



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA  
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
MESTRADO EM MATEMÁTICA

## **Propriedades de simetria para a equação $k$ -Hessiana**

**Ruan Diego da Silva Paiva**

**Teresina - 2021**

**Ruan Diego da Silva Paiva**

**Dissertação de Mestrado:**

**Propriedades de simetria para a equação  $k$ -Hessiana**

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. José Francisco Alves de Oliveira

**Teresina - 2021**





MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

*Propriedades de simetria para a equação  $k$ -Hessiana*

Ruan Diego da Silva Paiva

Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 25 de Fevereiro de 2021.

**Banca Examinadora:**

*Franciane de Brito Vieira*

Prof. Dra. Franciane de Brito Vieira - UFPI

*José Francisco Alves de Oliveira*

Prof. Dr. José Francisco Alves de Oliveira - Orientador

*Manassés Xavier de Souza*

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza - UFPB

*Pitágoras Pinheiro de Carvalho*

Prof. Dr. Pitágoras Pinheiro de Carvalho - UESPI

FICHA CATALOGRÁFICA  
Universidade Federal do Piauí  
Biblioteca Setorial de Ciências da Natureza – CCN  
Serviço de Processamento Técnico

P149p Paiva, Ruan Diego da Silva.  
Propriedades de simetria para a equação  $k$ -Hessiana/ Ruan  
Diego da Silva Paiva – Teresina: 2021.  
72 f. il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí,  
Centro de Ciências da Natureza, Programa de Pós-Graduação em  
Matemática, 2021.  
“Orientador: Prof. Dr. José Francisco Alves de Oliveira.”

1. Análise Matemática. 2. Operador  $k$ -Hessiano. 3. Princípio  
do Máximo. I. Oliveira, José Francisco Alves de. II. Título.

CDD 515

*Dedico à minha mãe, Teresa, minha avó Antônia, meus irmãos, Tayná e Latorre, e a meu padrasto José.*

# Agradecimentos

Agradeço Deus pela vida, saúde, por todos os momentos de conforto e por ter colocado pessoas tão especiais na minha vida.

Agradeço a todos os meus familiares, em especial, a minha mãe Teresa e a minha avó Antônia por sempre me incentivarem e me apoiarem em tudo que tentasse, que não mediram esforços pela a minha formação, aos meus irmãos Tayná e Latorre, pelo apoio e incentivo.

Agradeço a todos os meus amigos, pelo apoio, força e companherismo, em especial João, Erisvaldo, Hotavio, Kevin, Jean, Emília, Melqui, Danilo, Vitor Oliveira, Danrley, Wesley, Júlio, Juliano, Bruno, Chistopher, Francimar, Igor, Lucas Emanuel, Dieme, Márcio, João Santos, Bruno Vasconcelos, Edimilson, Jonatas, Leonardo, Edilson, Silas, Severino, Jaciane, Idalina, Michell, Rafael e a todos os amigos que fiz na UFPI nos últimos anos.

Agradeço ao meu orientador José Francisco pela amizade, apoio, ensinamentos e paciência durante todos esses anos.

Agradeço aos professores do departamento de matemática da UFPI, em especial, aos professores Paulo Alexandre, Halysen Baltazar, Newton Santos, Barnabé Pessoa, Jeferson Leite, Leandro Pessoa e Rondinelle Marcolino pelo apoio, amizade e ensinamentos.

Agradeço a professora Franciane de Brito, e aos professores Manassés Xavier e Pitágoras Piniheiro pelas dicas e contribuições para a versão final do trabalho.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

*“O melhor é deixar o passado para trás e permitir que o presente avance para o futuro.”*

Douglas Adams.

# Resumo

Nesse trabalho utilizaremos o método de reflexão de Alexandrov (moving plane method) para investigar propriedades de simetria para a equação  $k$ -Hessiana. Em particular, discutiremos o problema clássico de simetria de Serrin (overdetermined Serrin problem) no qual a existência de solução para uma equação diferencial parcial sob condições adequadas na fronteira induz a simetria do domínio.

**Palavras-chaves:** Operador  $k$ -Hessiano; Princípio do máximo; Simetria radial; Método dos planos móveis; Problema sobredeterminado.

# Abstract

In this work, we will employ Alexandrov's moving plane method to investigate symmetry properties for the  $k$ -Hessian equation. In particular, we discuss the classical overdetermined Serrin problem in which the existence of solutions for PDEs under suitable conditions on the boundary induces the symmetry of the domain itself.

**Keywords:**  $k$ -Hessian operator; Maximum principle; Radial symmetry; Moving plane method; Overdetermined Serrin problem.

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>iv</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Notações</b>	<b>viii</b>
<b>1 Noções Preliminares</b>	<b>3</b>
1.1 Notações e resultados básicos de Cálculo . . . . .	3
1.2 Princípio do Máximo . . . . .	5
1.3 Elementos básicos do operador $k$ -Hessiano . . . . .	7
<b>2 Método de reflexão de Alexandrov</b>	<b>14</b>
2.1 Introdução . . . . .	14
2.2 Problema de simetria radial de Gidas, Ni e Nirenberg . . . . .	15
2.3 Problema clássico de simetria de Serrin . . . . .	21
<b>3 Simetria para a equação de Laplace em um anel rígido</b>	<b>31</b>
3.1 Notações e resultados preliminares . . . . .	31
3.2 Simetria radial e monotonicidade de soluções . . . . .	33
<b>4 Simetria para o operador <math>k</math>-Hessiano: caso não-linear</b>	<b>40</b>
4.1 Operador $k$ -Hessiano em um anel rígido . . . . .	40
4.2 Operador $k$ -Hessiano em região anelar . . . . .	46
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>58</b>

# Lista de Figuras

2.1	Reflexão de um ponto $x$ em relação ao hiperplano $T_\lambda$ . . . . .	15
2.2	Região $\Sigma(\Omega_\nu)$ . . . . .	22
2.3	Caso A. . . . .	23
2.4	Caso B. . . . .	23
3.1	Alguns exemplos para a região $\Sigma(\lambda)$ no caso de um anel rígido. . . . .	32
4.1	Caso A, $i = 1$ . . . . .	47
4.2	Caso B. . . . .	47
4.3	Caso A, $i = 2$ . . . . .	47

# Notações

$\Delta u$	operador laplaciano, página 1
$\frac{\partial u}{\partial \nu}$	derivada de $u$ na direção do vetor $\nu$ , página 3
$\mathbb{R}^n$	espaço euclidiano $n$ -dimensional, página 1
$\nabla u$	gradiente da função $u$ , página 3
$\sigma_k(\lambda)$	$k$ -ésimo polinômio simétrico elementar em $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , página 8
$\ u\ $	norma da função $u$ , página 5
$B_r(x_0)$	bola aberta de centro em $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e raio $r$ , página 3
$C^{k,\lambda}$	espaço de Hölder, página 5
$D^2u$	matriz Hessiana de $u$ , página 7
$df(a)$	diferencial da função $f$ no ponto $a$ , página 4
$Du$	gradiente da função $u$ , página 8
$L^\infty$	espaço das funções que são finitas em quase toda parte, página 16
$O(n)$	grupo das transformações lineares ortogonais $\mathbb{R}^n$ , página 11
$S_k(D^2u)$	operador $k$ -Hessiano em $u$ , página 7
$tr(A)$	traço da matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ , página 9
$u_{x_i}$	derivada parcial de $u$ na direção do vetor $e_i$ , página 5
$x \cdot y$	produto interno canônico em $\mathbb{R}^n$ , página 3

# Introdução

Nesse trabalho aplicamos o método de reflexão desenvolvido em 1956 por Alexandrov [1] para estudar resultados de simetria radial e monotonicidade de soluções e simetria de domínios de definição de equações diferenciais parciais envolvendo o operador  $k$ -Hessiano nos casos linear ( $k = 1$ ) e não-linear ( $k > 1$ ).

No Capítulo 1, apresentaremos alguns resultados preliminares de cálculo e alguns versões do princípio do máximo que será necessários no desenvolvimento do trabalho. Ainda, daremos algumas propriedades básicas do operador  $k$ -Hessiano.

No Capítulo 2, discutiremos dois problemas de simetria clássicos que podem ser investigados via método de reflexão de Alexandrov; o problema de simetria radial e monotonicidade para as soluções positivas do problema de Poisson definido em uma bola devido a Gidas, Ni e Nirenberg [5] e o problema de simetria sobredeterminada (overdetermined problem) devido a Serrin [14]. Precisamente, mostraremos que se  $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$  é a bola aberta unitária centrada na origem,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^1$  e  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  é uma solução positiva do problema de Poisson

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

então, existe uma função  $v : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  decrescente tal que  $u(x) = v(r)$ , com  $r = |x|$  e  $x \in \Omega$ . De acordo com esse resultado as soluções positivas do Problema (1) herdam a propriedade geométrica (simetria) do domínio  $\Omega$ . Isso nos leva à seguinte pergunta: Sob que condições na equação a existência de solução força a simetria de ambos solução e domínio? Essa questão que foi respondida por Serrin no famoso artigo [14] e também será discutida no Capítulo 2. De fato, veremos que, se  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto conexo limitado com fronteira suave,  $\nu = \nu_x$  é o vetor normal unitário exterior em  $x \in \partial\Omega$  e  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  é solução positiva do problema

(overdetermined Problem)

$$\begin{cases} \Delta u = -1 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = c & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

one  $c$  é uma constante, então, a menos de uma translação,  $u$  tem a forma  $u(x) = (b^2 - |x|^2)/2n$ ,  $b > 0$  e então  $\Omega$  é necessariamente uma bola. Esse resultado de Serrin é o primeiro a utilizar o método de simetria de Alexandrov para a obtenção de simetria de domínio para problemas desse tipo.

Nos Capítulos 3 e 4, seguindo os resultados de Reichel [12] caso linear ( $k = 1$ ) e Wang e Bao [16] caso não linear ( $k > 1$ ), discutiremos resultados de simetria de ambos solução e domínio para seguinte equação  $k$ -Hessiana definida em domínio em forma de anel

$$\begin{cases} S_k(D^2u) = f(|x|, u, |Du|), & a_1 < u < a_2, & x \in \Omega \\ u = a_1, & \frac{\partial u}{\partial \gamma} = c_1, & x \in \partial\Omega_1 \\ u = a_2, & \frac{\partial u}{\partial \gamma} = c_2, & x \in \partial\Omega_2 \end{cases} \quad (3)$$

onde  $\Omega = \Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1}$ , com  $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$  simplesmente conexos com fronteira suave tais que  $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$ ,  $\gamma = \gamma_x$  denota o vetor normal unitário interior em  $x \in \partial\Omega$ ,  $a_1, a_2, c_1, c_2$  são constantes e  $f$  satisfaz condições apropriadas.

# Capítulo 1

## Noções Preliminares

Nesse capítulo apresentaremos alguns fatos preliminares que serão utilizados no decorrer do trabalho.

### 1.1 Notações e resultados básicos de Cálculo

Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  e  $k \in \mathbb{N}$ .

**Definição 1.1.** Dizemos que  $\partial\Omega$  (fronteira de  $\Omega$ ) é de classe  $C^k$ , se para cada ponto  $x_0 \in \partial\Omega$  existem  $r > 0$  e uma função  $\gamma \in C^k(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R})$  tais que (após uma reorientação, se necessário) temos

$$\Omega \cap B_r(x_0) = \{x \in B_r(x_0); x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}.$$

Analogamente, dizemos que  $\partial\Omega$  é de classe  $C^\infty$  se  $\gamma$  é de classe  $C^k$  para  $k = 1, 2, \dots$

**Definição 1.2.** (i) Se  $\partial\Omega$  é de classe  $C^1$ , então definimos ao longo de  $\partial\Omega$  um campo de vetores unitário e normal à  $\partial\Omega$

$$\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n).$$

(ii) Seja  $u \in C^1(\overline{\Omega})$ . Chamamos

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu$$

a derivada de  $u$  na direção normal  $\nu$ .

**Teorema 1.1** (Teorema da Alfândega). Sejam  $C$  e  $X$  subconjuntos de um espaço métrico  $M$ . Se  $C$  é conexo e tem pontos em comum com  $X$  e com  $M - X$ , então algum ponto de  $C$  pertence a fronteira de  $X$ .

*Demonstração.* Ver [10], página 110. □

**Definição 1.3.** Uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é dita absolutamente contínua em  $[a, b]$  se, para cada  $\varepsilon > 0$  dado existir um  $\delta > 0$  tal que para toda coleção finita  $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^n$  de subintervalos abertos e disjuntos em  $(a, b)$  tal que  $\sum_{k=1}^n |b_k - a_k| < \delta$  vale  $\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| \leq \varepsilon$ .

**Exemplo 1.1.** Uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  lipschitziana, isto é, existe  $c > 0$  tal que  $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$ ,  $\forall x, y \in [a, b]$  é absolutamente contínua em  $[a, b]$ .

*Demonstração.* Ver [13], página 120. □

**Teorema 1.2** (Teorema Fundamental do Cálculo). Se  $f$  é uma função absolutamente contínua em um intervalo fechado e limitado  $[a, b]$ . Então  $f$  é diferenciável em quase todo ponto de  $(a, b)$ ,  $f'$  é integrável sobre  $[a, b]$  e vale

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

*Demonstração.* Ver [13], página 124. □

**Teorema 1.3.** Seja  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $\Omega$  aberto. Suponha que  $f$  é  $n$ -vezes diferenciável em  $a \in \Omega$  e seja  $h = (h_1, \dots, h_n)$  tal que  $a + h \in \Omega$ . Então,

$$f(a + h) = f(a) + df(a)h + \dots + \frac{1}{h} d^n f(a)h^n + r(h), \text{ com } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{|h|^n},$$

onde  $d^2 f(a)v^2 = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)h_i h_j$ , e assim por diante.

*Demonstração.* Ver [9], página 121. □

**Teorema 1.4** (Fórmula de Green). Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto, limitado e  $u, w \in C^2(\overline{\Omega})$ , então

(i)

$$\int_{\Omega} w(x)\Delta u(x)dx + \int_{\Omega} \nabla w(x) \cdot \nabla u(x)dx = \int_{\partial\Omega} w(z) \frac{\partial u}{\partial \nu}(z)d\sigma.$$

(ii)

$$\int_{\Omega} w(x)\Delta u(x) - u(x)\Delta w(x)dx = \int_{\partial\Omega} w(z) \frac{\partial u}{\partial \nu}(z) - u(z) \frac{\partial w}{\partial \nu}(z)d\sigma.$$

*Demonstração.* Ver [8], página 9. □

**Lema 1.1.** Suponha  $\Omega$  é um domínio limitado de  $\mathbb{R}^n$  com fronteira  $C^2$  e  $u \in C^2(\overline{\Omega})$ . Seja  $x \in \partial\Omega$  e  $\eta \in \mathbb{R}^n$  satisfazendo  $\gamma(x) \cdot \eta \neq 0$ , onde  $\gamma = \gamma_x$  é o vetor normal interior unitário em  $x$ , tal que existe uma bola  $B_\rho(x)$  com  $u \equiv \text{cte}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \eta} \leq 0$  ou  $\frac{\partial u}{\partial \eta} \geq 0$  em  $\partial\Omega \cap B_\rho(x)$  e  $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x) = 0$ , então  $Du(x) = 0$  e  $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(x) = \Delta u(x)(\gamma(x) \cdot \eta)^2$ .

*Demonstração.* Ver [12]. □

**Definição 1.4.** Dado  $0 < \lambda \leq 1$  e  $u \in C(\overline{\Omega})$  dizemos que  $u$  é Hölder contínua com expoente  $\lambda$ , se existir uma constante  $c$  tal que

$$|u(x) - u(y)| \leq c|x - y|^\lambda, \quad \forall x, y \in \Omega.$$

Sejam

$$[u]_{C^{0,\lambda}} = \sup_{x,y \in \Omega, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\lambda}$$

$$C^{0,\lambda} = \{u \in C(\overline{\Omega}); [u]_{C^{0,\lambda}} < \infty\}.$$

**Definição 1.5.** O espaço  $C^{k,\lambda}$  consiste de todas as funções  $u \in C^k(\overline{\Omega})$ , com  $k \in 1, 2, \dots$ , tais que

$$\|u\|_{C^{k,\lambda}} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_{C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})} < \infty,$$

onde  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$  é qualquer multi-índice tal que  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = k$  e

$$D^\alpha u = \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

## 1.2 Princípio do Máximo

**Definição 1.6.** Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto,  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  e  $L$  um operador diferencial com a forma abaixo

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x)u_{x_i} + c(x)u, \quad (1.1)$$

com  $a^{ij}, b^i, c$  limitadas e  $a^{ij} = a^{ji}$ . Diremos que  $L$  é elíptico, se existirem constantes  $\theta(x), \lambda(x)$  positivas tais que

$$0 < \theta(x)|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\xi_i \xi_j \leq \lambda(x)|\xi|^2$$

para quase todo ponto  $x$  em  $\Omega$  e para todo  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Além disso, diremos que  $L$  é uniformemente elíptico em  $\Omega$  se existirem constantes  $\lambda, \theta$  independentes de  $x$  tais que

$$0 < \theta|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)\xi_i \xi_j \leq \lambda|\xi|^2.$$

Na discussão a seguir, a menos que seja dito o contrário, assumiremos que  $\Omega$  é um aberto limitado e conexo em  $\mathbb{R}^n$  e que  $L$  é um operador uniformemente elíptico em  $\Omega$  da forma (1.1).

**Teorema 1.5** (Lema de Hopf). *Seja  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ . Suponha que  $Lu \geq 0$  em  $\Omega$  e que existe um ponto  $x_0 \in \partial\Omega$*

$$u(x_0) > u(x), \forall x \in \Omega.$$

(i) *Se  $c \equiv 0$  e existe uma bola aberta  $B \subset \Omega$  tal que  $x_0 \in \partial B$ , então*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0,$$

*onde  $\nu$  é um vetor normal exterior a  $B$  em  $x_0$ .*

(ii) *Se  $c \leq 0$  em  $\Omega$  a mesma conclusão é válida, desde que  $u(x_0) \geq 0$ .*

*Demonstração.* Ver [8], página 41. □

**Obs:** Se  $x_0 \in \partial\Omega$  é um ponto de máximo então a desigualdade  $\frac{\partial u}{\partial \nu} \geq 0$  é sempre verdadeira, o teorema acima nos fornece que a desigualdade é estrita.

**Teorema 1.6** (Princípio do máximo para  $c \leq 0$ ). *Seja  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  e assumamos  $c \leq 0$  em (1.1).*

(i) *Se  $Lu \geq 0$  em  $\Omega$  e  $u$  atinge um máximo não negativo em  $\overline{\Omega}$  em um ponto interior, então  $u$  é constante em  $\Omega$ .*

(ii) *Se  $Lu \leq 0$  em  $\Omega$  e  $u$  atinge um mínimo não positivo em  $\overline{\Omega}$  em um ponto interior, então  $u$  é constante em  $\Omega$ .*

*Demonstração.* Ver [6], página 33. □

**Teorema 1.7.** *Seja  $\Omega$  um domínio limitado e  $u \in C^2$  e  $L$  um operador uniformemente elíptico com  $c \leq 0$ . Se existe um ponto  $x_0 \in \partial\Omega$  tal que  $u \in C(\Omega \cup \{x_0\})$  e  $u(x_0) = \sup_{\Omega} u$ , com  $u(x_0) \geq 0$  quando  $c$  não é zero se  $\Omega$  satisfaz a propriedade de esfera interior em  $x_0$ . Então, para qualquer vetor  $\gamma$  com origem em  $x_0$  que aponta para fora da esfera temos*

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{u(x_0 + t\gamma) - u(x_0)}{t} > 0,$$

*a menos que  $u$  seja constante.*

*Demonstração.* Ver [11], página 67. □

**Teorema 1.8.** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  domínio (aberto e conexo) limitado com fronteira de classe  $C^2$  e  $T$  um plano contendo a normal de algum ponto  $x_0 \in \partial\Omega$ , seja  $\Omega^*$  a restrição de  $\Omega$  a algum dos semiespaços gerados por  $T$ . Suponha que  $w \in C^2(\overline{\Omega^*})$  tal que  $w \geq 0$  em  $\Omega^*$ ,  $w(x_0) = 0$  e*

$$\Delta w \leq 0 \text{ em } \Omega^*.$$

*Seja  $\gamma$  qualquer direção partindo de  $x_0$  interior a  $\Omega^*$  e não tangencial. Então,*

$$\frac{\partial w}{\partial \gamma}(x_0) > 0 \text{ ou } \frac{\partial^2 w}{\partial \gamma^2}(x_0) > 0$$

*a menos que  $w \equiv 0$  em  $\Omega^*$ .*

*Demonstração.* Ver [14]. □

**Teorema 1.9.** *Sejam  $\Omega$ ,  $T$ ,  $\Omega^*$  e  $x_0$  como descritos no Teorema 1.8. Suponha que  $w \in C^2(\overline{\Omega^*})$  satisfaz*

$$\sum_{i=1}^n a^{ij}(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x) \frac{\partial w}{\partial x_i} + c(x)w \geq 0, \quad x \in \Omega^*,$$

*onde  $b^i$  para  $i = 1, 2, \dots, n$  e  $c$  são funções limitadas em  $\Omega^*$  e  $c \leq 0$ , e existem três constantes positivas  $K_1, K_2$  e  $K$  tais que*

$$K_1|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a^{ij}\xi_i\xi_j \leq K_2|\xi|^2 \tag{1.2}$$

*e*

$$\left| \sum_{i,j=1}^n a^{ij}\xi_i\eta_j \right| \leq K(|\xi \cdot \eta| + |\xi|d(x)) \tag{1.3}$$

*onde  $x \in \Omega^*$  e  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$  e  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$  é o vetor normal unitário ao hiperplano  $T$  e  $d(x)$  a distância de  $x$  a  $T$ . Suponha que  $w \leq 0$  e  $w(x_0) = 0$  e seja  $\gamma$  qualquer direção não tangencial em  $x_0$  que entre em  $\Omega^*$ . Então*

$$\frac{\partial w}{\partial \gamma}(x_0) < 0 \text{ ou } \frac{\partial^2 w}{\partial \gamma^2}(x_0) < 0,$$

*a menos que  $w \equiv 0$  em  $\Omega^*$ .*

*Demonstração.* Ver [14]. □

### 1.3 Elementos básicos do operador $k$ -Hessiano

Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado,  $u \in C^2(\Omega)$  e  $1 \leq k \leq n$  número inteiro. Definimos  $S_k(D^2u) = \sigma_k(\lambda)$ , onde  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  é a lista dos  $n$  os autovalores da matriz Hessiana

$$D^2u = [u_{x_i x_j}]_{n \times n} \text{ e}$$

$$\sigma_k(\lambda) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k},$$

representa o  $k$ -ésimo polinômio simétrico elementar, isto é,

$$\begin{aligned} \sigma_1(\lambda) &= \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \\ \sigma_2(\lambda) &= \sum_{i=2}^n \lambda_1 \lambda_i + \sum_{i=3}^n \lambda_2 \lambda_i + \dots + \sum_{i=n-1}^n \lambda_{n-2} \lambda_i + \lambda_{n-1} \lambda_n \\ &\vdots \\ \sigma_n &= \lambda_1 \cdots \lambda_n. \end{aligned}$$

**Exemplo 1.2.** Para  $k = 1$ , temos  $S_1(D^2u) = \text{tr}(D^2u) = \Delta u$  é o operador Laplaciano em  $u$  e para  $k = n$ , temos  $S_n(D^2u) = \det D^2u$ , o operador de Monge-Ampère.

