Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sistemas Iterados de Funções $\mathbb{P}$-fracamente Hiperbólicos

Raimundo Bruno Gomes da Silva

Teresina, PI.
2020

Raimundo Bruno Gomes da Silva

Dissertação de Mestrado:

Sistemas Iterados de Funções $\mathbb{P}$-fracamente Hiperbólicos

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Ítalo Dowell Lira Melo.

Teresina - 2020

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Sistemas iterados de funções $\mathbb{P}$-fracamente hiperbólicos

Raimundo Bruno Gomes da Silva

Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 11 de Fevereiro de 2020.

Banca Examinadora:

Ítalo Dowell Lira Melo

Prof. Dr. Ítalo Dowell Lira Melo - Orientador

[illegible]

Prof. Dr. Gleison do Nascimento Santos (UFPI)

Sergio Romaña I.

Prof. Dr. Sergio Augusto Romaña Ibarra (UFRJ)

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí - UFPI
Serviço de Processamento Técnico
Biblioteca Setorial do CCN

S586s Silva, Raimundo Bruno Gomes da.
Sistemas interados de funções $\mathbb{P}$-fracamente hiperbólicos / Raimundo Bruno Gomes da Silva. – Teresina, 2020.
51 f.:il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática, 2020.
Orientador: Prof. Dr. Ítalo Dowell Lira Melo.

1. Sistemas Dinâmicos - Matemática. 2. Teoria Ergódica. I. Título.

CDD 531.322

Bibliotecária : Caryne Maria da Silva Gomes / CRB3-1461

À minha família e amigos.

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a minha família, meus pais e minhas irmãs, por todo o suporte e por nunca deixar de acreditar em mim, mesmo com todas as dificuldades que passamos nunca me deixaram desistir, sempre enxergaram o meu melhor. Devo a vocês a conquista de mais essa etapa na minha carreira.

Ao Professor Marcos Vinícius Travaglia, pela confiança em mim ao me iniciar na carreira cientifica ainda quando calouro em 2014, por ter me orientado ao longo de toda a etapa da minha graduação, seus ensinamentos foram imprescindíveis na minha carreira acadêmica, corroborando no que viria ser esse trabalho.

Ao Professor Ítalo Dowell Lira Melo, pela receptividade ao me orientar no atual trabalho, todas as horas de demonstrações e conversas foram de suma importância na minha formação e nos resultados dessa pesquisa. A todos os professores e professoras do departamento de matemática, por cada disciplina, cada palavra de apoio e incentivo.

Aos meus amigos e amigas do departamento de matemática da UFPI, tenho enorme apreço por todos que se fizeram presente ao longo desses seis anos, muitas memórias de ótimas risadas e noites de estudos sem dormir.

Aos funcionários da UFPI em todas as escalas, que cuidam e fazem essa instituição funcionar, principalmente funcionário terceirizados que mesmo com os habituais atrasos salariais de meses, não faltam com zelo à suas atividades.

Sem sombra de duvidas devo agradecer ao ex-presidente Lula e a ex-presidente Dilma, suas gestões foram a base da mudança social da minha vida e de minha família. Se hoje estou concluindo essa etapa foi por contar com projetos sociais da gestão de Lula na minha alfabetização, que tirou não só minha família mais tantas outras da linha da fome, com suas ações conseguimos conquistar o lugar no mundo que temos hoje. Com os projetos de expansão do ensino de Dilma as portas do ensino superior se abriram para mim e minhas irmãs.

Agradeço a CAPES, ao CNPq, a FAPEPI pelo apoio financeiro.

"As matemáticas têm invenções sutilíssimas e servirão de muito, não apenas para satisfazer os curiosos como para tornar mais fáceis todas as artes e diminuir o trabalhos dos homens".

René Descartes.

Resumo

Neste trabalho, descrevemos resultados obtidos por Ítalo Melo em 2017, consideramos o conceito de um sistema iterado de funções $\mathbb{P}$-fracamente hiperbólico que generaliza o conceito de um sistema iterado de funções fracamente hiperbólico. Provamos a existência e unicidade da medida invariante para esta classe de sistemas iterados de funções. Além disso, provamos um teorema ergódico.

Abstract

In this work, we describe results obtained by Ítalo Melo in 2017, we consider the concept of $\mathbb{P}$-weakly hyperbolic iterated function systems that generalizes the concept of weakly hyperbolic iterated function systems. We prove the existence and uniqueness of the invariant measure for this class of iterated function systems. Furthermore, we prove an ergodic theorem.

Sumário

Introdução

Um sistema iterado de funções é dado por um conjunto finito de aplicações contínuas $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$ definidas em um espaço topológico X. Hutchinson no artigo [7] considera sistemas iterados de funções hiperbólicos, isto é, uma coleção finita de contrações $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n : X \to X$ onde X é um espaço métrico completo. Ele provou que existe um único conjunto compacto K, chamado atrator do IFS, de modo que

$$K = \bigcup_{j=1}^{n} \varphi_j(K).$$

Também provou a existência e unicidade de uma medida de probabilidade μ definida na σ-álgebra de Borel de X, satisfazendo a equação

$$\mu = \sum_{j=1}^{n} p_j(\varphi_j)_*(\mu),$$

onde $(\varphi_j)_*\mu$ denoda o push-forword ou imagem da medida μ por φ_j e $p_1 + \cdots + p_n = 1$.

Foram propostas várias generalizações dos resultados de Hutchison. Uma direção era enfraquecer a hipótese de hiperbolicidade, permitindo algumas formas de contração fracas, pensando nisto, Edalat no artigo [5], definiu a noção de um sistema iterado de funções fracamente hiperbólico, onde ele considerou um número finito de aplicações $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ definidas em um espaço métrico compacto X com o diâmetro indo a zero por qualquer que seja a combinação das aplicações. Em outras palavras, para todas as sequência infinita $(i_1, i_2, ..) \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ temos

$$\lim_{n\to\infty} Diam(\varphi_{i_1} \circ \varphi_{i_2} \circ \cdots \circ \varphi_{i_n}(X)) = 0,$$

onde $\Sigma = \{1, ..., n\}$ e $\Sigma^{\mathbb{N}}$ é o conjunto de todas as sequências formadas pelos elementos de Σ. Esta definição permite que um sistema iterado de funções tenham algumas aplicações que não sejam contrações, que foram descartadas nos configurações anteriores, para obter um atrator topológico.

Outra maneira de generalizar os resultados de Hutchinson é aumentar o espaço dos parâmetros. No artigo [1] foram estudados os IFS fracamente hiperbólicos em que os espaços de parâmetros são espaço métricos compactos, o que permite unificar e generalizar alguns dos resultados anteriores. Em particular, eles generalizam os resultados de [5]. Obtendo a existência de atratores e um teorema ergódico para IFS fracamente hiperbólicos.

Nesta dissertação, consideraremos o conceito de um sistema iterado funções $\mathbb{P}$-fracamente hiperbólico, que generaliza o conceito de um IFS fracamente hiperbólico, com espaço de paramétrico compacto. Expomos a existência de medida invariante de um IFS $\mathbb{P}$-fracamente hiperbólico. Além disso, temos uma versão do teorema ergódico para IFS $\mathbb{P}$-fracamente hiperbólico com espaço de parâmetro compacto.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Neste capítulo vamos introduzir alguns conceitos e resultados sobre teoria da medida e teoria ergódica os quais são de grande importância para a leitura e compreensão desta dissertação. Para uma melhor leitura, alguns resultados apresentados aqui não serão provados, apenas indicaremos onde é possível encontrar suas demonstrações.

1.1 Teoria da Medida

Definição 1. *Seja* X *um conjunto não vazio. Uma álgebra de conjuntos sobre* X *é uma coleção* $\mathcal{A}$ *de subconjuntos de* X*, fechada para a união finita e complementaridade, isto é,*

1. *Se* $E_1, E_2, \cdots, E_n \in \mathcal{A}$ *então* $E_1 \cup \cdots \cup E_n \in \mathcal{A}$.

2. *Se* $E \in \mathcal{A}$ *então* $E^c \in \mathcal{A}$.

Observação 1. *Se a álgebra* $\mathcal{A}$ *é fechada para uniões enumerável ela será chamada de* σ*-álgebra.*

Observação 2. *Se* $\mathcal{A}$ *é uma álgebra, então* $\emptyset \in \mathcal{A}$ *e* $X \in \mathcal{A}$.

Definição 2. *Seja* ξ *um subconjunto do conjunto das partes de* X*. A* σ*-álgebra gerada por* ξ *é dada pela intersecção de todas as* σ*-álgebra sobre* X *que contém* ξ *e indicaremos ela por* $M(\xi)$.

Observação 3. *Equivalentemente,* $M(\xi)$ *é a menor* σ*-álgebra sobre* X *que contém* ξ*. Os elementos de* $M(\xi)$ *são chamados de gerados por* ξ.

Definição 3. *A σ-álgebra de Borel B_X de um espaço métrico (ou topológico) X é a σ-álgebra gerado pelos conjuntos abertos de X (ou equivalente, pelos fechados de X), constituída pelos conjuntos de Borel de X ou, simplesmente, borelianos de X.*

Definição 4. *Seja X um conjunto com uma σ-álgebra $\mathcal{A}$. Uma medida em $\mathcal{A}$, ou $(X, \mathcal{A})$, é uma função $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ com as propriedades abaixo*

1. $\mu(\emptyset) = 0$;

2. *Se $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos disjuntos em $\mathcal{A}$, então vale*

$$\mu\Big(\bigcup_{n>1}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Definição 5. *Seja X um conjunto qualquer e $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra sobre X*

1. *O par $(\mathcal{A}, X)$ é dito um espaço mensurável e os conjuntos em $\mathcal{A}$ são chamados conjuntos mensuráveis.*

2. *Se μ é uma medida em $(X, \mathcal{A})$, a terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é dita ser um espaço de medida.*

3. *Dado um espaço de medida, a medida μ é dita finita se $\mu(X) < +\infty$.*

Definição 6. *Dizemos que a medida μ, definida na σ-álgebra de X é de probabilidade, ou simplesmente probabilidade, quando $\mu(X) = 1$.*

Dados $(X_j, \mathcal{A}_j, \mu_j)$, $j = 1, ..., n$, espaços de medidas finitas, é possível tornar o produto cartesiano $X_1 \times \cdots \times X_n$ um espaço de medida, da seguinte forma. Considere em $X_1 \times \cdots \times X_n$ a σ-álgebra gerada pela família de todos os conjuntos da forma $A_1 \times \cdots \times A_n$ com $A_j \in \mathcal{A}_j$ com $j = 1, ..., n$ ela é chamada de σ-álgebra produto e será denotada por $\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$.

