Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Capacidade Biharmônica e Autovalores Biharmônicos

Marcelo Ferreira da Silva

Teresina - 2019

Marcelo Ferreira da Silva

Dissertação de Mestrado:

Capacidade Biharmônica e Autovalores Biharmônicos

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Leandro de Freitas Pessoa
Co-Orientador:
Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa

Teresina - 2019

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Capacidade biharmônica e autovalores biharmônicos e buckling

Marcelo Ferreira da Silva

Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 17 de Outubro de 2019.

Banca Examinadora:

Leandro de Freitas Pessoa
Prof. Dr. Leandro de Freitas Pessoa - Orientador

Paulo Alexandre Araújo Sousa
Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa (UFPI)

Prof. Dr. Barnabé Pessoa Lima (UFPI)

José Fábio Bezerra Montenegro
Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro (UFC)

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Comunitária Jornalista Carlos Castello Branco
Serviço de Processos Técnicos

S586c Silva, Marcelo Ferreira da.
Capacidade biharmônica e autovalores biharmônicos / Marcelo Ferreira da Silva. -- 2019.
68 f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Teresina, 2019.
"Orientador: Prof. Dr. Leandro de Freitas Pessoa. "
"Co-Orientador: Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa."

1. Geometria riemanniana. 2. Capacidade biharmônica. 3. Autovalores biharmônicos. 4. Subvariedades Lagrangianas mínimas. I. Pessoa, Leandro de Freitas. II. Sousa, Paulo Alexandre Araújo. III. Título.

CDD 516.373

Elaborado por Thais Vieira de Sousa Trindade - CRB-3/1282

À minha mãe Francisca Maria, aos meus familiares e amigos.

Agradecimentos

Agradeço Primeiramente a Deus, pois sem ele nada seria possível. À minha amada mãe Francisca Maria pelo carinho e por mostrar-me que estudo seria a melhor oportunidade para transformar minha existência. Aos meus irmãos Júlio, Adriano, Antonio Francisco, Claudia, Cleudia, Sílvia, Silviany, Lívia pelo incentivo para que não desanimasse diante das dificuldades. Às minhas tias Vera, Lurdes e Lucía.

Agradeço meu Orientador Leandro de Freitas Pessoa e ao meu Co-orientador Paulo Alexandre Araújo Sousa por terem cedido seu tempo precioso para se dedicar à minha orientação e pela grande paciência que sempre demostraram ter. Aos professores José Fábio Bezerra Montenegro, Barnabé Pessoa Lima que disponibilizaram-se fazer parte da banca.

Agradeço aos meus colegas da UESPI: Milena Oliveira, André Rocha, Ingride Rodrigues, Railson Chaves, Valdelice Miranda, Werlane Oliveira, Fernanda Brito; que me incentivaram na busca pelo mestrado. Em especial ao Leonardo Nascimento, pois estudamos muitas vezes juntos para seleção e sempre procurou dá-me força para não desanimar.

Agradeço aos meus amigos de infância Antônio Nonato, Antônio Wilson, Luan Gomes, José Miguel, que propiciaram grandes momentos de alegria.

Agradeço aos meus colegas de mestrado da UFPI: Felipe de Sales, Francimar Vieira, Dieme Pereira, Raimundo Bruno, Gustavo de Sousa, Tiago Mayson, João Vinicius, Pedro Rodrigues, José Marcio, Christopher Carlisson, Erisvaldo Véras, especialmente ao meu amigo Thassio Luan (conterrâneo, que me acompanhou e ajudou desde o início dessa peleja).

Agradeço aos professores José Arimatéia, Afonso Noberto, Mauro Clark, Rosário, Isoleter Ferreira, Rondinelle Marcolino, Italo Dowell, Halyson Irene, Newton Luís, Aldenor Filho.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

"*Todo aquele, pois, que escuta estas minhas palavras e as pratica, assemelhá-lo-ei ao homem prudente, que edificou a sua casa sobre a rocha.*".

Mateus 7:24.

Resumo

O escopo deste trabalho é descrever estimativas relacionadas aos autovalores de operadores biharmônicos, como o autovalor de *buckling*, no ambiente de variedades Riemannianas abertas e completas. Ademais, discutimos o conceito de capacidade biharmônica introduzida em [14]. Uma relação direta sobre a nulidade destes autovalores e a capacidade biharmônica é demonstrada no caso em que a variedade Riemanniana completa seja parabólica. Além disso, apresentamos estimativas para o autovalor de *buckling* generalizado, e uma aplicação para o estudo da estabilidade de subvariedades Lagrangianas mínimas em variedades Kähler.
Palavras chave: Capacidade Biharmônica, Autovalores Biharmônicos, Subvariedades Lagrangianas mínimas.

Abstract

This work is intended to describe estimates related to eigenvalues from biharmonic operators as the buckling eigenvalue in the set up of open complete Riemannian manifolds. We also discuss the concept of biharmonic capacity introduced in [14]. A vanishing property for those eigenvalues and the biharmonic capacity is showed in the case of the Riemannian manifold is complete and parabolic. Furthermore, we present estimates for the generalized buckling eigenvalue, and an application in the study of stability properties for minimal Lagrangian submanifolds in Kähler manifolds.
Keywords: Biharmonic Capacity, Biharmonic Eigenvalues, Minimal Lagrangian Submanifolds.

Sumário

Introdução

Neste trabalho trataremos propriedades analíticas e potenciais relacionadas ao operador biharmônico $\Delta^2 = \Delta \circ \Delta$. Tal operador constitue um modelo de operador de quarta ordem cujas aplicações mais pertinentes são provenientes do ramo da física de materiais que estuda a elasticidade de lâminas (ver [15]). Em comparativo com o caso harmônico no qual o Laplaciano descreve o comportamento de membranas, o operador biharmônico descreve o comportamento da energia envolvida na deformação de lâminas. Dentre os problemas aqui estudados, com condições de bordo de Dirichlet e Neumann, destaca-se o *clamped plate*

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{em} \quad \Omega, \\ u = \partial_\eta u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Estaremos interessados no estudo de alguns tipos de autovalores para o operador biharmônico para variedades Riemannianas completas e sua relação com o comportamento dos fins na variedade. A presente dissertação tem por base os resultados obtidos por B. Palmer em [14].

Na Seção 2.2 apresentaremos os problemas de autovalores dos quais estaremos interessados. Dada M uma variedade Riemanniana completa, sejam $\Omega \Subset M$ um subdomínio relativamente compacto com fronteira suave, e $P > 0$ uma função suave em M. Consideremos o problema de autovalor de *Clamped plate*

$$\begin{cases} \Delta^2 u - \lambda P u = 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ u = \partial_\eta u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Como primeiro resultado mostraremos que a nulidade do primeiro autovalor deste problema está intimamente relacionada com o comportamento de recorrência do movimento Browniano da variedade, como descreve o Teorema 4. Para tanto, introduzimos na Seção 2.1 o conceito de capacidade biharmônica associada ao operador bihârmonica (veja [14]). Ademais, demonstramos a relação desta capacidade de segunda ordem com a capacidade harmônica usual, cuja descrição se encontra na Seção 1.3. Em particular, demonstramos que a condição de parabolicidade de uma variedade Riemannian implica diretamente que a capacidade biharmônica de compactos é nula. Ainda no Capítulo 2, descreveremos a relação destes conceitos da Teoria do Potencial com o autovalor de *buckling*, definido por

$$\begin{cases} \Delta^2 u + \beta_1 \Delta u = 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ u = \partial_\eta u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde u é uma função suave em Ω e η é o campo normal exterior. Apresentamos também uma generalização deste tipo de autovalor e apresentaremos estimativas relacionando os vários tipos de autovalores expostos durante todo o texto. Em particular, no Teorema 7 mostraremos que na presença de dois fins não-parabólicos, toda variedade Riemanniana aberta e completa possui autovalor generalizado de *buckling* nulo.

Como última aplicação, introduziremos no Capítulo 3 conceitos sobre variedades Kähleriana mínimas. A intenção principal será estudar o comportamento de subvariedades Lagrangianas com pelo menos dois fins com restrições sobre a curvatura de Ricci. Como principal aplicação geométrica apresentaremos uma prova do seguinte resultado devido a B. Palmer [14]

Teorema. *Seja* X *uma variedade de Kähler com* $\mathrm{Ric}_X \geqslant c \cdot ds_X^2$*, para alguma constante* $c > 0$ *e seja* L *uma subvariedade lagrangiana mínima, aberta e completa, com pelo menos dois fins não-parabólicos disjuntos. Então* L *não é Hamiltoniana estável.*

O teorema acima é um caso particular para subvariedades com pelo menos dois fins não-parabólicos da seguinte conjectura em [14].

> Seja $f : \Sigma^2 \to X^4$ uma subvariedade Lagrangiana mínima, aberta e completa em uma variedade Kähler com $\mathrm{Ric}_X \geqslant c \cdot ds_X^2, c > 0$. Então L Não é Hamiltoniana estável.

A presente dissertação apresenta no Capítulo 1 uma breve introdução de conceitos relativos à Geometria Riemanniana (ver Seção 1.1). Ademais, introduzimos na Seção 1.2 o conceito de variedades modelos. A Seção 1.3 é reservada a introduzir os conceitos básicos da Teoria do Potencial, com ênfase particular sobre o conceito de parabolicidade e suas várias equivalências.

Capítulo 1

Noções Preliminares

chap1

Neste capítulo apresentaremos os conceitos básicos que fundamentam esta dissertação e que irão permitir ao leitor um melhor entendimento do escopo deste trabalho. Na Seção 1.1 iremos introduzir conceitos básicos de geometria Riemanniana onde faremos uso das referências [3] e [1]. Na Seção 1.2 definimos a classe das variedades rotacionalmente simétricas às quais representam uma classe especial para exemplos e contra-exemplos na litetura de geometria diferencial e análise geométrica. Já na Seção 1.3 descreveremos elementos fundamentais da teoria do potencial tais como núcleo do calor, função de Green, capacidade harmônica e parabolicidade. As principais referências desta seção são [6] e [14].

1.1 Elementos de Geometria Riemanniana

sec11

Nesta seção daremos algumas definições elementares de geometria Riemanniana e estabeleceremos também alguns resultados clássicos desta teoria cujas demostrações não serão detalhadas aqui, mas que se encontram em [3].

Definição 1. *Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável* M *é uma correspondência que associa a cada ponto* $p \in M$ *um produto interno* $\langle\, ,\, \rangle_p$*, isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva definida, que age sobre o espaço tangente* T_pM *diferenciavelmente no seguinte sentido: se* $\boldsymbol{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ *é um sistema de coordenadas locais em torno de* p*, com* $\boldsymbol{x}(x_1, ..., x_n) = q \in \boldsymbol{x}(U)$ *e* $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = \boldsymbol{dx}(0, ..., 1, ..., 0)$*, então* $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q)\rangle = g_{ij}(x_1, ..., x_n)$ *é uma função diferencial em* U*.*

Definição 2. *Uma variedade diferenciável* M *com uma métrica Riemanniana chama-se uma variedade Riemanniana.*

Exemplo 1. *Considere* $M = \mathbb{R}^n$ *com* $\frac{\partial}{\partial x_i}$ *identificado por* $e_i = (0, ..., 1, ..., 0)$. *A métrica em* M *é dada por* $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. *A variedade Riemanniana* $(\mathbb{R}^n, \langle\, ,\, \rangle)$ *é chamada de espaço Euclidiano de dimensão* n *e a geometria Riemanniana deste espaço é a geometria métrica Euclidiana.*

Indicaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M e por $D(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M.

Definição 3. *Uma conexão afim* ∇ *em uma variedade diferenciável* M *é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

dada por $(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y$, *e que satisfaz as propriedades abaixo:*

i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,

ii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

iii) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $f, g \in D(M)$.

Proposição 1. *Seja* M *uma variedade diferenciável dotada de uma conexão afim* ∇. *Existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial* V *ao longo da curva diferenciável* $c : I \to M$ *um outro campo vetorial* $\frac{DV}{dt}$ *ao longo de* c, *denominado derivada covariante de* V *ao longo de* c, *tal que:*

a) $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$.

b) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, *onde* V *é um campo de vetores ao longo de* c *e* f *é uma função diferenciável em* c.

c) Se V *é induzido por um campo de vetores* $Y \in \mathfrak{X}(M)$, *i.e.* $V(t) = Y(c(t))$, *então* $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y$.

Demonstração. Vide [3]. □

Definição 4. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim* ∇. *Um campo vetorial* V *ao longo de uma curva* $c : I \to M$ *é chamado paralelo quando* $\frac{DV}{dt} = 0$, *para todo* $t \in I$.

Definido o que se entende por um campo ser paralelo, podemos estabelecer a seguinte definição sobre uma conexão compatível com a métrica, a qual será completamente justificada pela proposição que estabeleceremos logo após ela.

Definição 5. *Seja* M *uma variedade diferenciável com uma conexão afim* ∇ *e uma métrica Riemanniana* $\langle\ ,\ \rangle$*. A conexão é dita compatível com a métrica* $\langle\ ,\ \rangle$*, quando para toda curva diferenciável* c *e pares de campos de vetores paralelos* V *e* P *ao longo de* c*, tivermos que* $\langle V, P\rangle$ *é constante.*

Esta proposição estabelece que podemos diferenciar o produto interno usando a "regra do produto".

Proposição 2. *Seja* M *uma variedade Riemanniana. Uma conexão* ∇ *em* M *é compatível com a métrica se, e somente se, para todo par* V, W *de campos de vetores ao longo de uma curvas diferenciável* $c : I \to M$ *tem-se*

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \langle \frac{DV}{dt}, W\rangle + \langle V, \frac{DW}{dt}\rangle,\ t \in I.$$

Demonstração. Vide [3]. □

Corolário 1. *Uma conexão afim* ∇ *em uma variedade Riemanniana* M *é compatível com a métrica se, e somente se,*

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Demonstração. Vide [3]. □

Definição 6. *Uma conexão afim* ∇ *em uma variedade diferenciável* M *é dita simétrica quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Observação 1. *A notação* $[X, Y]$ *denota o colchete de* X, Y*, podendo ser interpretada como uma derivação de* Y *ao longo das "trajetórias" de* X.

Teorema 1. ***(Levi-Civita)****. Dada uma variedade Riemanniana* M*, existe uma única conexão afim* ∇ *em* M *satisfazendo as condições:*

a) ∇ *é simétrica,*

b) ∇ *é compatível com a métrica Riemanniana.*

Demonstração. Vide [3]. □

Definição 7. *Uma curva parametrizada* $\gamma : I \to M$ *é chamada de geodésica em* $t_0 \in I$ *quando* $\frac{D}{dt}(\frac{d\gamma}{dt}) = 0$ *em* t_0*. Caso* γ *seja geodésica para cada* $t \in I$*, diremos que* γ *é uma curva geodésica, ou simplesmente geodésica.*

O fibrado tangente é o conjunto dos pares (q, υ), onde $q \in M$ e $\upsilon \in T_qM$, identificado por TM.

Proposição 3. *Dado* $p \in M$*, existem um aberto* $V \subset M$ *contendo* p*, números positivos* δ, ε*, e uma aplicação suave*

$$\gamma : (-\delta, \delta) \times U \to M, \;\; U = \{(q, \upsilon); q \in V, \; \upsilon \in T_qM \text{ e } \; \|\upsilon\| < \varepsilon\} \subset TM,$$

tais que a curva $t \to \gamma(t, q, \upsilon)$*, com* $t \in (-\delta, \delta)$*, é a única geodésica de* M *que em* $t = 0$ *passa pelo ponto* q *com velocidade* υ*, isso para todo* $q \in V$ *e para todo* $\upsilon \in T_qM$ *com* $\|\upsilon\| < \varepsilon$*.*

Demonstração. Vide [3]. □

Lema 1. *Se* $\gamma(t, q, \upsilon)$ *é uma geodésica definida no intervalo* $(-\delta, \delta)$*, então a geodésica* $\gamma(t, q, a\upsilon)$ *está definida no intervalo* $\left(\frac{-\delta}{a}, \frac{\delta}{a}\right)$ *e*

$$\gamma(t, q, a\upsilon) = \gamma(at, q, \upsilon).$$

Demonstração. Vide [3]. □

Definição 8. *Dados* $p \in M$ *e* $U \subset TM$*, onde* U *é um aberto como o da proposição anterior . Definimos a aplicação exponencial em* U *como sendo a aplicação* $\exp : U \to M$ *tal que*

$$\exp(q, \upsilon) = \gamma(1, q, \upsilon) = \gamma(\|\upsilon\|, q, \frac{\upsilon}{\|\upsilon\|}), \;\; (q, \upsilon) \in U.$$

Observação 2. *A aplicação exponencial acima definida é uma aplicação diferenciável. Consideraremos na maioria das vezes a restrição de* $\exp$ *a um aberto de* T_qM*, isto é, definiremos*

$$\exp_q : B_\varepsilon(0) \subset T_qM \to M,$$

onde $\exp_q(\upsilon) = \exp(q, \upsilon)$ *e* $B_\varepsilon(0) = \{\upsilon \in T_qM; \|\upsilon\| < \varepsilon\}$*.*

Proposição 4. *Dado* $q \in M$, *existe* $\varepsilon > 0$ *tal que* $\exp_q : B_\varepsilon(0) \subset T_qM \to M$ *é um difeomorfismo de* $B_\varepsilon(0)$ *sobre um aberto de* M.

Demonstração. Vide [3]. □

Observação 3. *Se* $\exp_q : V \to U$ *é um difeomorfismo em uma vizinhança* V *da origem em* T_qM, *o conjunto* $U = \exp_q(V)$ *é chamado uma vizinhança normal de* p. *Se* $B_\varepsilon(0)$ *é tal que* $\overline{B_\varepsilon(0)} \subset V$, *chamaremos* $B_\varepsilon(q) = \exp_q(B_\varepsilon(0))$ *a bola normal (ou geodésica) de centro* q *e raio* ε. *Denotaremos por* $S_\varepsilon(q)$ *a esfera normal (ou geodésica) que é a fronteira de* $B_\varepsilon(q)$. *As geodésicas em* $B_\varepsilon(q)$ *que partem de* p *são chamadas geodésicas radiais.*

Definição 9. *Uma variedade Riemanniana* M *é geodesicamente completa (ou completa) se para cada* $p \in M$, *a aplicação exponencial* $\exp_p$ *está definida para todo* $v \in T_pM$, *i.e., as geodésicas* $\gamma(t)$ *que partem de* p *estão definidas para todos os valores do parâmetro* $t \in \mathbb{R}^+$.

A aplicação exponencial nos permite introduzir o conceito de *cut locus* para uma variedade Riemanniana. Tal subconjunto constitui uma representação sobre a perca de regularidade com respeito á diferenciabilidade da função distância, a qual é de suma importância em diversos ramos da Análise Geométrica (veja [1]).