Dizemos que uma função  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  é  $k$ -admissível se

$$\lambda(D^2u) \in \bar{\Gamma}_k,$$

onde  $\Gamma$  é o cone aberto e convexo de  $\mathbb{R}^n$ , com vértice na origem dado por

$$\Gamma_k = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n; \sigma_j(\lambda) > 0, \forall j = 1, \dots, k\}, \quad (1.4)$$

isto é, se  $u, v$  são  $k$ -admissíveis então  $tu + (1-t)v$  é  $k$ -admissível como pode ser visto em [7].

Note que  $\sigma_k(\lambda) = 0$  para  $\lambda \in \partial\Gamma_k$ ,

$$\Gamma_n \subset \dots \subset \Gamma_k \subset \dots \subset \Gamma_1,$$

$\Gamma_n$  é o cone positivo

$$\Gamma_n = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n; \lambda_1 > 0, \dots, \lambda_n > 0\}$$

e  $\Gamma_1$  é o semiespaço

$$\Gamma_1 = \{\lambda \in \mathbb{R}^n; \sum_{i=1}^n \lambda_i > 0\}.$$

**Exemplo 1.3.** Uma função  $u \in C^2(\Omega)$  é 1-admissível se, e só se,  $u$  é subharmônica.

Lembramos que uma equação diferencial parcial de segunda ordem

$$F(D^2u, Du, u, x) = 0$$

é totalmente não-linear se  $F(r, p, z, x)$  é não-linear em  $r$ . Assim, a equação  $k$ -Hessina é linear no caso  $k = 1$  e totalmente não-linear para  $k \geq 2$ .

Dizemos que  $F$  é elíptica (ou elíptica degenerada se) com respeito a solução  $u$  se a matriz  $\{F_{ij}\}$  é positiva definida (ou positiva semidefinida) em  $(r, p, z, x) = (D^2u, Du, u, x)$ , onde  $F_{ij} = \{\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}\}$ . A equação  $k$ -Hessiana é elíptica quando  $u$  é  $k$ -admissível.

De forma alternativa, podemos definir  $S_k(D^2u) = [D^2u]_k$ , onde  $[D^2u]_k$  é a soma de todos os determinantes menores principais de ordem  $k$  da matriz  $[D^2u]$ . De fato, uma vez que  $D^2u$  e a matriz dos autovalores  $A$  são semelhantes, isto é,  $[D^2u]$  e  $A$  têm os mesmos polinômios característicos. Portanto,

$$\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + \dots + b_{n-1}\lambda + b_n = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

onde

$$\begin{aligned} b_1 &= (-1)^1 tr(D^2u); \\ b_2 &= (-1)^2 \sum_{i < j} det \left( \begin{bmatrix} u_{ii} & u_{ij} \\ u_{ij} & u_{jj} \end{bmatrix} \right); \\ b_3 &= (-1)^3 \sum_{i < j < k} det \left( \begin{bmatrix} u_{ii} & u_{ij} & u_{ik} \\ u_{ij} & u_{jj} & u_{jk} \\ u_{ki} & u_{jk} & u_{kk} \end{bmatrix} \right); \\ &\vdots \\ b_n &= (-1)^n det(D^2u); \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a_1 &= (-1)^1 \sum_{i=1}^n \lambda_i; \\ a_2 &= (-1)^2 \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j; \\ a_3 &= (-1)^3 \sum_{i < j < k} \lambda_i \lambda_j \lambda_k; \\ &\vdots \\ a_n &= (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n. \end{aligned}$$

Isso mostra que  $S_k(D^2u) = [D^2u]_k = \sigma_k(\lambda)$ .

Seja  $M = [m^{ij}]_{n \times n}$  uma matriz quadrada simétrica de ordem  $n$ , sejam  $\lambda_i$  os autovalores da matriz  $M$  vamos definir  $\lambda(M) = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  onde. Para  $i, j = 1, \dots, n$ , denotamos

$$S_k^{ij}(M) = \frac{\partial}{\partial m^{ij}} S_k(M).$$

**Lema 1.2** (Identidade de Euler). *Seja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  homogênea de grau  $p$ . Então*

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = pf(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

*Demonstração.* Se  $f$  é homogênea de grau  $p$  então

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^p f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Derivando com relação a  $\lambda$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \lambda x_i} x_i = p\lambda^{p-1} f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Tomando  $\lambda = 1$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = pf(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

□

Uma vez que  $S_k(M) = [M]_k$  é homogênea de grau  $k$ , temos

$$S_k(M) = \frac{1}{k} \sum_{i,j=1}^n S_k^{ij}(M) m^{ij}. \quad (1.5)$$

Defina

$$\widetilde{M} = \begin{bmatrix} m^{11} & -m^{12} & -m^{13} & \dots & -m^{1n} \\ -m^{21} & m^{22} & m^{23} & \dots & m^{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -m^{n1} & m^{n2} & m^{n3} & \dots & m^{nn} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

e

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Note que  $D = D^{-1}$  e as matrizes  $M$  e  $\widetilde{M}$  são semelhantes, pois  $D^{-1}MD = \widetilde{M}$ . Logo,

$$\lambda(M) = \lambda(\widetilde{M}).$$

Então,

$$S_k(M) = S_k(\widetilde{M}). \quad (1.7)$$

Para  $i = 2, \dots, n$ , derivando (1.7) com respeito a  $m^{i1}$  temos

$$S_k^{i1}(M) = S_k^{i1}(\widetilde{M}) \frac{\partial \widetilde{m}^{i1}}{\partial m^{i1}} = -S_k^{i1}(\widetilde{M})$$

onde  $\tilde{m}^{i1} = -m^{i1}$ . Assim, obtemos a decomposição

$$S_k^{i1}(M) + S_k^{i1}(\tilde{M}) = 0, \quad i = 2, \dots, n-1, n. \quad (1.8)$$

A seguir, usaremos a identidade de Euler para escrever o operador  $k$ -Hessiano na forma divergente. Para isso, usando (1.5) com  $M = D^2u$  temos

$$S_k(D^2u) = \frac{1}{k} \sum_{i,j=1}^n S_k^{ij}(D^2u)u_{x_i x_j}.$$

Sabemos que  $S^{ij}$  satisfaz o seguinte (ver [15])

$$\sum_{i=1}^n (S_k^{ij}(D^2u))_{x_i} = 0.$$

Assim, podemos escrever

$$S_k(D^2u) = \frac{1}{k} \sum_{i,j=1}^n S_k^{ij}(D^2u)u_{x_i x_j} = \frac{1}{k} \sum_{i,j=1}^n (u_{x_j} S_k^{ij}(D^2u))_{x_i}.$$

Essa segunda identidade fornece uma representação do operador  $k$ -Hessiano na forma divergente.

A seguir, daremos a expressão do operador  $k$ -Hessiano quando restrito ao espaço das funções invariantes pelo grupo das transformações lineares ortogonais por  $\mathbb{R}^n$ , o qual denotamos por  $O(n)$ . Nesse sentido, dizemos que uma função  $u : B_R(0) \rightarrow \mathbb{R}$  é invariante por  $O(n)$  se  $u \circ B = u$  em  $B_R(0)$ , para todo  $B \in O(n)$ .

**Proposição 1.1.** *Sejam  $u \in C^2(B_R(0))$  e  $B \in O(n)$ . Então,*

$$D^2(u \circ B)(y) = [B]^t D^2u(By)[B], \quad y \in B_R(0)$$

onde  $[B]$  representa a matriz de  $B$  com relação à base canônica de  $\mathbb{R}^n$ . Em particular, se  $u \circ B = u$  em  $B_R(0)$ , vale

$$D^2u(y) = [B]^t D^2u(By)[B], \quad y \in B_R(0).$$

*Demonstração.* Denotamos  $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ ,  $[B]^t = [B]^{-1} = [t_{ij}]_{n \times n}$  e  $C = [c_{ij}]_{n \times n}$ , onde  $C = D^2(u \circ B)$ . Assim, podemos escrever

$$By = (f_1(y), f_2(y), \dots, f_n(y)), \quad y \in \mathbb{R}^n$$

onde

$$f_k(y) = \sum_{l=1}^n b_{kl}y_l, \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Consequentemente,

$$u \circ B(y) = u(f_1(y), f_2(y), \dots, f_n(y)), \quad y \in B_R.$$

Pela regra da cadeia, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u \circ B)}{\partial y_i}(y) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial z_k}(By) \frac{\partial f_k}{\partial y_i}(y) \\ &= \sum_{k=1}^n b_{ki} \frac{\partial u}{\partial z_k}(B(y)). \end{aligned}$$

Novamente pela regra da cadeia e usando o teorema de Schwarz, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(u \circ B)}{\partial y_i \partial y_j} &= \sum_{k=1}^n \left[ b_{ki} \frac{\partial^2 u}{\partial z_1 \partial z_k}(By) \frac{\partial f_1}{\partial y_j}(y) + \dots + b_{ki} \frac{\partial^2 u}{\partial z_n \partial z_k}(By) \frac{\partial f_n}{\partial y_j}(y) \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \left[ b_{ki} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z_1 \partial z_k}(By) b_{1j} + \dots + b_{ki} \frac{\partial^2 u}{\partial z_n \partial z_k}(By) b_{nj} \right) \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \left[ b_{ki} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial z_i}(By) b_{ij} \right) \right] \\ &= \sum_{k=1}^n b_{ki} d_{kj} \end{aligned} \tag{1.9}$$

onde  $[d_{ij}]_{n \times n} = D^2 u(B(y))[B]$ . Note que  $b_{ki} = t_{ik}$  para todo  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Logo (1.9) nos dá que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n t_{ik} d_{kj}$$

e assim

$$D^2 u(y) = [B]^t [D^2 u(By)][B], \quad y \in B_R$$

como queríamos demonstrar. □

**Corolário 1.1.** *Sejam  $u \in C^2(B_R(0))$  e  $B \in O(n)$ . Então,*

$$S_k(D^2(u \circ B))(x) = S_k(D^2 u)(Bx), \quad x \in B_R(0).$$

*Demonstração.* Pela Proposição 4.1,

$$D^2(u \circ B)(x) = [B]^{-1} D^2 u(Bx)[B], \quad x \in B_R(0).$$

Assim, as matrizes  $D^2(u \circ B)(x)$  e  $D^2 u(Bx)$  são semelhantes e têm os mesmos autovalores donde segue o resultado. □

**Teorema 1.10.** *Seja  $u \in C^2(B_R(0))$  invariante por  $O(n)$ , isto é,  $u \circ B = u$  em  $B_R(0)$ , para todo  $B \in O(n)$ . Então,*

$$S_k[D^2u] = \frac{C_n^k}{n} \frac{1}{r^{n-1}} (r^{n-k}(w')^k)', \quad 0 < r = |x| \quad (1.10)$$

onde  $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$ , para  $n \leq m$  naturais  $w(r) = w(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}) = u(x)$  e  $\prime = \frac{d}{dr}$  é a derivada com relação a  $r$ .

*Demonstração.* Dado  $x \in B_R(0)$ , escrevemos  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , com  $r = |x| > 0$ . Então

$$u_{x_i}(x) = w'(r) \frac{x_i}{r}$$

e daí

$$u_{x_i x_j} = w''(r) \frac{x_i x_j}{r^2} + \frac{w'(r)}{r} \left( \delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{r^2} \right)$$

onde  $\delta_{ij} = 0$  se  $i \neq j$  e  $\delta_{ij} = 1$  se  $i = j$ . Assim, se  $x_0 = (r, 0, \dots, 0)$  para  $0 < r \leq R$ , temos

$$D^2u(x_0) = \begin{bmatrix} w''(r) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{w'}{r} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{w'}{r} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{w'}{r} \end{bmatrix}. \quad (1.11)$$

Existe  $B \in O(n)$  tal que  $Bx = (r, 0, \dots, 0)$  com  $r = |x|$ . Pela Proposição 1.1 e como  $[B]^t = [B]^{-1}$ , vale

$$D^2u(x) = [B]^{-1} D^2u(x_0) [B].$$

Assim as matrizes  $D^2u(x)$  e  $D^2u(x_0)$  são semelhantes. Portanto, possuem os mesmos autovalores. Logo, usando que

$$S_k(D^2u) = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_k}$$

temos

$$\begin{aligned} S_k(D^2u) &= C_{n-1}^{k-1} w'' \left( \frac{w'}{r} \right)^{k-1} + C_{n-1}^k \left( \frac{w'}{r} \right)^k \\ &= C_n^k \left[ \frac{k}{n} w'' \left( \frac{w'}{r} \right)^{k-1} + \frac{n-k}{n} \left( \frac{w'}{r} \right)^k \right] \\ &= \frac{C_n^k}{n} \frac{1}{r^{n-1}} [kr^{n-k} w'' [w']^{k-1} + (n-k)r^{n-k-1} [w']^k] \\ &= \frac{C_n^k}{n} \frac{1}{r^{n-1}} (r^{n-k}(w')^k)'. \end{aligned}$$

□

# Capítulo 2

## Método de reflexão de Alexandrov

Nesse capítulo apresentaremos o método de reflexão de Alexandrov [1] (moving planes method) criado 1956 e frequentemente utilizado para investigar problemas de simetria envolvendo equações diferenciais parciais. Para ilustrar o método discutiremos dois problemas de simetria clássicos o problema de simetria radial e monotonicidade para as soluções positivas da equação de Poisson definida em uma bola devido a Gidas, Ni e Nirenberg [5] e o problema de simetria (overdetermined problem) devido a Serrin [14].

### 2.1 Introdução

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  domínio limitado com fronteira regular, denote  $\nu = \nu_x$  vetor normal unitário em cada  $x \in \partial\Omega$  e  $T$  um plano com normal  $\nu$ , que a priori não intersecta  $\Omega$ . De modo simplificado, o método de reflexão de Alexandrov (moving plane method) consiste em mover o plano  $T$  paralelamente a  $\nu$ , na direção de  $\Omega$  até uma posição que seja possível garantir a simetria para a solução de uma equação elíptica de segunda ordem definido em  $\Omega$ , e com algumas condições de fronteira é possível garantir a simetria de  $\Omega$ .

Em um artigo pioneiro publicado em 1971 Serrin [14] aplicou esse método para provar que, a menos de uma translação, qualquer solução  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  para o problema

$$\begin{cases} \Delta u = -1 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = c & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

onde  $\nu$  é o vetor normal unitário exterior e  $c$  é uma constante, necessariamente tem a forma

(radial)  $u(x) = \frac{(b^2 - |x|^2)}{2n}$ ,  $b > 0$  e, assim,  $\Omega$  necessariamente é uma bola. Esse tipo de problema é atualmente conhecido como problema de simetria de Serrin (overdetermined Serrin problem) e é objeto de intensa pesquisa.

**Observação 2.1.** *Observamos que em 1972 Weinberg [19] deu uma prova mais simples para o mesmo resultado utilizando argumentos diferentes.*

Em 1979, em um clássico trabalho [5], Gidas, Ni e Nirenberg utilizaram o método de reflexão de Alexandrov para obter simetria radial e monotonicidade para soluções da equação de Poisson

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{em } \Omega \\ u > 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial \Omega \end{cases} \quad (2.2)$$

onde  $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$  e  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ .

## 2.2 Problema de simetria radial de Gidas, Ni e Nirenberg

Nessa seção, discutiremos o resultado de simetria para soluções positivas do problema de Poisson devido a Gidas, Ni e Nirenberg [5]. Inicialmente, para  $0 \leq \lambda \leq 1$ , vamos introduzir as seguintes notações:

- (a)  $T_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n, x_1 = \lambda\}$ ;
- (b)  $x^\lambda = (2\lambda - x_1, x_2, \dots, x_n)$ ;
- (c)  $E_\lambda = \{x \in \Omega; \lambda < x_1 < 1\}$ .

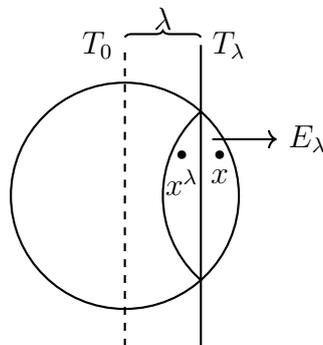


Figura 2.1: Reflexão de um ponto  $x$  em relação ao hiperplano  $T_\lambda$ .

Sejam  $e_i$  vetor da base canônica de  $\mathbb{R}^n$  e  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . De agora em diante, quando não houver risco de ambiguidade, nos referiremos à direção  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  como sendo direção do vetor correspondente  $e_i$ . Em particular, a direção  $x_1$  é a direção do vetor  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ .

**Lema 2.1.** *Suponha que  $V \subset \mathbb{R}^n$  é aberto,  $u \in C^2(\bar{V})$  não é identicamente nula e  $c \in L^\infty(V)$ .*

*Suponha*

$$\begin{cases} -\Delta u + cu \geq 0 & \text{em } V \\ u \geq 0 & \text{em } V \end{cases}. \quad (2.3)$$

*Se  $x_0 \in \partial V$ ,  $u(x_0) = 0$  e existe uma bola aberta  $B \subset V$  com  $x_0 \in \partial B$ , então*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0,$$

*onde  $\nu$  representa o vetor normal unitário exterior a  $B$  em  $x_0 \in \partial B$ . Além disso,*

$$u > 0 \text{ em } V.$$

*Demonstração.* Considere  $w = e^{-\alpha x_1}u$ , onde  $\alpha \geq 0$  será escolhido posteriormente. Assim,  $u = e^{\alpha x_1}w$  e um cálculo direto mostra que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \left( \alpha^2 w + 2\alpha \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) e^{\alpha x_1}$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = e^{\alpha x_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2}, \quad j = 2, \dots, n.$$

Portanto,

$$0 \leq -\Delta u + cu = (-\alpha^2 + c)w e^{\alpha x_1} - 2\alpha \frac{\partial w}{\partial x_1} e^{\alpha x_1} - e^{\alpha x_1} \Delta w, \quad x \in V.$$

Escolhendo  $\alpha = \|c\|_\infty^{1/2}$ , obtemos

$$-\Delta w - 2\alpha \frac{\partial w}{\partial x_1} \geq (\alpha^2 - c)w \geq 0 \text{ em } V.$$

Pelo princípio do máximo Teorema 1.6, aplicado ao operador  $Lu := \Delta u + 2\alpha u_{x_1}$ , concluímos que  $w > 0$  em  $V$  e o mesmo obviamente ocorre com  $u$ . Uma vez que  $w(x) > w(x_0) = 0$ , para  $x \in V$  podemos aplicar o Teorema 1.5 para concluir que

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}(x_0) < 0.$$

Por fim, lembrando que  $u(x_0) = 0$  temos

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) = e^{-\alpha x_1} \frac{\partial w}{\partial \nu}(x_0)$$

donde segue o resultado. □

**Lema 2.2.** *Seja  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  satisfazendo (2.2). Então para cada ponto,  $x_0 \in \partial\Omega \cap \{x_1 > 0\}$  ou*

$$u_{x_1}(x_0) < 0$$

ou

$$u_{x_1}(x_0) = 0, \text{ e } u_{x_1 x_1}(x_0) > 0.$$

*Em ambos os casos,  $u$  é estritamente decrescente na direção  $x_1$  próximo de  $x_0$ .*

*Demonstração.* Seja  $\nu = \nu_{x_0} = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ , com  $\nu_1 > 0$  o vetor normal unitário exterior em  $x_0 \in \partial\Omega \cap \{x_1 > 0\}$ . Vamos analisar dois casos:

**Caso 1:**  $f(0) \geq 0$ .

Neste caso, vamos mostrar que ocorre

$$u_{x_1}(x_0) < 0. \tag{2.4}$$

De fato, temos

$$\begin{aligned} 0 &= -\Delta u - f(u) = -\Delta u - f(u) + f(0) - f(0) \\ &\leq -\Delta u + cu, \end{aligned}$$

onde

$$c(x) = - \int_0^1 f'(su(x)) ds.$$

Visto que  $u > 0$  em  $\Omega$ , podemos aplicar o Lema 2.1 para obter

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0.$$

Segue-se que  $Du(x_0) \neq 0$  e uma vez que  $u = 0$  em  $\partial\Omega$  implica que  $Du(x_0)$  é paralelo à  $\nu$ , digamos  $Du(x_0) = \alpha\nu$ , com  $\alpha \neq 0$ . Assim,

$$\alpha = \alpha|\nu|^2 = Du(x_0) \cdot \nu = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0$$

o que implica  $\alpha < 0$ . Logo,  $u_{x_1}(x_0) = \alpha\nu_1 < 0$  e temos (2.4).

