rho^2}\partial_t|^2 \\ &= |\widetilde{\nabla} u|^2 + \frac{1}{\rho^4}\rho^2 \\ &= |\widetilde{\nabla} u|^2 + \frac{1}{\rho^2} \\ &= \frac{\rho^2|\widetilde{\nabla} u|^2 + 1}{\rho^2}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

e como $\widetilde{\nabla} u \perp \partial_t$, segue que

$$N = \frac{\rho}{\left(1 + \rho^2|\widetilde{\nabla} u|^2\right)^{1/2}}(-\widetilde{\nabla} u + \frac{1}{\rho^2}\partial_t), \tag{3.9}$$

logo

$$N^* = \frac{\rho}{\left(1 + \rho^2|\widetilde{\nabla} u|^2\right)^{1/2}}(-\widetilde{\nabla} u) \tag{3.10}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \Theta &= \langle N, \partial_t\rangle \\ &= \rho^2 \frac{\rho}{\left(1 + \rho^2|\widetilde{\nabla}|^2\right)^{1/2}} \frac{1}{\rho^2} \\ &= \frac{\rho}{\left(1 + \rho^2|\widetilde{\nabla}|^2\right)^{1/2}} > 0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

O resultado a seguir é uma consequência do Teorema 3.2 para gráficos de Killing inteiros.

Teorema 3.3. *Seja $\Sigma(u)$ um gráfico de Killing inteiro que está contido em um slab de $\mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R}$, cuja base $\mathbb{P}$ é completa. Suponha que H_ρ e Θ não mudam de sinal em $\Sigma(u)$. Se $|\widetilde{\nabla} u| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$, então $\Sigma(u)$ é um slice de $\mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja X um vetor tangente a $\Sigma(u)$. Utilizando a função $F(x) = (x, u(x))$ vista acima, temos

$$\begin{aligned}\langle X, X\rangle_\Sigma &= \langle X_0, X_0\rangle_{\mathbb{P}} + \frac{1}{\rho^2} du(X_0)^2 \\ &\geq \langle X_0, X_0\rangle_{\mathbb{P}},\end{aligned}$$

onde $X = dF(X_0)$. Isto implica que, dada uma curva γ em $\Sigma(u)$, teremos

$$L(\gamma) \geq L(\gamma_0), \tag{3.12}$$

onde γ_0 é a curva em $\mathbb{P}$ tal que $F \circ \gamma_0 = \gamma$. Por outro lado, dada uma curva divergente $\gamma : [0, +\infty) \to \Sigma(u)$, a curva $\gamma_0 : [0, +\infty) \to \mathbb{P}$ também é divergente, pois F é difeomorfismo. Como $\mathbb{P}$ é completa, a Proposição 1.16 mostra que $L(\gamma_0) = +\infty$. Por (3.12), concluímos que $\Sigma(u)$ é completa, pois $L(\gamma) = +\infty$. Agora, note que

$$\begin{aligned}|\nabla h|^2 = \frac{1}{\rho^2}|N^*|^2 &= \frac{1}{\rho^2}\frac{\rho^2}{1+\rho^2|\widetilde{\nabla} u|^2}|\widetilde{\nabla} u|^2 \\ &= \frac{|\widetilde{\nabla} u|^2}{1+\rho^2|\widetilde{\nabla} u|^2} \leq |\widetilde{\nabla} u|^2.\end{aligned}$$

Como $|\widetilde{\nabla} u| \in \mathfrak{L}^1(\mathbb{P})$, pelo Teorema 3.2, u deve ser constante, logo h também é constante, e portanto $\Sigma(u)$ deve ser um slice de $\mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R}$. $\square$

3.3 Variedades estocasticamente completas

Esta seção tem como objetivo provar um teorema tipo-Liouville para variedades *estocasticamente completas*. Uma definição usual deste objeto geométrico é a seguinte, encontrada em Lima et. al. [4]: uma variedade Riemanniana Σ^n é dita estocasticamente completa se, para algum (e, portanto, para qualquer) $(x, t) \in \Sigma^n \times (0, +\infty)$, o núcleo do calor $p(x, y, t)$ do operador de Laplace-Beltrami Δ satisfaz a propriedade de conservação

$$\int_\Sigma p(x, y, t) d\mu(y) = 1.$$

Não vamos trabalhar com esta definição, pois ela exigiria uma série de conceitos que fogem ao escopo deste trabalho.

No entanto, é sabido que uma variedade Σ^n é estocasticamente completa se, e somente se, vale uma versão mais fraca do conhecido princípio do máximo de Omori-Yau, que foi estabelecido por Pigola et. al em [8]. Sumarizamos este resultado no Lema abaixo.

