Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sobre o problema crítico para o operador k-Hessiano

Lucas Emanuel Mascarenhas Silva

Teresina - 2020

Lucas Emanuel Mascarenhas Silva

Dissertação de Mestrado:

Sobre o problema crítico para o operador k-Hessiano

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. José Francisco Alves de Oliveira

Teresina - 2020

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Sobre o problema crítico para o operador k-Hessiano

Lucas Emanuel Mascarenhas Silva

Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 14 de Agosto de 2020.

Banca Examinadora:

José Francisco Alves de Oliveira
Prof. Dr. José Francisco Alves de Oliveira - Orientador

Prof. Dr. Abiel Costa Macedo - UFG

Gleison do Nascimento Santos
Prof. Dr. Gleison do Nascimento Santos - UFPI

Roger Peres de Moura
Prof. Dr. Roger Peres de Moura - UFPI

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Serviço de Processamento Técnico
Biblioteca Setorial de Ciências da Natureza - CCN

S586s Silva, Lucas Emanuel Mascarenhas.
Sobre o problema crítico para o operador *k*-Hessiano / Lucas Emanuel Mascarenhas Silva. – Teresina: 2020.
70 f. il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2020.
Orientador: Prof. Dr. José Francisco Alves de Oliveira.

1. Equações Elípticas. 2. Operador *k*-Hessiano. 3. Expoente Crítico. I. Titulo.

CDD 515.353

Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes – CRB3/1461

Luciano Sousa Ramos. (In memoriam).

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por tudo que Ele tem proporcionado em minha vida. Pelas vitórias e pelas derrotas, pois tudo na vida se torna um aprendizado que vai formando nosso caráter até chegarmos à plenitude de Cristo quando Ele voltar.

Agradeço aos meus pais, Francisco de Assis da Silva e Francisca Regina Carvalho Mascarenhas Silva, que sempre acreditaram em mim, incentivando e dedicando sua vida para que hoje eu tivesse essa oportunidade de estudar e alcançar lugares que eles não conseguiram. Deus sabe o quanto sou grato por tudo que vocês fazem e por nunca terem desistido de mim.

Agradeço aos meus irmãos, João Victor Mascarenhas Silva e Davi Mascarenhas Silva, pelas horas de brigas e brincadeiras, pelo companheirismo e pelos momentos de raiva. A paciência que tenho hoje é graças a vocês. Brincadeiras a parte, vocês são peças fundamentais no meu crescimento, espero estar sendo um bom irmão mais velho, aprendam com meus erros e busquem sempre o melhor para suas famílias.

Agradeço à minha amada esposa Ana Beatriz Rodrigues Mascarenhas pelas noites em claro tentando me incentivar, cuidando da Ana Lídia enquanto eu escrevia as páginas dessa dissertação. Aliás, sem você meu amor, tudo estaria um caos. Obrigado por ser sempre a pessoa que me leva para mais perto de Deus e que consegue colocar em ordem todos meus pensamentos e me permite manter o foco. Minha ritalina é você.

Agradeço aos amigos que conquistei nos anos de graduação e mestrado, não poderia deixar de citar vocês aqui, amo demais cada um, sem vocês todo esse tempo no departamento seria "sem sal". Obrigado Douglas Rafael (me incentivou a fazer matemática em 2012 e me inspira até hoje por conta da sua paixão pela matemática), Marcos Paulo (Bia não deixa mais viajarmos juntos), Tiago Mayson (e essas noites em claro estudando e tentando lutar contra esse sistema que beneficia somente a panelinha), Hyon (sem palavras pro grande

Buda), Ronnyê (meu cumpade, companheiro das disciplinas de pedagogia e dos desesperos da graduação), Pablo Rêgo (o indomável), Maxuel (esse cara é doido mas é meu amigo), Jonatas (meu companheiro de LoL e de noites estudando desesperadamente), Christoffer (o cara que chora mas tira nota boa) e Pedro (GD nos uniu). Obrigado galera, vocês fazem parte dessa conquista.

Agradeço aos professores que fizeram parte da minha formação, em especial aos professores Dr. José Francisco Alves de Oliveira, pela orientação e pelo desafio que foi escrever em seis meses e ao Dr. Roger Peres de Moura, por todos os ensinamentos na época da graduação e no primeiro ano de mestrado, não só ensinamentos acadêmicos, mas pessoais, que levarei para minha vida. Obrigado pelo incentivo.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

"Se não puder voar, corra. Se não puder correr, ande. Se não puder andar, rasteje, mas continue em frente de qualquer jeito.".

Martin Luther King.

Resumo

Neste trabalho estudaremos o problema crítico para o operador k-Hessiano definido num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado com fronteira suave. Estabeleceremos resultados de existência e não-existência de soluções para a equação k-Hessiana envolvendo o expoente crítico determinado por K. Tso em 1990. Além disso, estudaremos o problema de Brezis-Nirenberg associado à equação k-Hessiano quando Ω é a bola unitária centrada na origem $0 \in \mathbb{R}^n$. Em particular, provaremos existência de soluções radialmente simétricas para o problema crítico na presença de um termo de perturbação de menor ordem. Por fim, apresentaremos um estudo sobre o comportamento assintótico das soluções obtidas.

Abstract

In this work, we investigate the critical problem for the k-Hessiano operator on a bounded smooth domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. We establish existence and nonexistence results for the k-Hessian equation involving the critical exponent determined by K. Tso in 1990. Moreover, we will study the Brezis-Nirenberg problem associated to the k-Hessian equation when Ω is the unit ball centered at the origin $0 \in \mathbb{R}^n$. In particular, we show the existence of radially symmetric solution for the critical problem in the presence of a lower-order perturbation terms. Finally, we analyze the asymptotic behavior of the obtained solutions.

Sumário

Introdução

Seja Ω um domínio suave e limitado em $\mathbb{R}^n$. Para uma função $u \in C^2(\Omega)$, o operador k-Hessiano, denotado por $S_k(D^2u)$, é definido por

$$S_k(D^2u) = \left[D^2(u)\right]_{k\times k} \tag{1}$$

onde $k \in \{1, \dots, n\}$, D^2u denota a matriz Hessiana de u e $[A]_{k\times k}$ representa a soma de todos os sub-determinantes principais $k \times k$ da matriz A. Alternativamente,

$$S_k(D^2u) = \sigma_k(\lambda) = \sum_{i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_k} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k}$$

é a k-ésima função simétrica elementar de autovalores $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ da matriz Hessiana $D^2(u)$.

Se $k = 1$, o operador k-Hessiano coincide com o Laplaciano e, quando $k = n$, temos o operador de Monge-Ampère. Para $2 \leqslant k < n$, o k-Hessiano pode ser considerado como uma família de operadores não-lineares conectando o Laplaciano ao operador de Monge-Ampère.

Como observado em [19], o operador k-Hessiano possui a forma divergente. De fato, k-Hessiano satisfaz as identidades

$$S_k(D^2u) = \frac{1}{k}\sum u_{ij}S_k^{ij}[u] = \frac{1}{k}\sum \partial_i\left(u_j S_k^{ij}[u]\right) \tag{2}$$

onde $u_i = u_{x_i}$, $u_{ij} = u_{x_i x_j}$ e

$$S_k^{ij}[u] = \frac{\partial}{\partial_{u_{ij}}}\left(S_k(D^2u)\right). \tag{3}$$

A segunda indentidade segue do fato de que os coeficientes S_k^{ij} satisfazem,

$$\sum_i \partial_i S_k^{ij}[u] = 0, \quad \forall j. \tag{4}$$

Embora o k-Hessiano tenha a forma divergente, para $k = 2, \dots, n$, este não é elíptico em todo o espaço $C^2(\Omega)$. Para superar essa dificuldade, L. Caffarelli, L. Nirenberg e J.

Spruck [4] sugeriram considerar o k-Hessiano restrito à classe das funções admissíveis. A saber, dizemos que $u \in C^2(\Omega)$ é k-admissível se

$$S_j(D^2u) \geqslant 0, \; j = 1, \dots, k.$$

Denotaremos por $\Phi_0^k(\Omega)$ o conjunto das funções admissíveis u tais que $u_{|\partial\Omega} = 0$. Como observado em K. Tso [19], dada $u \in \Phi_0^k(\Omega)$ vale

$$\frac{\partial S_k(D^2u)}{\partial r_{ij}} \nu_i \nu_j > 0, \quad \forall \, \nu \,, |\nu| > 0 \tag{5}$$

o que traduz a elipticidade de $S_k(D^2u)$.

Neste trabalho estudaremos a existência de soluções radiais para uma equação envolvendo o operador k-Hessiano definido num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitado, suave. Mais especificamente, a equação

$$\begin{aligned} S_k[u] &= f(x, u) \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \qquad\quad\; \text{em } \partial\Omega \end{aligned} \tag{6}$$

a qual é denominada equação k-Hessiana com condição de Dirichlet homogênea.

A existência de solução para uma equação do tipo (6) depende fortemente do crescimento da função f. Considerando $f(s) = s^p, s > 0$, o expoente crítico do operador Laplaciano, isto é, 1-Hessiano é dado por $p^* = (n+2)/(n-2)$. Em outros termos, nesse caso, a equação (6) admite solução positiva para todo $1 \leqslant p < p^*$, mas para $p = p^*$ a solubilidade é perdida devido à famosa identidade de Pokhozhaev [15]. No célebre artigo de Brezis e Nirenberg [3] foi investigado o fenômeno da criticalidade na presença de um termo de ordem menor. O mesmo problema para outros operadores elípticos foram discutidos por diversos autores, incluindo Guedda e Veron [14] e Egnnel [10] (operador p-Laplaciano), Edmunds *et al.* [9] (operador biharmônico), Pucci e Serrin [17] (operador poliharmônico), e Chou e Geng [6] (operador Laplaciando com peso). Nesse trabalho, seguindo os trabalhos de K.S. Chou, Di Geng, S. S. Yan [7], estudaremos o problema de Brezis e Nirenberg para o operador k-Hessiano, $k \geqslant 1$.

Iniciaremos estudando o expoente crítico para a equação k-Hesssiana. Para isso, conforme feito em Tso [19], consideraremos a equação (6) com $f(u) = (-u)^p$, e investigaremos condições em p para a existência e não-existência de soluções negativas. Em particular, sob a condição $1 \leqslant k < n/2$, veremos que o expoente crítico é dado por

$$\gamma(k) = \frac{(n+2)k}{n-2k}.$$

De fato, veremos que nesse caso a equação (6) admite solução negativa para $p < \gamma(k)$ mas não tem solução se $p = \gamma(k)$.

Finalmente, como feito em K.S. Chou, Di Geng, S. S. Yan [7], estudaremos o problema de Brezis e Nirenberg para a equação k-Hessiana. Isto é, tomando

$$f(u) = (-u)^{\gamma(k)} + \lambda(-u)^k$$

e veremos condições sobre λ, k e n para a existência e não-existência de soluções radiais negativas quando Ω é a bola unitária $B_1(0)$ em $\mathbb{R}^n$. Finalizaremos com um estudo do comportamento assintótico das soluções obtidas.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Neste capítulo iremos enunciar resultados que serão usados no decorrer deste trabalho, cujas demonstrações estarão devidamente referenciadas.

1.1 Resultados de Teoria da Medida e Integração

Começaremos com algumas definições.

Definição 1 (σ-álgebra)**.** *Uma* σ***-álgebra*** *no conjunto* X *é uma família* Σ *de subconjuntos de* X *que satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) $\emptyset, X \in \Sigma$*;*

(b) Se $A \in \Sigma$*, então* $A^C := X - A \in \Sigma$*;*

(c) Se $A_n \in \Sigma$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, então* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$*.*

Neste caso, o par (X, Σ) *é chamado de* ***espaço mensurável****. Cada elemento da* σ*-álgebra é chamado de* ***conjunto mensurável****.*

Quando (X, τ) é um espaço topológico, a σ-álgebra $\Sigma(\tau)$ é chamada de σ*-álgebra de Borel* de X, denotada por $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X)$ e seus elementos são chamados de *conjuntos de Borel* ou *borelianos*.

Definição 2 (Funções Mensuráveis)**.** *Seja* (X, Σ) *um espaço mensurável. Uma função* $f : (X, \Sigma) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *é* ***mensurável*** *se* $f^{-1}(A) \in \Sigma$ *para todo boreliano* $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$*. O conjunto formado por tais funções será denotado por* $M(X, \Sigma)$*. Consideraremos ainda o subconjunto* $M^+(X, \Sigma) := \{f \in M(X, \Sigma) : f(x) \geqslant 0$ *para todo* $x \in X\}$*.*

Definição 3 (Medida)**.** *Uma **medida** no espaço mensurável* (X, Σ) *é uma função* $\mu : \Sigma \longrightarrow [0, \infty]$ *que satisfaz as seguintes condições:*

(a) $\mu(\emptyset) = 0$*;*

(b) Se $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ *é uma sequência de conjuntos disjuntos dois a dois de* Σ*, então*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

A medida μ *é dita **finita** se* $\mu(X) < \infty$*, e é dita* σ*-finita se existirem conjuntos* $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ *em* Σ *tais que* $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ *e* $\mu(A_n) < \infty$ *para todo* n*. O terno* (X, Σ, μ) *é chamado **espaço de medida**.*

Definição 4. *Seja* (X, Σ, μ) *um espaço de medida.*

1. *A **integral** da função simples* $\varphi \in M^+(X, \Sigma)$*, cuja representação canônica é* $\varphi = \sum_{j=i}^{m} a_j \chi_{A_j}$*, em relação à medida* μ *é definida por*

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{j=i}^{m} a_j \mu(A_j).$$

2. *A **integral** de uma função* $f \in M^+(X, \Sigma)$ *em relação à medida* μ *é definida por*

$$\int_X f d\mu = \sup\left\{\int_X \varphi d\mu : \varphi \in M^+(X, \Sigma) \text{ é simples e } 0 \leqslant \varphi \leqslant f\right\}.$$

3. *Para* $f \in M^+(X, \Sigma)$ *e* $A \in \Sigma$*, define-se*

$$\int_A f d\mu = \int_X f \chi_A d\mu.$$

Definição 5. *(a) Dada uma função* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$*, as funções* $f^+, f^- : X \longrightarrow [0, \infty)$ *são definidas por*

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \qquad e \qquad f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}.$$

(b) Seja (X, Σ, μ) *um espaço de medida. Uma função* $f \in M(X, \Sigma)$ *é dita **Lebesgue-integrável** (ou **integrável**) se* $\int_X f^+ d\mu < \infty$ *e* $\int_X f^- d\mu < \infty$*. Neste caso definimos*

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

O conjunto de todas as funções integráveis $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *é denotado por* $\mathcal{L}(X, \Sigma, \mu)$*.*

Os resultado enunciados abaixo poderão ser encontrados em Folland [12].

Teorema 1 (Teorema da Convergência Monótona)**.** *Seja* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *uma sequência em* $M^+(X, \Sigma)$ *tal que* $0 \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \dots$ *para todo* $x \in X$.

1. Se $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ *para todo* $x \in X$ *então* $f \in M^+(X, \Sigma)$ *e* $\displaystyle\int_X f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n d\mu$.

2. Se $f_n \longrightarrow f$ μ*-q.s. e* $f \in M^+(X, \Sigma)$*, então* $\displaystyle\int_X f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n d\mu$.

Lema 1 (de Fatou)**.** *Se* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *é uma sequência em* $M^+(X, \Sigma)$*, então*

$$\int_X \liminf_{n \to \infty} f_n d\mu \leqslant \liminf_{n \to \infty} \int_X f_n d\mu.$$

Teorema 2 (Desigualdade de Minkowski para Integrais)**.** *Suponha* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *e* $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ *espaços de medida* σ*-finitos,* $1 \leqslant p < \infty$ *e* f *uma função mensurável em* $X \times Y$*. Então,*

$$\left[\int \left(\int f(x, y) d\nu(y)\right)^p d\mu(x)\right]^{1/p} \leqslant \int \left[\int f(x, y)^p d\mu(x)\right]^{1/p} d\nu(y).$$

1.2 Resultados de Análise Funcional

1.2.1 Espaços de Banach

Seja E um espaço vetorial real.

Definição 6. *Uma aplicação* $||.|| : E \to [0, \infty)$ *é chamada de norma se:*

i. $||u|| \geqslant 0$ *para todo* $u \in E$ *e,* $||u|| = 0$ *se, e somente se,* $u = 0$*;*

ii. $||\lambda u|| = |\lambda| ||u||,$ *para todo* $u \in E$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$*;*

iii. $||u + v|| \leqslant ||u|| + ||v||,$ *para todo* $u, v \in E$.

Assumiremos que E é um espaço vetorial normado, ou seja, um espaço vetorial munido de uma norma.

Definição 7. *Diremos que uma sequência* $(u_n) \subset E$ *converge para* $u \in E$ *se*

$$\lim_{n \to \infty} ||u_n - u|| = 0.$$

Neste caso, dizemos que u *é o limite da sequência* u_n *e escrevemos* $u = \lim\limits_{n \to \infty} u_n$ *ou simplesmente* $u_n \longrightarrow u$.

Definiremos agora espaço de Banach. Para isto, precisamos definir um tipo especial de sequência.

Definição 8. *i. Uma sequência* $(u_n) \subset E$ *é dita de Cauchy, se satisfaz a seguinte propriedade: dado* $\epsilon > 0$*, existe* $n_0 > 0$ *tal que*

$$\|u_k - u_l\| < \epsilon, \text{ se } k, l > n_0.$$

ii. E *é dito um espaço completo se toda sequência de Cauchy em* E *converge, ou seja, se* (u_n) *é uma sequência de Cauchy em* E*, então existe* $u \in E$ *tal que* $u_n \to u$*.*

iii. Quando E *for um espaço vetorial, normado e completo, diremos que* E *é um espaço de Banach.*

Exemplo 1. *Sejam* (X, Σ, μ) *um espaço de medida e* $1 \leqslant p < \infty$*. O conjuntos de todas as funções mensuráveis* f *de* X *em* $\mathbb{R}$ *tais que*

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

é denotado $L_p(X, \Sigma, \mu)$ *e, com essa norma,* L_p *é um espaço de Banach. (vide Botelho, et al. [1] pág 10)*

Teorema 3 (Desigualdade de Hölder)**.** *Suponha* $1 < p < \infty$ *e* $p^{-1} + q^{-1} = 1$*. Se* f *e* g *são funções mensuráveis em* X*, com* $f \in L^p$ *e* $g \in L^q$*. Então,* $fg \in L^1$ *e vale*

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

Demonstração. Vide Botelho, et al. [1] pág 08. □

1.2.2 Convergência Fraca

Definição 9. *Seja* E *um espaço vetorial normado. O dual topológico de* E*, ou simplesmente dual de* E*, o qual representamos por* E'*, é o conjunto de todos os funcionais lineares contínuos* $f : E \to \mathbb{R}$*.*

Definição 10. *(Topologia e Convergência Fraca). A* ***topologia fraca*** *no espaço normado* E*, denotada por* $\sigma(E, E')$*, é a topologia gerada pelos funcionais lineares contínuos* $\varphi \in E'$*. Quando uma sequência* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *em* E *converge para um* $x \in E$ *na topologia fraca dizemos que* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ***converge fracamente*** *para* x *e escrevemos* $x_n \rightharpoonup u$*.*

Proposição 1. *Seja* E *um espaço normado.*

(a) Se $x_n \rightharpoonup x$ *em* E*, então a sequência* $(\|x_n\|)_{n=1}^{\infty}$ *é limitada e* $\|x\| \leqslant \liminf \|x_n\|$.

(b) Se $x_n \rightharpoonup x$ *em* E *e* $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ *em* E'*, então* $\varphi_n(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$ *em* $\mathbb{R}$.

Demonstração. Faremos a demonstração de (b). O item (a) pode ser encontrado em Botelho, et al. [1] pág. 145. Dado $\varepsilon > 0$, das convergências $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ e $\varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$ existe um número n_0 tal que

$$\|\varphi_n - \varphi\| < \varepsilon \ \text{ e } \ |\varphi(x_n) - \varphi(x)| < \varepsilon \text{ para todo } n \geqslant n_0.$$

Pelo item (a) existe $C > 0$ tal que $\|x_n\| \leqslant C$ para todo n. Portanto,

$$\begin{aligned} |\varphi_n(x_n) - \varphi(x)| &= |(\varphi_n - \varphi)(x_n) - \varphi(x_n - x)| \\ &\leqslant \|\varphi_n - \varphi\| \, \|x_n\| + |\varphi(x_n) - \varphi(x)| \\ &\leqslant C\varepsilon + \varepsilon \end{aligned}$$

para todo $n \geqslant n_0$. Isso prova que $\varphi_n(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$. □

1.2.3 Espaços Separáveis e Reflexivos

Definição 11. *Um espaço normado* E *que contém um subconjunto enumerável e denso em* E *é dito separável.*

Para todo espaço normado E, podemos considerar seu dual E', que é um espaço de Banach. Podemos então considerar o dual de E', o qual chamaremos de bidual de E e denotaremos por E'', ou seja, $E'' = (E')'$.

Proposição 2. *Para todo espaço normado* E*, o operador*

$$J_E : E \longrightarrow E'', J_E(x)(\varphi) = \varphi(x)$$

para todos $x \in E$ *e* $\varphi \in E''$*, é uma isometria linear, chamada de* ***mergulho canônico*** *de* E *em* E''.

Demonstração. A prova deste fato encontra-se em Botelho, et al. [1] pág. 89. □

Definição 12. *Um espaço normado* E *é dito reflexivo se* $J_E(E) = E''$.

Teorema 4 (Kakutani)**.** *Seja* E *um espaço de Banach. Então* E *é reflexivo se, e somente se,*

$$B_E = \{x \in E; \|x\| \leqslant 1\}$$

é compacto na topologia fraca $\sigma(E, E')$.

Demonstração. Vide Brezis [2], pág. 67. □

Teorema 5. *Em um espaço de Banach reflexivo, toda sequência limitada possui subsequência fracamente convergente.*

Demonstração. Vide Brezis [2], pág. 69. □

1.3 Resultados de Cálculo Variacional

Nesta seção estaremos interessados em estabelecer alguns resultados à respeito do seguinte problema minimizante: dados um funcional $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ definido num espaço reflexivo E e um subconjunto $C \subset E$ fechado e convexo, onde φ é limitado inferiormente, queremos encontrar $u_0 \in C$ tal que

$$\varphi(u_0) = \inf_{u \in C} \varphi(u).$$

Definição 13. *Um funcional* $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *definido num espaço topológico* X *é dito semicontínuo inferiormente, (s.c.i) se* $\varphi^{-1}(a, \infty)$ *é aberto em* X *para qualquer* $a \in \mathbb{R}$.

