



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ  
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA  
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
MESTRADO EM MATEMÁTICA

**Relação entre os métodos de decomposição de  
Douglas-Rachford e ponto proximal para operadores  
monótonos maximais**

**Igor Fontenele do Amaral**

**Teresina - 2020**

**Igor Fontenele do Amaral**

**Dissertação de Mestrado:**

**Relação entre os métodos da decomposição de Douglas-Rachford  
e ponto proximal para operadores monótonos maximais**

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. João Carlos de Oliveira Souza

**Teresina - 2020**

Igor Fontenele do Amaral

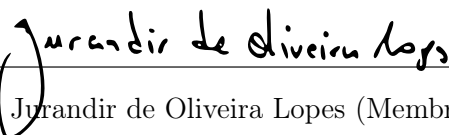
Relação entre os métodos da decomposição de Douglas-Rachford  
e ponto proximal para operadores monótonos maximais

Dissertação submetida à banca examinadora  
abaixo discriminada em defesa pública e  
APROVADA em 26/02/2021.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. João Carlos de Oliveira Souza (Orientador) - Presidente  
Universidade Federal do Piauí - UFPI



Prof. Dr. Jurandir de Oliveira Lopes (Membro Interno)  
Universidade Federal do Piauí - UFPI



Profa. Dra. Flávia Morgana Oliveira Jacinto (Membro Externo)  
Universidade Federal do Amazonas - UFAM



Prof. Dr. Sándor Zoltán Németh (Membro Externo)  
University of Birmingham, Reino Unido

Teresina - 2020

FICHA CATALOGRÁFICA  
Universidade Federal do Piauí  
Biblioteca Setorial de Ciências da Natureza – CCN  
Serviço de Processamento Técnico

A485r    Amaral, Igor Fontenele do.  
          Relação entre os métodos de decomposição de Douglas-  
Rachford e ponto proximal para operadores monótonos  
maximais / Igor Fontenele do Amaral. – 2021.  
          95 f.: il.

          Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí,  
Centro de Ciências da Natureza, Programa de Pós-Graduação em  
Matemática, Teresina, 2021.

          “Orientador: Prof. Dr. João Carlos de Oliveira Souza.”

          1. Matemática - Método. 2. Método do Ponto Proximal. 3.  
Método de Douglas-Rachford. I. Souza, João Carlos de Oliveira.  
II. Título.

CDD 515

Bibliotecária (o): Caryne Maria da Silva Gomes – CRB3/1461

*Dedico à minha mãe, Maria de Jesus Fontenele.*

# Agradecimentos

Agradeço a minha Mãe, Maria de Jesus, por tudo o que fez por minha formação, todo o incentivo e apoio.

Agradeço aos meu irmãos, Iranildo e Kelly, minha sobrinha Evelyn Nicolý, que mesmo distantes torcem muito por mim.

Agradeço a todos os amigos que fiz na UFPI nos últimos anos, em especial os que tive o prazer de dividir conhecimentos diretamente.

Agradeço ao meu orientador João Carlos pela oportunidade, ensinamentos e paciência.

Agradeço aos professores do departamento de matemática da UFPI, em especial aqueles que tive um contato direto com aulas e apoios.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

*“Em questões de ciência, a autoridade de milhares não vale mais do que o humilde raciocínio de um único indivíduo”.*

Galileu Galilei.



# Resumo

Neste trabalho estudamos o método da decomposição de Douglas-Rachford para encontrar zero na soma de dois operadores monótonos maximais. Mostramos que tal método é um caso especial do método do ponto proximal (MPP) usando um operador chamado operador decomposição. Além disso, apresentamos uma versão modificada do MPP, derivando um outro método chamado de método de direção alternada dos multiplicadores para programação convexa. Também mostramos a relação entre o problema da viabilidade convexa e o problema de encontrar um zero na soma de operadores. Avanços desse tipo ilustram o poder e a generalidade obtidos pela adoção da teoria do operador monótono como uma estrutura conceitual. Finalmente, apresentamos algumas ilustrações numéricas.

**Palavras-chave:** Método de Douglas-Rachford; direção alternada dos multiplicadores; problema de viabilidade convexa; soma de operadores monótonos.

# Abstract

In this work we study the Douglas-Rachford splitting method for finding a zero of the sum of two monotone operators. We show that such a method is a special case of the proximal point method (PPM) by using an operator called splitting operator. Furthermore, we present a modified version of the PPM deriving another method called generalized alternating direction method of multipliers for convex programming. Also, we show the relation between the convex feasibility problem and the problem of finding a zero of the sum of operators. Advances of this type illustrate the power and generality achieved by adopting the theory of the monotone operator as a conceptual framework. Finally, we present some numerical illustrations.

**Key-words:** Douglas-Rachford method; alternating direction of multipliers; feasibility convex problem; sum of monotone operators.

# Conteúdo

<b>Resumo</b>	<b>iv</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>1 Noções Preliminares</b>	<b>1</b>
<b>2 Operadores Monótonos</b>	<b>12</b>
<b>3 Algoritmo do ponto proximal generalizado</b>	<b>21</b>
<b>4 Método da decomposição de Douglas-Rachford</b>	<b>28</b>
<b>5 Alguns casos especiais interessantes</b>	<b>36</b>
5.1 Método das inversas parciais . . . . .	36
5.2 Generalização do método de direção alternada dos multiplicadores . . . . .	38
5.3 Problema de viabilidade convexa . . . . .	45
5.3.1 Projeção sobre um conjunto convexo . . . . .	45
5.3.2 O operador refletor . . . . .	49
5.3.3 O método de Douglas-Rachford e o problema de viabilidade convexa	49
<b>6 Terminação finita: métodos do ponto proximal e Douglas-Rachford</b>	<b>54</b>
<b>7 Experimentos numéricos</b>	<b>57</b>
7.1 Aplicação I . . . . .	57
7.2 Aplicação II . . . . .	60

7.3	Aplicação III - Sudoku . . . . .	61
7.3.1	Modelando o Sudoku . . . . .	63
7.3.2	Restrições . . . . .	63
7.3.3	Iterações . . . . .	66
<b>Apêndice A Códigos em MatLab</b>		<b>69</b>
A.1	Aplicação I . . . . .	69
A.2	Aplicação II . . . . .	71
<b>Referências Bibliográficas</b>		<b>75</b>

# Introdução

Dado um operador monótono maximal  $T$ , um algoritmo fundamental para encontrar uma raiz ou zero de um operador monótono é o algoritmo do ponto proximal proposto em Rockafellar [63]. O conhecido método dos multiplicadores [58, 41] para programação convexa restrita é conhecido por ser um caso especial do algoritmo do ponto proximal. O algoritmo do ponto proximal para operadores requer a avaliação de operadores resolventes da forma  $(I + \lambda T)^{-1}$ , onde  $\lambda$  é um escalar positivo, e  $I$  denota o operador identidade. A maior dificuldade do método é que  $I + \lambda T$  pode ser muito difícil inverter, dependendo da natureza de  $T$ , pois o algoritmo gera uma sequência  $x^k \in \mathcal{H}$ , sendo  $\mathcal{H}$  um espaço de Hilbert, de forma que:

$$x^{k+1} \in (I + \lambda T)^{-1}(x^k)$$

provando-se que, sob certas condições,  $x^k \rightarrow \bar{x} \in \mathcal{H}$  onde  $0 \in T\bar{x}$ . Uma alternativa para tal dificuldade é encontrar operadores monótonos maximais  $A$  e  $B$  tal que  $A + B = T$ , mas  $I + \lambda A$  e  $I + \lambda B$  são mais fáceis de inverter do que  $I + \lambda T$ . Pode-se então criar um algoritmo que use apenas operadores da forma  $(I + \lambda A)^{-1}$  e  $(I + \lambda B)^{-1}$  em vez de  $(I + \lambda(A+B))^{-1}$ . Essa abordagem é chamada de método de decomposição e é inspirada em técnicas bem estabelecidas da álgebra linear numérica. Em Marchuck [48], os métodos de decomposição de operadores monótonos, se dividem basicamente em 4 principais classes: *Forward-Backward* [35, 54, 73], *Double-Backward* [54, 46], *Peaceman-Rachford* [46] e *Douglas-Rachford* [46]. Vamos nos concentrar na classe "Douglas-Rachford" que parece ter as propriedades de convergência mais gerais.

Gabay [35] mostrou que o método de direção alternada dos multiplicadores (alternating direction method), uma variação no método de multiplicadores concebidos para serem mais propícios à decomposição, é um caso particular de *Douglas-Rachford splitting* ou decomposição de Douglas-Rachford. O método de direção alternada dos multiplicado-

res foi introduzido pela primeira vez em [34, 36]; veja também [33]. Apesar dos resultados em [35], a maioria dos desenvolvimentos de métodos de direção alternada de multiplicadores baseiam-se em uma análise demorada dos primeiros princípios. Aqui procuramos demonstrar o benefício de usar a abordagem teórica de operadores.

Este trabalho baseia-se principalmente no artigo de Eckstein e Bertsekas [17], que nos dá uma demonstração de que a decomposição de Douglas-Rachford é uma aplicação do algoritmo do ponto proximal. Como consequência, grande parte da teoria do ponto proximal e dos algoritmos relacionados pode ser transportada para o contexto da decomposição de Douglas-Rachford e seus casos especiais, incluindo o método de direção alternada dos multiplicadores. Como um exemplo dessa transição, apresentamos uma forma generalizado do algoritmo do ponto proximal e mostramos como ele dá origem ao método conhecido como decomposição generalizada de Douglas-Rachford. Isso, por sua vez, permite a derivação de um novo método Lagrangiano aumentado para programação convexa, o método generalizado de direção alternada dos multiplicadores. Este resultado ilustra os benefícios da adoção da abordagem analítica de operadores monótonos, porque permite fatores de relaxamento excessivo, que geralmente aceleram métodos baseado no ponto proximal. Na prática, o método generalizado de direção alternada dos multiplicadores pode ser mais rápido que o método de direção alternada dos multiplicadores em algumas aplicações. Além disso, por permitir computação aproximada, também pode ser mais amplamente aplicável.

Também utilizaremos o algoritmo Douglas-Rachford no problema de viabilidade convexa utilizando projeções. Este método é citado para solucionar problemas de viabilidade devido ao seu bom desempenho, mesmo em configurações não-convexas. O método também foi aplicado com êxito à problemas combinatórios NP-completos como o Sudoku (ver [28, 26]). Recentemente, surgiram novos resultados tentando justificar por quê Douglas-Rachford funciona tão bem em casos não convexos. Para a aplicação envolvendo  $n > 2$  conjuntos, transformaremos em um problema de viabilidade equivalente à 2 conjuntos utilizando o espaço de produtos de Pierra [56].

A dissertação está organizada da seguinte forma. No Capítulo 1 trataremos das definições básicas de análise convexa e resultados preliminares. O Capítulo 2 apresenta a teoria básica dos operadores monótonos no espaço de Hilbert. O Capítulo 3 prova a convergência de uma forma generalizada do algoritmo de ponto proximal. O Capítulo

4 discute a decomposição de Douglas-Rachford, mostrando que é um caso especial do algoritmo de ponto proximal por meio de um operador de decomposição especialmente construído. Essa noção é combinada com o resultado do capítulo 3 para produzir uma decomposição generalizada de Douglas-Rachford. No Capítulo 5 introduziremos alguns casos especiais que são eles: método das inversas parciais, generalização do método de direção alternada dos multiplicadores e o problema da viabilidade convexa. O Capítulo 6 apresenta brevemente um resultado negativo referente à terminação finita dos métodos da decomposição de Douglas-Rachford. No Capítulo 7 apresentaremos algumas ilustrações numéricas e seus resultados satisfatórios.

# Capítulo 1

## Noções Preliminares

Neste capítulo serão colocadas algumas definições e resultados básicos de análise convexa, onde em suma foram retiradas dos livros de Rockafellar [61], Izmailov e Solodov [42] e Bauschke e Combettes [10]. Ao longo deste trabalho  $\mathcal{H}$  é um espaço real de Hilbert com norma  $\|\cdot\|$  induzida pela produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**Definição 1.1.** Um conjunto  $D \subset \mathcal{H}$  é dito ser um conjunto convexo se para todo  $x, y \in D$  e todo  $\alpha \in [0, 1]$  o ponto  $\alpha x + (1 - \alpha)y$  também for elemento de  $D$ .

**Definição 1.2.** O epígrafo de uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  é o conjunto

$$E_f = \{(x, c) \in D \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq c\}.$$

**Definição 1.3.** O conjunto de nível de uma função  $f : D \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  associado a  $c \in \mathbb{R}$ , é o conjunto dado por

$$L_{f,D}(c) = \{x \in D \mid f(x) \leq c\}.$$

**Definição 1.4.** Seja  $D \subset \mathcal{H}$  um conjunto convexo. Diz-se que a função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  é convexa em  $D$  quando para quaisquer  $x, y \in D$  e  $\alpha \in [0, 1]$  tem-se:

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

**Proposição 1.1.** Seja  $D \subset \mathcal{H}$  um conjunto convexo. Uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  é convexa em  $D$  se, e somente se, o epígrafo de  $f$  é um conjunto convexo em  $\mathcal{H} \times \mathbb{R}$ .