Teorema 1. *Existe uma única medida μ em $(X_1 \times \cdots \times X_n, \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n)$ tal que $\mu(A_1 \times \cdots \times A_n) = \mu(A_1) \cdots \mu(A_n)$ para $A_j \in \mathcal{A}_j$ para $j = 1, ..., n$. Em particular μ é finita.*

Demonstração. ver referência. Mais precisamente o teorema A.2.12. de [9]. □

Sejam $(X_j, \mathcal{B}_j, \mu_j)$ espaços de medidas com $\mu_j(X_j) = 1$ para todo $j \in \mathcal{L}$. O conjunto dos índices pode ser tanto $\mathcal{L} = \mathbb{N}$ com $\mathcal{L} = \mathbb{Z}$. Considere o produto cartesiano

$$X = \prod_{j \in \mathcal{L}} X_j = \{(x_j)_{j \in \mathcal{L} : x_j \in X_j}\}.$$

Definição 7. *Um cilindro é o conjunto* $[m; A_m, ..., A_n] = \{(x_i)_{i\in\mathcal{L}} : x_i \in A_i \;\; para \;\; m \leqslant i \leqslant n\}$*, onde* $m \in \mathcal{L}$*,* $n \geqslant m$ *e* $A_j \in \mathcal{B}_j$ *para* $m \leqslant j \leqslant n$*.*

Definição 8. *A* σ*-álgebra de* $\mathcal{B} = \prod_{j\in\mathcal{L}} \mathcal{B}_j$ *é gerada por todos os cilindros da forma* $[m; A_m, ..., A_n]$*.*

Teorema 2. *Existe uma única medida* μ *em* $(X, \mathcal{B})$ *tal que*

$$\mu([m; A_m, ..., A_n]) = \mu_m(A_m) \cdots \mu_n(A_n),$$

para qualquer cilindro $[m; A_m, ..., A_n]$*. Em particular,* μ *é uma probabilidade.*

Demonstração. Veja o Teorema A.2.13 de [9]. □

Aplicações Mensuráveis

Definição 9. *Sejam* $(X, \mathcal{A})$ *e* $(Y, \mathcal{B})$ *espaço mensuráveis, dizemos que a aplicação* $f : X \to Y$ *é mensurável se* $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ *para todo* $E \in \mathcal{B}$*.*

Teorema 3 (Convergência Monótona)**.** *Seja* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de funções mensuráveis não negativa tal que* $f_j(x) \leqslant f_{j+1}(x)$ *para todo* j *e* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$*. Então*

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Demonstração. Veja o Teorema 2.14 na referência [6]. □

Lema 1 (Lema de Fatou)**.** *Seja* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de funções mensuráveis não-negativas. Então*

$$\int_X \liminf_n f_n d\mu \leqslant \liminf_n \int_X f_n \, d\mu.$$

Demonstração. Veja o Lema 2.18 de de [6]. □

Definição 10. *Dizemos que* $f : X \to X$ *é integrável quando* f *é mensurável e* $\int_X |f| d\mu < +\infty$*, neste caso denota-se por* $L^1(\mu)$ *o conjunto das funções integráveis (em relação a* μ*) sobre* X*.*

Teorema 4 (Convergência Dominada)**.** *Seja* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência em* $L^1(\mu)$ *satisfazendo*

1. $f_n \to f$ *em* μ*-q.t.p;*

2. *Existe uma função positiva* $g \in L^1(\mu)$ *tal que* $|f_n| \leqslant g$ *em* μ*-q.t.p para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Nestas condições,

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Demonstração. Veja o Teorema 2.24 de [6]. □

Teorema 5 (Teorema de Egorov)**.** *Seja* μ *uma medida positiva e* X *um conjunto mensurável com* $\mu(X) < \infty$ *e uma sequência de funções* $f_n : X \to \mathbb{R}$ *convergindo pontualmente para* $f : X \to \mathbb{R}$. *Então para todo* $\varepsilon > 0$ *existe um conjunto mensurável* $B \subset X$ *tal que* $\mu(B^c) < \varepsilon$ *e* $f_n \to f$ *uniformemente em* B.

Demonstração. Veja referência [9]. □

Definição 11. *Seja* $f : M \to N$ *uma aplicação definida em espaço métrico* M *com imagem em um espaço vetorial* N. *Definimos o suporte de* f *como sendo:*

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in M : f(x) \neq 0\}}.$$

Definição 12. *Seja* μ *uma medida na* σ*-álgebra de* X. *Definimos o suporte da medida* μ *como sendo:*

$$\operatorname{supp}(\mu) = \overline{\{x \in X : \mu(V_x) \neq 0 \quad \textit{para todo} \quad V_x\}},$$

onde V_x *denota uma vizinhança aberta que contém o* x.

Observação 4. *Denotamos por* $C_c(X)$ *o espaço das funções contínuas definidas em* X *com suporte compacto.*

Definição 13. *Um funcional linear* I *definido em* $C_c(X)$ *é dito ser positivo quando* $I(f) \geqslant 0$ *para toda função* $f \geqslant 0$.

Teorema 6 (Teorema de representação de Riesz)**.** *Se* I *é um operador linear positivo em* $C_c(X)$, *onde* X *é um espaço locamente compacto, então existe uma única medida* μ *na* σ*-álgebra de* X *tal que* $I(f) = \int f d\mu$ *para toda* $f \in C_c(X)$.

Demonstração. Veja o Teorema 7.2 de [6]. □

1.2 Teoria Ergódica

Agora vamos apresentar o conceito de topologia fraca* e a demostração do teorema de existência de medidas invariantes, Teorema 7.

Definição 14. *Uma medida* μ *é dita ser invariante por uma aplicação mensurável* $f : X \to X$ *se para todo conjunto mensuravel* $E \subset X$

$$\mu(E) = \mu(f^{-1}(E)).$$

No próximo resultado, veremoos que medidas invariantes sempre existem em determindos contextos.

Teorema 7 (Existência de Medidas Invariantes)**.** *Seja* $f : X \to X$ *uma transformação contínua num espaço métrico compacto. Então existe pelo menos uma medida de probabilidade em* X *que é invariante por* f*.*

Topologia fraca*

Definição 15. *Dada uma medida* $\mu \in \mathcal{M}_1(X)$*, onde* $\mathcal{M}_1(X)$ *denoda o espaço das medidas de probabiliades sobre* X*, um conjunto finito* $\Phi = \{\phi_1, \cdots, \phi_N\}$ *de funções contínuas limitadas* $\phi_i : X \to \mathbb{R}$ *e um número* $\varepsilon > 0$*, defina*

$$V(\mu, \Phi, \epsilon) = \Big\{\nu \in \mathcal{M}_1(X) : \Big|\int \phi_i d\nu - \int \phi_i d\mu\Big| < \varepsilon,\ \forall\ i\Big\}. \tag{1.1}$$

Observação 5. *Note que a interseção de dois quaisquer conjuntos da forma* (1.1) *contém algum conjunto da forma* (1.1)*. Isto assegura que a família* $\big\{V(\mu, \Phi, \epsilon) : \Phi, \epsilon\big\}$ *pode ser tomada como base de vizinhanças de cada* $\mu \in \mathcal{M}_1(X)$*.*

Definição 16. *A topologia definida por essas bases de vizinhanças é chamado de topologia fraca*.*

Em outras palavras, os abertos da topologia fraca* são os conjuntos $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_1(X)$ tais que para todo elemento $\mu \in \mathcal{A}$ existe algum $V(\mu, \Phi, \epsilon)$ contido em $\mathcal{A}$.

Quando o espaço métrico X é separável, o espaço $\mathcal{M}_1(X)$ munido da topologia fraca* é separável. $\mathcal{M}_1(X)$.

Dados μ, $\nu \in \mathcal{M}_1(X)$, defina $D(\mu, \nu)$ como sendo o ínfimo de todos os números $\delta > 0$ tais que

$$\mu(B) < \nu(B_\delta) + \delta \ \text{ e } \ \nu(B) < \mu(B_\delta) + \delta,$$

para todo boreliano B, onde $B_\delta = \{x \in X : d(x, B) < \delta\}$ o conjunto B_δ é chamdo de δ-vizinhaça de B.

Lema 2. *A função* D *é uma métrica em* $\mathcal{M}_1(X)$.

Demonstração. Veja a referência [6]. □

Esta métrica é denominada métrica de Levy-Prohorov. No que segue representaremos por $B_D(\mu, r)$ a bola relativamente a D com centro em $\mu \in \mathcal{M}_1(X)$ e raio $r > 0$.

Proposição 1. *Se M é um espaço métrico separável então a topologia induzida pela métrica* D *coincide com a topologia fraca* em* $\mathcal{M}_1(X)$.

Demonstração. Veja a referência [6]. □

No proxio resultado veremos que o espaço das medidas de probabilidade sobre X munido da topologia fraca* é compacto se X for um espaço metrico compacto.

Teorema 8. *Se* X *é um espaço metrico compacto então. O espaço* $\mathcal{M}_1(X)$ *munido da topologia fraca* é compacto.*

Demonstração. veja a referência [6]. □

Demonstração do teorema da existência de medidas invariantes

Dada uma aplicação $f : X \to X$ e qualquer medida η em X denota-se por $f_*\eta$ e chama-se push-forward ou imagem de η por f a medida definida por $f_*\eta(B) = \eta(f^{-1}(B))$ para cada conjunto mensurável $B \subset X$. Note que η é invariante por f se, e somente se, $f_*\eta = \eta$.

Lema 3. *Sejam* μ *uma medida e* ϕ *uma função mensurável limitada. Então*

$$\int \phi \ df_*\mu = \int \phi \circ f \ d\mu. \tag{1.2}$$

Demonstração. Se ϕ é a função característica de um conjunto mensurável B então a relação (1.2) significa que $f_*\mu(B) = \mu(f^{-1}(B))$, o que é verdade por definição. Agora pela linearidade da integral, segue que 1.2 vale sempre que ϕ é uma função simples, isto é

$$\int_X \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k} df_*\mu = \sum_{k=1}^{n} \int_X a_k(\chi_{E_k} \circ f) d\mu.$$

Finalmente, como toda função mensurável limitada pode ser aproximada uniformemente por funções simples segue daí, via Teorema 4, que a conclusão do lema é verdadeira em geral. □

Na proposição a seguir veremos que a continuidade de f implica a continuidade da aplicação f_*.

Proposição 2. *Seja* $f : X \to X$ *uma aplicação contínua. Então a aplicação* $f_* : \mathcal{M}_1(X) \to \mathcal{M}_1(X)$ *é contínua relativamente à topologia fraca*.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ e $\Phi = \{\phi_1, ..., \phi_n\}$ uma família qualquer de funções contínuas limitadas. Como f é contínua, a família $\Psi = \{\phi_1 \circ f, ..., \phi_n \circ f\}$ também consiste de funções contínuas limitadas. Pelo Lema 3

$$\Big|\int \phi_i \, d(f_*\mu) - \int \phi_i \, d(f_*\nu)\Big| = \Big|\int \phi_i \circ f \, d\mu - \int \phi_i \circ f \, d\nu\Big|$$

e portanto o lado esquerdo é menor que ε se o lado direito for menor que ε. Isto quer dizer que $f_*(V(\mu, \Psi, \varepsilon)) \subset V(f_*\mu, \Phi, \varepsilon)$. Isso implica que f_* é contínua. $\square$

Considere agora uma medida de probabilidade ν em X a sequência de probabilidades

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f_*^j \nu, \tag{1.3}$$

onde $f_*^j\nu$ é a imagem de ν pelo iterado f^j. segue do Teorema 8 que esta sequência tem algum ponto de acumulação, ou seja, existe $(n_k)_k \in \mathbb{N}$, $n_k \to \infty$, tal que

$$\frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1} f_*^j \nu \to \mu \tag{1.4}$$

na topologia fraca*. Agora é suficiente demonstrar o seguinte lema.

Lema 4. *Todo ponto de acumulação de uma sequência* $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *do tipo* (1.3) *é uma probabilidade invariante por* f.

Demonstração. A relação (1.2) afirma que dada uma família $\Phi = \{\phi_1, ..., \phi_n\}$ de funções contínuas limitadas e $\varepsilon > 0$ tem-se

$$\Big|\frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1}\int_X \phi_i \circ f^j \, d\nu - \int_X \phi_i \, d\mu\Big| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{1.5}$$

para todo i e todo k suficientemente grande. Agora pela Proposição 2

$$f_*\mu = \lim_k f_*\Big(\frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1} f_*^j\nu\Big) = \lim_k \frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1} f_*^{j+1}\nu = \lim_k \frac{1}{n_k}\sum_{j=1}^{n_k} f_*^j\nu. \tag{1.6}$$

Observe que

$$\Big|\frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1}\int_X(\phi_i\circ f^j)\,d\nu-\frac{1}{n_k}\sum_{j=1}^{n_k}\int_X(\phi_i\circ f^j)\,d\nu\Big|=\frac{1}{n_k}\Big|\int_X\phi_i d\nu-\int_X\phi_i\circ f^{n_k}\,d\nu\Big|$$
$$\leqslant\frac{2}{n_k}\sup|\phi_i|<\frac{\varepsilon}{2}$$

para todo i e todo k suficientemente grande. Juntando esse fato com (1.5) concluímos que

$$\Big|\frac{1}{n_k}\sum_{j=1}^{n_k}\int_X\phi_i\circ f^j d\nu-\int_X\phi\,d\mu\Big|<\varepsilon$$

para i e k suficientemente grande. Isto significa que

$$\frac{1}{n_k}\sum_{j=1}^{n_k}f_*^j\nu\to\mu$$

quando $k\to\infty$ mas (1.6) significa que essa mesma sequência converge para $f_*\mu$. Por unicidade do limite segue que $f_*\mu=\mu$. □

Agora faremos algumas definições e enuciaremos importantes resultados de teoria ergódiaca que serão utilizados no proximo capítulo.