Definição 10. *Seja* M *uma variedade Riemanniana completa. Dados* $p \in M$ *e* $v \in T_pM$ *um vetor unitário. Seja* $\gamma_v : [0, +\infty) \to M$ *o raio geodésico normalizado* $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$. *Se o conjunto dos* $t \in (0, +\infty)$ *tais que* γ_v *é minimizante em* $[0, t]$ *for um intervalo da forma* $[0, t_0]$, *dizemos que* $\gamma_{v(t_0)}$ *é o ponto mínimo de* p *na direção de* v. *O cut locus* $\mathrm{Cut}(p)$ *de* p *em* M *é definido como o conjunto dos pontos mínimos de* p *em* M.

Apresentaremos agora alguns conceitos e propriedades diferenciais de funções, tais como gradiente, divergente, hessiano e Laplaciano de uma aplicação $f : M \to \mathbb{R}$, onde M é uma variedade Riemanniana. Sendo $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos vetoriais infinitamente diferenciáveis em M. Estes conceitos são uma generalização para variedades daqueles que vemos nos cursos básicos de análise matemática.

Definição 11. *Seja* $f : M^n \to \mathbb{R}$ *uma função suave. O gradiente de* f *é o campo vetorial suave* ∇f, *definido sobre* M *por*

$$\langle \nabla f, X \rangle = X(f),$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição 12. *Dizemos que um referencial ortonormal* $\{e_1, ..., e_n\}$ *em um aberto* $U \subset M$ *é geodésico em* $p \in U$ *se* $(\nabla_{e_i} e_j)(p) = 0$ *para todo* $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Proposição 5. *Seja* $f : M^n \to \mathbb{R}$ *uma função suave e* $\{e_1, ..., e_n\}$ *um referencial ortonormal em uma vizinhança aberta* $U \subset M$. *Então em* U *vale*

$$\nabla f = e_i(f) e_j.$$

Ademais, o segundo membro da igualdade acima independe do referencial escolhido.

Demonstração. Vide [1]. □

Proposição 6. *Se* $f, g : M^n \to \mathbb{R}$ *são funções suaves, então*

(a) $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$,

(b) $\nabla(f \cdot g) = g\nabla f + f\nabla g$.

Demonstração. Vide [1]. □

Definição 13. *Seja* X *um campo vetorial suave em* M. *A divergência de* X *é a função suave* $\operatorname{div} X : M^n \to \mathbb{R}$, *dada para* $p \in M$ *por*

$$(\operatorname{div} X)(p) = \operatorname{tr}\{v \to (\nabla_v X)(p)\},$$

onde $v \in T_pM$ *e* tr *denota o traço do operador linear entre chaves.*

Proposição 7. *Seja* X *um campo suave em* M^n *e* $\{e_1, ..., e_n\}$ *um referencial ortonormal em um vizinhança aberta* $U \subset M$. *Se* $X = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ *em* U *então*

$$\operatorname{div} X = e_i(a_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X \rangle.$$

Em particular, se o referencial for geodésico em $p \in U$, *então temos em* p *que*

$$\operatorname{div} X = e_i(a_i).$$

Demonstração. Vide [1]. □

Proposição 8. *Sejam* X, Y *campos suaves em* M^n *e* $f : M^n \to \mathbb{R}$ *uma função suave. Então*

(a) $\operatorname{div}(X + Y) = \operatorname{div} X + \operatorname{div} Y$,

(b) $\operatorname{div}(f \cdot X) = f\operatorname{div}X + \langle \nabla f, X\rangle$.

Demonstração. Vide [1]. □

Definição 14. *Seja* $f : M^n \to \mathbb{R}$ *uma função suave. O Laplaciano de* f *é a função* $\Delta f : M \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f).$$

Proposição 9. *Seja* $f : M^n \to \mathbb{R}$ *uma função suave e* $\{e_1, ..., e_n\}$ *um referencial ortonormal em um aberto* $U \subset M$*. Então*

$$\Delta f = e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i)f.$$

Em particular, se o referencial for geodésico em $p \in U$*, então temos em* p *que*

$$\Delta f = e_i(e_i(f)).$$

Demonstração. Vide [1]. □

Proposição 10. *Dadas* $f, g : M^n \to \mathbb{R}$ *funções suaves, tem-se*

$$\Delta(f \cdot g) = g\Delta f + f\Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle.$$

Demonstração. Vide [1]. □

Definição 15. *Seja* $f : M^n \to \mathbb{R}$ *uma função suave. O hessiano de* f *é o campo de operadores lineares* $(\text{hess } f)_p : T_pM \to T_pM$*, definido em* $v \in T_pM$ *por*

$$(\text{hess } f)_p(v) = \nabla_v \nabla f.$$

Segue das propriedades da conexão Riemanniana que se X *é qualquer estensão local de* v *a uma vizinhança de* p *em* M*, então*

$$(\text{hess } f)_p(v) = (\nabla_v \nabla f)(p).$$

Proposição 11. *Se* $f : M^n \to \mathbb{R}$ *é uma função suave e* $p \in M$*, então temos que* $(\text{hess } f)_p : T_pM \to T_pM$ *é um operador linear auto-adjunto.*

Demonstração. Vide [1]. □

Proposição 12. *Se* $f : M^n \to \mathbb{R}$ *é uma função suave, então*

$$\Delta f = \operatorname{tr}(\text{Hess } f).$$

Demonstração. Vide [1]. □

Teorema 2. ***(Teorema da Divergência).*** *Seja M^n uma variedade Riemanniana compacta orientada e $X \in \chi(M)$. Se o bordo de M é munido com a orientação e a métrica induzidas pela inclusão $j : \partial M \to M$ e ν denota o normal unitário exterior à M ao longo de ∂M, então*

$$\int_M (\operatorname{div} X) dM = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle d(\partial M).$$

O segundo membro da igualdade acima deve ser interpretado como nulo caso $\partial M = \varnothing$.

Demonstração. Vide [1]. □

Definição 16. *Seja M^n uma variedade Riemanniana. Uma função $f : M \to \mathbb{R}$ é harmônica se $\Delta f = 0$ em M. Temos também que f é subharmônica se $\Delta f \geqslant 0$, e superharmônica se $-f$ é subharmônica.*

prop_green_id **Proposição 13.** *Seja M^n uma variedade Riemanniana compacta orientada com bordo ∂M munido com a orientação e a métrica induzidas pela inclusão $j : \partial M \to M$ (possivelmente $\partial M = \varnothing$). Se $f, g : M \to \mathbb{R}$ são funções suaves e ν denota o normal unitário exterior à M ao longo de ∂M, então:*

(a) Primeira identidade de Green:

$$\int_M (\langle \nabla f, \nabla g \rangle + f \Delta g)\, dM = \int_{\partial M} f \frac{\partial g}{\partial \nu} ds. \tag{1.1}$$ 1gree

(b) Segunda identidade de Green:

$$\int_M (f \Delta g - g \Delta f) dM = \int_{\partial M} \left(f \frac{\partial g}{\partial \nu} - g \frac{\partial f}{\partial \nu} \right) ds. \tag{1.2}$$ 2gree

Demonstração. Vide [1]. □

A seguir introduziremos alguns conceitos de geometria Riemanniana relacionados à curvatura de variedades Riemannianas os quais não entraremos em grandes detalhes. Sugerimos a referência [3] para maiores detalhes.

Definição 17. *A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dada por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z,$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M.

Proposição 14. *Seja* $\sigma \subset T_pM$ *um subespaço bidimensional do espaço tangente* T_pM*, e sejam* $x, y \in \sigma$ *dois vetores linearmente independente, onde* $|x \wedge y| = \sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle}$*. Então*

$$K(x, y) = \frac{(x, y, x, y)}{|x \wedge y|^2}$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$*.*

Demonstração. Vide [3]. □

Definição 18. *Dados um ponto* $p \in M$ *e um subespaço bidimensional* $\sigma \subset T_pM$*, o número real* $K(x, y) = K(\sigma)$*, onde* $\{x, y\}$ *é uma base qualquer de* σ*, é chamado curvatura seccional de* σ *em* p*.*

Seja $x = z_n$ um vetor unitário em T_pM. Tomemos uma base ortonormal $\{z_1, ..., z_{n-1}\}$ do hiperplano de T_pM ortogonal à x e consideremos as médias abaixo

$$Ric_p(x) = \frac{1}{n-1}\sum_i \langle R(x, z_i)x, z_i\rangle, \quad i = 1, ..., n-1,$$

e

$$K(p) = \frac{1}{n}\sum_j Ric_p(z_j) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i,j}\langle R(z_i, z_j)z_i, z_j\rangle, \quad j = 1, ..., n.$$

Elas não dependem da escolha das correspondentes bases ortonormais e são chamadas curvatura de Ricci na direção x e curvatura escalar em p, respectivamente.

Definição 19. *Sejam* M^m *e* N^n *variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável* $f : M \to N$ *é uma imersão se* $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ *é injetiva para todo* $p \in M$*. Se além disto* f *for um homeomorfismo sobre* $f(M) \subset N$*, onde* $f(M)$ *tem a topologia induzida por* N*, diz-se que* f *é um mergulho. Se* $M \subset N$ *e a inclusão* $i : M \hookrightarrow N$ *é um mergulho, diz-se que* M *é uma subvariedade de* N*.*

Seja $f : M \to \overline{M}$ uma imersão entre duas variedades Riemannianas, com as respectivas conexões ∇ e $\overline{\nabla}$ compatíveis com as métricas. Então tal imersão é dita ser isométrica se suas métricas se relacionam através da seguinte identidade

$$\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)}.$$

Identificaremos os abertos de M com os abertos de $\overline{M}$ e os vetores $u \in T_pM$ com os correspondentes $df_p(u) \in T_p\overline{M}$. Para cada $p \in M$ o produto interno em $T_p\overline{M}$ decompõe $T_p\overline{M}$ na soma direta

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp},$$

onde $(T_pM)^\perp$ representa o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. A decomposição acima é diferenciável no sentido de que as projeções sobre T_pM e $T_p\overline{M}$ são diferenciáveis.

Sejam X e Y campos de vetores localmente definidos em M e sejam $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ suas respectivas extensões à $\overline{M}$. Definiremos

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^T,$$

a componente tangente.

Definição 20. *Seja* $f : M \to \overline{M}$ *uma imersão. Se* X, Y *são campos locais em* M, *então*

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

é um campo local em $\overline{M}$ *normal a* M, *que não depende das extensões* $\overline{X}$, $\overline{Y}$.

Indicaremos por $\mathfrak{X}(U)^\perp$ os campos diferenciáveis em U de vetores normais à $f(U) = U$.

Proposição 15. *Se* $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, *então a aplicação* $B : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to \mathfrak{X}(U)^\perp$ *dada por*

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

é bilinear e simétrica.

Demonstração. Vide [3]. □

Sejam $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$. Então a aplicação $H_\eta : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta\rangle, \quad x, y \in T_pM,$$

é pela proposição anterior, uma forma bilinear simétrica.

Definição 21. *A forma quadrática* II_η *definida em* T_pM *por*

$$II_\eta(x) = H_\eta(x, x)$$

é chamada a segunda forma fundamental de f *em* p *segundo o vetor normal* η.

A aplicação bilinear H_η fica portanto associada a uma aplicação linear auto-adjunta $S_\eta : T_pM \to T_pM$ por

$$\langle S_\eta(x), y\rangle = H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), y\rangle.$$

Às vezes $B(X, Y)$ também é chamada de segunda forma fundamental.

Proposição 16. *Sejam* $p \in M$, $x \in T_pM$ *e* $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. *Seja* N *uma extensão local de* η *em* $T_p\overline{M}$. *Então*

$$S_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^{\perp}.$$

Demonstração. Vide [3]. □

Definição 22. *Seja* $\{E_1, ..., E_m\}$ *um referencial ortonormal de vetores em* $\mathfrak{X}(U)$, *onde* U *é uma vinhança de* p *na qual* f *é um mergulho. Podemos escrever em* p

$$B(x,y) = \sum_{i=1}^{m} H_i(x,y)E_i, \quad x, y \in T_pM,$$

onde $H_i = H_{E_i}$. *Não é difícil verificar que o vetor normal é dado por*

$$H = \frac{1}{n}\sum(\mathrm{tr}S_i)E_i$$

onde $S_i = S_{E_i}$, *não depende do referencial* E_i *escolhido. O vetor* H *é chamado o vetor curvatura média de* f.

1.2 Variedades Rotacionalmente Simétricas

sec12

O objetivo desta seção é introduzir uma classe de variedades modelos que são rotacionalmente simétricas. Para tanto, iniciaremos descrevendo coordenadas polares para uma variedade Riemanniana (veja [6]).

Seja g_{ij} o tensor métrico Riemanniano em M. Sabemos que em qualquer sistema de coordenadas $(x^1, ..., x^n)$ em M o elemento de comprimento poder ser calculado por

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j.$$

Denotamos por g^{ij} os elementos da matriz inversa $(g_{ij})^{-1}$ e $g = \det(g_{ij})$. Então o operador Laplaciano Δ, descrito na seção anterior, associado à métrica g_{ij} pode ser escrito como

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}\right).$$

Esse é um operador elíptico de segunda ordem em M. Às vezes é útil representar o Laplaciano da forma

$$\Delta = \mathrm{div}\nabla$$

onde o gradiente atua em uma função f por

$$(\nabla f)^i = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}$$

e o divergente div atua em um campo vetorial $F = F^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ por

$$\mathrm{div}F = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g}F^{ij}).$$

Pela identidade 1.1 (veja Proposição 13), segue-se que para qualquer região pré-compacta $U \Subset M$ e para quaisquer funções $u, v \in C_0^2(U)$, vale

$$\int_U v\Delta u d\mu = -\int_U \nabla v \nabla u d\mu, \tag{1.3}$$

eq1.2

onde $\nabla v \nabla u$ é o produto interno Riemanniano dado por

$$\nabla v \nabla u = g_{ij}(\nabla u)^i(\nabla v)^j = g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^i}\frac{\partial v}{\partial x^j},$$

e $d\mu$ é o elemento de volume Riemanniano definido por

$$d\mu = \sqrt{g}dx^1 \cdots dx^n. \tag{1.4}$$

Se a fronteira ∂U de U for suficientemente suave, digamos de classe C^1, e $u, v \in C^2(U) \cap C^1(\overline{U})$, então nós teremos a seguinte versão de (1.3) com um termo de bordo

$$\int_U v\Delta u d\mu = -\int_U \nabla v \nabla u d\mu + \int_{\partial U} v\frac{\partial u}{\partial \nu}d\mu', \tag{1.5}$$

eq1.3

onde $d\mu'$ acima representa o elemento de volume Riemanniano da subvariedade ∂U, e ν é o campo vetorial normal unitário exterior em ∂U.

Vamos fixar um ponto $o \in M$ e denotar por $\mathrm{Cut}(o)$ o Cut-locus de o. Fora do conjunto $\mathrm{Cut}^*(o) := \mathrm{Cut}(o) \cup \{o\}$ podemos definir coordenadas polares em M com pólo em o, ou seja, para qualquer ponto $x \in M \setminus \mathrm{Cut}^*(o)$ podemos associar um correspondente raio polar $\rho := \mathrm{dist}(x, o)$ e um “ângulo” polar $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ tais que a menor geodésica saindo de o até x parte de o na direção θ em T_oM. Podemos identificar T_oM com $\mathbb{R}^n$ para que θ possa ser considerado como um ponto em $\mathbb{S}^{n-1}$. Em particular, $M \setminus \mathrm{Cut}^*(o)$ é difeomorfo à uma região estrelada em $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^{n-1}$.

A métrica Riemanniana em $M \setminus \mathrm{Cut}^*(o)$ em coordenadas polares tem a seguinte forma

$$ds^2 = d\rho^2 + A_{ij}(\rho, \theta)d\theta^i d\theta^j, \tag{1.6}$$

polar_co

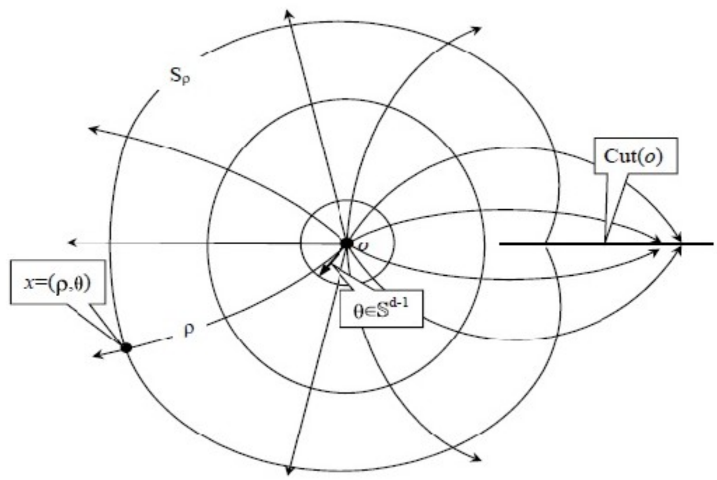

Figura 1.1: Coordenadas Polares em $M \setminus \mathrm{Cut}^*(o)$

onde $(\theta^1, ..., \theta^{n-1})$ são coordenadas em $\mathbb{S}^{n-1}$ e $\|A_{ij}(\rho,\theta)\|$ é uma matriz positiva. De fato, $A_{ij}(\rho, .)$ é o tensor métrico Riemanniano na esfera geodésica $S_\rho := \partial B(o,\rho) \setminus \mathrm{Cut}(o)$. Denotamos por $A = \det\|A_{ij}\|$. Então temos que o elemento de área em S_ρ é dado por

$$d\mu'|_{S_\rho} = \sqrt{A}d\theta^1 \cdots d\theta^{n-1}. \tag{1.7}$$

Em particular

$$\mu'(S_\rho) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \sqrt{A}d\theta^1 \cdots d\theta^{n-1}, \tag{1.8}$$

assumindo que $\theta^1, ..., \theta^{n-1}$ estão definidas em quase toda parte de $\mathbb{S}^{n-1}$.

Segue facilmente que o operador Laplaciano tem nas coordenadas polares a forma

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{A}}\frac{\partial}{\partial\rho}(\sqrt{A}\frac{\partial}{\partial\rho}) + \Delta_{S_\rho} = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + (\log\sqrt{A})'\frac{\partial}{\partial\rho} + \Delta_{S_\rho}, \tag{1.9}$$

onde $(\cdot)'$ indica $\frac{\partial}{\partial\rho}$ e Δ_{S_ρ} é o operador Laplaciano na subvariedade S_ρ.

Diremos que M é uma variedade com pólo se existe $o \in M$ tal que $\mathrm{Cut}(o) = \emptyset$. O ponto $o \in M$ é chamado pólo de M, e as coordenadas polares são definidas em $M \setminus \{o\}$. Se além disso, M é geodesicamente completa, então M é difeomorfa à $\mathbb{R}^n$.