*Demonstração.* Suponhamos primeiro que  $E_f$  seja convexo. Sejam  $x \in D$ , e  $y \in D$  quaisquer. Obviamente,  $(x, f(x)) \in E_f$  e  $(y, f(y)) \in E_f$ . Pela convexidade de  $E_f$ , para



todo  $\alpha \in [0, 1]$  temos

$$(\alpha x + (1 - \alpha)y, \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)) = \alpha(x, f(x)) + (1 - \alpha)(y, f(y)) \in E_f.$$

Pela definição do epígrafo, isto é equivalente a dizer que

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y),$$

isto é,  $f$  é convexa.

Suponhamos agora que  $f$  seja convexa. Sejam  $(x, c_1) \in E_f$  e  $(y, c_2) \in E_f$ . Como  $f(x) \leq c_1$  e  $f(y) \leq c_2$ , pela convexidade de  $f$ , para todo  $\alpha \in [0, 1]$  tem-se

$$\begin{aligned} f(\alpha x + (1 - \alpha)y) &\leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \\ &\leq \alpha c_1 + (1 - \alpha)c_2, \end{aligned}$$

o que significa que

$$\alpha(x, c_1) + (1 - \alpha)(y, c_2) = (\alpha x + (1 - \alpha)y, \alpha c_1 + (1 - \alpha)c_2) \in E_f,$$

isto é,  $E_f$  é convexo. □

**Definição 1.5.** *Sejam  $D \subset \mathcal{H}$  um conjunto convexo e  $\bar{x} \in D$ . O cone normal (cone de direções normais) no ponto  $\bar{x}$  em relação ao conjunto  $D$  é dado por*

$$\mathcal{N}_D(\bar{x}) = \{d \in \mathcal{H} \mid \langle d, x - \bar{x} \rangle \leq 0, \forall x \in D\}.$$

**Definição 1.6.** *Seja  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  é dita Lipschitz contínua se, existe  $\lambda$  tal que, para todo  $x, y \in \mathcal{H}$  tem-se:*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \lambda \|x - y\|.$$

O número  $\lambda$  é chamado constante de Lipschitz.

**Definição 1.7.** *Seja  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função convexa. Dizemos que  $y \in \mathcal{H}$  é um subgradiente de  $f$  no ponto  $x \in \mathcal{H}$  se*

$$f(z) \geq f(x) + \langle y, z - x \rangle, \quad \forall z \in \mathcal{H}.$$

O conjunto de todos os subgradientes de  $f$  em  $x$  se chama o *subdiferencial* de  $f$  em  $x$ , o denotamos por  $\partial f(x)$ .

**Definição 1.8.** A reta estendida é o conjunto

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

também denotado por  $[-\infty, \infty]$ , onde  $\infty$  e  $-\infty$  são símbolos que têm as propriedades que intuitivamente deles esperamos, isto é,

$$-\infty < x < \infty \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Operamos aritmeticamente com os símbolos  $\infty$  e  $-\infty$  da seguinte forma: dado  $a \in \mathbb{R}$ ,

- $a + \infty = \infty + a = \infty$
- $a - \infty = -\infty + a = -\infty$
- $\infty + \infty = \infty$
- $-\infty + (-\infty) = -\infty$ .
- $a \cdot \infty = \infty \cdot a = \begin{cases} \infty, & \text{se } a > 0 \\ -\infty, & \text{se } a < 0 \end{cases}$
- $a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = \begin{cases} -\infty, & \text{se } a > 0 \\ \infty, & \text{se } a < 0 \end{cases}$
- $\infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$
- $\infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty$
- $0 \cdot \infty = 0 \cdot (-\infty) = \infty \cdot 0 = (-\infty) \cdot 0 = 0$ .

**Definição 1.9.** Uma função  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , não identicamente  $+\infty$  é dita convexa se, para todo  $x, y \in \mathcal{H}$  e todo  $\alpha \in (0, 1)$ , tem-se:

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

Com desigualdade em  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ .

Logo podemos estender uma função convexa  $f : D \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  onde  $D$  é convexo, a uma função convexa como na Definição 1.9 da seguinte forma  $\bar{f} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ,

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in D, \\ +\infty, & \text{se } x \notin D. \end{cases} \quad (1.1)$$

**Definição 1.10.** O domínio de uma função  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  é o conjunto onde a imagem de  $f$  é um valor finito, isto é,

$$\text{dom}(f) = \{x \in \mathcal{H} ; f(x) < \infty\}.$$

Uma função é dita própria se seu domínio é não vazio, ou seja, existe  $x \in \mathcal{H}$  tal que  $f(x) < \infty$ .

**Definição 1.11.** Uma função  $\bar{f} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  é chamada fechada quando seu epígrafo é fechado em  $\mathcal{H} \times \mathbb{R}$  ou equivalentemente se seus conjuntos de nível são fechados.

**Definição 1.12.** Seja  $\bar{f} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  uma função convexa. O subdiferencial de  $\bar{f}$  em  $x \in \mathcal{H}$  é o conjunto  $\partial\bar{f}(x)$  definido por

$$\partial\bar{f}(x) = \begin{cases} \{s \in \mathcal{H} ; \bar{f}(y) \geq \bar{f}(x) + \langle s, y - x \rangle, \forall y \in \mathcal{H}\}, & \text{se } x \in \text{dom}(\bar{f}), \\ \emptyset, & \text{se } x \notin \text{dom}(\bar{f}). \end{cases} \quad (1.2)$$

**Definição 1.13.** A função indicadora  $\delta_C : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  de um conjunto  $C \subset \mathcal{H}$  é dada por:

$$\delta_C = \begin{cases} 0, & x \in C, \\ +\infty, & x \notin C. \end{cases}$$

**Proposição 1.2.** A função indicadora  $\delta_C : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  de um conjunto  $C \subset \mathcal{H}$  é convexa se, e somente se,  $C$  é um conjunto convexo.

*Demonstração.* Note que, se  $x \notin C$  obtém-se  $\delta_C(x) = +\infty$ . Assim, para todo  $d \in \mathbb{R}$ ,  $d < +\infty = \delta_C(x)$ . Daí  $(x, d) \notin E_{\delta_C}$ . Se  $x \in C$ , obtém-se  $\delta_C(x) = 0$ . Então,  $\delta_C(x) \leq d$ ,  $\forall d \in [0, +\infty)$ . Logo, se  $\delta_C$  é convexa temos que  $E_{\delta_C}$  é convexo, daí  $C \times [0, +\infty)$  é convexo. O que nos leva a  $C$  ser convexo. Reciprocamente, se  $C$  é convexo, temos que  $E_{\delta_C}$  é convexo, o que nos dá que  $\delta_C$  é uma função convexa.  $\square$

**Teorema 1.1.** (Teorema da minimização convexa) Sejam  $D \subset \mathcal{H}$  um conjunto convexo e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função convexa em  $D$ . Então todo minimizador local é minimizador global. Além disso, o conjunto de minimizadores é convexo. Se  $f$  é estritamente convexa, não pode haver mais de um minimizador.

*Demonstração.* Suponhamos que  $\bar{x} \in D$  seja um minimizador local que não é global. Então existe  $y \in D$  tal que  $f(y) < f(\bar{x})$ . Como  $D$  é convexo, temos que  $z = \alpha y + (1 - \alpha)\bar{x}$ ,  $z \in D$  e  $\alpha \in [0, 1]$ . E ainda, como  $f$  é convexa, temos que

$$\begin{aligned} f(z) &\leq \alpha f(y) + (1 - \alpha)f(\bar{x}) \\ &= \alpha f(y) + f(\bar{x}) - \alpha f(\bar{x}) \\ &= f(\bar{x}) + \alpha(f(y) - f(\bar{x})) \\ &< f(\bar{x}). \end{aligned}$$

Se considerarmos  $\alpha > 0$  suficientemente pequeno, podemos afirmar que  $z$  é arbitrariamente próximo a  $\bar{x}$ , e como  $f(z) < f(\bar{x})$  e  $z \in D$ , temos uma contradição na hipótese de  $\bar{x}$  ser minimizador local que não seja global. Portanto, toda solução local deve ser global.

Agora, consideremos  $S \subset D$  o conjunto dos minimizadores globais e  $\bar{v} \in \mathbb{R}$  o valor ótimo do problema, ou seja,  $f(x) = \bar{v}$ ,  $\forall x \in S$ . Utilizando da convexidade de  $f$  temos que  $\forall x, \bar{x} \in S$  e  $\alpha \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} f(\alpha x + (1 - \alpha)\bar{x}) &\leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(\bar{x}) \\ &= \alpha \bar{v} + (1 - \alpha)\bar{v} = \bar{v}, \end{aligned}$$

o que prova que  $S$  é convexo, pois  $f(\alpha x + (1 - \alpha)\bar{x}) \leq \bar{v}$ .

Suponha agora que  $f$  seja estritamente convexa e que existam  $x, \bar{x} \in S$  com  $x \neq \bar{x}$  e  $\alpha \in (0, 1)$ . Como  $x$  e  $\bar{x}$  são minimizadores globais e  $\alpha x + (1 - \alpha)\bar{x} \in D$ , por  $D$  ser convexo, obtemos

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)\bar{x}) \geq f(x) = f(\bar{x}) = \bar{v}.$$

Mas, se for estritamente convexa temos

$$\begin{aligned} f(\alpha x + (1 - \alpha)\bar{x}) &< \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(\bar{x}) \\ &= \alpha \bar{v} + (1 - \alpha)\bar{v} = \bar{v}, \end{aligned}$$

o que seria uma contradição. Portanto, o minimizador é único. □

**Definição 1.14.** Uma sequência  $\{x^n\} \subset \mathcal{H}$  converge fortemente (ou converge na norma) se existe  $x \in \mathcal{H}$  tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n - x\| = 0.$$

Isso pode ser escrito como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = x,$$

ou simplesmente

$$x^n \rightarrow x, \quad n \rightarrow \infty.$$

**Definição 1.15.** Uma sequência  $\{x^n\} \subset \mathcal{H}$  converge fracamente se existe  $x \in \mathcal{H}$  tal que para todo  $L$  funcional linear

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(x^n) = L(x).$$

Podemos escrever também

$$x^n \xrightarrow{w} x, \quad n \rightarrow \infty.$$

**Definição 1.16.** Dizemos que a função  $f : D \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  é semicontínua (resp. fracamente semicontínua) inferiormente no ponto  $x \in D$ , quando para qualquer sequência  $\{x^k\} \subset D$  tal que  $x^k \rightarrow x$  ( $k \rightarrow \infty$ ) (resp.  $x^k \xrightarrow{w} x$ ), tem-se:

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} f(x^k) \geq f(x).$$

Considere a função  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  convexa, própria e semicontínua inferiormente e  $x_0 \in \mathcal{H}$ . Tomemos a regularização de  $f$  dada por

$$F(x) := f(x) + \frac{1}{2} \|x - x_0\|^2, \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Notemos que  $F$  é estritamente convexa em  $\mathcal{H}$ , e pelo Teorema da minimização convexa, segue que  $F$  possui um único minimizador global.

**Definição 1.17.** Seja  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  uma função convexa própria. A função  $f^* : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  definida por

$$f^*(u) = \sup_{x \in \mathcal{H}} \{\langle x, u \rangle - f(x)\}$$

para todo  $u \in \mathcal{H}$ , é chamada a função conjugada da função  $f$ .

**Observação 1.1.**  $f^{**}$  é a função conjugada de  $f^*$ , chamada ainda de biconjugada.

A Figura 1.1 ilustra a definição acima.

**Teorema 1.2.** Seja  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  uma função própria, onde  $f$  é finita em  $x \in \mathcal{H}$ , então,  $u \in \partial f(x)$  se, e somente se,  $f^*(u) = \langle x, u \rangle - f(x)$ .

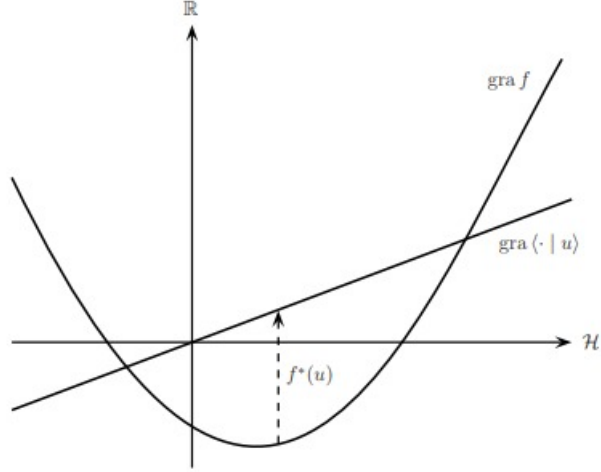


Figura 1.1:  $f^*(u)$  é o supremo da diferença vertical sinalizada entre o gráfico de  $f$  e o do funcional linear contínuo  $\langle \cdot, u \rangle$

*Demonstração.* Seja  $u \in \partial f(x)$ . Então

$$\langle u, z - x \rangle \leq f(z) - f(x),$$

isto é,

$$\langle u, z \rangle - f(z) \leq \langle u, x \rangle - f(x),$$

para todo  $z \in \mathcal{H}$ . Portanto,

$$f^*(u) = \sup_{z \in \mathcal{H}} \{\langle u, z \rangle - f(z)\} \leq \langle u, x \rangle - f(x).$$

Logo,  $f^*(u) = \langle u, x \rangle - f(x)$ , pois  $f(x) < +\infty$ . Reciprocamente, se  $f^*(u) = \sup_{z \in \mathcal{H}} \{\langle u, z \rangle - f(z)\} = \langle u, x \rangle - f(x)$ , tem-se  $f^*(u) < +\infty$ . Assim,

$$\langle u, z \rangle - f(z) \leq \langle u, x \rangle - f(x).$$

Portanto,

$$\langle u, z - x \rangle \leq f(z) - f(x).$$

Logo,  $u \in \partial f(x)$ .