Proposição 3. *Seja* X *um espaço topológico compacto e* $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *um funcional semicontínuo inferiormente. Então* φ *é limitado inferiormente e existe um* $u_0 \in X$ *tal que*

$$\varphi(u_0) = \inf_X \varphi.$$

Demonstração. Claramente temos $X = \cup_{n=1}^{\infty} \varphi^{-1}(-n, \infty)$. Como, por hipótese, cada conjunto $\varphi^{-1}(-n, \infty)$ é aberto e X é compacto, segue que

$$X = \bigcup_{n=1}^{n_0} \varphi^{-1}(-n, \infty)$$

para algum $n_0 \in \mathbb{N}$. Assim, $\varphi(u) > -n_0$ para todo $u \in X$, de modo que φ é limitado inferiormente. Agora seja $c = \inf_X \varphi > -\infty$ e suponha, por contradição, que $\varphi(u) > c$ para todo $u \in X$. Então

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi^{-1}(c + \frac{1}{n}, \infty)$$

e, novamente pela compacidade de X, $\varphi(u) > c + \dfrac{1}{k}$ para algum $k \in \mathbb{N}$ e para todo $u \in X$. Desse modo, $c \geqslant c + \dfrac{1}{k}$, que é um absurdo. Logo o ínfimo c é atingido. $\square$

Definição 14. *Um funcional $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ definido num espaço normado E é dito s.c.i fracamente se é s.c.i considerando E com sua topologia fraca, em outras palavras, $\varphi(u) \leqslant \liminf \varphi(u_n)$ sempre que u_n converge fracamente para u.*

O resultado abaixo representa uma síntese do chamado “método direto do cálculo das variações”.

Teorema 6. *Seja E um espaço reflexivo e suponha que um funcional $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é*

(i) s.c.i fracamente;

(ii) coercivo (isto é, $\varphi(u) \longrightarrow +\infty$ quando $\|u\| \to \infty$).

Então φ é limitado inferiormente e existe $u_0 \in E$ tal que

$$\varphi(u_0) = \inf_{E} \varphi.$$

Demonstração. Pela hipótese de coercividade (ii), podemos escolher $R > 0$ tal que $\varphi(u) > \varphi(0)$ para todo $u \in E$ com $\|u\| \geqslant R$. Daí, pelo Teorema de Kakutani, como a bola fechada de raio R e centro na origem, $B_R(0)$, é compacta na topologia fraca e, por (i), $\varphi : B_R(0) \longrightarrow \mathbb{R}$ é $s.c.i$ na topologia fraca, da Proposição acima segue que existe $u_0 \in B_R(0)$ tal que $\varphi(u_0) = \inf_{B_R(0)} \varphi$. Logo, pela escolha de R, $\varphi(u_0) = \inf_E \varphi$. $\square$

Capítulo 2

O expoente crítico do operador k-Hessiano

Neste capítulo discutiremos alguns resultados obtidos em K.Tso [19] sobre o expoente crítico do operador k-Hessiano.

2.1 Não-existência

Nessa seção investigaremos a não-existência de soluções negativas para a equação

$$\begin{cases} S_k(D^2u) = f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde Ω é um domínio limitado e suave em $\mathbb{R}^n$ e $f : (-\infty, 0] \to [0, \infty)$ contínua. Em particular, estamos interessados no caso em que $f(u) = (-u)^p$.

O principal ingrediente será uma idendidade devido a Puccin e Serrin [16] a qual passaremos a apresentar.

Considere o Lagrangiano $L = L(D^2u, Du, u, x) = L(r_{ij}, p_i, z, x)$, definido em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \overline{\Omega}$, onde $r_{ij} = r_{ji}$ e Ω é um aberto suave em $\mathbb{R}^n$. A equação de Euler-Lagrange associada ao Lagrangiano é dada por

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} L_{r_{ij}}\left(D^2u, Du, u, x\right) - \sum_{i=1}^{n} \left(L_{p_i}\left(D^2u, Du, u, x\right)\right)_{x_i} + L_z\left(D^2u, Du, u, x\right) = 0. \tag{2.2}$$

Com essa notação vale a identidade de Puccin-Serrin:

Proposição 4 (Puccin-Serrin). *Seja* $u \in C^4(\Omega)$ *uma solução de* (2.2) *com* $L_{p_i} = 0$ *e* $a \in C^2(\Omega)$ *uma função escalar. Então,*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_i}\left[x_i L + \left(x_l \frac{\partial u}{\partial x_l} + au\right)\frac{\partial L_{r_{ij}}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(x_l \frac{\partial u}{\partial x_l} + au\right) L_{r_{ij}}\right] \\ &= nL + x_i L_{x_i} - auL_z - (a+2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} L_{r_{ij}}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Esta identidade pode ser usada para determinar o expoente crítico associado ao operador $S_k(D^2u)$. Com este fim, apresentaremos uma identidade do tipo Pokhozhaev [15] para o operador k-Hessiano, $k \geqslant 1$.

Teorema 7. *Seja* Ω *um domínio suave, estrelado com respeito à origem. Assuma que* $f : (-\infty, 0] \to [0, \infty)$ *seja suave, com* $f(s) > 0$ *para* $s < 0$ *e* $f(0) = 0$*. Então toda solução de* (2.1) *não trivial em* $C^1(\overline{\Omega}) \cap C^4(\Omega)$ *satisfaz*

$$-\frac{1}{k+1}\int_{\partial\Omega} (x.\nu)\,|Du|^2\, S^{ij}\left(D^2u\right)\nu_i\nu_j\, ds = \int_\Omega \left(nF(u) - \frac{n-2k}{k+1} uf(u)\right) dx, \tag{2.4}$$

onde ν *é a normal unitária externa à* $\partial\Omega$ *e* $F(u) = \int_0^u f(s)ds$.

Demonstração. De acordo com Tso [19], as soluções do problema (2.1) correspondem aos pontos críticos do funcional

$$I_k[u] = -\frac{1}{k+1}\int_\Omega uS_k\left(D^2u\right) dx + \int_\Omega F(u)dx, \tag{2.5}$$

onde $F(u) = \int_0^u f(s)ds$. Escolhendo

$$L = \frac{-zS_k(r_{ij})}{k+1} + F(z), \text{ com } a = \frac{n-2k}{k+1}$$

na identidade (2.3), o teorema da divergência nos fornece

$$-\frac{1}{k+1}\int_{\partial\Omega} \left[x_l u_{x_l} u_{x_j} S^{ij}\left(D^2u\right)\right]\nu_i\, ds = \int_\Omega \left(nF(u) - \frac{n-2k}{K+1} uf(u)\right) dx, \tag{2.6}$$

o que pode ser reescrito como

$$-\frac{1}{k+1}\int_{\partial\Omega} (x.\nu)\,|Du|^2\, S^{ij}\left(D^2u\right)\nu_i\nu_j\, ds = \int_\Omega \left(nF(u) - \frac{n-2k}{k+1} uf(u)\right) dx. \tag{2.7}$$

□

Como consequência do resultado acima, podemos determinar o expoente crítico para a equação k- Hessiana (2.1). A saber, para $1 \leqslant k < n/2$, o expoente crítico é dado por

$$\gamma(k) = \frac{k(n+2)}{n-2k}. \tag{2.8}$$

De fato, temos o seguinte resultado:

Corolário 1. *Seja* Ω *um domínio suave, estrelado com respeito à origem tal que* $(x.\nu) > 0$ *para todo* $x \in \partial\Omega$*, onde* ν *é a normal unitária em* $\partial\Omega$*. Então, para* $f(u) = (-u)^p$*, equação* (2.1) *não tem solução negativa* $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^4(\Omega)$ *quando* $p \geqslant \gamma(k)$*, com* $1 \leqslant k < n/2$*.*

Demonstração. De fato, suponha que exista $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^4(\Omega)$ solução de (2.1). Tomando $f(u) = (-u)^p$ temos $F(u) = -\dfrac{(-u)^{p+1}}{p+1}$. Assim,

$$nF(u) - \frac{n-2k}{k+1} u f(u) = \left(\frac{n-2k}{k+1} - \frac{n}{p+1} \right) (-u)^p.$$

Assim, substituindo a expressão obtida acima em (2.4) temos,

$$-\frac{1}{k+1} \int_{\partial\Omega} (x.\nu) \, |Du|^2 \, S^{ij} \left(D^2 u\right) \nu_i \nu_j \, ds = \int_{\Omega} \left(\frac{n-2k}{k+1} - \frac{n}{p+1} \right) (-u)^p dx. \tag{2.9}$$

Como observado por K.Tso [19], o princípio do máximo garante que qualquer solução negativa $u < 0$ da equação (2.1) é necessariamente k-admissível. Logo, $S_k(D^2u)$ é elíptico, e teremos $S^{ij} \left(D^2 u\right) \nu_i \nu_j > 0$. Como, por hipótese, $(x.\nu) > 0$ para todo $x \in \partial\Omega$, segue que o lado esquerdo de (2.9) é negativo. Por outro lado, se vale

$$\frac{n-2k}{k+1} - \frac{n}{p+1} \geqslant 0,$$

segue que o lado direito de tal identidade é não-negativo o que leva a uma contradição. Assim, (2.1) não terá solução quando $\gamma(k) = \dfrac{(n+2)k}{n-2k} \leqslant p$. □

Por fim, observamos que no caso em que $\Omega = B$ é uma bola centrada na origem $0 \in \mathbb{R}^n$, a condição $(x.\nu) > 0$, $x \in \partial B$ é satisfeita.

2.2 Soluções Radialmente Simétricas

Nesta seção investigaremos a existência de soluções negativas radialmente simétricas para a equação

$$\begin{cases} S_k(D^2u) = f(x,u) & \text{em } B, \\ \qquad u = 0 & \text{em } \partial B, \end{cases} \tag{2.10}$$

onde B denota a bola unitária centrada em $0 \in \mathbb{R}^n$ e $f : \overline{B} \times (-\infty, 0] \to [0, \infty)$ é contínua, radialmente simétrica na primeira variável e tem crescimento subcrítico, isto é, $|f(x,u)| \leqslant C|u|^p, p < \gamma(p)$. Em particular, podemos escrever $f(x,z) = g(r,z)$, $r = |x|$, onde

$$g \in C([0,1] \times (-\infty, 0]), g > 0 \text{ em } [0,1) \times [0, -\infty). \tag{2.11}$$

Uma vez que estamos procurando soluções radialmente simétricas, vamos inicialmente escrever o operador k-Hessiano, ou a equação (2.10), na forma radial. Suponha que $u(x) = y(r)$ é uma solução radialmente simétrica da equação (2.10). Afirmamos que y satisfaz a equação radial

$$\begin{cases} C_{k-1}^{n-1}\left(\dfrac{y'}{r}\right)^{k-1} y'' + C_k^{n-1}\left(\dfrac{y'}{r}\right)^{k} = g(r,y) \\ y(1) = 0,\ y'(0) = 0. \end{cases} \tag{2.12}$$

onde $C_p^q = \dfrac{p!}{(p-q)!q!}$, com $p \geqslant q$ inteiros positivos. Equivalentemente, podemos escrever

$$\begin{cases} \dfrac{C_n^k}{n}\left(r^{n-k}(y')^k\right)' = r^{n-1}g(r,y) \\ y(1) = 0,\ y'(0) = 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Para provar (2.12), vamos seguir uma estratégia devido a G. Dai [8]. Seja $u(x) = y(r)$ uma solução radialmente simétrica de (2.10) e denote

$$A = \begin{pmatrix} y''(r) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dfrac{y'(r)}{r} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{y'(r)}{r} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dfrac{y'(r)}{r} \end{pmatrix}.$$

Observe que no ponto $x_0 = (r, 0, \dots, 0)$ temos $A = D^2u$. Para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$, existe uma matriz rotacional B tal que $Bx = x_0$. Como $y(|Bx|) = y(r)$, temos $D^2u = B^2A$. Agora, como $A^T = A, B^{-1} = B^T$ e $D^2u = (D^2u)^T$, segue que

$$D^2u = B^2A \Rightarrow B^{-1}D^2u = BA \Rightarrow B^T(D^2u)^T = A^TB^T \Rightarrow A = B^{-1}(D^2u)B,$$

e então as matrizes A e D^2u possuem os mesmos autovalores. Consequentemente,

$$S_k(D^2u) = C_{k-1}^{n-1}\left(\frac{y'}{r}\right)^{k-1} y'' + C_k^{n-1}\left(\frac{y'}{r}\right)^{k}.$$

2.3 Espaços W^{k+1} e $\mathcal{W}^{k+1}$

Nessa seção, seguindo [7, 19], iremos introduzir o espaço do tipo Sobolev adequado para o estudo variacional do problema (2.13).

Seja $E = \{y \in C^1[0,1] : \; y(1) = 0\}$. Denote por W^{k+1} o conjunto E equipado com a seguinte norma

$$\|y\|_{W^{k+1}} = \left(\int_0^1 r^{n-k}|y'|^{k+1}dr\right)^{\frac{1}{k+1}}.$$

Similarmente, $\mathcal{W}^{k+1}$ é o conjunto de todas as funções suaves com suporte compacto em $[0,+\infty)$ com a norma

$$\|y\|_{\mathcal{W}^{k+1}} = \left(\int_0^\infty r^{n-k}|y'|^{k+1}dr\right)^{\frac{1}{k+1}}.$$

Com essas notações, temos os seguintes resultados:

Proposição 5. *Seja* $y \in \mathcal{W}^{k+1}$. *Então, existe* $C > 0$ *tal que*

$$\int_0^\infty r^{n-1}|y|^{\gamma(k)+1}dr \leqslant C\left[\int_0^\infty r^{n-k}|y'|^{k+1}dr\right]^{\frac{\gamma(k)+1}{k+1}}. \tag{2.14}$$

Demonstração. Seja $\beta \in (k/(k+1), (n-k)/(k+1))$. Então, para $y \in \mathcal{W}^{k+1}$ temos

$$\begin{aligned}\int_0^\infty r^{n-1}|y|^{\gamma(k)+1}dr &\leqslant \int_0^\infty r^{n-1}\left(\int_r^\infty |y'|dt\right)^{\gamma(k)+1}dr\\ &= \int_0^\infty r^{n-1}\left(\int_r^\infty t^{-\beta}t^{\beta}|y'|dt\right)^{\gamma(k)+1}dr\\ &\leqslant \int_0^\infty r^{n-1}\left[\int_r^\infty t^{\beta(k+1)}|y'|^{k+1}dt\right]^{\frac{\gamma(k)+1}{k+1}}\left[\int_r^\infty t^{-\frac{\beta(k+1)}{k}}dt\right]^{\frac{k(\gamma(k)+1)}{(k+1)}}dr,\end{aligned}$$

onde a última desigualdade foi obtida através da Desigualdade de Hölder. Integrando,

$$\begin{aligned}\left[\int_r^\infty t^{-\frac{\beta(k+1)}{k}}dt\right]^{\frac{k(\gamma(k)+1)}{(k+1)}} &= \left[\lim_{a\to+\infty}\int_r^a t^{-\frac{\beta(k+1)}{k}}dt\right]^{\frac{k(\gamma(k)+1)}{(k+1)}}\\ &= \left[\lim_{a\to+\infty}\frac{k}{k-\beta(k+1)}\left(a^{1-\frac{\beta(k+1)}{k}} - r^{1-\frac{\beta(k+1)}{k}}\right)dt\right]^{\frac{k(\gamma(k)+1)}{(k+1)}}.\end{aligned}$$

Como $k/(k+1) \leqslant \beta$, temos que $1 \leqslant \beta(k+1)/k$ e então

$$\lim_{a\to+\infty}\frac{ka^{1-\frac{\beta(k+1)}{k}}}{\beta(k+1)} = 0.$$

Daí,

$$\left[\int_r^\infty t^{-\frac{\beta(k+1)}{k}}dt\right]^{\frac{k(\gamma(k)+1)}{(k+1)}} = \left(\frac{k}{\beta(k+1)-k}\right)^{\frac{k(\gamma(k)+1)}{(k+1)}} r^{\left(1-\frac{\beta(k+1)}{k}\right)\frac{k(\gamma(k)+1)}{k+1}}.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty r^{n-1}|y|^{\gamma(k)+1} &\leqslant \left(\frac{k}{\beta(k+1)-k}\right)^{\frac{k(\gamma(k)+1)}{(k+1)}} \int_0^\infty r^{n-1+\left(1-\frac{\beta(k+1)}{k}\right)\frac{k(\gamma(k)+1)}{k+1}} \\
&\times \left[\int_0^\infty t^{\beta(k+1)}|y'|^{k+1}\chi_{\{r\leqslant t<\infty\}}(t,r)dt\right]^{\frac{\gamma(k)+1}{k+1}} \\
&\leqslant \left(\frac{k}{\beta(k+1)-k}\right)^{\frac{k(\gamma(k)+1)}{k+1}} \left\{\int_0^\infty t^{\beta(k+1)}|y'|^{k+1}\right. \\
&\left.\times \left[\int_0^\infty r^{n-1+\left(1-\frac{\beta(k+1)}{k}\right)\left(\frac{k(\gamma(k)+1)}{k+1}\right)}\chi^{\frac{\gamma(k)+1}{k+1}}_{\{r\leqslant t<\infty\}}(t,r)dt\right]^{\frac{k+1}{\gamma(k)+1}}\right\}^{\frac{\gamma(k)+1}{k+1}}
\end{aligned}
$$

onde a última estimativa foi obtida pela desigualdade de Minkowski para integrais. Note que

$$
\begin{aligned}
&\left[\int_0^\infty r^{n-1+\left(1-\frac{\beta(k+1)}{k}\right)\left(\frac{k(\gamma(k)+1)}{k+1}\right)}\chi^{\frac{\gamma(k)+1}{k+1}}_{\{r\leqslant t<\infty\}}(t,r)dt\right]^{\frac{k+1}{\gamma(k)+1}} \\
&= \left[\int_0^t r^{n-1+\left(1-\frac{\beta(k+1)}{k}\right)\left(\frac{k(\gamma(k)+1)}{k+1}\right)}dt\right]^{\frac{k+1}{\gamma(k)+1}} \\
&= \left[\frac{t^{n+\left(1-\frac{\beta(k+1)}{k}\right)\left(\frac{k(\gamma(k)+1)}{k+1}\right)}}{n+\left(1-\frac{\beta(k+1)}{k}\right)\left(\frac{k(\gamma(k)+1)}{k+1}\right)}\right]^{\frac{k+1}{\gamma(k)+1}} \\
&= \left[\frac{1}{n+\left(1-\frac{\beta(k+1)}{k}\right)\left(\frac{k(\gamma(k)+1)}{k+1}\right)}\right]^{\frac{k+1}{\gamma(k)+1}} t^{n-k-\beta(k+1)}.
\end{aligned}
$$

Segue-se

$$
\begin{aligned}
&\left\{\int_0^\infty t^{\beta(k+1)}|y'|^{k+1}\left[\int_0^\infty r^{n-1+\left(1-\frac{\beta(k+1)}{k}\right)\left(\frac{k(\gamma(k)+1)}{k+1}\right)}\chi^{\frac{\gamma(k)+1}{k+1}}_{\{r\leqslant t<\infty\}}(t,r)dt\right]^{\frac{k+1}{\gamma(k)+1}}\right\}^{\frac{\gamma(k)+1}{k+1}} \\
&= \frac{1}{n+\left(1-\frac{\beta(k+1)}{k}\right)\left(\frac{k(\gamma(k)+1)}{k+1}\right)}\left[\int_0^\infty t^{\beta(k+1)}|y'|^{k+1}t^{n-k-\beta(k+1)}dt\right]^{\frac{\gamma(k)+1}{k+1}} \\
&= \frac{k+1}{n(k+1)+(k-\beta(k+1))(\gamma(k)+1)}\left[\int_0^\infty t^{n-k}|y'|^{k+1}dt\right]^{\frac{\gamma(k)+1}{k+1}}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\int_0^\infty r^{n-1}|y|^{\gamma(k)+1}dr \leqslant C\left[\int_0^\infty r^{n-k}|y'|^{k+1}dr\right]^{\frac{\gamma(k)+1}{k+1}},
$$

onde

$$
C = \frac{k+1}{n(k+1)+(k-\beta(k+1))(\gamma(k)+1)}\left(\frac{k}{\beta(k+1)-k}\right)^{\frac{k(\gamma(k)+1)}{(k+1)}}.
$$

□

Proposição 6. *Assuma $1 \leqslant k < n/2$ e seja $\gamma(k)$ o expoente crítico para o operador k-Hessiano. Então, a imersão*

$$W^{k+1} \hookrightarrow L^p([0,1], r^{n-1}dr)$$

é contínua para todo $1 \leqslant p \leqslant \gamma(k)$. Além disso, no caso estrito $p < \gamma(k)$, a imersão é compacta.

Demonstração. Se $p = \gamma(k)$, a Proposição 5 garante a imersão

$$W^{k+1} \hookrightarrow L^{\gamma(k)+1}([0,1], r^{n-1}dr)$$

é contínua para $1 \leqslant p \leqslant \gamma(k)$. Então, é suficiente provar compacidade no caso estrito $p < \gamma(k)$. Seja $M \subseteq W^{k+1}$ um conjunto limitado. Digamos $\|x\|_{W^{k+1}} \leqslant K, \quad \forall x \in M$. Para $x \in M$, temos

$$\begin{aligned} |x(r+t) - x(r)| &\leqslant \int_r^{r+t} s^{\frac{n-k}{k+1}} s^{-\frac{n-k}{k+1}} |x'(s)| \, ds \\ &\leqslant \left(\int_r^{r+t} s^{\frac{n-k}{k+1}(k+1)} |x'(s)|^{k+1} \, ds \right)^{\frac{1}{k+1}} \left(\int_r^{r+t} s^{-\frac{n-k}{k+1}\frac{k+1}{k}} \, ds \right)^{\frac{k}{k+1}}. \end{aligned}$$

Como

$$\left(\int_r^{r+t} s^{-\frac{n-k}{k+1}\frac{k+1}{k}} \, ds \right)^{\frac{k}{k+1}} = \left(\frac{k}{n-2k} \right)^{\frac{k}{k+1}} \left[r^{\frac{2k-n}{k}} - (r+t)^{\frac{2k-n}{k}} \right]^{\frac{k}{k+1}},$$

segue que

$$\begin{aligned} |x(r+t) - x(r)| &\leqslant \left(\int_r^{r+t} s^{n-k} |x'(s)|^{k+1} \, ds \right)^{\frac{1}{k+1}} \left(\frac{k}{n-2k} \right)^{\frac{k}{k+1}} \left[r^{\frac{2k-n}{k}} - (r+t)^{\frac{2k-n}{k}} \right]^{\frac{k}{k+1}} \\ &\leqslant \left(\frac{k}{n-2k} \right)^{\frac{k}{k+1}} K \left[r^{\frac{2k-n}{k}} - (r+t)^{\frac{2k-n}{k}} \right]^{\frac{k}{k+1}}. \end{aligned}$$

Então,

$$\int_0^1 r^{n-1} |x(t+t) - x(r)|^{1+p} dr \leqslant \left(\frac{k}{n-2k} \right)^{\frac{k}{k+1}} K \int_0^1 H_t(r) dr,$$

onde $H_t(r) = r^{n-1}[r^{\frac{2k-n}{k}} - (r+t)^{\frac{2k-n}{k}}]^{\frac{k(1+p)}{k+1}}$.