**Caso 2:**  $f(0) < 0$ .

Neste caso, ainda temos  $Du(x_0) = \alpha\nu$ , com  $\alpha \in \mathbb{R}$ , porém poderá ocorrer  $\alpha = 0$ . De fato, inicialmente temos

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{u(x_0 + t\nu) - u(x_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{u(x_0 + t\nu)}{t} \leq 0$$

pois  $u(x_0) = 0$  e  $u \geq 0$  em  $\bar{\Omega}$ . Se  $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0$ , assim como no Caso 1, temos  $\alpha < 0$  e  $u_{x_1}(x_0) = \alpha \nu_1 < 0$  o que prova o resultado. Assim, podemos supor

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) = 0$$

o que implica em  $\alpha = 0$  e portanto

$$Du(x_0) = 0. \quad (2.5)$$

Em particular,  $u_{x_1}(x_0) = 0$  e resta provar que  $u_{x_1 x_1}(x_0) > 0$ . Para isso, seja  $B \in O(n)$  transformação ortogonal tal que  $Bx_0 = y_0 := (1, 0, \dots, 0) \in \partial\Omega$  e seja  $\mu = \mu(y_0) = (1, 0, \dots, 0)$  o vetor normal unitário exterior em  $y_0$ . Pelo Corolário 1.1 com  $k = 1$ , a função  $v(x) = u(B^{-1}x)$ ,  $x \in \bar{\Omega}$  é também solução da equação (2.2). Ainda, por (2.5) temos

$$Dv(y_0) = 0. \quad (2.6)$$

Além disso, pela Proposição 1.1, vale a identidade

$$D^2v(x) = [B]D^2u(B^{-1}x)[B]^t \quad (2.7)$$

onde  $[B] = [b_{ij}]$  representa também a matriz de  $B$  com relação à base canônica de  $\mathbb{R}^n$ . Denote

$$\begin{cases} \partial\Omega^+ = \{(x_1, \dots, x_n) \in \partial\Omega \mid x_1 > 0\} \\ \Omega' = \{x' = (x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid |x'| < 1\} \\ \varphi(x') = \sqrt{1 - |x'|^2}, \quad x' \in \Omega'. \end{cases}$$

Então,

$$\partial\Omega^+ = \{(\varphi(x'), x'), \quad x' \in \Omega'\} \subset \partial\Omega.$$

Em particular, visto que  $v = 0$  em  $\partial\Omega$

$$v(\varphi(x'), x') = 0, \quad \forall x' \in \Omega'.$$

Pela regra da cadeia, para  $i, j = 2, \dots, n$  temos

$$v_{x_1 x_1}(\varphi(x'), x') \varphi_{x_i}(x') \varphi_{x_j}(x') + v_{x_1}(\varphi(x'), x') \varphi_{x_i x_j}(x') + v_{x_i x_j}(\varphi(x'), x') = 0, \quad \forall x' \in \Omega'.$$

Sendo  $(\varphi(0), 0) = y_0$  e  $\varphi_{x_i}(0) = 0$ , fazendo  $x' = 0$ , temos

$$v_{x_i x_j}(y_0) = 0, \quad \forall i, j = 2, \dots, n. \quad (2.8)$$

Por outro lado, para  $x \in \partial\Omega^+$  temos

$$v_{x_1}(x) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{v(x + te_1) - v(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{v(x + te_1)}{t} \leq 0$$

e, por (2.6), temos  $v_{x_1}(y_0) = 0$ . Logo, a função  $\psi : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\psi(x') = v_{x_1}(\varphi(x'), x')$  atinge o máximo em  $x' = 0$ . Segue-se

$$v_{x_1 x_1}(y_0)\varphi_{x_j}(0) + v_{x_1 x_j}(y_0) = \psi_{x_j}(0) = 0.$$

Portanto,

$$v_{x_1 x_j}(y_0) = 0, \quad j = 2, \dots, n. \quad (2.9)$$

Seja  $(y_m) \subset \Omega$  uma sequência tal que  $y_m \rightarrow y_0$ . Sendo  $\Delta v(y_m) = -f(v(y_m))$ , fazendo  $m \rightarrow \infty$  e usando (2.8) temos

$$-f(0) = -f(v(y_0)) = \sum_{i=1}^n v_{x_i x_i}(y_0) = v_{x_1 x_1}(y_0). \quad (2.10)$$

Combinando (2.8), (2.9) e (2.10), podemos escrever

$$D^2 v(y_0) = \begin{bmatrix} -f(0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Usando (2.7), temos  $D^2 u(x_0) = [B]^t D^2 v(y_0) [B]$  donde segue

$$u_{x_1 x_1}(x_0) = -f(0)b_{11}^2 > 0.$$

□

Vamos introduzir mais uma notação. Sejam  $\lambda$  um número real e  $k \in \mathbb{R}^n$  um vetor unitário

$$(d) \quad x^{\lambda, k} = x + 2(\lambda - x \cdot k)k$$

representa a reflexão de um ponto  $x$  em torno de um plano  $T$  com normal  $k$  onde

$$T = \{x \in \mathbb{R}^n, \quad x \cdot k = \lambda\}.$$

Note que  $x^\lambda = x^{\lambda, e_1}$ . Assim, quando  $k = e_1$ , continuaremos com a notação  $x^\lambda$ . Diremos que uma função é simétrica em todas as direções se  $v(x) = v(x^{0, k})$  para todo o vetor  $k$ .

**Lema 2.3.** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto radialmente simétrico e  $v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $v(x) = v(x^{0, k})$  para todo vetor  $k$ . Então  $v$  é radialmente simétrica.*

*Demonstração.* Sejam  $z, y \in \Omega$  tais que  $|z| = |y|$  e  $x \neq y$ . Tome

$$k = \frac{z - y}{|z - y|}.$$

Então

$$\begin{aligned} y^{0,k} &= y + 2(0 - y \cdot k)k = y - 2 \left( y \cdot \frac{z - y}{|z - y|} \right) \frac{z - y}{|z - y|} \\ y^{0,k} - z &= y - z + 2((y - z) \cdot y) \frac{z - y}{|z - y|^2} \\ &= \frac{y - z}{|z - y|^2} (|z - y|^2 + 2(z \cdot y - |y|^2)) \\ &= \frac{y - z}{|z - y|^2} (|z|^2 + |y|^2 - 2y \cdot z - 2|y|^2 + 2z \cdot y) = 0 \end{aligned}$$

onde usamos que  $|z| = |y|$ . Assim,

$$v(y) = v(y^{0,k}) = v(z).$$

□

De agora em diante sempre que quisermos provar a simetria radial de uma função  $u$  basta provar então que  $u(x^{0,k}) = u(x)$  para todo vetor  $k$  unitário.

**Teorema 2.1.** *Seja  $u \in C^2(\overline{\Omega})$ ,  $u > 0$  solução da equação (2.2), onde  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^1$ . Então  $u$  é radialmente simétrica, isto é*

$$u(x) = v(r), \quad (r = |x|)$$

para alguma função decrescente  $v : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ .

*Demonstração.* Para todo  $x \in E_\lambda$ , vale  $|x - x^\lambda| = 2|\lambda - x_1| \rightarrow 0$  se  $\lambda \rightarrow 1$ . Ainda, pelo Lema 2.2,  $u$  é decrescente próximo de qualquer ponto  $x_0 \in \partial\Omega \cap \{x_1 > 0\}$  na direção  $x_1$ . Logo, para  $0 \leq \lambda < 1$  suficientemente próximo de 1, vale a seguinte desigualdade

$$u(x) < u(x^\lambda), \quad \text{para cada } x \in E_\lambda, \tag{2.11}$$

pois  $2\lambda - x_1 < x_1$ . Defina

$$\lambda_0 = \inf \{0 \leq \lambda < 1; (2.11) \text{ vale para cada } \mu \in [\lambda, 1)\}.$$

Vamos mostrar que  $\lambda_0 = 0$ . Suponha por absurdo que  $\lambda_0 > 0$ . Escreva

$$w(x) = u(x^{\lambda_0}) - u(x), \quad (x \in E_{\lambda_0}).$$

Então,

$$-\Delta w = f(u(x^{\lambda_0})) - f(u(x)) = -cw, \text{ em } E_{\lambda_0}$$

onde

$$c(x) = - \int_0^1 f'(su(x^{\lambda_0}) + (1-s)u(x)) ds.$$

Pela definição de  $\lambda_0$ , temos  $w \geq 0$  em  $E_{\lambda_0}$ . Assim, podemos aplicar o Lema 2.1 com  $V = E_{\lambda_0}$  para concluir que  $w > 0$  em  $E_{\lambda_0}$  e  $w_{x_1} > 0$  em  $T_{\lambda_0} \cap \Omega$ . Então,

$$u(x) < u(x^{\lambda_0}) \text{ em } E_{\lambda_0}$$

e

$$u_{x_1} < 0 \text{ em } T_{\lambda_0} \cap \Omega,$$

visto que  $w_{x_1} = -2u_{x_1}$  em  $T_{\lambda_0} \cap \Omega$ . Um vez que estamos supondo  $\lambda_0 > 0$ , podemos escolher  $\epsilon_0 > 0$  suficientemente pequeno tal que  $\lambda_0 - \epsilon > 0$ , para  $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$ . Assim, diminuindo  $\epsilon_0$  se necessário, podemos utilizar o Lema 2.2 para concluir que

$$u(x) < u(x^{\lambda_0 - \epsilon}) \text{ em } E_{\lambda_0 - \epsilon}, \quad \forall 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0, \quad (2.12)$$

visto que poderemos assumir  $u$  decrescente em  $(\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon)$  na variável  $x_1$ . Isso contradiz a definição de  $\lambda_0$ . Logo  $\lambda_0 = 0$  e vale

$$u(-x_1, x_2, \dots, x_n) \geq u(x_1, x_2, \dots, x_n), \text{ para todo } x \in \Omega \cap \{x_1 > 0\}.$$

Aplicando um argumento semelhante ao anterior ao conjunto  $\Omega \cap \{x_1 < 0\}$  conseguimos mostrar que  $u(-x_1, x_2, \dots, x_n) \leq u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  para  $x \in \Omega \cap \{x_1 > 0\}$ . Concluindo assim que  $u$  é simétrica com relação ao plano  $T_0$  e  $u_{x_1} = 0$  em  $T_0$ .

Pela invariância do Laplaciano por rotação esse argumento pode ser aplicado em qualquer direção, assim utilizando o Lema 2.3 garantimos que  $u$  é simétrica. Visto que  $u_{x_1} < 0$  em  $T_\lambda \cap \Omega$   $0 \leq \lambda \leq 1$ , então para  $y$  com  $y = (\lambda, 0, \dots, 0)$  e temos  $u_{x_1}(y) < 0$  e assim  $u$  é decrescente na direção  $x_1$ , pela simetria de  $u$  obtemos que  $u$  é radialmente decrescente.  $\square$

## 2.3 Problema clássico de simetria de Serrin

Nessa sessão apresentaremos o resultado obtido por Serrin em [14] que utilizou o método dos planos móveis para mostrar que o domínio de solução do problema (2.1) é necessariamente uma bola e que a solução é radialmente simétrica.

**Teorema 2.2.** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  domínio limitado com fronteira suave e simplesmente conexo, e  $\nu = \nu_x$  o vetor normal unitário exterior em  $x \in \partial\Omega$ . Se  $u$  é uma solução de (2.1), então  $\Omega$  é uma bola de raio  $R$  centrada em algum ponto e  $u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{2n}$ .*

*Demonstração.* Primeiramente, pelo Teorema 1.6 temos  $u > 0$  em  $\Omega$ . Além disso, pelo Teorema 1.4 segue-se

$$\begin{aligned} -|\Omega| &= \int_{\Omega} \Delta u dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu_x} d\sigma \\ &= c|\partial\Omega|_{n-1}. \end{aligned}$$

Logo,

$$c \neq 0.$$

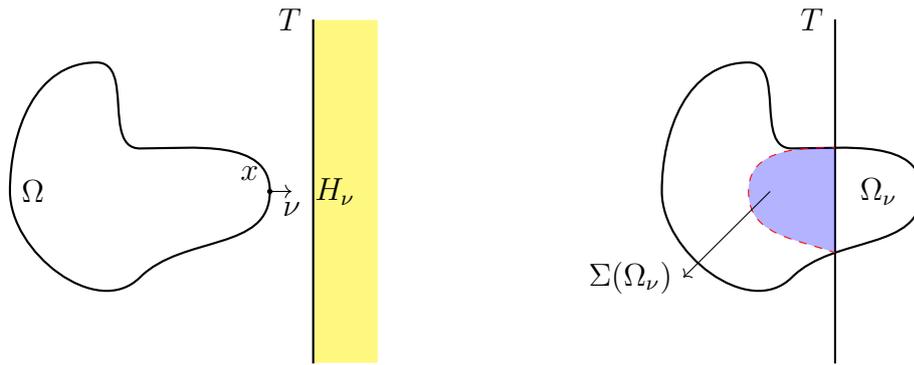


Figura 2.2: Região  $\Sigma(\Omega_\nu)$ .

Seja  $T$  algum hiperplano que não intersecta  $\Omega$ , com normal unitário  $\nu = \nu_x$  para algum  $x \in \partial\Omega$ , vamos denotar por  $H_\nu$  o semiespaço aberto determinado por  $T$  que não contém  $\Omega$ . Moveremos esse semiespaço perpendicularmente em relação a  $\nu$  na direção de  $\Omega$  até  $\Omega \cap H_\nu \neq \emptyset$ , isto é, movemos o semiespaço até ele intersectar  $\Omega$ . Denotemos por  $\Omega_\nu = \Omega \cap H_\nu$  e  $\Sigma(\Omega_\nu)$  a reflexão de  $\Omega_\nu$  com relação ao hiperplano  $\partial H_\nu$ .

Iremos parar o movimento do semiespaço  $H_\nu$  quando um dos casos abaixo ocorrer:

- A)  $\Sigma(\Omega_\nu)$  se tornar internamente tangente à  $\partial\Omega$  em um ponto  $P$  que não pertence a  $\partial H_\nu$ ;
- B)  $H_\nu$  tomar uma posição de modo que  $\nu$  seja tangente a  $\partial\Omega$  em algum ponto  $Q$ .

Denotemos por  $H'_\nu$  o semiespaço em que ocorre A ou B e por  $\Omega'_\nu = H'_\nu \cap \Omega$ . O objetivo agora é mostrar que  $\Omega$  é simétrico com relação ao hiperplano  $\partial H'_\nu$ . Como  $x \in \partial\Omega$  é arbitrário, isso provará que  $\Omega$  é simétrico em todas as direções e conseqüentemente  $\Omega$  é uma bola.

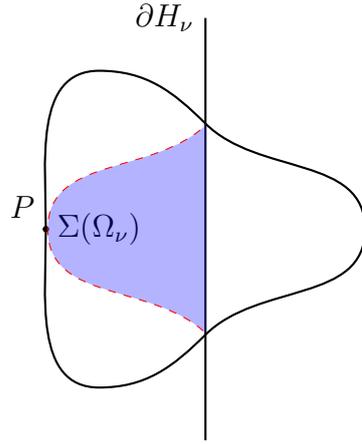


Figura 2.3: Caso A.

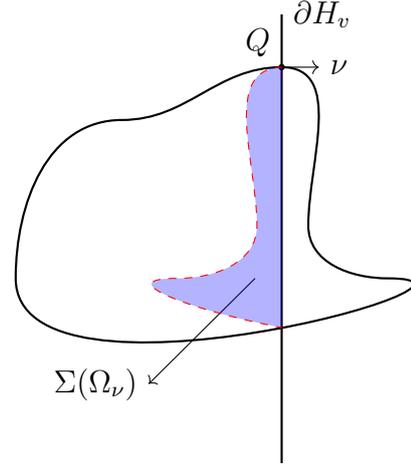


Figura 2.4: Caso B.

Seja  $x^{\lambda, \nu} = x - 2(x \cdot \nu)\nu + 2\lambda\nu$ , a reflexão de um ponto  $x$  sobre o hiperplano  $\partial H'_\nu$  que satisfaz

$$\partial H'_\nu = \{y \in \mathbb{R}^n; y \cdot \nu = \lambda\}.$$

Denote por  $\Sigma(U)$  a reflexão de um conjunto  $U$  com relação  $\partial H'_\nu$ . Defina  $w : \Sigma(\Omega'_\nu) \rightarrow \mathbb{R}$ , por

$$w(x) = u(x^{\lambda, \nu}).$$

Note que  $w$  é bem definida já que por construção temos  $\Sigma(\Omega'_\nu) \subset \Omega$ .

A seguir destacamos algumas propriedades da função  $w$ :

- $\Delta w = -1$ , em  $\Sigma(\Omega'_\nu)$ .

De fato, denote  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ , com  $|\nu| = 1$ . Segue

$$w(x) = u(x^{\lambda, \nu}) = u(\overbrace{x_1 - 2(x \cdot \nu)\nu_1 + 2\lambda\nu_1}^{y_1}, \dots, \overbrace{x_n - 2(x \cdot \nu)\nu_n + 2\lambda\nu_n}^{y_n})$$

e assim

$$w_{x_i} = u_{y_i}(1 - 2\nu_i^2) + \sum_{j=1; \bar{i}}^n u_{y_j}(-2\nu_i\nu_j),$$

onde  $\bar{i}$  significa que omitimos da soma a parcela com índice  $i$ . Segue

$$w_{x_i x_i} = u_{y_i y_i}(1 - 2\nu_i^2)^2 + (2 - 4\nu_i^2) \sum_{j=1; \bar{i}}^n u_{y_j y_i}(-2\nu_i\nu_j) + \sum_{j,k=1; \bar{i}}^n u_{y_j y_k}(4\nu_i^2\nu_k\nu_j).$$

Como  $|\nu|^2 = 1$ , temos

$$\begin{aligned}
 w_{x_i x_i} &= u_{y_i y_i} \left( \sum_{j=1; \bar{i}}^n \nu_j^2 - \nu_i^2 \right)^2 + (2 - 4\nu_i^2) \sum_{j=1; \bar{i}}^n u_{y_j y_i} (-2\nu_i \nu_j) + \sum_{j,k=1; \bar{i}}^n u_{y_j y_k} (4\nu_i^2 \nu_k \nu_j) \\
 &= u_{y_i y_i} \left( \sum_{j=1; \bar{i}}^n \nu_j^2 - \nu_i^2 \right)^2 + (2 - 4\nu_i^2) \sum_{j=1; \bar{i}}^n u_{y_j y_i} (-2\nu_i \nu_j) \\
 &+ \sum_{j,k=1; \bar{i}; j \neq k}^n u_{y_j y_k} (4\nu_i^2 \nu_k \nu_j) + \sum_{k=1; \bar{i}}^n u_{y_k y_k} (4\nu_i^2 \nu_k^2).
 \end{aligned}$$

Um vez que

$$\left( \sum_{j=1; \bar{i}}^n \nu_j^2 - \nu_i^2 \right)^2 = \left( \sum_{j=1}^n \nu_j^2 \right)^2 - 4 \sum_{j=1; \bar{i}}^n \nu_i^2 \nu_j^2 = \sum_{j=1}^n \nu_j^2 - 4 \sum_{j=1; \bar{i}}^n \nu_i^2 \nu_j^2$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n w_{x_i x_i} &= \sum_{i=1}^n u_{y_i y_i} \left( \sum_{j=1; \bar{i}}^n \nu_j^2 - \nu_i^2 \right)^2 + \sum_{i=1}^n (2 - 4\nu_i^2) \sum_{j=1; \bar{i}}^n u_{y_j y_i} (-2\nu_i \nu_j) + \\
 &\sum_{i=1}^n \sum_{j,k=1; \bar{i}; j \neq k}^n u_{y_j y_k} (4\nu_i^2 \nu_k \nu_j) + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1; \bar{i}}^n u_{y_k y_k} (4\nu_i^2 \nu_k^2) \\
 &= \sum_{i=1}^n u_{y_i y_i} \left( \sum_{j=1}^n \nu_j^2 - 4 \sum_{j=1; \bar{i}}^n \nu_i^2 \nu_j^2 \right) + \sum_{i=1}^n (2 - 4\nu_i^2) \sum_{j=1; \bar{i}}^n u_{y_j y_i} (-2\nu_i \nu_j) + \\
 &\sum_{i=1}^n \sum_{j,k=1; \bar{i}; j \neq k}^n u_{y_j y_k} (4\nu_i^2 \nu_k \nu_j) + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1; \bar{i}}^n u_{y_k y_k} (4\nu_i^2 \nu_k^2).
 \end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n w_{x_i x_i} &= \sum_{i=1}^n u_{y_i y_i} \left( \sum_{j=1}^n \nu_j^2 - 4 \sum_{j=1; \bar{i}}^n \nu_i^2 \nu_j^2 \right) + \sum_{i=1}^n (2 - 4\nu_i^2) \sum_{j=1; \bar{i}}^n u_{y_j y_i} (-2\nu_i \nu_j) + \\
 &\sum_{i=1}^n \sum_{j,k=1; \bar{i}; j \neq k}^n u_{y_j y_k} (4\nu_i^2 \nu_k \nu_j) + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1; \bar{i}}^n u_{y_k y_k} (4\nu_i^2 \nu_k^2) \\
 &= \sum_{i=1}^n u_{y_i y_i} \left( \sum_{j=1}^n \nu_j^2 \right) + \sum_{i=1}^n (2 - 4\nu_i^2) \sum_{j=1; \bar{i}}^n u_{y_j y_i} (-2\nu_i \nu_j) + \\
 &\sum_{i=1}^n \sum_{j,k=1; \bar{i}; j \neq k}^n u_{y_j y_k} (4\nu_i^2 \nu_k \nu_j)
 \end{aligned}$$

usando  $|\nu|^2 = 1$  segue

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n w_{x_i x_i} &= \sum_{i=1}^n u_{y_i y_i} + \sum_{i=1}^n (2 - 4\nu_i^2) \sum_{j=1; \bar{i}}^n u_{v_j y_i} (-2\nu_i \nu_j) + \sum_{i=1}^n \sum_{j,k=1; \bar{i}; j \neq k}^n u_{y_j y_k} (4\nu_i^2 \nu_k \nu_j) \\ &= \sum_{i=1}^n u_{y_i y_i} + \sum_{i=1}^n ((2 - 4\nu_i^2) \sum_{j=1; \bar{i}}^n u_{y_j y_i} (-2\nu_i \nu_j) + \sum_{j,k=1; \bar{i}; j \neq k}^n u_{y_j y_k} (4\nu_i^2 \nu_k \nu_j)) \\ &= -1 + \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1; \bar{i}}^n u_{y_i y_i} [8\nu_i^2 \nu_i \nu_j - 4\nu_i \nu_j] + \sum_{j,k=1; \bar{i}; j \neq k}^n u_{y_j y_k} (4\nu_i^2 \nu_k \nu_j) \right). \end{aligned}$$