□

**Lema 1.1.** *Seja  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ . Então segue que:*

(i)  $f^*(0) = -\inf f(\mathcal{H});$

$$(ii) \quad -\infty \in f^*(\mathcal{H}) \iff f \equiv +\infty \iff f^* \equiv -\infty.$$

*Demonstração.* Veja [10, Proposição 13.9].  $\square$

**Lema 1.2.** (*Desigualdade de Fenchel-Young*) *Seja  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  própria e convexa.*

*Então,*

$$f(x) + f^*(u) \geq \langle x, u \rangle, \quad \forall x, u \in \mathcal{H}.$$

*Demonstração.* Fixe  $x$  e  $u$  em  $\mathcal{H}$ . Como  $f$  é própria, segue do Lema 1.1 (ii) que  $-\infty \notin f^*(\mathcal{H})$ . Assim, se  $f(x) = +\infty$ , a desigualdade se mantém trivialmente. Por outro lado, se  $f(x) < +\infty$ , então a Definição 1.17 retorna  $f^*(u) \geq \langle x, u \rangle - f(x)$  e a desigualdade segue.  $\square$

**Lema 1.3.** *Seja  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  uma função convexa. Então  $f^{**}$  é o supremo do conjunto de todas as funções afins que minoram  $f$ .*

*Demonstração.* Seja  $A$  o conjunto de todas as funções afins que minoram  $f$ . Consideremos  $\mu = \sup\{g; g \in A\}$ , provaremos que  $\mu = f^{**}$ .

De fato, para cada  $u \in \mathcal{H}$ , a função  $g(x) = \langle x, u \rangle - f^*(u)$  é uma função afim. Notemos que da definição de conjugada de uma função convexa podemos tirar que

$$f(x) + f^*(u) \geq \langle x, u \rangle, \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Segue que,

$$g(x) = \langle x, u \rangle - f^*(u) \leq f(x).$$

Assim, a função  $g$  minorava a função  $f$ . Então,  $g \in A$ , e ainda

$$f^{**}(x) = \sup_{u \in \mathcal{H}} \{\langle x, u \rangle - f^*(u)\} = \sup_{u \in \mathcal{H}} g(x) \leq f(x).$$

Logo,

$$f^{**}(x) \leq \mu(x), \quad \forall x \in \mathcal{H}. \tag{1.3}$$

Se  $h \in A$  então  $h$  é da forma  $h(x) = \langle x, u \rangle - \alpha$ , onde  $u \in \mathcal{H}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , que implica que, para  $x \in \mathcal{H}$ , temos  $\langle x, u \rangle - \alpha \leq f(x)$ , ou seja,

$$\langle x, u \rangle - f(x) \leq \alpha$$

Então,

$$f^*(u) = \sup_{x \in \mathcal{H}} \{\langle x, u \rangle - f(x)\} \leq \alpha,$$

daí,

$$-\alpha \leq -f^*(u),$$

portanto,

$$h(x) = \langle x, u \rangle - \alpha \leq \langle x, u \rangle - f^*(u),$$

segue, que para cada  $x \in \mathcal{H}$

$$\mu(x) = \sup_{x \in \mathcal{H}} h(x) \leq \sup_{x \in \mathcal{H}} \{\langle x, u \rangle - f^*(u)\} = f^{**}(x),$$

logo,

$$\mu(x) \leq f^{**}(x), \quad \forall x \in \mathcal{H} \tag{1.4}$$

de (1.3) e (1.4), obtemos  $\mu = f^{**}$ . □

**Proposição 1.3.** *Seja  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  uma função própria, semicontínua inferiormente e convexa. Então  $f = f^{**}$ .*

*Demonstração.* Dividiremos em duas partes a demonstração. Primeiro mostraremos que  $f^{**} \leq f$  e, em seguida, que  $f \leq f^{**}$ .

Por definição

$$f^{**}(\omega) := \sup_{y \in \mathcal{H}} \{\langle \omega, y \rangle - f^*(y)\}. \tag{1.5}$$

Por outro lado,

$$f^*(y) = \sup_{\omega \in \mathcal{H}} \{\langle y, \omega \rangle - f(\omega)\} \geq \langle y, \omega \rangle - f(\omega),$$

para todo  $\omega \in \mathcal{H}$ . Daí

$$\langle y, \omega \rangle - f^*(y) \leq f(\omega), \quad \forall \omega \in \mathcal{H}. \tag{1.6}$$

Logo, de (1.5) e (1.6), tem-se  $f^{**}(\omega) \leq f(\omega)$ , para todo  $\omega \in \mathcal{H}$ .

Suponhamos agora que não ocorra  $f \leq f^{**}$ , ou seja, existe  $\omega_0 \in \mathcal{H}$  tal que  $f^{**}(\omega_0) < f(\omega_0)$ . Assim, existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  de forma que

$$f^{**}(\omega_0) < \alpha < f(\omega_0). \tag{1.7}$$

Da convexidade de  $f$ , existe uma função afim  $h$  minorando  $f$  dada por  $h(x) = \alpha - \langle s, x - \omega_0 \rangle$ , onde  $h(\omega_0) = \alpha$ .



Como  $h(x) < f(x)$ , utilizando o Lema 1.3, temos que  $h(x) \leq f^{**}(x)$ , em particular para  $x = \omega_0$ , tem-se  $h(\omega_0) \leq f^{**}(\omega_0)$  que implica  $\alpha \leq f^{**}(\omega_0)$ , o que iria contradizer (1.7). Daí,  $f \leq f^{**}$ . Portanto,  $f = f^{**}$ .  $\square$

**Proposição 1.4.** *Seja  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  uma função própria, semicontínua inferiormente e convexa e  $x, u \in \mathcal{H}$ . Então são equivalentes as afirmações abaixo:*

$$(i) \quad u \in \partial f(x);$$

$$(ii) \quad f(x) + f^*(u) = \langle x, u \rangle;$$

$$(iii) \quad x \in \partial f^*(u).$$

*Demonstração.*

(i)  $\iff$  (ii). Usando (1.2) e a Proposição 1.3, temos

$$\begin{aligned} u \in \partial f(x) &\iff (x \in \text{dom} f, \forall y \in \mathcal{H}) \quad \langle y, u \rangle - f(y) \leq \langle x, u \rangle - f(x) \leq f^*(u) \\ &\iff f^*(u) = \sup_{y \in \text{dom} f} \{ \langle y, u \rangle - f(y) \} \leq \langle x, u \rangle - f(x) \leq f^*(u) \\ &\iff f(x) + f^*(u) = \langle x, u \rangle. \end{aligned}$$

(ii)  $\implies$  (iii). Usando a desigualdade de Fenchel-Young (Lema 1.2) e a Proposição 1.3, obtemos que  $u \in \partial f(x)$  implica em  $\langle u, x \rangle \leq f^*(u) + f^{**}(x) = f^*(u) + f(x) = \langle u, x \rangle$ . Logo,  $f^*(u) + f^{**}(x) = \langle u, x \rangle$  que implica em  $x \in \partial f^*(u)$ .

(iii)  $\implies$  (ii) Usando a equivalência que acabamos de demonstrar (i)  $\iff$  (ii) e a Proposição 1.3 temos  $x \in \partial f^*(u) \implies \langle u, x \rangle = f^*(u) + f^{**}(x) = f^*(u) + f(x)$ .

$\square$

**Corolário 1.1.** *Seja  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  uma função própria, semicontínua inferiormente e convexa. Então  $(\partial f)^{-1} = \partial f^*$ .*

*Demonstração.* Devemos mostrar que  $(\partial f)^{-1} \subset \partial f^*$  e  $\partial f^* \subset (\partial f)^{-1}$ . Daí, tomemos  $x \in (\partial f)^{-1}(u) \implies u \in \partial f(x)$  portanto, pela Proposição 1.4 temos que  $x \in \partial f^*(u)$  o que prova a primeira inclusão.

Agora tomemos  $x \in \partial f^*(u)$ . Novamente pela Proposição 1.4  $u \in \partial f(x) \implies x \in (\partial f)^{-1}(u)$ , logo

$$(\partial f)^{-1} = \partial f^*, \tag{1.8}$$

o que prova a segunda inclusão. □

**Definição 1.18.** Chamaremos  $prox_f$  a aplicação de proximidade com respeito a  $f$  dada por

$$prox_f(x_0) := \underset{x \in \mathcal{H}}{\operatorname{argmin}} \left\{ f(x) + \frac{1}{2} \|x - x_0\|^2 \right\}.$$

De forma análoga define-se

$$prox_{f^*}(x_0) := \underset{x^* \in \mathcal{H}}{\operatorname{argmin}} \left\{ f^*(x^*) + \frac{1}{2} \|x^* - x_0\|^2 \right\},$$

onde  $prox_{f^*}$  é a aplicação de proximidade com respeito a  $f^*$ .

**Lema 1.4.** Sejam  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função convexa e semicontínua inferiormente e  $x, y, z \in \mathcal{H}$ . As seguintes condições são equivalentes.

i)  $z = x + y$  e  $f(x) + f^*(y) = \langle x, y \rangle$ ;

ii)  $x = prox_f(z)$  e  $y = prox_{f^*}(z)$ .

*Demonstração.* Considere  $h(x) = \frac{1}{2} \|x - z\|^2$  e denote por  $F = f + h$ . Fazendo  $x = prox_f(z)$ , temos que  $x$  é um minimizador da função  $F$  se, e somente se,  $0 \in \partial F(x)$ , o que é equivalente a  $0 \in (\partial f(x) + \partial h(x))$ . Mas,  $\partial h(x) = x - z$ , isto implica que

$$x = prox_f(z) \iff 0 \in \partial(f(x) + \{x - z\}), \tag{1.9}$$

ou seja, existe  $y \in \partial f(x)$  tal que  $z = x + y$ . Analogamente, podemos mostrar que

$$y = prox_{f^*}(z) \tag{1.10}$$

se, e somente se, existe  $x \in \partial f^*(y)$  tal que  $z = x + y$ . Daí, o resultado segue da Proposição 1.4. □

# Capítulo 2

## Operadores Monótonos

Neste capítulo exibiremos algumas definições e resultados sobre os operadores monótonos maximais, imprescindível para o nosso estudo, retiradas dos trabalhos de Rockafellar [61, 64], Bauschke e Combettes [10] e do artigo, principal referência deste trabalho, Eckstein e Bertsekas [17].

**Definição 2.1.** Diz-se que  $T$  é uma aplicação multivalorada em  $\mathcal{H}$  se para todo  $x \in \mathcal{H}$ ,  $T(x) \subseteq \mathcal{H}$ . Estes tipos de aplicações são denotadas como  $T : \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$ , onde  $2^{\mathcal{H}}$  denota a família de todos os subconjuntos não vazios de  $\mathcal{H}$ , ou também,  $T : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ .

**Observação 2.1.** Significa que  $T$  é um operador ponto-conjunto de  $\mathcal{H}$  em  $\mathcal{H}$ , isto é,  $T$  associa para cada ponto  $x \in \mathcal{H}$  um subconjunto  $T(x) \subset \mathcal{H}$ . Não faremos distinção entre um operador  $T$  e seu gráfico, que é o conjunto  $\{(x, y) \mid y \in T(x)\}$ . Assim, podemos simplesmente dizer que um operador é qualquer subconjunto  $T$  de  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$  e definimos  $T(x) = Tx = \{y \mid y \in T(x)\}$ .

Se  $T$  é de valor único, ou seja, a cardinalidade de  $T(x)$  é no máximo 1 para todo  $x \in \mathcal{H}$ , permitiremos por leve abuso de notação que  $Tx$  e  $T(x)$  representem o único  $y \in \mathcal{H}$  tal que  $y \in T(x)$ , em vez do conjunto unitário  $\{y\}$ . O significado pretendido deve ser claro a partir do contexto.

**Definição 2.2.** O domínio de  $T$  é dado por:

$$\text{Dom } T = \{x \in \mathcal{H} \mid \exists y \in \mathcal{H} : y \in T(x)\} = \{x \in \mathcal{H} \mid T(x) \neq \emptyset\}.$$

Dizemos que  $T$  tem domínio completo se  $\text{Dom}T = \mathcal{H}$ .