Lema 3.5. *Uma variedade Riemanniana Σ^n é estocasticamente completa se, e somente se, para toda função $u \in C^2(\Sigma)$ satisfazendo $\sup_\Sigma u < +\infty$, existe uma sequência de pontos $\{p_j\}$ em Σ^n tal que*

$$\lim_{j\to+\infty} u(p_j) = \sup_\Sigma u \quad \text{e} \quad \limsup_\Sigma \Delta u(p_j) \leq 0.$$

Segue imediatamente do lema 3.5 que Σ^n é estocasticamente completa se, e somente se, para toda $u \in C^2(\Sigma)$ com $\inf\limits_\Sigma u > -\infty$, existe uma sequência $\{p_j\}$ em Σ^n tal que

$$\lim_{j\to+\infty} u(p_j) = \inf_\Sigma u \quad \text{e} \quad \liminf_{j\to+\infty} \Delta u(p_j) \geq 0.$$

Precisaremos também do seguinte resultado devido a Yau [11].

Lema 3.6. *Toda função harmônica positiva definida em uma variedade Riemanniana $n-$dimensional $(n \geq 2)$ completa Σ^n com $\mathrm{Ric} \geq 0$ é constante.*

Agora, estamos em condições de apresentar o último resultado dessa dissertação que estabelece o seguinte:

Teorema 3.4. *Seja Σ^n uma hipersuperfície two-sided que está contida em um slab de $\mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R}$. Se H_ρ é constante e Θ é não-negativa, então Σ^n é $\rho-$mínima, isto é, $\mathrm{H}_\rho = 0$ em Σ^n. Se, além disso, Σ^n é completa com $\mathrm{Ric} \geq 0$, então ela é um slice de $\mathbb{P} \times_\rho \mathbb{R}$.*

Demonstração. Inicialmente, observamos que do Lema 3.1 segue que

$$\Delta h = n\mathrm{H}_\rho \rho^{-2}\Theta. \tag{3.13}$$

Suponha primeiro que $\mathrm{H}_\rho \geq 0$. Levando em conta que h é limitada e Σ^n é estocasticamente completa, o Lema 3.5 garante a existência de uma sequência $\{p_j\}$ em Σ^n satisfazendo

$$\lim_{j\to+\infty} h(p_j) = \sup_\Sigma h \quad \text{e} \quad \limsup_\Sigma \Delta h(p_j) \leq 0.$$

Consequentemente, como a função ângulo Θ é não-negativa, segue do fato anterior que

$$0 \geq \limsup \Delta h(p_j) = n\mathrm{H}_\rho \limsup \rho^{-2}(p_j)\Theta(p_j) \geq 0.$$

Portanto, $\mathrm{H}_\rho = 0$ e com isto Σ^n é ρ-mínima. Agora, supondo que que $\mathrm{H}_\rho \leq 0$, aplicamos novamente o Lema 3.5 para encontrar uma sequência $\{p_j\}$ em Σ^n tal que

$$\begin{aligned} 0 \leq \liminf \Delta h(p_j) &= n\mathrm{H}_\rho \liminf \rho^{-2}(p_j)\Theta(p_j) \\ &= -\mathrm{H}_\rho \limsup \left[-\rho^{-2}(p_j)\Theta(p_j)\right] \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

e, desse modo, concluimos novamente que $\mathrm{H}_\rho = 0$. Pela igualdade em (3.13), segue que h é uma função harmônica. Como h é limitada, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $h - c > 0$. Se Σ^n é completa e $\mathrm{Ric} \geq 0$, então h é constante pelo Lema 3.6. Portanto, Σ^n é um slice. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Barbosa, J.L.M., do Carmo, M., Eschenburg, J. - *Stability of hypersurfaces with constant mean curvature.* Math. Z. 197, 123-138, 1988.

[2] Caminha, A., Sousa, P., Camargo, F. - *Complete foliations of space forms by hypersurfaces.* Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series, 41(3), 339-353, 2010.

[3] Dajczer, M., de Lira, J.H. - *Entire bounded constant mean curvature Killing graphs.* J. Math. Pures Appl. 103, 219?227, 2015.

[4] de Lima, H. F., Lima, E., Medeiros, A., Santos, M. S. - *Liouville type results for two-sided hypersurfaces in weighted Killing warped products.* Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series, 49(1), 43-55, 2018.

[5] do Carmo, M. P. - *Geometria Riemanniana.* Projeto Euclides - IMPA, 2005.

[6] Gromov, M. - *Isoperimetry of waists and concentration of maps.* Geom. Funct. Anal. 13, 178-215, 2003.

[7] O'Neill, B. - *Semi-riemannian Geometry with applications to relativity.* Academic Press, London, 1983.

[8] Pigola, S., Rigoli, M., Setti, A.G. - *A remark on the maximum principle and stochastic completeness.* Proc. Am.Math.Soc. 131, 1283?1288, 2003.

[9] Pigola, S., Rigoli, M., Setti, A.G. - *Maximum principles on Riemannian manifolds and applications.* Mem. Am.Math.Soc. 174, 822, 2005.

[10] Spivak, M. - *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry vol. 1.* Publish or Perish, Houston, 1999.

[11] Yau, S.T. - *Harmonic functions on complete Riemannian manifolds.* Comm. Pure Appl. Math. 28, 201-228, 1975.

[12] Yau, S.T. - *Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifolds and their applications to geometry.* Indiana Univ. Math. J. 25, 659-670, 1976.