Definição 23. *Uma variedade M com um pólo o é chamada uma variedade rotacionalmente esfericamente simétrica, ou uma variedade modelo, se a métrica Riemanniana em S_ρ é dada por*

$$A_{ij}(\rho,\theta)d\theta^i d\theta^j = \sigma^2(\rho)d\theta^2,$$

onde $d\theta^2$ é a métrica padrão Euclidiana em $\mathbb{S}^{n-1}$ e $\sigma(\rho)$ é uma função suave positiva.

Dada $\sigma(\rho)$ *em* $(0, R_0)$*, uma condição necessária e suficiente para que tal variedade exista é que*

$$\sigma(0) = 0, \quad \sigma'(0) = 1 \quad e \quad \sigma^{(2k)}(0) = 0, \quad \text{para cada} \ \ k = 1, 2, \ldots. \tag{1.10}$$

cond_smo

A hipótese acima assegura que a métrica sobre o cone $(0, R_0) \times \mathbb{S}^{n-1}$ é definida por

$$ds^2 = d\rho^2 + \sigma^2(\rho) d\theta^2,$$

podendo ser suavemente estendida para a origem $\rho = 0$. Assumiremos consequentemente que σ satisfaz (1.10) e denotaremos por M_σ o cone $(0, R_0) \times \mathbb{S}^{n-1}$ com origem adicionada.

Claramente, a variedade modelo M_σ é difeomorfa à uma bola aberta em $\mathbb{R}^n$ de raio R_0 ou a todo $\mathbb{R}^n$ se $R_0 = \infty$. A métrica em alguma esfera geodésica $\partial B(0, r)$ em M_σ é obtida de $\mathbb{S}^{n-1}$ através do fator conforme $\sigma(r)$. Em certas situações, M_σ pode ser considerada como uma superfície de revolução em $\mathbb{R}^{n+1}$.

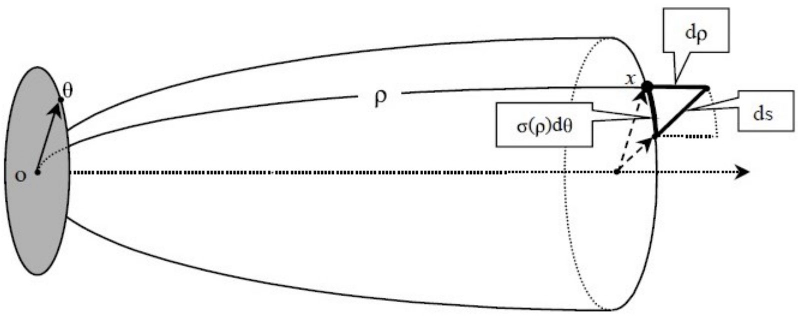

Figura 1.2: A métrica na superfície de revolução M_σ

Visto que $\sqrt{A} = \sigma^{n-1}$, vemos pela equação (1.6) que a área $S(r)$ da esfera geodésica $\partial B(0, r)$ é calculada por

$$S(r) = \omega_n \sigma^{n-1}(r),$$

onde ω_n é a área da esfera unitária em $\mathbb{R}^n$. O volume da bola $B(o, r)$ é dada por

$$V(r) = \int_0^r S(\xi) d\xi = \omega_n \int_0^r \sigma^{n-1}(\xi) d\xi.$$

Em M_σ o operador Laplaciano possui a seguinte representação

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + (n-1) \frac{\sigma'}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\sigma^2} \Delta_\theta, \tag{1.11}$$

ou equivalentemente

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{S'}{S} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\sigma^2} \Delta_\theta, \tag{1.12}$$

eq_lapla

onde Δ_θ denota o operador Laplaciano sobre a esfera $\mathbb{S}^{n-1}$. Observe que o operador Δ_θ não dependa da variável ρ.

Exemplo 2. *Se* $R_0 = \infty$ *e* $\sigma(r) = r$ *então* M_σ *é isométrica a* $\mathbb{R}^n$*. A área da esfera de raio* $0 < r < R_0$ *é dada por*

$$S(r) = \omega_n r^{n-1}.$$

Logo o operador Laplaciano tem a forma

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{n-1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\Delta_\theta.$$

Exemplo 3. *Seja* $\sigma(r) = \sin r$*. Então* M_σ *é a esfera* $\mathbb{S}^n$*. (Assumido que* R_0 *possa atingir seu valor máximo* π *e que o ponto final* $\rho = \pi$ *esteja adicionado a* M_σ*). Se* $n = 2$ *então* r *torna-se a medida da latitude do pólo e* θ *é a longitude.*

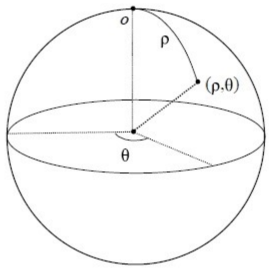

Figura 1.3: As coordenadas polares em $\mathbb{S}^2$

É fácil ver que

$$S(r) = \omega_n \sin^{n-1} r.$$

Deste modo o operado Laplaciano sobre $\mathbb{S}^n$ *tem a seguinte forma*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + (n-1)\cot\rho\,\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\sin^2\rho}\Delta_\theta,$$

onde Δ_θ *é o operador Laplaciano sobre a esfera* $\mathbb{S}^{n-1}$*.*

Exemplo 4. *Seja* $\sigma(r) = \sinh r$*. Então* M_σ *é o espaço hiperbólico* $\mathbb{H}^n$*, ou seja, a variedade de dimensão* n*, completa e simplesmente conexa, com curvatura seccional igual a* -1 *(assumindo* $R_0 = \infty$*). A área limitada pela esfera* ∂B_r *é igual a*

$$S(r) = \omega_n \sinh^{n-1} r.$$

Neste caso o operador Laplaciano assume a forma

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + (n-1)\coth\rho\,\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\sinh^2\rho}\Delta_\theta.$$

1.3 Elementos da Teoria do Potencial

sec13

Nesta seção discutiremos alguns conceitos sobre a Teoria do Potencial onde apresentaremos conceitos relativos à parabolicidade de variedades e sua relação com a função de Green e a capacidade de conjuntos compactos. Um conjunto aberto aqui é chamado pré-compacto se o seu fecho é compacto. As principais referências utilizadas são [6], [14]. A fórmula (1.5) implica que, para uma função harmônica u e para qualquer conjunto aberto pré-compacto Ω no domínio de u , o $flux$ de u através do bordo $\partial\Omega$ é zero, ou seja,

$$flux_{\partial\Omega} u := \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\mu' = 0,$$

onde ν é o campo vetorial normal unitário exterior em $\partial\Omega$.

Seja M uma variedade Riemanniana, o núcleo do calor será denotado por $p(t, x, y)$ onde $t > 0$ representa a variável temporal, com os pontos x, y em M. O núcleo do calor é a menor solução fundamental positiva, que satisfaz a equação do calor

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{2}\Delta p = 0$$

nas variáveis (t, x) em $(0, +\infty) \times M$ onde y é considerado fixo, e os dados iniciais

$$p(t, \cdot, y) \longrightarrow \delta_y, \quad \text{quando} \quad t \longrightarrow 0^+,$$

onde δ_y é a função delta de Dirac, e Δ é operador de Laplace da métrica Riemanniana, conforme [6]. Em particular, em $\mathbb{R}^n$ o núcleo do calor é dado pela fórmula

$$p(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t}\right).$$

Definição 24. *Utilizando o núcleo do calor temos que a função de Green* $G(x, y)$ *pode ser definida por*

$$G(x, y) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} p(t, x, y)dt, \tag{1.13}$$

onde a integral acima pode assumir $+\infty$.

O fator $\frac{1}{2}$ surge devido ao fato que o núcleo do calor é gerado pelo operador $\frac{1}{2}\Delta$. Uma definição independente é a seguinte: $G(x, y)$ é a menor solução fundamental positiva da equação de Laplace sobre M. Nós convencionaremos que $G \equiv +\infty$ se não existir uma solução fundamental positiva, que coincide com o caso quando a integral da definição acima diverge. Se $G \not\equiv \infty$ então teremos, para algum y fixado,

$$\Delta G(\cdot, y) = -\delta_y.$$

Exemplo 5. *Em* $\mathbb{R}^n$, *com* $n > 2$, *a função de Green é dada por*

$$G(x,y) = \frac{c_n}{|x-y|^{n-2}},$$

onde $c_n = (\omega_n(n-2))^{-1}$. *Em* $\mathbb{R}^2$, *temos que* $G \equiv +\infty$.

Há outra maneira de construir G que será mais útil para nossos propósitos, isto é, usando uma sequência de exaustão para M.

Definição 25. *Uma sequência* $\{\mathcal{E}_k\}$ *de conjuntos em* M *é chamada uma sequência de exaustão se*

- *cada* $\{\mathcal{E}_k\}$ *é uma região pré-compacta com fronteira suave,*
- $\mathcal{E}_k \subset\subset \mathcal{E}_{k+1}$, *isto é,* $\overline{\mathcal{E}}_k \subset \mathcal{E}_{k+1}$,
- $\displaystyle\bigcup_k \mathcal{E}_k = M$.

Primeiro construiremos para cada $\mathcal{E}_k$ uma função de Green $G_{\mathcal{E}_k}(x,y)$ do problema de Dirichet em $\mathcal{E}_k$ a qual é contínua até a fronteira $\partial\mathcal{E}_k$, isto é,

$$\begin{cases} \Delta_x G_{\mathcal{E}_k} = 0 \quad \text{em} \quad \mathcal{E}_k, \\ \quad G_{\mathcal{E}_k} = 0 \quad \text{em} \quad \partial\mathcal{E}_k. \end{cases}$$

Pelo principio do máximo a sequência $\{G_{\mathcal{E}_k}\}$ é crescente em k. O limite quando $k \to +\infty$ será a função de Green global $G(x,y)$ que pode ser finita ou infinita. Este limite é independente da sequência escolhida de exaustão. Esta construção está justificada em [10].

Seja $\Omega \subset M$ um aberto limitado. Quando a variedade Riemanniana M possuir bordo $\partial M \neq \emptyset$ iremos considerar a seguinte condição de bordo para o problema de Laplace sobre uma região pré-compacta $\Omega \subset M$

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \partial_\nu u = 0 \quad \text{em} \quad \partial M \cap \Omega. \end{cases} \tag{1.14}$$

proN

Tal condição sobre a derivada normal ao longo do bordo é conhecida como condição de Neumann. Se M é uma variedade com bordo então as funções de Green G e G_Ω são consideradas satisfazendo as condições de contorno de Neumann em ∂M e $\partial M \cap \Omega$, respectivamente. As seguintes propriedades de $G(x,y)$ são frequentemente úteis.

1) A função de Green $G(x,y)$ ou é finita para $x \neq y$, ou infinita para todos $x, y \in M$. No primeiro caso diremos que G é finita. O valor da diagonal $G(x,x)$ é sempre infinito. Além disso, a singularidade de $G(x,y)$ com $x \to y$ é da mesma ordem que em $\mathbb{R}^n$, isto é,
$$G(x,y) \asymp \begin{cases} r^{2-n}, & \text{se} \quad n > 2, \\ \log \frac{1}{r}, & \text{se} \quad n = 2, \end{cases}$$
com $r := \mathrm{dist}(x,y) \to 0$.

2) Positividade: $G(x,y) > 0$.

3) Simetria: $G(x,y) = G(y,x)$.

4) $G(\cdot, y)$ é harmônica longe de y, e $G(\cdot, y)$ é superharmônica em M se permitirmos $+\infty$ como valor da função.

5) Se Ω é uma região pré-compacta com fronteira suave então o fluxo de $G(\cdot, y)$ através do bordo $\partial\Omega$ é igual à -1 se $y \in \Omega$, e igual à 0 se $y \notin \overline{\Omega}$, isto é,
$$\mathrm{flux}_{\partial\Omega} G = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu} d\mu'(x) = \begin{cases} -1, & \text{se} \quad y \in \Omega, \\ 0, & \text{se} \quad y \notin \overline{\Omega}, \end{cases}$$
onde ν denota o campo normal unitário exterior sobre $\partial\Omega$. Além disso, esta igualdade é equivalente ao fato de que G é uma solução fundamental. A segunda igualdade segue-se de G ser harmônica longe de y, enquanto a primeira reflete o fato de que $\Delta G = -\delta_y$.

6) Uma consequência da minimalidade:
$$\inf_{x \in M} G(x,y) = 0.$$

Exemplo 6. *Seja* M_σ *é uma variedade modelo com pólo* $o \in M$. *Provaremos que a função de Green* $G(x,o)$ *pode ser calculada como segue-se*
$$G(x,o) = \int_\rho^\infty \frac{dr}{S(r)}, \tag{1.15}$$
onde $\rho := \mathrm{dist}(x,o)$, *assumindo que a integral acima converge. Para este fim, vamos primeiro considerar a função*
$$\upsilon(\rho) = \int \frac{d\rho}{S(\rho)}, \tag{1.16}$$
eq1.13

tomando a integral indefinida aqui. Afirmaremos que $\upsilon(\rho)$ *é uma função harmônica em* $M\backslash\{o\}$ *assumindo que* ρ *é o radio polar. De fato, pela equação* (1.16) *temos que* υ *satisfaz a seguinte EDO*

$$\upsilon'' + \frac{S'}{S}\upsilon' = 0. \tag{1.17}$$ eq1.14

De fato, a função υ *foi encontrada para resolver* (1.17)*. Por outro lado, pela expressão do operador Laplaciano* (1.12) *a equação* (1.17) *é a parte radial da equação de Laplace. Então* $\Delta\upsilon = 0$*. Além disso, o fluxo de* υ *através de alguma esfera* $\partial B(o,r)$ *é igual a* 1*. De fato,* (1.16) *implica que* $\upsilon' = \frac{1}{S(\rho)}$*, e assim*

$$\mathrm{flux}_{\partial B(o,r)}\upsilon = \int_{\partial B(o,r)} \frac{\partial \upsilon}{\partial \nu} d\mu' = \upsilon'(r)S(r) = 1. \tag{1.18}$$

Daí a função

$$\int_{\rho}^{\infty} \frac{dr}{S(r)}$$

é harmônica longe de o*, tem fluxo igual* -1 *através de alguma esfera* $\partial B(o,r)$*, e se anula em* $\rho = \infty$*. Logo ela coincide com a função de Green* $G(o,x)$*.*

Seja Ω um conjunto aberto de M e K um compacto em Ω. Considere

$$\mathcal{L}(K,\Omega) = \{\varphi \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{Loc}}(\Omega) \ : \ 0 \leqslant \varphi \leqslant 1, \quad \varphi|_K \equiv 1 \quad \text{e} \quad \varphi|_{\Omega^c} = 0\}, \tag{1.19}$$

o conjunto das funções localmente Lipschitz φ em M, com suporte compacto em $\overline{\Omega}$ tais que $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$ e $\varphi|_K = 1$. Chamamos o par (K,Ω) de capacitor.

def_cap **Definição 26.** *Dado o capacitor* (K,Ω) *definiremos a capacidade Cap*(K,Ω) *por*

$$\mathit{Cap}(K,\Omega) = \inf_{\varphi\in\mathcal{L}(K,\Omega)} \int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 d\mu. \tag{1.20}$$ eq1.16

Podemos ainda estender esta definição para conjuntos abertos pré-compactos $K \subset \Omega$. Neste caso, a capacidade é dada por

$$\mathrm{Cap}(K,\Omega) := \mathrm{Cap}(\overline{K},\Omega).$$

Portanto a Definição 26 pode ser aplicada à este caso, já que $\varphi|_K = 1$ é equivalente a $\varphi|_{\overline{K}} = 1$. Como $\nabla\varphi = 0$ em $\overline{K}$, veremos que a capacidade $\mathrm{Cap}(K,\Omega)$ é determinada por propriedades intrínsecas de $\Omega \setminus \overline{K}$. Se $\Omega = M$ então escreveremos $\mathrm{Cap}(K)$ ao invés de $\mathrm{Cap}(K,\Omega)$. A partir da definição temos que o conjunto $\mathcal{L}(K,\Omega)$ aumenta na expansão de Ω, ou no encolhimento de K. Em particular, $\mathrm{Cap}(K,\Omega)$ possui boas propriedades de monotonia e pode-se prova que para alguma sequência de exaustão $\{\mathcal{E}_k\}$

$$\mathrm{Cap}(K) := \lim_{k\to\infty} \mathrm{Cap}(K,\mathcal{E}_k).$$

Ademais, é possível mostrar que existe uma função potencial u que minimiza (1.20). De fato, como $\mathcal{L}(K,\Omega) \subset L^2(M)$ é convexo, tomemos o funcional

$$J[\phi] = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla\phi|^2,$$

definido em $L^2(M)$. O teorema de Lax-Milgram nos garante a existência de um minimizante para J, i.é., existe $u \in L^2(M)$ tal que

$$J[u] = \inf_{\phi\in\mathcal{L}(K,\Omega)} J[\phi].$$

Sejam $\phi \in \mathcal{L}(K,\Omega)$, onde $\upsilon \in C_0^\infty(\Omega\setminus K)$. Então

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}J(\phi+t\upsilon)\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla\phi + t\nabla\upsilon|^2\Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega (|\nabla\phi|^2 + 2t\langle\nabla\phi,\nabla\upsilon\rangle + t^2|\nabla\upsilon|^2)\right)\Big|_{t=0} \\ &= \int_\Omega \langle\nabla\phi,\nabla\upsilon\rangle. \end{aligned}$$

Observemos também que para toda $\upsilon \in C_0^\infty(\Omega\setminus K)$ temos

$$\int_{\Omega\setminus K} \upsilon\Delta u = -\int_{\Omega\setminus K}\langle\nabla u,\nabla\upsilon\rangle + \int_{\partial(\Omega\setminus K)} \upsilon\partial_\nu u = 0.$$

Assim, como

$$\int_{\Omega\setminus K} \upsilon\Delta u = 0$$

para qualquer $\upsilon \in C_0^\infty(\Omega\setminus K)$, isto implica que $\Delta u = 0$ em $\Omega\setminus K$. Portanto u satisfaz

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{em} \quad \Omega\setminus K, \\ u = 1, & \text{em} \quad K, \\ u = 0, & \text{em} \quad M\setminus\Omega. \end{cases} \tag{1.21}$$

eq1.19

Associemos o capacitor $(K,\mathcal{E}_i)$ ao sistema abaixo

$$\begin{cases} \Delta u_i = 0, & \text{em} \quad \mathcal{E}_i\setminus K, \\ u_i = 1, & \text{em} \quad \partial K, \\ u_i = 0, & \text{em} \quad \partial\mathcal{E}_i. \end{cases}$$

Observando que cada u_i é definida em $\mathcal{E}_i$, e como $1 \geqslant u_i \geqslant 0$, temos

$$\begin{cases} \Delta(u_{i+1} - u_i) = 0, & \text{em} \quad \mathcal{E}_i \setminus K, \\ (u_{i+1} - u_i) = 0, & \text{em} \quad \partial K, \\ (u_{i+1} - u_i) \geqslant 0, & \text{em} \quad \partial \mathcal{E}_i. \end{cases}$$

Logo, pelo princípio do máximo temos que

$$1 \geqslant u_{i+1} \geqslant u_i,$$

e segue que existe

$$u = \lim_{i \to +\infty} u_i.$$

A função u satisfaz

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{em} \quad M \setminus K, \\ u = 1, & \text{em} \quad \partial K. \end{cases}$$

Assim, como

$$u_i \xrightarrow{L^2} u \ \text{ e } \ \nabla u_i \xrightarrow{L^2} \nabla u,$$

e além disso

$$\int_{\mathcal{E}_i \setminus K} \nabla u_i \nabla u_i \quad \longrightarrow \quad \int_{M \setminus K} \nabla u \nabla u,$$

podemos concluir que

$$\operatorname{cap}(K, \mathcal{E}_i) = \int_{\mathcal{E}_i \setminus K} |\nabla u_i|^2 \quad \longrightarrow \quad \int_{M \setminus K} |\nabla u|^2 = \operatorname{cap}(K, M).$$

A função u solução do problema (1.21) é chamada de equilíbrio potencial do capacitor (K, Ω). É obvio que se as fronteiras de Ω e K são suficientemente suaves então $u \in \mathcal{L}(K, \Omega)$. Temos então pela Proposição 13 e por (1.21) que vale

$$\begin{aligned} \operatorname{Cap}(K, \Omega) &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\mu \\ &= \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 d\mu \\ &= -\int_{\Omega \setminus K} u \Delta u d\mu + \int_{\partial K \cup \partial \Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} u d\mu' \\ &= \int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\mu' = -\operatorname{flux}_{\partial K} u, \end{aligned} \tag{1.22}$$

onde ν é o vetor normal unitário exterior sobre $\partial(\Omega \setminus K)$. O sinal negativo aparece porque ν aponta para o interior de K. Por outro lado, como u é harmônica temos que

$$0 = \operatorname{flux}_{\partial(\Omega \setminus K)} u = \operatorname{flux}_{\partial \Omega} u - \operatorname{flux}_{\partial K} u. \tag{1.23}$$

eq1.23

As identidades (1.22) e (1.23) implicam na seguinte fórmula da capacidade:

$$\mathrm{Cap}(K,\Omega) = \int_\Omega |\nabla u|^2 d\mu = -\mathrm{flux}_{\partial K} u = -\mathrm{flux}_{\partial\Omega} u. \tag{1.24}$$ eq1.24

Em geral apesar de u não pertencer à $\mathcal{L}(K,\Omega)$, a integral de Dirichlet de u é ainda igual a capacidade.