Definição 17. *Dado uma aplicação mensurável* $f:X\to X$ *chamamos de média temporal da função* $\varphi:X\to\mathbb{R}$ *a função*

$$\tilde{\varphi}(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(f^j(x)),$$

onde $f^j=f\circ\cdots\circ f$, j*-vezes.*

Teorema 9 (Teorema Ergódico de Birkhoff)**.** *Seja* $f:\ X\to X$ *uma transformação mensurável e seja* μ *uma probabilidade invariante por* f*. Dada qualquer função integrável* $\varphi:\ X\to\mathbb{R}$*, o limite*

$$\widetilde{\varphi}(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(f^j(x))$$

existe em $\mu-$*q.t.p* $x\in X$*. Além disso, a função* $\widetilde{\varphi}$ *definida desta forma é integrável e satisfaz*

$$\int\widetilde{\varphi}(x)d\mu(x)=\int\varphi(x)d\mu(x).$$

Demonstração. Veja o Apêndice. □

Apresentaremos agora o Teorema ergódico subaditivo. Para isso vamos começar pelas seguintes definições.

Definição 18. *Para quaisquer* $m, n \in \mathbb{N}$*.Dizemos que uma sequência numérica* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é dita ser subaditiva quando*

$$a_{m+n} \leqslant a_m + a_n.$$

Definição 19. *Para quaisquer* $m, n \in \mathbb{N}$*. Dizemos que uma sequência de funções* $\varphi_n : X \to \mathbb{R}$ *é subaditiva para uma aplicação* $f : X \to X$ *se*

$$\varphi_{m+n} \leqslant \varphi_m + \varphi_n \circ f^m,$$

para quaisquer $m, n \geqslant 1$*.*

Teorema 10 (Teorema ergódico subaditivo de Kingman)**.** *Seja* μ *uma probabilidade invariante por uma transformação* $f : X \to X$ *e seja* $\varphi_n : X \to \mathbb{R}$ $n \geqslant 1$ *uma sequência subaditiva de funções mensuráveis tal que* $\varphi_1 \in L^1(\mu)$*. Então a sequência* $(\varphi_n/n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge em* μ*-quase todo ponto para uma função* f*-invariante* $\varphi : X \to [-\infty, +\infty)$*. Além disso,* $\varphi^+ \in L^1(\mu)$ *e*

$$\int_X \varphi d\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_X (\varphi_n) d\mu \in [-\infty, +\infty).$$

Demonstração. Veja a referência [9]. □

Agora definiremos o conceito de ergodicidade, o qual é muito importante para teoria ergódica e possui diversal equivalências.

Definição 20. *Dizemos que o sistema* (f, μ) *é ergódico quando para toda função integrável tivermos*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \int_X \varphi(x) d\mu,$$

para quase todo ponto.

Definição 21. *Seja* $\Sigma = \{1, ..., N\}$ *denote por* $\Sigma^{\mathbb{N}}$ *o conjunto de todas as sequências formadas pelos elementos de* Σ*.*

Seja $(\Sigma, \mathcal{B}, \nu)$ um espaço de probabilidade e considere o espaço produto $\Sigma^{\mathbb{N}}$ munido da σ-álgebra produto $\mathcal{C}$, ou seja $\mathcal{C} = \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$, e a medida produto $\mu = \nu^{\mathbb{N}}$. Definimos agora a aplicação deslocamento de Bernoulli $\sigma : \Sigma^{\mathbb{N}} \to \Sigma^{\mathbb{N}}$ dada por $\sigma((\alpha_n)_n) = (\alpha_{n+1})_n$, ou seja σ envia a sequência $(x_0, x_1, ..., x_n, ...)$ na sequência $(x_1, ..., x_n, ...)$, observe que a pré-imagem de qualquer cilindro ainda é um cilindro

$$\sigma^{-1}([m;\, A_m, ..., A_n]) = [m + 1;\, A_m, ..., A_n].$$

Disto segue que σ é mensuravel. Além disso,

$$\mu(\sigma^{-1}([m;\, A_m, ..., A_n])) = \nu(A_m) \cdots \nu(A_n) = \mu([m;\, A_m, ..., A_n]).$$

Isso assegura que a medida μ é invariante por σ, utilizando alguns resultados de teoria da medida, veja [9] para mais detalhes.

Proposição 3. *Todo deslocamento de Bernoulli* (σ, μ) *é ergódico.*

Demonstração. Veja a proposição 4.2.7 de [9]. □

Concluímos este capítulo tendo apresentado as principais ferramentas e resultados necessários para uma melhor compreensão desta dissertação.

Capítulo 2

Sistemas iterados de funções

Um sistema iterado de funções (IFS) é dado por um conjunto finito de aplicações contínuas $\{f_1, ..., f_N\}$ definidas em um espaço topológico X. Se X é um espaço métrico completo e cada uma das $f_j : X \to X$ são contrações dizemos que o IFS é hiperbólico. Para um espaço métrico completo X, seja $\mathcal{K}(X)$ o espaço métrico completo formado por todos os subconjuntos compactos não vazios de X com a métrica de Hausdorff definida por

$$d_H(A, B) = \inf\{\delta > 0 : A \subseteq B_\delta \ \text{ e } \ B \subseteq A_\delta\},$$

onde para um subconjunto compacto não vazio $C \subseteq X$ e $\delta > 0$ o conjunto

$$C_\delta = \{x \in X : \exists\, y \in C, d(x, y) < \delta\}.$$

Um IFS hiperbólico induz a aplicação $F : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(X)$ dada por

$$F(A) = \bigcup_{j=1}^{n} f_j(A). \tag{2.1}$$

Proposição 4. $F : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(X)$ *é uma contração com a métrica de Hausdorff.*

Demonstração. Ver referência [7]. □

Segue do Teorema do ponto fixo que F possui um único ponto fixo, ou seja eiste um único conjunto compacto K tal que $K = \bigcup_{j=1}^{n} F_j(K)$, este conjunto é chamdo de atrator do IFS.

Também existe uma versão probabilística desta teoria, onde cada f_j é associada a um peso p_j, $j = 1, ..., n$ tal que

$$0 < p_j < 1 \ \text{ e } \ \sum_{j=1}^{n} p_j = 1.$$

Utilizando estes pesos definimos o operador de Markov $T : \mathcal{M}_1(X) \to \mathcal{M}_1(X)$ dado por

$$T(\mu)(B) = \sum_{j=1}^{n} p_j \mu(f^{-1}(B)), \tag{2.2}$$

para todo conjunto de Borel $B \subseteq X$.

Quando o IFS é hiperbolico, o operador de Markov possui um único ponto fixo que é chamdo de medida invariante do IFS, para uma demonstração veja [7]. A existencia e unicidade do atrator e da medida invariante também são verdadeiras em sistemas iterados de funções fracamente hiperbólicos, o qual foi definido por Edalat em [5]. Agora definimos um sistemas fracamente hiperbólico.

Definição 22. *Um IFS* $\{f_1, ..., f_N\}$ *é dito ser fracamente hiperbólico se para todas as sequências infinitas* $(i_1, i_2, ..) \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ *tivemos que*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Diam}(f_{i_1} \circ f_{i_2} \circ \cdots \circ f_{i_n}(X)) = 0,$$

onde $\mathrm{Diam}(A)$ *denota o diâmetro do conjunto* A*.*

Observe que todo IFS hiperbólico é frcamente hiperbólico porém a reciproca não é verdadeira, para um exemplo veja o capítulo 3.

2.1 IFS $\mathbb{P}$-fracamente hiperbólico

Até agora estudamos IFS's formados por um número finito de aplicações contínuas. Agora vamos estudar IFS's formados por um número infinitos de aplicações contínuas, até mesmo para uma quantidade não enumerável.

Sejam Λ e X espaços métricos compactos. Uma aplicação contínua $\omega : \Lambda \times X \to X$ é chamada de sistema iterado de funções (IFS). O espaço métrico Λ é chamado de espaço de parâmetro e X é chamado de espaço de fase. $\Lambda^{\mathbb{N}}$ é o conjunto de todas as sequências em Λ. Quando $\Lambda^{\mathbb{N}}$ está munido da topologia produto, gerada pelos cilindros de tamanho m o denotaremos por Ω.

Fixado um parâmetro λ denote por $\omega_\lambda : X \to X$ a aplicação definida por

$$\omega_\lambda(x) = \omega(\lambda, x).$$

Estas aplicações fazem o papel das $f_j's$ no caso em que o IFS é dado por um número finito de aplicações.

Definição 23. *Um IFS* ω *no espaço métrico* (X, d) *é dito ser fracamente hiperbólico quando para toda sequência* $\alpha \in \Lambda^{\mathbb{N}}$ *tivermos*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Diam}(f_{\alpha_1} \circ \cdots \circ f_{\alpha_n}(X)) = 0,$$

onde $\mathrm{Diam}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$.

Se o espaço dos parâmetros é finito, ou seja o IFS é dado por $\{f_1, ..., f_N\}$, esta definição coincide coma a definição 22. Da mesma maneira do caso finito, o IFS ω induz a aplicação $F : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(X)$ definida por

$$F(A) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \omega_\lambda(A).$$

No caso em que o conjunto Λ é finito, ou seja $\Lambda = \{1, ..., N\}$, obtemos que

$$F(A) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \omega_\lambda(A) = \bigcup_{i=1}^{N} \omega_i,$$

coincidindo com a definição apresentada pela equação (2.1).

Dada uma medida de probabilidade ρ em $\mathcal{M}_1(\Lambda)$ denote por $\mathbb{P}$ a medida produto em $\Lambda^{\mathbb{N}}$ induzida por ρ. Lembre-se que a medida produto $\mathbb{P}$ em $\Lambda^{\mathbb{N}}$ é invariante pela aplicação deslocamento de Bernoulli.

Considere o operador de transferência $T_\rho : \mathcal{M}_1(X) \to \mathcal{M}_1(X)$ definido por

$$T_\rho(\mu)(A) = \int_\Lambda \mu(\omega_\lambda^{-1}(A))d\rho(\lambda).$$

para todo conjunto de Borel de X. Mais uma vez observe que se o conjunto Λ é finito teremos que o operador T_ρ coincide com o operador introduzido na equação (2.2),

$$T_\rho(\mu)(A) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \mu(\omega_i^{-1}(A)).$$

Agora definimos a noção de uma medida invariante paro o IFS.

Definição 24. *Uma medida* μ *é dita ser invariante pelo sistema iterado de funções* $\omega : \Lambda \times X \to X$ *quando*

$$T_\rho(\mu) = \mu,$$

ou seja, é ponto fixo do operador de transferência T_ρ.

O teorema 2 de [1] prova a existência e a unicidade de atratores globais isto é, um ponto fixo da aplicação F, para IFS fracamente hiperbólico. Também prova que cada operador T_ρ possui um único ponto fixo μ_ρ. Além disso $T_\rho^n(\nu) \to \mu_\rho$ na topologia fraca*, para toda $\nu \in \mathcal{M}_1(X)$.

Nesta dissertação estudaremos, estudaremos sistemas iterados de funções $\mathbb{P}$-fracamente hiperbólicos, segue a definição a baxio.

Definição 25. *Fixe $\rho \in \mathcal{M}_1(\Lambda)$. Um IFS $\omega : \Lambda \times X \to X$ é dito ser $\mathbb{P}$-fracamente hiperbólico se $\mathbb{P}(S) = 1$, onde*

$$S = \left\{\alpha \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \mathtt{Diam}(\omega_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \omega_{\alpha_n}(X)) = 0\right\}.$$

Observe que esta definição generaliza o conceito de um IFS fracamente hiperbólico. Considere as funções $f_n, h_n : \Omega \to \mathbb{R}$ onde,

$$f_n(\alpha) = \mathtt{Diam}(\omega_{\alpha_n} \circ \cdots \circ \omega_{\alpha_1}(X))$$

e

$$h_n(\alpha) = \mathtt{Diam}(\omega_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \omega_{\alpha_n}(X)).$$

Lema 5. *Se o IFS ω é fracamente hiperbólico. Então as funções f_n e h_n convergem uniformemente para 0.*

Demonstração. Veja referência [1]. □

Denotamos por D e r as métricas de Ω e $\Omega \times X$, respectivamente. A métrica D é dada por

$$D(\alpha, \xi) = \sup_n \frac{1}{n} d_1(\alpha_n, \xi_n),$$

onde d_1 é a métrica de Λ.