Utilizando que  $u_{y_j y_k} = u_{y_k y_j}$ , segue

$$\sum_{i=1}^n w_{x_i x_i} = -1 + \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1; \bar{i}}^n u_{y_i y_i} [8\nu_i^2 \nu_i \nu_j - 4\nu_i \nu_j] + \sum_{j,k=1; \bar{i}; j < k}^n u_{y_j y_k} (8\nu_i^2 \nu_k \nu_j) \right). \quad (2.13)$$

Dados  $l, m \in \{1, 2, \dots, n\}$ , vamos provar que as parcelas que possuem  $u_{y_l y_m}$  se anulam. Na expressão

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1; \bar{i}}^n u_{y_i y_i} [8\nu_i^2 \nu_i \nu_j - 4\nu_i \nu_j],$$

temos duas parcelas com índices  $l$  e  $m$ , a saber

$$u_{y_l y_m} [8\nu_l^2 \nu_l \nu_m - 4\nu_l \nu_m] \quad e \quad u_{y_m y_l} [8\nu_m^2 \nu_m \nu_l - 4\nu_m \nu_l]$$

cuja soma é

$$u_{y_l y_m} [8(\nu_l^2 + \nu_m^2) \nu_l \nu_m - 8\nu_l \nu_m]. \quad (2.14)$$

Na expressão

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j,k=1; \bar{i}; j < k}^n u_{y_j y_k} (8\nu_i^2 \nu_k \nu_j).$$

para os índices  $j = l$  e  $k = m$  e  $i = 1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, m-1, m+1, \dots, n$  temos

$$\sum_{i=1; \bar{l}; \bar{m}} u_{y_m y_l} (8\nu_i^2 \nu_l \nu_m). \quad (2.15)$$

Somando (2.14) e (2.15) temos

$$\sum_{i=1; \bar{l}; \bar{m}} u_{y_m y_l} (8\nu_i^2 \nu_l \nu_m) + u_{y_l y_m} [8(\nu_l^2 + \nu_m^2) \nu_l \nu_m - 8\nu_l \nu_m] \quad (2.16)$$

$$= u_{y_l y_m} [8(\nu_l^2 + \dots + \nu_n^2) \nu_l \nu_m - 8\nu_l \nu_m] = 0. \quad (2.17)$$

Como  $l, m$  são arbitrários, então

$$\Delta w = -1.$$

- $w = u$  em  $\partial\Sigma(\Omega'_\nu) \cap \partial H'_\nu$ .

Isso segue diretamente do fato de que esse conjunto é invariante pela reflexão.

- $w = 0$  e  $\frac{\partial w}{\partial \nu_x} = c$  em  $\partial\Sigma(\Omega'_\nu) \setminus \partial H'_\nu$ .

Se  $x \in \partial\Sigma(\Omega'_\nu) \setminus \partial H'_\nu$ , então  $x^{\lambda, \nu} \in \partial\Omega$  onde  $w(x) = u(x^{\lambda, \nu}) = 0$ . Para a segunda igualdade a reflexão de um vetor  $k = (k_1, \dots, k_n)$  é dada por  $k^{\lambda, \nu} = k - 2(k \cdot \nu)\nu$ . Assim, se  $x \in \partial\Sigma(\Omega'_\nu) \setminus \partial H'_\nu$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \nu_x}(x) &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{w(x + t\nu_x) - w(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{u((x + t\nu_x)^{\lambda, \nu}) - u(x^{\lambda, \nu})}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{u(x + t\nu_x + 2(\lambda - (x + t\nu_x \cdot \nu))\nu)\nu_x - u(x - 2(\lambda - (x \cdot \nu))\nu)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{u(x + 2(\lambda - (x \cdot \nu))\nu + t(\nu_x - 2(\nu_x \cdot \nu)\nu)) - u(x - 2(\lambda - (x \cdot \nu))\nu)}{t}. \end{aligned}$$

Lembre que  $\nu_x - 2(\nu_x \cdot \nu)\nu$  é a reflexão do vetor normal de  $x \in \partial\Sigma(\Omega'_\nu) \setminus \partial H'_\nu$  e como  $x^{\lambda, \nu} \in \Sigma(\Omega'_\nu) \setminus \partial H'_\nu$ , então

$$\frac{\partial w}{\partial \nu_x}(x) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{u(x^{\lambda, \nu} + t\nu_x^{\lambda, \nu}) - u(x^{\lambda, \nu})}{t} = c.$$

Já que  $\nu_x - 2(\nu_x \cdot \nu)\nu$  é normal exterior com relação a  $\partial\Omega'_\nu$  em  $x^{\lambda, \nu}$ .

Observando que  $\Sigma(\Omega'_\nu) \subset \Omega$ , podemos considerar a função  $u - w$  definida em  $\Sigma(\Omega'_\nu)$ . Além disso, temos

1.  $\Delta(u - w) = 0$  em  $\Sigma(\Omega'_\nu)$ ;
2.  $u - w = 0$  em  $\partial\Sigma(\Omega'_\nu) \cap \partial H'_\nu$ ;
3.  $u - w \geq 0$  em  $\partial\Sigma(\Omega'_\nu) \setminus \partial H'_\nu$ , pois como  $\partial\Sigma(\Omega'_\nu) \subset \Omega$ , então para  $x \in \partial\Sigma(\Omega'_\nu) \setminus \partial H'_\nu$  temos que  $u(x) \geq 0$ , já que as soluções de  $u$  são estritamente positivas e  $w(x) = 0$ .

O Teorema 1.6 fornece

*I.*  $u - w > 0$  em  $\Sigma(\Omega'_\nu)$  ou

*II.*  $u \equiv w$  em  $\Sigma(\Omega'_\nu)$ .

Suponha que ocorra o caso *A*), isto é,  $\Sigma(\Omega'_\nu)$  é internamente tangente ao ponto  $P$  que não pertence a  $\partial H'_\nu$ . Além disso, suponha que ocorra *I*, o Lema 1.5 fornece

$$\frac{\partial}{\partial \nu_P}(u - w) < 0$$

o que contradiz

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_P} = \frac{\partial w}{\partial \nu_P} = c.$$

Assim,  $I$  não pode ocorrer no caso  $A$ ).

Portanto, no caso caso  $A$ ) só é possível ocorrer o caso  $II$ , isto é,  $u \equiv w$  em  $\Sigma(\Omega'_\nu)$ . Como  $\Sigma(\Omega'_\nu) \subset \Omega$ , então  $\partial\Sigma(\Omega'_\nu) \setminus \partial H'_\nu \subset \bar{\Omega}$ . Assim, temos as opções:

a)  $\partial\Sigma(\Omega'_\nu) \setminus \partial H'_\nu \subset \partial\Omega$  ou

b)  $\partial\Sigma(\Omega'_\nu) \setminus \partial H'_\nu \not\subset \partial\Omega$ .

Caso a) ocorra,  $\Omega$  é simétrica com relação a  $\partial H'_\nu$ . De fato, suponha que existe  $x_0 \in \Omega \setminus \Sigma(\Omega'_\nu)$  tal que  $x_0$  pertença ao semiespaço que não contém  $\Omega'_\nu$ . Tomemos  $y_0 \in \Sigma(\Omega'_\nu)$  e seja  $\beta : I \rightarrow \Omega$  caminho contínuo ligando  $x_0$  a  $y_0$ . Pelo Teorema da Alfândega devemos ter  $\beta(I) \cap \partial\Sigma(\Omega'_\nu) \neq \emptyset$  o que contradiz  $\beta(I) \subset \Omega$  e  $\partial\Sigma(\Omega'_\nu) \setminus \partial H'_\nu \subset \partial\Omega$ .

Caso b) ocorra existirá um ponto  $p \in \partial\Sigma(\Omega'_\nu) \setminus \partial H'_\nu$  tal que  $p \notin \partial\Omega$  e assim  $p \in \Omega$ . Note que temos  $w(p) = 0$ , e portanto, teríamos que  $u(p) = 0$  o que é um absurdo já que  $u > 0$  em  $\Omega$ . Logo, só é possível ocorrer o caso a).

Assim,  $\Omega$  é simétrico com relação a  $\partial H'_\nu$ . Isso vale para todos os pontos de  $\partial\Omega$ . Portanto,  $\Omega$  é simétrico em todas as direções. Segue que  $\Omega$  é uma bola centrada em algum ponto.

Analisemos agora o caso  $B$ ). Fixemos um sistema de coordenadas com origem em  $Q$  e  $x_n$  na direção normal interior do ponto  $Q$  (i.e, na direção  $-\nu_Q$ ) e  $x_1$  na direção normal a  $\partial H'_\nu$ , i.e na direção  $\nu$ . Como  $x_n$  está na direção de  $-\nu_Q$ , então  $\frac{\partial u}{\partial x_n} \neq 0$  em  $\partial\Omega$ . Sendo  $u = 0$  em  $\partial\Omega$  então  $\partial\Omega$  é uma hipersuperfície de classe  $C^2$ , assim  $\partial\Omega$  é localmente o gráfico de uma função e daí

$$x_n = \phi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \quad \phi \in C^2$$

onde  $0 = \phi(0')$ ,  $Q = (0', \phi(0'))$  e  $0' = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n-1}$ .

Como  $u = 0$  em  $\partial\Omega$ , segue que

$$u(x_1, \dots, x_{n-1}, \phi) = 0 \text{ em } \partial\Omega. \quad (2.18)$$

Uma parametrização de  $\partial\Omega$  é dada por

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = (x_1, x_2, \dots, \phi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}))$$

e o normal unitário exterior é dado pela seguinte expressão

$$\nu = \frac{1}{(|\nabla\phi|^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}(-\nabla\phi, 1). \quad (2.19)$$

Utilizando que  $\frac{\partial u}{\partial \nu} = c$  em  $\partial\Omega$  temos

$$c = \frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu = \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_{n-1}}, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) \cdot \left( -\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial \phi}{\partial x_{n-1}}, 1 \right) \right) \frac{1}{(|\nabla\phi|^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}.$$

Daí,

$$\frac{\partial u}{\partial x_n} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} = c \left( 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.20)$$

Derivando (2.18) com respeito a  $x_i$  para  $i = 1, 2, \dots, n-1$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = 0. \quad (2.21)$$

Visto que  $\nu$  está na direção de  $x_n$ , as  $n-1$  primeiras coordenadas de (2.19) são nulas quando avaliadas em  $Q$ . Logo, em  $Q$  temos

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(0') = 0, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.22)$$

Utilizando (2.22) em (2.21)

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(Q) = 0 \text{ e } \frac{\partial u}{\partial x_n}(Q) = c, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.23)$$

Derivando (2.21) com respeito a  $x_j$ , temos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Avaliando em  $Q$  tem-se

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(Q) + c \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}(0') = 0. \quad (2.24)$$

Derivando (2.20) com respeito a  $x_i$  com  $i = 1, 2, \dots, n-1$  e avaliando em  $Q$ , utilizando (2.22) e (2.23), temos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_i}(Q) = 0.$$

Como  $\Delta u = -1$  em  $\Omega$  e  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  temos  $\Delta u(Q) = -1$ . Daí

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(Q) = - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(Q) - 1.$$

De (2.24) tomando  $i = j$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(Q) = c \Delta \phi(0') - 1.$$

Por construção  $\Sigma(\Omega'_\nu) \subseteq \Omega$  e todas as derivadas  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_j}(0') = 0$  para  $j = 2, \dots, n-1$ , pois  $\frac{\partial \phi}{\partial x_1}$  tem valor crítico em  $Q$  para todas as coordenadas exceto a  $x_1$ . Defina

$$w(x_1, \dots, x_n) = u(-x_1, x_2, \dots, x_n)$$

a função  $w$  acima é a função  $w$  original nesse novo sistema que estamos trabalhando. Na base que estamos trabalhando temos  $Q = 0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n$ .

•  $\frac{\partial w}{\partial x_1} = -\frac{\partial u}{\partial x_1}$  e avaliando em  $Q$

$$\frac{\partial w}{\partial x_1}(Q) = \frac{\partial w}{\partial x_1}(0, \dots, 0) = -\frac{\partial u}{\partial x_1}(0, \dots, 0) = -\frac{\partial u}{\partial x_1}(Q) = 0.$$

•  $\frac{\partial w}{\partial x_j}(Q) = \frac{\partial w}{\partial x_j}(0, \dots, 0) = \frac{\partial u}{\partial x_j}(0, \dots, 0) = \frac{\partial u}{\partial x_j}(Q) = \begin{cases} 0, & \text{se } 2 \leq j \leq n-1 \\ c, & \text{se } j = n \end{cases}$

• Por (2.21) temos para  $i = 1$  e  $2 \leq j \leq n-1$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_j} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_j} = 0.$$

Em  $Q$  temos, utilizando que  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_j}(0') = 0$  para  $2 \leq j \leq n-1$ , tem-se

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_j}(Q) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_j}(Q) = 0.$$

• Para  $i = j = 1$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}(x) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( -\frac{\partial u}{\partial x_1}(-x_1, \dots, x_n) \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(-x_1, \dots, x_n).$$

Em  $Q$ , temos

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}(Q) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(Q)$$

• Para  $i = 1$  e  $j = n$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_n}(Q) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}(Q) = 0.$$

• Para  $i \neq 1$  e  $j \neq 1$  temos

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(-x_1, \dots, x_n)$$

e assim,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}(Q) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(Q).$$

Isto é, todas as primeiras e segundas derivadas de  $w$  e  $u$  coincidem em  $Q$ . A função  $h = u - w$  satisfaz

$$\Delta h = 0 \text{ em } \Sigma(\Omega'_\nu) \text{ e } h > 0 \text{ em } \Sigma(\Omega'_\nu)$$

e  $h(Q) = 0$ . Se  $\gamma$  é uma direção não tangencial entrando em  $\Sigma(\Omega'_\nu)$  a partir de  $Q$ , o Teorema 1.8 nos garante que

$$\text{ou } \frac{\partial(u-w)}{\partial \gamma}(Q) > 0 \text{ ou } \frac{\partial^2(u-w)}{\partial \gamma^2}(Q) > 0$$

o que contradiz o fato das primeiras e segundas derivadas coincidirem em  $Q$ . Daí,  $I$  também não ocorre no caso  $B$ ).

Assim,  $\Omega$  é simétrico com relação a  $\partial H'_\nu$ . Sendo  $\nu$  é arbitrário, então  $\Omega$  é uma bola centrada em algum ponto.

Pelo princípio do máximo se  $u, h$  são soluções de (2.1), então  $u = h$  em  $\Omega$ . Digamos que  $\Omega$  é uma bola de raio  $b$  centrada na origem e seja  $h(x) = \frac{(b^2 - |x|^2)}{2n}$ , temos

1.  $\Delta h = -1$

2.  $h = 0$  em  $\partial\Omega$

3.  $\nabla h(x) = \left( \frac{-x_1}{n}, \dots, \frac{-x_n}{n} \right)$

Como  $\Omega$  é uma bola, então o vetor normal unitário em cada ponto é dado por  $\nu(x) = \left( \frac{x_1}{b}, \dots, \frac{x_n}{b} \right)$ , assim

$$\frac{\partial h}{\partial \nu} = \nabla h \cdot \nu = \frac{b}{n}.$$

Segue da unicidade que a única solução para o problema é  $h$ .

□

# Capítulo 3

## Simetria para a equação de Laplace em um anel rígido

Nesse capítulo vamos estudar um resultado de simetria devido Reichel [12] para de solução da equação de Laplace (1-Hessiano) em um domínio em forma de anel rígido.

### 3.1 Notações e resultados preliminares

Sejam  $0 < R_1 < R_2$  e  $A = \{x \in \mathbb{R}^n; R_1 < |x| < R_2\}$  o anel rígido determinado por  $R_1, R_2$ . O objetivo dessa seção é discutir simetria radial e monotonicidade para uma solução  $C^2(\bar{A})$  do seguinte problema para o operador Laplaciano no anel  $A$

$$\begin{cases} \Delta u + f(|x|, u, |\nabla u|) = 0, & 0 < u < a, & \text{se } x \in \bar{A} \\ u = 0, & & \text{se } |x| = R_2, \\ u = a, & & \text{se } |x| = R_1 \end{cases} \quad (3.1)$$

onde  $a > 0$  é uma constante e  $f : [R_1, R_2] \times \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f$  satisfaz

- A)  $f = f(r, p, q)$  é decrescente em  $r$ ;
- B)  $f(r, p, q) = f_1(r, p, q) + f_2(r, p)$  com  $f_1$  Lipschitz contínua em  $p, q$ ,  $f_2$  crescente em  $p$ .

Para  $\lambda \in (0, R_2)$ , vamos introduzir a seguir algumas notações e fatos que serão necessários no que se segue.

1.  $T_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n, x_1 = \lambda\}$ ;
2.  $x^\lambda = (2\lambda - x_1, x')$  reflexão de  $x$  em relação à  $T_\lambda$ , onde  $x' = (x_2, x_3, \dots, x_n)$ ;

3.  $B^\lambda = \{x^\lambda; x \in B\}$  reflexão do conjunto  $B$  em relação à  $T_\lambda$ ;
4.  $\widetilde{\Sigma}(\lambda) = \{(x_1, x') \in A; x_1 > \lambda\}$ ;
5.  $\Sigma(\lambda) = \widetilde{\Sigma}(\lambda) \setminus \overline{B_{R_1}(0)}^\lambda$ .

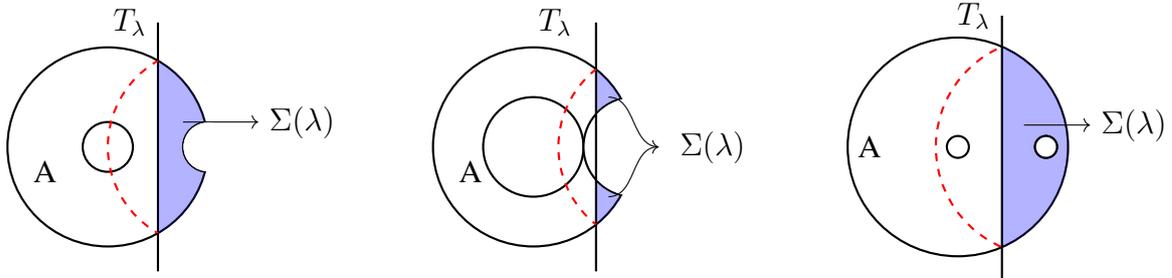


Figura 3.1: Alguns exemplos para a região  $\Sigma(\lambda)$  no caso de um anel rígido.

**Lema 3.1.** *Se  $Z$  é uma componente conexa qualquer de  $\Sigma(\lambda)$ , então*

$$E := \partial Z \cap \{x : |x| = R_2, x_1 > \lambda\} \neq \emptyset.$$

*Em particular, existe uma seqüência  $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset E$  tal que  $x_{1,k} \searrow \lambda$  quando  $k \rightarrow +\infty$ , onde estamos denotando  $x_k = (x_{1,k}, \dots, x_{n,k})$ .*

*Demonstração.* Considere inicialmente o caso  $n = 2$  e suponha  $\overline{B_1(0)}^\lambda \subset \Sigma(\lambda)$ . Sejam  $\alpha$  tal que  $0 < \lambda < \alpha < R_2$  e  $x \in T_\alpha$ , digamos que  $x = (\alpha, \xi)$  onde  $\xi$  é tal que  $\sqrt{\alpha^2 + \xi^2} = R_2$ . Logo  $T_\alpha \cap \partial B_{R_2} \neq \emptyset$ . Afirmamos que  $(\alpha, \xi) \in \partial Z$ . De fato, seja  $x_n \rightarrow \xi$  com  $x_n < \xi$  e  $y_n \rightarrow \xi$  com  $\xi < y_n$ . Como  $|(\alpha, x_n)| \rightarrow R_2$  então existe um  $n$  tal que  $|(\alpha, x_n)| > R_1$ , assim  $(\alpha, x_n) \in Z$ . Como  $|(\alpha, y_n)| > R_2$ , então  $(\alpha, \xi)$  é limite de uma seqüência de pontos que pertence a  $Z$  é de uma seqüência de pontos que não pertence a  $Z$ . Portanto,  $(\alpha, \xi) \in \partial Z$  e além disso

$$(\alpha, \xi) \in \partial Z \cap \{x; |x| = R_2, x_1 > \lambda\}.$$

Caso  $\overline{B_1(0)}^\lambda \cap \Sigma(\lambda) \neq \emptyset$  mas  $\overline{B_1(0)}^\lambda \not\subset \Sigma(\lambda)$ , tome  $p = (p_1, p_2) \in \overline{B_1(0)}^\lambda \cap \Sigma(\lambda)$ ,  $\xi$  tal que  $\sqrt{p_1^2 + \xi^2} = R_2$  e aplique a argumentação anterior.

Caso  $\overline{B_1(0)}^\lambda \cap \Sigma(\lambda) = \emptyset$  tome  $\alpha \in (\lambda, R_2)$  e novamente aplique a argumentação do primeiro caso.