**Definição 2.3.** A imagem de  $T$  é dada por

$$\text{im } T = \{y \in \mathcal{H} \mid \exists x \in \mathcal{H} : y \in T(x)\}.$$

**Definição 2.4.** A inversa  $T^{-1}$  de  $T$  é dada por

$$T^{-1} = \{(y, x) \mid y \in T(x)\}.$$

**Definição 2.5.** Para qualquer número real  $c$  e operador  $T$ , definimos  $cT$  como o operador

$$cT = \{(x, cy) \mid y \in T(x)\}.$$

**Definição 2.6.** Se  $A$  e  $B$  são operadores quaisquer, o operador soma é definido como

$$A + B = \{(x, y + z) \mid y \in A(x), z \in B(x)\}.$$

**Definição 2.7.** Usaremos o símbolo  $I$  para indicar o operador de identidade, dado por

$$I = \{(x, x) \mid x \in \mathcal{H}\}.$$

**Definição 2.8.** Um operador  $T$  é monótono se

$$\langle x' - x, y' - y \rangle \geq 0, \quad \forall y \in T(x), y' \in T(x').$$

**Definição 2.9.** Um operador monótono é maximal se (considerado um gráfico) não estiver estritamente contido em nenhum outro operador monótono em  $\mathcal{H}$ . Em outras palavras,  $T$  é monótono maximal se para todo operador monótono  $K$  tal que  $T(x) \subset K(x)$ , para todo  $x$ , tem-se  $T(x) = K(x)$ .

Observe que um operador é monótono (maximal) se, e somente se, seu inverso for monótono (maximal). Com efeito, a parte da monotonicidade é dada direta pela definição de operadores monótonos. Agora a parte da maximalidade, suponha que  $T^{-1} \subset K^{-1}$  e  $\exists y \in \mathcal{H}$  tal que  $T^{-1}(y) \neq K^{-1}(y)$ , assim deveria existir um  $w \in K^{-1}(y)$ ;  $w \notin T^{-1}(y)$ , logo  $y \in K(w)$  enquanto  $y \notin T(w)$  contrariando a maximalidade de  $T$ .

Um exemplo conhecido de operador monótono máximo é o subdiferencial  $\partial f$  de uma função semicontínua, própria e convexa  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  (ver [60, 61, 64]).

O seguinte teorema, originalmente devido a Minty [51, 52], fornece uma caracterização crucial dos operadores monotónos maximais.

**Teorema 2.1.** *Um operador monótono  $T$  em  $\mathcal{H}$  é maximal se, e somente se a imagem do operador  $I + T$  seja todo o espaço de Hilbert, ou seja,  $\text{im}(I + T) = \mathcal{H}$ .*

*Demonstração.* Veja [10, página 311]. □

**Definição 2.10.** *Dado um operador  $T$ ,  $J_T$  denotará o operador  $(I + T)^{-1}$ . Dado um escalar positivo  $c$  e um operador  $T$ ,  $J_{cT} = (I + cT)^{-1}$  é chamado resolvente de  $T$ .*

**Definição 2.11.** *Um operador  $T$  em  $\mathcal{H}$  é dito não expansivo se:*

$$\|y' - y\| \leq \|x' - x\|, \quad \forall y \in T(x), y' \in T(x').$$

Note que operadores não expansivos são necessariamente valor único, ou seja, ponto-ponto e Lipschitz contínuos.

**Definição 2.12.** *Um operador  $T$  é dito firmemente não expansivo se:*

$$\|y' - y\|^2 \leq \langle x' - x, y' - y \rangle, \quad \forall y \in T(x), y' \in T(x').$$

O lema a seguir resume algumas propriedades conhecidas de operadores firmemente não expansivos.

**Lema 2.1.** *As seguintes afirmações se verificam:*

- (i) *Todo operador firmemente não expansivo é não expansivo.*
- (ii) *Um operador  $J$  é firmemente não expansivo se, e somente se,  $2J - I$  é não expansivo.*
- (iii) *Um operador  $J$  é firmemente não expansivo se, e somente se, for da forma  $\frac{1}{2}(T + I)$ , onde  $T$  é não expansivo.*
- (iv) *Um operador  $T$  é firmemente não expansivo se, e somente se,  $I - T$  é firmemente não expansivo.*

*Demonstração.* (i) Segue diretamente da desigualdade de Cauchy-Schwartz. Com efeito, seja  $T$  um operador firmemente não expansivo,  $y \in T(x)$  e  $y' \in T(x')$ . Então, temos que

$$\|y' - y\|^2 \leq \langle x' - x, y' - y \rangle \leq \|x' - x\| \|y' - y\|.$$

Logo,

$$\|y' - y\| \leq \|x' - x\|.$$

(ii) Seja  $J$  firmemente não expansivo. Então para todo  $x, y \in \mathcal{H}$  temos

$$\begin{aligned} \|(2J - I)x - (2J - I)y\|^2 &= \|(2Jx - 2Jy) + y - x\|^2 \\ &= 4\|Jx - Jy\|^2 - 4\langle Jx - Jy, x - y \rangle + \|x - y\|^2. \end{aligned}$$

Como  $J$  é firmemente não expansivo vale  $4(\|Jx - Jy\|^2 - \langle Jx - Jy, x - y \rangle) \leq 0$ . Disso deduzimos que

$$\|(2J - I)x - (2J - I)y\|^2 \leq \|x - y\|^2.$$

Logo,  $2J - I$  é não expansivo. Agora supondo  $C = 2J - I$  não expansivo então  $J = \frac{1}{2}(C + I)$  e para todo  $x, y \in \mathcal{H}$ ,

$$\begin{aligned} \|Jx - Jy\|^2 &= \frac{1}{4}\|(C + I)x - (C + I)y\|^2 \\ &= \frac{1}{4}\|Cx - Cy + x - y\|^2 \\ &= \frac{1}{4}\|Cx - Cy\|^2 + \frac{1}{2}\langle Cx - Cy, x - y \rangle + \frac{1}{4}\|x - y\|^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\|x - y\|^2 + \frac{1}{2}\langle Cx - Cy, x - y \rangle \\ &= \langle \frac{1}{2}(C + I)x - \frac{1}{2}(C + I)y, x - y \rangle \\ &= \langle Jx - Jy, x - y \rangle, \end{aligned}$$

onde na desigualdade usamos que  $C$  é não expansivo. Portanto,  $J = \frac{1}{2}(C + I)$  é firmemente não expansivo.

(iii) Se  $J$  é firmemente não expansivo então pela afirmação (ii) temos que  $T = 2J - I$  é não expansivo, o que implica que  $J = \frac{1}{2}(T + I)$ . Agora tomando  $J = \frac{1}{2}(T + I)$ , onde  $T$  é não expansivo temos que  $T = 2J - I$  e pela afirmação (ii) temos que  $J$  é firmemente não expansivo.

(iv) De (ii) temos que

$$\begin{aligned}
 & I - J \text{ é firmemente não expansivo} \\
 \iff & 2(I - J) - I \text{ é não expansivo} \\
 \iff & -(2J - I) \text{ é não expansivo} \\
 \iff & (2J - I) \text{ é não expansivo} \\
 \iff & J \text{ é firmemente não expansivo.}
 \end{aligned}$$

□

**Observação 2.2.** A Figura 2.1 ilustra o Lema acima. Se  $J$  não é expansivo, então  $J(x') - J(x)$  deve estar na bola maior, que tem raio  $\|x' - x\|$  e está centrada em  $0$ . Se  $J$  for firmemente não expansivo, então  $J(x') - J(x)$  deve estar na bola menor, que tem raio  $\frac{1}{2}\|x' - x\|$  e está centrada em  $\frac{1}{2}(x' - x)$ . Esta caracterização segue diretamente de  $J$  ser da forma  $\frac{1}{2}I + \frac{1}{2}(x' - x)C$ , onde  $C$  é não expansivo. Observe que se  $J(x') - J(x)$  reside na esfera menor, então  $(I - J)(x') - (I - J)(x)$  também reside, ilustrando o Lema 2.1 (iv).

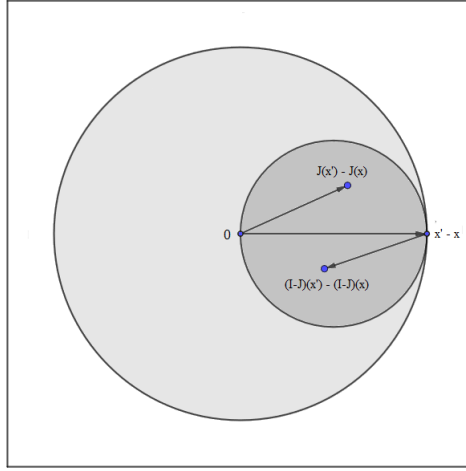


Figura 2.1: Ilustração do Lema 2.1.

**Proposição 2.1.** A composição de operadores não expansivos é não expansivo.

*Demonstração.* Sejam  $T_1$  e  $T_2$  não expansivos, e sejam  $x$  e  $y$  em  $\mathcal{H}$ , então

$$\|T_1(T_2x) - T_1(T_2y)\| \leq \|T_2x - T_2y\| \leq \|x - y\|.$$

□

**Teorema 2.2.** *Seja  $c$  um escalar positivo. Um operador  $T$  em  $\mathcal{H}$  é monótono se, e somente se,  $J_{cT}$  é firmemente não expansivo. Além disso,  $T$  é monótono maximal se, e somente se,  $J_{cT}$  é firmemente não expansivo e  $\text{Dom}(J_{cT}) = \mathcal{H}$ .*

*Demonstração.* Sejam  $x, y \in \mathcal{H}$ , usando as definições básicas de operadores, temos que

$$\begin{aligned} y \in T(x) &\iff cy \in cT(x) \\ &\iff x + cy \in (I + cT)(x) \\ &\iff x \in J_{cT}(x + cy). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} T \text{ é monótono} &\iff \langle x' - x, y' - y \rangle \geq 0, \quad \forall y \in T(x), y' \in T(x') \\ &\iff \langle x' - x, cy' - cy \rangle \geq 0, \quad \forall y \in T(x), y' \in T(x') \\ &\iff \langle x' - x, cy' - cy \rangle + \|x' - x\|^2 \geq \|x' - x\|^2, \quad \forall y \in T(x), y' \in T(x') \\ &\iff \langle (x' + cy') - (x + cy), x' - x \rangle \geq \|x' - x\|^2, \quad \forall y \in T(x), y' \in T(x') \\ &\iff (I + cT)^{-1} = J_{cT} \text{ é firmemente não expansivo.} \end{aligned}$$

Claramente,  $T$  é maximal se e somente se  $cT$  for maximal. Então, pelo Teorema 2.1,  $T$  é maximal se e somente se,  $\text{im}(I + cT) = \mathcal{H}$ . Isso é verdade se, e somente se,  $(I + cT)^{-1}$  tem domínio igual a  $\mathcal{H}$ , estabelecendo assim a segunda afirmação.  $\square$

**Corolário 2.1.** *Um operador  $T$  é firmemente não expansivo se, e somente se,  $T^{-1} - I$  é monótono. Além disso,  $T$  é firmemente não expansivo com  $\text{Dom} T = \mathcal{H}$  se, e somente se,  $T^{-1} - I$  é monótono maximal.*

**Corolário 2.2.** *Para todo  $c > 0$ , o resolvente  $J_{cT}$  de um operador monótono  $T$  tem valor único ou seja, é ponto-ponto. Além disso, se adicionalmente  $T$  for maximal, então  $\text{Dom} J_{cT} = \mathcal{H}$ .*

**Corolário 2.3.** *Seja  $c > 0$  e  $T$  monótono em  $\mathcal{H}$ , então todo elemento  $z \in \mathcal{H}$  pode ser escrito no máximo de uma maneira como  $x + cy$ , onde  $y \in T(x)$ . Se  $T$  for maximal, todo elemento  $z$  de  $\mathcal{H}$  pode ser escrito exatamente de uma maneira como  $x + cy$ , onde  $y \in T(x)$ .*



**Corolário 2.4.** *A aplicação que associa cada operador  $T$  em  $(I+T)^{-1}$  é uma bijeção entre a coleção de operadores monótonos maximais em  $\mathcal{H}$  e a coleção de operadores firmemente não expansivos em  $\mathcal{H}$ .*

**Observação 2.3.** *O Corolário 2.1 simplesmente reafirma o caso  $c = 1$  do teorema, enquanto o Corolário 2.2 segue diretamente do fato que operadores firmemente não expansivos têm valor único (ponto-ponto). O Corolário 2.3 é essencialmente uma reformulação do Corolário 2.2. O Corolário 2.4 prova-se aplicando o Corolário 2.2 para  $J = T^{-1} - I$ .*

Uma raiz ou zero de um operador  $T$  é um ponto  $x$  tal que  $0 \in Tx$ . Deixamos  $zer(T) = T^{-1}(0)$  denotar o conjunto de todos esses pontos. No caso em que  $T$  é o subdiferencial  $\partial f$  de uma função convexa  $f$ ,  $zer(T)$  é o conjunto de todos os mínimos globais de  $f$ . Os zeros de um operador monótono coincidem precisamente com os pontos fixos de seus resolventes, como mostraremos no Lema 2.2 no final do capítulo. Antes, vejamos alguns conceitos e resultados sobre subdiferencial.