Se o IFS ω é fracamente hiperbólico, do Teorema 2 de [1] segue que para cada $\rho \in \mathcal{M}_1(X)$ o operador T_ρ possui um único ponto fixo. Além disso, ele é assintoticamente estável. Na proxima subseção, mostraremos que este resultado continua valendo no contexto $\mathbb{P}$-fracamente hiperbólico.

2.1.1 Prova do Teorema principal

Agora vamos definir a aplicação Γ. Dados $\sigma \in \Omega$, $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$ defina $\Gamma(\sigma, x, n) = \omega_{\sigma_1} \circ \omega_{\sigma_2} \circ \cdots \circ \omega_{\sigma_n}(x)$. Observe que para $n \geqslant 1$

$$\omega_{\sigma_1} \circ \omega_{\sigma_2} \circ \cdots \circ \omega_{\sigma_{n+1}}(X) \subseteq \omega_{\sigma_1} \circ \omega_{\sigma_2} \circ \cdots \circ \omega_{\sigma_n}(X).$$

Se $\sigma \in S$, por definição, temos que $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Diam}(\omega_{\sigma_1} \circ \omega_{\sigma_2} \circ \cdots \circ \omega_{\sigma_n}(X)) = 0$ e logo o conjunto

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \omega_{\sigma_1} \circ \omega_{\sigma_2} \circ \cdots \circ \omega_{\sigma_n}(X) = \{y\}$$

é formado por um único ponto y. Note que, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$d(y, \Gamma(\sigma, x, n)) \leqslant \mathrm{Diam}(\omega_{\sigma_1} \circ \omega_{\sigma_2} \circ \cdots \circ \omega_{\sigma_n}(X)).$$

Além disso, $\lim_{n\to\infty} \Gamma(\sigma, x, n) = y$ para todo $x \in X$. Isso define a função $\Gamma : S \to X$ dada por

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \Gamma(\alpha, x, n).$$

Teorema 11. *Fixado $\rho \in \mathcal{M}_1(\Lambda)$. Se X é um espaço métrico compacto e ω é um IFS $\mathbb{P}$-fracamente hiperbólico com espaço de parâmetro compacto então o operador*

$$T_\rho : \mathcal{M}_1(\Lambda) \to \mathcal{M}_1(\Lambda),$$

possui um único ponto fixo μ_ρ e $T_\rho^n(\nu) \to \mu_\rho$ na topologia fraca para toda $\nu \in \mathcal{M}_1(\Lambda)$. Além disso se $\rho(U) > 0$ para todo aberto $U \subset \Lambda$ então $\mathrm{supp}(\mu_\rho) = K$ onde $K = \overline{\Gamma(S)}$.*

Demonstração do teorema 11:

Sejam φ uma função contínua em X e ν uma medida de probabilidade definida sobre a σ-álgebra de Borel de X, dado $\varepsilon > 0$, por continuidade uniforme existe $\delta > 0$ tal que $d(x, y) < \delta$ implica que $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon/2$. como $\mathbb{P}(S) = 1$, pelo Teorema 5 existe um conjunto de Borel $B \subset \Omega$ com $\mathbb{P}(B) > 1 - \varepsilon/4M$ tal que h_n converge uniformemente para 0 em B, onde $M = \sup|\varphi(x)|$. Pela definição do conjunto B existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então $h_n(\alpha) < \delta$ para qualquer $\alpha \in B$.

Tome $\alpha \in B$, para quaisquer $x \in X$ e $m, n \geqslant n_0$ temos

$$d\big(\omega_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \omega_{\alpha_n}(x), \omega_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \omega_{\alpha_m}(x)\big) < \delta.$$

Então

$$\big|\varphi\big(\omega_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \omega_{\alpha_n}(x)\big) - \varphi\big(\omega_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \omega_{\alpha_m}(x)\big)\big| < \varepsilon/2.$$

Por outro lado, pela definição do operador T_ρ segue que

$$\int_X \varphi d(T_\rho^n(\nu)) = \int_{\Lambda^n}\int_X \varphi\big(\omega_{\alpha_1}\circ\cdots\circ\omega_{\alpha_n}(x)\big)d\nu d\rho^n.$$

Observe que toda integral em Ω pode ser escrita como uma integral em $\Lambda^n \times \Omega$, para concluir isso basta usar a definição da medida $\mathbb{P}$ e do espaço Ω. Assim

$$\int_{\Lambda^n}\int_X \varphi\big(\omega_{\alpha_1}\circ\cdots\circ\omega_{\alpha_n}(x)\big)d\nu d\rho^n = \int_\Omega\int_X \varphi\big(\omega_{\alpha_1}\circ\cdots\circ\omega_{\alpha_n}(x)\big)\, d\nu d\mathbb{P}.$$

Por outro lado, para $m, n > n_0$ temos

$$\left|\int_B\int_X \varphi\big(\omega_{\alpha_1}\circ\cdots\circ\omega_{\alpha_n}(x) - \varphi\big(\omega_{\alpha_1}\circ\cdots\circ\omega_{\alpha_m}(x)\big)\, d\nu d\mathbb{P}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\cdot\mathbb{P}(B)$$

e

$$\left|\int_{B^c}\int_X \varphi\big(\omega_{\alpha_1}\circ\cdots\circ\omega_{\alpha_n}(x) - \varphi\big(\omega_{\alpha_1}\circ\cdots\circ\omega_{\alpha_m}(x)\big)\, d\nu d\mathbb{P}\right| \leqslant 2\sup|\varphi(x)|\cdot\mathbb{P}(B^c).$$

Então para $m, n > n_0$ temos,

$$\begin{aligned}
\left|\int_X \varphi\, d(T_\rho^n(\nu)) - \int_X \varphi\, d(T_\rho^m(\nu))\right| &= \left|\int_\Omega\int_X \varphi(\Gamma(\alpha,x,n)) - \varphi(\Gamma(\alpha,x,m))\, d\nu d\mathbb{P}\right| \\
&\leqslant \int_\Omega\int_X |\varphi(\Gamma(\alpha,x,n)) - \varphi(\Gamma(\alpha,x,m))| d\nu d\mathbb{P} \\
&\leqslant \int_B\int_X |\varphi(\Gamma(\alpha,x,n)) - \varphi(\Gamma(\alpha,x,n))| d\nu d\mathbb{P} + \\
&+ \int_{B^c}\int_X |\varphi(\Gamma(\alpha,x,n)) - \varphi(\Gamma(\alpha,x,m))| d\nu d\mathbb{P} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + 2\sup|\varphi|\cdot\frac{\varepsilon}{4\sup|\varphi|} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + 2\frac{\varepsilon M}{4M} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Com isso o limite $\lim\limits_{n\to\infty}\int_X \varphi\, d(T_\rho^n(\nu))$ existe para toda função contínua φ, assim podemos definir o funcional linear

$$I(\varphi) = \lim_{n\to\infty}\int_X \varphi\, d(T_\rho^n(\nu)).$$

Observe que se $\varphi \geqslant 0$ então $I(\varphi) = \lim\limits_{n\to\infty}\int_X \varphi d(T_\rho^n(\nu)) \geqslant 0$. Portanto, pelo Teorema 6 temos que existe uma única medida de Borel μ tal que

$$\lim_{n\to\infty}\int_X \varphi\, d(T_\rho^n(\nu)) = \int_X \varphi\, d\mu,$$

para toda função contínua φ, logo $\lim\limits_{n\to\infty} T_\rho^n(\nu) = \mu$ na topologia fraca*. Como o operador T_ρ é contínuo na topologia fraca*, veja [1], segue que μ é ponto fixo de T_ρ.

Agora vamos provar resultados relacionados ao conjunto S com a ajuda do conjunto auxilar

$$F = \left\{\alpha \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathtt{Diam}(\omega_{\alpha_i} \circ \cdots \circ \omega_{\alpha_1}(X)) = 0\right\}.$$

Observe que a função $\Psi_n : \Lambda^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Psi_n(\alpha_1, ..., \alpha_n) = \mathtt{Diam}(\omega_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \omega_{\alpha_n}(X))$$

é contínua, pela continuidade de ω, pelo mesmo argumento as funções f_n e h_n também são contínuas. Agora veja que

$$\begin{aligned} h_{n+1}(\alpha) &= \mathtt{Diam}(\omega_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \omega_{\alpha_{n+1}}(X)) \\ &= \mathtt{Diam}(\omega_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \omega_{\alpha_n}(\omega_{\alpha_{n+1}}(X))) \\ &\leqslant h_n(\alpha). \end{aligned}$$

Logo $h(\alpha) = \lim\limits_{n\to\infty} h_n(\alpha)$ existe para toda sequência $\alpha \in \Omega$, pois h_n é uma sequência monótona limitada, é claro que a função h é mensurável, pois é limite de funções mensuráveis. Por outro lado,

$$\begin{aligned} f_{n+1}(\alpha) &= \mathtt{Diam}(\omega_{\alpha_{n+1}} \circ \cdots \circ \omega_{\alpha_1}(X)) \\ &= \mathtt{Diam}(\omega_{\alpha_{n+1}} \circ \cdots \circ \omega_{\alpha_2}(\omega_{\alpha_1}(X))) \\ &\leqslant f_n(\sigma(\alpha)). \end{aligned}$$

Então, para $m, k \in \mathbb{N}$ temos que

$$\begin{aligned} f_{m+k}(\alpha) &= \mathtt{Diam}(\omega_{\alpha_{m+k}} \circ \cdots \circ \omega_{\alpha_1}) \\ &= \mathtt{Diam}(\omega_{\alpha_{m+k}} \circ \cdots \circ \omega_{\alpha_k}(\omega_{\alpha_{k+1}} \circ \cdots \circ \omega_{\alpha_1}(X))) \\ &\leqslant f_m(\sigma^k(\alpha)). \end{aligned}$$

Defina $u_n = \sum\limits_{j=1}^{n} f_j$ e observe que

$$u_{m+n} = \sum_{j=1}^{m+n} f_j = \sum_{j=1}^{m} f_j + \sum_{j=m+1}^{n} f_j.$$

Daí,

$$\begin{aligned}u_{m+n} &= u_m + \sum_{j=m+1}^{n} f_j \\ &\leqslant u_m + \sum_{j=1}^{n} f_j \circ \sigma^m \\ &= u_m + u_n \circ \sigma^m.\end{aligned}$$

Mostrando que a sequência $(u_n)_n$ é subaditiva. Pelo Teorema 10 segue que a sequência $(u_n/n)_n$ converge em $\mathbb{P}$-q.t.p para uma função invariante f tal que

$$\begin{aligned}\int_\Omega f\, d\mathbb{P} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_\Omega u_n\, d\mathbb{P} \\ &= \inf_n \frac{1}{n}\int_\Omega u_n\, d\mathbb{P}.\end{aligned}$$

Lema 6. *Fixe* $\rho \in \mathcal{M}_1(\Lambda)$*. Então para todo* n*,*

$$\int_\Omega f_n\, d\mathbb{P} = \int_\Omega h_n\, d\mathbb{P}.$$

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$ por continuidade uniforme existe $\delta > 0$ tal que se $D(\alpha,\beta) < \delta$ então $|f_n(\alpha) - f_n(\beta)| < \varepsilon$ e $|h_n(\alpha) - h_n(\beta)| < \varepsilon$. Agora considere uma partição $\mathcal{P} = \{P_1, ..., P_k\}$ do conjunto Λ com $\mathrm{Diam}(P_i) < \frac{\delta}{2}$ e fixe $\lambda_i \in P_i$ para todo $i = 1, ..., k$. Assim se $\alpha, \beta \in \Omega$ possuem os mesmo n primeiros elementos então

$$\begin{aligned}D(\alpha,\beta) &= \sup_{k\geqslant n+1} \frac{1}{k} d_1(\alpha_k, \beta_k) \\ &\leqslant \frac{M}{n+1},\end{aligned}$$

onde $M = \mathrm{Diam}(X)$.