Agora, suponhamos  $n \geq 3$  e argumentaremos por indução. Considere a restrição de  $\partial Z$  e  $A$  ao plano  $z = 0$  podemos aplicar o caso  $n = 2$  e garantir que  $\partial Z \cap \{x; |x| = R_2, x_1 > \lambda\} \neq \emptyset$

e que existe uma sequência  $(x_k)$  tal que  $x_{1,k} \rightarrow \lambda$ . Suponha o resultado válido para  $n - 1$  e considere a restrição de  $\partial Z$  e  $A$  ao plano  $x_n = 0$ . Podemos aplicar o caso  $n - 1$  para garantir que  $\partial Z \cap \{x; |x| = R_2, x_1 > \lambda\} \neq \emptyset$ . Assim, para obter a sequência basta tomar uma  $x_k \in E$  tal que  $x_{1,k} \rightarrow \lambda$ .  $\square$

**Exemplo 3.1.** Considere  $R_1 = 1$  e  $R_2 = 4$ ,  $A = \{x \in \mathbb{R}, 1 < |x| < 4\}$  e tome  $\lambda = 2$  temos  $\Sigma(\lambda) = \{x \in \mathbb{R}, 2 < x < 3\}$ ,  $\partial Z = \{2, 3\}$  e daí  $E = \emptyset$ . Isso mostra que o Lema 3.1 não é válido para  $n = 1$ .

**Lema 3.2.** Seja  $u \in C^2(\bar{A})$  uma solução do problema (3.1). Para  $z \in \partial A$  seja  $m \in \mathbb{R}^n$  um vetor unitário tal que  $\gamma(z) \cdot m > 0$ , onde  $\gamma(z)$  é o normal unitário interior com relação  $A$  em  $z$ . Então, existe um  $\rho$  tal que  $\frac{\partial u}{\partial m} > 0$  em  $B_\rho(z) \cap A$  se  $|z| = R_2$  e  $\frac{\partial u}{\partial m} < 0$  em  $B_\rho(z) \cap A$  se  $|z| = R_1$ .

*Demonstração.* A prova desse resultado é análoga àquela do Lema 4.1 e omitida.  $\square$

## 3.2 Simetria radial e monotonicidade de soluções

Nessa seção vamos discutir a monotonicidade e a simetria radial para soluções da equação (3.1).

**Teorema 3.1.** Seja  $f = f(r, p, q)$  decrescente em  $r$  e  $f(r, p, q) = f_1(r, p, q) + f_2(r, p)$  satisfazendo,  $f_1$  Lipschitz contínua em  $p, q$  e  $f_2$  crescente em  $p$ . Então, toda solução  $u$  de (3.1) com  $0 < u < a$  em  $\bar{A}$  é radialmente simétrica e decrescente.

*Demonstração.* Vamos inicialmente mostrar que o problema (3.1) é invariante por rotações.

Para isso, seja  $R \in O(n)$  e  $h(x) = (u \circ R)(x)$ . Escreva

$$Rx = \left( \sum_{k=1}^n a_{k1}x_k, \dots, \sum_{k=1}^n a_{kn}x_k \right), \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

onde  $\{a_{ij}\}$  é a matriz de  $R$  na base canônica de  $\mathbb{R}^n$ . Um cálculo direto mostra que

$$\nabla h(x) = \left( \sum_{k=1}^n a_{k1} \frac{\partial u}{\partial y_k}, \sum_{k=1}^n a_{k2} \frac{\partial u}{\partial y_k}, \dots, \sum_{k=1}^n a_{kn} \frac{\partial u}{\partial y_k} \right)$$

e

$$|\nabla h(x)| = |\nabla u(Rx)|,$$

pois  $\sum_{k=1}^n a_{ik}^2 = 1$  para  $i = 1, \dots, n$  e  $\sum_{j=1}^n a_{ij}a_{jk} = 0$  se  $i \neq k$ . Além disso,  $|Rx| = |x|$  e assim  $(u \circ R)(x) = u(Rx) = 0$  se  $|Rx| = R_2$  e  $(u \circ R)(x) = u(Rx) = a$  se  $|Rx| = R_1$ . Por fim, pelo Corolário 1.1 com  $k = 1$ , temos  $\Delta h(x) = (\Delta u)(Rx)$  e portanto

$$\Delta h(x) + f(|x|, h(x), \nabla h(x)) = \Delta u(Rx) + f(|Rx|, u(Rx), |\nabla u(Rx)|) = 0.$$

Sendo assim, (3.1) é invariante por rotações, para concluir que  $u$  é radialmente simétrica é suficiente mostrar

$$u(x_1, x') \leq u(-x_1, x'), \quad \forall x = (x_1, x') \in A, \quad x_1 > 0. \quad (3.2)$$

Como  $\lambda \in (0, R_2)$  podemos definir a seguinte função

$$w(x, \lambda) = u(x^\lambda) - u(x), \quad \text{para } x \in \Sigma(\lambda),$$

Uma vez que  $\Sigma(\lambda)^\lambda \subset A$ , temos que  $w$  é bem definida. Provemos que  $w$  satisfaz as seguintes propriedades:

(i)  $w(x, \lambda) \geq 0$  em  $\Sigma(\lambda)$ ;

(ii)  $\frac{\partial w}{\partial x_1}(x, \lambda) > 0$  em  $A \cap T_\lambda$ .

Fazendo  $\lambda \rightarrow 0$  em (i), obtemos (3.2).

**Etapa A:** Primeiramente provemos que existe  $\varepsilon > 0$  tal que para qualquer  $\lambda \in (R_2 - \varepsilon, R_2)$  (i), (ii) são válidos.

Podemos aplicar Lema 3.2 com  $z = x = (R_2, 0, \dots, 0)$  e  $m = (-1, 0, \dots, 0)$  para garantir a existência  $\rho > 0$  tal que  $\frac{\partial u}{\partial x_1} < 0$  em  $B_\rho(x) \cap A$ . Afirmamos que

$$\overline{\Sigma(\lambda) \cup \Sigma(\lambda)^\lambda} \subset \overline{B_\rho(x)}, \quad \text{para todo } \lambda \in (R_2 - \varepsilon, R_2)$$

se  $\varepsilon > 0$  é suficientemente pequeno. De fato, tome  $\varepsilon < \frac{\rho^2}{2R_2}$ . Para  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \overline{\Sigma(\lambda)}$ , temos

$$\begin{aligned} |y - x|^2 &= |(y_1, y_2, \dots, y_n) - (R_2, 0, \dots, 0)|^2 = |(y_1 - R_2, y_2, \dots, y_n)|^2 \\ &= (y_1 - R_2)^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 = \underbrace{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}_{\leq R_2^2} - 2y_1R_2 + R_2^2 \\ &\leq R_2^2 - 2R_2^2 + \rho^2 + R_2^2 = \rho^2, \end{aligned}$$

donde segue que  $y \in B_\rho(x)$ .

Agora, tome  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \overline{\Sigma(\lambda)}$ . Por definição, a reflexão em torno do hiperplano  $T_\lambda$  é dada por  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \rightarrow y^\lambda = (2\lambda - y_1, y_2, \dots, y_n)$ , assim

$$\begin{aligned} |y^\lambda - x|^2 &= |(2\lambda - y_1, y_2, \dots, y_n) - (R_2, 0, \dots, 0)|^2 = (2\lambda - y_1 - R_2)^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 \\ &= (2\lambda - R_2)^2 - 2y_1(2\lambda - R_2) + \underbrace{y_1^2 + \dots + y_n^2}_{\leq R_2^2} \\ &\leq (2\lambda - R_2)(2\lambda - R_2 - 2y_1) + R_2^2. \end{aligned}$$

Usando que  $\lambda \leq R_2$  e que  $y_1 > \lambda > R_2 - \frac{\rho^2}{2R_2}$ , segue

$$|y^\lambda - x|^2 < R_2 \left( R_2 + \frac{\rho^2}{R_2} - 2R_2 \right) + R_2^2 = \rho^2.$$

Assim, se  $\lambda \in \left( R_2 - \frac{\rho^2}{2R_2}, R_2 \right)$  segue  $\overline{\Sigma(\lambda)} \cup \overline{\Sigma(\lambda)^\lambda} \subset \overline{B_\rho(x)}$ . Se  $\lambda \in (R_2 - \frac{\varepsilon}{2}, R_2)$  e  $x \in \Sigma(\lambda)$ , como  $\Sigma(\lambda) \subset B_\rho$  e  $\overline{\Sigma(\lambda)^\lambda} \subset B_\rho(x)$ , então pela convexidade de  $B_\rho(x)$  o segmento de reta  $[x^\lambda, x] \subset B_\rho(x)$ . Seja  $g(t) = u(x_1 + t, x')$  definida em  $2\lambda - 2x_1 \leq t \leq 0$  temos

$$u(x^\lambda) - u(x) = \int_0^{2\lambda-2x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1 + t, x') dt = \int_{2\lambda-2x_1}^0 -\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1 + t, x') dt > 0.$$

Assim, (i) é valido para  $\lambda \in (R_2 - \frac{\varepsilon}{2}, R_2)$ . Com o mesmo  $\lambda$ , nos utilizando do fato de  $x^\lambda = x$  em  $T_\lambda$ , segue

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x_1}(x, \lambda) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{w(x + te_1) - w(x)}{t} \\ \lim_{t \rightarrow 0} &= \frac{u(2\lambda - x_1 - t, x') - u(x_1 + t, x') + u(2\lambda - x_1, x') - u(x_1, x')}{t} \end{aligned}$$

e visto que  $x_1 = \lambda$

$$\frac{\partial w}{\partial x_1}(x, \lambda) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(\lambda - t, x') - u(\lambda, x') - u(\lambda + t, x') + u(\lambda, x')}{t} = -2 \frac{\partial u}{\partial x_1}(x).$$

Assim,

$$\frac{\partial w}{\partial x_1}(x, \lambda) = -2 \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) > 0 \text{ em } A \cap T_\lambda,$$

para  $\lambda \in (R_2 - \frac{\varepsilon}{2}, R_2)$ .

**Etapa B:** Na Etapa A foi mostrado a existência de um  $\lambda \in (0, R_2)$ , com  $\lambda$  suficientemente próximo de  $R_2$ , tal que  $w(x, \lambda) \geq 0$ . O objetivo nessa etapa é mostrar que  $w > 0$  em qualquer componente conexa de  $Z$  de  $\Sigma(\lambda)$ .

A função  $v(x, \lambda) = u(x^\lambda)$  satisfaz

$$\Delta v(x) + f(|x^\lambda|, v(x), |\nabla v(x)|) = 0 \text{ em } \Sigma(\lambda),$$

já que

$$\Delta v(x) + f(|x^\lambda|, v(x), |\nabla v(x)|) = \Delta u(x^\lambda) + f(|x^\lambda|, u(x^\lambda), |\nabla u(x^\lambda)|).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta w + f(|x^\lambda|, v, |\nabla v|) - f(|x|, u, |\nabla u|) \\ &\geq \Delta w + f(|x|, v, |\nabla v|) - f(|x|, u, |\nabla u|) \\ &\geq \Delta w + f_1(|x|, v, |\nabla v|) - f_1(|x|, u, |\nabla u|) \end{aligned}$$

onde na primeira desigualdade utilizamos que  $|x| > |x^\lambda|$  e o que  $f = f(r, p, q)$  é decrescente em  $r$ , na segunda desigualdade o fato de  $f_2 = (r, p)$  é crescente em  $p$  juntamente com  $v(x, \lambda) \geq u(x)$ .

Por simplicidade, denotamos momentaneamente  $u_i = u_{x_i}$ . Sejam

$$b_i(x) = \begin{cases} \frac{f_1(|x|, u, |U_i|) - f_1(|x|, u, |V_i|)}{v_i - u_i}, & \text{se } u_i(x) \neq v_i(x) \\ 0, & \text{se } u_i(x) = v_i(x) \end{cases}$$

onde  $U_i = (u_1, \dots, u_{i-1}, v_i, \dots, v_n)$  e  $V_i = (u_1, \dots, u_i, v_{i+1}, \dots, v_n)$  e

$$c_i(x) = \begin{cases} \frac{f_1(|x|, v, |\nabla v|) - f_1(|x|, u, |\nabla v|)}{v - u}, & \text{se } u_i(x) \neq v_i(x) \\ 0, & \text{se } u(x) = v(x) \end{cases}$$

Observe o seguinte

$$\begin{aligned} |c(x)| &= \frac{|f_1(|x|, v, |\nabla v|) - f_1(|x|, u, |\nabla v|)|}{|v - u|} \\ &\leq K \frac{|(v, |\nabla v|) - (u, |\nabla v|)|}{|v - u|} = K \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |b_i(x)| &= \frac{|f_1(|x|, u, |(u_1, \dots, u_{i-1}, v_i, \dots, v_n)|) - f_1(|x|, u, |(u_1, \dots, u_i, v_{i+1}, \dots, v_n)|)|}{|v_i - u_i|} \\ &\leq K \frac{|(u, |(u_1, \dots, u_{i-1}, v_i, \dots, v_n)|) - (u, |(u_1, \dots, u_i, v_{i+1}, \dots, v_n)|)|}{|u_i - v_i|} = K, \end{aligned}$$

onde  $K$  é a constante de Lipschitz da função  $f_1$ .

Note

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial w}{\partial x_i} + cw \\ &= \sum_{i=1}^n f_1(|x|, u, |(u_1, \dots, u_{i-1}, v_i, \dots, v_n)|) - f_1(|x|, u, |(u_1, \dots, u_i, v_{i+1}, \dots, v_n)|) \\ &+ f_1(|x|, v, |\nabla v|) - f_1(|x|, u, |\nabla v|) \\ &= f_1(|x|, u, |(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_i, \dots, v_n)|) - f_1(|x|, u, |(u_1, v_2, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n)|) \\ &+ f_1(|x|, u, |(u_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_i, \dots, v_n)|) - f_1(|x|, u, |(u_1, u_2, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n)|) \\ &\vdots \\ &+ f_1(|x|, u, |(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i, \dots, v_n)|) - f_1(|x|, u, |(u_1, u_2, \dots, u_i, u_{i+1}, \dots, u_n)|) \\ &+ f_1(|x|, v, |\nabla v|) - f_1(|x|, u, |\nabla v|) = f_1(|x|, v, |\nabla v|) - f_1(|x|, u, |\nabla u|). \end{aligned}$$

Assim,

$$0 \geq \Delta w + \sum_{i=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_i} b_i + cw \geq \Delta w + \sum_{i=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_i} b_i + c^- w$$

onde  $c^- = \min\{c(x), 0\}$ .

Seja  $Z$  alguma componente conexa de  $\Sigma(\lambda)$ . Pelo princípio do máximo (ver Teorema 1.6) aplicado a  $Z$ , se  $w = 0$  em algum ponto de  $Z$ , então  $w \equiv 0$ . Suponhamos que  $w \equiv 0$  em  $Z$ . Pelo Lema 3.1 existe uma sequência  $x_k$  em  $\partial Z$  com  $|x_k| = R_2$  e  $x_{1,k} \searrow \lambda$ . Pela condição de fronteira  $u(x_k) = 0$  e pela hipótese  $w(x_k, \lambda) \equiv 0$  temos,  $u(x_k^\lambda) = 0$ . Como  $0 < u < a$ , se  $x \in A$  e  $u = 0$  se  $|x| = R_2$ , então  $|x_k^\lambda| = R_2$ . Assim

$$\begin{aligned} \Rightarrow |x_k^\lambda|^2 &= |x_k|^2 \\ \Rightarrow (2\lambda - x_{1,k})^2 &= x_{1,k}^2 \\ \Rightarrow 4\lambda^2 - 4\lambda x_{1,k} &= 0 \Leftrightarrow 4\lambda(\lambda - x_{1,k}) \end{aligned}$$

e como  $x_{1,k} > \lambda$  temos  $\lambda = 0$  o que contradiz  $\lambda > 0$ . Portanto  $w > 0$  em  $Z$ . Fazendo isso para todas as componentes conexas de  $\Sigma(\lambda)$  temos  $w > 0$  em  $\Sigma(\lambda)$ .

**Etapa C:** Defina

$$\mu = \inf\{\alpha > 0; (i) \text{ é válido para todo } \forall \lambda \in (\alpha, R_2)\}. \quad (3.3)$$

O objetivo agora é mostrar que  $\mu = 0$ . Suponha por contradição que  $\mu > 0$ , então existe um sequência  $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$  tal que  $\lambda_k \nearrow \mu$  e uma sequência  $x_k = (x_{1,k}, \dots, x_{n,k}) \in \Sigma(\lambda_k)$  tal que (i) não vale, isto é,  $w(x_k, \lambda_k) < 0$ . Vamos escolher  $x_k$  de modo que  $w(x_k, \lambda_k)$  assumo seu mínimo negativo sobre  $\overline{\Sigma(\lambda_k)}$  em  $x_k$ . Para  $x \in \partial\Sigma(\lambda_k)$

$$w(x, \lambda_k) = \begin{cases} 0, & x \in \partial\Sigma(\lambda_k) \cap T_{\lambda_k} \\ u(x^{\lambda_k}) - 0, & x \in \partial\Sigma(\lambda_k) \cap \{x : |x| = R_2\} \\ a - u(x), & x \in \partial\Sigma(\lambda_k) \cap \{x^{\lambda_k} : |x^{\lambda_k}| = R_1\} \end{cases}$$

como  $u(x^{\lambda_k}) > 0$  e  $a - u(x) > 0$  segue que  $w \geq 0$  em  $\partial\Sigma(\lambda_k)$ . Portanto,  $x_k \in \Sigma(\lambda_k)$ , por  $x_k$  ser ponto de mínimo temos  $\nabla w(x_k, \lambda_k) = 0$ . A sequência  $x_k$  por ser limitada tem uma subsequência que converge para  $\bar{x} \in \overline{\Sigma(\mu)}$ , pois como  $x_k \in \Sigma(\lambda_k) = \widetilde{\Sigma(\lambda_k)} \setminus \overline{B_{R_1}(0)}^{\lambda_k}$ , então  $x_k \notin \overline{B_{R_1}(0)}^{\lambda_k}$  e  $x_{1,k} > \lambda_k$ , daí tomando a subsequência temos  $\bar{x} \notin \overline{B_{R_1}(0)}^\mu$  e  $\bar{x}_1 \leq \mu$ . Portanto  $\bar{x} \in \overline{\Sigma(\mu)}$  onde  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  daí

$$\nabla w(\bar{x}, \mu) = \lim_{k \rightarrow \infty} \nabla(u(x_k^{\lambda_k}) - u(x_k)) = 0 \text{ e} \quad (3.4)$$

$$w(\bar{x}, \mu) = \lim_{k \rightarrow \infty} u(2\lambda_k - x_{1,k}, \dots, x_{n,k}) - u(x_{1,k}, \dots, x_{n,k}) \leq 0.$$

Afirmamos que (i) vale em  $\mu$ . De fato, caso contrário existiria um  $y \in \Sigma(\mu)$  tal que  $w(y, \mu) < 0$ , isto é,  $u(2\mu - y_1, y') < u(y) = 0$ . Pela continuidade de  $u$  existe um  $\varepsilon > 0$  tal que  $u(2(\mu + \varepsilon) - y_1, y') < u(y)$  e existe um  $\alpha \in (\mu, \mu + \frac{\varepsilon}{2})$  tal que (i) vale para todo  $\varepsilon \in (\alpha, R_2)$ . Ora,  $\alpha < \mu + \varepsilon$  o que gera um absurdo, provando a afirmação.

Como temos  $w(\bar{x}, \mu) \leq 0$  e (i) vale, então  $w(\bar{x}, \mu) = 0$ . Pelo que obtemos na etapa B, isto é,  $w > 0$  em  $\Sigma(\lambda)$  segue que  $\bar{x} \in \partial\Sigma(\mu)$ . Por (3.4) e o Teorema 1.7 temos que  $\bar{x}$  não pertence a parte suave de  $\partial\Sigma(\mu)$ . Portanto,

$$\bar{x} \in (\partial A \cap T_\mu) \cup (\partial B_{R_1}(0)^\mu \cap \partial A \setminus T_\mu), \quad (3.5)$$

se  $\bar{x} \in \partial B_{R_1}(0)^\mu \cap \partial A \setminus T_\mu$ , isto é,  $\bar{x} \in \partial B_{R_1}(0)^\mu$  e  $\bar{x} \in \partial A \setminus T_\mu$ , daí  $\bar{x} \in \partial B_{R_2}(0)$  já que  $\bar{x} \in \partial B_{R_1}(0)$  não é possível, pois isso implicaria que  $\bar{x} \in T_\mu$ . Assim, no segundo conjunto de (3.5) temos  $w(\bar{x}, \mu) = a - 0 > 0$ . Logo  $\bar{x} \in A \cap T_\mu$ .