Se $p < \gamma(k)$ então pelo Teorema da Convergência Dominada

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0^+} \int_0^1 H_t(r) dr &= \lim_{t \to 0^+} \int_0^1 r^{n-1}[r^{\frac{2k-n}{k}} - (r+t)^{\frac{2k-n}{k}}]^{\frac{k(1+p)}{k+1}} dr \\ &= \int_0^1 \lim_{t \to 0^+} r^{n-1}[r^{\frac{2k-n}{k}} - (r+t)^{\frac{2k-n}{k}}]^{\frac{k(1+p)}{k+1}} dr \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_0^1 r^{n-1}|x(t+t)-x(r)|^{1+p}dr \to 0,$$

uniformemente em $x \in E$ quando $t \to 0^+$, o que mostra que o conjunto E é relativamente compacto em $L^{p+1}([0,1], r^{n-1}dr)$. □

A seguir, através de um exemplo, veremos que a imersão $W^{k+1} \hookrightarrow L^{\gamma(k)+1}([0,1], r^{n-1}dr)$ não é compacta. Tome a função $\phi \in C^\infty[0,1]$ satisfazendo $0 \leqslant \phi \leqslant 1$, $supp\phi \subseteq [0, \frac{1}{2}]$, $\phi \equiv 1$ em $[0, \frac{1}{4}]$ e $\|\phi\|^{k+1} = B > 0$.

Definimos,

$$\phi_i(r) = 2^{i\left(\frac{n-2k}{k+1}\right)}\phi(2^i r), \qquad i = 1, 2, \ldots. \tag{2.15}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\|\phi_i\|^{k+1} &= \int_0^1 r^{n-k}|\phi_i'|^{k+1}dr \\
&= \int_0^1 r^{n-k}|2^{i\left(\frac{n-2k}{k+1}\right)}\phi'(2^i r)2^i|^{k+1}dr \\
&= \int_0^1 r^{n-k}|\phi'(2^i r)|^{k+1}2^{i(n-k)}2^i dr.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $u = 2^i r$, temos

$$\begin{aligned}
\|\phi_i\|^{k+1} &= \int_0^1 \left(\frac{u}{2^i}\right)^{n-k}|\phi'(u)|^{k+1}2^{i(n-k)}du \\
&= \int_0^1 u^{n-k}|\phi'(u)|^{k+1}du \\
&= \|\phi\|^{k+1} = B.
\end{aligned}$$

Mas,

$$\|\phi_{i+m} - \phi_i\|_{\gamma(k)+1,n-1}^{\gamma(k)+1} \geqslant \frac{2^{-n}}{n}|1 - 2^{-\frac{mn}{\gamma(k)+1}}|.$$

Em outras palavras, o conjunto $\{\phi_i\}$ não é relativamente compacto em $L^{\gamma(k)+1}([0,1], r^{n-1}dr)$.

Capítulo 3

Problema de Brezis-Nirenberg para a equação k-Hessiana

Neste capítulo discutiremos alguns resultados obtidos por Chou, Geng e Yan [7] sobre o problema de Brezis e Nirenberg para a equação k-Hessiana definida em um domínio simétrico.

3.1 Resultados Preliminares

Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} S_k(D^2u) = (-u)^{\gamma(k)} + \lambda(-u)^k & \text{em } B, \\ u < 0, & \text{em } B, \\ u = 0, & \text{em } \partial B, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde B é a bola unitária centrada na origem $0 \in \mathbb{R}^n,\ n \geqslant 3$.

Estamos interessados em soluções radialmente simétricas $u(x) = y(r), r = |x|$. Como vimos no Capítulo 2, na forma radial a equação (3.1) equivale a

$$\begin{cases} \dfrac{C_n^k}{n}\left(r^{n-k}(y')^k\right)' = r^{n-1}[(-y)^{\gamma(k)} + \lambda(-y)^k] & \text{em } [0,1] \\ y < 0 & \text{em } [0,1] \\ y(1) = 0,\ y'(0) = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Denote

$$S = \inf\left\{\frac{||y||_{W^{k+1}}^{k+1}}{||y||_{\gamma(k)+1,n-1}^{k+1}}\ :\ y \in W^{k+1}\backslash\{0\}\right\},$$

onde $\|y\|_{\gamma(k)+1,n-1}$ é a norma de y em $L^{\gamma(k)+1}([0,1], r^{n-1}dr)$. Notemos que a razão

$$\frac{||y||^{k+1}_{\mathcal{W}^{k+1}}}{||y||^{k+1}_{\gamma(k)+1,n-1}}$$

é invariante por dilatação e desse modo, obtemos

$$S = \inf\left\{ \frac{\displaystyle\int_0^\infty r^{n-k}|y'|^{k+1}dr}{\left(\displaystyle\int_0^\infty r^{n-1}|y|^{\gamma(k)+1}dr\right)^{\frac{k+1}{\gamma(k)+1}}} : y \in \mathcal{W}^{k+1}\backslash\{0\} \right\}. \tag{3.3}$$

Veja que se existe $y_0 \in \mathcal{W}^{k+1}$, $y_0 \leqslant 0$, tal que

$$\int_0^\infty r^{n-1}|y_0|^{\gamma(k)+1}dr = 1 \qquad e \qquad S = \int_0^\infty r^{n-k}|y_0'|^{k+1}dr. \tag{3.4}$$

Então, y_0 resolve

$$\begin{cases} \left(r^{n-k}(y')^k\right)' = Sr^{n-1}(-y)^{\gamma(k)} & \text{em } [0,1] \\ y < 0 & \text{em } [0,1] \\ y(0) = C_1,\ y'(0) = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Com isso, temos o seguinte resultado:

Proposição 7. *A melhor constante e funções extremais no problema minimizante* (3.3) *são dados respectivamente por*

$$S = n\left(\frac{n-2k}{k}\right)^k \left[\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2k}\right)}{2\Gamma\left(\frac{(k+1)n}{2k}\right)}\right]^{\frac{2k}{n}},$$

$$y_0(r) = \frac{-C}{(\lambda + r^2)^{\frac{n-2k}{2k}}},$$

onde $\lambda > 0$ *e*

$$C = \left[S\left(\frac{k}{k+1}\right)^k\right]^{(n-2k)/(k+1)n} \lambda^{(n-2k)/2k(k+1)}.$$

Demonstração. Vide Chou *et al* [7]. □

3.2 Resultados de Existência

Considere os seguintes funcionais,

$$F(u) = \frac{C_n^k}{n}\int_0^1 r^{n-k}|u|^{k+1}dr - A\left[\int_0^1 r^{n-1}|u|^{\gamma(k)+1}dr\right]^{\frac{k+1}{\gamma(k)+1}},$$

e

$$H(u) = \int_0^1 r^{n-1}|u|^{k+1}dr.$$

Note que

$$\begin{aligned}
F_u - (F_{u'})_r &= -\frac{C_n^k}{n}\int_0^1 (r^{n-k}|u'|^{k-1}u')'dr \\
&\quad - A\frac{k+1}{\gamma(k)+1}\left(\int_0^1 r^{n-1}|u|^{\gamma(k)+1}dr\right)^{\frac{k+1}{\gamma(k)+1}-1}\int_0^1 r^{n-1}|u|^{\gamma(k)-1}u dr \\
&= \int_0^1\left[-\frac{C_n^k}{n}(r^{n-k}|u'|^{k+1}u')' - A\frac{k+1}{\gamma(k)+1}\|u\|_{\gamma(k)+1,n-1}^{-(\gamma(k)-k)} r^{n-1}|u|^{\gamma(k)-1}u\right]dr,
\end{aligned}$$

e

$$H_u = \int_0^1 r^{n-1}|u|^{k-1}u dr.$$

Assim, quando consideramos o problema minimizante

$$\lambda_A = \inf\left\{J(u) : u \in W^{k+1}\backslash\{0\}\right\}, \tag{3.6}$$

onde

$$\begin{aligned}
J(u) = J(u,\gamma(k),A) &= \frac{F(u)}{H(u)} \\
&= \frac{\frac{C_n^k}{n}\displaystyle\int_0^1 r^{n-k}|u|^{k+1}dr - A\left[\int_0^1 r^{n-1}|u|^{\gamma(k)+1}dr\right]^{\frac{k+1}{\gamma(k)+1}}}{\displaystyle\int_0^1 r^{n-1}|u|^{k+1}dr},
\end{aligned} \tag{3.7}$$

temos que qualquer minimizante satisfaz a equação de Euler-Lagrange

$$\begin{aligned}
-\frac{C_n^k}{n}\left(r^{n-k}|u'|^{k-1}u'\right)' - A\left(\frac{k+1}{\gamma(k)+1}\|u\|_{\gamma(k)+1,n-1}^{\gamma(k)-k}\right)r^{n-1}|u|^{\gamma(k)-1}u \\
= \lambda_A r^{n-1}|u|^{k-1}u
\end{aligned} \tag{3.8}$$

no sentido fraco. Então se u é normalizado tal que $(\gamma(k)+1)\,\|u\|_{\gamma(k)+1,n-1}^{\gamma(k)-k} = (k+1)\,A$, então u soluciona (3.2) com $\lambda = \lambda_A$. A regularidade de uma solução de (3.2) é dada pelo seguinte resultado.

Lema 2. *Qualquer solução fraca não positiva de* (3.8) *em* W^{k+1} *é na realidade negativa e* $C^2[0,1]$. *Consequentemente,* $u(x) = y(|x|)$ *soluciona* (3.1) *no sentido clássico em* B.

Demonstração. Seja y uma solução fraca de (3.8). Então y satisfaz

$$\frac{C_n^k}{n}\int_0^1 r^{n-k}|y'|^{k-1}y'\varphi' dr = \int_0^1 r^{n-1}(A|y|^{\gamma(k)-1} + \lambda|y|^{k-1})y\varphi dr, \quad \forall\, \varphi \in W^{k+1}. \tag{3.9}$$

Fixe $r \in (0,1)$. Escolha φ tal que

$$\varphi = \begin{cases} 1 \text{ em } (0,r) \\ r + \delta(1-s) \text{em } (r, r+\delta) \\ 0 \text{ em } [r+\delta, 1). \end{cases}$$

Tomando φ como uma função teste em (3.9) temos

$$\begin{aligned}\int_0^1 r^{n-1}(A|y|^{\gamma(k)-1} + \lambda|y|^{k-1})y dr &= \int_0^r t^{n-1}(A|y|^{\gamma(k)-1} + \lambda|y|^{k-1})y dt \\ &+ \int_r^{r+\delta} t^{n-1}(A|y|^{\gamma(k)-1} + \lambda|y|^{k-1})y[r + \delta(1-s)] dt.\end{aligned}$$

Fazendo $\delta \to 0$, obtemos

$$\frac{C_n^k}{n} r^{n-k}|y'|^{k-1}y' = \int_0^r t^{n-1}(A|y|^{\gamma(k)} + \lambda|y|^k) dr.$$

Daí, a conclusão do lema é facilmente deduzida se y for limitada. No que segue, vamos mostrar que y é limitada. Para $q \geqslant 1$, defina

$$g(t) = \begin{cases} t^q, t \in [0,N) \\ linear, t \geqslant N \end{cases}$$

$$G(u) = \int_0^u |g'(t)|^{k+1} dt. \tag{3.10}$$

Então, temos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} u^{k+1}G'(u) &= u^{k+1}|g'(t)|^{k+1} = u^{k+1}q^{k+1}|u^{q-1}|^{k+1} \\ &= u^{k+1}q^{k+1}\left|\frac{u^q}{u}\right|^{k+1} = \frac{u^{k+1}}{|u|^{k+1}}q^{k+1}|u^q|^{k+1} \\ &\leqslant q^{k+1}|u^q|^{k+1} = q^{k+1}|g(u)|^{k+1}. \end{aligned}$$

Ainda

$$\begin{aligned} G(u) &= \int_0^u |qt^{q-1}|^{k+1} dt = \int_0^u q^{k+1}|t|^{(q-1)(k+1)} dt \\ &= q^{k+1}\frac{u^{(q-1)(k+1)+1}}{(q-1)(k+1)+1} = \frac{q^{k+1}u^{(q-1)(k+1)}|u|}{(q-1)(k+1)+1} \\ &\leqslant |u||qu^{q-1}|^{k+1} = |u|G'(u). \end{aligned}$$

Logo,

$$u^{k+1}G'(u) \leqslant q^{k+1}|g(u)|^{k+1} \quad e \quad G(u) \leqslant |u|G'(u). \tag{3.11}$$

Seja $\varphi = \eta^{k+1}G(-y)$ uma função teste satisfazendo (3.9), onde η é suave e não-negativa. Então,

$$\begin{aligned}
-\int_0^1 r^{n-k}|y'|^{k-1}y'\varphi' dr &= -\int_0^1 r^{n-k}|y'|^{k-1}y'\left[(k+1)\eta^k\eta' G(-y) - \eta^{k+1}\left|\frac{d}{dt}g(-y)\right|^{k+1}\right] \\
&= \int_0^1 r^{n-k}|y'|^{k-1}y'\eta^{k+1}\left|\frac{d}{dt}g(-y)\right|^{k+1} \\
&\quad - \int_0^1 r^{n-k}|y'|^{k-1}y'(k+1)\eta^k|\eta|'G(-y) \\
&\geqslant \int_0^1 r^{n-k}\eta^{k+1}\left|\frac{d}{dt}g(-y)\right|^{k+1} - (k+1)\int_0^1 r^{n-k}|y'|^k\eta^k|\eta|'G(-y).
\end{aligned}$$

Por (3.9)

$$\begin{aligned}
-\int_0^1 r^{n-k}|y'|^{k-1}y'\varphi' &= -C\int_0^1 r^{n-1}(A(-y)^{\gamma(k)-1} + \lambda(-y)^{k-1})y\varphi \\
&= -C\int_0^1 r^{n-1}(A(-y)^{\gamma(k)-1} + \lambda(-y)^{k-1})y\eta^{k+1}G(-y)
\end{aligned}$$

e usando as estimativas (3.11)

$$\begin{aligned}
-\int_0^1 r^{n-k}|y'|^{k-1}y'\varphi' &\leqslant -C\int_0^1 r^{n-1}(A(-y)^{\gamma(k)-1} + \lambda(-y)^{k-1})y\eta^{k+1}(-y)G'(-y) \\
&\leqslant -Cq^{k+1}\int_0^1 r^{n-1}(A(-y)^{\gamma(k)-k} + \lambda)y(\eta g(-y))^{k+1} \\
&\leqslant -Cq^{k+1}\int_0^1 r^{n-1}((-y)^{\gamma(k)-k} + 1)y(\eta g(-y))^{k+1}.
\end{aligned}$$

De modo semelhante, temos

$$\begin{aligned}
(k+1)\int_0^1 r^{n-k}|y'|^k\eta^k|\eta'|G(-y) &\leqslant (k+1)\int_0^1 r^{n-k}|y'|^k\eta^k|\eta'|(-y)^{-k}(-y)^{k+1}G'(-y) \\
&\leqslant (k+1)q^{k+1}\int_0^1 r^{n-k}\left(\frac{|y'|}{(-y)}\right)^k\left(\frac{\eta}{|\eta|'}\right)^k|\eta' g(-y)|^{k+1} \\
&\leqslant (k+1)q^{k+1}\int_0^1 r^{n-k}|\eta' g(-y)|^{k+1}.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 r^{n-k}\eta^{k+1}\left|\frac{d}{dt}g(-y)\right|^{k+1} \leqslant Cq^{k+1}\bigg[&\int_0^1 r^{n-k}|\eta' g(-y)|^{k+1} \\
&+ \int_0^1 r^{n-1}(|y|^{\gamma(k)-k} + 1)(\eta g(-y))^{k+1}\bigg].
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Agora, pela Proposição 6

$$
\begin{aligned}
\left[\int_0^1 r^{n-1}|\eta g(-y)|^{\gamma(k)+1}dr\right]^{\frac{k+1}{\gamma(k)+1}} &\leqslant \int_0^1 r^{n-k}\left|\frac{d}{dt}\eta g(-y)\right|^{k+1} \\
&\leqslant \int_0^1 r^{n-k}\left|\eta' g(-y)+\eta\frac{d}{dt}\eta g(-y)\right|^{k+1} \\
&\leqslant \int_0^1 r^{n-k}\left|\eta' g(-y)\right|^{k+1}+\int_0^1 r^{n-k}\left|\eta\frac{d}{dt}\eta g(-y)\right|^{k+1},
\end{aligned}
$$

e segue de (3.12) que,

$$
\begin{aligned}
\left[\int_0^1 r^{n-1}|\eta g(-y)|^{\gamma(k)+1}dr\right]^{\frac{k+1}{\gamma(k)+1}} \leqslant Cq^{k+1}\Bigg[\int_0^1 r^{n-k}\left|\eta' g(-y)\right|^{k+1}+\int_0^1 r^{n-1}(\eta g(-y))^{k+1} \\
+\int_0^1 r^{n-1}(-y)^{\gamma(k)-k}(\eta g(-y))^{k+1}\Bigg]. \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

Note que, pela desigualde de Hölder,

$$
\int_0^1 r^{n-1}(-y)^{\gamma(k)-k}(\eta g(-y))^{k+1} \leqslant \left[\int_0^1 r^{n-1}(-y)^{\gamma(k)+1}\right]^{\frac{\gamma(k)-k}{\gamma(k)+1}}\left[\int_0^1 r^{n-1}(\eta g(-y))^{\gamma(k)+1}\right]^{\frac{k+1}{\gamma(k)+1}}
$$

Agora, para cada $t\in[0,1]$, existe um $\delta=\delta(t)>0$, tal que

$$
Cq^{k+1}\left[\int_{t-\delta}^{t+\delta} r^{n-1}(-y)^{\gamma(k)+1}\right]^{\frac{\gamma(k)-k}{\gamma(k)+1}} \leqslant \frac{1}{2}.
$$

Tome $\eta\in C_0^\infty[t-\delta,t+\delta]$ tal que

$$
0\leqslant\eta\leqslant 1,\ \eta\equiv 1 \qquad \text{em}\ \ [t-\frac{\delta}{2},\ t+\frac{\delta}{2}],\ |\eta'|\leqslant\frac{2}{\delta}.
$$

Então, fazendo $N\to\infty$ e de (3.13) temos

$$
\begin{aligned}
\left[\int_{t-\delta}^{t+\delta} r^{n-1}(\eta(-y)^q)^{\gamma(k)+1}\right]^{\frac{k+1}{\gamma(k)+1}} \leqslant Cq^{k+1}\Bigg[\int_{t-\delta}^{t+\delta} r^{n-k}\left|\eta'(-y)^q\right|^{k+1}+\int_{t-\delta}^{t+\delta} r^{n-1}(\eta(-y)^q)^{k+1} \\
+\int_{t-\delta}^{t+\delta} r^{n-1}(-y)^{\gamma(k)-k}(\eta(-y)^q)^{k+1}\Bigg].
\end{aligned}
$$

Como $|\eta|\leqslant 1$,

$$
\left[\int_{t-\delta}^{t+\delta} r^{n-1}(\eta(-y)^q)^{\gamma(k)+1}\right]^{\frac{k+1}{\gamma(k)+1}} \leqslant Cq^{k+1}\int_{t-\delta}^{t+\delta} r^{n-k}|\eta'|^{k+1}(-y)^{q(k+1)}
$$

e do fato de $|\eta'|\leqslant\frac{2}{\delta}$ segue que

$$
\begin{aligned}
\left[\int_{t-\delta}^{t+\delta} r^{n-1}(\eta(-y)^q)^{\gamma(k)+1}\right]^{\frac{k+1}{\gamma(k)+1}} &\leqslant \frac{Cq^{k+1}}{\delta^{k+1}}\int_{t-\delta}^{t+\delta} r^{n-k}(-y)^{q(k+1)} \\
&= \frac{Cq^{k+1}}{\delta^{k+1}}\int_{t-\delta}^{t+\delta} r^{n-k-\frac{n-1}{s}}r^{\frac{n-1}{s}}(-y)^{q(k+1)}.
\end{aligned}
$$

Novamente pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\left[\int_{t-\delta}^{t+\delta} r^{n-1}(\eta(-y)^q)^{\gamma(k)+1}\right]^{\frac{k+1}{\gamma(k)+1}} \leqslant \frac{Cq^{k+1}}{\delta^{k+1}}\left[\int_{t-\delta}^{t+\delta}(r^{\frac{n-1}{s}}(-y)^{q(k+1)})^s\right]^{\frac{1}{s}} \times \left[\int_{t-\delta}^{t+\delta} r^{(n-k-\frac{n-1}{s})(\frac{s}{s-1})}\right]^{\frac{s-1}{s}}. \quad (3.14)$$

Tomando

$$s \in \left(\frac{n}{n-k+1}, \frac{\gamma(k)+1}{k+1}\right)$$

temos

$$s > \frac{n}{n-k+1} \Rightarrow s(n-k+1) > n \Rightarrow s(n-k)+s > n \Rightarrow s(n-k)-n+1 > 1-s$$
$$\Rightarrow \frac{s(n-k)-n+1}{s-1} > -1 \Rightarrow \left(n-k-\frac{n-1}{s}\right)\left(\frac{s}{s-1}\right) > -1.$$

Assim, por (3.14)

$$\left(\int_0^1 r^{n-1}(-y)^{q(\gamma(k)+1)}\right)^{\frac{k+1}{\gamma(k)+1}} \leqslant Cq^{k+1}\left[\int_0^1 r^{n-1}(-y)^{q(k+1)s}\right]^{\frac{1}{s}}. \quad (3.15)$$