E útil saber que várias classes de funções teste podem ser utilizadas na definição de capacidade sem alterar o seu valor. Por exemplo, a classe $\mathcal{L}(K,\Omega)$ em (1.19) pode ser substituída pela seguinte classe

$$\mathcal{D}(K,\Omega) := \{\phi \in C_0^\infty : 0 \leqslant \phi \leqslant 1 \text{ e } \phi = 1 \text{ em uma vizinhança de } K\}. \tag{1.25}$$

Seja M uma variedade com bordo então todas as considerações feitas acima permanecem verdadeiras, com a propriedade adicional que a função de equilíbrio potencial do capacitor (K,Ω) deve satisfazer as condições de bordo de Neumann sobre $\partial M \cap (\Omega \setminus K)$ (quando não vazio).

Se M é feito de um material condutor, então o significado físico da $\mathrm{Cap}(K,\Omega)$ é uma condutividade do pedaço de M entre ∂K e $\partial\Omega$. em outras palavras, o fluxo de u através de ∂K e $\partial\Omega$ é igual à corrente através de M, desde que a diferença de potencial entre ∂K e $\partial\Omega$ seja igual a 1.

Definição 27. *Dado um conjunto aberto* $E \subset M$*, definimos a capacidade relativa à* E *como*

$$Cap_E(K,\Omega) = \inf_{\phi\in\mathcal{L}(K,\Omega)} \int_{\Omega\cap E} |\nabla\phi|^2 d\mu, \tag{1.26}$$ eq1.22

onde (K,Ω) *é um capacitor em* M.

A diferença entre (1.26) e (1.20) é que a integral anterior é tomada em $\Omega \cap E$ ao invés de Ω. Claramente, a capacidade $\mathrm{Cap}_E(k,\Omega)$ não depende da geometria sobre $\overline{E}$. se $\Omega = M$ então escreveremos $\mathrm{Cap}_E(K,\Omega)$ por $\mathrm{Cap}_E(K)$. Se ∂E é suave o suficiente então $\overline{E}$ pode ser considerado como uma variedade com bordo. Neste caso a capacidade relativa Cap_E coincide com a capacidade $\mathrm{Cap}_{\overline{E}}$ sobre a variedade $\overline{E}$ do seguinte modo:

$$\mathrm{Cap}_E(K,\Omega) = \mathrm{Cap}_{\overline{E}}(K\cap\overline{E}, \Omega\cap\overline{E}). \tag{1.27}$$

ex_cap_model **Exemplo 7.** *Mostraremos como calcular a capacidade Cap*$(B(o,r),B(o,R))$ *sobre uma variedade modelo* M_σ *onde* o *é o pólo de* M_σ *e* $0<r<R$*. A função*

$$u(\rho,\theta) = u(\rho) = a\int_\rho^R \frac{d\xi}{S(\xi)} \tag{1.28}$$

é a capacidade potencial do capacitor $(B(o,r), B(o,R))$*, onde a constante* a *é escolhida para assegurar que* $u(r) = 1$*, isto é,*

$$a = \left(\int_r^R \frac{d\xi}{S(\xi)} \right)^{-1}. \tag{1.29}$$

Visto que por (1.18)

$$\text{flux}_{\partial B(o,R)} u = -a,$$

concluímos por (1.24) *que*

$$\mathit{Cap}(B(o,r), B(o,R)) = \left(\int_r^R \frac{d\xi}{S(\xi)} \right)^{-1}. \tag{1.30}$$

Fazendo R *tender a infinito concluímos também*

$$\mathit{Cap}(B(o,r)) = \left(\int_r^\infty \frac{d\xi}{S(\xi)} \right)^{-1}.$$

Em particular, em $\mathbb{R}^n$ *temos*

$$\mathit{Cap}(B(o,r)) = \begin{cases} c_n r^{n-2}, & \mathit{se} \quad n > 2, \\ 0, & \mathit{se} \quad n = 2. \end{cases}$$

Seja $\{\Omega_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ uma exaustão de uma variedade Riemanniana M por subdomínios compactos tais que $\Omega_0 \Subset \Omega_j$ para cada j. Tomemos $\omega_j \doteq 1 - u_j$, onde u_j é a função potencial harmônica com respeito a $A_j := \Omega_j - \overline{\Omega}_0$. É fácil ver que ω_j satisfaz

$$\begin{cases} \Delta \omega_j = 0, & \text{em} \quad A_j, \\ \omega_j = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega_0, \\ \omega_j = 1, & \text{sobre} \quad \partial\Omega_j. \end{cases} \tag{1.31}$$

eq1.28

Seguindo a notação em [14] temos a seguinte

Definição 28. *Definimos a capacidade harmônica de* A_j *por*

$$\frac{1}{\mu_j} := \int_{A_j} |\nabla \omega_j|^2 = \mathit{Cap}(\Omega_0, \Omega_j). \tag{1.32}$$

Seja $\Omega \subset M$ uma região. Considere o conjunto $L^2_H(\Omega) := \{h \in L^2(\Omega) : \Delta h = 0\}$.

lem2 **Lema 2** (Lema 2.1 em [14])**.** *Se* $\{\Omega_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ *é uma exaustão de* M *por subdomínios compactos e* ω_j *é a medida harmônica de* $\partial\Omega_j$ *com respeito a* $A_j := \Omega_j - \overline{\Omega}_0$*, então*

$$\frac{1}{\mu_j} = \sup_{L^2_H(A_j)} \frac{\left(\oint_{\partial\Omega_j} \partial_\nu h \right)^2}{\int_{A_j} |\nabla h|^2}.$$

Demonstração. Seja $h \in L^2_H(A_j)$. Então usando a primeira identidade de Green (Proposição 13 e a desigualdade de Cauchy-Schawarz, temos

$$\begin{aligned}
\left(\oint_{\partial\Omega_j} \partial_\nu h\right)^2 &= \left(\oint_{\partial A_j} \omega_j \partial_\nu h\right)^2 \\
&= \left(\int_{A_j} div(\omega_j \nabla h)\right)^2 \\
&= \left(\int_{A_j} (\langle \nabla\omega_j, \nabla h\rangle + \omega_j \Delta h)\right)^2 \\
&= \left(\int_{A_j} \langle \nabla\omega_j, \nabla h\rangle\right)^2 \\
&\leqslant \left(\int_{A_j} |\nabla\omega_j|^2\right)\left(\int_{A_j} |\nabla h|^2\right).
\end{aligned}$$

Assim

$$\frac{\left(\oint_{\partial\Omega_j} \partial_\nu h\right)^2}{\int_{A_j} |\nabla h|^2} \leqslant \int_{A_j} |\nabla\omega_j|^2 = \frac{1}{\mu_j}. \tag{1.33}$$

Ademais vale a igualdade se, e somente se, $h = \omega_j$. □

Denotemos por B_r uma bola geodésica em $p \in M$ fixado. Para $0 < r < R$, seja $A_{r,R} = B_R - B_r$. Seja $\omega_{r,R}$ a medida harmônica de ∂B_R com respeito $A_{r,R}$.

lem3 **Lema 3.** *Sejam* $0 < r < R$ *e* $0 \leqslant a < b \leqslant 1$. *Denote por* $\left(\frac{1}{\mu}\right)(\{a \leqslant \omega_{r,R} \leqslant b\})$ *a capacidade harmônica de* $\{a \leqslant \omega_{r,R} \leqslant b\}$, *isto é,*

$$\left(\frac{1}{\mu}\right)(\{a \leqslant \omega_{r,R} \leqslant b\}) := \int_{\{a\leqslant\omega_{r,R}\leqslant b\}} |\nabla\omega|^2, \tag{1.34}$$

onde ω *é uma função harmônica com valor constante* 0 *sobre* $\{\omega_{r,R} = a\}$ *e com valor constante* 1 *sobre* $\{\omega_{r,R} = b\}$. *Então*

$$\left(\frac{1}{\mu}\right)(\{a \leqslant \omega_{r,R} \leqslant b\}) \leqslant \frac{1}{(b-a)^2}\frac{1}{\mu_{r,R}}. \tag{1.35}$$

Demonstração. Defina

$$\omega = \frac{\omega_{r,R} - a}{b - a}.$$

Observe que ω é harmônica em $\{a \leqslant \omega_{r,R} \leqslant b\} = \{x \in A_{r,R} : a \leqslant \omega_{r,R}(x) \leqslant b\} \subset A_{r,R}$, e que temos

$$\nabla\omega = \frac{1}{b-a}\nabla\omega_{r,R} \quad \Longrightarrow \quad |\nabla\omega|^2 = \frac{1}{(b-a)^2}|\nabla\omega_{r,R}|^2.$$

Então

$$\int_{\{a\leqslant\omega_{r,R}\leqslant b\}} |\nabla\omega|^2 = \frac{1}{(b-a)^2}\int_{\{a\leqslant\omega_{r,R}\leqslant b\}} |\nabla\omega_{r,R}|^2 \leqslant \frac{1}{(b-a)^2}\int_{A_{r,R}} |\nabla\omega_{r,R}|^2.$$

Portanto

$$\int_{\{a\leqslant\omega_{r,R}\leqslant b\}} |\nabla\omega|^2 \leqslant \frac{1}{(b-a)^2}\frac{1}{\mu_{r,R}}.$$

□

Intimamente relacionado com a teoria de capacidade harmônica está o conceito de parabolicidade. Dentre vários modos de descrever a parabolicidade de um espaço, a seguinte definição é simples e bem útil para nossos propósitos.

Definição 29. *Dizemos que uma variedade é parabólica se não admite uma função de Green positiva. Por outo lado, uma variedade não parabólica é uma variedade que admite uma função de Green positiva.*

reen_capacity **Proposição 17.** *Seja U um conjunto aberto pré-compacto em M e $y \in U$ um ponto fixado. Então a seguinte desigualdade é verdadeira*

$$\inf_{x\in\partial U} G(x,y) \leqslant \mathit{Cap}(U)^{-1} \leqslant \sup_{x\in\partial U} G(x,y). \tag{1.36}$$ eq.I

Além disso, se Ω é um pré-compacto em M com fronteira suave e $\Omega \supset \overline{U}$, então

$$\inf_{x\in\partial U} G_\Omega(x,y) \leqslant \mathit{Cap}(U,\Omega)^{-1} \leqslant \sup_{x\in\partial U} G_\Omega(x,y). \tag{1.37}$$ eq.II

Demonstração. Como (1.36) segue de (1.37) fazendo $\Omega \uparrow M$, é suficiente provarmos apenas (1.37). Defina

$$a := \max_{x\in\partial U} G_\Omega(x,y) \ \text{ e } \ b := \min_{x\in\partial U} G_\Omega(x,y). \tag{1.38}$$

Para algum $c \in \mathbb{R}$ consideremos o conjunto

$$F_c = \{x \in \Omega : G_\Omega(x,y) \geqslant c\}.$$

Afirmação:

$$F_a \subset \overline{U} \subset F_b. \tag{1.39}$$ eq1.39

De fato, como a função $G_\Omega(\cdot, y)$ é harmônica em $\Omega \setminus \overline{U}$, e pelo principio do máximo, seu supremo é atingido na fronteira $\partial(\Omega \setminus \overline{U}) = \partial\Omega \cup \partial U$, temos que

$$\sup_{x \in \Omega \setminus \overline{U}} G_\Omega(x, y) = \max_{x \in \partial U} G_\Omega(x, y) = a, \tag{1.40}$$

eq1.40

pois G_Ω se anula sobre $\partial\Omega$. Isto implica que $G_\Omega(x, y) \leqslant a$ para todo $x \in (\Omega \setminus \overline{U})$. Sendo $F_a = \{x \in \Omega : \ G_\Omega(x, y) \geqslant a\}$, então para qualquer $x \in F_a$ vale

$$G_\Omega(x, y) \geqslant a \Longrightarrow x \notin (\Omega \setminus \overline{U}) \Longrightarrow x \in \overline{U}.$$

Logo $F_a \subset \overline{U}$. Similarmente, como a função $G_\Omega(\cdot, y)$ é superharmônica em U, então pelo princípio do mínimo

$$\inf_{x \in U} G_\Omega(x, y) = \min_{x \in \partial U} G_\Omega(x, y) = b. \tag{1.41}$$

eq1.41

O que implica que $G_\Omega(x, y) \geqslant b$ para todo $x \in \overline{U}$, donde $\overline{U} \subset F_b$. Portanto vale (1.39). Pela monotonia da capacidade temos

$$\mathrm{Cap}(F_a, \Omega) \leqslant \mathrm{Cap}(U, \Omega) \leqslant \mathrm{Cap}(F_b, \Omega). \tag{1.42}$$

eqIV

A fim de mostramos que (1.37) ocorre, é suficiente mostrarmos que para qualquer $c > 0$

$$\mathrm{Cap}(F_c, \Omega) = \frac{1}{c}. \tag{1.43}$$

eqV

De fato, definamos a função $u := \frac{1}{c} G_\Omega(\cdot, y)$ que é o equilíbrio potencial do capacitor (F_c, Ω), pois u satisfaz

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{1}{c}\Delta G_\Omega(\cdot, y) = 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ u = \frac{1}{c} G_\Omega(\cdot, y) = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \\ u = \frac{1}{c} G_\Omega(\cdot, y) = 1 & \text{em} \quad \partial F_c. \end{cases} \tag{1.44}$$

Utilizando a (1.23) e a propriedade 5 da função de Green, temos

$$\mathrm{Cap}(F_c, \Omega) = -\mathrm{flux}_{\partial\Omega} u = -\frac{1}{c}\mathrm{flux}_{\partial\Omega} G_\Omega(\cdot, y) = \frac{1}{c}, \tag{1.45}$$

Tomando $c = a$ e $c = b$ temos

$$\frac{1}{a} = \mathrm{Cap}(F_a, \Omega) \ \text{ e } \ \frac{1}{b} = \mathrm{Cap}(F_b, \Omega), \tag{1.46}$$

donde segue o resultado. $\square$

Em termos da Proposição 17 podemos dizer que uma variedade é parabólica se, e somente se, a capacidade de algum/qualquer subconjunto compacto é nula. Mais geralmente, o conceito de parabolicidade de uma variedade Riemanniana possui várias equivalências.

Teorema 3 (Teorema 4.1 em [6]). *Se M é uma variedade Riemanniana. As seguintes propriedades são equivalentes.*

1. *M é não-parabólica.*

2. *Existe uma função superharmônica positiva não constante em M (existe uma função subharmônica limitada não constante em M).*

3. *A função de Green $G(x, y)$ em M é finita para algum/todo $x \neq y$.*

4. *Para algum/todo $x \in M$, tem-se*
$$\int_1^\infty p(t, x, x)dt < \infty. \tag{1.47}$$

5. *A capacidade de algum/todo compacto é positiva.*

Demonstração. Vide [6]. □

A parabolicidade de uma variedade depende apenas do comportamento assintótico da variedade, isto é, fora de um compacto. Deste modo. Para formalizarmos esta ideia precisamos introduzir o seguinte conceito.

Definição 30. *Um fim E de uma variedade M é uma componente ilimitada do complemento de algum subconjunto compacto D de M. Neste caso diremos que E é um fim correspondente à D.*

Os fins de uma variedade também podem ser classificados como parabólicos ou não-parabólicos considerando-os como uma variedade com bordo, e deste modo, considerando condições de Neumann no bordo de E. Na literatura, alguns autores denominam fins parabólicos como “pequenos” fins, e denominam de “grandes” fins aqueles não-parabólicos.