Fixe $m > n$ tal que $\mathrm{Diam}(X)/m < \delta/2$ e $\alpha^{i_1,...,i_m} \in \Omega$ tal que $\alpha_j^{i_1,...,i_m} = \lambda_{i_j}$ para $j = 1, ..., m$ e $i_1, ..., i_m = 1, 2, ..., k$. Observe que

$$\mathrm{Diam}([1;\, P_{i_i}, ..., P_{i_k}]) < \delta.$$

Então

$$\begin{aligned}\int_\Omega f_n d\,P &= \sum_{i_1,...,i_m=1}^{k} \int_{[1;P_{i_1},...,P_{i_m}]} f_n(\alpha)\, d\mathbb{P} \\ &< \sum_{i_1,...,i_m=1}^{k} \int_{[1;P_{i_1},...,P_{i_m}]} (\varepsilon + f_n(\alpha^{i_1,...,i_m})))\, d\mathbb{P} \\ &= \varepsilon \cdot \mathbb{P}(\Omega) + \sum_{i_1,...,i_m=1}^{k} \int_{[1;P_{i_1},...,P_{i_m}]} \mathrm{Diam}(\omega_{\lambda_{i_n}} \circ \cdots \circ \omega_{\lambda_{i_1}}(X))\, d\mathbb{P}.\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f_n \, d\,P &< \varepsilon + \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{k} \rho(P_{i_1})\cdots\rho(P_{i_m})\mathrm{Diam}(\omega_{\lambda_{i_n}}\circ\cdots\circ\omega_{\lambda_{i_1}}(X))\\
&= \varepsilon + \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{k} \rho(P_{i_n})\cdots\rho(P_{i_1})\cdot\rho(P_{i_{n+1}})\cdots\rho(P_{i_m})\mathrm{Diam}(\omega_{\lambda_{i_n}}\circ\cdots\circ\omega_{\lambda_{i_1}}(X))\\
&= \varepsilon + \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{k} \rho(P_{i_n})\cdots\rho(P_{i_1})\cdot\rho(P_{i_{n+1}})\cdots\rho(P_{i_m})h_n(\alpha^{i_n,\ldots,i_1,i_{n+1},\ldots i_m})\\
&= \varepsilon + \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{k} \int_{[1;P_{i_n},\ldots,P_{i_1},P_{i_{n+1}},\ldots,P_{i_m}]} h_n(\alpha^{i_n,\ldots,i_1,i_{n+1},\ldots i_m})\, d\mathbb{P}\\
&< 2\varepsilon + \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{k} \int_{[1;P_{i_n},\ldots,P_{i_1},P_{i_{m+1}},\ldots,P_{i_m}]} h_n(\alpha)\, d\mathbb{P}\\
&= 2\varepsilon + \int_\Omega h_n\, d\mathbb{P}.
\end{aligned}$$

Também temos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega h_n \, d\mathbb{P} &= \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{k} \int_{[1;P_{i_1},\ldots,P_{i_m}]} h_n(\alpha)\, d\mathbb{P}\\
&< \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{k} \int_{[1;P_{i_1},\ldots,P_{i_m}]} (\varepsilon + h_n(\alpha^{i_1,\ldots,i_m}))\, d\mathbb{P}\\
&= \varepsilon\cdot\mathbb{P}(\Omega) + \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{k} \int_{[1;P_{i_1},\ldots,P_{i_m}]} \mathrm{Diam}(\omega_{\lambda_{i_1}}\circ\cdots\circ\omega_{\lambda_{i_n}}(X))\, d\mathbb{P}\\
&= \varepsilon + \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{k} \rho(P_{i_1})\cdots\rho(P_{i_m})\mathrm{Diam}(\omega_{\lambda_{i_1}}\circ\cdots\circ\omega_{\lambda_{i_n}}(X))\\
&= \varepsilon + \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{k} \rho(P_{i_m})\cdots\rho(P_{i_{n+1}})\cdot\rho(P_{i_n})\cdots\rho(P_{i_1})\mathrm{Diam}(\omega_{\lambda_{i_1}}\circ\cdots\circ\omega_{\lambda_{i_n}}(X))\\
&= \varepsilon + \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{k} \rho(P_{i_m})\cdots\rho(P_{i_{n+1}})\cdot\rho(P_{i_n})\cdots\rho(P_{i_1})f_n(\alpha^{i_n,\ldots i_1,i_{n+1},\ldots,i_m})\\
&= \varepsilon + \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{k} \int_{[1;\,P_{i_n},\ldots,P_{i_1},P_{i_{n+1}},\ldots,P_{i_m}]} f_n(\alpha^{i_m,\ldots,i_{n+1},i_n,\ldots i_1})\, d\mathbb{P}\\
&< 2\varepsilon + \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{k} \int_{[1;\,P_{i_n},\ldots,P_{i_1},P_{i_{n+1}},\ldots,P_{i_m}]} f_n(\alpha)\, d\mathbb{P}\\
&= 2\varepsilon + \int_\Omega f_n\, d\mathbb{P}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left|\int_\Omega f_n\, d\mathbb{P} - \int_\Omega h_n\, d\mathbb{P}\right| < 2\varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$. Então

$$\int_\Omega f_n\, d\mathbb{P} = \int_\Omega h_n\, d\mathbb{P}.$$

□

Lema 7. *Fixe* $\rho \in \mathcal{M}_1(\Lambda)$. *Então* $\mathbb{P}(F) = 1$ *se, e somente se* $\mathbb{P}(S) = 1$.

Demonstração. Assuma que $\mathbb{P}(F) = 1$, pelo Lema 1 temos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega h\, d\mathbb{P} &= \int_\Omega \liminf_{n\to\infty} h_n\, d\mathbb{P}\\ &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega h_n\, d\mathbb{P}\\ &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega h_i\, d\mathbb{P}.\end{aligned}$$

Pelo Lema 6,

$$\begin{aligned}\int_\Omega h\, d\mathbb{P} &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega f_i\, d\mathbb{P}\\ &= \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_\Omega u_n\, d\mathbb{P}.\end{aligned}$$

Como $u_n(\alpha)/n$ converge para 0 em $\mathbb{P}$-quase todo ponto segue do Teorema 4 que

$$\int_\Omega h\, d\mathbb{P} = 0.$$

Como $h \geqslant 0$ em quase todo ponto, então $h = 0$ em quase todo ponto. Portanto $\mathbb{P}(S) = 1$.

Agora assuma que $\mathbb{P}(S) = 1$ por definição, h_n converge para 0 em $\mathbb{P}$-quase todo ponto. Mais uma vez usando o Teorema 4,

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega h_n\, d\mathbb{P} = \int_\Omega h\, d\mathbb{P} = 0.$$

Por outo lado,

$$\begin{aligned}\int_\Omega f\, d\mathbb{P} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_\Omega u_n\, d\mathbb{P}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega f_j\, d\mathbb{P}.\end{aligned}$$

Pelo lema anterior

$$\int_\Omega f\, d\mathbb{P} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega h_j\, d\mathbb{P} = 0.$$

Como $f \geqslant 0$ em quase todo ponto então $f = 0$ em quase todo ponto. Portanto $\mathbb{P}(S) = 1$. □

Considere também o conjunto

$$G = \left\{ \alpha \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \mathrm{Diam}(\omega_{\alpha_n} \circ \cdots \circ \omega_{\alpha_1}(X)) = 0 \right\}.$$

É obvio que $G \subset F$. Se o IFS ω é fracamente hiperbólico pelo lema 2 de [1], obtemos $S = G = F = \Omega$.

Dado um IFS $\omega : \Lambda \times X \to X$ é natural considerar a aplicação skew product $\Phi : \Omega \times X \to \Omega \times X$ definida por

$$\Phi(\alpha, x) = (\sigma(\alpha), \omega_{\alpha_1}(x)).$$

Considere a projeção $\Pi : \Omega \times X \to \Omega$ definida por $\Pi(\sigma, x) = \sigma$. No próximo resultado estudaremos medidas invariantes por Φ.

Proposição 5. *Sejam* μ_1 *e* μ_2 *medidas invariantes por* Φ. *Se* $\nu(F) = 1$ *e* $\Pi_*(\mu_1) = \Pi_*(\mu_2) = \nu$ *então* $\mu_1 = \mu_2$.

Demonstração. Seja r a métrica em $\Omega\times X$ definida por $r((\alpha, x), (\beta, y)) = D(\alpha, \beta) + d(x, y)$ e considere uma função Lipschitiziana $\varphi : \Omega \times X \to \mathbb{R}$ com constante de lipschitz c. Pelo Teorema 9 existe um conjunto de Borel A tal que $\mu_1(A) = 1$, e se $(\alpha, x) \in A$ então

$$\varphi^*(\alpha, x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(\Phi^i(\alpha, x)) \quad \text{existe.}$$

Considere o conjunto $B = A \cap (F \times X)$, observe que $\mu_1(B) = 1$ pois $\mu_1(F \times X) = \nu(F) = 1$. Afirmamos que se $(\alpha, x) \in B$ então $\varphi^*(\alpha, y)$ existe e $\varphi^*(\alpha, x) = \varphi^*(\alpha, y)$ para todo $y \in X$. De fato, observe que

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(\Phi^j(\alpha, x)) - \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(\Phi^j(\alpha, y)) \right| \leqslant \\
&\leqslant \frac{c}{n} \sum_{j=0}^{n-1} r((\Phi^j(\alpha, x), (\Phi^j(\alpha, y)) \\
&= \frac{c}{n} \sum_{j=0}^{n-1} r((\sigma^j(\alpha), \omega_{\alpha_j} \circ \cdots \circ \omega_{\alpha_1}(x)), (\sigma^j(\alpha), \omega_{\alpha_j} \circ \cdots \circ \omega_{\alpha_1}(y)) \\
&= \frac{c}{n} \sum_{j=0}^{n} (D(\sigma^j(\alpha), \sigma^j(\alpha)) + d(\omega_{\alpha_j} \circ \cdots \circ \omega_{\alpha_1}(x), \omega_{\alpha_j} \circ \cdots \circ \omega_{\alpha_1}(y))) \\
&= \frac{c}{n} \sum_{j=0}^{n} (d(\omega_{\alpha_j} \circ \cdots \circ \omega_{\alpha_1}(x), \omega_{\alpha_j} \circ \cdots \circ \omega_{\alpha_1}(y))) \\
&\leqslant \frac{c}{n} \sum_{j=0}^{n} \mathrm{Diam}(\omega_{\alpha_j} \circ \cdots \circ \omega_{\alpha_1}(X)).
\end{aligned}$$

Como $\alpha \in F$, pela definição de F temos que

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathtt{Diam}(\omega_{\alpha_j} \circ \cdots \circ \omega_{\alpha_1}(X)) = 0.$$

Portanto, $\varphi^*(\alpha, y)$ existe e $\varphi^*(\alpha, y) = \varphi^*(\alpha, x)$. Considere agora o conjunto

$$\Omega^* = \left\{\alpha \in F : \text{ existe } x \in X \text{ tal que } \varphi^*(\alpha, x) \text{ existe}\right\}.$$

Afirmamos que $\nu(\Omega^*) = \nu(F) = 1$, suponha que não seja, então existe algum $D \subset F$ com medida positiva tal que $\varphi^*(\alpha, x)$ não está definida para todo $x \in X$, se $\alpha \in D$. Observe que $\mu_1(D \times X) = \nu(D) > 0$, mas isto é um absurdo pois $\mu_1(B) = 1$.

Agora considere a função mensurável definida em q.t.p $g : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por $g(\alpha) = \varphi^*(\alpha, x)$ para qualquer $x \in X$, se $\alpha \in \Omega^*$. Como $\mu_2(\Omega^* \times X) = 1$, pelo Teorema 9 temos,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega\times X} \varphi \, d\mu_1 &= \int_{\Omega\times X} \varphi^* \, d\mu_1 \\
&= \int_{\Omega^*\times X} \varphi^* \, d\mu_1 \\
&= \int_{\Omega} g \, d\Pi_*(\mu_1) \\
&= \int_{\Omega} g \, d\nu \\
&= \int_{\Omega} g d\Pi_*(\mu_2) \\
&= \int_{\Omega\times X} \varphi^* d\mu_2 \\
&= \int_{\Omega^*\times X} \varphi \, d\mu_2.
\end{aligned}$$

Agora, usando que o espaço das funções Lipschitiziana definidas em $\Omega \times X$ é denso no espaço das funções contínuas definidas em $\Omega \times X$, podemos aproxima qualquer função contínua Ψ por funções Lipschitiziana Ψ_n, usando o Teorema 4 segue que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega\times X} f \, d\mu_1 = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega\times X} \Psi_n \, d\mu_1 &= \int_{\Omega\times X} \lim_{n\to\infty} \Psi_n \, d\mu_2 \\
&= \int_{\Omega\times X} \Psi \, d\mu_2.
\end{aligned}$$

Para toda função contínua Ψ em $\Omega \times X$. Portanto $\mu_1 = \mu_2$. $\square$

Para estudamos o suporte da medida μ_ρ, assuma que $\rho(U) > 0$ para todo conjunto $U \subset \Lambda$ aberto.