Seja $q_0 = \frac{\gamma(k)+1}{(k+1)s}$. Então, como $\frac{\gamma(k)+1}{k+1} > s$, segue que $q_0 > 1$. Ainda $y \in L^{\gamma(k)+1}([0,1], r^{n-1}dr)$ implica $y \in L^{q_0(\gamma(k)+1)}([0,1], r^{n-1}dr)$, pois

$$\left(\int_0^1 r^{n-1}(-y)^{q_0(\gamma(k)+1)}\right)^{\frac{1}{q_0(\gamma(k)+1)}} = \left(\int_0^1 r^{n-1}(-y)^{q_0(\gamma(k)+1)}\right)^{\frac{1}{\frac{(\gamma(k)+1)(\gamma(k)+1)}{(k+1)s}}}$$
$$= \left(\int_0^1 r^{n-1}(-y)^{q_0(\gamma(k)+1)}\right)^{\frac{k+1}{(\gamma(k)+1)}\frac{s}{\gamma(k)+1}}.$$

Usando (3.15), temos

$$\left(\int_0^1 r^{n-1}(-y)^{q_0(\gamma(k)+1)}\right)^{\frac{1}{q_0(\gamma(k)+1)}} \leqslant \left(Cq^{k+1}\right)^{\frac{s}{\gamma(k)+1}}\left(\int_0^1 r^{n-1}(-y)^{q_0(k+1)s}\right)^{\frac{1}{s}\frac{s}{\gamma(k)+1}}$$
$$= \left(Cq^{k+1}\right)^{\frac{s}{\gamma(k)+1}}\left(\int_0^1 r^{n-1}(-y)^{\gamma(k)+1}\right)^{\frac{1}{\gamma(k)+1}}$$
$$= \left(Cq^{k+1}\right)^{\frac{s}{\gamma(k)+1}} ||y||_{L^{\gamma(k)+1}([0,1],r^{n-1}dr)}$$
$$< \infty.$$

Por outro lado, temos

$$||y||_{q(\gamma(k)+1),n-1} = \left(\int_0^1 r^{n-1}(-y)^{q(\gamma(k)+1)}\right)^{\frac{1}{q(\gamma(k)+1)}}$$
$$= \left(\int_0^1 r^{n-1}(-y)^{q(\gamma(k)+1)}\right)^{\frac{k+1}{(\gamma(k)+1)}\frac{1}{q(k+1)}}.$$

Novamente utilizando (3.15) segue

$$\begin{aligned}||y||_{q(\gamma(k)+1),n-1} &\leqslant \left(Cq^{k+1}\right)^{\frac{1}{q(k+1)}} \left(\int_0^1 r^{n-1}(-y)^{q(k+1)s}\right)^{\frac{1}{(s}\frac{1}{q(k+1)}}\\ &= (Cq)^{\frac{1}{q}} ||y||_{s(k+1)q,n-1}.\end{aligned}$$

Como $s < \frac{\gamma(k)+1}{k+1}$, então $s(k+1)q < q(\gamma(k)+1)$. Assim, temos

$$||y||_{q(\gamma(k)+1),n-1} \leqslant ||y||^{\lambda}_{s(k+1)q} ||y||^{1-\lambda}_{\infty}$$

onde $\lambda = \frac{s(k+1)q}{q(\gamma(k)+1)} = \frac{s(k+1)}{(\gamma(k)+1)} < 1$. Assim,

$$||y||^{\lambda-1}_{\infty} \leqslant \frac{||y||^{\lambda}_{s(k+1)q,n-1}}{||y||_{q(\gamma(k)+1),n-1}}.$$

Então

$$\begin{aligned}||y||_{\infty} &\leqslant \frac{||y||^{\frac{\lambda}{\lambda-1}}_{s(k+1)q,n-1}}{||y||^{\frac{1}{\lambda-1}}_{q(\gamma(k)+1),n-1}}\\ &\leqslant \frac{||y||^{\frac{1}{1-\lambda}}_{q(\gamma(k)+1),n-1}}{||y||^{\frac{\lambda}{1-\lambda}}_{s(k+1)q,n-1}}\\ &\leqslant \frac{||y||^{\frac{1}{1-\lambda}}_{q(\gamma(k)+1),n-1}}{||y||^{\frac{1}{1-\lambda}}_{s(k+1)q,n-1}||y||^{-1}_{s(k+1)q,n-1}}\\ &\leqslant (Cq)^{\frac{1}{q}\frac{1}{1-\lambda}} ||y||_{s(k+1)q,n-1}\\ &\leqslant C.\end{aligned}$$

Logo, y é limitada. □

Para tratar com o problema minimizante (3.6), introduziremos o problema com expoente não-crítico p, com $k < p < \gamma(k)$:

$$\mu_p = \mu(p, A) = \inf\{J_p(u) : u \in W^{k+1}\backslash\{0\}\}, \tag{3.16}$$

onde

$$\begin{aligned}J_p(u) &= J(u; p, A)\\ &= \frac{\dfrac{C^k_n}{n}\displaystyle\int_0^1 r^{n-k}|u'|^{k+1}dr - A\left[\int_0^1 r^{n-1}|u|^{p+1}dr\right]^{\frac{k+1}{p+1}}}{\displaystyle\int_0^1 r^{n-1}|u|^{k+1}dr}.\end{aligned} \tag{3.17}$$

Se $y \in W^{k+1}\backslash\{0\}$, e $p_1 \geqslant p_2$, então

$$\begin{aligned}\left[\int_0^1 r^{n-1}|u|^{p_1+1}dr\right]^{\frac{k+1}{p_1+1}} &= \left[\int_0^1 r^{n-1}|u|^{p_2+1}|u|^{p_1-p_2}dr\right]^{\frac{k+1}{p_1+1}}\\ &\geqslant \left[\int_0^1 r^{n-1}|u|^{p_2+1}dr\right]^{\frac{k+1}{p_1+1}}\\ &\geqslant \left[\int_0^1 r^{n-1}|u|^{p_2+1}dr\right]^{\frac{k+1}{p_2+1}}.\end{aligned}$$

Daí,

$$J_{p_2}(y) \geqslant J_{p_1}(y) \geqslant J_{\gamma(k)}(u) = J(y).$$

Então, μ_p é decrescente em p. Mais ainda, $p \mapsto \mu_p$ é semicontínua superiormente. Daí,

$$\mu_p \to \lambda_A, \quad \text{quando} \quad p \to \gamma(k)^-. \tag{3.18}$$

Qualquer minimizador do operador $J_p(u)$ satisfaz a equação de Euler-Lagrange

$$-\frac{C_n^k}{n}\left(r^{n-k}|y_p'|^{k-1}y_p'\right)' - A\left(\frac{k+1}{\gamma(k)+1}\|y_p\|_{p+1,n-1}^{k-p}\right) r^{n-1}|y_p|^{p-1}y_p = \lambda_A r^{n-1}|y_p|^{k-1}y_p.$$

Assim, μ_p é obtida por algum $y_p \in W^{k+1}$ com $y_p \leqslant 0$ tal que

$$\frac{p+1}{k+1}\|y_p\|_{p+1,n-1}^{p-k} = A. \tag{3.19}$$

Claramente, $\{y_p\}$ é limitada em W^{k+1}, então existe uma subsequência, que também denotaremos por $\{y_p\}$ tal que, pela Proposição 6

$$\begin{array}{ll} y_p \rightharpoonup y & \text{fracamente em } W^{k+1}\\ y_p \rightharpoonup y & \text{fracamente em } L^{\gamma(k)+1}([0,1], r^{n-1}dr)\\ y_p \to y & \text{fortemente em } L^{t+1}([0,1], r^{n-1}dr)\\ y_p \to y & \text{q.t.p}, \end{array} \tag{3.20}$$

onde $y \in W^{k+1}$ e $t < \gamma(k)$. Assim,

$$\lambda_A \leqslant J(y_p; \gamma(k), A) \leqslant J(y_p; p, A) = \mu_p \tag{3.21}$$

e por (3.18) vimos que $J(y_p; \gamma(k), A) = J_p(y_p) \to \lambda_A$ quando $p \to \gamma(k)^-$, isto é, $\{y_p\}$ é também uma sequência minimizante de (3.7).

Proposição 8. *Se $\lambda_{A+\delta} > -\infty$ para algum $\delta > 0$, então λ_A é atingido por algum $y_p \in W^{k+1}$.*

Demonstração. Pelos argumentos acima sabemos que $\{y_p\}$ (passando a uma subsequência, se necessário) é também uma sequência minimizante de λ_A. Seja $y_A = y$ como em (3.20). Temos que provar que

$$y_p \to y \quad \text{fortemente} \quad \text{em} \quad L^{\gamma(k)+1}([0,1], r^{n-1}dr). \tag{3.22}$$

Para este fim, por (3.19) e pela Equação de Euler-Lagrange acima temos

$$-\frac{C_n^k}{n}\int_0^1 \left(r^{n-k}|y_p'|^{k-1}y_p'\right)'\varphi = \int_0^1 r^{n-1}(A|y_p|^{p-1}y_p + \lambda_A|y_p|^{k-1}y_p)\varphi,$$

para toda $\varphi \in W^{k+1}$. Agora, integrando por partes a integral do lado esquerdo da expressão acima obtemos,

$$\begin{aligned}-\frac{C_n^k}{n}\int_0^1 \left(r^{n-k}|y_p'|^{k-1}y_p'\right)'\varphi &= -\frac{C_n^k}{n}\left[(r^{n-k}|y_p'|^{k-1}y_p'\varphi\Big|_0^1 - \int_0^1 r^{n-k}|y_p'|^{k-1}y_p'\varphi'\right]\\ &= \frac{C_n^k}{n}\int_0^1 r^{n-k}|y_p'|^{k-1}y_p'\varphi'.\end{aligned}$$

Desse modo, y_p satisfaz

$$\frac{C_n^k}{n}\int_0^1 r^{n-k}(y_p')^k\varphi' dr = \int_0^1 r^{n-1}(A(-y_p)^{p-1} + \lambda_A(-y_p)^{k-1})y_p\varphi dr, \tag{3.23}$$

para toda $\varphi \in W^{k+1}$.

Seja $\varphi = G(-y_p)$ uma função teste, onde G é definida em (3.10). Temos

$$\begin{aligned}\frac{C_n^k}{n}\int_0^1 r^{n-k}\left|\frac{d}{dr}g(-y_p)\right|^{k+1} &= \int_0^1 r^{n-1}A(-y_p)^{p-1}y_pG(-y_p)\\ &+ \int_0^1 r^{n-1}\lambda_A(-y_p)^{k-1}y_pG(-y_p),\end{aligned}$$

e por (3.11)

$$\begin{aligned}\frac{C_n^k}{n}\int_0^1 r^{n-k}\left|\frac{d}{dr}g(-y_p)\right|^{k+1} &\leqslant \int_0^1 r^{n-1}A(-y_p)^{p-1}(-y_p)(-y_p)G'(-y_p)+\\ &+ \int_0^1 r^{n-1}\lambda_A(-y_p)^{k-1}(-y_p)(-y_p)G'(-y_p)\\ &= \int_0^1 r^{n-1}A(-y_p)^{p}(-y_p)^{-k}(-y_p)^{k+1}G'(-y_p)+\\ &+ \int_0^1 r^{n-1}\lambda_A(-y_p)^{k}(-y_p)^{-k}(-y_p)^{k+1}G'(-y_p)\end{aligned}$$

e, novamente por (3.11)

$$\begin{aligned}\frac{C_n^k}{n}\int_0^1 r^{n-k}\left|\frac{d}{dr}g(-y_p)\right|^{k+1} &\leqslant q^{k+1}A\int_0^1 r^{n-1}(-y_p)^{p-k}g(-y_p)^{k+1}\\ &+ q^{k+1}\mu(p,A)\int_0^1 r^{n-1}g(-y_p)^{k+1}.\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}\int_0^1 r^{n-1}A(-y_p)^{p-k}g(-y_p)^{k+1} &\leqslant \left[\int_0^1 r^{n-1}g(-y_p)^{(k+1)\frac{p+1}{k+1}}\right]^{\frac{k+1}{p+1}}\left[\int_0^1 r^{n-1}(-y_p)^{(p-k)\frac{p+1}{p-k}}\right]^{\frac{p-k}{p+1}}\\ &\leqslant \left[\int_0^1 r^{n-1}g(-y_p)^{p+1}\right]^{\frac{k+1}{p+1}}\left[\int_0^1 r^{n-1}(-y_p)^{p+1}\right]^{\frac{p-k}{p+1}}\\ &\leqslant \|g(-y_p)\|^{k+1}_{p+1,n-1}\|y_p\|^{p-k}_{p+1,n-1}.\end{aligned}$$

Portanto, como $\|y_p\|^{p-k}_{p+1,n-1} < \infty$, temos que

$$\frac{C_n^k}{n}\int_0^1 r^{n-k}\left|\frac{d}{dr}g(-y_p)\right|^{k+1} \leqslant q^{k+1}\left(A\|g(-y_p)\|^{k+1}_{p+1,n-1} + \mu(p,A)\|g(-y_p)\|^{k+1}_{k+1,n-1}\right). \tag{3.24}$$

Por outro lado, como $\lambda_{A+\delta} > \infty$ então, da definição de $J_p(u)$ temos que

$$\begin{aligned}\frac{C_n^k}{n}\int_0^1 r^{n-k}\left|\frac{d}{dr}g(-y_p)\right|^{k+1} &- (A+\delta)\left[\int_0^1 r^{n-1}g(-y_p)^{p+1}\right]^{\frac{k+1}{p+1}}\\ &\geqslant \mu(p,A+\delta)\int_0^1 r^{n-1}g(-y_p)^{k+1}.\end{aligned}$$

Combinando esta desigualdade com (3.24), obtemos

$$\begin{aligned}\left(A+\delta-Aq^{k+1}\right)\|g(-y_p)\|^{k+1}_{p+1,n-1} &= (A+\delta)\|g(-y_p)\|^{k+1}_{p+1,n-1} - Aq^{q+1}\|g(-y_p)\|^{k+1}_{p+1,n-1}\\ &\leqslant \left(\mu(p,A)-\mu(p,A+\delta)\right)\|g(-y_p)\|^{k+1}_{k+1,n-1}. \quad (3.25)\end{aligned}$$

Tomando $q \in \left(1, \frac{\gamma(k)+1}{k+1}\right)$ tal que

$$\delta + A - Aq^{k+1} = \delta + (1-q^{k+1})A \geqslant \frac{1}{2}\delta > 0,$$

a estimativa (3.25) se torna, para p próximo de $\gamma(k)$,

$$\begin{aligned}\|g(-y_p)\|^{k+1}_{p+1,n-1} &\leqslant \frac{(\mu(p,A)q^{k+1}-\mu(p,A+\delta))}{(A+\delta-Aq^{k+1})}\|g(-y_p)\|^{k+1}_{k+1,n-1}\\ &\leqslant \frac{2}{\delta}[\lambda_A+1]q^{k+1}|g(-y_p)\|^{k+1}_{k+1,n-1}\\ &\leqslant \frac{2}{\delta}[\lambda_A+1]\left(\frac{\gamma(k)+1}{k+1}\right)^{k+1}\|g(-y_p)\|^{k+1}_{k+1,n-1}.\end{aligned}$$

Tomando $N \to \infty$, temos

$$\begin{aligned}\|g(-y_p)\|^{k+1}_{p+1,n-1} &= \left[\int_0^1 r^{n-1}(-y_p)^{q(p+1)}\right]^{\frac{k+1}{p+1}}\\ &= \left[\int_0^1 r^{n-1}(-y_p)^{q(p+1)}\right]^{\frac{q(k+1)}{q(p+1)}}\\ &= \|y_p\|^{(k+1)q}_{(p+1)q,n-1}\end{aligned}$$

e, por outro lado

$$\begin{aligned}
\|g(-y_p)\|_{k+1,n-1}^{k+1} &= \int_0^1 r^{n-1}|g(-y_p)|^{k+1} \\
&= \int_0^1 r^{n-1}(-y_p)^{q(k+1)} \\
&= \|y_p\|_{(k+1)q,n-1}^{(k+1)q}.
\end{aligned}$$

Desse modo,

$$\|y_p\|_{(p+1)q,n-1}^{(k+1)q} \leqslant C\|y_p\|_{(k+1)q,n-1}^{(k+1)q} \leqslant C';$$

em particular,

$$\|y_p\|_{(\gamma(k)+1)\left(\frac{q+1}{2}\right),n-1}^{(k+1)q} \leqslant C'. \tag{3.26}$$

Por interpolação, para qualquer $\varepsilon > 0$

$$\|y_p\|_{(\gamma(k)+1)q,n-1} \leqslant \varepsilon\|y_p\|_{(\gamma(k)+1)\left(\frac{q+1}{2}\right),n-1} + C_\varepsilon\|y_p\|_{t,n-1}$$

onde t pode ser escolhido tal que $t < \gamma(k) + 1$. Por (3.20) e (3.26) obtemos (3.22). $\square$

Vamos definir

$$A^* = \sup\{A; \lambda_A > -\infty\},$$

e

$$\lambda^* = \lambda_{A^*}.$$

Então, temos $0 < A^* < \infty$ e $\lambda^* < \lambda_1$. Pela Proposição 8, temos:

Proposição 9. *Existe um minimizador de* (3.6) *para cada* λ *satisfazendo* $\lambda^* < \lambda < \lambda_1$

Teorema 8. *Seja* $\Omega = B_1(0)$ *e*

$$\lambda_1 = \inf\left\{\frac{C_n^k}{n}\int_0^1 r^{n-k}|y'|^{k+1} : y \in C^1[0,1], y(1) = 0, \int_0^1 r^{n-1}|y|^{k+1} = 1\right\}.$$

(i) Se $n \geqslant 2k(k+1)$*, existe uma solução radial de* (3.1) *para* $\lambda \in (0, \lambda_1)$.

(ii) Se $2k < n < 2k(k+1)$*, existe uma solução radial de* (3.1) *para todo* $\lambda \in (\lambda^*, \lambda_1)$*, para algum* $\lambda^* < \lambda_1 - C_n^k n^{(2k-n)/n} S$*, onde* S *é a melhor constante de Sobolev definida na Proposição 6.*

Demonstração. Da Proposição 9 existe um minimizante de (3.6) para cada λ satisfazendo $\lambda^* < \lambda < \lambda_1$. Pelo Lema 2, o minimizador y é negativo e soluciona 3.2 no sentido clássico depois de ser normalizado como em (3.19). Então o que temos que fazer é calcular A^* e determinar λ^* para $n \geqslant 2k(2k+1)$ ou estimar λ^* para $2k < n < 2k(2k+1)$, como faremos abaixo.

Proposição 10. *Segue que*

(i) $A^* = \left(\dfrac{C_n^k}{n}\right) S$, *para todo* $n > 2k$*;*

(ii) Se $n \geqslant 2k(2k+1)$, *então* $\lambda^* = 0$*;*

(iii) Se $n < 2k(2k+1)$, *então* $\lambda^* < \lambda_1 - n^{(2k-n)/n} C_n^k S$.

Demonstração. Primeiramente, de (2.14) e (3.3) temos

$$S \leqslant \frac{\displaystyle\int_0^\infty r^{n-k}|y'|^{k+1}dr}{\left[\displaystyle\int_0^\infty r^{n-1}|y|^{\gamma(k)+1}dr\right]^{\frac{k+1}{\gamma(k)+1}}} \Rightarrow \frac{C_n^k}{n} S \leqslant A^*. \tag{3.27}$$

No que segue, provaremos a desigualdade reversa.

Considere

$$w = w_\varepsilon(r) = \varphi(r)u_\varepsilon(r), \tag{3.28}$$

onde $u_\varepsilon(r) = (\varepsilon + r^2)^{(2k-n)/2k}$ e φ é uma função suave. Vamos estimar a razão $J(w) = J(w_\varepsilon(r), \gamma(k), A)$ definido em (3.7) quando $\varepsilon \to 0^+$. Consideremos 2 casos separadamente.