**Definição 2.13.** *Sejam  $C \subset \mathcal{H}$  um conjunto convexo. O operador cone normal de  $C$  é dado por*

$$\mathcal{N}_C(x) = \begin{cases} \{d \in \mathcal{H} \mid \langle d, y - x \rangle \leq 0, \quad \forall y \in C\}, & \text{se } x \in C, \\ \emptyset, & \text{se } x \notin C. \end{cases} \quad (2.2)$$

**Proposição 2.2.** *O subdiferencial da função indicadora de um conjunto convexo  $C$  é igual ao operador cone normal de  $C$ , ou seja,  $\partial\delta_C = \mathcal{N}_C$ .*

*Demonstração.* Vamos construir o  $\partial\delta_C$  e chegar que ele é exatamente o  $\mathcal{N}_C$ . Vamos dividir em duas partes. Seja  $d \in \delta_C(x)$ , então,

- i) Se  $x \notin C$ , temos  $\delta_C(x) = +\infty$ , daí não existe  $d \in \mathcal{H}$  satisfazendo  $\delta_C(y) \geq \delta_C(x) + \langle d, y - x \rangle$ , para todo  $y \in C$ , o que nos dá que  $\partial\delta_C(x) = \emptyset$ .
- ii) Se  $x \in C$ , temos  $\delta_C(x) = 0$  e, conseqüentemente,  $\partial\delta_C(x) = \{d \in \mathcal{H} ; \langle d, y - x \rangle \leq 0, \forall y \in C\}$ .

Logo chegamos que

$$\partial\delta_C(x) = \begin{cases} \{d \in \mathcal{H} \mid \langle d, y - x \rangle \leq 0 \forall y \in C\}, & \text{se } x \in C, \\ \emptyset, & \text{se } x \notin C, \end{cases} \quad (2.3)$$

ou seja,  $\partial\delta_C = \mathcal{N}_C$ . □

**Exemplo 2.1.** Se  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  é uma função convexa e semicontínua inferiormente, então  $\partial f : \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  é um operador monótono maximal.

Com efeito, primeiro notemos que  $\partial f$  é não vazio; veja Rockafellar [61]. Provaremos que  $\partial f$  é monótono. De fato, sejam  $x, y \in \mathcal{H}$ ,  $\xi \in \partial f(x)$  e  $\eta \in \partial f(y)$ . Por definição, temos

$$\langle \xi, z - x \rangle \leq f(z) - f(x), \quad \forall z \in \mathcal{H}, \quad (2.4)$$

$$\langle \eta, z - y \rangle \leq f(z) - f(y), \quad \forall z \in \mathcal{H}, \quad (2.5)$$

respectivamente. Somando (2.4) com  $z = y$  e (2.5) com  $z = x$ , temos

$$\langle \xi, y - x \rangle + \langle \eta, x - y \rangle \leq 0.$$

Logo,

$$\langle \xi - \eta, x - y \rangle \geq 0,$$

ou seja,  $\partial f$  é um operador monótono.

Agora provaremos que  $\partial f$  é maximal. Seja  $T : \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  um operador monótono tal que  $\partial f \subset T$ . Dados  $x_0, y_0 \in \mathcal{H}$ , com  $y_0 \in T(x_0)$ ,  $y \in T(x)$ , pela monotonicidade de  $T$  temos

$$\langle x - x_0, y - y_0 \rangle \geq 0, \quad \forall x, y \in \mathcal{H}. \quad (2.6)$$

Consideremos  $x_1 = \text{prox}_f(x_0 + y_0)$  e  $y_1 = \text{prox}_{f^*}(x_0 + y_0)$ . Pelo Lema 1.4,  $x_0 + y_0 = x_1 + y_1$  e  $f(x_1) + f^*(y_1) = \langle x_1, y_1 \rangle$ . Então, pelo Teorema 1.2,  $y_1 \in \partial f(x_1) \subset T(x_1)$ . Daí, tomando  $x = x_1$ ,  $y = y_1$  em (2.6) teremos

$$\langle x_1 - x_0, y_1 - y_0 \rangle \geq 0. \quad (2.7)$$

Portanto, como  $x_0 + y_0 = x_1 + y_1$  podemos escrever  $y_1 - y_0 = x_0 - x_1$ , daí

$$0 \leq \langle x_1 - x_0, x_0 - x_1 \rangle = -\langle x_1 - x_0, x_1 - x_0 \rangle = -\|x_1 - x_0\|^2.$$

Segue portanto que,  $x_1 = x_0$ , daí  $y_1 = y_0 \in \partial f(x_1) = \partial f(x_0)$ . Como  $x_0$  e  $y_0$  são quaisquer, temos  $T(x) \subset \partial f(x)$ ,  $\forall x \in \mathcal{H}$ . Então,  $\partial f(x) = T(x)$ ,  $\forall x \in \mathcal{H}$ , daí  $\partial f$  é um operador monótono maximal.

**Proposição 2.3.** Dado qualquer conjunto  $C \subseteq \mathcal{H}$ . Se  $C$  é convexo, então  $\mathcal{N}_C$  é monótono. Se  $C$  é não vazio, fechado e convexo, então  $\mathcal{N}_C$  é monótono maximal.

*Demonstração.* Pela Proposição 1.2 temos que  $\partial(\delta_C)$  é uma função convexa, usando a Proposição 2.2,  $\mathcal{N}_C = \partial(\delta_C)$ , o restante da prova é direta pelo exemplo 2.1.  $\square$

**Lema 2.2.** *Dado um operador monótono maximal  $T$  qualquer, um número real  $c > 0$  e  $x \in \mathcal{H}$ , temos que  $0 \in T(x)$  se, e somente se,  $J_{cT}(x) = x$ .*

*Demonstração.* De (2.1) temos  $J_{cT} = \{(x + cy, x) \mid y \in T(x)\}$ . Portanto,

$$0 \in T(x) \iff x \in J_{cT}(x + c \cdot 0) \iff x \in J_{cT}(x).$$

Como  $J_{cT}$  é valor único (ponto-ponto) pelo Corolário 2.2, o lema está provado.  $\square$

# Capítulo 3

## Algoritmo do ponto proximal generalizado

O Lemma 2.2 sugere que uma maneira de encontrar o zero de um operador monótono maximal  $T$  pode ser executar a iteração  $z^{k+1} = J_{cT}(z^k)$ , iniciando a partir de algum ponto arbitrário  $z^0$ . Este procedimento é a essência do algoritmo de ponto proximal, como nomeado por Rockafellar [63]. Versões especializadas desse método eram conhecidas anteriormente por Martinet [49, 50]. A análise de Rockafellar permite que  $c$  varie de uma iteração para a seguinte, ou seja, dado um operador monótono maximal  $T$  e uma sequência de escalares positivos  $\{c_k\}$ , denominados tamanho dos passos, dizemos que  $(z^k)$  é gerado pelo algoritmo de ponto proximal se  $z^{k+1} = J_{c_k T}(z^k)$  para todos os  $k > 0$ . O teorema da convergência de Rockafellar também permite que os resolventes  $J_{c_k T}$  sejam avaliados aproximadamente, desde que a soma de todos os erros seja finita. Um resultado relacionado devido a Gol'shtein e Tret'yakov [38] considera iterações da forma

$$z^{k+1} = (1 - \rho_k)z^k + \rho_k J_{cT}(z^k),$$

onde  $\{\rho_k\}_{k=0}^{\infty} \subseteq (0, 2)$  é uma sequência de fatores de super ou sub-relaxamento. Em pelo menos uma aplicação importante do algoritmo do ponto proximal, sabe-se que o método de multiplicadores para programação convexa, usando fatores de relaxamento  $\rho_k$  maiores que 1, acelera a convergência; veja [15, página 129]. Gol'shtein e Tret'yakov também permitem que os resolventes sejam avaliados aproximadamente, mas, diferentemente de Rockafellar, não permitem que o tamanho da etapa  $c$  varie com  $k$ , restringem  $\mathcal{H}$  para

ser de dimensão finita e não consideram o caso em que  $\text{zer}(T) = \emptyset$ . O teorema a seguir combina efetivamente os resultados de Rockafellar e Gol'shtein-Tret'yakov.

**Teorema 3.1.** *Seja  $T$  um operador monótono maximal no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ , e seja  $\{z^k\}$  uma sequência tal que*

$$z^{k+1} = (1 - \rho_k)z^k + \rho_k w^k \quad \forall k \geq 0,$$

onde

$$\|w^k - (I + c_k T)^{-1}(z^k)\| \leq \epsilon_k \quad \forall k \geq 0,$$

e  $\{\epsilon_k\}_{k=0}^\infty$ ,  $\{\rho_k\}_{k=0}^\infty$ ,  $\{c_k\} \subseteq [0, \infty)$  são sequências tais que

$$E_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k < \infty, \quad \Delta_1 = \inf_{k \geq 0} \rho_k > 0, \quad \Delta_2 = \sup_{k \geq 0} \rho_k < 2, \quad \bar{c} = \inf_{k \geq 0} c_k > 0.$$

A sequência  $\{z^k\}$  é dita estar de acordo com o algoritmo do ponto proximal generalizado. Então se  $T$  possui algum zero,  $\{z^k\}$  converge fracamente para um zero de  $T$ . Se  $T$  não possui zeros, então  $\{z^k\}$  é uma sequência ilimitada.

*Demonstração.* Suponhamos primeiro que  $T$  possui algum zero. Para todo  $k$ , definimos

$$Q_k = I - J_{c_k T} = I - (I + c_k T)^{-1}.$$

Sabemos que  $Q_k$  é firmemente não expansivo pelo Lema 2.1 (iv). Note também que qualquer zero de  $T$  é ponto fixo de  $J_{c_k T}$  pelo Lema 2.2, e portanto um zero de  $Q_k$  para qualquer  $k$ . Assim, para todo  $k$ , definimos

$$\bar{z}^{k+1} = (1 - \rho_k)z^k + \rho_k J_{c_k T}(z^k) = (I - \rho_k Q_k)(z^k).$$

Para algum zero  $z^*$  de  $T$ ,

$$\begin{aligned} \|\bar{z}^{k+1} - z^*\|^2 &= \|z^k - \rho_k Q_k(z^k) - z^*\|^2 \\ &= \|z^k - z^*\|^2 - 2\rho_k \langle z^k - z^*, Q_k(z^k) \rangle + \rho_k^2 \|Q_k(z^k)\|^2. \end{aligned}$$

De  $0 \in Q_k(z^*)$  e  $Q_k$  ser firmemente não expansivo, temos

$$\begin{aligned} \|\bar{z}^{k+1} - z^*\|^2 &\leq \|z^k - z^*\|^2 - 2\rho_k \|Q_k(z^k)\|^2 + \rho_k^2 \|Q_k(z^k)\|^2 \\ &\leq \|z^k - z^*\|^2 - \rho_k(2 - \rho_k) \|Q_k(z^k)\|^2 \\ &\leq \|z^k - z^*\|^2 - \Delta_1(2 - \Delta_2) \|Q_k(z^k)\|^2. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Como  $\Delta_1(2 - \Delta_2) > 0$ , temos que  $\|\bar{z}^{k+1} - z^*\| \leq \|z^k - z^*\|$ . Agora,

$$\begin{aligned} \|z^{k+1} - \bar{z}^{k+1}\| &= \|(1 - \rho_k)z^k + \rho_k w^k - (1 - \rho_k)z^k - \rho_k J_{c_k T}(z^k)\| \\ &= \rho_k \|w^k - J_{c_k T}(z^k)\| \\ &\leq \rho_k \epsilon_k. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Então,

$$\|z^{k+1} - z^*\| \leq \|\bar{z}^{k+1} - z^*\| + \|z^{k+1} - \bar{z}^{k+1}\| \leq \|z^k - z^*\| + \rho_k \epsilon_k. \tag{3.3}$$

Combinando as inequações para todo  $k$ ,

$$\begin{aligned} \|z^1 - z^*\| &\leq \|z^0 - z^*\| + \rho_0 \epsilon_0. \\ \|z^2 - z^*\| &\leq \|z^1 - z^*\| + \rho_1 \epsilon_1. \\ &\vdots \\ \|z^{k+1} - z^*\| &\leq \|z^k - z^*\| + \rho_k \epsilon_k \end{aligned}$$

e realizando a soma termo a termo das desigualdades obtemos

$$\|z^{k+1} - z^*\| \leq \|z^0 - z^*\| + \sum_{i=0}^k \rho_i \epsilon_i \leq \|z^0 - z^*\| + 2E_1, \tag{3.4}$$

e, com isso,  $\{z^k\}$  é limitada. Além disso,

$$\begin{aligned} \|z^{k+1} - z^*\|^2 &= \|\bar{z}^{k+1} - z^* + (z^{k+1} - \bar{z}^{k+1})\|^2 \\ &= \|\bar{z}^{k+1} - z^*\|^2 + 2\langle \bar{z}^{k+1} - z^*, z^{k+1} - \bar{z}^{k+1} \rangle + \|z^{k+1} - \bar{z}^{k+1}\|^2 \\ &\leq \|\bar{z}^{k+1} - z^*\|^2 + 2\|\bar{z}^{k+1} - z^*\| \|z^{k+1} - \bar{z}^{k+1}\| + \|z^{k+1} - \bar{z}^{k+1}\|^2 \end{aligned}$$

usando as desigualdades 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4 temos,

$$\begin{aligned} \|z^{k+1} - z^*\|^2 &\leq \|z^k - z^*\|^2 - \Delta_1(2 - \Delta_2)\|Q_k(z^k)\|^2 + \rho_k \epsilon_k (2\|z^k - z^*\| + \rho_k \epsilon_k) \\ &\leq \|z^k - z^*\|^2 - \Delta_1(2 - \Delta_2)\|Q_k(z^k)\|^2 + 2\rho_k \epsilon_k (\|z^0 - z^*\| + 2E_1) + \rho_k^2 \epsilon_k^2. \end{aligned}$$

De  $\{\epsilon_k\}$  ser somável,  $\{\epsilon_k^2\}$  também o é, portanto  $E_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k^2 < \infty$ . Segue que para todo  $k$ ,

$$\|z^{k+1} - z^*\|^2 \leq \|z^0 - z^*\|^2 + 4E_1(\|z^0 - z^*\| + 2E_1) + 4E_2 - \Delta_1(2 - \Delta_2) \sum_{i=0}^k \|Q_i(z^i)\|^2.$$

note que  $\|z^0 - z^*\|^2 + 4E_1(\|z^0 - z^*\| + 2E_1) + 4E_2 \geq 0$ ,  $\Delta_1(2 - \Delta_2) \sum_{i=0}^k \|Q_i(z^i)\|^2 \geq 0$  e  $\|z^{k+1} - z^*\|^2 \geq 0$  dai,

$$\Delta_1(2 - \Delta_2) \sum_{i=0}^k \|Q_i(z^i)\|^2 \leq \|z^0 - z^*\|^2 + 4E_1(\|z^0 - z^*\| + 2E_1) + 4E_2$$

Fazendo  $k \rightarrow \infty$ , temos que

$$\sum_{i=0}^{\infty} \|Q_i(z^i)\|^2 < \infty \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} Q_k(z^k) = 0.$$

Definimos  $(x^k, y^k)$  como sendo o único ponto em  $T$  tal que  $x^k + c_k y^k = z^k$  (aqui usamos o Corolário 2.3). Então  $Q_k(z^k) \rightarrow 0$  implica que  $z^k - x^k \rightarrow 0$ . Além disso, de  $\{c_k\}$  ser limitado por zero, também temos que  $c_k^{-1} Q_k(z^k) = y^k \rightarrow 0$ .