Denotemos a reflexão de  $x_k$  em relação a  $T_{\lambda_k}$  por  $y_k$ , como  $\bar{x} \in T_\mu$ , então  $y_k \rightarrow T_\mu$  pois, de  $(x_{1,k}, \dots, x_{n,k}) \rightarrow (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  onde  $\bar{x}_1 = \mu$  segue daí  $y_k = (2\lambda_k - x_{1,k}, \dots, x_{n,k}) \rightarrow \bar{x}$ . Se  $\bar{x} \in \partial B_{R_1}(0)$  tomando  $m = e_1$  no Lema 3.2, já que  $\mu > 0$  o vetor normal que aponta para dentro em  $\bar{x}$  tem primeira coordenada positiva, existe uma bola  $B_\rho(\bar{x})$  tal que  $\frac{\partial u}{\partial x_1} < 0$  em  $A \cap B_\rho$ . Caso  $\bar{x} \in \partial B_{R_2}(0)$  tomando  $m = -e_1$  no Lema 3.2, pois o vetor normal tem primeira coordenada negativa, existe uma bola  $B_\rho(\bar{x})$  tal que  $\frac{\partial u}{\partial x_1} < 0$  em  $A \cap B_\rho(\bar{x})$ . Assim, existe uma bola  $B_\rho(\bar{x})$  tal que  $\frac{\partial u}{\partial x_1} < 0$  em  $A \cap B_\rho(\bar{x})$  para  $k$  suficientemente grande temos  $x_k, y_k \in B_\rho(\bar{x})$  portanto

$$-w(x_k, \lambda_k) = u(x_k) - u(y_k) = \int_{2\lambda_k - x_{1,k}}^{x_{1,k}} \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_k') dt < 0 \quad (3.6)$$

uma contradição com o fato de  $w(x_k, \lambda_k) < 0$ . Logo temos  $\mu = 0$ . E portanto para  $\lambda = 0$  temos  $u(x_1, x') \leq u(-x_1, x')$ . Aplicando um argumento semelhante para  $\lambda \in (-R_2, 0)$  concluímos que

$$u(-x_1, x') \leq u(x_1, x'), \quad \forall x = (x_1, x') \in A, x_1 > 0.$$

o que implica

$$u(x_1, x') = u(-x_1, x').$$

Assim,  $u$  é simétrica na direção  $x_1$ . Pela invariância da rotação e do Lema 2.3 segue que  $u$  é radialmente simétrica.

Tome  $\lambda \in (R_1, R_2)$  e  $y = (\lambda, 0, \dots, 0)$  pelo lema de Hopf

$$\frac{w}{x_1}(y) > 0,$$

como  $w_{x_1} = -2u_{x_1}$ , então para todo  $\lambda \in (R_1, R_2)$  temos

$$\frac{u}{x_1}(y) < 0$$

daí  $u$  é decrescente na direção  $e_1$  e pela simetria  $u$  é radialmente simétrica. □

# Capítulo 4

## Simetria para o operador $k$ -Hessiano: caso não-linear

Nesse capítulo vamos estender para o caso não-linear ( $k > 1$ ) do operador  $k$ -Hessiano os resultados de simetria de solução e de domínio dos capítulos anteriores. Esses resultados foram obtidos por Bo Wang, Jiguang Bao [16].

### 4.1 Operador $k$ -Hessiano em um anel rígido

Vamos considerar o seguinte problema,

$$\begin{cases} \sigma_k(\lambda(D^2u)) = f(|x|, u, |Du|); a_1 < u < a_2, & \text{se } x \in A \\ u = a_1, & \text{se } |x| = R_1, \\ u = a_2, & \text{se } |x| = R_2 \end{cases} \quad (4.1)$$

onde  $0 < R_1 < R_2$ ,  $A := \{x \in \mathbb{R}^n; R_1 < |x| < R_2\}$ ,  $a_1, a_2$  são constantes reais e  $f : [R_1, R_2] \times [a_1, a_2] \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz as seguintes condições:

$$f(r, z, q) \text{ é positiva e decrescente em } r; \quad (4.2)$$

$$f(r, z, q) = f_1(r, z, q) + f_2(r, z) \text{ com } f_1 \text{ lipschitz contínua em } z, q \text{ e } f_2 \text{ decrescente em } z. \quad (4.3)$$

Seja  $\Phi_k^2(\bar{A}) = \{v \in C^2(\bar{A}); \sigma_i(\lambda(D^2v(x))) > 0, x \in \bar{A}, i = 1, 2, \dots, k-1, k\}$ . Vamos introduzir algumas notações e resultados que serão utilizados. Seja  $\lambda \in (0, R_2)$

1.  $T_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n, x_1 = \lambda\}$ ;

2.  $x^\lambda = (2\lambda - x_1, x')$  reflexão de  $x$  sobre  $T_\lambda$ ,  $x' = (x_2, x_3, \dots, x_n)$ ;
3.  $B^\lambda = \{x^\lambda; x \in B\}$  reflexão do conjunto  $B$  sobre  $T_\lambda$ ;
4.  $\widetilde{\Sigma}(\lambda) = \{(x_1, x') \in A; x_1 > \lambda\}$ ;
5.  $\Sigma(\lambda) = \widetilde{\Sigma}(\lambda) \setminus \overline{B_{R_1}(0)}^\lambda$ .

O resultado a seguir é a versão do Lema 3.2 para  $\Phi_k^2(\overline{A})$  em vez de  $C^2(\overline{A})$ . A prova que daremos aqui se aplica, com as devidas adaptações, ao caso  $C^2(\overline{A})$ .

**Lema 4.1.** *Suponha que  $u \in \Phi_k^2(\overline{A})$ . Para  $x \in \partial A$ , seja  $\eta \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\gamma(x) \cdot \eta > 0$ . Então, existe uma bola  $B_\rho(x)$  tal que  $\frac{\partial u}{\partial \eta} < 0$  em  $B_\rho(x) \cap A$ , se  $|x| = R_2$  e  $\frac{\partial u}{\partial \eta} > 0$  em  $B_\rho(x) \cap A$  se  $|x| = R_1$ . Onde  $\gamma(x)$  é a normal unitária que aponta para dentro.*

*Demonstração.* Seja  $x \in \partial A$  e  $|x| = R_2$ . Como  $u \in \Phi_k^2(\overline{A})$  para  $k = 1$  temos  $\Delta u > 0$  em  $A$ . Pelo lema de Hopf temos  $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x) < 0$  e  $u < a_2$  em  $A$ . Pela continuidade de  $\frac{\partial u}{\partial \eta}$  em  $x$ , existe uma bola  $B_\rho(x)$  tal que  $\frac{\partial u}{\partial \eta} < 0$  em  $B_\rho(x) \cap A$ . Assim o resultado segue da continuidade de  $\frac{\partial u}{\partial \eta}$  em  $x$ .

Seja  $x \in \partial A$  e  $|x| = R_1$ . Pela definição de  $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x)$  e como  $u > a_1$  em  $A$  como  $\gamma(x) \cdot \eta > 0$  então  $\eta$  aponta para o interior de  $A$ , assim  $x + t\eta \in A$  para  $t$  suficientemente pequeno e positivo

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{u(x + t\eta) - u(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{u(x + t\eta) - a_1}{t} \geq 0 \quad (4.4)$$

- Se  $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x) > 0$  a continuidade de  $\frac{\partial u}{\partial \eta}$  em  $x$  nos dá a conclusão.
- Se  $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x) = 0$ , pelo Lema 1.1 temos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Delta u(x)(\gamma(x) \cdot \eta)^2 > 0.$$

Pela continuidade em  $x$  de  $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ , existe uma bola  $B_\rho(x)$  tal que  $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} > 0$  em  $B_\rho(x) \cap A$ . Tomando  $\rho_1$  menor do que  $\rho$ , para qualquer  $y \in B_{\rho_1}(x) \cap A$  como  $y \in A$ , então  $|y| > R_1$ . Defina  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $v(t) = y - t\eta$  e tome  $t_0 > 0$ , tal que  $|v(t_0)| = R_1$ . Seja  $y_0 = y - t_0\eta$ , pela mesma argumentação apresentada em (4.4), temos  $\frac{\partial u}{\partial \eta}(y_0) \geq 0$  e  $y - y_0 = t_0\eta$  ( $t_0 > 0$ ). Vamos definir

$$g(t) := \frac{\partial u}{\partial \eta}(y - t\eta), \quad 0 \leq t \leq t_0.$$

Pelo teorema fundamental do cálculo

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(y_0) - \frac{\partial u}{\partial \eta}(y) = g(t_0) - g(0) = \int_0^{t_0} g'(t) dt = - \int_0^{t_0} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(y - t\eta) dt < 0.$$

Assim,  $\frac{\partial u}{\partial \eta}(y) > \frac{\partial u}{\partial \eta}(y_0) \geq 0$ . E portanto temos  $\frac{\partial u}{\partial \eta} > 0$  em  $B_{\rho_1}(x) \cap A$ . □

**Teorema 4.1.** *Seja  $u \in \Phi_k^2(\overline{A})$  uma solução de (4.1) e  $f$  satisfazendo (4.2), (4.3). Então  $u$  é radialmente simétrica e crescente em  $|x|$ .*

*Demonstração.* Inicialmente, argumentando como no Capítulo 3, usando o Corolário 1.1 podemos verificar que o problema (4.1) é invariante por rotações. Assim, como antes, basta verificar

$$u(x_1, x') \geq u(-x_1, x'), \quad \forall x = (x_1, x') \in A, \quad x_1 > 0. \quad (4.5)$$

Para  $\lambda \in (0, R_2)$ , vamos definir a função

$$w(x, \lambda) := v(x, \lambda) - u(x) = u(x^\lambda) - u(x), \quad x \in \overline{\Sigma(\lambda)}.$$

Afim de provar (4.5), é necessário provar as duas seguintes propriedades de  $w(x, \lambda)$ , para qualquer  $\lambda \in (0, R_2)$

(i)  $w(x, \lambda) \leq 0$  em  $\Sigma(\lambda)$ ;

(ii)  $\frac{\partial w}{\partial x_1}(x, \lambda) < 0$  em  $A \cap T_\lambda$ .

Quando fazemos  $\lambda \rightarrow 0$  em (i), podemos obter (4.5).

**Etapa A:** Provemos que existe  $\varepsilon > 0$  tal que para qualquer  $\lambda \in (R_2 - \varepsilon, R_2)$  (i), (ii) valem.

Escolhendo  $z = x = (R_2, 0, \dots, 0)$  e  $\eta = (-1, 0, \dots, 0)$ , pelo Lema 4.1 existe  $\rho > 0$  tal que

$\frac{\partial u}{\partial x_1} > 0$  em  $B_\rho(x) \cap A$ .

Como antes, para  $\varepsilon < \frac{\rho^2}{2R_2}$  e  $\lambda \in (R_2 - \frac{\rho^2}{2R_2}, R_2)$  vale  $\overline{\Sigma(\lambda)} \cup \overline{\Sigma(\lambda)^\lambda} \subset \overline{B_\rho(x)}$  e então  $\frac{\partial u}{\partial x_1} > 0$  em  $\Sigma(\lambda)$ . Se  $\lambda \in (R_2 - \frac{\varepsilon}{2}, R_2)$  e  $x \in \Sigma(\lambda)$ , como  $\Sigma(\lambda) \subset B_\rho(x)$  e  $\overline{\Sigma(\lambda)^\lambda} \subset B_\rho(x)$ , então pela convexidade de  $B_\rho(x)$  o segmento de reta  $[x^\lambda, x] \subset B_\rho(x)$ . Note que  $2\lambda - 2x_1 < 0$  e seja  $g(t) = u(x_1 + t, x')$  com  $2\lambda - 2x_1 \leq t < 0$ . Então

$$\begin{aligned} u(x^\lambda) - u(x) &= g(2\lambda - 2x_1) - g(0) = \int_0^{2\lambda - 2x_1} g'(t) dt = \int_0^{2\lambda - 2x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1 + t, x') dt \\ &= \int_{2\lambda - 2x_1}^0 -\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1 + t, x') dt < 0 \end{aligned}$$

isto é,

$$w(x, \lambda) < 0 \text{ em } \Sigma(\lambda).$$

Se  $x \in T_\lambda \cap A$ , então  $x = x^\lambda$  e daí

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x_1}(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{w(x + te_1) - w(x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(2\lambda - x_1 - t, x') - u(x_1 + t, x') + u(2\lambda - x_1, x') - u(x_1, x')}{t}. \end{aligned}$$

Utilizando que  $x_1 = \lambda$ , pelo mesmo cálculo do capítulo anterior

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = -2 \frac{\partial u}{\partial x_1} < 0 \quad \text{em } A \cap T_\lambda$$

para  $\lambda \in (R_2 - \frac{\varepsilon}{2}, R_2)$ .

**Etapa B:** Pela etapa A, existe  $\lambda > 0$  próximo de  $R_2$  tal que (i), (ii) são válidas. Nessa etapa provaremos a desigualdade estrita em (i).

Seja  $v(x, \lambda) = u(x^\lambda) = u(2\lambda - x_1, x')$ , temos

$$\begin{aligned} D^2 v(x) &= \begin{bmatrix} v_{x_1 x_1} & v_{x_1 x_2} & \cdots & v_{x_1 x_n} \\ v_{x_2 x_1} & v_{x_2 x_2} & \cdots & v_{x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{x_n x_1} & v_{x_n x_2} & \cdots & v_{x_n x_n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_{x_1 x_1} & -u_{x_1 x_2} & \cdots & -u_{x_1 x_n} \\ -u_{x_2 x_1} & u_{x_2 x_2} & \cdots & u_{x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -u_{x_n x_1} & u_{x_n x_2} & \cdots & u_{x_n x_n} \end{bmatrix} = \widetilde{D^2 u(x^\lambda)} \end{aligned}$$

e assim, por (1.7) temos

$$\sigma_k(\lambda(D^2 v(x))) = \sigma_k(\lambda(D^2 u(x^\lambda))) = f(|x^\lambda|, u(x^\lambda), |D(u(x^\lambda))|) = f(|x^\lambda|, v, |Dv|)$$

em  $\Sigma(\lambda)$ .

Denote  $u_i = u_{x_i}$  e defina

$$\begin{aligned} a^{ij}(x) &= \int_0^1 S_k^{ij}(sD^2 u(x) + (1-s)D^2 v(x)) ds \\ b_i(x) &= \begin{cases} \frac{f_1(|x|, u, |U_i|) - f_1(|x|, u, |V_i|)}{v_i - u_i}, & \text{se } u_i(x) \neq v_i(x) \\ 0, & \text{se } u_i(x) = v_i(x) \end{cases} \end{aligned}$$

onde  $U_i = (u_1, \dots, u_{i-1}, v_i, \dots, v_n)$  e  $V_i = (u_1, \dots, u_i, v_{i+1}, \dots, v_n)$  e

$$c(x) = \begin{cases} \frac{f_1(|x|, v, |\nabla v|) - f_1(|x|, u, |\nabla v|)}{v - u}, & \text{se } u(x) \neq v(x) \\ 0, & \text{se } u(x) = v(x) \end{cases}$$

Como  $u$  e  $v$  são  $k$ -admissíveis, então  $su + (1-s)v \in \phi_k^2(\bar{A})$ , para  $0 \leq s \leq 1$ . Assim, pela elipticidade de  $S_k$  existe  $\Lambda > 0$  tal que

$$|a^{ij}| \leq \int_0^1 |S_k^{ij}(sD^2 u(x) + (1-s)D^2 v(x))| ds \leq \Lambda.$$

Por outro lado, como  $f_1(r, z, q)$  é lipschitz contínua em  $z, q$

$$\begin{aligned} |b^i(x)| &= \frac{|f_1(|x|, u, |(u_1, \dots, u_{i-1}, v_i, \dots, v_n)|) - f_1(|x|, u, |(u_1, \dots, u_i, v_{i+1}, \dots, v_n)|)|}{|v_i - u_i|} \\ &\leq K \frac{|(u_1, \dots, u_{i-1}, v_i, \dots, v_n)| - |(u_1, \dots, u_i, v_{i+1}, \dots, v_n)|}{|v_i - u_i|} \\ &\leq K \frac{|(u_1, \dots, u_{i-1}, v_i, \dots, v_n) - (u_1, \dots, u_i, v_{i+1}, \dots, v_n)|}{|v_i - u_i|} = K. \end{aligned}$$

Ainda,

$$|c(x)| = \frac{|f_1(|x|, v, |Dv|) - f_1(|x|, u, |Dv|)|}{|v - u|} \leq \frac{K|(v, |Dv|) - (u, |Dv|)|}{|v - u|} = K.$$

Seja  $M = [m_{ij}]$ , com  $m_{ij} = su_{x_i x_j} + (1 - s)v_{x_i x_j}$ . Uma vez que  $S_k^{ij}(M) = \frac{\partial}{\partial m^{ij}}(S_k(M))$ , temos

$$f(|x^\lambda|, v, |Dv|) - f(|x|, u, |Du|) = S_k(D^2v) - S_k(D^2u) = - \int_0^1 \frac{d}{ds}(S_k(D^2(su + (1-s)v)))ds$$

pela regra da cadeia

$$\begin{aligned} - \int_0^1 \frac{d}{ds}(S_k(D^2(su + (1-s)v)))ds &= - \int_0^1 \sum \frac{\partial}{\partial m^{ij}} S_k(D^2su + (1-s)v) \frac{dm^{ij}}{ds} ds \\ &= - \int_0^1 \sum S_k^{ij}(D^2su + (1-s)v)(u_{x_i x_j} - v_{x_i x_j}) ds \\ &= - \int_0^1 \sum S_k^{ij}(D^2su + (1-s)v)(-w_{x_i x_j}) ds \\ &= \int_0^1 \sum S_k^{ij}(D^2su + (1-s)v)(w_{x_i x_j}) ds. \end{aligned}$$

Agora usando que  $|x^\lambda| \leq |x|$  e (4.3),

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n a^{ij} w_{x_i x_j} &= f(|x^\lambda|, v, |Dv|) - f(|x|, u, |Du|) \\ &\geq f(|x|, v, |Dv|) - f(|x|, u, |Du|) \\ &= f_1(|x|, v, |Dv|) - f_1(|x|, u, |Du|) + f_2(|x|, v) - f_2(|x|, u) \\ &\geq f_1(|x|, v, |Dv|) - f_1(|x|, u, |Du|) \\ &= \sum_{i=1}^n b^i(x) w_{x_i} + c(x) w \end{aligned}$$

onde usamos que  $f_2(|x|, v) - f_2(|x|, u) \geq 0$ , pois  $f_2$  é decrescente em  $z$ . Sabe-se que  $c^+(x) = \max\{c(x), 0\}$ , então

$$\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) w_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^n b^i(x) w_{x_i} - c^+(x) w \geq \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) w_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^n b^i(x) w_{x_i} - c(x) w \geq 0,$$

se  $x \in \Sigma(\lambda)$ . Como  $S_k^{ij}$  é elíptico, segue

$$0 < \theta |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n \int_0^1 S_k^{ij} \xi_i \xi_j \leq \Lambda |\xi|^2,$$

para constantes  $\theta, \Lambda > 0$ .

Da Etapa A temos  $w \leq 0$ . Seja  $Z$  alguma componente conexa de  $\Sigma(\lambda)$ , pelo princípio do máximo Teorema 1.6 aplicado a  $Z$ , se  $w = 0$  em algum ponto de  $Z$  teríamos que  $w \equiv 0$ . Suponhamos que  $w \equiv 0$  em  $Z$ , pelo Lema 3.1 existe uma sequência  $x_k$  em  $\partial Z$  com  $|x_k| = R_2$  e  $x_{1,k} \searrow \lambda$ . Pela condição de fronteira  $u(x_k) = a_2$  e pela hipótese  $w(x_k, \lambda) = 0$  temos  $u(x_k^\lambda) = a_2$ . Como  $a_1 < u < a_2$  se  $x \in A$  e  $u = a_2$  se  $|x| = R_2$ , então  $|x_k^\lambda| = R_2$ . Assim

$$\begin{aligned} \Rightarrow |x_k^\lambda|^2 &= |x_k|^2 \\ \Rightarrow (2\lambda - x_{1,k})^2 &= x_{1,k}^2 \\ \Rightarrow 4\lambda^2 - 4\lambda x_{1,k} &= 0 \Leftrightarrow 4\lambda(\lambda - x_{1,k}). \end{aligned}$$

Como  $x_{1,k} > \lambda$  temos  $\lambda = 0$ , o que contraria  $\lambda > 0$ . Portanto  $w < 0$  em  $Z$ . Fazendo isso para todas as componentes conexas de  $\Sigma(\lambda)$ , temos  $w < 0$  em  $\Sigma(\lambda)$ .

**Etapa C:** Defina

$$\mu = \inf\{\alpha > 0; (i) \text{ é válido para todo } \forall \lambda \in (\alpha, R_2)\} \quad (4.6)$$

o objetivo é mostrar que  $\mu = 0$ . Da etapa B temos que (i), (ii) são válidas para  $\lambda \in (\mu, R_2)$ . Suponha por contradição que  $\mu > 0$ , então existem uma sequência  $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$  tal que  $\lambda_k \nearrow \mu$  e uma sequência  $x_k \in \Sigma(\lambda_k)$  onde (i) não vale, daí  $w(x_k, \lambda_k) > 0$ . Vamos escolher  $x_k$  de modo que  $w(x_k, \lambda_k)$  assuma seu máximo positivo sobre  $\overline{\Sigma(\lambda_k)}$  em  $x_k$ . Para  $x \in \partial\Sigma(\lambda_k)$

$$w(x, \lambda_k) = \begin{cases} 0, & x \in \partial\Sigma(\lambda_k) \cap T_{\lambda_k} \\ u(x^{\lambda_k}) - a_2, & x \in \partial\Sigma(\lambda_k) \cap \{x : |x| = R_2\} \\ a_1 - u(x), & x \in \partial\Sigma(\lambda_k) \cap \{x : |x^{\lambda_k}| = R_1\} \end{cases}$$

como  $a_1 < u < a_2$ , então temos  $w \leq 0$  em  $\partial\Sigma(\lambda_k)$ . Daí, por  $w(x_k, \lambda_k) > 0$  temos que  $x_k \in \Sigma(\lambda_k)$  e sendo  $x_k$  ponto de máximo temos  $Dw(x_k, \lambda_k) = 0$ . Como  $\{x_k\}_{k=1}^\infty$  é limitado existe uma subsequência, ainda denotada por  $x_k$ , convergindo para  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in \overline{\Sigma(\mu)}$  tal que

$$Dw(\bar{x}, \mu) = 0 \text{ e } w(\bar{x}, \mu) \geq 0.$$

Como (i) vale em  $\lambda = \mu$  e  $w(\bar{x}, \mu) \geq 0$ , então  $w(\bar{x}, \mu) = 0$ . Pela etapa B,  $w < 0$  em  $\Sigma(\mu)$  e assim  $\bar{x} \in \partial\Sigma(\mu)$ . Pelo Teorema 1.7 temos que  $\bar{x}$  não pertence a parte suave de  $\partial\Sigma(\mu)$ . Portanto

$$\bar{x} \in (\partial A \cap T_\mu) \cup (\partial B_{R_1}(0)^\mu \cap \partial A \setminus T_\mu). \quad (4.7)$$

Se  $\bar{x} \in \partial B_{R_1}(0)^\mu \cap \partial A \setminus T_\mu$ , isto é,  $\bar{x} \in \partial B_{R_1}(0)^\mu$  e  $\bar{x} \in \partial A \setminus T_\mu$  temos que  $\bar{x} \in \partial B_{R_2}(0)$  já que  $\bar{x} \in \partial B_{R_1}(0)$  não é possível. Assim, no segundo conjunto de (4.7) temos  $w(\bar{x}, \mu) = a_1 - a_2 < 0$ . Logo  $\bar{x} \in \partial A \cap T_\mu$ .