O caso n⩾2k(2k+1). Seja $\varphi \in C^2[0,1], \varphi(1) = \varphi'(0) = 0, \varphi \equiv 1$ em uma vizinhança de 0, e $\varphi' \leqslant 0$. Segue

$$\begin{aligned}
\|w_\varepsilon\|_{\gamma(k)+1,n-1}^{\gamma(k)+1} &= \int_0^1 r^{n-1}\frac{\varphi(r)^{\gamma(k)+1}}{(\varepsilon + r^2)^{[(n-2k)/2k](\gamma(k)+1)}}dr \\
&= \int_0^1 \frac{r^{n-1}\left(\varphi(r)^{\gamma(k)+1} - 1\right)}{(\varepsilon + r^2)^{[(n-2k)/2k](\gamma(k)+1)}}dr \; + \; \int_0^1 \frac{r^{n-1}}{(\varepsilon + r^2)^{[(n-2k)/2k](\gamma(k)+1)}}dr \\
&= \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(\varepsilon + r^2)^{[(n-2k)/2k](\gamma(k)+1)}}dr + O(1) \\
&= \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{\left[\varepsilon(1 + \frac{r^2}{\varepsilon})\right]^{[(n-2k)/2k](\gamma(k)+1)}}dr + O(1).
\end{aligned}$$

Como $\gamma(k) + 1 = \dfrac{n(k+1)}{n-2k}$, temos que $\dfrac{n-2k}{2k}(\gamma(k)+1) = \frac{n}{2} + \frac{n}{2k}$. Daí,

$$\|w_\varepsilon\|_{\gamma(k)+1,n-1}^{\gamma(k)+1} = \frac{1}{\varepsilon^{\left(\frac{n}{2}+\frac{n}{2k}\right)}}\int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(1 + \frac{r^2}{\varepsilon})^{\left(\frac{n}{2}+\frac{n}{2k}\right)}}dr + O(1).$$

Fazendo $s = \frac{r^2}{\varepsilon}$, temos $r = (s\varepsilon)^{\frac{1}{2}}$ e $ds = \frac{2r}{\varepsilon}dr$. Então,

$$\begin{aligned}
\|w_\varepsilon\|_{\gamma(k)+1,n-1}^{\gamma(k)+1} &= \frac{1}{\varepsilon^{\left(\frac{n}{2}+\frac{n}{2k}\right)}}\int_0^\infty \frac{(s\varepsilon)^{\frac{1}{2}(n-1)}}{(1+s)^{\left(\frac{n}{2}+\frac{n}{2k}\right)}}\frac{\varepsilon}{2(s\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}ds + O(1) \\
&= \frac{\varepsilon^{\frac{n}{2}}}{2\varepsilon^{\left(\frac{n}{2}+\frac{n}{2k}\right)}}\int_0^\infty \frac{s^{\frac{n}{2}-1}}{(1+s)^{\left(\frac{n}{2}+\frac{n}{2k}\right)}}ds + O(1) \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon^{-n/2k}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2k}\right)}{\Gamma\left(\frac{(k+1)n}{2k}\right)} + O(1).
\end{aligned}$$

Agora, pelo Desenvolvimento de Newton, temos

$$\begin{aligned}
\|w'_\varepsilon\|_{k+1,n-k}^{k+1} &= \int_0^1 r^{n-k}\left|\frac{\varphi'(r)}{(\varepsilon+r^2)^{(n-2k)/2k}} + r\left(\frac{2k-n}{2k}\right)\frac{\varphi(r)}{(\varepsilon+r^2)^{n/2k}}\right|^{k+1} dr \\
&= \int_0^1 r^{n-1}\sum_{j=0}^{k+1} C_{k+1}^j\left[\frac{\varphi'(r)}{(\varepsilon+r^2)^{(n-2k)/2k}}\right]^j\left[r\left(\frac{2k-n}{2k}\right)\frac{\varphi(r)}{(\varepsilon+r^2)^{n/2k}}\right]^{k+1-j} dr \\
&= \sum_{j=0}^{k+1} C_{k+1}^j\left(\frac{2k-n}{2k}\right)^{k+1-j}\int_0^1 r^{n-k}r^{k+1-j}\frac{\varphi(r)^{k+1-j}\left(\varphi'(r)\right)^j}{(\varepsilon+r^2)^{(n(k+1))/2k-j}}dr \\
&= C_{k+1}^0\left(\frac{2k-n}{2k}\right)^{k+1}\int_0^1 r^{n-1}\frac{\varphi(r)^{k+1}\left(\varphi'(r)\right)^0}{(\varepsilon+r^2)^{(n(k+1))/2k}}dr + O(1) \\
&= \left(\frac{2k-n}{2k}\right)^{k+1}\int_0^1 r^{n-1}\frac{\varphi(r)^{k+1}}{(\varepsilon+r^2)^{(n(k+1))/2k}}dr + O(1) \\
&= \left(\frac{2k-n}{2k}\right)^{k+1}\int_0^1 \frac{r^{n-1}}{(\varepsilon+r^2)^{(n(k+1))/2k}}dr + O(1).
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $s = r^2$, temos

$$\begin{aligned}
\|w'_\varepsilon\|_{k+1,n-k}^{k+1} &= \left(\frac{2k-n}{2k}\right)^{k+1}\int_0^1 \frac{(s^{1/2})^{n-1}}{(\varepsilon+s)^{(n(k+1))/2k}}\frac{ds}{(2s^{1/2})} + O(1) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2k-n}{2k}\right)^{k+1}\varepsilon^{-\frac{n(k+1)}{2k}}\int_0^1 \frac{s^{\frac{n}{2}-1}}{(1+s/\varepsilon)^{(n(k+1))/2k}}ds + O(1).
\end{aligned}$$

Fazendo outra mudança de variável, $u = s/\varepsilon$

$$\begin{aligned}
\|w'_\varepsilon\|_{k+1,n-k}^{k+1} &= \frac{1}{2}\left(\frac{2k-n}{2k}\right)^{k+1}\varepsilon^{-\frac{n(k+1)}{2k}}\int_0^1 \frac{(u\varepsilon)^{\frac{n}{2}-1}}{(1+u)^{(n(k+1))/2k}}\varepsilon du + O(1) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2k-n}{2k}\right)^{k+1}\varepsilon^{-\frac{n}{2}-\frac{n}{2k}+\frac{n}{2}}\int_0^1 \frac{u^{\frac{n}{2}-1}}{(1+u)^{(n(k+1))/2k}}du + O(1) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n-2k}{2k}\right)^{k+1}\varepsilon^{-\frac{n}{2k}}\int_0^\infty \frac{u^{\frac{n}{2}-1}}{(1+u)^{(n(k+1))/2k}}du + O(1).
\end{aligned}$$

Logo, concluímos que

$$\|w'_\varepsilon\|_{k+1,n-k}^{k+1} = \frac{n}{2}\left(\frac{n-2k}{2k}\right)^{k+1}\varepsilon^{\frac{2k-n}{2k}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2k}\right)}{\Gamma\left(\frac{(k+1)n}{2k}\right)} + O(1).$$

Se $2k(k+1) < n$, então

$$
\begin{aligned}
\|w_\varepsilon\|_{k+1,n-1}^{k+1} &= \int_0^1 r^{n-1} \frac{\varphi(r)^{k+1}}{(\varepsilon + r^2)^{[(n-2k)/2k](k+1)}} dr \\
&= \int_0^1 \frac{r^{n-1}\left(\varphi(r)^{k+1} - 1\right)}{(\varepsilon + r^2)^{[(n-2k)/2k](k+1)}} dr \; + \; \int_0^1 \frac{r^{n-1}}{(\varepsilon + r^2)^{[(n-2k)/2k](k+1)}} dr \\
&= \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(\varepsilon + r^2)^{[(n-2k)/2k](k+1)}} dr + O(1) \\
&= \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{\left[\varepsilon(1 + \frac{r^2}{\varepsilon})\right]^{[(n-2k)/2k](k+1)}} dr + O(1) \\
&= \frac{1}{\varepsilon^{\frac{n}{2} - \frac{2k(k+1-n)}{2k}}} \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(1 + \frac{r^2}{\varepsilon})^{[(n-2k)/2k](k+1)}} dr + O(1).
\end{aligned}
$$

Fazendo $s = r^2/\varepsilon$

$$
\begin{aligned}
\|w_\varepsilon\|_{k+1,n-1}^{k+1} &= \frac{1}{\varepsilon^{\frac{n}{2} - \frac{2k(k+1)-n}{2k}}} \int_0^\infty \frac{(s\varepsilon)^{\frac{1}{2}(n-1)}}{(1+s)^{[(n-2k)/2k](k+1)}} \frac{\varepsilon ds}{2(s\varepsilon)^{\frac{1}{2}}} + O(1) \\
&= \frac{\varepsilon^{\frac{n}{2}}}{2\varepsilon^{\frac{n}{2} - \frac{2k(k+1)-n}{2k}}} \int_0^\infty \frac{s^{\frac{1}{2}(n-1)}}{(1+s)^{\frac{n}{2} - \frac{2k(k+1)-n}{2k}}} ds + O(1).
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\|w_\varepsilon\|_{k+1,n-1}^{k+1} = \varepsilon^{\frac{2k(k+1-n)}{2k}} \frac{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n-2k(k+1)}{2k}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{(k+1)(n-2k)}{2k}\right)} + O(1).
$$

Se $2k(k+1) = n$, então

$$
\begin{aligned}
\|w_\varepsilon\|_{k+1,n-1}^{k+1} &= \int_0^1 r^{n-1} \frac{\varphi(r)^{k+1}}{(\varepsilon + r^2)^{[(n-2k)/2k](k+1)}} dr \\
&= \int_0^1 r^{n-1} \frac{\varphi(r)^{k+1}}{(\varepsilon + r^2)^{k(k+1)}} dr \\
&= \int_0^1 \frac{r^{n-1}\left(\varphi(r)^{k+1} - 1\right)}{(\varepsilon + r^2)^{k(k+1)}} dr \; + \; \int_0^1 \frac{r^{n-1}}{(\varepsilon + r^2)^{k(k+1)}} dr \\
&= \int_0^1 \frac{r^{n-1}}{(\varepsilon + r^2)^{k(k+1)}} dr + O(1).
\end{aligned}
$$

Fazendo $u = r^2$

$$
\begin{aligned}
\|w_\varepsilon\|_{k+1,n-1}^{k+1} &= \int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{2}(n-1)}}{(\varepsilon + u)^{k(k+1)}} \frac{du}{2u^{\frac{1}{2}}} + O(1) \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{u^{\frac{n}{2}-1}}{(\varepsilon + u)^{k(k+1)}} du + O(1).
\end{aligned}
$$

Então,

$$\begin{aligned}
\|w_\varepsilon\|_{k+1,n-1}^{k+1} &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{r^{n-2}}{(\varepsilon+r^2)^{k(k+1)}}dr^2 + O(1)\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{r^{2k(k+1)-2}}{(\varepsilon+r^2)^{k(k+1)}}dr^2 + O(1)\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{r^2}{\varepsilon+r^2}\right)^{k(k+1)}\frac{dr^2}{r^2} + O(1)\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{t}{\varepsilon+t}\right)^{k(k+1)}\frac{dt}{t} + O(1)\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t^{k(k+1)-1}}{\varepsilon+t^{k(k+1)}}dt + O(1).
\end{aligned}$$

Fazendo $s = \varepsilon + t^{k(k+1)}$

$$\begin{aligned}
\|w_\varepsilon\|_{k+1,n-1}^{k+1} &= \frac{1}{2}\int_\varepsilon^{\varepsilon+1} \frac{1}{u}\, du\\
&= \frac{1}{2}(\ln|\varepsilon+1| - \ln|\varepsilon|) + O(1)\\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}\right| + O(1)\\
&= \frac{1}{2}\ln|\varepsilon|\left|1+\frac{1}{\varepsilon}\right| + O(1).
\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que

$$\|w_\varepsilon\|_{k+1,n-1}^{k+1} = \frac{1}{2}\ln|\varepsilon| + O(1).$$

Então, quando $2k(k+1) < n$, temos

$$\begin{aligned}
J(w_\varepsilon) &= \frac{\dfrac{C_n^k}{n}\|w'_\varepsilon\|_{k+1,n-k}^{k+1} - A\|w_\varepsilon\|_{\gamma(k)+1,n-1}^{k+1}}{\|w_\varepsilon\|_{k+1,n-1}^{k+1}}\\
&= \frac{\dfrac{C_n^k}{n}\dfrac{n}{2}\left(\dfrac{n-2k}{2k}\right)^{k+1}\varepsilon^{\frac{2k-n}{2k}}\dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2k}\right)}{\Gamma\left(\frac{(k+1)n}{2k}\right)} - A\left[\dfrac{1}{2}\varepsilon^{-n/2k}\dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2k}\right)}{\Gamma\left(\frac{(k+1)n}{2k}\right)}\right]^{\frac{n-2k}{n}} + O(1)}{\varepsilon^{\frac{2k(k+1-n)}{2k}}\dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-2k(k+1)}{2k}\right)}{\Gamma\left(\frac{(k+1)(n-2k)}{2k}\right)}}.
\end{aligned}$$

Evidenciando $\varepsilon^{-k}\varepsilon^{\frac{2k(k+1)-n}{2k}}$, temos

$$J(w_\varepsilon) = \frac{K\varepsilon^{-k} + O\left(\varepsilon^{\frac{n-2k(k+1)}{2k}}\right)}{C + O\left(\varepsilon^{\frac{n-2k(k+1)}{2k}}\right)} \tag{3.29}$$

onde $C > 0$ e

$$K = \left[\frac{C_n^k}{2} \left(\frac{n-2k}{2k} \right)^{k+1} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2k}\right)}{\Gamma\left(\frac{(k+1)n}{2k}\right)} - A \left(\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2k}\right)}{\Gamma\left(\frac{(k+1)n}{2k}\right)} \right)^{\frac{n-2k}{n}} \right].$$

Se $A > C_n^k S/n$, então quando $\varepsilon \to 0^+$, $J(w_\varepsilon) \to -\infty$, pois $K < 0$ e, logo

$$A^* \leqslant \frac{C_n^k}{n} S.$$

Quando $2k(k+1) = n$, (3.29) se torna

$$J(w_\varepsilon) = \frac{\left[C_n^k S - nA\right] C\varepsilon^{2k-n} + O(1)}{\frac{1}{2}|\ln \varepsilon| + O(1)}. \tag{3.30}$$

Similarmente, concluímos que $A^* \leqslant \dfrac{C_n^k}{n} S$.

O caso $2k < n < 2k(k+1)$. Precisamos de uma função φ mais refinada do que a do caso anterior. Tome

$$\varphi = 1 - r^\beta \tag{3.31}$$

onde β será determinado posteriormente. Temos,

$$\begin{aligned}
\|w_\varepsilon\|_{k+1,n-1}^{k+1} &= \int_0^1 r^{n-1} \frac{\varphi(r)^{k+1}}{(\varepsilon + r^2)^{[(n-2k)/2k](k+1)}} dr \\
&= \int_0^1 \frac{r^{n-1}}{r^{[(n-2k)/k](k+1)}} \frac{\varphi(r)^{k+1}}{(1+\varepsilon/r^2)^{[(n-2k)/2k](k+1)}} dr \\
&= \int_0^1 r^{(k+2k^2-n)/k} \varphi(r)^{k+1} dr + o(1) \\
&= \int_0^1 r^{(k+2k^2-n)/k} \left(1 - r^\beta\right)^{k+1} dr + o(1).
\end{aligned}$$

Fazendo $r^\beta = t$,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 r^{(k+2k^2-n)/k} \left(1 - r^\beta\right)^{k+1} dr + o(1) &= \int_0^1 t^{(k+2k^2-n)/\beta k} (1-t)^{k+1} \frac{t^{k(1-\beta)/\beta k}}{\beta} dr + o(1) \\
&= \frac{1}{\beta} \int_0^1 t^{((2k(k+1)-n)/\beta k)-1} (1-t)^{k+1} dr + o(1) \\
&= \frac{1}{\beta} \int_0^1 t^{((2k(k+1)-n)/\beta k)-1} (1-t)^{k+2-1} dr + o(1)
\end{aligned}$$

daí,

$$\|w_\varepsilon\|_{k+1,n-1}^{k+1} = \frac{1}{\beta} \frac{\Gamma\left(\frac{2k(k+1)-n}{\beta k}\right)\Gamma(k+2)}{\Gamma\left(k+2+\frac{2k(k+1)-n}{\beta k}\right)}. \tag{3.32}$$

Agora

$$
\begin{aligned}
\|w_\varepsilon\|_{k+1,n-1}^{k+1} &= \int_0^1 r^{n-1}\frac{\varphi(r)^{\gamma(k)+1}}{(\varepsilon+r^2)^{[(n-2k)/2k](\gamma(k)+1)}}dr\\
&= \int_0^1 r^{n-1}\frac{\varphi(r)^{\gamma(k)+1}}{(\varepsilon+r^2)^{n(k+1)/2k}}dr\\
&= \int_0^1 \frac{r^{n-1}}{(\varepsilon+r^2)^{n(k+1)/2k}}dr + \int_0^1 \frac{r^{n-1}[\varphi(r)^{\gamma(k)+1}-1]}{(\varepsilon+r^2)^{n(k+1)/2k}}dr\\
&= J_1 + J_2(\gamma(k)+1).
\end{aligned}
$$

Como

$$
\int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(\varepsilon+r^2)^{n(k+1)/2k}}dr = \int_0^1 \frac{r^{n-1}}{(\varepsilon+r^2)^{n(k+1)/2k}}dr + \int_1^\infty \frac{r^{n-1}}{(\varepsilon+r^2)^{n(k+1)/2k}}dr,
$$

segue que

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(\varepsilon+r^2)^{n(k+1)/2k}}dr - \int_1^\infty \frac{r^{n-1}}{(\varepsilon+r^2)^{n(k+1)/2k}}dr\\
&= \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(\varepsilon+r^2)^{n(k+1)/2k}}dr - \int_1^\infty \frac{r^{n-1}}{r^{n(k+1)/2k}}\frac{1}{(1+\varepsilon/r^2)^{n(k+1)/2k}}dr\\
&= \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(\varepsilon+r^2)^{n(k+1)/2k}}dr - \int_1^\infty r^{-1-n/k}dr + o(1).
\end{aligned}
$$

Fazendo a mudança $u = r^2$ na primeira integral e calculando a segunda integral do lado direito da ultima igualdade acima, obtemos

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \varepsilon^{-n/2k}\int_0^\infty \frac{u^{n/2-1}}{(1+u)^{n(k+1)/k}}du - \frac{k}{n} + o(1)\\
&= \varepsilon^{-n/2k}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2k}\right)}{\Gamma\left(\frac{(k+1)n}{2k}\right)} - \frac{k}{n} + o(1).
\end{aligned}
$$

Se $\beta > n/k$, $J_2(\gamma(k)+1)$ tende para uma integral convergente quando $\varepsilon \to 0$, isto é,

$$
\begin{aligned}
J_2(\gamma(k)+1) &= \int_0^1 \frac{r^{n-1}[\varphi(r)^{\gamma(k)+1}-1]}{(\varepsilon+r^2)^{n(k+1)/2k}}dr\\
&= \int_0^1 \frac{r^{n-1}}{r^{n(k+1)/k}}\frac{\varphi(r)^{\gamma(k)+1}-1}{(1+\varepsilon/r^2)^{n(k+1)/2k}}dr\\
&= \int_0^1 r^{-1-n/k}\left[(1-r^\beta)^{\gamma(k)+1}-1\right]dr + o(1).
\end{aligned}
$$

Se $\beta = n/k$, temos

$$
\begin{aligned}
J_2(\gamma(k)+1) &= \int_0^1 \frac{r^{n-1}[\varphi(r)^{\gamma(k)+1}-1]}{(\varepsilon+r^2)^{n(k+1)/2k}}dr\\
&= \int_0^1 \frac{r^{n-1}[(1-r^\beta)^{\gamma(k)+1}-1]}{(\varepsilon+r^2)^{n(k+1)/2k}}dr.
\end{aligned}
$$

Note que

$$(1-r^{\beta})^{\gamma(k)+1}-1=-(\gamma(k)+1)r^{n/k}+O(1)r^{2n/k}$$

e, portanto

$$\begin{aligned}
J_2(\gamma(k)+1) &= \int_0^1 \frac{r^{n-1}[-(\gamma(k)+1)r^{n/k}+O(1)r^{2n/k}]}{(\varepsilon+r^2)^{n(k+1)/2k}}dr \\
&= -(\gamma(k)+1)\int_0^1 \frac{r^{n(k+1/k)-1}}{(\varepsilon+r^2)^{n(k+1)/2k}}dr \\
&= -(\gamma(k)+1)\int_0^1 \frac{(r^2)^{n(k+1/2k)-1/2}}{(\varepsilon+r^2)^{n(k+1)/2k}}dr.
\end{aligned}$$

Fazendo $t=r^2$ e depois aplicando $s=\varepsilon+t^{n(k+1)/2k}$ obtemos

$$J_2(\gamma(k)+1)=-\frac{(\gamma(k)+1)}{2}\ln|\varepsilon|+O(1).$$

Se $\beta<n/k$, então por binômio de Newton

$$\begin{aligned}
J_2(\gamma(k)+1) &= \int_0^1 \frac{r^{n-1}[(1-r^{\beta})^{\gamma(k)+1}-1]}{(\varepsilon+r^2)^{n(k+1)/2k}}dr \\
&= \int_0^1 \frac{r^{n-1}[-(\gamma(k)+1)r^{\beta}+O(1)r^{2\beta}]}{(\varepsilon+r^2)^{n(k+1)/2k}}dr.
\end{aligned}$$

Usando a mudança $t=r^2$, temos

$$J_2(\gamma(k)+1)=-\frac{(\gamma(k)+1)}{2}\int_0^1 \frac{t^{(\beta+n)/2-1}}{(\varepsilon+t)^{n(k+1)/2k}}dr+O(1)\int_0^1 \frac{t^{\beta+n/2-1}}{(\varepsilon+t)^{n(k+1)/2k}}dr$$

e então, fazendo $s=t/\varepsilon$

$$J_2(\gamma(k)+1)=-\frac{(\gamma(k)+1)}{2}\varepsilon^{\beta/2-n/2k}\int_0^1 \frac{s^{(\beta+n)/2-1}}{(1+s)^{n(k+1)/2k}}dr+O(1)\int_0^1 \frac{t^{\beta+n/2-1}}{(\varepsilon+t)^{n(k+1)/2k}}dr.$$

Logo,

$$J_2(\gamma(k)+1)=-\frac{(\gamma(k)+1)}{2}\varepsilon^{\beta/2-n/2k}\frac{\Gamma\left(\dfrac{\beta+n}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n-\beta k}{2k}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{(k+1)n}{2k}\right)}+O(1)I'$$

onde

$$I'=\begin{cases} O(1), \ \ se \ \beta>n/2k \\ O(\ln\varepsilon), \ \ se \ \beta=n/k \\ O(\varepsilon^{\beta-n/2k}), \ \ se \ \beta<n/2k \end{cases}.$$

Portanto, como $\frac{k+1}{\gamma(k)+1} = \frac{n-2k}{n}$, temos que

$$
\begin{aligned}
\|w_\varepsilon\|^{k+1}_{\gamma(k)+1,n-1} &= (J_1 + J_2(\gamma(k)+1))^{(n-2k)/n} \\
&= \left[\varepsilon^{-n/2k} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2k}\right)}{\Gamma\left(\frac{(k+1)n}{2k}\right)} + J_2(\gamma(k)+1) \right]^{n-2k/n} \\
&= \varepsilon^{1-\frac{n}{2k}} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2k}\right)}{\Gamma\left(\frac{(k+1)n}{2k}\right)} \right]^{\frac{n-2k}{n}} + \\
&\quad + \varepsilon \frac{n-2k}{n} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2k}\right)}{\Gamma\left(\frac{(k+1)n}{2k}\right)} + \right]^{-\frac{2k}{n}} J_2(\gamma(k)+1) O(\varepsilon^{\beta - \frac{n-2k}{n}}).
\end{aligned}
$$

Agora, para w' temos,

$$
\begin{aligned}
\|w'_\varepsilon\|^{k+1}_{k+1,n-k} &= \int_0^1 r^{n-k} \left| \frac{\varphi'}{(\varepsilon + r^2)^{n-2k/2k}} + r \frac{(2k-n)}{k} \frac{\varphi}{(\varepsilon + r^2)^{n/2k}} \right|^{k+1} dr \\
&= \int_0^1 r^{n-k} \sum_{j=0}^{k+1} C^j_{k+1} \left(\frac{\varphi'}{(\varepsilon + r^2)^{n-2k/2k}} \right)^j \left(r \frac{(2k-n)}{k} \frac{\varphi}{(\varepsilon + r^2)^{n/2k}} \right)^{k+1-j} dr \\
&= \sum_{j=0}^{k+1} C^j_{k+1} \left(\frac{n-2k}{k} \right)^{k+1-j} \int_0^1 r^{n+1-j} \frac{(-\varphi')^j \varphi^{k+1-j}}{(\varepsilon + r^2)^{n(k+1)/2k-j}} dr \\
&= I_0 + I_1 + \cdots + I_{k+1}.
\end{aligned}
$$