Afirmação 1. $\operatorname{supp}(\mu_\rho) = \overline{\Gamma(S)}$.

Demonstração. De fato, tome $a = \Gamma(\alpha)$ com $\alpha \in S$, observe que $\omega_\lambda(y) \in \Gamma(S)$ para cada $\lambda \in \Lambda$ e $y \in \Gamma(S)$, assim para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} T_\rho^n(\delta_a)(\Gamma(S)) &= \int_{\Lambda^n} \delta_{\omega_{\lambda_1}\circ\cdots\circ\omega_{\lambda_n}(a)}(\Gamma(S))d\rho^n(\lambda) \\ &= \int_{\Omega} \delta_{\omega_{\lambda_1}\circ\cdots\circ\omega_{\lambda_n}(a)}(\Gamma(S))d\mathbb{P} \\ &= \mathbb{P}(\Omega) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Pelo que já foi feito temos também que

$$T_\rho^n(\delta_a) \to \mu_\rho,$$

na topologia fraca*. Portanto,

$$\mu_\rho(\overline{\Gamma(S)}) \geqslant \lim_{n\to\infty} T_\rho^n(\delta_a)(\overline{\Gamma(S)}) = 1.$$

provando que $\operatorname{supp}(\mu_p) \subset \overline{\Gamma(S)}$.

Agora tome $p \in \overline{\Gamma(S)}$ e um conjunto aberto $U \subset X$ tal que $q \in U$. Pela continuidade de Γ, uma prova pode ser vista em [1], existem $R > 0$, $m \in \mathbb{N}$ e conjuntos abertos $U_1, ..., U_m \subset \Lambda$ tais que

$$\Gamma([1; U_1, ..., U_m] \cap S) \subset \overline{B_R(q)} \subset U.$$

Pela definição do operador T_ρ, para $n > m$ temos que

$$\begin{aligned} T_\rho^n(\delta_a)(\overline{B_R(p)}) &= \int_{\Lambda^n} \delta_{\omega_{\lambda_1}\circ\cdots\circ\omega_{\lambda_n}(a)}(\overline{B_R(p)})\, d\rho^n(\lambda) \\ &= \int_{\Omega} \delta_{\omega_{\lambda_1}\circ\cdots\circ\omega_{\lambda_n}(a)}(\overline{B_R(p)})\, d\mathbb{P}. \end{aligned}$$

Observe que $\omega_{\lambda_1} \circ \cdots \circ \omega_{\lambda_n}(a) = \Gamma(n_{\lambda_1} \circ \cdots \circ n_{\lambda_n}(\alpha))$, onde para cada $\lambda \in \Lambda$ a aplicação $\eta_\lambda : \Omega \to \Omega$ é definida por $\eta(\alpha_1, \alpha_2, ...) = (\lambda, \alpha_1, \alpha_2, ...)$. Consequentemente se $\lambda_i \in U_i$ para $i = 1, ..., n$ então

$$\omega_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \omega_{\alpha_n}(a) = \Gamma(\eta_{\lambda_1} \circ \cdots \circ \eta_{\lambda_m}(\alpha)) \in \Gamma([1; U_1, ..., U_m] \cap S).$$

Como $\Gamma([1; U_1, ..., U_m] \cap S) \subset \overline{B_R(p)} \subset U$ segue que

$$\begin{aligned} T_\rho^n(\delta_a)(\overline{B_R(p)}) &\geqslant \int_{[1;U_1,...,U_m]\cap S} \delta_{\omega_{\lambda_1}\circ\cdots\circ\omega_{\lambda_n}(a)}(\overline{B_R(p)})d\rho^n(\lambda) \\ &\geqslant \mathbb{P}([1; U_1, ..., U_m]). \end{aligned}$$

Portanto, $\mu_\rho(U) \geqslant \mu_\rho(\overline{B_R(p)}) \geqslant \mathbb{P}([1; U_1, ..., U_m]) > 0$ isso prova que $\overline{\Gamma(S)} \subset supp(\mu_\rho)$ e assim $\overline{\Gamma(S)} = supp(\mu_\rho)$. Com isso conclui-se a demonstração do Teorema 11. □

2.1.2 Teorema Ergódico para um IFS $\mathbb{P}$-fracamente hiperbólico

No próximo resultado provamos um lema importante para a demostração do Teorema ergódico para um IFS $\mathbb{P}$-fracamente hiperbólico.

Lema 8. *Sejam* X *um espaço métrico completo,* $T : X \to X$ *uma aplicação contínua e* μ *uma probabilidade tal que invariante por* T *e ergódica. Então existe um conjunto* $A \subset X$ *com* $\mu_\rho(A) = 1$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} T_*^j(\delta_p) = \mu$$

para todo $p \in A$*, na topologia fraca***.*

Demonstração. Utilizaremos o seguinte fato. Seja X um espaço métrico compacto então $C(X)$ é separável, ou seja possui um subconjunto enumerável e denso, $B = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...\} \subset C(X)$.

Usando o Teorema 9 em cada uma das $\varphi_j \in B$ temos que existe um conjunto $A_j \subset X$ com $\mu(A_j) = 1$ onde para todo $p \in A_j$ tem-se

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j(T^j(p)) \to \int_X \varphi_j d\mu.$$

Considere agora o conjunto $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$ como $\mu(A_j) = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$ segue que $\mu(A) = 1$. Então para todo $p \in A$ e todo $j \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_j(T^j(p)) \to \int_X \varphi_j \, d\mu.$$

Como B é denso em $C(X)$ então podemos aproximar qualquer função contínua $\varphi : X \to \mathbb{R}$ por funções $\varphi_{j_k} \in B$. Portanto pelo Teorema 4, se $p \in A$ então

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(T^j(p)) \to \int_X \varphi d\mu.$$

Seja

$$\mu_\rho^n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} T_*^j(\delta_p),$$

observe que

$$\begin{aligned}\int_X \varphi d\mu_\rho^n &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\int_X \varphi d(T_*^j(\delta_p))\\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\int_X \varphi\circ T^j d(\delta_p)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi\circ T^j(p).\end{aligned}$$

Com isso concluímos a demonstração do Lema 11. □

Teorema 12 (Teorema ergódico para IFS $\mathbb{P}$-fracamente hiperbólico)**.** *Fixe* $\rho \in \mathcal{M}_1(\Lambda)$. *Se o IFS* ω *é* $\mathbb{P}$*-fracamente hiperbólico então para toda função contínua* $f : X \to \mathbb{R}$*, para todo* $x \in X$ *e para* $\mathbb{P}$*-q.t.p* $\alpha \in \Omega$ *temos*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} f(\omega_{\alpha_j}\circ\cdots\circ\omega_{\alpha_1}(x)) = \int_X f d\mu_\rho.$$

Demonstração. Pela ergodicidade de $(\mathbb{P},\sigma)$ temos que existe um conjunto $\tilde{\Omega}\subset\Omega$ com $\mathbb{P}(\tilde{\Omega}) = 1$ tal que se $\alpha\in\tilde{\Omega}$ então

$$\lim \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sigma_*^j(\delta_\alpha) = \mathbb{P},$$

na topologia fraca*.

Agora tome $\alpha\in\tilde{\Omega}$, observe que se ξ é um ponto de acumulação da sequência

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\Phi_*^j(\delta_{(\alpha,x)})$$

então ξ é uma medida invariante pela função Φ tal que $\Pi_*(\xi) = \mathbb{P}$. Por outro lado pela Proposição 5 e o Lema 7 segue que $\xi = \mathbb{P}^\Phi = \mathbb{P}\times\mu_\rho$ uma vez que $\mathbb{P}\times\mu_\rho$ é uma medida invariante por Φ e portanto,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\Phi_*^j(\delta_{(\alpha,x)}) = \mathbb{P}\times\mu_\rho.$$

Agora, considere a função contínua $\varphi : \Omega\times X\to\mathbb{R}$ dada por $\varphi(\alpha,x) = f(x)$, observe que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(\Phi^j(\alpha,x)) &= \int_{\Omega\times X}\varphi^*(\alpha,x)\,d(\mathbb{P}\times\mu_\rho)\\ &= \int_X f(x)d\mu_\rho.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(\Phi^j(\alpha,x)) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(\omega_{\alpha_j}\circ\cdots\circ\omega_{\alpha_1}).$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(\omega_{\alpha_j}\circ\cdots\circ\omega_{\alpha_1}) = \int_X f(x)d\mu_\rho.$$

Com isso concluímos a prova do Teorema 12. □

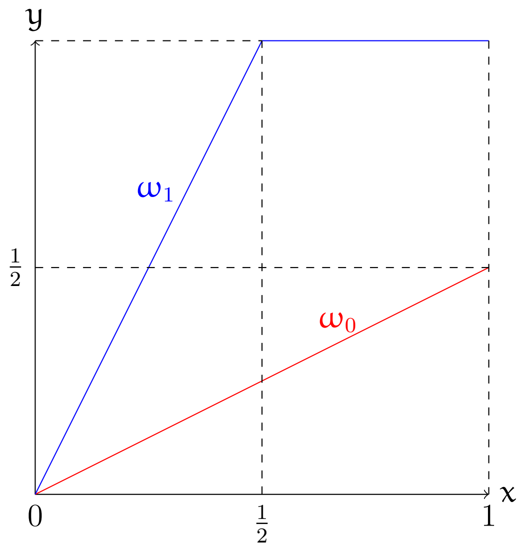
Capítulo 3

Exemplos

Nesta seção, estudaremos dois exemplos de sistemas iterados de funções $\mathbb{P}$-fracamente hiperbólicos que não são fracamente hiperbólicos.

3.0.1 Exemplo 1

Quando o IFS é fracamente hiperbólico, pelo Lema 2.2 de [1] segue que $S = G = \Omega$, no entanto, se o IFS é apenas $\mathbb{P}$-fracamente hiperbólico, é possível que $\mathbb{P}(G) = 0$. Veremos no exemplo abaixo um IFS onde $\mathbb{P}(S) = 1$, mas $\mathbb{P}(G) = 0$. A ideia para fazer este exemplo vem da discussão feita por Öberg em [4]. Considere o IFS onde $\Lambda = \{0, 1\}$, $X = [0, 1]$, $\omega_0(x) = \frac{x}{2}$ e $\omega_1(x) = 2x$ para $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$, $\omega_1(x) = 1$ para $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$.



Seja p a probabilidade em Λ, onde $p(\{0\}) = p(\{1\}) = 1/2$. Afirmamos que $p(G) = 0$. De fato, sabe-se que existe um conjunto $A \subset \Omega$ com $p(A) = 1$ tal que se $\sigma \in A$ então existe uma sequência $n_k \to \infty$ tal que

$$\sum_{j=1}^{n_k} (-1)^{\sigma_j} = 0,$$

veja por exemplo em [11]. Tome $\sigma \in A$, se existir uma sequência $m_K \to \infty$ tal $\mathtt{Diam}(\omega_{m_k} \circ \cdots \omega_1([0,1])) \geqslant \frac{1}{2}$ então $\sigma \notin G$. Suponha que exista $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathtt{Diam}(\omega_n \circ \cdots \omega_1([0,1])) < \frac{1}{2}$ sempre que $n > N_0$.