Pelo Lema 4.1 com  $x = \bar{x}$ , existe uma bola  $B_\rho(\bar{x})$  tal que  $\frac{\partial u}{\partial \eta} > 0$  em  $B_\rho \cap A$ . Para  $k$  suficientemente grande temos  $x_k, x_k^{\lambda_k} \in B_\rho(\bar{x})$ . Então

$$-w(x_k, \lambda_k) = u(x_k) - u(x_k^{\lambda_k}) = \int_{2\lambda_k - x_{1,k}}^{x_{1,k}} \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x'_k) dt > 0.$$

Assim  $w(x_k, \lambda_k) < 0$  o que contradiz o fato de  $w(x_k, \lambda_k) > 0$ . Portanto  $\mu = 0$ . Novamente com mesma argumentação do capítulo anterior conclui-se que  $u$  é radialmente simétrica. Seja  $\lambda \in (R_1, R_2)$  novamente pelo Lema de Hopf, para  $y = (\lambda, 0, \dots, 0)$  temos

$$\frac{\partial w}{\partial e_1}(y) < 0$$

e consequentemente

$$\frac{\partial u}{\partial e_1}(y) > 0$$

isto é,  $u$  é crescente na direção  $e_1$  pela simetria radial segue o resultado.  $\square$

## 4.2 Operador $k$ -Hessiano em região anelar

Sejam  $\Omega_1, \Omega_2$  dois domínios simplesmente conexos de classe  $C^2$  tais que  $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$ , o subconjunto  $\Omega = \Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1}$  é chamado de região (domínio) anelar, caso  $\Omega_i$  para  $i = \{1, 2\}$  sejam iguais a uma bola,  $\Omega$  será chamado de anel rígido.

Vamos estudar propriedades de simetria para o seguinte problema envolvendo o operador  $k$ -Hessiano em uma região anelar  $\Omega$

$$\begin{cases} \sigma_k(\lambda(D^2u)) = f(|x|, u, |Du|); & a_1 < u < a_2, & x \in \Omega \\ u = a_1 & \frac{\partial u}{\partial \gamma} = c_1 \neq 0, & x \in \partial\Omega_1 \\ u = a_2 & \frac{\partial u}{\partial \gamma} = c_2 \neq 0, & x \in \partial\Omega_2 \end{cases}, \quad (4.8)$$

$\gamma(x)$  denota o normal unitário interior em  $x \in \partial\Omega$  e  $a_1, a_2, c_1, c_2$  são constantes e  $f$  satisfaz (4.3), (4.2). Seja

$$\Phi_k^{2,1}(\overline{\Omega}) = \{v \in C^{2,1}(\overline{\Omega}); \sigma_i(\lambda(D^2v(x))) > 0, x \in \overline{\Omega}, i = 1, 2, \dots, k-1, k\}.$$

Como antes, vamos introduzir algumas notações preliminares:

- $T_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n; x_1 = \lambda\}$
- $x^\lambda = (2\lambda - x_1, x')$
- $\Sigma_1(\lambda) = \{(x_1, x') \in \Omega_1 : x_1 > \lambda\}$
- $\Sigma_2(\lambda) = \{(x_1, x') \in \Omega_2 : x_1 > \lambda\}$
- $\Gamma_i(\lambda) = \{(x_1, x') \in \partial\Omega_i; x_1 > \lambda\}$  para  $i = 1, 2$
- $M_i = \sup\{x_1 : (x_1, x') \in \Omega_i\}$

Para  $i = 1, 2$  se  $\lambda$  está suficientemente próximo de  $M_i$ ,  $\Sigma_i(\lambda)^\lambda \subset \Omega_i$  e o vetor  $\gamma_i$  normal em cada ponto de  $\Gamma_i$  tem coordenada  $x_1 \neq 0$ . Além disso  $\Omega_i$  contém  $\Sigma_i(\lambda)^\lambda$  até um dos seguintes casos ocorrer

- A)  $\partial\Sigma_i(\lambda)^\lambda$  se tornar internamente tangente a  $\partial\Omega_i$  em  $P \in T_\lambda$ ;
- B)  $T_\lambda$  atingir uma posição onde é ortogonal a  $\partial\Omega_i$  em algum ponto  $Q \in T_\lambda \cap \bar{\Gamma}_i(\lambda)$ .

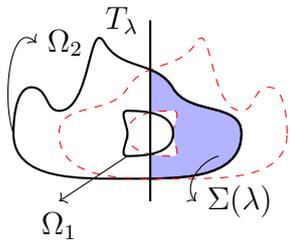


Figura 4.1: Caso A,  $i = 1$ .

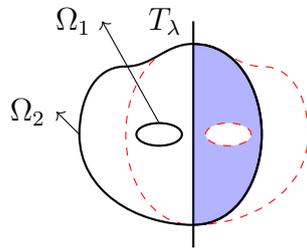


Figura 4.2: Caso B.

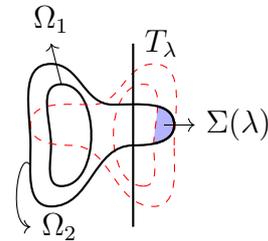


Figura 4.3: Caso A,  $i = 2$ .

Denotaremos o valor de  $\lambda$  onde ocorre um dos casos críticos em 1 e 2 por  $m_i$  e seja  $m = \max\{m_1, m_2\}$ . Para  $\lambda \in (m, M_2)$  sejam

$$\Sigma(\lambda) = \Sigma_2(\lambda) \setminus \bar{\Omega}_1^\lambda.$$

**Lema 4.2.** *Suponha que  $u \in \Phi_k^{2,1}(\bar{\Omega})$ . Para  $x \in \partial\Omega$ , seja  $\eta \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\gamma(x) \cdot \eta > 0$ . Então existe uma bola  $B_\rho(x)$  tal que  $\frac{\partial u}{\partial \eta} > 0$  em  $B_\rho(x) \cap \Omega$  se  $x \in \Omega_1$  e  $\frac{\partial u}{\partial \eta} < 0$  em  $B_\rho(x) \cap \Omega$  se  $x \in \Omega_2$ .*

*Demonstração.* A prova desse resultado é similar ao Lema 4.1 e omitiremos. □

**Teorema 4.2.** *Seja  $u \in \Phi_k^{2,1}(\overline{\Omega})$  é uma solução do problema (4.8) e  $f$  satisfaz (4.2), (4.3). Então  $\Omega$  é um anel rígido e  $u$  é radialmente simétrico e crescente em  $|x|$ .*

*Demonstração.* O problema (4.8) é invariante por rotação. Inicialmente provemos que  $u$  é simétrica somente na direção  $x_1$  para  $\lambda \in (m, M_2)$  definamos

$$w(x, \lambda) := v(x, \lambda) - u(x) = u(x^\lambda) - u(x), \quad x \in \overline{\Sigma(\lambda)}.$$

Como nos problemas anteriores o intuito é mostrar que  $w$  irá satisfazer

i)  $w(x, \lambda) \leq 0$  em  $\Sigma(\lambda)$ ;

ii)  $\frac{\partial w}{\partial x_1} < 0$  em  $\Omega \cap T_\lambda$ .

**Etapa A:** Provemos que existe  $\varepsilon > 0$  tal que para qualquer  $\lambda \in (M_2 - \varepsilon, M_2)$  valem (i), (ii). Seja  $K = \{x = (x_1, x') \in \Omega_2; x_1 = M_2\}$ . Para qualquer  $x \in K$ , tem-se que o plano tangente em  $x$  é  $T_{M_2}$ . Pelo Lema 4.2 tomando  $\eta = -e_1$  existe  $\rho > 0$  tal que  $\frac{\partial u}{\partial x_1} > 0$  em  $B_\rho(x) \cap \Omega$ . Note que  $K$  é limitado, pois  $\Omega_2$  o é. Seja  $x_k = (x_{1,k}, \dots, x_{n,k}) \in K$ ,  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $x_k \rightarrow \bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ . Visto que  $x_{1,k} = M_2$  para todo  $k$ , então  $\bar{x}_1 = M_2$ . Como  $x_k \in \partial\Omega_2$  então  $\bar{x} \in \partial\Omega_2$  e daí  $\bar{x} \in K$ . Assim,  $K$  é fechado e consequentemente compacto.

Para cada  $x \in K$  existe um  $\rho_x$  tal que  $\frac{\partial u}{\partial x_1} > 0$  em  $B_{\rho_x}(x) \cap \Omega$ . Afirmamos que existe um  $\sigma > 0$  independente de  $x \in K$  tal que  $\frac{\partial u}{\partial x_1} > 0$  em  $B_\sigma(x) \cap \Omega$ . De fato, suponha que para nenhum  $\sigma$  tenhamos  $\frac{\partial u}{\partial x_1} > 0$  em  $B_\sigma(x) \cap \Omega$ . Tomando  $\sigma_n = \frac{1}{n}$  existem  $x_n \in K$  tal que  $\frac{\partial u}{\partial x_1}(y_n) \leq 0$ , para algum  $y_n \in B_{\sigma_n}(x_n) \cap \Omega$ . Temos  $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$  e  $K$  é compacto, então  $x_n \rightarrow x_0$  para alguma subsequência, e assim  $|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \Rightarrow y_n \rightarrow x_0 \in K$ . Existem um  $\rho_{x_0}$ , tal que em  $B_{\rho_{x_0}} \cap \Omega$  temos  $\frac{\partial u}{\partial x_1} > 0$  e um  $\bar{n}$  tal que  $n > \bar{n}$  tem-se  $|x_n - x_0| < \frac{\rho_{x_0}}{2}$ . Tome  $n$  tal que  $|y_n - x_n| < \frac{1}{n} < \frac{\rho_{x_0}}{2}$ , daí  $|y_n - x_0| < \rho_{x_0}$  o que nos dá  $y_n \in B_{\rho_{x_0}} \cap \Omega$ . Logo  $\frac{\partial u}{\partial x_1}(y_n) > 0$ , mas  $\frac{\partial u}{\partial x_1}(y_n) \leq 0$  para todo  $n$  suficientemente grande.

Seja  $K_\sigma := \cup_{x \in K} B_\sigma(x) \cap \Omega$ . Existe  $\varepsilon > 0$  tal que para qualquer  $\lambda \in (M_2 - \varepsilon, M_2)$ , tem-se  $\overline{\Sigma(\lambda)} \cup \overline{\Sigma(\lambda)^\lambda} \subset \overline{K_\sigma}$  e então  $\frac{\partial u}{\partial x_1} > 0$  em  $\Sigma(\lambda)$ .

Se  $\lambda \in (M_2 - \frac{\varepsilon}{2}, M_2)$  e  $x \in \Sigma(\lambda)$  como  $\overline{\Sigma(\lambda)} \cup \overline{\Sigma(\lambda)^\lambda} \in \overline{K_\sigma}$  então  $[x, x^\lambda] \subset \Sigma(M_2 - \varepsilon)$ . Seja  $g(t) = u(x_1 + t, x')$ ,  $2\lambda - 2x_1 \leq t \leq 0$ , então

$$u(x^\lambda) - u(x) = g(2\lambda - 2x_1) - g(0) = \int_0^{2\lambda - 2x_1} g'(t) dt = \int_0^{2\lambda - 2x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1 + t, x') dt < 0,$$

isto é

$$w(x, \lambda) < 0 \text{ em } \Sigma(\lambda)$$

com a mesma argumentação apresentada no Teorema 4.1

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = -2 \frac{\partial u}{\partial x_1} < 0 \text{ em } \Omega \cap T_\lambda$$

para  $\lambda \in (M_2 - \frac{\varepsilon}{2}, M_2)$ .

**Etapa B:** Mostremos que se  $w \equiv 0$  em alguma componente conexa de  $\Sigma(\lambda)$  então  $\overline{Z \cup Z^\lambda} = \overline{\Omega}$ . Seja  $Z$  uma componente conexa de  $\Sigma(\lambda)$ . Decompomos  $\partial Z$  em três subconjuntos

$$Z_1 = \{x = (x_1, x') \in \partial Z : x_1 = \lambda, x \in \Omega\};$$

$$Z_2 = \{x = (x_1, x') \in \partial Z : x_1 \geq \lambda, x \in \partial\Omega_2\};$$

$$Z_3 = \{x = (x_1, x') \in \partial Z : x_1 \geq \lambda, x \in \partial\Omega_1^\lambda\}.$$

Se  $w = 0$ , isto é,  $u(x^\lambda) = u(x)$  em  $Z$ , temos  $u = a_2$  em  $Z_2^\lambda$  e  $u = a_1$  em  $Z_3$ . Daí  $Z_2^\lambda \subset \partial\Omega_2$  e  $Z_3 \subset \partial\Omega_1$ , pois  $a_1 < u < a_2$  em  $\Omega$ . Vamos analisar o que ocorre quando  $Z_1 = \emptyset$  ou  $Z_1 \neq \emptyset$ .

Definamos

$$X = Z \cup Z^\lambda \cup (\partial Z \cap \Omega) \cup (\partial Z^\lambda \cap \Omega).$$

I- Caso  $Z_1 = \emptyset$ . Temos  $\partial Z \subset \partial\Omega$  e  $\partial Z^\lambda \subset \partial\Omega$ , já que  $Z_1 = \emptyset$ . Sendo  $\Omega$  aberto  $X$  pode ser escrito como  $X = Z \cup Z^\lambda$  e daí  $\partial X \subset \partial\Omega$ . Se  $X$  é aberto, então a conexidade de  $\Omega$  implica em  $X = \Omega$ . De fato, dado  $y \in \Omega \setminus X$  existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $B_\varepsilon(y) \subset \Omega$ . Afirmamos que  $B_\varepsilon(y) \cap X = \emptyset$ , pois, caso contrário, existiria um  $y_1 \in X$  e daí o segmento que liga  $y_1$  a  $y$  passa por  $\partial X$  o que contraria  $\partial X \subset \partial\Omega$ . Assim,  $\Omega \setminus X$  é aberto e como  $\Omega$  é conexo então  $X$  ou  $\Omega \setminus X$  é vazio. Sendo  $X = Z \cup Z^\lambda$  então  $\Omega \setminus X = \emptyset$ . Como  $Z$  é aberto e a aplicação  $\varphi : Z \rightarrow Z^\lambda$  dado por  $\varphi(x_1, x') = (2\lambda - x_1, x')$  é um homomorfismo então  $Z^\lambda$  também é aberto. Portanto, temos  $\Omega = X = Z \cup Z^\lambda$ .

II- Caso  $Z_1 \neq \emptyset$ . Nesse caso temos  $\partial Z \setminus T_\lambda \subset \Omega$  e  $\partial Z^\lambda \setminus T_\lambda \subset \Omega$ . Segue-se

$$\partial X \subset (\partial Z \cup \partial Z^\lambda) \setminus (\partial Z \cap \Omega) \setminus (\partial Z^\lambda \cap \Omega) \subset \partial\Omega.$$

Provemos que  $X$  é aberto. Seja  $y \in X$  então  $y \in Z \cup Z^\lambda \cup (\partial Z \cap \Omega) \cup (\partial Z^\lambda \cap \Omega)$ . Se  $y \in Z \cup Z^\lambda$  que é aberto, então temos que  $y \in \text{int} X$

a) Para  $x \in \partial Z \cap \Omega$ , segue que  $x \in Z_1$  daí  $x \in T_\lambda \cap \Omega$  pois  $\partial Z \setminus T_\lambda \subset \partial\Omega$ . Como  $\Omega$  é aberto, existe uma bola  $B_\rho(x) \subset \Omega$ . Denotemos

$$B_> = B_\rho(x) \cap \{x_1 > \lambda\},$$

$$B_< = B_\rho(x) \cap \{x_1 < \lambda\},$$

$$B_= = B_\rho(x) \cap \{x_1 = \lambda\}.$$

Como  $x \in Z_1$ , então  $Z \cap B_{>} \neq \emptyset$ , se  $Z^c \cap B_{>} \neq \emptyset$  e daí, como  $B_{>}$  é conexo, pela teorema da alfândega temos que  $\partial Z \cap B_{>} \neq \emptyset$ . Note que  $\partial Z \cap B_{>} \subset (\partial\Omega \cup T_\lambda) \cap B_{>} = \emptyset$  pois  $B_{>} \subset B_\rho(x)$ ,  $B_\rho(x) \cap \partial\Omega = \emptyset$  e  $T_\lambda \cap B_{>} = \emptyset$ . Portanto  $B_{>} \subset Z$  e  $B_{<} \subset Z^\lambda$  segue  $B_{=} \subset \Omega \cap (\overline{Z} \cap T_\lambda)$ , e daí  $B_\rho(x) \subset X$  e assim  $x \in \text{int}X$ .

b) Para  $x \in \partial Z^\lambda \cap \Omega$ , tem-se  $x \in T_\lambda$ , pois  $\partial Z^\lambda \setminus T_\lambda \subset \Omega$ . Existe uma sequência  $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset Z^\lambda \cap \Omega$  tal que  $x_k \rightarrow x$  e temos  $\{x_k^\lambda\}_{k=1}^\infty \subset Z$  converge para  $x^\lambda = x$ . Assim  $x \in \overline{Z} \cap T_\lambda \cap \Omega \subset \partial Z \cap \Omega$ . Então, podemos aplicar o argumento utilizado em a) para garantir que  $x \in \text{int}X$ .

**Etapa C:** Na etapa A mostramos que existe um  $\lambda > m$  tal que (i) e (ii) são válidos. Nessa etapa desejamos mostrar que a desigualdade em (i) é estrita para tal  $\lambda$ . Como  $u$  é solução de (4.8), temos o seguinte

$$\sigma_k(\lambda(D^2u(x^\lambda))) = f(|x^\lambda|, u(x^\lambda), |Du(x^\lambda)|) = \sigma(\lambda(D^2v)) = f(|x^\lambda|, v, |Dv|) \quad x \in \Sigma(\lambda).$$

Sejam

$$a^{ij}(x) = \int_0^1 S_k^{ij}(sD^2u(x) + (1-s)D^2v(x))ds$$

$$b_i(x) = \begin{cases} \frac{f_1(|x|, u, |U_i|) - f_1(|x|, u, |V_i|)}{v_i - u_i}, & \text{se } u_i(x) \neq v_i(x) \\ 0, & \text{se } u_i(x) = v_i(x) \end{cases}$$

onde  $U_i = (u_1, \dots, u_{i-1}, v_i, \dots, v_n)$  e  $V_i = (u_1, \dots, u_i, v_{i+1}, \dots, v_n)$  e

$$c(x) = \begin{cases} \frac{f_1(|x|, v, |\nabla v|) - f_1(|x|, u, |\nabla v|)}{v - u}, & \text{se } u(x) \neq v(x) \\ 0, & \text{se } u(x) = v(x) \end{cases}.$$

Uma vez  $|x| > |x^\lambda|$

$$\begin{aligned} \sum a^{ij} &= f(|x^\lambda|, v, |Dv|) - f(|x|, u, |Du|) \\ &\geq f(|x|, v, |Dv|) - f(|x|, u, |Du|) \\ &\geq f_1(|x|, v, |Dv|) - f_1(|x|, u, |Du|) = \sum b^i(x)w_{x_i} + c(x)w. \end{aligned}$$

Tem-se

$$\sum a^{ij}w_{x_i x_j} - \sum b^i(x)w_{x_i} - c^+(x)w \geq \sum a^{ij}w_{x_i x_j} - \sum b^i(x)w_{x_i} - c(x)w \geq 0 \quad (4.9)$$

para  $x \in \Sigma(\lambda)$ . Por hipótese  $u \in \Phi_k^{2,1}(\overline{\Omega})$  e temos  $\overline{\Sigma(\lambda)}$ ,  $\overline{\Sigma(\lambda)^\lambda} \subset \overline{\Omega}$  então  $u \in \Phi_k^{2,1}(\overline{\Sigma(\lambda)})$ , isto é,  $u \in C^{2,1}(\overline{\Sigma(\lambda)})$ . De  $v(x) = u(x^\lambda)$  segue  $v \in C^{2,1}(\overline{\Sigma(\lambda)})$  pois  $u(x^\lambda) \in \overline{\Sigma(\lambda)^\lambda}$ . Daí

$$sD^2u(x) + (1-s)D^2v(x) \in \Phi_k^{2,1}(\overline{\Sigma(\lambda)}).$$

Logo operador (4.9) é elíptico. Seja  $Z$  uma componente conexa de  $\Sigma(\lambda)$  pelo princípio do máximo (Teorema 1.6) aplicado a  $Z$ , temos  $w < 0$  ou  $w = 0$  em  $Z$ . Suponha que ocorre o último caso. Pela Etapa B,  $\Omega$  é simétrico com relação a  $T_\lambda$ . O que não ocorre já que  $\lambda > m$  implica que  $\Sigma(\lambda)^\lambda \subset \Omega$ .

**Etapa D:** Pela Etapa A podemos definir

$$\mu = \inf\{\alpha > m : (i) \text{ é válido para } \lambda \in (\alpha, M_2)\}.$$

O objetivo é mostrar que  $\mu = m$ .