Definição 31. *Um fim E de uma variedade M é dito ser não-parabólico se ele admite uma função de Green positiva com condição de Neumann em ∂E. Caso contrário ele é dito ser parabólico.*

Observação 4. *Se* $\mathsf{D}_1 \subset \mathsf{D}_2$ *são subconjuntos compactos de* M*, então o número de fins correspondentes a* D_1 *é menor que ou igual ao número de fins correspondentes a* D_2*. Deste modo, o compacto* D *o qual utilizaremos durante o texto é o maior compacto que estabiliza estas desigualdades.*

Proposição 18 (Proposição 3.1 em [6])**.** *Seja* M_σ *com* $\mathsf{R}_0 = \infty$*, isto é,* M_σ *é geodesicamente completa e não-compacta. Então* M_σ *é parabólica se, e somente se,*

$$\int^{\infty} \frac{dr}{S(r)} = \infty. \tag{1.48}$$

eq1.48

Demonstração. Pela Proposição 17 temos que o resultado segue-se demonstrando que a capacidade de um compacto em M_σ é identicamente nula. Por outro lado, mostramos no Exemplo 7 que a capacidade da bola $B(o, r)$ é dada por

$$\operatorname{Cap}(B(o,r)) = \left(\int_r^{\infty} \frac{d\xi}{S(\xi)}\right)^{-1}.$$

Donde segue o resultado. □

Observação 5. *Em geral, a condição* (1.48) *não caracteriza a capacidade de variedades completas não-parabólicas. Não obstante* (1.48) *constitui uma condição suficiente optimal para a parabolicidade de uma variedade (veja Teorema 7.5 em [6]). Um exemplo de variedade parabólica completa e não-compacta que não satisfaz* (1.48) *está descrito no Exemplo 7.3 em [6].*

Capítulo 2

Capacidade e Autovalores Biharmônicos

chap2

Neste capítulo estaremos interessados em estudar a capacidade biharmônica e suas interligações com a parabolicidade da variedade e um problema de autovalor associado ao *clamped plate*. Além disso, descreveremos estimativas que correlacionam a capacidade biharmônica com autovalores de *bucking* generalizado.

2.1 Capacidade Biharmônica

sec21

Nesta seção discutiremos alguns conceitos e propriedades da capacidade biharmônica introduzida por B. Palmer em [14]. Seja $\{\Omega_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma exaustão de uma variedade Riemanniana M por subdomínios compactos e seja ω_j a medida harmônica de $\partial\Omega_j$ com respeito à $A_j := \Omega_j - \overline{\Omega}_0$, isto é, a solução do problema (1.31). Seja υ_j uma função biharmônica definida por

$$\begin{cases} \Delta^2\upsilon_j = 0 & \text{em} \quad A_j, \\ \partial_\nu\upsilon_j = 0 & \text{em} \quad \partial A_j, \\ \upsilon_j = \omega_j & \text{em} \quad \partial A_j. \end{cases} \tag{2.1}$$

De modo análogo ao feito para a capacidade harmônica, definimos então a capacidade biharmônica de A_j por

$$\frac{1}{\nu_j} := \int_{A_j} (\Delta\upsilon_j)^2.$$

Fixe $\Omega \subset M$. Consideremos mais uma vez o conjunto $L^2_H(\Omega) := \{h \in L^2(\Omega) : \Delta h = 0\}$.

lem4 **Lema 4** (Lema 2.1 em [14]). *Se* $\{\Omega_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *é uma exaustão de* M *por subdomínios compactos e* $A_j := \Omega_j - \overline{\Omega}_0$. *Então*

$$\frac{1}{\nu_j} = \sup_{L^2_H(A_j)} \frac{\left(\oint_{\partial\Omega_j} \partial_\nu h\right)^2}{\int_{A_j} h^2}.$$

Demonstração. Seja $h \in L^2_H(A_j)$. Tomemos υ_j a solução do problema (2.1). Como υ_j coincide com ω_j em ∂A_j, temos que

$$\oint_{\partial A_j} \upsilon_j \cdot \partial_\nu h = \int_{A_j} \operatorname{div}(\upsilon_j \cdot \nabla h) = \int_{A_j} (\upsilon_j \Delta h + \langle \nabla \upsilon_j, \nabla h\rangle). \tag{2.2}$$
eq2.1

Por outro lado

$$\oint_{\partial A_j} h \cdot \partial_\nu \upsilon_j = \int_{A_j} \operatorname{div}(h \cdot \nabla \upsilon_j) = \int_{A_j} (h \Delta \upsilon_j + \langle \nabla h, \nabla \upsilon_j\rangle). \tag{2.3}$$
eq2.2

Como $\partial_\nu \upsilon_j = 0$ em ∂A_j, segue-se por (2.2), (2.3) e pela desigualdade de Cauchy-Schawarz e a segunda identidade de Green (Proposição 13) que

$$\begin{aligned}
\left(\oint_{\partial\Omega_j} \partial_\nu h\right)^2 &= \left(\oint_{\partial A_j} \upsilon_j \cdot \partial_\nu h\right)^2 \\
&= \left(\int_{A_j} (\upsilon_j \Delta h + \langle \nabla \upsilon_j, \nabla h\rangle)\right)^2 \\
&= \left(\int_{A_j} (h\Delta \upsilon_j + \langle \nabla h, \nabla \upsilon_j\rangle) + \int_{A_j} (\upsilon_j \Delta h - h \Delta \upsilon_j)\right)^2 \\
&= \left(\oint_{\partial A_j} h \cdot \partial_\nu \upsilon_j + \int_{A_j} (\upsilon_j \Delta h - h\Delta \upsilon_j)\right)^2 \\
&= \left(\int_{A_j} -h\Delta \upsilon_j\right)^2 \leqslant \left(\int_{A_j} h^2\right)\left(\int_{A_j} (\Delta \upsilon_j)^2\right).
\end{aligned}$$

Assim

$$\frac{\left(\oint_{\partial\Omega_j} \partial_\nu h\right)^2}{\int_{A_j} h^2} \leqslant \int_{A_j} (\Delta \upsilon_j)^2 := \frac{1}{\nu_j}. \tag{2.4}$$

A igualdade irá ocorrer se, e somente se, $h = \Delta \upsilon_j$. Portanto segue-se o resultado. □

Como resultado imediato do Lema 4 segue-se as propriedades de monotonia da capacidade biharmônica.

corollary_1 **Corolário 2** (Corolário 2.1 em [14]). *A sequência* $\left\{\frac{1}{\nu_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ *é monótona decrescente.*

Demonstração. Se $j' > j > 0$ e $h_{j'} := \Delta\upsilon_{j'}$. Observa-se que $h_{j'}$ é harmônica em $A_{j'}$. De fato $\Delta h_{j'} = \Delta(\Delta\upsilon_{j'}) = \Delta^2\upsilon_{j'} = 0$ em $A_{j'}$. Assim $\Delta h_{j'} = 0$ em $\Omega_{j'}\backslash\Omega_j$, pois $(\Omega_{j'}\backslash\Omega_j) \subset A_{j'}$. Daí pelo teorema da divergência

$$0 = \int_{(\Omega_{j'}\backslash\Omega_j)} \Delta h_{j'} = \oint_{\partial(\Omega_{j'}\backslash\Omega_j)} \partial_\nu h_{j'} = \oint_{\partial\Omega_{j'}} \partial_\nu h_{j'} + \oint_{\partial\Omega_j} \partial_\nu h_{j'}. \tag{2.5}$$

Assim

$$\left(\oint_{\partial\Omega_{j'}} \partial_\nu h_{j'}\right)^2 = \left(\oint_{\partial\Omega_j} \partial_\nu h_{j'}\right)^2. \tag{2.6}$$

Temos também que pelo Lema 4 que

$$\frac{\left(\oint_{\partial\Omega_{j'}} \partial_\nu h_{j'}\right)^2}{\int_{A_j} h_{j'}^2} = \int_{A_{j'}} (\Delta\upsilon_{j'})^2. \tag{2.7}$$

Então como $A_j \subset A_{j'}$ segue que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\nu_j} &= \sup_{L^2_H(A_j)} \frac{\left(\oint_{\partial\Omega_j} \partial_\nu h\right)^2}{\int_{A_j} h^2} \\
&\geqslant \frac{\left(\oint_{\partial\Omega_j} \partial_\nu h_{j'}\right)^2}{\int_{A_j} h_{j'}^2} \\
&= \frac{\left(\oint_{\partial\Omega_{j'}} \partial_\nu h_{j'}\right)^2}{\int_{A_j} h_{j'}^2} \\
&\geqslant \frac{\left(\oint_{\partial\Omega_{j'}} \partial_\nu h_{j'}\right)^2}{\int_{A_{j'}} h_{j'}^2} = \int_{A_{j'}} (\Delta\upsilon_{j'})^2 \doteq \frac{1}{\nu_{j'}}.
\end{aligned}$$

Portanto a capacidade decresce quando o anel A_j se expande. □

prop1.8 **Proposição 19** (Proposição 3.1 em [14]). *Se* M *é uma variedade parabólica e completa, então*

$$\lim_{j\to+\infty} \frac{1}{\nu_j} = 0.$$

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos tomar $\Omega_0 = B(o,1)$ e $\Omega_j = B(o,j)$, $j \geqslant 1$. Seja $h \in L^2_H(A_{1,j}) = \{h \in L^2(A_{1,j}) : \quad \Delta h = 0\}$ onde $A_{1,j} = B_j - \overline{B}_1$. Então para qualquer $\zeta \in C_0^\infty$, tem-se

$$\begin{aligned}
0 &= \oint_{\partial A_{1,j}} \zeta^2 h \partial_\nu h \\
&= \int_{A_{1,j}} \mathrm{div}(\zeta^2 h \nabla h) \\
&= \int_{A_{1,j}} (\zeta^2 h \mathrm{div}(\nabla h) + \langle \nabla(\zeta^2 h), \nabla h \rangle) \\
&= \int_{A_{1,j}} \langle h \nabla(\zeta^2) + \zeta^2 \nabla h, \nabla h \rangle \\
&= \int_{A_{1,j}} \langle 2h\zeta \nabla \zeta + \zeta^2 \nabla h, \nabla h \rangle \\
&= \int_{A_{1,j}} (\zeta^2 |\nabla h|^2 + 2\zeta h \langle \nabla \zeta, \nabla h \rangle).
\end{aligned}$$

Daí

$$\int_{A_{1,j}} \zeta^2 |\nabla h|^2 = -\int_{A_{1,j}} 2h\zeta \langle \nabla \zeta, \nabla h \rangle. \tag{2.8}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
\int_{A_{1,j}} \zeta^2 |\nabla h|^2 &= 2\left|\int_{A_{1,j}} h\zeta \langle \nabla \zeta, \nabla h \rangle\right| && (2.9) \\
&\leqslant 2\int_{A_{1,j}} |h\zeta \langle \nabla h, \nabla \zeta \rangle| && (2.10) \\
&\leqslant 2\left(\int_{A_{1,j}} \zeta^2 |\nabla h|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{A_{1,j}} h^2 |\nabla \zeta|^2\right)^{\frac{1}{2}}. && (2.11)
\end{aligned}$$

Logo

$$\int_{A_{1,R}} \zeta^2 |\nabla h|^2 \leqslant 4\int_{A_{1,R}} h^2 |\nabla \zeta|^2. \tag{2.12}$$

Agora considere a região $\left\{\frac{1}{2} \leqslant \omega_{1,\frac{j}{2}}\right\} \subset A_{1,\frac{j}{2}}$. Seja

$$\rho := d\left(\partial B_1, \{\frac{1}{2} \leqslant \omega_{1,\frac{j}{2}}\}\right).$$

Assumindo que M é parabólica temos que a família de funções $\{\omega_{1,\frac{j}{2}}\}$ converge uniformemente para zero sobre subconjuntos compactos de $M \setminus B_1$. Portanto

$$\lim_{j \to +\infty} \rho = +\infty.$$

Observe que existe uma função $\zeta_j \in C_0^\infty(A_{1,j})$ tal que $\zeta_j \equiv 1$ sobre $\left\{\frac{1}{2} \leqslant \omega_{1,\frac{j}{2}}\right\}$ e

$$|\nabla\zeta_j|^2 \leqslant c\left(\frac{1}{j^2} + \frac{1}{\rho^2}\right), \tag{2.13}$$

onde c é uma constante independente de j. Então segue-se que

$$4c\left(\frac{1}{j^2} + \frac{1}{\rho^2}\right)\int_{A_{1,j}} h^2 \geqslant \int_{A_{1,j}} \zeta_j^2|\nabla h|^2 \geqslant \int_{\{\frac{1}{2}\leqslant\omega_{1,\frac{j}{2}}\}} |\nabla h|^2. \tag{2.14}$$

Usando os Lema 2 e Lema 3, temos

$$\begin{aligned}
16c\left(\frac{1}{j^2} + \frac{1}{\rho^2}\right)\left(\frac{1}{\mu_{1,\frac{j}{2}}}\right) &\geqslant 4c\left(\frac{1}{j^2} + \frac{1}{\rho^2}\right)\frac{\left(\oint_{\partial B_j} \partial_\nu h\right)^2}{\int_{\{\frac{1}{2}\leqslant\omega_{1,\frac{j}{2}}\}} |\nabla h|^2} \\
&\geqslant 4c\left(\frac{1}{j^2} + \frac{1}{\rho^2}\right)\frac{\left(\oint_{\partial B_j} *dh\right)^2}{4c\left(\frac{1}{j^2} + \frac{1}{\rho^2}\right)\int_{A_{1,j}} h^2} \\
&= \frac{\left(\oint_{\partial B_j} *dh\right)^2}{\int_{A_{1,j}} h^2}.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 4 concluímos que

$$16c\left(\frac{1}{j^2} + \frac{1}{\rho^2}\right)\left(\frac{1}{\mu_{1,\frac{j}{2}}}\right) \geqslant \frac{1}{\nu_j}. \tag{2.15}$$

Donde segue-se o resultado. □

2.2 Autovalores Biharmônicos

sec22

Nesta seção discutiremos que problemas de autovalores envolvendo condições do problema de Neumann (1.14) sob outras restrições, conforme Palmer apresenta em [14]. Dada M uma variedade Riemanniana completa, sejam $\Omega \Subset M$ um subdomínio relativamente compacto com fronteira suave, e $P > 0$ uma função suave em M. Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} \Delta^2 u - \lambda P u = 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ u = \partial_\eta u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases} \qquad (\textit{Clamped Plate}) \tag{2.16}$$

proclamp

Denotando por $\lambda_1(P,\Omega)$ o primeiro autovalor do problema acima, podemos definir

$$\lambda_1(P,M) \doteq \inf_{\Omega \Subset M} \lambda_1(P,\Omega). \tag{2.17}$$

Como primeiro resultado mostraremos a relação entre os conceitos de parabolicidade e o primeiro autovalor $\lambda_1(P,M)$.

thm_4 **Teorema 4** (Teorema 1.1 em [14])**.** *Se M é uma variedade Riemanniana parabólica, aberta e completa, então $\lambda_1(P,M) = 0$.*

Demonstração. O primeiro autovalor $\lambda_1(P,\Omega)$ associado ao problema (2.16) é caracterizado por

$$\lambda_1 = \inf_{C_0^\infty(\Omega)} \frac{\displaystyle\int_\Omega (\Delta f)^2}{\displaystyle\int_\Omega P f^2}. \tag{2.18}$$

eq2.14

Sejam as $v_{1,R}$ soluções de (2.1), onde $A_{1,R} = B_R \backslash \overline{B}_1$. Defina a função u sobre B_R por

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in \overline{B}_1, \\ 1 - v_{1,R} & \text{se} \quad x \in A_{1,R}. \end{cases}$$

Então $u \in W_0^{2,2}(B_R)$ e seu Laplaciano é dado por

$$\Delta u(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in B_1, \\ -\Delta v_{1,R} & \text{se} \quad x \in A_{1,R}. \end{cases}$$

Assim

$$\int_{A_{1,R}} (\Delta u)^2 \;=\; \int_{B_R \backslash B_1} (\Delta u)^2 = \int_{B_R} (\Delta u)^2 - \int_{B_1} (\Delta u)^2 = \int_{B_R} (\Delta u)^2. \tag{2.19}$$

Tomando $f = u$ em (2.18) obtemos

$$\begin{aligned}
\lambda_1(B_R) &= \inf_{C_0^\infty(B_R)} \frac{\displaystyle\int_{B_R} (\Delta u)^2}{\displaystyle\int_{B_R} Pu^2} \\
&\leqslant \frac{\displaystyle\int_{B_R} (\Delta u)^2}{\displaystyle\int_{B_R} Pu^2} \\
&\leqslant \frac{\displaystyle\int_{A_{1,R}} (-\Delta v_{1,R})^2}{\displaystyle\int_{B_1} P} = \left(\frac{1}{\nu_{1,R}}\right) \frac{1}{\displaystyle\int_{B_1} P}.
\end{aligned}$$

Daí

$$\lambda_1(B_R) \int_{B_1} P \leqslant \frac{1}{\nu_{1,R}}. \tag{2.20}$$

Então como M é parabólica, a Proposição 19 nos diz que $\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{\nu_{1,R}} = 0$, donde segue-se que

$$\lambda_1(P, M) = 0.$$

$\square$

Sejam M uma variedade Riemanniana completa e $\Omega \subset M$ um subdomínio relativamente compacto com fronteira imersa e suave. O problema de autovalor de buckling é definido por

$$\begin{cases} \Delta^2 u + \beta_1 \Delta u = 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ u = \partial_\eta u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.21}$$

proB

onde u é uma função suave em Ω e η é o campo normal exterior. Seja β_1 o primeiro autovalor de bucking caracterizado por

$$\beta_1(\Omega) := \inf_{C_0^\infty(\Omega)} \frac{\displaystyle\int_\Omega (\Delta u)^2}{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2}. \tag{2.22}$$

aBuck

Vamos agora definir uma generalização do autovalor de buckling denotada por α_1. Seja $\partial\Omega = \gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_n$ a decomposição de $\partial\Omega$ em componentes disjuntas. Denotemos por w_i as soluções de

$$\begin{cases} \Delta^2 w_i = 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ \partial_\eta w_i = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \\ w_i = \delta_{i,j} & \text{em} \quad \gamma_j, \end{cases} \tag{2.23}$$

eqsoluçã

com $\delta_{i,j} = 1$ se $i = j$, e $\delta_{i,j} = 0$ se $i \neq j$. Seja $W \doteq \operatorname{span}\{w_1, \ldots, w_n\}$ o espaço gerado pelas funções w_i. Definimos então

$$\alpha_1 = \alpha_1(\Omega) := \inf_{C_0^\infty(\Omega) \oplus W} \frac{\displaystyle\int_\Omega (\Delta u)^2}{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2}, \tag{2.24}$$ abuckG

onde $C_0^\infty(\Omega) \oplus W$ representa a soma direta do conjunto $C_0^\infty(\Omega)$ das funções suaves de suporte compacto em Ω com o conjunto W das soluções de (2.23). Pode-se mostrar por métodos diretos que o ínfimo em (2.24) é atingido em uma função $u \in C^4(\Omega)$ satisfazendo

$$\begin{cases} \Delta^2 u + \alpha_1 \Delta u = 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ \partial_\eta u \equiv 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \\ u \equiv c_j & \text{em} \quad \gamma_j, \end{cases} \tag{2.25}$$

onde $j = 1, \ldots, n$ e as c_j são constantes.

pro.20 **Proposição 20** (Proposição 4.1 em [14])**.** *Seja $\Omega \Subset \Omega' \Subset M$. Assuma que $\partial\Omega'$ é conexa e que $\Omega = \Omega' - (\overline{D}_1 \cup \ldots \cup \overline{D}_n)$ onde cada D_j é um subdomínio com fronteira conexa. Então*

$$\alpha_1(\Omega) \geqslant \beta_1(\Omega') \geqslant \lambda_1(\Omega'). \tag{2.26}$$