Observe que $0 \in \omega_n \circ \cdots \omega_1([0,1])$ para cada n. Assim, para $n \geqslant N_0$, temos que $\omega_n \circ \cdots \omega_1([0,1]) \subset [0,1/2]$. Por outro lado, se $x \in [0,1/2]$ então

$$\omega_0 \circ \omega_1(x) = \omega_1 \circ \omega_0(x) = x.$$

Portanto, para $n > N_0$, temos

$$\mathtt{Diam}(\omega_n \circ \cdots \circ \omega_1([0,1])) = 2^{r_1} 2^{-r_0} \mathtt{Diam}(\omega_n \circ \cdots \circ \omega_1([0,1])),$$

onde $r_1 = \#\{N_0 < j \leqslant n : \sigma_j = 1\}$ e $r_0 = \#\{N_0 < j \leqslant n : \sigma_j = 0\}$. Como $\sigma \in A$ temos que existe uma sequência $n_k \to \infty$ tal que

$$\sum_{j=1}^{n_k} (-1)^{\sigma_j} = 0,$$

para $n_k > N_0$ temos que $\mathtt{Diam}(\omega_{n_k} \circ \cdots \circ \omega_1([0,1])) \geqslant 2^{-N_0} \mathtt{Diam}(\omega_n \circ \cdots \omega_1([0,1]))$ portanto $\sigma \notin G$ e $\mathbb{P}(G) = 0$.

Agora mostraremos que $\mathbb{P}(S) = 1$. Sabe-se que para cada $l \in \mathbb{Z}$ existe um conjunto A_l com $\mathbb{P}(A_l) = 1$ tal que se $\sigma \in A_l$, existe uma sequência $n_k \to \infty$ tal que $\sum_{j=1}^{n_k} (-1)^{\sigma_j} = 1$ e tome $\sigma \in \bigcap_{l=1}^{\infty} A_l$. Note que

$$\mathtt{Diam}(\omega_1 \circ \cdots \omega_{n_l}([0,1])) \leqslant 2^{-l}.$$

Por outro lado como $\lim_{n\to\infty} \mathtt{Diam}(\omega_1 \circ \cdots \omega_n([0,1]))$ existe segue que $\lim_{n\to\infty} \mathtt{Diam}(\omega_1 \circ \cdots \omega_n([0,1])) = 0$. Isto prova que $\mathbb{P}(S) = 1$. Pelo Lema 7 temos que $\mathbb{P}(F) = 1$.

3.0.2 Exemplo 2

Considere o espaço métrico $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$ com a métrica usual e o IFS $\omega : \Lambda \times \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ where $\Lambda = \{0,1\}$, $\omega_0 = z/2$ and $\omega_1 = z^2$. Observe que S é o conjunto de pontos $\sigma \in \Sigma$ tal que o conjunto $\{n \in \mathbb{N} : \sigma_j = 0\}$ é infinito assim $\Sigma \backslash S = \bigcup_{j=0}^{\infty} \beta^{-j}(\{(1,1,1,...)\})$. Em particular, $\mathbb{P}(S) = 1$ e $S \neq \Sigma$.

Capítulo 4

Apêndice

Neste capítulo iremos apresentar e demonstrar o Teorema Ergódico de Birkhoff, Teorema 9, as ideias da prova foram retiradas de [12]. Para isto, vamos apresentar alguns resultados preliminares.

Teorema 13 (Teorema Ergódico Maximal)**.** *Seja* $f : X \to X$ *uma transformação mensurável e* μ *uma probabilidade invariante por* f*. Dada qualquer função integrável* $\varphi : X \to \mathbb{R}$ *e sendo* $\varphi^*(x) = \sup_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x))$*, temos*

$$\int_D \varphi \; d\mu \geqslant 0,$$

onde $D = \{x \in X; \varphi^*(x) > 0\}$.

Antes de iniciarmos a demonstração deste teorema, apresentaremos um lema que será útil em nossa demonstração.

Lema 9. *Seja* $U : L^1(\mu) \to L^1(\mu)$ *um operador linear positivo satisfazendo* $\|U\|_1 \leqslant 1$*. Dado um natural* $N > 0$ *e* $\varphi \in L^1(\mu)$ *defina*

$$\varphi_0 = 0, \varphi_1 = \varphi, ..., \varphi_n = \sum_{j=0}^{n-1} U^j \varphi, \; 1 \leqslant n \leqslant N, \quad e \quad \psi_N = \max_{0 \leqslant i \leqslant N} \varphi_i.$$

Então

$$\int_{A_N} \varphi \; d\mu \geqslant 0,$$

onde $A_N = \{x \in X; \; \psi_N(x) > 0\}$.

Demonstração. Sejam $f, g \in L^1(\mu)$ com $f(x) \geqslant g(x)$, para todo $x \in X$. Como U é um operador linear positivo, então $Uf(x) \geqslant Ug(x)$ para todo $x \in X$.

Observe que $\psi_N \geqslant 0$ para qualquer $N \in \mathbb{N}$ e além disso, $\psi_N \in L^1(\mu)$.

Dado $0 \leqslant k \leqslant N-1$, temos

$$\psi_N \geqslant \varphi_k \Rightarrow U\psi_N \geqslant U\varphi_k \Rightarrow U\psi_N + \varphi \geqslant \varphi + U\varphi_k.$$

Note que

$$\varphi + U\varphi_k = \varphi + U(\sum_{j=0}^{k-1} U^j\varphi) = \varphi + \sum_{j=1}^{k} U^j\varphi = \varphi + \sum_{j=0}^{k} U^j\varphi = \varphi_{k+1}.$$

Ou seja, para cada k com $0 \leqslant k \leqslant N-1$, temos $U\psi_N + \varphi \geqslant \varphi_{k+1}$, e então

$$U\psi_N + \varphi \geqslant \max_{1\leqslant i\leqslant N} \varphi_i. \tag{4.1}$$

Segue-se a partir de (4.1) que para $x \in A_N = \{x \in X; \psi_N(x) > 0\}$, temos

$$0 < \psi_N(x) = \max_{0\leqslant i\leqslant N} \varphi_i(x) = \max\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_N(x)\} = \max\{0, \varphi_1(x), \cdots, \varphi_N(x)\}.$$

Assim, como $\max\{0, \varphi_1(x), \cdots, \varphi_N(x)\} > 0$ temos

$$\max\{\varphi_1(x), \cdots, \varphi_N(x)\} = \max\{0, \varphi_1(x), \cdots, \varphi_N(x)\} > 0 \Rightarrow \max_{1\leqslant i\leqslant N} \varphi_i > 0.$$

Portanto,

$$U\psi_N + \varphi \geqslant \max_{1\leqslant i\leqslant N} \varphi_i > 0 \text{ em } A_N.$$

Como $U\psi_N + \varphi, \psi_N \in L^1(\mu)$ e A_N é o conjunto dos pontos que ψ_N é positiva, segue que

$$\begin{aligned} &\int_{A_N} (U\psi_N + \varphi)\, d\mu \geqslant \int_{A_N} \psi_N\, d\mu \\ \Rightarrow &\int_{A_N} \varphi\, d\mu \geqslant \int_{A_N} \psi_N\, d\mu - \int_{A_N} U\psi_N\, d\mu \end{aligned}$$

Como $\psi_N = 0$ em $X \backslash A_N$, então

$$\int_{A_N} \psi_N\, d\mu = \int_X \psi_N\, d\mu$$

Em particular, $\psi_N \geqslant 0$ e portanto $U\psi_N \geqslant 0$. Daí,

$$\int_{A_N} \varphi\, d\mu \geqslant \int_{A_N} \psi_N\, d\mu - \int_{A_N} U\psi_N\, d\mu \geqslant \int_X \psi_N\, d\mu - \int_X U\psi_N\, d\mu \tag{4.2}$$

Por hipótese, $||U||_1 \leqslant 1$, então

$$\int_X |U\psi_N|\, d\mu \leqslant \int_X |\psi_N|\, d\mu,$$

e isto implica em

$$\int_X U\psi_N \, d\mu \leqslant \int_X \psi_N \, d\mu,$$

uma vez que $\psi_N \geqslant 0 \Rightarrow U\psi_N \geqslant 0$ e, consequentemente, $|\psi_N| = \psi_N$ e $|U\psi_N| = U\psi_N$. Da desigualdade acima, segue que

$$\int_X \psi_N \, d\mu - \int_X U\psi_N \, d\mu \geqslant 0,$$

donde, substituindo em (4.2), obtemos

$$\int_{A_N} \varphi \, d\mu \geqslant 0.$$

Isto conclui a demonstração do lema. □

Demonstração do Teorema 13. Considere $U_f : L^1(\mu) \to L^1(\mu)$, o operador de Koopman, isto é, $U_f(\varphi) = \varphi \circ f$. Então,

$$\int_X |U_f(\varphi)| d\mu = \int_X |\varphi \circ f| d\mu = \int_X |\varphi| \circ f \, d\mu = \int_X |\varphi| d(f_*\mu) = \int_X |\varphi| \, d\mu.$$

Ou seja, $\|U_f(\varphi)\|_{L^1} = \|\varphi\|_{L^1}$.

Se $\psi : X \to \mathbb{R}$ é uma outra função integrável tal que $\varphi(x) \geqslant \psi(x)$ para todo $x \in X$, então

$$U_f(\varphi)(x) = \varphi(f(x)) \geqslant \psi(f(x)) = U_f(\psi)(x),$$

logo, U_f é um operador linear positivo com $\|U_f\| \leqslant 1$.

Sejam φ_n, ψ_N e A_N como no Lema 9. Afirmamos que $D = \bigcup_{j\geqslant 1} A_j$. De fato, se $x \in D$, temos $\varphi^*(x) > 0$, ou seja,

$$\sup_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) > 0 \Rightarrow \sup_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U_f^j(\varphi)(x) > 0.$$

Pela definição de supremo, dado ϵ suficientemente pequeno, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n_0} \sum_{j=0}^{n_0-1} U_f(\varphi)(x) > \sup_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U_f^j(\varphi)(x) - \epsilon > 0.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\max_{1\leqslant i\leqslant n_0} \frac{1}{i} \sum_{j=0}^{i-1} U_f(\varphi)(x) > 0 \Rightarrow & \max_{1\leqslant i\leqslant n_0} \varphi_i(x) > 0 \\
\Rightarrow & \max_{0\leqslant i\leqslant n_0} \varphi_i(x) > 0 \\
\Rightarrow & \psi_{n_0}(x) > 0 \\
\Rightarrow & x \in A_{n_0} \\
\Rightarrow & x \in \bigcup_{j\geqslant 1} A_j.
\end{aligned}$$

Reciprocamente, dado $x \in \bigcup_{j\geqslant 1} A_j$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned}
x \in A_{n_1} &\Rightarrow \psi_{n_1}(x) > 0 \\
&\Rightarrow \max_{0\leqslant i\leqslant n_1} \varphi_i(x) > 0 \\
&\Rightarrow \max_{1\leqslant i\leqslant n_1} \varphi_i(x) > 0 \\
&\Rightarrow \max_{1\leqslant i\leqslant n_1} \frac{1}{i}\sum_{j=0}^{i-1} U_f^j(\varphi)(x) > 0 \\
&\Rightarrow \max_{1\leqslant i\leqslant n_1} \frac{1}{i}\sum_{j=0}^{i-1} \varphi(f^j(x)) > 0 \\
&\Rightarrow \sup_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) > 0 \\
&\Rightarrow \varphi^*(x) > 0 \\
&\Rightarrow x \in D.
\end{aligned}$$

Logo, $D = \bigcup_{j\geqslant 1} A_j$, e isto prova a afirmação feita.

Agora, observe que se $x \in A_n$, temos

$$\psi_n(x) > 0 \Rightarrow \max_{0\leqslant i\leqslant n} \varphi_i > 0 \Rightarrow \max_{0\leqslant i\leqslant n+1} \varphi_i > 0 \Rightarrow \psi_{n+1}(x) > 0 \Rightarrow x \in A_{n+1}.$$

Assim, $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada e pelo Lema 9, segue que

$$\int_D \varphi \; d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} \varphi \; d\mu \geqslant 0.$$

Isto conclui a demonstração do teorema. □

Corolário 1. *Considere uma transformação* $f : X \to X$*,* $\varphi \in L^1(\mu), \alpha \in \mathbb{R}$ *e* $\varphi^*(x) = \sup_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x))$*. Então*

$$\int_{D_\alpha} \varphi \; d\mu \geqslant \alpha\mu(D_\alpha),$$

onde $D_\alpha = \{x \in X; \varphi^*(x) > \alpha\}$.