Calculando as integrais acima, temos

$$
\begin{aligned}
I_0 + I_1 = \left(\frac{n-2k}{k} \right)^{k+1} \int_0^1 r^{n+1} \frac{\varphi^{k+1}}{(\varepsilon + r^2)^{n(k+1)/2k}} dr + \\
+ (k+1) \left(\frac{n-2k}{k} \right)^{k} \int_0^1 r^{n} \frac{-\varphi' \varphi^k}{(\varepsilon + r^2)^{n(k+1)/2k-1}} dr.
\end{aligned}
$$

Uma vez que $(-\varphi^{k+1})' = -(k+1)\varphi'\varphi^k$ e

$$
\left(\frac{r^n}{(\varepsilon + r^2)^{n(k+1)/2k-1}} \right)' = \frac{\varepsilon n r^{n-1}}{(\varepsilon + r^2)^{n(k+1)/2k}} - \left(\frac{n-2k}{k} \right) \frac{r^{n+1}}{(\varepsilon + r^2)^{n(k+1)/2k}}
$$

integrando por partes, obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 r^n \frac{-(k+1)\varphi'\varphi^k}{(\varepsilon + r^2)^{n(k+1)/2k-1}} dr = \varepsilon n \int_0^1 \frac{\varphi^{k+1} r^{n-1}}{(\varepsilon + r^2)^{n(k+1)/2k-1}} dr \\
- \left(\frac{n-2k}{k} \right) \int_0^1 \frac{\varphi^{k+1} r^{n+1}}{(\varepsilon + r^2)^{n(k+1)/2k-1}} dr.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$I_0 + I_1 = \varepsilon n \left(\frac{n-2k}{k}\right)^k \int_0^1 \frac{\varphi^{k+1} r^{n-1}}{(\varepsilon + r^2)^{n(k+1)/2k-1}} dr$$

onde, como vimos anteriormente,

$$\int_0^1 \frac{\varphi^{k+1} r^{n-1}}{(\varepsilon + r^2)^{n(k+1)/2k-1}} dr = J_1 + J_2(k+1)$$

e,

$$J_2(k+1) = \begin{cases} -\dfrac{(k+1)}{2} \varepsilon^{(\beta k - n)/2k} \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{\beta+n}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n-\beta k}{2k}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{(k+1)n}{2k}\right)} + O(1)I', \; se \; \beta < n/2k \\ -\dfrac{(k+1)}{2} \ln|\varepsilon| + O(1), \; se \; \beta = n/k \\ \displaystyle\int_0^1 r^{-1-n/k}\left[(1-r^\beta)^{k+1} - 1\right] dr + o(1), \; se \; \beta > n/2k \end{cases}.$$

Se tivermos $\beta > n/2k - 1$, então para cada $I_j, j \geqslant 2$ e $\varepsilon \to 0$, temos

$$I_j = C_{k+1}^j \left(\frac{n-2k}{k}\right)^{k+1-j} \beta^j \int_0^1 r^{\beta j + 1 - n/k}(1 - r^\beta)^{k+1-j} dr + o(1).$$

Pela mudança de variável $r^\beta = t$, temos

$$I_j = C_{k+1}^j \left(\frac{n-2k}{k}\right)^{k+1-j} \beta^{j-1} \int_0^1 t^{\beta j + \frac{2k-n}{\beta k - 1}}(1-t)^{k-j+2-1} dr + o(1)$$

e, consequentemente

$$I_j = C_{k+1}^j \left(\frac{n-2k}{k}\right)^{k+1-j} \beta^{j-1} \frac{\Gamma\left(j + \dfrac{2k-n}{k\beta}\right)\Gamma(k+2-j)}{\Gamma\left(k+2+\dfrac{2k-n}{k\beta}\right)}. \tag{3.33}$$

Agora, substituindo os resultados acima obtidos, temos

$$\begin{aligned} &\frac{C_n^k}{n}\|w_\varepsilon'\|_{k+1,n-k}^{k+1} - A\|w_\varepsilon\|_{\gamma(k)+1,n-1}^{k+1} = \\ &= \left[C_n^k \left(\frac{n-2k}{k}\right)^{k+1} \frac{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n}{2k}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{(k+1)n}{2k}\right)} - A\left(\frac{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n}{2k}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{(k+1)n}{2k}\right)}\right)^{1-\frac{2k}{n}} \right] \varepsilon^{1-\frac{2k}{n}} + \\ &+ \left[C_n^k \left(\frac{n-2k}{k}\right)^k J_2(k+1) - A\left(\frac{n-2k}{k}\right)\left(\frac{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n}{2k}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{(k+1)n}{2k}\right)}\right)^{-\frac{n}{2k}} J_2(\gamma(k)+1) \right] \varepsilon - \\ &- C_n^k(I_0 + I_1 + \cdots + I_{k+1}) + O(\varepsilon^{\beta - \frac{n-2k}{2k}}). \end{aligned} \tag{3.34}$$

Denotando o segundo termo do lado direito da igualdade acima por $\bar{I}$, do cálculo de $J_2(\gamma(k)+1)$ e $J_2(k+1)$, temos que se $\beta < n/k$ e $A = (C_n^k/n)S$ então

$$\begin{aligned}
\bar{I} &= C_n^k\left(\frac{n-2k}{k}\right)^k\left[\frac{(k+1)}{2}\varepsilon^{(\beta k-n)/2k}\frac{\Gamma\left(\frac{\beta+n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-\beta k}{2k}\right)}{\Gamma\left(\frac{(k+1)n}{2k}\right)}+O(1)I'\right]-\\
&- C_n^k\left(\frac{n-2k}{k}\right)^k\left[\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2k}\right)}{\Gamma\left(\frac{(k+1)n}{2k}\right)}\right]^{\frac{2k}{n}}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2k}\right)}{\Gamma\left(\frac{(k+1)n}{2k}\right)}\right]^{-\frac{n}{2k}}\times\\
&\times\left[-\frac{(\gamma(k)+1)}{2}\varepsilon^{(\beta k-n)/2k}\frac{\Gamma\left(\frac{\beta+n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-\beta k}{2k}\right)}{\Gamma\left(\frac{(k+1)n}{2k}\right)}+O(1)I'\right]+O(1)I'\\
&= O(\varepsilon)I'.
\end{aligned}$$

Assim, prosseguindo como anteriormente, temos

$$\bar{I} = \begin{cases} O(\varepsilon)I', \ \textit{se}\ \beta < n/k\ \textit{e}\ A = (C_n^k/n)S \\ O(\varepsilon), \ \textit{se}\ \beta \geqslant n/k\ \textit{e}\ A = (C_n^k/n)S \\ O(\varepsilon\ln|\varepsilon|), \ \textit{se}\ \beta < n/k\ \textit{e}\ A \neq (C_n^k/n)S \\ O(\varepsilon^{1+\frac{k\beta-n}{2k}}), \ \textit{se}\ \beta \geqslant n/k\ \textit{e}\ A \neq (C_n^k/n)S \end{cases}.$$

Observe que $\|w_\varepsilon\|_{k+1,n-1}^{k+1} = C + o(1)$ por (3.32), e concluímos que se $A > (C_n^k/n)S$, $J(w_\varepsilon, \gamma(k), A) \to -\infty$ quando $\varepsilon \to 0$, o que implica $A* \leqslant (C_n^k/n)S$. Assim provamos (i) em ambos os casos.

Agora, em geral, temos $\lambda* \geqslant 0$, se $2k(k+1) \leqslant n$, por (3.29). Por (3.30) temos $\lambda* \leqslant 0$. Então, $\lambda* = 0$.

Se $2k(k+1) > n$, seja $w = y_1 z$ a autofunção correspondente ao primeiro autovalor do operador k-Hessiano, com as propriedades $y_1 > 0$ e $y_1' < 0$. Então, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
\lambda* \leqslant J(y_1, \gamma(k), A*) &= \frac{\frac{C_n^k}{n}\|y'\|_{k+1,n-k}^{k+1} - \frac{C_n^k}{n}S\|y_1\|_{\gamma(k)+1,n-1}^{k+1}}{\|y_1\|_{k+1,n-1}^{k+1}} \\
&\leqslant \lambda_1 - C_n^k S n^{(2k-n)/n}
\end{aligned}$$

e então segue (iii). □

3.3 Resultados de não-existência

Nesta seção vamos estudar a não-existência da solução de (3.1). Primeiro vamos estabelecer a não-existência para $\lambda \leqslant 0$. Depois, teremos um resultado similar para $\lambda \geqslant \lambda_1$. E por último, vamos discutir dimensões críticas através de uma identidade do tipo Pokhozaev.

Proposição 11. *A equação* (3.1) *não tem solução para* $\lambda \leqslant 0$.

Demonstração. Seja

$$f(y) = (-y)^{\gamma(k)} + \lambda(-y)^k \text{ para } y \in (-\infty, 0],$$

e

$$F(y) = \int_0^y f(\tau)d\tau = -\frac{(-y)^{\gamma(k)+1}}{\gamma(k)+1} - \frac{\lambda(-y)^{k+1}}{k+1}.$$

Então para $\lambda \leqslant 0$ temos

$$nF(y) - \frac{n-2k}{k+1}f(y) = -\frac{2k}{k+1}\lambda(-y)^{k+1} \geqslant 0.$$

Logo, pela Teorema 7 do Capítulo 2, segue o resultado. □

Ainda sobre não-existência temos o resultado.

Proposição 12. *Se* (3.2) *admite uma solução para algum* $\lambda > 0$*, então* $\lambda < \lambda_1$.

Demonstração. Suponha que y_λ seja uma solução de (3.2) correspondente à λ, a saber

$$\begin{cases} \dfrac{C_n^k}{n}(r^{n-k}(y_\lambda')^k)' = r^{n-1}[(-y)^{\gamma(k)} + \lambda(-y_\lambda)^k], \quad y_\lambda < 0 \text{ em } (0,1), \\ y_\lambda'(0) = y_\lambda(1) = 0. \end{cases} \tag{3.35}$$

Denote

$$\mathcal{D} = \left\{ w \in W^{k+1} : w' \geqslant 0, w \leqslant 0 \right\}.$$

Veja que $\mathcal{D}$ é um cone convexo fechado. Com efeito, se $w \in W^{k+1}$ e $t \geqslant 0$, temos $tw' \geqslant 0$ e $tw \leqslant 0$, i.e, $tw \in \mathcal{D}$ e então $\mathcal{D}$ é um cone. Mais ainda, se $w_1, w_2 \in \mathcal{D}$, então para $\alpha \in [o, 1]$, temos $\alpha w_1' + (1-\alpha)w_2' \geqslant 0$ e $\alpha w_1 + (1-\alpha)w_2 \leqslant 0$ e segue que $\mathcal{D}$ é convexo. Da continuidade de w e w' segue que dada qualquer sequência convergente $\{w_i\}$ em $\mathcal{D}$ tem seu limite em $\mathcal{D}$. Logo $\mathcal{D}$ é fechado.

Agora, para $1 \geqslant j \geqslant k-1$, consideremos o seguinte problema minimizante:

$$\mu_j = \mu_j(\lambda) = \inf \left\{ \frac{\frac{C_n^k}{n}\int_0^1 r^{n-k}(y_\lambda')^{k-j}(\psi')^{j+1}}{\int_0^1 r^{n-1}(y_\lambda)^{k-j}(\psi)^{j+1}} : \psi \in \mathcal{D} \setminus \{0\} \right\}. \tag{3.36}$$

Como o funcional $y \mapsto \int_0^1 r^{n-k}(y_\lambda')^{k-j}(\psi')^{j+1}$ tem semicontinuidade superior fraca, visto que se $\psi_n \rightharpoonup \psi$ temos pelo Lema de Fatou que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \liminf \int_0^1 r^{n-k}(y_\lambda')^{k-j}(\psi_n')^{j+1} &\geqslant \int_0^1 r^{n-k}(y_\lambda')^{k-j} \liminf(\psi_n')^{j+1} \\
&\geqslant \int_0^1 r^{n-k}(y_\lambda')^{k-j}(\psi')^{j+1}
\end{aligned}$$

daí o problema (3.36) é atingido por $\psi_j \in \mathcal{D}$ com $\int_0^1 r^{n-1}(y_\lambda)^{k-j}(\psi)^{j+1} = 1$. Agora ψ_n soluciona

$$\frac{C_n^k}{n}(r^{n-k}(y_\lambda')^{k-j}(\psi_j')^j)' = \mu_j r^{n-1}(-y_\lambda)^{k-j}(-\psi_j)^j. \tag{3.37}$$

Multiplicando (3.37) por $(-y_\lambda)$ e integrando de 0 a 1, temos

$$\int_0^1 \frac{C_n^k}{n}(r^{n-k}(y_\lambda')^{k-j}(\psi_j')^j)'(-y_\lambda) = \mu_j \int_0^1 r^{n-1}(-y_\lambda)^{k-j}(-\psi_j)^j(-y_\lambda).$$

Integrando por partes o lado esquerdo da igualdade acima, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{C_n^k}{n}(r^{n-k}(y_\lambda')^{k-j}(\psi_j')^j)'(-y_\lambda) &= -\int_0^1 \frac{C_n^k}{n}(r^{n-k}(y_\lambda')^{k-j}(\psi_j')^j)(-y_\lambda') \\
&= \frac{C_n^k}{n}\int_0^1 r^{n-k}(y_\lambda')^{k-j+1}(\psi_j')^j.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\mu_j = \frac{\frac{C_n^k}{n}\int_0^1 r^{n-k}(y_\lambda')^{k-j+1}(\psi_j')^j}{\int_0^1 r^{n-1}(-y_\lambda)^{k-j+1}(-\psi_j)^j}. \tag{3.38}$$

Pela definição de μ_{j-1}, temos que $\mu_j \geqslant \mu_{j-1}$. Então

$$\mu_{k-1} \geqslant \mu_{j-2} \geqslant \cdots \geqslant \mu_2 \geqslant \mu_1. \tag{3.39}$$

Por outro lado, pela definição de λ_1, sabemos que existe uma $\phi \in \mathcal{D}$ tal que

$$\frac{C_n^k}{n}(r^{n-k}(\phi')^k)' = \lambda_1 r^{n-1}(-\phi)^k. \tag{3.40}$$

Multiplicando (3.40) por $(-y_\lambda)$ e integrando de 0 a 1, temos

$$\lambda_1 = \frac{\frac{C_n^k}{n}\int_0^1 r^{n-k}(\phi')^k y_\lambda'}{\int_0^1 r^{n-1}(-\phi)^k(-y_\lambda)}. \tag{3.41}$$

Vamos mostrar que $\lambda < \mu_1$. Então, por (3.39) e (3.41) concluímos que $\lambda < \lambda_1$. Agora, multiplicando (3.35) por $(-\psi_1)$ e integrando em [0,1], temos

$$\frac{C_n^k}{n}\int_0^1 (r^{n-k}(y_\lambda')^k)'(-\psi_1) = \int_0^1 r^{n-1}[(-y_\lambda)^{\gamma(k)} + \lambda(-y_\lambda)^k](-\psi_1),$$

e integrando por partes o primeiro lado da igualdade acima, obtemos

$$\frac{C_n^k}{n}\int_0^1 r^{n-k}(y_\lambda')^k\psi_1' = \int_0^1 r^{n-1}(-y_\lambda)^{\gamma(k)}(-\psi_1) + \lambda\int_0^1 r^{n-1}(-y_\lambda)^k(-\psi_1). \tag{3.42}$$

Similarmente, multiplicando (3.37), para $j = 1$, por $(-y_\lambda)$ e integrando em [0,1], temos

$$\frac{C_n^k}{n}\int_0^1 r^{n-k}(y_\lambda')^k\psi_1' = \mu_1\int_0^1 r^{n-1}(-y_\lambda)^k(-\psi_1). \tag{3.43}$$

De (3.42) e (3.43), deduzimos que

$$\int_0^1 r^{n-1}(-y_\lambda)^{\gamma(k)}(-\psi_1) = (\mu_1 - \lambda)\int_0^1 r^{n-1}(-y_\lambda)^k(-\psi_1),$$

logo,

$$\lambda < \mu_1. \tag{3.44}$$

□

Antes de voltarmos ao caso $2k < n < 2k(k+1)$, deduziremos uma uma identidade do tipo Pohozaev. Multiplicando (3.2) por $-\sigma y$, onde $\sigma \in C^1[0,1]$ e integrando em [0,1], temos

$$\frac{C_n^k}{n}\left[\int_0^1 r^{n-k}(y')^{k+1}\sigma + \int_0^1 r^{n-k}y(y')^{k+1}\sigma'\right] = \int_0^1 r^{n-1}\sigma[(-y)^{\gamma(k)+1} + \lambda(-y)^{k+1}]$$

e então,

$$\int_0^1 r^{n-k}(y')^{k+1}\sigma + \int_0^1 r^{n-k}y(y')^{k+1}\sigma' = \frac{n}{C_n^k}\int_0^1 r^{n-1}\sigma[(-y)^{\gamma(k)+1} + \lambda(-y)^{k+1}]. \tag{3.45}$$

Agora, multiplicando (3.2) por $\xi y'$, onde $\xi \in C^1[0,1]$, e integrando em [0,1] temos

$$\begin{aligned}\int_0^1 (r^{n-k}(y')^k)'\xi y' &= r^{n-k}(y')^k\xi y'\Big|_0^1 - \int_0^1 r^{n-k}(y')^k(\xi y')' \\ &= \xi(1)y'(1)^{k+1} - \int_0^1 r^{n-k}(y')^k(\xi y'' + \xi' y') \\ &= \xi(1)y'(1)^{k+1} - \left[\int_0^1 r^{n-k}(y')^{k+1}\xi' + \int_0^1 r^{n-k}(y')^k y''\xi\right] \\ &= \frac{k}{k+1}y'(1)^{k+1}\xi(1) - \int_0^1 r^{n-k}(y')^{k+1}\xi' \\ &\quad + \frac{1}{k+1}\int_0^1 (r^{n-k}\xi)'(y')^{k+1}.\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}\int_0^1 r^{n-1}[(-y)^{\gamma(k)}+\lambda(-y)^k]\xi y' &= \int_0^1 (r^{n-1}\xi)'\left[\frac{(-y)^{\gamma(k)+1}}{\gamma(k)+1}+\lambda\frac{(-y)^{k+1}}{k+1}\right]\\ &= \int_0^1 [(n-1)r^{n-2}\xi + r^{n-1}\xi']\left[\frac{(-y)^{\gamma(k)+1}}{\gamma(k)+1}+\lambda\frac{(-y)^{k+1}}{k+1}\right].\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}&\frac{k}{k+1}y'(1)^{k+1}\xi(1)-\int_0^1 r^{n-k}(y')^{k+1}\xi' + \frac{1}{k+1}\int_0^1 (r^{n-k}\xi)'(y')^{k+1}\\ &= \frac{n}{C_n^k}\int_0^1 [(n-1)r^{n-2}\xi + r^{n-1}\xi']\left[\frac{(-y)^{\gamma(k)+1}}{\gamma(k)+1}+\lambda\frac{(-y)^{k+1}}{k+1}\right].\end{aligned}\tag{3.46}$$

Combinando (3.45) com (3.46) temos do lado esquerdo da igualdade,

$$\begin{aligned}&\frac{k}{k+1}y'(1)^{k+1}\xi(1)-\int_0^1 r^{n-k}(y')^{k+1}\xi' + \frac{n-k}{k+1}\int_0^1 r^{n-k}\frac{\xi}{r}(y')^{k+1}+\\ &\quad+\frac{1}{k+1}\int_0^1 (r^{n-k}\xi)'(y')^{k+1}+\int_0^1 r^{n-k}(y')^{k+1}\sigma+\int_0^1 r^{n-k}y(y')^{k+1}\sigma'\\ &= \frac{k}{k+1}y'(1)^{k+1}\xi(1)+\int_0^1 r^{n-k}(y')^{k+1}\left[\sigma+\frac{n-k}{k+1}\frac{\xi}{r}-\frac{k}{k+1}\xi'\right]+\int_0^1 r^{n-k}y(y')^{k+1}\sigma'.\end{aligned}$$

No lado direito da igualdade obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{n}{C_n^k}\int_0^1 [(n-1)r^{n-2}\xi + r^{n-1}\xi']\left[\frac{(-y)^{\gamma(k)+1}}{\gamma(k)+1}+\lambda\frac{(-y)^{k+1}}{k+1}\right]\\ &+\frac{n}{C_n^k}\int_0^1 r^{n-1}\sigma[(-y)^{\gamma(k)+1}+\lambda(-y)^{k+1}]\\ &=\frac{n}{C_n^k}\int_0^1 r^{n-1}(-y)^{\gamma(k)+1}\left[\sigma+\frac{n-1}{\gamma(k)+1}\frac{\xi}{r}+\frac{\xi'}{\gamma(k)+1}\right]+\\ &+\frac{n}{C_n^k}\lambda\int_0^1 r^{n-1}(-y)^{k+1}\left[\sigma+\frac{n-1}{k+1}\frac{\xi}{r}+\frac{\xi'}{k+1}\right].\end{aligned}$$

Então, segue que

$$\begin{aligned}&\frac{k}{k+1}y'(1)^{k+1}\xi(1)-\int_0^1 r^{n-k}(-y)(y')^{k+1}\sigma'+\int_0^1 r^{n-k}(y')^{k+1}\left[\sigma+\frac{n-k}{k+1}\frac{\xi}{r}-\frac{k}{k+1}\xi'\right]\\ &=\frac{n}{C_n^k}\int_0^1 r^{n-1}(-y)^{\gamma(k)+1}\left[\sigma+\frac{n-1}{\gamma(k)+1}\frac{\xi}{r}+\frac{\xi'}{\gamma(k)+1}\right]+\\ &+\frac{n}{C_n^k}\lambda\int_0^1 r^{n-1}(-y)^{k+1}\left[\sigma+\frac{n-1}{k+1}\frac{\xi}{r}+\frac{\xi'}{k+1}\right].\end{aligned}\tag{3.47}$$