Demonstração. Seja $u \in C_0^\infty(\Omega) \oplus W$. A menos de uma translação de u, podemos assumir que $u \equiv 0$ em $\partial\Omega'$. Para cada $j = 1, \ldots, n$ denotemos por $c_j = u|_{\partial D_j}$ os valores constantes de u nas componentes conexas ∂D_j. Definimos

$$u'(x) := \begin{cases} u & \text{se} \quad x \in \Omega, \\ c_j & \text{se} \quad x \in \overline{D}_j. \end{cases}$$

Seja $u_m \in C_c^\infty(\Omega) \oplus W$ uma sequência que converge para u em $W^{2,2}(\Omega)$. Considere a seguinte sequência

$$u'_m(x) := \begin{cases} u_m & \text{se} \quad x \in \Omega, \\ c_j & \text{se} \quad x \in \overline{D}_j. \end{cases}$$

Uma conta simples nos mostra que

$$\lim_{m \to +\infty} \|u'_m - u'\|_{W^{2,2}(\Omega')} = \lim_{m \to +\infty} \|u_m - u\|_{W^{2,2}(\Omega)} = 0.$$

Então $u' \in W^{2,2}$ e portanto

$$\beta_1(\Omega') \leqslant \frac{\displaystyle\int_{\Omega'} (\Delta u')^2}{\displaystyle\int_{\Omega'} |\nabla u'|^2} = \frac{\displaystyle\int_\Omega (\Delta u)^2}{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2}. \tag{2.27}$$

Tomando o ínfimo obtemos

$$\beta_1(\Omega') \leqslant \inf_{C_0^\infty(\Omega)\oplus W} \frac{\displaystyle\int_\Omega (\Delta u)^2}{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2} = \alpha_1(\Omega).$$

Agora vamos mostrar a segunda desigualdade. Seja u' uma autofunção correspondente a β_1 e definamos $h := \Delta u' + \beta_1 u'$. Então h é claramente harmônica em Ω. De fato, como $0 = |\Delta^2 u' + \alpha_1 \Delta u'| \geqslant |\Delta^2 u' + \beta_1 \Delta u'| = |\Delta h|$. Por causa do valor de u' em $\partial\Omega$ e como

$$-u'\Delta u' = \beta_1 (u')^2 - u'h,$$

podemos escrever

$$\lambda_1 \leqslant \frac{-\displaystyle\int_\Omega u'\Delta u'}{\displaystyle\int_\Omega (u')^2} = \beta_1 - \frac{\displaystyle\int_\Omega h u'}{\displaystyle\int_\Omega (u')^2}. \tag{2.28}$$

eq2.19

Seja $\{\xi_n\} \subset C_0^\infty$ uma sequência convergindo para u' em $W_0^{2,2}$. Então multiplicando $h := \Delta u' + \beta_1 u'$ por h e integrando tem-se

$$\int_\Omega (h^2 - \beta_1 u' h) = \int_\Omega h \Delta u' = \lim_{n \to +\infty} \int_\Omega h \Delta \xi_n = 0, \tag{2.29}$$

eq220

pois

$$\int_\Omega h \Delta \xi_n = \int_\Omega \xi_n \Delta h + \int_{\partial\Omega} (h \partial_\nu \xi_n - \xi_n \partial_\nu h) = 0.$$

Então por (2.29)

$$0 \leqslant \int_\Omega h^2 = \beta_1 \int_\Omega h u'. \tag{2.30}$$

eq2.21

Como $\beta_1 \geqslant 0$ temos que a integral de hu' é não-negativa, segue-se de (2.28) e (2.30) que $\lambda_1 \leqslant \beta_1$. □

Teorema 5 (Teorema 4.1 em [14]). *Seja* $(M^2, \partial M)$ *uma superfície compacta com fronteira suave. Denotemos a curvatura gaussiana por* K*, e por* σ_1 *o primeiro autovalor do problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u - Ku + \sigma u = 0 & \textit{em} \quad M, \\ u \equiv 0 & \textit{em} \quad \partial M. \end{cases}$$

Então $\alpha_1 \geqslant \sigma_1$.

Demonstração. Seja w uma função satisfazendo

$$\begin{cases} \Delta^2 w + \alpha_1 \Delta w = 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ \partial_n w \equiv 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \\ w \equiv c_j & \text{em} \quad \gamma_j, \end{cases}$$

onde os c_j são constantes. Pela fórmula de Lichnerowicz (veja equação (3.22) em [1]) temos

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla w|^2 = |\nabla\nabla w|^2 + K(\nabla w, \nabla w) + \langle \nabla w, \nabla \Delta w\rangle.$$

Expandindo o lado esquerdo da equação acima obtemos

$$|\nabla w|\Delta|\nabla w| + |\nabla|\nabla w||^2 = |\nabla\nabla w|^2 + K(\nabla w, \nabla w) + \langle \nabla w, \nabla \Delta w\rangle.$$

Combinando a última expressão com a desigualdade de Kato

$$|\nabla|\nabla w|| \leqslant |\nabla\nabla w|,$$

temos

$$|\nabla w|\Delta|\nabla w| - K|\nabla w|^2 = |\nabla\nabla w|^2 - |\nabla|\nabla w||^2 + \langle \nabla w, \nabla \Delta w\rangle \geqslant \langle \nabla w, \nabla \Delta w\rangle.$$

Note que $|\nabla w| \equiv 0$ em ∂M, e que portanto

$$\begin{aligned} -\int_M \langle \nabla \Delta w, \nabla w\rangle &= \int_M (\Delta w)^2 - \int_M \mathrm{div}(\Delta w \nabla w) \\ &= \int_M (\Delta w)^2 - \int_{\partial M} \langle \Delta w \nabla w, \nu\rangle \\ &= \int_M (\Delta w)^2. \end{aligned}$$

Tomando $u = |\nabla w|$ como função teste na caracterização variacional de σ_1 temos

$$\begin{aligned} \sigma_1 \int_M |\nabla w|^2 &\leqslant -\int_M (|\nabla w|\Delta|\nabla w| - K|\nabla w|^2) \\ &\leqslant -\int_M \langle \nabla w, \nabla \Delta w\rangle \\ &= \int_M (\Delta w)^2 \\ &= \alpha_1 \int_M |\nabla w|^2. \end{aligned}$$

Isto finaliza a prova. □

O seguinte teorema servirá de base para a demonstração do Teorema 7. A demonstração descrita abaixo pode ser encontrada no Capítulo 7, Proposição 7.10 em [16].

Li-Tam **Teorema 6** (Teorema 4.3 em [14]). *Seja M uma variedade Riemanniana completa aberta com pelo menos dois fins não-parabólicos disjuntos. Denote um desses fins por $\mathcal{E}_1$. Seja*

$p \in M$ *e defina* f_R *por*

$$\begin{cases} \Delta f_R = 0 & em \quad B_R(p), \\ f_R = 1 & em \quad \partial B_R(p) \cap \mathcal{E}_1, \\ f_R = 0 & em \quad \partial B_R(p) \backslash \mathcal{E}_1. \end{cases} \tag{2.31}$$

eq.L.T.

Então existe uma sequência $R_i \to +\infty$ *tal que* f_{R_i} *converge uniformemente em subconjuntos compactos de* M *para uma função harmônica positiva, não constante e com energia de Dirichlet finita.*

Demonstração. Denotemos por $\mathcal{E}_a$ e $\mathcal{E}_A$ os fins parabólicos e não-parabólicos de M com respeito ao compacto D, respectivamente. Para cada i sejam f_{R_i} as soluções do problema (2.31). Pelo princípio do máximo $0 < f_{R_i} < 1$, e pelo princípio de Harnack, a menos de subsequência, temos que f_{R_i} converge localmente uniformemente para uma função harmônica f em M, satisfazendo $0 \leqslant f \leqslant 1$. Para cada A, seja h_A uma função harmônica em $\mathcal{E}_A$ construída na Proposição 7.3 em [16]. Pela construção e pelo princípio do máximo, para $A \neq 1$, $f_{R_i} < h_A$ em $\mathcal{E}_A$. Logo $0 < f \leqslant h_A$, tal que $0 \leqslant \inf_{\mathcal{E}_A} f \leqslant \inf_{\mathcal{E}_A} h_A = 0$, e pelo Lema 7.8 em [16] f tem integral de Dirichlet finita em $\mathcal{E}_A$. Analogamente, visto que $1 - f_{R_i} < h_1$ em $\mathcal{E}_1$, concluímos que $\sup_{\mathcal{E}_1} f = 1$, e portanto f tem integral de Dirichlet em $\mathcal{E}_1$. Finalmente, se f é harmônica e limitada, pelo Lema 7.9 em [16] esta função tem integral de Dirichlet finita em cada fim parabólico $\mathcal{E}_a$. Podemos então concluir que f tem integral de Dirichlet finita em M, como queríamos prova. □

Exemplo 8. *Seja* $\mathbb{H}$ *o disco de Poincaré equipado com a métrica de curvatura constante* -1. *Claramente* $\mathbb{H}$ *tem exatamente um fim não-parabólico. É bem sabido que* $\lambda_1(M) = \frac{1}{4}$. *Se* $\Omega \Subset M$, *então podemos sempre encontrar um domínio* Ω' *como na Proposição 20. Portanto* $\alpha_1(M) \geqslant \frac{1}{4}$.

O Exemplo acima nos mostra que a suposição sobre o número de fins não-parabólicos no Teorema 7 abaixo não poder se melhorada sem suposições adicionais sobre a geometria. Recordamos que uma variedade M é aberta se ela é não-compacta e sem bordo.

Se M é uma variedade Riemanniana aberta e completa. Então podemos definir

$$\alpha_1(M) = \inf_{\Omega \Subset M} \alpha_1(\Omega).$$

teorema6 **Teorema 7** (Teorema 4.2 em [14]). *Se* M *é uma variedade Riemanniana aberta e completa, com pelo menos dois fins não-parabólicos. Então* $\alpha_1(M) = 0$.

Demonstração. Denotemos um dos fins não-parabólicos por $\mathcal{E}_1$. Selecionando $p \in M$, denote por $B_R \doteq B(p,R)$. Seja v_R a solução do problema

$$\begin{cases} \Delta^2 v_R = 0 & \text{em} \quad B_R, \\ \partial_n v_R = 0 & \text{sobre} \quad \partial B_R, \\ \quad v_R = 1 & \text{em} \quad \partial B_R \cap \mathcal{E}_1, \\ \quad v_R = 0 & \text{em} \quad \partial B_R - \mathcal{E}_1. \end{cases}$$

Análogo ao Lema 4 mostremos inicialmente que

$$\int_{B_R} (\Delta v_R)^2 = \|\Delta v_R\|_2^2 = \sup_{L^2_H(B_R)} \frac{\left(\oint_{\partial B_R \cap \mathcal{E}_1} \partial_\nu h\right)^2}{\int_{B_R} h^2}. \tag{2.32}$$

eq1_thm6

De fato, a segunda identidade de Green (1.2)) nos dá

$$\begin{aligned} \left(\oint_{\partial B_R \cap \mathcal{E}_1} \partial_\nu h\right)^2 &= \left(\oint_{\partial B_R} v_R \cdot \partial_\nu h\right)^2 \\ &= \left(\oint_{\partial B_R} h \cdot \partial_\nu v_R + \int_{B_R} (v_R \Delta h - h \Delta v_R)\right)^2 \\ &= \left(\int_{B_R} h \Delta v_R\right)^2 \leqslant \left(\int_{B_R} h^2\right)\left(\int_{B_R} (\Delta v_R)^2\right). \end{aligned}$$

Daí

$$\frac{\left(\oint_{\partial B_R \cap \mathcal{E}_1} \partial_\nu h\right)^2}{\int_{B_R} h^2} \leqslant \int_{B_R} (\Delta v_R)^2.$$

A equação (2.32) segue-se tomando o supremo sobre $L^2_H(B_R)$. Também como na prova da Proposição 19, vale a seguinte desigualdade

$$\int_{B_R} \zeta^2 |\nabla h|^2 \leqslant 4 \int_{B_R} h^2 |\nabla \zeta|^2,$$

para todas as funções $h \in L^2_H(B_R)$ e todas funções $\zeta \in C_0^\infty(B_R)$. Tomando ζ como uma função *cut-off* com $\zeta \equiv 1$ sobre $B_{\frac{R}{2}}$ e $|\nabla \zeta| \leqslant \frac{\sqrt{c}}{2R}$, onde c é uma constante que independe de R, obtemos

$$\int_{B_{\frac{R}{2}}} |\nabla h|^2 \leqslant \int_{B_R} \zeta^2 |\nabla h|^2 \leqslant 4 \int_{B_R} h^2 |\nabla \zeta|^2 \leqslant \frac{c}{R^2} \int_{B_R} h^2.$$

Desse modo

$$\frac{\left(\oint_{\partial B_R\cap\mathcal{E}_1}\partial_\nu h\right)^2}{\displaystyle\int_{B_R}h^2}\leqslant\frac{c}{R^2}\frac{\left(\oint_{\partial B_R\cap\mathcal{E}_1}\partial_\nu h\right)^2}{\displaystyle\int_{B_{\frac{R}{2}}}|\nabla h|^2},$$

ou seja,

$$\int_{B_R}(\Delta v_R)^2\leqslant\frac{c}{R^2}\sup_{L^2_H(B_R)}\frac{\left(\oint_{\partial B_R\cap\mathcal{E}_1}\partial_\nu h\right)^2}{\displaystyle\int_{B_{\frac{R}{2}}}|\nabla h|^2}. \tag{2.33}$$

eq2_thm6

Observemos agora que para $R\gg 1$, e $\Omega_R=(B_R\setminus B_{\frac{R}{2}})\cap\mathcal{E}_1$, para qualquer $h\in L^2_H(B_R)$ vale

$$0=\int_{\Omega_R}\Delta h=\oint_{\partial\Omega_R}\partial_\nu h=\oint_{\partial B_R\cap\mathcal{E}_1}\partial_\nu h+\oint_{\partial B_{\frac{R}{2}}\cap\mathcal{E}_1}\partial_\nu h.$$

Logo

$$\left(\oint_{\partial B_R\cap\mathcal{E}_1}\partial_\nu h\right)^2=\left(\oint_{\partial B_{\frac{R}{2}}\cap\mathcal{E}_1}\partial_\nu h\right)^2. \tag{2.34}$$

eq3_thm6

Considere um compacto $K\subset M$ tal que $p\in K$ e $K\cap\mathcal{E}_1\neq\emptyset$. Observe que

$$L^2_H(B_R)\subset L^2_H((B_{\frac{R}{2}}\setminus K)\cap\mathcal{E}_1),$$

pois $B_{\frac{R}{2}}\cap\mathcal{E}_1\subset B_R$. Com isso, por (2.33) e (2.34) podemos escrever

$$\begin{aligned}
\|\Delta v_R\|_2^2 &\leqslant \frac{c}{R^2}\sup_{L^2_H(B_R)}\frac{\left(\oint_{\partial B_R\cap\mathcal{E}_1}\partial_\nu h\right)^2}{\displaystyle\int_{B_{\frac{R}{2}}}|\nabla h|^2}\\
&\leqslant \frac{c}{R^2}\sup_{L^2_H(B_R)}\frac{\left(\oint_{\partial B_{\frac{R}{2}}\cap\mathcal{E}_1}\partial_\nu h\right)^2}{\displaystyle\int_{B_{\frac{R}{2}}\cap\mathcal{E}_1}|\nabla h|^2}\\
&\leqslant \frac{c}{R^2}\sup_{L^2_H((B_{\frac{R}{2}}\setminus K)\cap\mathcal{E}_1)}\frac{\left(\oint_{\partial B_{\frac{R}{2}}\cap\mathcal{E}_1}\partial_\nu h\right)^2}{\displaystyle\int_{(B_{\frac{R}{2}}\setminus K)\cap\mathcal{E}_1}|\nabla h|^2}\doteq\frac{c}{R^2}\frac{1}{\mu^{\mathcal{E}_1}_{\frac{R}{2}}},
\end{aligned}$$

onde $\frac{1}{\mu^{\mathcal{E}_1}_{\frac{R}{2}}}$ é a capacidade harmônica de $(B_{\frac{R}{2}}\setminus K)$ com respeito à variedade com bordo $\mathcal{E}_1$. Como por hipótese existem dois fins não-parabólicos, o Teorema 6 nos garante a existência de funções f_{R_i} tais que

$$\begin{cases} \Delta f_R = 0 & \text{em} \quad B_R(p), \\ f_R = 1 & \text{em} \quad \partial B_R(p) \cap \mathcal{E}_1, \\ f_R = 0 & \text{em} \quad \partial B_R(p) \backslash \mathcal{E}_1. \end{cases}$$

Assim, pelo princípio de Dirichlet

$$\int_{B_{R_i}} |\nabla v_{R_i}|^2 \geqslant \int_{B_{R_i}} |\nabla f_{R_i}|^2.$$

Logo para todo $i \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \alpha_1(M) & \leqslant \frac{\|\Delta v_{R_i}\|_2^2}{\|\nabla v_{R_i}\|_2^2} = \frac{\int_{B_{R_i}} (\Delta v_{R_i})^2}{\int_{B_{R_i}} |\nabla v_{R_i}|^2} \leqslant \frac{\int_{B_{R_i}} (\Delta v_{R_i})^2}{\int_{B_{R_i}} |\nabla f_{R_i}|^2} & (2.35) \\ & \leqslant \left(\frac{c}{R_i^2}\right) \frac{1}{\mu_{\frac{R_i}{2}}^{\mathcal{E}_1}} \frac{1}{\int_{B_{R_1}} |\nabla f_{R_i}|^2}. & (2.36) \end{aligned}$$

Notemos que a sequência $\left\{\frac{1}{\mu_{\frac{R_i}{2}}^{\mathcal{E}_1}}\right\}$ é decrescente em i e pelas propriedades de funções harmônicas tem-se

$$\int_{B_{R_1}} |\nabla f_{R_i}|^2 \longrightarrow \int_{B_{R_1}} |\nabla f|^2.$$

Portanto

$$\alpha_1(M) \leqslant \lim_{i \to +\infty} \left(\frac{c}{R_i^2}\right) \frac{1}{\mu_{\frac{R_i}{2}}^{\mathcal{E}_1}} \frac{1}{\int_{B_{R_1}} |\nabla f_{R_i}|^2} = 0.$$