Demonstração. Defina $\psi(x) = \varphi(x) - \alpha$. Então

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \psi(f^j(x)) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} (\varphi(f^j(x)) - \alpha).$$

Observe que $\psi^*(x) = \varphi^*(x) - \alpha$ e defina $A = \{x \in X; \psi^*(x) > 0\}$. Daí,

$$\int_A \psi \, d\mu = \int_{D_\alpha} \varphi - \alpha \, d\mu = \int_{D_\alpha} \varphi \, d\mu - \alpha\mu(D_\alpha).$$

Por outro lado, pelo Teorema Ergódico Maximal, temos $\int_A \psi \, d\mu \geqslant 0$.

Logo,

$$\int_{D_\alpha} \varphi \, d\mu \geqslant \alpha\mu(D_\alpha).$$

Isto conclui a demonstração do corolário. □

4.1 Demonstração do Teorema 9:

Sejam

$$\varphi_1(x) = \liminf_n \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x))$$

e

$$\varphi_2(x) = \limsup_n \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x))$$

Obviamente $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$. Nosso intuito é mostrar que $\varphi_1 = \varphi_2$ em μ-q.t.p. $x \in X$. Considere para $\alpha < \beta$ o seguinte conjunto $E_{\alpha,\beta} = \{x \in X; \varphi_1(x) < \alpha < \beta < \varphi_2(x)\}$, daí, temos que

$$\bigcup_{\alpha,\beta \in \mathbb{Q}} E_{\alpha,\beta} = \{x \in X; \varphi_1(x) < \varphi_2(x)\}.$$

Note que $E_{\alpha,\beta}$ é invariante. De fato, observe que

$$\begin{aligned}
\varphi_2(f(x)) &= \limsup_n \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(f(x))) \\
&= \limsup_n \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \varphi(f^j(x)) \\
&= \limsup_n \frac{1}{n} \left(\sum_{j=0}^{n} \varphi(f^j(x)) - \varphi(x) \right) \\
&= \limsup_n \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \varphi(f^j(x)) - \frac{\varphi(x)}{n} \right) \\
&= \limsup_n \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \varphi(f^j(x)) \\
&= \varphi_2(x),
\end{aligned}$$

como queríamos. O mesmo vale para φ_1.

Afirmamos que $\mu(E_{\alpha,\beta}) = 0$. De fato, seja $f : E_{\alpha,\beta} \to E_{\alpha,\beta}$ a restrição de f ao conjunto invariante $E_{\alpha,\beta}$ e $\varphi : E_{\alpha,\beta} \to \mathbb{R}$ a restrição da função integrável φ ao conjunto $E_{\alpha,\beta}$.

Da definição de $E_{\alpha,\beta}$, temos

$$\beta < \varphi_2(x) \Rightarrow \sup \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) > \beta \Rightarrow \varphi^*(x) > \beta.$$

Daí, aplicando o corolário anterior, obtemos

$$\int_{D_\beta} \varphi \ d\mu \geqslant \beta\mu(D_\beta),$$

onde $D_\beta = \{x \in E_{\alpha,\beta}; \varphi^*(x) > \beta\} = E_{\alpha,\beta}$. Ou seja,

$$\int_{E_{\alpha,\beta}} \varphi \ d\mu \geqslant \beta\mu(E_{\alpha,\beta}). \tag{4.3}$$

Note ainda que

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) < \alpha &\Rightarrow \inf \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) < \alpha \\
&\Rightarrow -\inf \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) > -\alpha \\
&\Rightarrow \sup \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} -\varphi(f^j(x)) > -\alpha \\
&\Rightarrow (-\varphi)^* > -\alpha.
\end{aligned}$$

Novamente pelo corolário anterior,

$$\begin{aligned}
&\int_{D_{-\alpha}} -\varphi \ d\mu \geqslant -\alpha\mu(D_{-\alpha}) \\
\Rightarrow &\int_{E_{\alpha,\beta}} -\varphi \ d\mu \geqslant -\alpha\mu(E_{\alpha,\beta}) \\
\Rightarrow &\int_{E_{\alpha,\beta}} \varphi \ d\mu \leqslant \alpha\mu(E_{\alpha,\beta}),
\end{aligned} \tag{4.4}$$

onde $D_{-\alpha} = \{x \in E_{\alpha,\beta}; (-\varphi)^* > -\alpha\}$ Portanto, de (4.3) e (4.4), temos que

$$\beta\mu(E_{\alpha,\beta}) \leqslant \alpha\mu(E_{\alpha,\beta}).$$

Como $\alpha < \beta$, segue que $\mu(E_{\alpha,\beta}) = 0$.

Portanto, isso mostra que o limite abaixo existe

$$\widetilde{\varphi}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)),$$

pois $\mu\left(\bigcup_{\alpha,\beta\in\mathbb{Q}} E_{\alpha,\beta}\right) = 0$.

Agora queremos mostrar que $\widetilde{\varphi}$ é integrável, ou seja, que $\int_X |\widetilde{\varphi}| d\mu < \infty$. Para tanto, note que

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(f^j(x))\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}|\varphi|(f^j(x)).$$

Daí,

$$\int_X |\widetilde{\varphi}| d\mu = \int_X \liminf_n \left|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(f^j(x))\right| d\mu.$$

Pelo Lema 1,

$$\begin{aligned}
\int_X \liminf_n \left|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(f^j(x))\right| d\mu &\leqslant \liminf_n \int_X \left|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(f^j(x))\right| d\mu \\
&\leqslant \liminf_n \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\int_X |\varphi|\circ f^j \, d\mu \\
&= |\varphi_1| \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Portanto, $\widetilde{\varphi}$ é integrável.

Para finalizar a demonstração do teorema, resta mostrar que $\int_X \widetilde{\varphi}(x) d\mu(x) = \int_X \varphi(x)\, d\mu(x)$. Considere os conjuntos

$$A_{n,k} = \left\{x \in X; \frac{k}{2^n} \leqslant \widetilde{\varphi}(x) \leqslant \frac{k+1}{2^n}\right\} \quad \text{para todo} \;\; n \in \mathbb{N} \text{ e } k \in \mathbb{Z}.$$

Observe que

$$\frac{k}{2^n}\mu(A_{n,k}) \leqslant \int_{A_{n,k}} \widetilde{\varphi} d\mu \leqslant \frac{k+1}{2^n}\mu(A_{n,k}). \tag{4.5}$$

Considere agora a restrição das funções f e φ ao conjunto $A_{n,k}$. Obviamente, $\varphi : A_{n,k} \to \mathbb{R}$ está bem definida. Mostremos que que $f : A_{n,k} \to A_{n,k}$ também está bem definida. Dado $x \in A_{n,k}$, queremos mostrar que $f(x) \in A_{n,k}$.

De fato,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(f(x)) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(f(x))) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^{j+1}(x)) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \varphi(f^{j}(x)) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n} \varphi(f^{j}(x)) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \left(\sum_{j=0}^{n} \varphi(f^{j}(x)) - \varphi(x) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \varphi(f^{j}(x)) - \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(x)}{n} \\
&= \widetilde{\varphi}(x),
\end{aligned}
$$

ou seja, $\widetilde{\varphi}(f(x)) = \widetilde{\varphi}(x)$ e, portanto, $f(x) \in A_{n,k}$, o que implica que $f : A_{n,k} \to A_{n,k}$ está bem definida.

Dado $\epsilon > 0$, se $x \in A_{n,k}$, então $\widetilde{\varphi}(x) \geqslant \frac{k}{2^n} > \frac{k}{2^n} - \varepsilon$.

Pelo Corolário 1,

$$
\int_{\{x\in A_{n,k};\widetilde{\varphi}(x)>\frac{k}{2^n}-\varepsilon\}} \varphi \; d\mu = \int_{A_{n,k}} \varphi \; d\mu \geqslant \left(\frac{k}{2^n} - \varepsilon\right) \mu(A_{n,k}).
$$

Fazendo $\epsilon \to 0$, obtemos

$$
\int_{A_{n,k}} \varphi \; d\mu \geqslant \frac{k}{2^n} \mu(A_{n,k}). \tag{4.6}
$$

Analogamente,

$$
\int_{\{x\in A_{n,k};-\widetilde{\varphi}(x)>-\frac{k+1}{2^n}\}} -\varphi \; d\mu = \int_{A_{n,k}} -\varphi \; d\mu \geqslant \left(-\frac{k+1}{2^n}\right) \mu(A_{n,k}),
$$

ou seja,

$$
\int_{A_{n,k}} \varphi \; d\mu \leqslant \frac{k+1}{2^n} \mu(A_{n,k}). \tag{4.7}
$$

De (4.6) e (4.7) obtemos que

$$
\frac{k}{2^n} \mu(A_{n,k}) \leqslant \int_{A_{n,k}} \varphi \; d\mu \leqslant \frac{k+1}{2^n} \mu(A_{n,k}). \tag{4.8}
$$

Note que, fixado n, o espaço X pode ser escrito como a união disjunta $X = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} A_{n,k}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\left|\int_X \widetilde{\varphi} d\mu - \int_X \varphi \ d\mu\right| &= \left|\int_{\cup A_{n,k}} \widetilde{\varphi} d\mu - \int_{\cup A_{n,k}} \varphi \ d\mu\right| \\
&= \left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{A_{n,k}} \widetilde{\varphi} d\mu - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{A_{n,k}} \varphi \ d\mu\right| \\
&= \left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\int_{A_{n,k}} \widetilde{\varphi} d\mu - \int_{A_{n,k}} \varphi \ d\mu\right)\right| \\
&\leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\int_{A_{n,k}} \widetilde{\varphi} d\mu - \int_{A_{n,k}} \varphi \ d\mu\right|. \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

de (4.5) e (4.8), obtemos

$$\left|\int_{A_{n,k}} \widetilde{\varphi} d\mu - \int_{A_{n,k}} \varphi \ d\mu\right| \leqslant \frac{1}{2^n}\mu(A_{n,k}).$$

Passando ao somatório ambos os membros da desigualdade, encontramos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\int_{A_{n,k}} \widetilde{\varphi} d\mu - \int_{A_{n,k}} \varphi \ d\mu\right| &\leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2^n}\mu(A_{n,k}) \\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu(A_{n,k}) \\
&= \frac{1}{2^n}\mu(X).
\end{aligned}$$

Substituindo a desigualdade acima em (4.9), segue que

$$\left|\int_X \widetilde{\varphi} d\mu - \int_X \varphi \ d\mu\right| \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\int_{A_{n,k}} \widetilde{\varphi} d\mu - \int_{A_{n,k}} \varphi \ d\mu\right| \leqslant \frac{1}{2^n}\mu(X).$$

Fazendo $n \to \infty$, concluímos que

$$\int_X \widetilde{\varphi} d\mu = \int_X \varphi \ d\mu.$$

Isto encerra a demonstração do teorema.

Referências Bibliográficas

[1] Arbieto, A., Junqueira, A., Santiago, B. - *On Weakly Hyperbolic Iterated Function Systems*. Bull Braz Math Soc, New Series-2016.

[2] Barnsley, M.F., - *Fractal image compression*. Notices Am. Math. Soc - 1996.

[3] Barnsley, M.F., Elton, J.H., Hardin, D.P., - *Recurrent Iterated Function Systems. Constructive Approximation*. Springer, New York - 1989.

[4] Billingsley, P., - *Probability and Measure*. Wiley, New York - 1986.

[5] Edalat, A. - *Power Domains and Iterated Function Systems*. information and computation 124 - 1996.

[6] Folland, Gerald B. - *Real Analysis Mordern techiques and their Applications*. Second Edition - 1999.

[7] Hutchinson, J, E. - *Fractals and self similarity*. Indiana University Math- ematics Journal - 1981.

[8] Kravchenko, A.S., - *Completeness of the space of separablemeasures in theKantorovich-Rubinshteinmetric*. Sib. Math. J - 2006.

[9] Marcelo, V., Oliveira. K. - *Fundamentos de teoria ergódica*. SBM, 2019.

[10] Melo, Ì. D., - *On $\mathbb{P}$-Weakly Hyperbolic Iterated Function Systems*. Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series - 2017.

[11] Öberg, A., - *Approxiation of invariant measures for random iterations*. Rocky Mt. J. Math - 2006.

[12] Walters, P., - *An introduction to ergodic theroy*. Graduate Texts in Mathematcs, 79. Springerverlag, New York-Berlin, 1982.

[13] Williams, R.F., - *Composition of contractions*. Bol. Soc. Brasil. Mat - 1971.