Proposição 13. *Seja* $2k < n < 2k(k+1)$. *Então* (3.2) *não tem solução se*

$$\lambda \leqslant (2k(k+1)-n)\frac{C_n^k}{n}\left(\frac{n}{k+1}\right)^k.$$

Demonstração. Seja $y = y_\lambda$ uma solução de (3.2). Escolha

$$\sigma = -\frac{n-2k}{k+1} - \frac{2k(k+1)-n}{k+1} r^{2k} \quad \text{e} \quad \xi = r - r^{2k+1} \tag{3.48}$$

em (3.37). Usando o fato de que

$$\sigma' = -\frac{2k[2k(k+1)-n]}{k+1} r^{2k};$$

$$\sigma + \frac{n-1}{k+1}\frac{\xi}{r} + \frac{\xi'}{k+1} = \frac{2k}{k+1} - \frac{2k(k+2)}{k+1} r^{2k};$$

$$\sigma + \frac{n-1}{\gamma(k)+1}\frac{\xi}{r} + \frac{\xi'}{\gamma(k)+1} = -\frac{2k[n(k+1)-2k]}{n(k+1)} r^{2k};$$

$$\sigma - \frac{k}{k+1}\xi' + \frac{n-k}{k+1}\frac{\xi}{r} = 0$$

e o fato de $\xi(1) = 0$, o lado esquedo de (3.47) vem

$$\begin{aligned}
&\frac{k}{k+1} y'(1)^{k+1}\xi(1) - \int_0^1 r^{n-k}(-y)(y')^{k+1}\sigma' + \int_0^1 r^{n-k}(y')^{k+1}\left[\sigma + \frac{n-k}{k+1}\frac{\xi}{r} - \frac{k}{k+1}\xi'\right] \\
&\quad = \int_0^1 r^{n-k}(-y)(y')^k \frac{2k[2k(k+1)-n]}{k+1} r^{2k} = \frac{2k[2k(k+1)-n]}{k+1}\int_0^1 r^{n-k-1}(-y)(y')^k
\end{aligned}$$

e no lado direito

$$\begin{aligned}
&\frac{n}{C_n^k}\int_0^1 r^{n-1}(-y)^{\gamma(k)+1}\left[\sigma + \frac{n-1}{\gamma(k)+1}\frac{\xi}{r} + \frac{\xi'}{\gamma(k)+1}\right] \\
&\quad + \frac{n}{C_n^k}\lambda\int_0^1 r^{n-1}(-y)^{k+1}\left[\sigma + \frac{n-1}{k+1}\frac{\xi}{r} + \frac{\xi'}{k+1}\right] \\
&\quad = -\frac{n}{C_n^k}\frac{2k[n(k+1)-2k]}{n(k+1)}\int_0^1 r^{n+2k-1}(-y)^{\gamma(k)+1} \\
&\quad + \frac{n}{C_n^k}\lambda\int_0^1\left[\frac{2k}{k+1} - \frac{2k(k+2)}{k+1} r^{2k}\right] r^{n-1}(-y)^{k+1}.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\frac{2k[2k(k+1)-n]}{k+1}\int_0^1 r^{n-k-1}(-y)(y')^k &= -\frac{n}{C_n^k}\frac{2k[n(k+1)-2k]}{n(k+1)}\int_0^1 r^{n+2k-1}(-y)^{\gamma(k)+1} \\
&\quad + \frac{n}{C_n^k}\lambda\int_0^1\left[\frac{2k}{k+1} - \frac{2k(k+2)}{k+1} r^{2k}\right] r^{n-1}(-y)^{k+1}.
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{2k}{k+1}\frac{n}{C_n^k}\lambda\int_0^1 r^{n-1}(-y)^{k+1} &= \frac{2k[2k(k+1)-n]}{k+1}\int_0^1 r^{n-k-1}(-y)(y')^k\\ &\quad+\frac{n}{C_n^k}\frac{2k[n(k+1)-2k]}{n(k+1)}\int_0^1 r^{n+2k-1}(-y)^{\gamma(k)+1}+\\ &\quad+\frac{n}{C_n^k}\frac{2k(k+2)}{k+1}\lambda\int_0^1 r^{n+2k-1}(-y)^{k+1}\\ &\geqslant \frac{2k[2k(k+1)-n]}{k+1}\int_0^1 r^{n-k-1}(-y)(y')^k.\end{aligned}$$

Note que

$$\left|\left(y^{(k+1/k)}\right)'\right|^k=\left(\frac{k+1}{k}\right)^k(-y)(y')^k.$$

Logo,

$$\frac{2k}{k+1}\frac{n}{C_n^k}\lambda\int_0^1 r^{n-1}(-y)^{k+1}\geqslant\frac{2k[2k(k+1)-n]}{k+1}\int_0^1 r^{n-k-1}\left|\left(y^{(k+1/k)}\right)'\right|^k. \tag{3.50}$$

Por outro lado, a desigualdade de Hardy nos diz que, se tivermos $p>1, r>1$ e $F(x)$ definida por $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, então

$$\int_0^\infty x^{-r}F^p dx<\left(\frac{p}{|r-1|}\right)^p\int_0^\infty x^{-r}(xf)^p dx.$$

Daí, tomando $f=\left(y^{(k+1/k)}\right)'$, $p=k$ e $-r=n-1$, temos

$$\left(\frac{k}{n}\right)^k\int_0^1 r^{n-1}\left|r\left(y^{(k+1/k)}\right)'\right|\geqslant\int_0^1 r^{n-1}|y|^{k+1}$$

para toda $y\in W^{k+1}$. Assim, (3.50) se torna

$$\begin{aligned}\frac{n}{C_n^k}\lambda\int_0^1 r^{n-1}(-y)^{k+1}&\geqslant[2k(k+1)-n]\left(\frac{k}{k+1}\right)^k\left(\frac{n}{k}\right)^k\int_0^1 r^{n-1}|y|^{k+1}\\ &\geqslant[2k(k+1)-n]\left(\frac{n}{k+1}\right)^k\int_0^1 r^{n-1}|y|^{k+1}\end{aligned}$$

o que implica

$$\lambda>\frac{C_n^k}{n}(2k(k+1)-n)\left(\frac{n}{k+1}\right)^k.$$

□

3.4 Comportamento Assintótico de Soluções para dimenções não-críticas

Nesta seção vamos supor $2k(k+1)<n$, e discutir o comportamento assintótico de soluções de (3.2) quando $\lambda\to 0$. Para isto, introduziremos alguns resultados preliminares. Para

qualquer solução negativa y_λ de (3.2) correspondendo à $\lambda \in (0, \lambda_1)$, tem-se

$$\max_{r\in[0.1]}(-y_\lambda(r)) = -y_\lambda(0)$$

e $y'_\lambda > 0$ em $(0, 1]$.

Denote

$$F(r, y, y') = \frac{C_n^k}{n(k+1)} r^{n-k}(y')^{k+1} - \left(\frac{r^{n-1}}{\gamma(k)+1}(-y)^{\gamma(k)+1} + \lambda\frac{r^{n-1}}{k+1}(-y)^{k+1}\right).$$

Se y é uma solução negativa de (3.2), então F satisfaz

$$\frac{d}{dr}F_{y'} = \frac{C_n^k}{n}\left(r^{n-k}(y')^k\right)' \qquad \text{e} \qquad F_y = r^{n-1}\left[(-y)^{\gamma(k)} + \lambda(-y)^k\right]$$

e então,

$$\frac{d}{dr}F_{y'} = F_y. \tag{3.51}$$

Agora, de (3.51), temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}(rF - (ay + ry')Fy') &= \frac{d}{dr}(rF) + \frac{d}{dr}(ayF_{y'}) - \frac{d}{dr}(ry'F_{y'}) \\ &= F + rF_r + ry'F_y + ry'F_y + ry''F_{y'} - ay'F_{y'} - ayF_y - y'F_{y'} \\ &\quad - ry''F_{y'} - ry'F_y \\ &= F + rF_r - ayF_y - (a+1)F_{y'}.\end{aligned}$$

Com isso, temos a seguinte identidade do tipo Pucci-Serrin na forma radial:

$$\frac{d}{dr}(rF - (ay + ry')Fy') = F + rF_r - ayF_y - (a+1)F_{y'} \tag{3.52}$$

onde a é uma constante.

Começaremos com uma importante propriedade da solução y_λ de (3.2), que nos dá um limite superior para $|y_\lambda|$.

Lema 3. *Seja* y_λ *uma solução negativa de* (3.2)*, para* $\lambda \in (0, \lambda_1)$*. Então*

$$-y_\lambda(r) \leqslant (-y_\lambda(0))^{-\frac{1}{k}}[(-y_\lambda(0))^{-\frac{2(k+1)}{n-2k}} + C(\lambda)r^2]^{-\frac{n-2k}{2k}} \tag{3.53}$$

onde

$$C(\lambda) = \frac{k}{n-2k}\left[\frac{1 + \lambda(-y_\lambda(0))^{k-\gamma(k)}}{C_n^k}\right]^{\frac{1}{k}}.$$

Demonstração. Primeiramente, afirmamos que

$$\left(r^{-1}(-y_\lambda)^{-\frac{n}{n-2k}}y_\lambda'\right)' \geqslant 0 \qquad \text{em } (0,1). \tag{3.54}$$

De fato, temos que

$$\left(r^{-1}(-y_\lambda)^{-\frac{n}{n-2k}}y_\lambda'\right)' = r^{-1}(-y_\lambda)^{-\frac{2(n-k)}{n-2k}}\left[r^{-1}y_\lambda y_\lambda' + \frac{n}{n-2k}r^{-1}(y_\lambda')^2 - y_\lambda y_\lambda''\right]. \tag{3.55}$$

Vamos analisar o fator entre colchetes do lado direito da igualdade (3.55), o qual está relacionado com (3.52). Tomemos $a = \dfrac{n-2k}{k+1}$ em (3.52), e calculemos ambos os lados da igualdade (3.52). Para isto, note que

$$\begin{aligned}
F &= \frac{C_n^k}{n}\frac{r^{n-k}}{k+1}(y_\lambda')^{k+1} - \left(\frac{r^{n-1}}{\gamma(k)+1}(-y_\lambda)^{\gamma(k)+1} + \lambda\frac{r^{n-1}}{k+1}(-y_\lambda)^{k+1}\right);\\
rF_r &= \frac{C_n^k}{n}\frac{n-k}{k+1}r^{n-k}(y_\lambda')^{k+1} - \left(\frac{n-1}{\gamma(k)+1}r^{n-1}(-y_\lambda)^{\gamma(k)+1} + \lambda\frac{n-1}{k+1}r^{n-1}(-y_\lambda)^{k+1}\right);\\
-ayF_y &= ar^{n-1}(-y_\lambda)^{\gamma(k)} + a\lambda r^{n-1}(-y_\lambda)^{k};\\
-(a+1)y'F_{y'} &= -(a+1)\frac{C_n^k}{n}r^{n-k}(y_\lambda')^{k+1}.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
F + rF_r - ay_\lambda F_{y_\lambda} - (a+1)F_{y_\lambda'} = {}& \frac{C_n^k}{n}r^{n-k}(y_\lambda')^{k+1}\left(\frac{1}{k+1} + \frac{n-k}{k+1} - (a+1)\right)\\
&+ r^{n-1}(-y_\lambda)^{\gamma(k)+1}\left(-\frac{1}{\gamma(k)+1} - \frac{n-1}{\gamma(k)+1} + a\right)\\
&+ r^{n-1}(-y_\lambda)^{k+1}\left(-\frac{\lambda}{k+1} - \lambda\frac{n-1}{k+1} + \lambda a\right).
\end{aligned}$$

Como $a = \dfrac{n-2k}{k+1} = \dfrac{n}{\gamma(k)+1}$, temos

$$\begin{aligned}
F + rF_r - ayF_y - (a+1)F_{y'} &= \lambda\left[-\frac{1}{k+1} - \frac{n-1}{k+1} + \frac{n-2k}{k+1}\right]r^{n-1}(-y_\lambda)^{k+1}\\
&= -\frac{2k}{k+1}\lambda r^{n-1}(-y_\lambda)^{k+1}.
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Do mesmo modo,

$$\begin{aligned}
rF - (ay + ry')F_{y'} &= rF - ayF_{y'} - ry'F_{y'}\\
&= \frac{C_n^k}{n}\frac{r^{n-k+1}}{k+1}(y_\lambda')^{k+1} - \frac{r^n}{\gamma(k)+1}(-y_\lambda)^{\gamma(k)+1} - \lambda\frac{r^n}{k+1}(-y_\lambda)^{k+1}\\
&\quad - a\frac{C_n^k}{n}r^{n-k}(y_\lambda')^k y_\lambda - \frac{C_n^k}{n}r^{n-k+1}(y_\lambda')^{k+1}.
\end{aligned}$$

Uma vez que y_λ é solução de (3.2) temos que

$$
\begin{aligned}
rF-(ay+ry')F_{y'} &= \frac{C_n^k}{n}\frac{r^{n-k+1}}{k+1}(y_\lambda')^{k+1} - \frac{r^n}{\gamma(k)+1}\left(\frac{C_n^k}{n}(r^{n-k}(y_\lambda')^k)' - \lambda r^{n-1}(y_\lambda)^k\right)\\
&\quad - \lambda\frac{r^n}{k+1}(-y_\lambda)^{k+1} - a\frac{C_n^k}{n}r^{n-k}(y_\lambda')^k y_\lambda - \frac{C_n^k}{n}r^{n-k+1}(y_\lambda')^{k+1}\\
&= \lambda r^n(-y_\lambda)^{k+1}\left(-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{\gamma(k)+1}\right)+\\
&\quad + \frac{C_n^k}{n}\left[\frac{r^{n-k+1}}{k+1}(y_\lambda')^{k+1} - \frac{1}{\gamma(k)+1}(r^{n-k}(y_\lambda')^k)'r(-y)\right.\\
&\quad \left. -ar^{n-k}(y_\lambda')^k y_\lambda - r^{n-k+1}(y_\lambda')^{k+1}\right].
\end{aligned}
$$

Portanto, segue-se

$$
\begin{aligned}
rF-(ay+ry')Fy' &= -\frac{2k}{n(k+1)}\lambda r^n(-y_\lambda)^{k+1}+\\
&\quad + \frac{C_n^k}{n}\frac{k(n-2k)}{n(k+1)}\left[-r^{-1}y_\lambda' y_\lambda + \frac{n}{n-2k}(y_\lambda')^2 + y_\lambda'' y_\lambda'\right]. \qquad (3.57)
\end{aligned}
$$

Por (3.57), o fator nos colchetes de (3.55) tem sinal contrário ao de ϕ definido por

$$\phi(r) = rF-(ay+ry')F_{y'} + \lambda r^n\frac{2k}{n(k+1)}(-y_\lambda)^{k+1}.$$

Mas, $\phi(0)=0$ e por (3.56) e (3.55) temos

$$
\begin{aligned}
\frac{d\phi}{dr} &= -\frac{2k}{k+1}\lambda r^{n-1}(-y_\lambda)^{k+1} + \frac{2k}{n(k+1)}(\lambda r^n(-y_\lambda)^{k+1})'\\
&= -\frac{2k}{k+1}\lambda r^{n-1}(-y_\lambda)^{k+1} + \frac{2k}{K+1}\lambda r^{n-1}(-y_\lambda)^{k+1} - \lambda\frac{2k}{n}r^n(-y_\lambda)^k y_\lambda'\\
&= -\lambda\frac{2k}{n}r^n(-y_\lambda)^k y_\lambda' \leqslant 0
\end{aligned}
$$

o que conclui (3.54).

Integrando (3.2) em $[0,r]$ temos

$$\left(\frac{y_\lambda'}{r}\right)^k = \frac{n}{C_n^k}\frac{1}{r^n}\int_0^r t^{n-1}[(-y_\lambda)^{\gamma(k)} + \lambda(-y_\lambda)^k]dt.$$

Daí,

$$\lim_{r\to 0}\left(\frac{y_\lambda'}{r}\right)^k = \frac{n}{C_n^k}\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^n}\int_0^r t^{n-1}[(-y_\lambda)^{\gamma(k)} + \lambda(-y_\lambda)^k]dt.$$

Aplicando a regra L'Hospital no lado direito da igualdade acima, temos

$$
\begin{aligned}
\lim_{r\to 0}\left(\frac{y_\lambda'}{r}\right)^k &= \frac{n}{C_n^k}\lim_{r\to 0}\frac{r^{n-1}[(-y_\lambda(r))^{\gamma(k)} + \lambda(-y_\lambda(r))^k]}{nr^{n-1}}\\
&= \frac{n}{C_n^k}\lim_{r\to 0}\frac{[(-y_\lambda(r))^{\gamma(k)} + \lambda(-y_\lambda(r))^{k+1}]}{n}\\
&= \frac{1}{C_n^k}[(-y_\lambda(0))^{\gamma(k)} + \lambda(-y_\lambda(0))^k],
\end{aligned}
$$

isto é,

$$\lim_{r\to 0}\frac{y'_\lambda}{r}=\left[\frac{1}{C_n^k}((-y_\lambda(0))^{\gamma(k)}+\lambda(-y_\lambda(0))^k)\right]^{\frac{1}{k}}.$$

□

Lema 4. *Para uma solução negativa* y_λ *de* (3.2)*, temos*

$$-y_\lambda(0)\to+\infty \qquad \textit{quando} \qquad \lambda\to 0^+.$$

Demonstração. Argumentaremos por contradição. Suponha que $\{y_\lambda(r)\}$ seja limitada em $L^\infty[0,1]$, para $\lambda\in(0,\lambda_1)$. Então, integrando (3.2) em $(0,1)$, temos

$$\frac{C_n^k}{n}r^{n-k}(y'_\lambda)^k=\int_0^r t^{n-1}[(-y_\lambda)^{\gamma(k)}+\lambda(-y_\lambda)^k]dt. \tag{3.58}$$

Assim,

$$y'_\lambda=\left[\frac{n}{C_n^k}r^{k-n}\int_0^r t^{n-1}((-y_\lambda)^{\gamma(k)}+\lambda(-y_\lambda)^k)dt\right]^{1/k}$$

e então,

$$\begin{aligned}|y'_\lambda| &\leqslant Cr^{1-n/k}\left[\int_0^r |t|^{n-1}dt\right]^{1/k}\\ &\leqslant Cr^{1-n/k}r^{n/k}\\ &\leqslant Cr,\end{aligned}$$

onde C é uma constante que independe de λ.

Assumiremos então que y_λ converge uniformemente para alguma função $\overline{y}(t)$ em $[0,1]$. Novamente por (3.58), concluímos também que $r^{n-k}(y'_\lambda)^k$ converge uniformemente. Assim $\overline{y}(t)$ satisfaz a seguinte equação

$$\begin{cases}\dfrac{C_n^k}{n}[r^{n-k}(y'_\lambda)^k]'=r^{n-1}(-\overline{y})^{\gamma(k)} & \text{em } (0,1)\\ \overline{y}'(0)=\overline{y}(1)=0.\end{cases}$$

Por outro lado, segue da Proposição 6 e de (3.2) que

$$\begin{aligned}\int_0^1 r^{n-1}((-y_\lambda)^{\gamma(k)+1}+\lambda(-y_\lambda)^{k+1}) &=\int_0^1\frac{C_n^k}{n}[r^{n-k}(y'_\lambda)^k]'(-y_\lambda)\\ &=C\int_0^1[r^{n-k}(y'_\lambda)^{k+1}]\\ &\geqslant\left[\int_0^1 r^{n-1}(-y_\lambda)^{\gamma(k)+1}\right]^{\frac{k+1}{\gamma(k)+1}}.\end{aligned}$$

Isso mostra que $\overline{y}\neq 0$. Isto é, existe solução de (3.2) para $\lambda=0$, contrariando a não-existência obtido no Capítulo 2. □

Seja

$$y_\lambda^*(t) = \mu_\lambda^{\frac{n-2k}{k+1}} y_\lambda(\mu_\lambda t), \tag{3.59}$$

onde

$$\mu_\lambda = (-y_\lambda(0))^{-\frac{k+1}{n-2k}}.$$

Então $y_\lambda^*(0) = -1, 0 \geqslant y_\lambda^*(t) \geqslant -1$ e, do Lema 3 temos que

$$\begin{aligned}
-y_\lambda^*(t) &= \mu_\lambda^{\frac{n-2k}{k+1}}(-y_\lambda(\mu_\lambda t)) \\
&\leqslant \mu_\lambda^{\frac{n-2k}{k+1}}(-y_\lambda(0))^{-\frac{1}{k}}[(-y_\lambda(0))^{-\frac{2(k+1)}{n-2k}} + C(\lambda)(\mu_\lambda t)^2]^{-\frac{n-2k}{2k}}.
\end{aligned}$$

Daí, colocando μ_λ^2 em evidencia dentro dos colchetes e usando o fato de que $\lambda \in (0, \lambda_1)$, temos que

$$y_\lambda^*(t) \leqslant (1 + Ct^2)^{(2k-n)/2k}, \tag{3.60}$$

onde C não depende de λ. Além disso, sendo y_λ uma solução de (3.2), segue

$$\begin{aligned}
\frac{C_n^k}{n}[t^{n-k}((y_\lambda^*)')^k]' &= \frac{C_n^k}{n}[t^{n-k}((\mu_\lambda^{(n-2k)/(k+1)} y_\lambda(\mu_\lambda t))')^k]' \\
&= \mu_\lambda^{k-n}\mu_\lambda^{(n-2k)/(k+1)+k}\frac{C_n^k}{n}[(\mu_\lambda t)^{n-k}(y_\lambda'(\mu_\lambda t))^k]'.
\end{aligned}$$

E, para $0 \leqslant t \leqslant \mu_\lambda^{-1}$, temos por (3.2),

$$\begin{aligned}
\frac{C_n^k}{n}[(\mu_\lambda t)^{n-k}(y_\lambda'(\mu_\lambda t))^k]' &= (\mu_\lambda t)^{n-1}[(-y_\lambda(\mu_\lambda t))^{\gamma(k)} + \lambda(-y_\lambda(\mu_\lambda t))^k] \\
&= \mu_\lambda^{n-1}t^{n-1}[\mu_\lambda^{-\frac{(n+2)k}{k+1}}(-y_\lambda^*)^{\gamma(k)} + \lambda\mu_\lambda^{-\frac{(n-2k)k}{k+1}}(-y_\lambda^*)^k] \\
&= \mu_\lambda^{n-1}\mu_\lambda^{-\frac{(n+2)k}{k+1}}t^{n-1}[(-y_\lambda^*)^{\gamma(k)} + \lambda\mu_\lambda^{2k}(-y_\lambda^*)^k].
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{C_n^k}{n}[t^{n-k}((y_\lambda^*)')^k]' &= \mu_\lambda^{k-n}\mu_\lambda^{n-1}\mu_\lambda^{\frac{n-2k}{k+1}+k}\mu_\lambda^{-\frac{(n+2)k}{k+1}}t^{n-1}[(-y_\lambda^*)^{\gamma(k)} + \lambda\mu_\lambda^{2k}(-y_\lambda^*)^k] \\
&= \mu^{-1}t^{n-1}[(-y_\lambda^*)^{\gamma(k)} + \lambda\mu_\lambda^{2k}(-y_\lambda^*)^k].
\end{aligned}$$