Agora,  $\{z^k\}$  é limitada, e portanto, possui pelo menos um ponto de acumulação fraco. Seja  $z^\infty$  um ponto de acumulação fraco de  $\{z^k\}$  e considere  $\{z^{k(j)}\}_{j=0}^{\infty}$  a subsequência tal que  $z^{k(j)} \xrightarrow{w} z^\infty$ . Como  $z^k - x^k \rightarrow 0$ , também temos que  $x^{k(j)} \xrightarrow{w} z^\infty$ .

Seja  $(x, y)$  um ponto qualquer em  $T$ . Da monotonicidade de  $T$ , temos que  $\langle x - x^k, y - y^k \rangle \geq 0$  para todo  $k$ . Tomando o limite da subsequência  $k(j)$  e usando que  $x^{k(j)} \xrightarrow{w} z^\infty$  e  $y^k \rightarrow 0$ , obtemos  $\langle x - z^\infty, y - 0 \rangle \geq 0$ . Como  $(x, y)$  foi escolhido arbitrariamente, concluímos da maximalidade de  $T$  que  $0 \in T(z^\infty)$ , isto é,  $z^\infty \in \text{zer}(T)$ .

Resta mostrar que  $\{z^k\}$  possui um único ponto de acumulação fraco. Considere algum zero  $z^*$  de  $T$ . Como  $\|z^k - z^*\| \leq \|z^0 - z^*\| + 2E_1$  para todo  $k$ ,

$$\alpha^* = \liminf_{k \rightarrow \infty} \|z^k - z^*\|$$

é finito e não negativo, e pode-se mostrar que  $\|z^k - z^*\| \rightarrow \alpha^*$ . Agora pegue qualquer dois pontos de acumulação  $z_1^\infty$  e  $z_2^\infty$  de  $\{z^k\}$ . Pelo raciocínio acima ambos são zeros de  $T$  e portanto existem e são finitos

$$\alpha_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|z^k - z_1^\infty\|, \quad \alpha_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|z^k - z_2^\infty\|.$$

Escrevendo

$$\|z^k - z_2^\infty\|^2 = \|z^k - z_1^\infty\|^2 + 2\langle z^k - z_1^\infty, z_1^\infty - z_2^\infty \rangle + \|z_1^\infty - z_2^\infty\|^2,$$

conclui-se que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle z^k - z_1^\infty, z_1^\infty - z_2^\infty \rangle = \frac{1}{2}(\alpha_2^2 - \alpha_1^2 - \|z_1^\infty - z_2^\infty\|^2).$$

Como  $z_1^\infty$  é um ponto de acumulação fraco de  $\{z^k\}$ , este limite deve ser zero. Consequentemente

$$\alpha_2^2 = \alpha_1^2 + \|z_1^\infty - z_2^\infty\|^2.$$

Invertendo os papéis de  $z_1^\infty$  e  $z_2^\infty$ , também obtemos que

$$\alpha_1^2 = \alpha_2^2 + \|z_1^\infty - z_2^\infty\|^2.$$

Então, somos forçados a concluir que  $\|z_1^\infty - z_2^\infty\| = 0$ , isto é,  $z_1^\infty = z_2^\infty$ . Portanto,  $\{z^k\}$  possui exatamente um ponto de acumulação. Isso conclui a prova no caso em que  $T$  possui pelo menos um zero.

Agora consideremos o caso em que  $T$  não possui zero. Vamos mostrar por contradição que  $\{z^k\}$  é ilimitada. Suponhamos que  $\{z^k\}$  é limitada, isto é, existe algum  $S > 0$  finito tal que  $\|z^k\| < S$  para todo  $k$ . Seja

$$\bar{\epsilon} = \sup_{k \geq 0} \{\epsilon_k\}.$$

Então, considere

$$r = \frac{2S}{\min\{1, \Delta_1\}} + \bar{\epsilon} + 1.$$

Afirmarmos que para todo  $k$ ,  $\|z^{k+1}\| < r - 1$ ,  $\|w^k\| < r - 1$  e  $\|J_{c_k T}(z^k)\| < r - 1$ . Claramente,  $\|z^k\| < S < r - 1$ , portanto a afirmação é válida para  $z^k$ . Agora,  $w^k = \rho_k^{-1}(z^{k+1} - (1 - \rho_k)z^k)$ , então

$$\|w^k\| \leq \frac{1}{\rho_k}(\|z^{k+1}\| + (1 - \rho_k)\|z^k\|) < \frac{1}{\Delta_1}(S + S) = \frac{2S}{\Delta_1} \leq r - 1.$$

Finalmente,

$$\|w^k - J_{c_k T}(z^k)\| \leq \epsilon_k \implies \|J_{c_k T}(z^k)\| \leq \|w^k\| + \epsilon_k < \frac{2S}{\Delta_1} + \bar{\epsilon} \leq r - 1.$$

Agora, seja  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$  a função convexa dada por

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \|x\| \leq r \\ +\infty, & \|x\| > r \end{cases}$$

e seja  $T' = T + \partial h$ , ou seja,

$$T'(x) = \begin{cases} T(x), & \|x\| < r, \\ \{y + ax \mid y \in T(x), a \geq 0\}, & \|x\| = r, \\ \emptyset, & \|x\| > r. \end{cases}$$



Como  $DomT \cap int(Dom\partial h) = DomT \cap \{x \mid \|x\| \leq r\} \neq \emptyset$ , então  $T'$  é monótono maximal; veja [62]. Mais ainda,  $DomT'$  é limitado, então  $zer(T') \neq \emptyset$ ; veja [65]. Como  $\|z^k\|$ ,  $\|w^k\|$ , e  $\|J_{c_k T}(z^k)\|$  são todos menores que  $r$  para todo  $k$ , a sequência  $\{z^k\}$  obedece a iteração do ponto proximal generalizado para  $T'$ , bem como para  $T$ . Logo,

$$z^{k+1} = (1 - \rho_k)z^k + \rho_k w^k \quad \forall k \geq 0,$$

onde

$$\|w^k - (I + c_k T)^{-1}(z^k)\| \leq \epsilon_k.$$

Pela lógica da primeira parte do Teorema,  $\{z^k\}$  converge fracamente para algum zero  $z^\infty$  de  $T'$ . Além disso, como  $\|z^k\| \leq r - 1$  para todo  $k$ ,  $\|z^\infty\| \leq r - 1 < r$ , e então  $T'(z^\infty) = T(z^\infty)$ , e  $z^\infty$  é também zero de  $T$ . Isto é uma contradição pois supomos que  $T$  não possui zero, e portanto concluímos que  $\{z^k\}$  não pode ser limitada.  $\square$

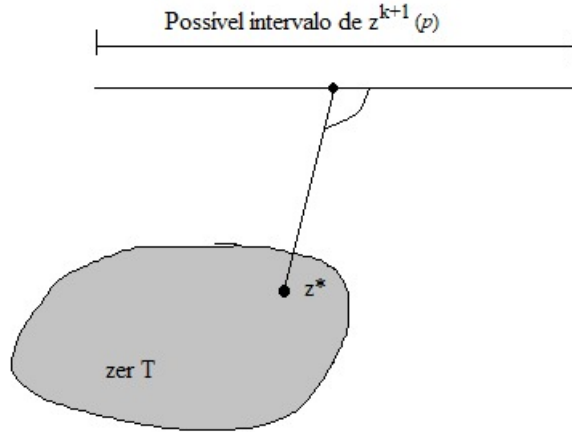


Figura 3.1: Ilustração do uso dos parâmetros de relaxamento.

**Observação 3.1.** *Aqui, com  $\rho = 1$  temos,  $w^k = z^{k+1}(1) \approx (I + c_k T)^{-1}(z^k)$ , e  $z^*$  é um ponto arbitrário de  $zerT$ . O ângulo  $\theta$  deve ser de pelo menos 90 graus pela monotonicidade de  $T$ . A Figura 3.1 pretende esclarecer o papel do fator de relaxamento  $\rho_k$  na convergência do método. Ela ilustra o caso em que  $\epsilon_k = 0$ , forçando a avaliação exata do resolvente. Para  $\rho \in (0, 2)$ , seja*

$$z^{k+1}(\rho) = (1 - \rho)z^k + \rho(I + c_k T)^{-1}(z^k) = (1 - \rho)z^k + \rho w^k.$$

*Da figura, fica claro que*

$$\|z^{k+1}(1) - z^*\| = \|w^k - z^*\| \leq \|z^{k+1}(\rho) - z^*\|$$

*para todo  $\rho < 1$  e  $z^* \in \text{zer}T$ , portanto, é improvável que escolher  $\rho < 1$  seja benéfico. Por outro lado, pode haver um intervalo  $(1, \bar{\rho}) \subseteq (1, 2)$  em que  $\rho \in (1, \bar{\rho})$  implica*

$$\text{dist}(z^{k+1}(\rho), \text{zer}T) < \text{dist}(z^{k+1}(1), \text{zer}T).$$

*Assim deve ser possível que o relaxamento excessivo acelere a convergência. Em pelo menos uma aplicação importante do algoritmo de ponto proximal, o método de multiplicadores para programação convexa, essa aceleração foi confirmada experimentalmente; veja [15, páginas 129-131].*

# Capítulo 4

## Método da decomposição de Douglas-Rachford

A principal dificuldade na aplicação do algoritmo de ponto proximal e métodos relacionados é a avaliação de inversos de operadores da forma  $I + \lambda T$ , onde  $\lambda > 0$ . Para muitos operadores monótonos maximais  $T$ , essas operações de inversão podem ser proibitivamente difíceis. Agora suponha que possamos escolher dois operadores monótonos maximais  $A$  e  $B$ , de modo que  $A + B = T$ , mas  $J_{\lambda A}$  e  $J_{\lambda B}$  sejam mais fáceis de avaliar que  $J_{\lambda T}$ . Um algoritmo de decomposição é um método que emprega os resolventes  $J_{\lambda A}$  e  $J_{\lambda B}$  de  $A$  e  $B$ , mas não usa o  $J_{\lambda T}$  resolvente do operador original  $T$ . O algoritmo é conhecido como algoritmo de Douglas-Rachford porque, em um caso linear especial (equação do calor discretizada), é semelhante a um método proposto por Douglas e Rachford [25] para resolver certas equações matriciais, que foi estendido para operadores por Lions e Mercier [45].