□

Em [15] Payne mostrou que para um domínio convexo no plano vale a seguinte desigualdade envolvendo os autovalores de *buckling* e de *clamped plate*

$$\beta_1 \leqslant 4\lambda_1. \tag{2.37}$$

Em [14] Palmer estendeu as ideias de Payne e provou o seguinte

Teorema 8 (Teorema 6.1 em [14])**.** *Seja $\Omega \subseteq M$ um subdomínio relativamente compacto com bordo imerso suave e limitado na variedade Riemanniana M. Suponha que $\partial\Omega$ tenha curvatura média H não positiva com respeito ao normal apontando para fora e que a curvatura de Ricci de M satisfaz*

$$\mathrm{Ric}_M \geqslant -\frac{3a^2}{4}.$$

Então

$$\beta_1(\Omega) \leqslant 7\lambda_1(\Omega) + 3a^2.$$

Demonstração. Seja u uma autofunção de λ_1, isto é, $\Delta u = -\lambda_1 u$. Como

$$\Delta u^2 = 2u\Delta u + 2|\nabla u|^2 = 2(|\nabla u|^2 - \lambda_1 u^2), \tag{2.38}$$

eq2.35

tem-se

$$\begin{aligned} (\Delta u^2)^2 &= (2(|\nabla u|^2 - \lambda_1 u^2))^2 = 4(|\nabla u|^4 + \lambda_1^2 u^4 - 2\lambda_1 u^2 |\nabla u|^2) \\ &= 4(|\nabla u|^4 + \lambda_1^2 + 2u|u|^2 \Delta u). \end{aligned}$$

Daí, desde que

$$|\nabla u^2|^2 = |2u\nabla u|^2 = 4u^2|\nabla u|^2,$$

tem-se

$$\beta_1(\Omega) = \inf_{C_0^\infty(\Omega)} \frac{\displaystyle\int_\Omega (\Delta u^2)^2}{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u^2|^2} \leqslant \frac{\displaystyle\int_\Omega 4(\lambda_1^2 u^2 + |\nabla u|^4 + 2u\Delta u|\nabla u|^2)d\Sigma}{\displaystyle\int_\Omega 4u^2|\nabla u|^2 d\Sigma}.$$

Observemos inicialmente que valem as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} div(u^3 \cdot \nabla u) &= u^3\Delta u + \langle \nabla u^3, \nabla u\rangle \\ &= u^3 \cdot (-\lambda_1 u) + \langle \nabla u^3, \nabla u\rangle \\ &= \langle \nabla u^3, \nabla u\rangle - \lambda_1 u^4. \end{aligned} \tag{2.39}$$

$$\nabla u^3 = u\nabla u^2 + u^2\nabla u = u2u\nabla u + u^2 \nabla u = 3u^2\nabla. \tag{2.40}$$

eq2.37

$$\langle \nabla u^3, \nabla u\rangle = \langle 3u^2\nabla u, \nabla u\rangle = 3u^2|\nabla u|^2. \tag{2.41}$$

eq2.38

Como $u \in C_0^\infty(\Omega)$, utilizando (2.39), (2.40), (2.41) temos

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\partial\Omega} u^3\langle \nabla u, n\rangle ds = \int_\Omega div(u^3\nabla u)d\Sigma = \int_\Omega (\langle \nabla u^3, \nabla u\rangle - \lambda_1 u^4)d\Sigma \\ &= \int_\Omega \langle 3u^2\nabla u, \nabla u\rangle d\Sigma - \lambda_1 \int_\Omega u^4 d\Sigma = 3\int_\Omega u^2|\nabla u|^2 d\Sigma - \lambda_1 \int_\Omega u^4 d\Sigma. \end{aligned}$$

Donde obtemos

$$3\int_\Omega u^2|\nabla u|^2 d\Sigma = \lambda_1 \int_\Omega u^4 d\Sigma.$$

Com estas observações podemos estimar

$$
\begin{aligned}
\beta_1 &\leqslant \frac{\lambda_1^2 \displaystyle\int_\Omega u^4 + \int_\Omega |\nabla u|^4 + 2\int_\Omega u\Delta u |\nabla u|^2}{\displaystyle\int_\Omega u^2|\nabla u|^2} \\
&= \frac{\lambda_1^2 \displaystyle\int_\Omega u^4}{\displaystyle\int_\Omega u^2|\nabla u|^2} + \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^4}{\displaystyle\int_\Omega u^2|\nabla u|^2} + 2\frac{\displaystyle\int_\Omega u\Delta u|\nabla u|^2}{\displaystyle\int_\Omega u^2|\nabla u|^2} \\
&= 3\lambda_1 + \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^4}{\displaystyle\int_\Omega u^2|\nabla u|^2} - 2\lambda_1 \frac{\displaystyle\int_\Omega u^2|\nabla u|^2}{\displaystyle\int_\Omega u^2|\nabla u|^2} \\
&= 3\lambda_1 + \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^4}{\displaystyle\int_\Omega u^2|\nabla u|^2} - 2\lambda_1 \\
&= \lambda_1 + \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^4}{\displaystyle\int_\Omega u^2|\nabla u|^2}.
\end{aligned}
$$

Daí

$$
\beta_1 \leqslant \lambda_1 + \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^4}{\displaystyle\int_\Omega u^2|\nabla u|^2} \doteq \lambda_1 + \theta. \tag{2.42}
$$

Utilizando propriedades do divergente obtemos

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}(u\cdot|\nabla u|^2\nabla u) &= u\cdot \operatorname{div}(|\nabla u|^2\nabla u) + \langle \nabla u, |\nabla u|^2\nabla u\rangle \\
&= u\cdot \operatorname{div}(|\nabla u|^2\nabla u) + |\nabla u|^4.
\end{aligned}
$$

Como $u \in C_0^\infty(\Omega)$, tem-se

$$
\int_\Omega \operatorname{div}(u\cdot|\nabla u|^2\nabla u) = \oint_{\partial\Omega} \langle u|\nabla u|^2\nabla u, \eta\rangle = 0. \tag{2.43}
$$

Logo

$$
\left(\int_\Omega |\nabla u|^4\right)^2 = \left(\int_\Omega u\cdot \operatorname{div}(|\nabla u|^2\nabla u)\right)^2. \tag{2.44}
$$

Com isso temos que

$$\begin{aligned}
\left(\int_\Omega |\nabla u|^4\right)^2 &= \left(\int_\Omega u \cdot div(|\nabla u|^2 \nabla u)\right)^2 \\
&= \left(\int_\Omega u(|\nabla u|^2 \Delta u + \langle \nabla |\nabla u|^2, \nabla u\rangle)\right)^2 \\
&= \left(\int_\Omega (\langle \Delta u \nabla u, u\nabla u\rangle + \langle \nabla |\nabla u|^2, u\nabla u\rangle)\right)^2 \\
&= \left(\int_\Omega \langle u\nabla u, \nabla |\nabla u|^2 + \Delta u \nabla u\rangle\right)^2 \\
&= \left(\int_\Omega \langle u\nabla u, \nabla |\nabla u|^2 - \lambda_1 u \nabla u\rangle\right)^2 \\
&\leqslant \left(\int_\Omega u^2 |\nabla u|^2\right)\left(\int_\Omega |\nabla |\nabla u|^2 - \lambda_1 u \nabla u|^2\right).
\end{aligned}$$

Substituindo na definição de θ vale

$$\begin{aligned}
\theta^2 &= \left(\frac{\int_\Omega |\nabla u|^4}{\int_\Omega u^2 |\nabla u|^2}\right)^2 \\
&\leqslant \frac{\left(\int_\Omega u^2 |\nabla u|^2\right)\left(\int_\Omega |\nabla |\nabla u|^2 - \lambda_1 u \nabla u|^2\right)}{\left(\int_\Omega \nabla u^2 |\nabla u|^2\right)^2} \\
&= \frac{\int_\Omega |\nabla |\nabla u|^2 - \lambda_1 u \nabla u|^2}{\int_\Omega u^2 |\nabla u|^2} \\
&\leqslant \frac{\int_\Omega (|\nabla |\nabla u|^2|^2 + \lambda_1^2 u^2 |\nabla u|^2 - 2\lambda_1 \langle u\nabla u, \nabla |\nabla u|^2\rangle)}{\int_\Omega u^2 |\nabla u|^2} \\
&= \frac{\int_\Omega |\nabla |\nabla u|^2|^2}{\int_\Omega u^2 |\nabla u|^2} + \lambda_1^2 - 2\lambda_1 \frac{\int_\Omega \langle u\nabla u, \nabla |\nabla u|^2\rangle}{\int_\Omega u^2 |\nabla u|^2}. \qquad (2.45)
\end{aligned}$$

Por outro lado, como

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^2 \cdot \nabla u^2) = |\nabla u|^2 \cdot \operatorname{div}(\nabla u^2) + \langle \nabla|\nabla u|^2, \nabla u^2\rangle = |\nabla u|^2 \Delta u^2 + \langle \nabla|\nabla u|^2, \nabla u^2\rangle,$$

temos que

$$\int_\Omega \operatorname{div}(|\nabla u|^2 \cdot \nabla u^2) = \int_{\partial\Omega} \langle |\nabla u|^2 \nabla u^2, \eta\rangle = \int_{\partial\Omega} \langle 2u\nabla u|\nabla u|^2, \eta\rangle = 0.$$

Assim

$$\int_\Omega \langle \nabla|\nabla u|^2, \nabla u^2\rangle = -\int_\Omega |\nabla u|^2 \Delta u^2. \tag{2.46}$$

Expandindo o numerador do último termo de (2.45) e usando (2.46) e (2.38), obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \langle u\nabla u, \nabla|\nabla u|^2\rangle &= \frac{1}{2}\int_\Omega \langle \nabla u^2, \nabla|\nabla u|^2\rangle = -\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \Delta u^2 \\
&= -\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 (2(|\nabla u|^2 - \lambda_1 u^2)) \\
&= -\int_\Omega (|\nabla u|^4 - \lambda_1 u^2 |\nabla u|^2).
\end{aligned}$$

Introduzindo este resultado na estimativa de θ^2 e substituindo em (2.42) obtemos

$$\begin{aligned}
\theta^2 &\leqslant \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla|\nabla u|^2|^2}{\displaystyle\int_\Omega u^2|\nabla u|^2} + 2\lambda_1 \frac{\displaystyle\int_\Omega (|\nabla u|^4 - \lambda_1 u|\nabla u|^2)}{\displaystyle\int_u^2 |\nabla u|^2} + \lambda_1^2 \\
&= \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla|\nabla u|^2|^2}{\displaystyle\int_\Omega u^2|\nabla u|^2} + 2\lambda_1 \left(\frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^4}{\displaystyle\int_\Omega u^2|\nabla u|^2} - \lambda_1 \right) + \lambda_1^2 \\
&= \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla|\nabla u|^2|^2}{\displaystyle\int_\Omega u^2|\nabla u|^2} + 2\lambda_1\theta - 2\lambda_1^2 + \lambda_1^2 \\
&= \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla|\nabla u|^2|^2}{\displaystyle\int_\Omega u^2|\nabla u|^2} + 2\lambda_1\theta - \lambda_1^2 =: \Gamma + 2\lambda_1\theta - \lambda_1^2.
\end{aligned}$$

Isto é

$$\theta^2 \leqslant \Gamma + 2\lambda_1\theta - \lambda_1^2. \tag{2.47}$$

Assuma que $u > 0$ em Ω, com normal apontando para fora $\eta = -\frac{\nabla u}{|\nabla u|}$. Tomemos um referencial ortonormal $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}$ em $\partial\Omega$. Observemos inicialmente que

$$\Delta u = \mathrm{tr}(\mathrm{Hess}(u(e_j, e_j))) = \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{e_i} \nabla u, e_i \rangle + \langle \nabla_\eta \nabla u, \eta \rangle = 0.$$

Então

$$\begin{aligned} \partial_\eta |\nabla u|^2 = 2\langle \nabla_\eta \nabla u, \nabla u \rangle &= -2|\nabla u| \langle \nabla_\eta \nabla u, \eta \rangle = 2|\nabla u| \langle \nabla_{e_i} \nabla u, e_i \rangle \\ &= -2|\nabla u|^2 \langle \nabla_{e_i} \eta, e_i \rangle = 2nH|\nabla u|^2, \end{aligned}$$

onde $n = \dim M$. Por outro lado

$$|\nabla u|^2 \partial_\eta |\nabla u|^2 = |\nabla u|^2 \langle \nabla |\nabla u|^2, \eta \rangle = \langle |\nabla u|^2 \nabla |\nabla u|^2, \eta \rangle.$$

Daí

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(|\nabla u|^2 \nabla |\nabla u|^2) &= |\nabla u|^2 \mathrm{div}(\nabla |\nabla u|^2) + \langle \nabla |\nabla u|^2, \nabla |\nabla u|^2 \rangle \\ &= |\nabla u|^2 \Delta |\nabla u|^2 + |\nabla |\nabla u|^2|^2. \end{aligned}$$

Substituindo $\Delta u = -\lambda_1 u$ na fórmula Lichnerowicz obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta |\nabla u|^2 &= |\nabla \nabla u|^2 + \mathrm{Ric}_M(\nabla u, \nabla u) + \langle \nabla u, \nabla \Delta u \rangle \\ &= |\nabla \nabla u|^2 + \mathrm{Ric}_M(\nabla u, \nabla u) - \lambda_1 |\nabla u|^2. \end{aligned}$$

Usando que $H \leqslant 0$ sobre $\partial\Omega$, segue que

$$\begin{aligned} 0 &\geqslant \oint_{\partial\Omega} 2nH|\nabla u|^4 \geqslant \oint_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 \partial_\eta |\nabla u|^2 \geqslant \oint_{\partial\Omega} \langle |\nabla u|^2 \nabla |\nabla u|^2, \eta \rangle \\ &= \int_\Omega \mathrm{div}(|\nabla u|^2 \nabla |\nabla u|^2) = \int_\Omega (|\nabla u|^2 \Delta |\nabla u|^2 + |\nabla |\nabla u|^2|^2) \\ &= \int_\Omega |\nabla |\nabla u|^2|^2 + \int_\Omega 2|\nabla u|^2 (|\nabla \nabla u|^2 + \mathrm{Ric}_M(\nabla u, \nabla u) - \lambda_1 |\nabla u|^2) \\ &= \int_\Omega |\nabla |\nabla u|^2|^2 + \int_\Omega 2|\nabla u|^2 |\nabla \nabla u|^2 + 2\int_\Omega (|\nabla u|^2 \mathrm{Ric}_M(\nabla u, \nabla u) - \lambda_1 |\nabla u|^4). \end{aligned}$$

Como

$$|\nabla |\nabla u|^2|^2 = |\nabla \langle \nabla u, \nabla u \rangle|^2 = |2\langle \nabla \nabla u, \nabla u \rangle|^2 \leqslant 4|\nabla \nabla u|^2 |\nabla u|^2,$$

segue que

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 \int_\Omega |\nabla u|^4 - 2\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{Ric}_M(\nabla u, \nabla u) &\geqslant \int_\Omega |\nabla |\nabla u|^2|^2 + \int_\Omega 2|\nabla u|^2 |\nabla \nabla u| \\ &\geqslant \int_\Omega |\nabla |\nabla u|^2|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla |\nabla u|^2|^2 \\ &\geqslant \frac{3}{2}\int_\Omega |\nabla |\nabla u|^2|^2. \end{aligned}$$

Com isso chegamos em

$$\Gamma = \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla|\nabla u|^2|^2}{\displaystyle\int_\Omega u^2|\nabla u|^2} \leqslant \frac{4}{3}\frac{\displaystyle\int_\Omega (\lambda_1|\nabla u|^4 - |\nabla u|^2 \mathrm{Ric}_M(\nabla u, \nabla u))}{\displaystyle\int_\Omega u^2|\nabla u|^2}.$$

Sabendo que (2.47), e que $\mathrm{Ric}_M(\nabla u, \nabla u) \geqslant -\frac{3a^2|\nabla u|^2}{4}$, temos

$$\begin{aligned}
\theta^2 &\leqslant \frac{4}{3}\left(\lambda_1 \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^4}{\displaystyle\int_\Omega u^2|\nabla u|^2} + \frac{3a^2|\nabla u|^2}{4}\frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2}{\displaystyle\int_\Omega u^2|\nabla u|^2}\right) + 2\lambda_1\theta - \lambda_1^2 \\
&\leqslant \frac{4\lambda_1\theta}{3} + a^2\frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^4}{\displaystyle\int_\Omega u^2|\nabla u|^2} + 2\lambda_1\theta - \lambda_1^2 \\
&= \frac{10\lambda_1\theta}{3} + a^2\theta - \lambda_1^2.
\end{aligned}$$

Então

$$\theta^2 \leqslant \frac{10\lambda_1\theta}{3} + a^2\theta - \lambda_1^2.$$

Observando que $\beta_1 \leqslant \lambda_1 + \theta$, e que $u > 0$ em Ω implica que $\theta > 0$ e temos também que $\lambda_1 \geqslant 0$. Assim tem-se

$$\theta^2 \leqslant \frac{10\lambda_1\theta}{3} + a^2\theta \Rightarrow \theta \leqslant \frac{10\lambda_1}{3} + a^2.$$

Portanto

$$\beta_1 \leqslant \lambda_1 + \theta \leqslant \frac{10\lambda_1}{3} + a^2 \leqslant 7\lambda_1 + 3a^2.$$

$\square$

Capítulo 3

Uma Aplicação Geométrica

chap3

Neste capitulo vamos discutir algumas aplicações geométricas sobre variedades de Kähler. Para isto, faremos uso das fórmulas da primeira e segunda da variação, bem como dos conceitos de estrutura quase complexa e subvariedade lagrangiana, também apresentamos as definições de estabilidade e minimalidade. Para maiores detalhes, sugerimos consulta às seguintes referencias [2], [14], [1], [12], [17], [5], [4].

3.1 Subvariedades Lagrangianas Mínimas Estáveis

sec31

Nesta seção apresentamos os conceitos de variedade simplética, variedade Hermitiana, variedade Kähler e variedade Einstein-Kähler. Também discorremos sobre subvariedade lagrangiana de Kähler, estabilidade Hamiltoniana e, ao final, apresentamos uma aplicaçção geométrica. Para mais detalhes consulte [2], [1], [12].

Seja ω uma 2-forma de Rham em uma variedade M, ou seja, para cada $p \in M$, a aplicação $\omega_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ é bilinear anti-simétrica e ω_p varia suavemente em função de p. Diz-se que ω_p é simplética (não degenerada), se:

$$\omega_p(u, v) = 0, \ \forall v \in T_pM \Rightarrow u = 0.$$

Por fim, uma forma ω é dita fechada se satisfaz a equação diferencial $d\omega = 0$, onde d é o diferencial de Rham, i.e., diferencial exterior.

Definição 32. *A 2-forma ω é simplética se ω for fechada e ω_p é simplética para todo $p \in M$.*

Se ω é simplética , então $\dim T_pM = \dim M$ [2].