Assim, y_λ^* satisfaz

$$\begin{cases}
\dfrac{C_n^k}{n}[t^{n-k}((y_\lambda^*)')^k]' = \mu^{-1}t^{n-1}[(-y_\lambda^*)^{\gamma(k)} + \lambda\mu_\lambda^{2k}(-y_\lambda^*)^k] & \text{em } (0, \mu^{-1}) \\
(y_\lambda^*)'(0) = y_\lambda^*(\mu^{-1}) = 0.
\end{cases}$$

Uma vez que y_λ^* é limitada em L^∞, argumentando da mesma forma que no Lema 4, concluímos que y_λ^* converge uniformemente para $\overline{y}$ em $C[0,R]$ para algum $R>0$ e $\overline{y}$ satisfaz

$$\begin{cases} \dfrac{C_n^k}{n}[t^{n-k}((\overline{y})')^k]' = t^{n-1}(-y_\lambda^*)^{\gamma(k)} & \text{em } (0,+\infty) \\ \overline{y}'(0) = \overline{y}(0) = -1. \end{cases} \tag{3.61}$$

Pela Proposição 7, sabemos que

$$\overline{y} = -(1+\alpha t^2)^{-\frac{n-2k}{2k}}, \tag{3.62}$$

onde

$$\alpha = \frac{k}{n-2k}(C_n^k)^{-1/k}.$$

Por conveniência, tomemos

$$\rho_1 = \int_0^\infty t^{n-1}(-\overline{y})^{\gamma(k)}dt \qquad \text{e} \qquad \rho_2 = \int_0^\infty t^{n-1}(-\overline{y})^k dt.$$

Assim, fazendo a mudança de variável $s=\alpha t^2$ temos

$$\begin{aligned} \rho_1 = \int_0^\infty \frac{t^{n-1}}{(1+\alpha t^2)^{(n+2)k/2}}dt &= \frac{\alpha^{-n/2}}{2}\int_0^\infty \frac{s^{n/2-1}}{(1+s)^{(n+2)k/2}}dt \\ &= \frac{\alpha^{-n/2}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \\ &= \frac{\alpha^{-n/2}}{2}\frac{2}{n}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \\ &= \frac{\alpha^{-n/2}}{n} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \rho_2 = \int_0^\infty \frac{t^{n-1}}{(1+\alpha t^2)^{(n-2k)/2}}dt &= \frac{\alpha^{-n/2}}{2}\int_0^\infty \frac{s^{n/2-1}}{(1+s)^{(n-2k)/2}}dt \\ &= \frac{\alpha^{-n/2}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma(-k)}{\Gamma\left(\frac{n-2k}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{\alpha^{-n/2}}{n} \\ \rho_2 &= \frac{\alpha^{-n/2}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma(-k)}{\Gamma\left(\frac{n-2k}{2}\right)}. \end{aligned} \tag{3.63}$$

A seguir, vamos provar o seguinte resultado.

Teorema 9. *Pra qualquer* $\delta \leqslant 1$ *positivo,*

$$(-y(0))^{1/k} y_\lambda(r) \to -\left(\frac{k}{n-2k}\right)^{1-n/2k} (C_n^k)^{(n-2k)/(2k^2)} [r^{2-n/k} - 1]$$

em $C^1[\delta, 1]$ *quando* $\lambda \to 0$.

Demonstração. Primeiramente, vamos provar que $(-y_\lambda(0))^{1/k} y_\lambda(r)$ converge para alguma função ν. Então, vamos analisar que equação ν satisfaz. Note que

$$\begin{aligned}\frac{C_n^k}{n}[r^{n-k}((-y_\lambda(0))^{1/k} y_\lambda'(r))^k]' &= (-y_\lambda(0)) \frac{C_n^k}{n}[r^{n-k}(y_\lambda'(r))^k]' \\ &= \mu_\lambda^{-(n-2k)/(k+1)} r^{n-1}[(-y_\lambda)^{\gamma(k)} + \lambda(-y_\lambda)^k]. \quad (3.64)\end{aligned}$$

Para $\delta > 0$, integrando (3.64) em $[r, 1], r \in (\delta, 1)$, temos

$$\begin{aligned}&\frac{C_n^k}{n}|(-y_\lambda(0))^{1/k} y_\lambda'(r)|^k - \frac{C_n^k}{n} r^{n-k}|(-y_\lambda(0))^{1/k} y_\lambda'(1)|^k \\ &= \mu_\lambda^{-(n-2k)/(k+1)} \int_r^1 t^{n-1}[(-y_\lambda)^{\gamma(k)} + \lambda(-y_\lambda)^k] dt. \quad (3.65)\end{aligned}$$

Integrando (3.64) em $[0, 1]$, temos também

$$\frac{C_n^k}{n}|(-y_\lambda(0))^{1/k} y_\lambda'(r)|^k = \mu_\lambda^{-(n-2k)/(k+1)} \int_0^1 t^{n-1}[(-y_\lambda)^{\gamma(k)} + \lambda(-y_\lambda)^k] dt. \quad (3.66)$$

Por (3.60), temos que o lado esquerdo de (3.65) e (3.66) são limitadas por $\rho_1 + \rho_2$. Segue de (3.65) que $(-y_\lambda(0))^{1/k} y_\lambda'(r)$ é limitado em $C[\delta, 1]$ e então

$$(-y_\lambda(0))^{1/k} y_\lambda(r) \longrightarrow \nu \quad \text{em } C^1[\delta, 1], \quad (3.67)$$

para alguma $\nu \in C^1[\delta, 1]$.

Por outro lado, pelo Lema 3 e pela mudança de variável $t = \mu_\lambda s$, temos

$$\begin{aligned}\mu_\lambda^{-(n-2k)/(k+1)} \int_0^1 t^{n-1}[(-y_\lambda)^{\gamma(k)} dt &= \int_0^{\mu_\lambda^{-1}} \mu_\lambda^{-(n-2k)/(k+1)} \mu_\lambda^n s^{n-1}(-y_\lambda(\mu_\lambda s))^{\gamma(k)} ds \\ &= \int_0^{\mu_\lambda^{-1}} \mu_\lambda^{(n+2)k/(k+1)} s^{n-1}(-y_\lambda(\mu_\lambda s))^{\gamma(k)} ds \\ &= \int_0^{\mu_\lambda^{-1}} s^{n-1}(-\mu_\lambda^{(n-2k)/(k+1)} y_\lambda(\mu_\lambda s))^{\gamma(k)} ds \\ &= \int_0^{\mu_\lambda^{-1}} s^{n-1}(-y_\lambda^*)^{\gamma(k)} ds \longrightarrow \int_0^\infty t^{n-1}(-\overline{y})^{\gamma(k)} dt \\ &= \rho_1.\end{aligned}$$

Ainda

$$\begin{aligned}\mu_\lambda^{-(n-2k)/(k+1)}\int_0^1 t^{n-1}[(-y_\lambda)^k dt &= (-y_\lambda(0))\int_0^{\mu_\lambda^{-1}} \mu_\lambda^{-(n-2k)k/(k+1)} t^{n-1}(-y_\lambda^*)^k dt\\ &= (-y_\lambda(0))^{k+1-(k+1)n/(n-2k)}\int_0^{\mu_\lambda^{-1}}(-y_\lambda^*)^k dt\\ &\leqslant \rho_2(-y_\lambda(0))^{-2(2k/n-2k)} \longrightarrow 0\end{aligned}$$

quando $\lambda \to 0^+$. Portanto, em vista o Lema 3, temos

$$\mu_\lambda^{-(n-2k)/(k+1)}\int_0^1 r^{n-1}[(-y_\lambda)^{\gamma(k)} + \lambda(-y_\lambda)^k]\phi dr \longrightarrow \phi(0)\rho_1, \tag{3.68}$$

para qualquer $\phi \in C^\infty[0,1], \phi(1) = 0$. Combinando (3.64), (3.67) e (3.68), inferimos que ν satisfaz

$$\frac{C_n^k}{n}\int_0^1 r^{n-k}|\nu'|^{k-1}\nu'\phi' dr = \phi(0)\rho_1,$$

para toda $\phi \in C^\infty[0,1], \phi(1) = 0$. Tomando

$$\nu(r) = \frac{k}{2k-n}\left(\frac{n\rho_1}{C_n^k}\right)^{1/k}\left[r^{2-n/k} - 1\right] \tag{3.69}$$

fica provado o teorema. □

Teorema 10. *(i) Se* $n > 2k(k+1)$*, então*

$$\lambda[-y_\lambda(0)]^{-\frac{k+1}{k}\frac{n-2k(k+1)}{n-2k}} \to \frac{2}{n}(C_n^k)^{1-\frac{n}{2k}}\left(\frac{k}{n-2k}\right)^{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2k}(n-2k)\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-2k(k+1)}{2k}\right)}$$

quando $\lambda \to 0^+$.

(ii) Se $n = 2k(k+1)$*, então*

$$\lambda\log[-y_\lambda(0)] \to \frac{n-2k}{n(k+1)}\frac{2}{n}(C_n^k)^{1-\frac{n}{2k}}\left(\frac{k}{n-2k}\right)^{\frac{n}{2}}$$

quando $\lambda \to 0^+$.

Demonstração. (i) Tomando $\sigma = -1$ e $\xi = r$ em (3.47) temos

$$\lambda\int_0^1 r^{n-1}(-y_\lambda)^{k+1} dr = \frac{C_n^k}{2n}(y_\lambda'(1))^{k+1}. \tag{3.70}$$

Com efeito, temos $\xi(1) = 1, \xi' = 1$ e $\sigma' = 0$. Com isso, substituindo em (3.47) segue

$$\begin{aligned}\frac{k}{k+1}y_\lambda'(1)^{k+1} + \int_0^1 r^{n-k}(y_\lambda')^{k+1}\left[-1 + \frac{n-k}{k+1} - \frac{k}{k+1}\right] \\ = \frac{n}{C_n^k}\int_0^1 r^{n-1}(-y_\lambda)^{\gamma(k)+1}\left[-1 + \frac{n-1}{\gamma(k)+1} + \frac{1}{\gamma(k)+1}\right] \\ + \frac{n}{C_n^k}\lambda\int_0^1 r^{n-1}(-y_\lambda)^{k+1}\left[-1 + \frac{n-1}{k+1} + \frac{1}{k+1}\right].\end{aligned}$$

Uma vez que

$$\frac{C_n^k}{n}[r^{n-k}(y_\lambda')^k]'(-y_\lambda) = r^{n-1}[(-y_\lambda)^{\gamma(k)+1} + \lambda(-y_\lambda)^{k+1}],$$

integrando por partes o primeiro membro em $[0, 1]$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^1 r^{n-k}(y_\lambda')^{k+1}\left[-1 + \frac{n-2k}{k+1}\right] = \frac{n}{C_n^k}\int_0^1 r^{n-1}(-y_\lambda)^{\gamma(k)+1}\left[-1 + \frac{n-2k}{k+1}\right] \\ + \lambda\frac{n}{C_n^k}\int_0^1 r^{n-1}(-y_\lambda)^{k+1}\left[-1 + \frac{n-2k}{k+1}\right].\end{aligned}$$

Segue então que

$$\begin{aligned}\frac{k}{k+1}y_\lambda'(1)^{k+1} &= \frac{n}{C_n^k}\int_0^1 r^{n-1}(-y_\lambda)^{\gamma(k)+1}\left[-1 + \frac{n(n-2k)}{n(k+1)} + 1 - \frac{n-2k}{k+1}\right] \\ &\quad + \lambda\frac{n}{C_n^k}\int_0^1 r^{n-1}(-y_\lambda)^{k+1}\left[-1 + \frac{n}{k+1} + 1 - \frac{n}{k+1} + \frac{2k}{k+1}\right] \\ &= \frac{2k}{k+1}\frac{n}{C_n^k}\lambda\int_0^1 r^{n-1}(-y_\lambda)^{k+1}\end{aligned}$$

e portanto, segue (3.70).

Agora, multiplicando (3.70) por $\mu_\lambda^{-(n-2k)/k} = (-y_\lambda(0))^{(k+1)/k}$ temos

$$\mu_\lambda^{-(n-2k)/k}\lambda\int_0^1 r^{n-1}(-y_\lambda)^{k+1}dr = (-y_\lambda(0))^{(k+1)/k}\frac{C_n^k}{2n}(y_\lambda'(1))^{k+1},$$

ou equivalentemente

$$\mu_\lambda^{-(n-2k)/k}\mu_\lambda^n\mu_\lambda^{-n+2k}\lambda\int_0^{\mu_\lambda^{-1}} t^{n-1}(-y_\lambda(\mu_\lambda t))^{k+1}dt = \frac{C_n^k}{2n}|(-y_\lambda(0))^{1/k}y_\lambda'(1)|^{k+1}$$

e por fim,

$$\lambda\mu_\lambda^{(2k(k+1)-n)/k}\int_0^{\mu_\lambda^{-1}} t^{n-1}(-y_\lambda^*)^{k+1}dt = \frac{C_n^k}{2n}|(-y_\lambda(0))^{1/k}y_\lambda'(1)|^{k+1}.$$

Por outro lado, por (3.66) temos

$$\begin{aligned}\frac{C_n^k}{2n}|(-y_\lambda(0))^{1/k}y_\lambda'(1)|^{k+1} &= \frac{1}{2}|(-y_\lambda(0))^{1/k}y_\lambda'(1)|\left[\int_0^{\mu_\lambda^{-1}} t^{n-1}(-y_\lambda^*)^{\gamma(k)}dt\right.\\ &\quad \left.+\lambda\mu_\lambda^{2k}\int_0^{\mu_\lambda^{-1}} t^{n-1}(-y_\lambda)^k\right]\\ &\longrightarrow \frac{1}{2}\frac{k}{2k-n}\left(\frac{n\rho_1}{C_n^k}\right)^{1/k}\left[r^{2-n/k}-1\right]\int_0^1 t^{n-1}(-\overline{y})^{\gamma(k)}dt.\end{aligned}$$

Logo,

$$\mu_\lambda^{-(n-2k)/k}\lambda\int_0^1 r^{n-1}(-y_\lambda)^{k+1}dr \longrightarrow \frac{1}{2}\frac{k}{.n-2k}\left(\frac{C_n^k}{n}\right)^{-1/k}\rho_1^{\frac{k+1}{k}}. \tag{3.71}$$

Portanto, concluímos que

$$\lambda\mu_\lambda^{-(n-2k)/k} \longrightarrow \frac{1}{2}\frac{k}{n-2k}\left(\frac{C_n^k}{n}\right)^{-1/k}\rho_1^{(k+1)/k}\rho_2^{-1}.$$

(ii) Seja $n = 2k(k+1)$. Assim, de (3.70), temos

$$\lambda\int_0^{\mu_\lambda^{-1}} t^{n-1}(-\overline{y})^{k+1}dt + \lambda\Delta = \frac{C_n^k}{2n}((-y_\lambda(0))^{1/k}y_\lambda'(1))^{k+1}, \tag{3.72}$$

onde

$$\Delta = \int_0^{\mu_\lambda^{-1}} t^{n-1}[(-y_\lambda^*(t))^{k+1} - (-\overline{y}(t))^{k+1}]dt.$$

Se provarmos que

$$|\Delta| = o(1) \quad \text{quando} \quad \lambda \to 0^+ \tag{3.73}$$

então

$$\lambda\int_0^{\mu_\lambda^{-1}} t^{n-1}(-\overline{y})^{k+1}dt = \frac{k}{n-2k}\left(\frac{C_n^k}{n}\right)^{-1/k}\rho_1^{(k+1)/k} + o(1).$$

Pela regra de L'Hospital e pela definição de $\overline{y}$

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\ln\mu_\lambda^{-1}}\int_0^{\mu_\lambda^{-1}} t^{n-1}(-\overline{y})^{k+1}dt &= \lim_{\lambda\to 0}\frac{\left(\mu_\lambda^{-1}\right)^{n-1}(-\overline{y})^{k+1}}{1/\mu_\lambda^{-1}}\\ &= \lim_{\lambda\to 0}\frac{\mu_\lambda^{-n}}{\left(1+\alpha\mu_\lambda^{-2}\right)^{(n-2k)(k+1)/2k}}\\ &= \alpha^{-n/2}\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\left(1+1/\alpha\mu_\lambda^{-2}\right)^{(n-2k)(k+1)/2k}}\\ &= \alpha^{-n/2}.\end{aligned}$$

Então

$$\lambda \ln \mu_\lambda^{-1} \longrightarrow \alpha^{n/2} \frac{k}{n-2k} \left(\frac{C_n^k}{n}\right)^{-1/k} \rho_1^{(k+1)/k}.$$

Resta provar (3.73). Pelas equações que $y_\lambda^*(t)$ e $\overline{y}$ satisfazem, temos

$$\overline{y}(t) = C \int_0^t \left[s^{k-n} \int_0^s \tau^{n-1} (-\overline{y})^{\gamma(k)} d\tau \right]^{1/k} ds$$

e

$$\begin{aligned} y_\lambda^*(t) &= C \int_0^t \left[s^{k-n} \int_0^s \tau^{n-1} ((-y_\lambda^*)^{\gamma(k)} + \lambda \mu_\lambda^{2k} (-y_\lambda^*)^k) d\tau \right]^{1/k} ds \\ &\leqslant C \int_0^t \left[s^{k-n} \int_0^s \tau^{n-1} (-y_\lambda^*)^{\gamma(k)} d\tau \right] + C\lambda^{1/k} \mu_\lambda^2 \int_0^t \left[s^{k-n} \int_0^s \tau^{n-1} (-y_\lambda^*)^k d\tau \right] ds \\ &\leqslant C \int_0^t \left[s^{k-n} \int_0^s \tau^{n-1} (-\overline{y})^{\gamma(k)} d\tau \right] + C\lambda^{1/k} \mu_\lambda^2 \int_0^t \left[s^{k-n} \int_0^s \tau^{n-1} (-\overline{y})^k d\tau \right] ds. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} |\overline{y} - y_\lambda^*(t)| &\leqslant C\lambda^{1/k} \mu_\lambda^2 \int_0^t \left[s^{k-n} \int_0^s \tau^{n-1} (-y_\lambda^*)^k d\tau \right] ds \\ &\leqslant C\lambda^{1/k} \mu_\lambda^2 \int_0^t s^{1-n/k} \left[\int_0^s \tau^{n-1} \left(-(1+\alpha\tau^2)^{-(n-2k)/2k} \right)^k \right]^{1/k} ds \\ &\leqslant C\lambda^{1/k} \mu_\lambda^2 \int_0^t s^{1-2(k+1)} \left[\int_0^s \tau^{2k(k+1)-1} \tau^{-2k^2} \right]^{1/k} ds \\ &\leqslant C\lambda^{1/k} \mu_\lambda^2 \int_0^t s^{1-2(k+1)} s^2 ds \\ &\leqslant C\lambda^{1/k} \mu_\lambda^2 t^{2-2k}. \end{aligned}$$

Isso prova o resultado. □

Referências Bibliográficas

[1] Botelho, G.; Pellegrino, D.; Teixeira, E. *Fundamentos de Análise Matemática*, segunda edição, SBM, Rio de Janeiro, 2015.

[2] Brezis, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations* . Springer, 2011.

[3] Brezis, H.; Nirenberg, L., *Positive solutions of nonlinear ellptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math. 36 (1983), 437-477.

[4] Caffarelli,L.; Nirenberg, L.; Spruck, J. *The Dirichlet problem for nonlinear second-order elliptic equations. III. Functions of the eigenvalues of the Hessian*, Acta Math., 155, 261–301 (1985).

[5] Chou, K. S.; Chu, C. W., *On the best constant for a weighted Sobolev-Hardy inequality*, J. London Math. Soc. 48 (1993), 137-151.

[6] Chou, K. S.; Geng, *On the critical dimension of a semilinear degenerate elliptic equation involving critical Sobolev-Hardy exponent*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, Vol. 26, No. 12. (1996), 1965-1984

[7] Chou, K. S.; Geng, D.; D.; Yan, S. S. *Critical Dimension of a Hessian Equation Involving Critical Exponent and a Related Asymptotic Result*, Journal of Differential Equations 129, (1996), 79-110

[8] Dai, G., Bifurcation and admissible solutions for the Hessian equation, J. Funct. Anal., 273, 3200–3240 (2017)

[9] Edmunds, D. E.; Fortunato, D.; Jannelli, E., *Critical exponents, critical dimensions and the biharmonic operator*, Arch. Rational Mech. Anal. 112 (1990), 269-289.

[10] Egnell, H., *Existence and nonexistence results for m-Laplace equations involving critical Sobolev exponents*, Arch. Rational Mech. Anal. 104 (1988), 57-77.

[11] Evans, L. C. *Partial differential equations.* American Mathematical Society, 2010.

[12] Folland, G. B., *Real Analysis - Modern Techniques and Their Applications*, second edition, Pure and Applied Mathematics, John Wiley and Sons, 1999

[13] Gidas, B.; Ni, W.; Nirenberg, L., *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys. 68 (1979), 209-243.

[14] Guedda, M.; Veron, L., *Quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Nonlinear Anal. TMA 13 (1989), 879-902.

[15] Pokhozhaev, S. I.,*On the eigenfunctions of quasilinear elliptic problems* , at. Sb. **82** (1970), 192-212. (Russian)

[16] Pucci, P.; Serrin, J., *A general variational identity*, Indiana Univ. Math. J. **35** (1986), 681–703.

[17] Pucci, P.; Serrin, J., *Critical exponents and critical dimensions for polyharmonic operators* , J. Math. Pures Appl. 69 (1990), 55-83.

[18] Rabinowitz, P., *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*, No. 65, Expository Lectures from the C.B.M.S. Regional Conference, A.M.S. 1986.

[19] Tso, K., *Remarks on critical exponents for Hessian operators*, Ann. Inst. H. Poincare 7 (1990), 113-122

[20] Wang, X. *The k-Hessian Equation*, Australian Research Council (2000).