Considere  $\lambda > 0$  fixo e dois operadores monótonos maximais  $A$  e  $B$ . A sequência  $\{z^k\}_{k=0}^{\infty}$  é dita obedecer ao recurso de *Douglas-Rachford* para todo  $\lambda$ ,  $A$  e  $B$  se

$$z^{k+1} = J_{\lambda A}((2J_{\lambda B} - I)(z^k)) + (I - J_{\lambda B})(z^k). \quad (4.1)$$

Dada qualquer sequência que obedeça a essa recorrência, seja  $(x^k, b^k)$ , para todo  $k > 0$ , o único elemento de  $B$  de modo que  $x^k + \lambda b^k = z^k$  (novamente usando o Lema de Representação, Corolário 2.3), que equivale a  $J_{\lambda B}(z^k) = x^k$ . Então, para todo  $k$ , tem-se

$$(I - J_{\lambda B})(z^k) = x^k + \lambda b^k - x^k = \lambda b^k \quad (4.2)$$

$$(2J_{\lambda B} - I)(z^k) = 2x^k - (x^k + \lambda b^k) = x^k - \lambda b^k. \quad (4.3)$$

Similarmente, se  $(y^k, a^k) \in A$ , então  $J_{\lambda A}(y^k + \lambda a^k) = y^k$ . Em vista dessas identidades, pode-se encontrar  $z^{k+1}$  a partir de  $z^k$ :

seja  $z^k$  conhecido, vamos encontrar  $z^{k+1}$  que é dado por 4.1:

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= J_{\lambda A}((2J_{\lambda B} - I)(z^k)) + (I - J_{\lambda B})(z^k) \\ &= J_{\lambda A}((2J_{\lambda B} - I)(z^k)) + \lambda b^k, \text{ por 4.2} \\ &= J_{\lambda A}(x^k - \lambda b^k) + \lambda b^k, \text{ por 4.3} \end{aligned}$$

Como  $(x^k - \lambda b^k) \in \mathcal{H}$ , pelo Corolário 2.3, existe  $(y^{k+1}, a^{k+1})$  com  $A(a^{k+1}) = y^{k+1}$  tal que  $x^k - \lambda b^k = y^{k+1} + \lambda a^{k+1}$  e  $J_{\lambda A}(x^k - \lambda b^k) = J_{\lambda A}(y^{k+1} + \lambda a^{k+1}) = y^{k+1}$ . retornando a  $z^{k+1}$  temos:

$$z^{k+1} = y^{k+1} + \lambda b^k. \quad (4.4)$$

Como podemos achar  $(x^{k+1}, b^{k+1}) \in B$  tal que  $y^{k+1} + \lambda b^k = x^{k+1} + \lambda b^{k+1}$ . e temos em 4.4 agora:

$$z^{k+1} = x^{k+1} + \lambda b^{k+1}.$$

daí para encontrarmos  $z^{k+2}$  repetimos o processo. Podemos resumir esse processo de encontrar  $z^{k+1}$  a partir de  $z^k$  pela forma alternativa abaixo:

- (a) encontre o único  $(y^{k+1}, a^{k+1}) \in A$  tal que  $y^{k+1} + \lambda a^{k+1} = x^k - \lambda b^k$ .
- (b) encontre o único  $(x^{k+1}, b^{k+1}) \in B$  tal que  $x^{k+1} + \lambda b^{k+1} = y^{k+1} + \lambda b^k$ .

A análise original de Lions e Mercier sobre a decomposição de Douglas-Rachford [45] centrou-se no operador

$$G_{\lambda, A, B} = J_{\lambda A} \circ (2J_{\lambda B} - I) + (I - J_{\lambda B}),$$

onde “ $\circ$ ” denota composição de funções. O método de Douglas-Rachford pode ser escrita da forma

$$z^{k+1} = G_{\lambda, A, B}(z^k). \quad (4.5)$$

Lions e Mercier mostraram que  $G_{\lambda, A, B}$  é firmemente não expansivo, do qual obtiveram convergência de  $\{z^k\}$ . Nosso objetivo é estudar a conexão entre firmemente não expansivo e a maximal monotonicidade.

Considere o operador

$$S_{\lambda,A,B} = (G_{\lambda,A,B})^{-1} - I.$$

Primeiro, buscamos uma expressão teórica definida para o  $S_{\lambda,A,B}$ . Seguindo a descrição algorítmica (a)-(b) acima, chegamos à seguinte expressão para  $G_{\lambda,A,B}$  a partir de 4.5:

$$\begin{aligned} G_{\lambda,A,B}(z^k) &= z^{k+1} \\ &= y^{k+1} + \lambda b^k, \text{ por 4.4} \end{aligned}$$

escrevendo  $z^k = u + \lambda b$  onde  $u = x^k$ ,  $b = b^k$ ,  $y^{k+1} = v$  e  $a = a^{k+1}$  temos que:

$$G_{\lambda,A,B}(u + \lambda b) = v + \lambda b; \quad b \in B(u), \quad a \in A(v), \quad v + \lambda a = u - \lambda b$$

Uma manipulação simples fornece uma expressão para  $S_{\lambda,A,B} = (G_{\lambda,A,B})^{-1} - I$ :

$$\begin{aligned} S_{\lambda,A,B}(v + \lambda b) &= ((G_{\lambda,A,B})^{-1} - I)(v + \lambda b) \\ &= u - v; \quad b \in B(u), \quad a \in A(v), \quad v + \lambda a = u - \lambda b. \end{aligned}$$

Dado qualquer espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ ,  $\lambda > 0$ , e operadores  $A$  e  $B$  em  $\mathcal{H}$ , definimos  $S_{\lambda,A,B}$  como o operador de decomposição de  $A$  e  $B$  em relação a  $\lambda$ . Agora, estabelecemos diretamente a maximal monotonicidade de  $S_{\lambda,A,B}$ .

**Teorema 4.1.** *Se  $A$  e  $B$  são monótonos então  $S_{\lambda,A,B}$  também o é. Se  $A$  e  $B$  são monótonos maximais, então  $S_{\lambda,A,B}$  também o é.*

*Demonstração.* Primeiro vamos mostrar que  $S_{\lambda,A,B}$  é monótono. Sejam  $u, v, b, a, u', b', v', a' \in \mathcal{H}$  tal que  $b \in B(u)$ ,  $b' \in B(u')$ ,  $a \in A(v)$ ,  $a' \in A(v')$ ,  $v + \lambda a = u - \lambda b$  e  $v' + \lambda a' = u' - \lambda b'$ . Então,

$$a = \frac{1}{\lambda}(u - v) - b, \quad a' = \frac{1}{\lambda}(u' - v') - b',$$

e

$$\begin{aligned} &\langle (v' + \lambda b') - (v + \lambda b), (u' - v') - (u - v) \rangle \\ &= \lambda \langle (v' + \lambda b') - (v + \lambda b), \lambda^{-1}(u' - v') - b' - \lambda^{-1}(u - v) + b \rangle \\ &+ \lambda \langle (v' + \lambda b') - (v + \lambda b), b' - b \rangle \\ &= \lambda \langle v' - v, \lambda^{-1}(u' - v') - b' - \lambda^{-1}(u - v) + b \rangle \\ &+ \lambda^2 \langle b' - b, \lambda^{-1}(u' - v') - b' - \lambda^{-1}(u - v) + b \rangle + \lambda \langle v' - v, b' - b \rangle + \lambda^2 \langle b' - b, b' - b \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda \langle v' - v, a' - a \rangle + \lambda \langle b' - b, u' - u \rangle - \lambda \langle b' - b, v' - v \rangle - \lambda^2 \langle b' - b, b' - b \rangle \\
&+ \lambda \langle v' - v, b' - b \rangle + \lambda^2 \langle b' - b, b' - b \rangle \\
&= \lambda \langle v' - v, a' - a \rangle + \lambda \langle b' - b, u' - u \rangle.
\end{aligned}$$

Pela monotonicidade de  $A$  e  $B$ , os dois termos na linha final não são negativos, então obtemos que  $\langle (v' + \lambda b') - (v + \lambda b), (u' - v') - (u - v) \rangle \geq 0$  e  $S_{\lambda, A, B}$  é monótono. Resta mostrar que  $S_{\lambda, A, B}$  é maximal no caso em que  $A$  e  $B$  também o são. Pelo Teorema 2.1, precisamos apenas mostrar que  $(I - S_{\lambda, A, B})^{-1} = G_{\lambda, A, B} = J_{\lambda A} \circ (2J_{\lambda B} - I) + (I - J_{\lambda B})$  tem domínio completo. Este é realmente o caso, pois  $J_{\lambda A}$  e  $J_{\lambda B}$  são definidos em todo o espaço.  $\square$

Combinando os Teoremas 4.1 e 2.2, temos o principal resultado do Lions-Mercier:

**Corolário 4.1.** *Se  $A$  e  $B$  são monótonos maximais, então  $G_{\lambda, A, B} = (I + S_{\lambda, A, B})^{-1}$  é firmemente não expansivo e tem domínio completo.*

*Demonstração.* Segue diretamente do Teorema 2.2.  $\square$

Há também uma relação importante entre os zeros de  $(S_{\lambda, A, B})^{-1}$  e os de  $(A + B)$ , conforme o resultado abaixo.

**Teorema 4.2.** *Dados  $\lambda > 0$  e operadores  $A$  e  $B \subset \mathcal{H}$ ,*

$$\text{zer}(S_{\lambda, A, B}) = Z_{\lambda}^* \subseteq \{u + \lambda b \mid u \in \text{zer}(A + B), b \in B(u)\},$$

onde  $Z_{\lambda}^* = \{u + \lambda b \mid b \in B(u), -b \in A(u)\}$ .

*Demonstração.* Seja  $S = S_{\lambda, A, B}$ . Queremos mostrar que  $\text{zer}(S)$  é igual a  $Z_{\lambda}^*$ . Seja  $z \in \text{zer}(S)$ . Então, existem  $u, b, a \in \mathcal{H}$  tais que  $v + \lambda b = z$ ,  $u - v = 0$ ,  $b \in B(u)$  e  $a \in A(v)$ . Então,

$$u - v = 0 \quad \Rightarrow \quad u = v \quad \Rightarrow \quad \lambda a = -\lambda b \Rightarrow a = -b.$$

Assim, temos que  $u + \lambda b = z$ ,  $b \in B(u)$ , e  $-b \in A(u)$  e conseqüentemente  $z \in Z_{\lambda}^*$ . Por outro lado, se  $z \in Z_{\lambda}^*$ , então  $z = u + \lambda b$ ,  $b \in B(u)$  e  $-b \in A(u)$ . Definindo  $u = v$  e  $a = -b$  vemos que  $0 \in S(z)$ . Finalmente, a inclusão  $Z_{\lambda}^* \subseteq \{u + \lambda b \mid u \in \text{zer}(A + B), b \in B(u)\}$  segue porque  $b \in B(u)$  e  $-b \in A(u)$  implica que  $u \in \text{zer}(A + B)$ .  $\square$

Assim, dado qualquer zero  $z$  de  $S_{\lambda,A,B}$ ,  $J_{\lambda B}(z)$  é zero de  $A + B$ . Noutras palavras, pode-se encontrar o zero de  $A + B$  aplicando o resolvente  $J_{\lambda B(z)}$ , onde  $z$  é um zero de  $S_{\lambda,A,B}$ , que pode ser encontrado usando o algoritmo do ponto proximal em  $S_{\lambda,A,B}$ . Que é exatamente o que o método de decomposição de Douglas-Rachford faz.

**Teorema 4.3.** *A iteração Douglas-Rachford*

$$z^{k+1} = [J_{\lambda A} \circ (2J_{\lambda B} - I) + (I - J_{\lambda B})](z^k)$$

é equivalente a aplicação do algoritmo de ponto proximal ao operador monótono maximal  $S_{\lambda,A,B}$ , com o parâmetro auxiliar  $c_k$  fixado em 1 e avaliação exata dos resolventes.

*Demonstração.* Segue de (4.5) que a iteração Douglas-Rachford se resume em  $z^{k+1} = G_{\lambda,A,B}(z^k)$ , que é exatamente o resolvente do operador  $S_{\lambda,A,B}$  definido acima. Logo, equivale a aplicar o algoritmo do ponto proximal ao operador  $S_{\lambda,A,B}$ , onde os resolventes de  $A$  e  $B$  são calculados de forma exata.  $\square$

Em vista do Teorema 3.1, Teorema 4.2 e a Lipschitz continuidade do operador  $J_{\lambda B}$ , obtemos imediatamente o seguinte resultado da convergência Lions-Mercier; veja [45, Proposição 2].

**Corolário 4.2.** *Se  $A + B$  possui um zero, então o método da decomposição de Douglas-Rachford produz uma sequência  $\{z^k\}$  fracamente convergente para um limite  $z$  da forma  $u + \lambda b$ , onde  $u \in \text{zer}(A + B)$ ,  $b \in B(u)$  e  $-b \in A(u)$ . Se o procedimento (a)-(b) é usado para implementar a iteração Douglas-Rachford, então  $\{u^k\} = \{J_{\lambda B}(z^k)\}$  converge para algum zero de  $A + B$ .*

O Teorema 3.1 também afirma que, no espaço geral de Hilbert, o algoritmo do ponto proximal produz uma sequência ilimitada quando aplicado a um operador monótono maximal que não possui zeros. Assim, Eckstein e Bertsekas [17] apresentam outro resultado aparentemente desconhecido para Lions e Mercier:

**Corolário 4.3.** *Suponha que  $A$  e  $B$  sejam monótonos maximais e  $\text{zer}(A + B) = \emptyset$ . Então a sequência  $\{z^k\}$  produzida pela decomposição de Douglas-Rachford é ilimitada. Se o procedimento (a)-(b) for usado, pelo menos uma das seqüências  $\{x^k\}$  ou  $\{b^k\}$  será ilimitada.*

Observe que não é necessário assumir que  $A + B$  é maximal. Somente  $A$  e  $B$  precisam ser maximais.

Como o método da decomposição de Douglas-Rachford é um caso especial do algoritmo de ponto proximal aplicado ao operador de decomposição  $S_{\lambda,A,B}$ , várias generalizações da decomposição de Douglas-Rachford agora se sugerem: pode-se imaginar a aplicação do algoritmo de ponto proximal generalizado a  $S_{\lambda,A,B}$  com tamanhos de passo  $c_k$  diferentes de 1, com fatores de relaxamento  $\rho_k$  diferentes de 1 ou com uma avaliação aproximada do resolvente  $G_{\lambda,A,B}$ . Mostraremos que, embora a primeira dessas opções não seja prática, as duas últimas são.