Definição 33. *Uma variedade simplética é um par* (M, ω), *onde* M *é uma variedade e* ω *é uma forma simplética.*

Definição 34. *Uma estrutura quase complexa* J, *em uma variedade diferenciável* M, *é um endomorfismo de fibrados:*

$$J : TM \longrightarrow TM$$

satisfazendo $J^2 = -\mathrm{id}$. *Neste caso, chamamos* (M, J) *de variedade quase complexa.*

Uma variedade complexa M, de dimensão complexa n, é uma variedade diferenciável de dimensão real $2n$, munida de um atlas formado por cartas $\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$, satisfazendo a seguinte condição: sempre que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, a mudança de coordenadas

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

é uma função holomorfa de n variáveis complexas.

Definição 35. *Seja* M *uma variedade complexa de dimensão complexa* n *e estrutura quase-complexa* J. *Uma métrica Riemanniana* $\langle\, , \rangle$ *em* M *é Hermitiana se*

$$\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle, \tag{3.1}$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Toda variedade complexa M pode ser munida de uma métrica Hermitiana, para mais ver referência [1].

Definição 36. *Uma variedade Hermitiana, é uma variedade complexa munida de uma métrica Hermitiana. Neste caso, a 2-forma em* M *definida por*

$$\omega(X, Y) = \langle JX, Y \rangle \tag{3.2}$$

onde $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, *é denominada a forma Kähler de* M.

Com os conceitos apresentados, estamos em condições de definir variedade Kähler.

Definição 37. *Seja* M *uma variedade complexa com estrutura quase-complexa* J, *uma métrica Kähler em* M *é uma métrica Hermitiana* $\langle\, , \rangle$ *cuja forma Kähler é fechada. Neste caso, diz-se que (M, J,* $\langle\, , \rangle$*) é uma variedade Kähler.*

Seja M uma variedade Riemanniana e L uma subvariedade imersa de M. Ou seja, estamos assumindo a existência de uma imersão suave $\iota : L \longrightarrow M$. Escreveremos $\langle\, , \rangle$ para denota a métrica em M. Consideremos também a conexão de Levi-Cita, o tensor curvatura e o tensor de Ricci de M dados por $\overline{\nabla}$, $\overline{\mathcal{R}}$ e $\overline{\mathrm{R}}\mathrm{ic}$, respectivamente, e denotaremos os de L sem barra.

Consideremos uma deformação $\{\iota_t\}$ de L, ou seja uma família de imersões suaves que satisfazem $\iota_0 = \iota$ e

$$\iota_t : L \longrightarrow M, \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon). \tag{3.3}$$

Assumiremos que as deformações $\{\iota_t\}$ tem suporte compacto. Para a deformação $\{\iota_t\}$, o campo vetorial

$$V_t := \frac{d}{dt}\iota_t, \tag{3.4}$$

é chamado o campo variacional de $\{\iota_t\}$. Seja $\mathcal{A}_V(t) := \mathsf{Vol}(\iota_t(L))$, então a subvariedade L de M é minima se definida como segue-se.

Definição 38. *Uma subvariedade* L *de uma variedade Riemanniana* M *é dita mínima se a primeira variação*

$$\mathcal{A}'_V(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathcal{A}_V(t) = 0, \tag{3.5}$$

para alguma deformação de suporte compacto $\{\iota_t\}$ *de* L.

Para investigar a minimalidade de subvariedades, apresentamos a seguir a fórmula da primeira variação.

pfv

Teorema 9 (Teorema 2.1.2 em [17])**.** *Fórmula da Primeira Variação para uma deformação* $\{\iota_t\}$ *de suporte compacto em* L*, a primeira variação* $\mathcal{A}'_V(0)$ *é dada por*

$$\mathcal{A}'_V(0) = -n \int_L \langle V, H \rangle, \tag{3.6}$$

onde H *é o vetor curvatura média de* L *em* M.

Demonstração. A prova deste resultado pode encontrada na referência [17]. □

Como consequência do Teorema 9, uma subvariedade L em uma variedade Riemanniana é mínima se, e somente se o vetor curvatura média H é nulo [17].

Quando considerarmos a estabilidade de subvariedades, assumiremos que o campo vetorial variacional é normal a L. Neste caso, a deformação $\{\iota_t\}$ é dita normal.

Definição 39. *Uma subvariedade mínima* L *de* M *diz-se estável se a segunda variação*

$$\mathcal{A}''_V(0) = \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} \mathcal{A}_V(t) \geqslant 0, \tag{3.7}$$

para alguma deformação normal $\{\iota_t\}$ *de suporte compacto em* L.

Para investigar a estabilidade das subvariedades, derivamos a segunda formula variação.

2fv **Teorema 10** (Teorema 2.2.2 em [17]). *Para um campo vetorial normal* V *de suporte compacto em* L*, a segunda variação* $\mathcal{A}''_V(0)$ *é dada por*

$$\mathcal{A}''_V(0) = \int_L \{|\nabla^\perp V|^2 + \langle \overline{\mathcal{R}}(V), V\rangle - |A^V|^2 + K^2\langle H, V\rangle - K\langle H, \overline{\nabla}_V V\rangle\}, \tag{3.8}$$

onde $\overline{\mathcal{R}}$ *é definido por*

$$\overline{\mathcal{R}}(V) = \sum_{i=1}^{n} \overline{R}(e_i, V)e_i, \tag{3.9}$$

$\{e_1, \ldots, e_n\}$ *é uma base ortonormal de* TL *e* A^V *é o operador forma na direção* V.

O corolário abaixo segue como consequência imediata do Teorema 10.

Corolário 3 (Corolário 2.2.3 em [17]). *Se* L *é uma subvariedade mínima de uma variedade Riemanniana* M *e* V *um campo vetorial normal em* L *com suporte compacto. Então, a fórmula da segunda variação é dada por*

$$\mathcal{A}''_V(0) = \int_L \{|\nabla^\perp V|^2 + \langle \overline{\mathcal{R}}(V), V\rangle - |A^V|^2\}. \tag{3.10}$$

Lema 5 (Lema 4.1.6 em [17]). *Seja* L *uma subvariedade Lagrangiana minima de uma variedade Kähler* M*, então temos*

$$\overline{Ric}(V, V) = Ric(JV, JV) + (\overline{\mathcal{R}}(V), V) + \|A^V\|, \tag{3.11}$$

para um campo vetorial normal V *alongo de* L.

Seja (M^{2n}, ω) uma variedade simplética. Uma subvariedade $f : L \longrightarrow M$, dimensão n, é dita lagrangiana se $f^*\omega \equiv 0$ [14]. Onde na última expressão estamos considerando o pullback de ω [8].

Definição 40. *i) Seja* $\iota : L \longrightarrow M$ *uma subvariedade lagrangiana e* V *um campo de vetores ao longo de* L*. A variação gerada por* V *é chamada uma variação lagrangiana (ou resp. Hamiltoniana) se esta satisfaz que a 1-forma em* L

$$\iota^*(V \lrcorner \omega) \tag{3.12}$$

é fechada (ou resp. exata).

ii) Uma família suave $\{\iota_t\}$ *de mergulhos de* L *em* M *é chamada deformação lagrangiana (ou resp. Hamiltoniana) se sua derivada for lagrangiana (ou resp. Hamiltoniana).*

Dada uma estrutura quase complexa J em M tal que $g(X,Y) := \omega(X,JY)$, é uma métrica Riemanniana em M. Então L é lagragiana se, e somente se,

$$TM_{|_L} = TL \oplus J \cdot TL \tag{3.13}$$

como uma soma direta ortogonal[12].

O lema a seguir apresenta uma caracterização das variações normais hamiltonianas.

Lema 6 (Lema 2.3 em [12])**.** *Uma variação normal em* L*, gerada pelo campo* V*, é hamiltoniana se, e somente se,*

$$V = J \cdot \nabla f \tag{3.14}$$

onde f *é uma função em* L *e* ∇f *é o gradiente com respeito a métrica induzida.*

Demonstração. A demonstração desta afirmação pode ser encontrada em [12]. □

Denotaremos por $\Gamma_c(\perp L)$ o espaço das seções com suporte compacto do fibrado normal de L, e por $\mathcal{A}''_\xi|L|$ a segunda variação do volume de L na direção ξ (conforme [12] e [14]). Segundo [12] e [14], chamaremos L de Hamiltoniana estável se, e somente se,

$$\mathcal{A}''_\xi|L| \geqslant 0, \tag{3.15}$$ eq3.15

para toda $\xi \in \Gamma_c(\perp L)$ da forma

$$\xi = J(\nabla u), \quad u \in C^\infty(L). \tag{3.16}$$ eq3.16

Além disso, chamaremos L de Hamiltoniana estável fraca se, e somente se, 3.15 vale para todas as ξ como em 3.16 com $u \in \mathbf{C}_0^\infty(L)$. Com isto, temos a seguinte aplicação.

prop20 **Proposição 21** (Proposição 5.1 em [14])**.** *Seja* X *uma variedade Kähler e* L *uma subvariedade lagrangiana mínima de* X*. Suponha que para algum* $c > 0, \mathrm{Ric}_X \geqslant c \cdot ds_X^2$*. Então segue-se que.*

(i) L *é Hamiltoniana estável somente se* $\alpha_1(L) \geqslant c$*.*

(ii) L *é Hamiltoniana estável fraca somente se* $\beta_1(L) \geqslant c$*.*

(iii) Se X *é Einstein-Kähler com* $\mathrm{Ric}_X = c \cdot ds_X^2, c > 0$, *então as condições que aparecem em (i),(ii) são necessárias e suficiente.*

Demonstração. A fórmula da segunda variação para subvariedade mínima, mostra que se u é uma função suave tal que ∇u tem suporte compacto então

$$\mathcal{A}''_{J\nabla u}|L| = \int_L (|\nabla\nabla u|^2 + \mathrm{Ric}_L(\nabla u, \nabla u) - \mathrm{Ric}_X(J\nabla u, J\nabla u)).$$

Usando que a função u tem suporte compacto, obtemos

$$\int_L \frac{1}{2}\Delta|\nabla u|^2 = \frac{1}{2}\int_L \mathrm{div}(\nabla|\nabla u|^2) = \frac{1}{2}\int_{\partial L}\langle \nabla|\nabla u|^2, \nu\rangle = 0.$$

Agora observe que

$$\int_L [(\Delta u)^2 + \langle \nabla\Delta u, \nabla u\rangle] = \int_L \mathrm{div}(\Delta u \nabla u) = \int_{\partial L}\langle \Delta u\nabla u, \nu\rangle = 0.$$

Usando a igualdade obtida e integrando a formula de Lichnerowicz

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla u|^2 = |\nabla\nabla u|^2 + \mathrm{Ric}_L(\nabla u, \nabla u) + \langle \nabla u, \nabla\Delta u\rangle,$$

obtém-se

$$\int_L (|\nabla\nabla u|^2 + \mathrm{Ric}_L(\nabla u, \nabla u) - (\Delta u)^2) = 0. \tag{3.17}$$

a1b2

Como X é uma variedade Kähler, ela possui uma métrica Riemanniana $\langle\ ,\ \rangle$ Hermitiana. Dai,

$$\mathrm{Ric}_X(J\nabla u, J\nabla u) \geqslant c \cdot ds_X^2(J\nabla u, J\nabla u) = c\langle J\nabla u, J\nabla u\rangle = c\langle \nabla u, \nabla u\rangle = c|\nabla u|^2.$$

Usando a igualdade 3.17, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{A}''_{J\nabla u}|L| &= \int_L (|\nabla\nabla u|^2 + \mathrm{Ric}_L(\nabla u, \nabla u) - \int_L \mathrm{Ric}_X(J\nabla u, J\nabla u)) \\ &\leqslant \int_L (\Delta u)^2 - \int_L c|\nabla u|^2.\end{aligned}$$

Mais ainda, vale a igualdade se X é Einsten-Kähler. Como L é uma subvariedade lagrangiana mínima, então $\mathcal{A}''_{J\nabla u} \geqslant 0$. Assim

$$c\int_L |\nabla u|^2 \leqslant \int_L (\Delta u)^2.$$

Donde concluímos que se ∇u tem suporte compacto em qualquer domínio $\Omega \Subset L$, então

$$c \leqslant \frac{\displaystyle\int_\Omega (\Delta u)^2}{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2}.$$

Sendo $u \in C_0^\infty(\Omega) \oplus W$ qualquer, tem-se $c \leqslant \alpha_1(L)$. De modo análogo, sendo $u \in C_0^\infty$ qualquer obtemos $c \leqslant \beta_1(L)$.

Se $\nabla u \in C_0^\infty(\Omega)$, então u deve se constante c_j sobre cada componente conexa γ_j da fronteira. Então

$$w := u - \Sigma c_j w_j$$

é um elemento de $W_0^{2,2}(\Omega)$ e pode ser aproximada por uma função com suporte compacto. Por isto segue-se (i), (ii), (iii). Utilizando [4] temos, de fato que para $w \in W_0^{2,2}(\Omega)$, deveremos exibir uma sequencia w_n em $C_0^\infty(\Omega)$ tal que $w_n \to w$ em $W^{2,2}(\Omega)$. Como $W_0^{2,2}(\Omega)$ é o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ na norma de $W^{2,2}(\Omega)$ e sabendo que $u \in C_0^\infty(\Omega)$ implica que $u \in W_0^{2,2}(\Omega)$ então existe uma sequencia u_n em $C_0^\infty(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $W^{2,2}(\Omega)$. Assim definamos

$$w_n = u_n - \Sigma c_j w_j.$$

Então

$$\lim_{n\to+\infty} \|w_n - w\|_{W^{2,2}} = \lim_{n\to+\infty} \|u_n - u\|_{W^{2,2}} = 0.$$

Logo $w_n \to w$ em $W^{2,2}(\Omega)$. Portanto $w \in W_0^{2,2}(\Omega)$. □

Por fim, apresentaremos mais uma aplicação geométrica que é um caso particular da seguinte conjectura em [14].

Conjectura. *Seja* $f : \Sigma^2 \to X^4$ *uma subvariedade Lagrangiana mínima, aberta e completa em uma variedade Kähler com* $\mathrm{Ric}_X \geqslant c \cdot ds_X^2, c > 0$. *Então* L *Não é Hamiltoniana estável.*

thm_kahler **Teorema 11** (Teorema 5.1 em [14])**.** *Seja* X *uma variedade de Kähler com* $\mathrm{Ric}_X \geqslant c \cdot ds_X^2$, *para alguma constante* $c > 0$ *e seja* L *uma subvariedade lagrangiana mínima, aberta e completa, com pelo menos dois fins não-parabólicos disjuntos. Então* L *não é Hamiltoniana estável.*

Demonstração. Segue do Teorema 7 temos que $\alpha_1(L) = 0$. Pelo item (i) da Proposição 21, temos que L não é Hamiltoniana estável, pois caso fosse obteríamos que

$$\alpha_1(L) \geqslant c > 0.$$

O que é um absurdo. Com isto, concluímos a demonstração. $\square$

Exemplo 9. *Em [7], Lawson construiu imersões mínimas $\mathsf{F} : \Sigma_{\mathsf{g}} \to \mathbb{S}^3$ de superfícies fechadas com gênero g. Denotando por $\mathsf{G}_{2,4}$ a Grassmanniana dos planos orientados em $\mathbb{R}^4$, lembramos que a aplicação de Gauss $\mathsf{g} : \Sigma_{\mathsf{g}} \to \mathsf{G}_{2,4}$ atribui a cada ponto $\mathsf{p} \in \Sigma$, o 2-plano normal da imersão F no ponto p. Lawson refere-se a esta aplicação como aplicação bipolar e mostra que g também define uma imersão mínima que induz a mesma estrutura conforme de F em Σ. Como observado em [13], esta aplicação também define uma superfície Lagrangiana na variedade de Kähler-Einstein $\mathsf{G}_{2,4}$. Para $\mathsf{g} > 1$, selecionaremos uma curva fechada $\gamma \subset \Sigma$ que gera um subgrupo cíclico não trivial $\langle\gamma\rangle$ de $\pi_1(\Sigma)$. Identificaremos $\pi_1(\Sigma)$ com o grupo das transformações de recobrimento do recobrimento universal $\widetilde{\Sigma}$ e considere a superfície de recobrimento $\Sigma_1 \doteq \widetilde{\Sigma}/\langle\gamma\rangle$. A elevação g_1 de g para Σ define uma superfície Lagrangiana mínima. Ademais, Σ_1 com a estrutura conforme induzida a partir de g_1 é conformemente equivalente ao anel $\{1 < |z| < \mathsf{R} < +\infty\}$. Em particular, isto significar que Σ_1 tem exatamente dois fins não-parabólicos. Como $\mathsf{G}_{2,4}$ tem curvatura de Ricci constante positiva, podemos concluir do Teorema 11 que g_1 não é Hamiltoniana estável.*

Referências Bibliográficas

[1] A. Caminha. - *Notas de Geometria Diferencial*, 2010.

[2] A. Cannas da Silva. - *Introduction to symplectic e hamiltonian geometry.* publicações matemáticas - IMPA, 2008.

[3] do Carmo, M. P. - *Geometria Riemanniana.* Projeto Euclides - IMPA, 2005.

[4] L. C. Evans - *Partial diferential equations.* Graduate studies in mathematics- AMS 1997.

[5] F. Gazzola, H. C. Grunau, G. Sweers. - *Polyharmonic boundary value problems.*Springer, 1991.

[6] A. Grigor'yan. - *Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds.* Bull. Amer. Math. Soc. (2) 36 135-249, 1999.

[7] H. B. Lawson - *Complete minimal surfaces in* $\mathbb{S}^3$. Ann. of Math. (2) 92 335-374, 1970.

[8] J. M. Lee - *Introduction to smooth manifolds.* 2000.

[9] P. Li e L. F. Tam. - *Positive harmonic functions on complete manifolds with non-negative curvature outside a compact set.* Annals of Mathematics., 125 171-207, 1987.

[10] P. Li e L. F. Tam. - *Symmetric Green's functions on complete manifolds* . Amer. J. Math., 109 1129-1154, 1987.

[11] P. Li e L. F. Tam. - *harmonic functions and the structure of complete manifolds* . J. Differential Geometry, 35 359-383, 1992.

[12] Y. G. Oh. - *Second variation and stabilities of minimal lagrangian submanifolds in Kahler manifolds* . Invent. Math, 101 501-519, 1990.

[13] B. Palmer - *Buckling eigenvalues, Gauss maps and Lagrangian submanifolds.* Differential Geom. 4 391-403, 1994.

[14] B. Palmer. - *Biharmonic capacity and the stability of minimal lagrangian submanifolds.* Tohoku Math. J., 55 529–541, 2003.

[15] L. E. Payne. - *A note on inequalities for plane eigenvalues* . J. Math. and Phys, 39 155-159, 1960/1961.

[16] S. Pigola, M. Rigoli, A. G. Setti - *Vanishing and finitesness results in geometric analysis.* Progress in Mathematics- Volume 266.

[17] S. Ueri. - *Stability of lagrangian and isotropic submanifolds* . 2014.