Suponha que  $\mu > m$ , então existem sequências  $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$  e  $\{x_k\}_{k=1}^\infty$  tais que  $\lambda_k \nearrow \mu$ ,  $x_k \in \Sigma(\lambda_k)$  e  $w(x_k, \lambda_k) > 0$ . Escolha  $x_k$  tal que  $w(x_k, \lambda_k)$  atinja seu máximo positivo sobre  $\overline{\Sigma(\lambda_k)}$  em  $x_k$ . Para  $x \in \partial\Sigma(\lambda)$

$$w(x, \lambda_k) = \begin{cases} 0, & x \in \partial\Sigma(\lambda_k) \cap T_{\lambda_k} \\ u(x^{\lambda_k}) - a_2, & x \in \partial\Sigma(\lambda_k) \cap \partial\Omega_2 \\ a_1 - u(x), & x \in \partial\Sigma(\lambda_k) \cap \partial\Omega_1^{\lambda_k} \end{cases} .$$

Então,  $w(x, \lambda_k) \leq 0$  em  $\partial\Sigma(\lambda_k)$ . Assim  $x_k \in \Sigma(\lambda_k)$  e por  $x_k$  ser um ponto de máximo no interior de  $\Sigma(\lambda_k)$  temos  $Dw(x_k, \lambda_k) = 0$ . Como  $\{x_k\}_{k=1}^\infty$  é limitada, existe uma subsequência convergindo para  $\bar{x} \in \overline{\Sigma(\mu)}$ . Sendo  $u \in C^2$ , temos

$$Dw(\bar{x}, \mu) = \lim_{k \rightarrow \infty} D[u(2\lambda_k - x_{1,k}, x'_k) - u(x_{1,k}, x'_k)] = 0$$

e

$$w(\bar{x}, \mu) = \lim_{k \rightarrow \infty} u(2\lambda_k - x_{1,k}, x'_k) - u(x_{1,k}, x'_k) \geq 0.$$

Uma vez que (i) é válido para  $\lambda = \mu$  devemos ter  $w(\bar{x}, \mu) = 0$ . Pela Etapa C,  $\bar{x} \in \partial\Sigma(\mu)$ . Pelo Teorema 1.7,  $\bar{x}$  não pertence a parte suave de  $\partial\Sigma(\mu)$ . Portanto

$$\bar{x} \in (\partial\Omega \cap T_\mu) \cup (\partial\Omega_1^\mu \cap (\partial\Omega \setminus T_\mu)).$$

Caso  $\bar{x} \in (\partial\Omega_1^\mu) \cap (\partial\Omega \setminus T_\mu)$ , como  $\bar{x} \in \partial\Omega_1^\mu$  então  $\bar{x} \notin \partial\Omega_1$  pois  $\partial\Omega_1^\mu \cap \partial\Omega_1 \subset T_\mu$  quando  $\mu > m$ . Então,  $\bar{x} \in \partial\Omega_1^\mu$  e  $\bar{x} \in \Omega_2$ . Logo  $w(\bar{x}) = u(\bar{x}^\mu) - u(\bar{x}) = a_1 - a_2 < 0$  assim,  $\bar{x} \in \partial\Omega \cap T_\mu$ . Pelo Lema 4.2 com  $x = \bar{x}$ , existe uma bola  $B_\rho(\bar{x})$  tal que  $\frac{\partial u}{\partial x_1} > 0$  em  $B_\rho(\bar{x}) \cap \Omega$ , pois temos o seguinte, como  $\mu > m$  então, o normal da fronteira não é perpendicular a  $e_1$ , caso  $\bar{x} \in \Omega_1$  o vetor normal interno tem coordenada  $x_1 > 0$  e caso  $\bar{x} \in \partial\Omega_2$  o vetor normal tem

coordenada  $x_1 < 0$ . Como  $\bar{x} \in T_\mu$  para  $k$  suficientemente grande temos  $x_k$  e  $x_k^{\lambda_k} \in B_\rho(\bar{x})$ . Então,

$$u(x_k) - u(x_k^{\lambda_k}) = \int_{2\lambda_k - x_1^k}^{x_1^k} \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x^{k'}) dt > 0, \quad (4.10)$$

isto é,  $w(x^k, \lambda_k) < 0$  o que contradiz  $w(x^k, \lambda_k) > 0$ . Isto mostra que  $\mu = m$ . Isto prova a Etapa D.

Até agora foi mostrado que  $w(x, m) \leq 0$  em  $\Sigma(m)$ . E pelo princípio do máximo foi verificado que para qualquer componente  $Z$  de  $\Sigma(m)$ , temos  $w < 0$  ou  $w = 0$ . Pela Etapa B, se o último caso ocorre obtemos que  $\Omega$  é simétrico. Mostremos que  $w < 0$  é impossível nos casos

- 1)  $\partial\Sigma_i(\lambda)^\lambda$  se tornar internamente tangente a  $\partial\Omega_i$  em  $P \in T_\lambda$ ;
- 2)  $T_\lambda$  atingir uma posição onde é ortogonal a  $\partial\Omega_i$  em algum ponto  $Q \in T_\lambda \cap \overline{(\Gamma_i(\lambda))}$ .

**Etapa E:** Vamos considerar o caso crítico 1), isto é,  $\partial\Sigma_i(m)^m$  se tornar internamente tangente a  $\partial\Omega_i$  em  $P \notin T_m$ . Como  $P \in \partial\Omega_i \cap \partial\Sigma_i(m)^m$ ,  $P^m \in \partial\Sigma_i(m)$  e do fato de  $P \notin T_m$  temos que  $P^m \in \Gamma_i(m)$ . Daí temos  $u(P) = u(P^m)$  e assim  $u(P^m) = v(P^m, m) = u(P) = a_i$ . Logo  $w(P^m, m) = v(P^m, m) - u(P^m) = 0$  e utilizando  $\frac{\partial u}{\partial \gamma} = c_i$  em  $\partial\Omega_i$  temos

$$\frac{\partial w}{\partial \gamma}(P^m, m) = \frac{\partial v}{\partial \gamma}(P^m, m) - \frac{\partial u}{\partial \gamma}(P^m) = 0.$$

Pois,

$$\frac{\partial v}{\partial \gamma}(P^m) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{v(P^m + t\gamma, m) - v(P^m, m)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{u(P + t\gamma^m) - u(P)}{t} = c_i$$

onde  $\gamma^m$  é a reflexão do vetor  $\gamma$ ,  $\gamma$  é o normal com relação a  $P$ .

Mas pelo Teorema de Hopf 1.5 aplicado a (4.9), temos

$$\frac{\partial w}{\partial \gamma}(P^m, m) < 0 \text{ se } P \in \partial\Omega_I$$

o que é uma contradição. Portanto  $w < 0$  em  $Z$  é impossível ocorrer no primeiro caso crítico.

Verifiquemos agora o que ocorre no caso crítico 2).

**Etapa F:** Nesse etapa temos como objetivo provar que  $Dw(Q) = 0$  e  $D^2w(Q) = 0$ . Utilizando que  $w(x) = u(x^m) - u(x) = u(2m - x_1, x') - u(x_1, x')$ , para  $2 \leq l \leq n$  temos

$$\frac{\partial w}{\partial x_l}(x) = \frac{\partial u(x^m)}{\partial x_l} - \frac{\partial u(x)}{\partial x_l}.$$

Para  $x = Q$  temos  $Q = Q^\lambda$ , então

$$\frac{\partial w}{\partial x_l}(Q) = \frac{\partial u(Q^m)}{\partial x_l} - \frac{\partial u(Q)}{\partial x_l} = 0.$$

Como  $Q \in T_m$ , já vimos que

$$\frac{\partial v}{\partial x_1}(Q) = -\frac{\partial u}{\partial x_1}(Q)$$

e

$$\frac{\partial w}{\partial x_1}(Q) = -2\frac{\partial u}{\partial x_1}(Q).$$

Para  $l, k \neq 1$ , temos

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_l \partial x_k}(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_k}(x^\lambda) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_k}(x)$$

e usando  $Q = Q^\lambda$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_l \partial x_k}(Q) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_k}(Q^\lambda) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_k}(Q) = 0. \quad (4.11)$$

Além disso,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0.$$

Para  $l \geq 2$ , utilizando  $Q = (Q_1, Q')$  onde  $Q_1 = m$ , temos

$$\frac{\partial w}{\partial x_l}(x) = \frac{\partial u}{\partial x_l}(x^\lambda) - \frac{\partial u}{\partial x_l}(x) \quad (4.12)$$

e assim, para  $k, l = 2, \dots, n$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_l}(Q) &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{\partial w}{\partial x_l}(Q + te_1) - \frac{\partial w}{\partial x_l}(Q) \right] \frac{1}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{\partial u}{\partial x_l}(2m - Q_1 - t, Q') - \frac{\partial u}{\partial x_l}(m + t, Q') \right] \frac{1}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{\partial}{\partial x_l}(m - t, Q') - \frac{\partial u}{\partial x_l}(Q) - \frac{\partial u}{\partial x_l}(m + t, Q') + \frac{\partial u}{\partial x_l}(Q) \right] \frac{1}{t} \\ &= -2\frac{\partial u}{\partial x_1 \partial x_l}(Q). \end{aligned}$$

Resta provar que em  $Q$  temos

$$\frac{\partial w}{\partial x_1}(Q) = 0$$

e

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_l}(Q) = 0, \quad l = 2, 3, \dots, n-1, n.$$

Como  $\partial\Omega \in C^2$ , vamos considerar um novo sistema de coordenadas em  $\mathbb{R}^n$  de modo que a origem seja  $Q$ ,  $x_n$  o normal interior em  $Q$  e  $x_1$  o vetor normal com relação ao plano  $T_m$ . Nessas coordenadas tem-se

$$x_n = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \quad \Phi \in C^2$$

onde utiliza-se o fato de  $\partial\Omega_i$  ser localmente o gráfico de uma função pois  $u \equiv a_i$  em  $\partial\Omega_i$ . Como  $Q$  é a origem do sistema tem-se localmente

$$\Phi(0') = 0.$$

Uma parametrização da superfície  $\partial\Omega_i$  é dada por  $\psi$  definida por

$$\psi(x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_1, \dots, x_{n-1}, \Phi(x_1, \dots, x_{n-1})).$$

Assim, o vetor normal unitário apontando para dentro de  $\partial\Omega_i$  é dada por

$$\gamma = \frac{1}{(|D'\Phi(x)|^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} (D'\Phi(x), -1). \quad (4.13)$$

Por construção nesse novo sistema de coordenadas  $\gamma$  está na direção  $x_n$ , daí as  $(n-1)$  primeiras coordenadas em (4.13) são nulas. Então,

$$D'\Phi(0') = 0 \quad (4.14)$$

onde  $D' = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-2}}, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}})$ . Como  $u \in C^{2,1}(\bar{\Omega})$  e  $u = a_i$  em  $\partial\Omega_i$

$$u(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \phi(x_1, \dots, x_{n-1})) = a_i.$$

Derivando com respeito a  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} + \frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = 0.$$

Como  $D'\Phi(0') = 0$ , temos

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}(0) = 0, \quad k = 1, \dots, n-1. \quad (4.15)$$

Em particular

$$\frac{\partial w}{\partial x_1}(0) = -2 \frac{\partial u}{\partial x_1}(0) = 0.$$

Utilizando que  $\frac{\partial u}{\partial \gamma} = c_i$  em  $\partial\Omega_i$

$$c_i = \frac{\partial u}{\partial \gamma} = \frac{1}{(|D'\Phi|^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) \cdot (D'\Phi, -1).$$

Logo

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_n} = c_i \left( 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.16)$$

Derivando (4.16) com relação a  $x_1$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} + \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_k \partial x_1} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = c_i \frac{1}{2} \left( 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_k \partial x_1} \right).$$

Avaliando em  $x = 0$ , temos

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}(0) = 0$$

no qual utilizamos ainda (4.14) e (4.11). Então

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_n}(0) = -2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}(0) = 0.$$

Resta provar

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_l}(0) = 0, \quad l = 2, \dots, n-1.$$

Pela expansão de Taylor de  $w$  em 0, para  $\xi \in \Sigma(0)$  próximo de 0 vale

$$\begin{aligned} w(\xi) &= w(0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_i}(0) \xi_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}(0) \xi_i \xi_j + r(\xi) \\ &= \sum_{i=2}^{n-1} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_i}(0) \xi_1 \xi_i + r(\xi) \end{aligned}$$

onde  $r(\xi) \setminus |\xi|^2 \rightarrow 0$  quando  $\xi \rightarrow 0$ .

Fixe  $l \in \{2, \dots, n-1\}$ , defina  $\xi(\delta) = \delta(1, 0, 0, \dots, \pm 1, 0, \dots, 0, 1)$  para  $\delta > 0$ , onde  $\pm 1$  é a  $l$ -ésima entrada de  $\xi$  é  $-1$  se  $\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_l}(0) < 0$  e  $1$  se  $\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_l}(0) > 0$ . Tomando  $\delta$  suficientemente pequeno, de modo que  $\xi(\delta) \in \Sigma(0)$ , temos

$$w(\xi(\delta)) = \delta^2 \left| \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_l}(0) \right| + r(\xi(\delta)),$$

e daí

$$\frac{w(\xi(\delta))}{\delta^2} = \left| \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_l}(0) \right| + 2 \frac{r(\xi(\delta))}{2\delta^2} = \left| \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_l}(0) \right| + 2 \frac{r(\xi(\delta))}{|\xi(\delta)|^2}.$$

Como  $\frac{r(\xi(\delta))}{|\xi(\delta)|^2} \rightarrow 0$  quando  $\delta \rightarrow 0$ , para  $\delta$  suficientemente pequeno  $\left| \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_l}(0) \right| + 2 \frac{r(\xi(\delta))}{|\xi(\delta)|^2} > 0$ .

Mas  $w < 0$  em  $\Sigma(0)$  nos dá  $\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_l}(0) = 0$ . Isso prova que  $Dw(0) = 0$  e  $D^2w(0) = 0$ .

**Etapa G:** Nessa etapa vamos mostrar que na situação do segundo caso obteremos uma contradição com relação ao Teorema 1.9. Voltando as coordenadas usuais. Como  $u, v \in C^{2,1}(\overline{\Sigma(m)})$  são  $k$ -convexas então  $w$  satisfaz a condição (1.2) pois a matriz  $a_{ij}$  é positiva definida. Vamos verificar que a condição (1.3) também é satisfeita. Se  $x \in \Sigma(m) \cap T_m$ , como  $v(x_1, x_2, \dots, x_n) = v(x) = u(x^m) = u(2m - x_1, x_2, \dots, x_n)$  vale

$$v_{x_1}(x) = -u_{x_1}(x)$$

$$v_{x_1 x_1}(x) = u_{x_1 x_1}(x)$$

$$v_{x_l x_j}(x) = u_{x_l x_k}(x) \text{ para } 2 \leq l, k \leq n.$$

Assim, segundo a notação em (1.6),  $D^2v(x) = \widetilde{D^2u(x)}$  e  $D^2u(x) = \widetilde{D^2v(x)}$ . Logo

$$sD^2v(x) + (1-s)D^2u(x) = sD^2u(x) + \widetilde{(1-s)D^2v(x)}, \quad s \in [0, 1] \quad (4.17)$$

Ainda

$$\begin{aligned} 2a^{i1}(x) &= 2 \int_0^1 S_k^{i1}(sD^2u(x) + (1-s)D^2v(x))ds \\ &= \int_0^1 S_k^{i1}(sD^2u(x) + (1-s)D^2v(x))ds + \int_0^1 S_k^{i1}(sD^2u(x) + (1-s)D^2v(x))ds. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança  $1-t=s$

$$\begin{aligned} \int_0^1 S_k^{i1}(sD^2u(x) + (1-s)D^2v(x))ds &= - \int_1^0 S_k^{i1}(tD^2v(x) + (1-t)D^2u(x))dt \\ &= \int_0^1 S_k^{i1}(tD^2v(x) + (1-t)D^2u(x))dt. \end{aligned}$$

Como a integral independe da variável podemos devolver a integral para variável  $s$ , temos

$$2a^{i1}(x) = \int_0^1 S_k^{i1}(sD^2u(x) + (1-s)D^2v(x))ds + \int_0^1 S_k^{i1}(sD^2v(x) + (1-s)D^2u(x))ds.$$

Utilizando de (1.8) e (4.17), segue

$$\begin{aligned} 2a^{i1} &= \int_0^1 S_k^{i1}(sD^2u(x) + (1-s)D^2v(x))ds + \int_0^1 S_k^{i1}(sD^2v(x) + (1-s)D^2u(x))ds \\ &\quad \int_0^1 S_k^{i1}(sD^2u(x) + (1-s)D^2v(x))ds + \int_0^1 S_k^{i1}(sD^2u(x) + \widetilde{(1-s)D^2v(x)})ds = 0. \end{aligned}$$

Então,

$$a^{ij} = 0.$$

Como  $u, v \in C^{2,1}(\overline{\Sigma(m)})$ , isto é as segundas derivadas são Lipschitz contínuas, e da definição de  $a^{i1}(x)$ , temos que  $a^{i1}(x)$  é Lipschitz contínua em  $\overline{\Sigma(m)}$ , existe uma constante  $L > 0$  tal que, para  $x = (x_1, x')$  e  $x_0 = (m, x') \in \Sigma(m) \cap T_m$ ,

$$|a^{i1}| = |a^{ij}(x) - a^{ij}(x_0)| \leq L|x - x_0| = Ld(x)$$

onde  $d(x)$  é a distância de  $x$  a  $T_m$ . Sabemos que o vetor unitário normal a  $T_m$  é  $\eta = (1, 0, \dots, 0)$

e dado um vetor arbitrário  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , temos

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) \xi_i \eta_j \right| &= \left| \sum_{i=1}^n a^{i1}(x) \xi_i \right| \\ &\leq \sum_{i=2}^n |a^{i1}(x)| |\xi_i| + |a^{11}| |\xi_1| \\ &\leq (n-1)Ld(x)|\xi| + K_2|\xi \cdot \eta| \\ &\leq \hat{K}(|\xi|d(x) + |\xi \cdot \eta|) \end{aligned}$$

onde utilizamos (1.2) e  $\hat{K} = \max\{(n-1)L, K_2\}$ . Como  $w < 0$  em  $Z$  e  $w(Q) = 0$  podemos aplicar o Teorema 1.9 para garantir

$$\text{ou } \frac{\partial w}{\partial \gamma} < 0 \text{ ou } \frac{\partial^2 w}{\partial \gamma^2} < 0$$

o que contradiz o fato de  $Dw(Q) = 0$  e  $D^2w(Q) = 0$ . Portanto  $w < 0$  em  $Z$  e o segundo caso não ocorre. Isso prova a Etapa  $G$ .

Assim, para qualquer componente conexa de  $\Sigma(m)$  temos  $w \equiv 0$  e pela Etapa  $B$ ,  $\Omega$  é simétrico com relação a  $T_m$  na direção  $x_1$ . Pela invariância da rotação temos que  $\Omega$  será simétrica em todas direções. □

# Referências Bibliográficas

- [1] ALEXANDROV, A. D. *Uniqueness theorems for surfaces in the large I*. Vestnik Leningrad. Univ, 1956. p. 5–17.
- [2] AMICK, C.J.; FRAENKEL, L.E. *Uniqueness of Hill's spherical vortex*, Arch. Ration. Mech. Anal. 92, 1986. p.91–119.
- [3] BRANDOLINI, B.; NITSCH, C.; SALANI, P.; TROMBETTI, C. *Serrin-type overdetermined problems: An alternative proof*. Arch. Ration. Mech. Anal. 190, 2008. p. 267–280.
- [4] EVANS, L. C. *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics - American Mathematical Society, 1998.
- [5] GIDAS, B.; NI, W. M.; NIRENBERG, L. *Symmetry and related properties via the maximum principle*. Comm. Math. Phys 68, 1979. p. 209–243
- [6] GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S. *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer, reprint of the 1998.
- [7] IVOCHKINA. N. M. *Description of cones of stability generated by differential operators of Monge-Ampere type*. English trans. Math. USSR Sb. 50, 1985. p. 259-268.
- [8] JOST, J. *Partial Differential Equations*. 3.ed. New York. Springer., 2013.
- [9] LIMA, E. L. *Curso de Análise*. Rio de Janeiro: Projeto Euclides - IMPA.v. 2. 11.ed, 2010.
- [10] LIMA, E. L. *Espaços métricos*. 5.ed. Rio de Janeiro; IMPA, 2015
- [11] PROTTER, M. H.; WEINBERGER, H. F. *Maximum Principles in Differential Equations*. New Jersey: Prentice-Hall, 1967.
- [12] REICHEL, W. *Radial symmetry by moving planes for semilinear elliptic BVPs on annuli and other non-convex domains*. in: C. Bandle, et al. (Eds.), Progress in Partial Differential

- Equations: Elliptic and Parabolic Problems, in: Pitman Res. Notes, vol. 325, 1995, p. 164–182.
- [13] ROYDEN, H.; FITZPATRICK, P. M. *Real Analysis*, 4.ed., Pearson College Div, 2010
- [14] SERRIN, J. *A symmetry problem in potential theory*. Arch Rat Mech Anal; 43:, 1971. p. 304–318
- [15] TSO, K. *Remarks on critical exponents for Hessian operators*, Annales de l’Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis, Volume 7, 1990. p. 113-122,
- [16] WANG, B.; BAO, J. *Over-determined problems for  $k$ -hessian equations in ring-sharped*. Elsevier Nonlinear Analysis 127, 2015 p. 143-156
- [17] WANG, X.-J. *A Class of Fully Nonlinear Elliptic Equations and Related Functionals*. Indiana University Mathematics Journal, vol. 43, no. 1, 1994, p. 25–54.
- [18] WANG, X.-J. *The  $k$ -Hessian equation*. Geometric Analysis and PDEs, Lecture Notes in Math.Springer, 1977, p. 177–252
- [19] WEINBERGER, H. F. *Remark on the preceding paper of Serrin*. Arch RatMech Anal; 43:, 1972. p. 319– 320