Considere, para todo  $c > 0$ , calcular  $(I + cS_{\lambda,A,B})^{-1}(z)$ . Agora,

$$(I + cS_{\lambda,A,B})^{-1} = \{((1 - c)v + cu + \lambda b, v + \lambda b) \mid b \in B(u), a \in A(v), v + \lambda a = u - \lambda b\}.$$

Portanto, para calcular  $(I + cS_{\lambda,A,B})^{-1}(z)$ , é preciso encontrar  $b \in B(u)$  e  $a \in A(v)$  tais que

$$(1 - c)v + cu + \lambda b = z, \quad a = \frac{1}{\lambda}(u - v) - b.$$

Como alternativa, podemos declarar o problema como o de encontrar  $u, v \in \mathcal{H}$  tal que:

$$z = -(cu + (1 - c)v) \in \lambda B(u), \quad -z + ((1 + c)u - cv) \in \lambda A(v).$$

Este não parece ser um problema particularmente fácil. Especificamente, não parece ser menos difícil do que o cálculo de  $J_{\lambda(A+B)}$  em um ponto arbitrário  $z$ , que, ao usar um algoritmo de decomposição, estamos expressamente tentando evitar.

Esse cálculo envolve encontrar  $b \in B(u)$  tal que  $(u, \lambda^{-1}(z - u) - b) \in A$ .

Considere, no entanto, o que acontece quando se fixa  $c = 1$ . Então, basta encontrar:

$$\begin{aligned} b &\in B(u) \text{ tal que } u + \lambda b = z, \\ a &\in A(v) \text{ tal que } v + \lambda a = u - \lambda b. \end{aligned}$$

As condições  $b \in B(u)$ ,  $u + \lambda b = z$  determinam exclusivamente  $u = J_{\lambda B}(z)$  e  $b = (z - u)/\lambda$  independentemente de  $v$ . Uma vez que  $u$  é conhecido,  $v$  também é determinado exclusivamente por  $v = J_{\lambda A}(u - \lambda b)$ . Conseguimos, assim, uma decomposição na qual o cálculo de  $J_{s_{\lambda,A,B}} = (I + S_{\lambda,A,B})^{-1}$  é substituído por avaliações sequenciais separadas de  $J_{\lambda A} = (I + \lambda A)^{-1}$  e  $J_{\lambda B} = (I + \lambda B)^{-1}$ . Este procedimento é essencialmente o procedimento



(a) – (b) dado acima. Parece que manter  $c = 1$  em todos os momentos é fundamental para a decomposição.

Spingarn [69] já comentou esse fenômeno no contexto mais restritivo do método das inversas parciais.

A formulação do operador de decomposição  $S_{\lambda,A,B}$  é uma maneira de combinar  $A$  e  $B$  com a propriedade especial de avaliar o  $G_{\lambda,A,B} = (I + S_{\lambda,A,B})^{-1}$  decomposto em avaliações sequenciais de  $J_{\lambda A}$  e  $J_{\lambda B}$ . A adição simples de operadores não possui essa propriedade de decomposição. Além disso, a estreita relação entre  $\text{zer}(S_{\lambda,A,B})$  e  $\text{zer}(A + B)$  torna  $S_{\lambda,A,B}$  útil para encontrar zeros de  $A + B$ . Apesar da impraticabilidade de usar tamanhos de passos diferentes de 1, é possível usar diferentes fatores de relaxamento para avaliar  $G_{\lambda,A,B} = (I + S_{\lambda,A,B})^{-1}$  aproximadamente, obtendo um método generalizado da decomposição de Douglas-Rachford. As propriedades de tal método são resumidas pelo seguinte teorema:

**Teorema 4.4.** *Dado um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ , algum  $z^0 \in \mathcal{H}$ ,  $\lambda > 0$ , e operadores monótonos maximais  $A$  e  $B$  em  $\mathcal{H}$ , seja  $\{z^k\}_{k=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\{u^k\}_{k=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\{v^k\}_{k=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty} \subseteq [0, \infty)$ ,  $\{\beta_k\}_{k=0}^{\infty} \subseteq [0, \infty)$  e  $\{\rho_k\}_{k=0}^{\infty} \subseteq (0, 2)$  em conformidade com as seguintes condições:*

(T1)  $\|u^k - J_{\lambda B}(z^k)\| \leq \beta_k$ , para todo  $k \geq 0$ ;

(T2) Para todo  $k \geq 0$ ,  $\|v^{k+1} - J_{\lambda A}(2u^k - z^k)\| \leq \alpha_k$ ,  $z^{k+1} = z^k + \rho_k(v^{k+1} - u^k)$  e  $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k < \infty$ ,  $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k < \infty$ ,  $0 < \inf_{k \geq 0} \rho_k \leq \sup_{k \geq 0} \rho_k < 2$ .

Se  $\text{zer}(A + B) \neq \emptyset$ , então  $\{z^k\}$  converge fracamente para algum elemento de  $Z_{\lambda}^* = \{u + \lambda b \mid b \in B(u), -b \in A(u)\}$ . Se  $\text{zer}(A + B) = \emptyset$ , então  $\{z^k\}$  é ilimitada.

*Demonstração.* Fixe  $k \geq 0$  qualquer. Então  $\|u^k - J_{\lambda B}(z^k)\| \leq \beta_k$  implica que

$$\|(2u^k - z^k) - (2J_{\lambda B} - I)(z^k)\| \leq 2\beta_k.$$

Como  $J_{\lambda A}$  é não expansivo, temos que

$$\|J_{\lambda A}(2u^k - z^k) - J_{\lambda A}(2J_{\lambda B} - I)(z^k)\| \leq 2\beta_k,$$

e então

$$\begin{aligned}\|v^{k+1} - J_{\lambda A}(2J_{\lambda B} - I)(z^k)\| &\leq 2\beta_k + \alpha_k, \\ \|(v^{k+1} + z^k - u^k) - [J_{\lambda A}(2J_{\lambda B} - I) + (I - J_{\lambda B})](z^k)\| &\leq 3\beta_k + \alpha_k.\end{aligned}$$

Para todo  $k$ , faça  $\epsilon_k = 3\beta_k + \alpha_k$ , então

$$\sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k = 3 \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k < \infty.$$

Também temos

$$z^{k+1} = z^k + \rho_k(v^{k+1} - u^k) = (1 - \rho_k)z^k + \rho_k(v^{k+1} + z^k - u^k).$$

Portanto, tomando  $y^k = v^{k+1} + z^k - u^k$ , temos

$$\begin{aligned}0 < \inf_{k \geq 0} \rho_k \leq \sup_{k \geq 0} \rho_k < 2 \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k < +\infty, \\ \|y^k - G_{\lambda, A, B}(z^k)\| \leq \epsilon_k, \quad z^{k+1} = (1 - \rho_k)z^k + \rho_k y^k, \quad \forall k \geq 0.\end{aligned}$$

A conclusão segue a partir dos Teoremas 3.1 e 4.2. □

Em pelo menos um exemplo real (veja [28, Seção 7.2.3]), o uso do método de decomposição generalizado de Douglas-Rachford com fatores de relaxamento  $\rho_k$  diferentes de 1 demonstrou convergir mais rapidamente que a decomposição regular de Douglas-Rachford. Este exemplo envolveu um algoritmo altamente paralelo para programação linear. Lá, uma escolha de  $\rho_k = 1.5$  para todo  $k$  parecia convergir para uma determinada precisão cerca de 15% mais rápida que a escolha  $\rho_k = 1$  para todo  $k$ . Assim, a inclusão de fatores de excesso de relaxamento é de alguma importância prática. Além disso, a convergência da decomposição Douglas-Rachford com o cálculo aproximado dos resolventes não havia sido estabelecida anteriormente.

# Capítulo 5

## Alguns casos especiais interessantes

Consideramos agora algumas aplicações interessantes da teoria do operador de decomposição, a saber, o método de inversos parciais (veja Spingarn [69, 70]), o método generalizado de direção alternada dos multiplicadores (veja Eckstein e Bertsekas [17]) e o problema da viabilidade convexa; veja [7, 66]. Começamos com uma breve discussão do método das inversas parciais.

### 5.1 Método das inversas parciais

Seja  $T$  um operador em um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  e seja  $V$  qualquer subespaço linear de  $\mathcal{H}$ ,  $V^\perp$  denotando seu complemento ortogonal. Então a inversa parcial  $T_V$  de  $T$  em relação a  $V$  é o operador obtido trocando os componentes  $V^\perp$  de cada par em  $T$ :

$$T_V = \{(x_V + y_{V^\perp}, y_V + x_{V^\perp}) \mid y \in T(x)\}.$$

Aqui, usamos a notação de que, para qualquer vetor  $z$ ,  $z_V$  denota a projeção de  $z$  em  $V$ , e  $z_{V^\perp}$  sua projeção em  $V^\perp$ .

Spingarn [69, 70] sugeriu a aplicação do algoritmo de ponto proximal à  $T_V$  para resolver o problema:

(ZV) encontrar  $y \in T(x)$  tal que  $x \in V$  e  $y \in V^\perp$ ,

onde  $T$  é monótono maximal. Em particular, se  $T = \partial f$ , onde  $f$  é uma função própria, semicontínua e convexa, esse problema se reduz ao de minimizar  $f$  sobre  $V$ . Uma

aplicação desse método é o método de programação estocástica de cobertura progressiva (*progressive hedging*) de Rockafellar e Wets [59], que não será abordada neste trabalho.

Considere agora o operador

$$N_V = V \times V^\perp = \{(x, y) \mid x \in V, y \in V^\perp\}.$$

Vê-se facilmente que  $N_V$  é o subdiferencial  $\partial(\delta_V)$  da função própria, semicontínua e convexa:

$$\delta_V = \begin{cases} 0, & x \in V, \\ +\infty, & x \notin V. \end{cases}$$

Com efeito, para  $x \in V$

$$\begin{aligned} y \in \partial(\delta_V)(x) &\iff \delta_V(z) \geq \delta_V(x) + \langle y, z - x \rangle, \quad \forall z \in \mathcal{H} \\ &\iff \delta_V(z) \geq 0 + \langle y, z - x \rangle, \quad \forall z \in \mathcal{H} \\ &\iff y \in V^\perp \end{aligned}$$

e, portanto, temos que  $\partial(\delta_V) = N_V$  é monótono maximal. Agora considere o problema:

(ZV') encontrar  $x$  tal que  $0 \in (T + N_V)(x)$ ,

que é equivalente a (ZV). Se formarmos o operador de decomposição  $S_{\lambda, A, B}$  com  $\lambda = 1$ ,  $A = N_V = V \times V^\perp$  e  $B = T$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} S_{1, V \times V^\perp, T} &= \{(v + b, u - v) \mid b \in T(u), v \in V, a \in V^\perp, v + a = u - b\}. \\ &= \{((u - b)_V + b, u - (u - b)_V) \mid b \in T(u)\} \\ &= \{(u_V + b_{V^\perp}, b_V + u_{V^\perp}) \mid b \in T(u)\} \\ &= T_V. \end{aligned}$$

Assim, a inversa parcial  $T_V$  é um tipo especial de operador de decomposição, e a aplicação do algoritmo de ponto proximal a  $T_V$  é uma forma especializada da decomposição de Douglas-Rachford. Com isso, obtém-se o seguinte algoritmo para (ZV):

Passo 1: Comece com qualquer  $x^0 \in V, y^0 \in V^\perp$ .

Passo 2: Suponha que a iteração  $k$  foi obtida, então encontre  $\bar{y}^k \in \mathcal{H}$  tal que  $\|\bar{y}^k - J_{\lambda T}(x^k + y^k)\| \leq \beta^k$  e denote  $\bar{x}^k = (x^k + y^k) - \bar{y}^k$ .

Passo 3: Calcule  $x^{k+1} = (1 - \rho_k)x^k + \rho_k(\bar{x}^k)_V$  e  $y^{k+1} = (1 - \rho_k)y^k + \rho_k(\bar{y}^k)_{V^\perp}$ .

Aqui  $\{\rho_k\}_{k=0}^\infty$  e  $\{\beta_k\}_{k=0}^\infty$  são seqüências que atendem às hipóteses do Teorema 4.4.

## 5.2 Generalização do método de direção alternada dos multiplicadores

Passamos agora ao nosso segundo exemplo de aplicação da teoria dos operadores de decomposição, a derivação de um método Lagrangiano aumentado chamado de *Método de Direção Alternada dos Multiplicadores*.

Considere um problema geral de otimização de dimensão finita da forma

$$(P) \quad \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimizar}} \quad f(x) + g(Mx),$$

onde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  e  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  são próprias, semicontínuas e convexas, e  $M$  é uma matriz  $m \times n$ . Escrevendo  $(P)$  da forma

$$(P') \quad \text{minimizar } f(x) + g(w), \quad \text{sujeito a } Mx = w$$

e anexando um vetor multiplicador  $p \in \mathbb{R}^m$  às restrições  $Mx = w$ , temos

$$\begin{aligned} (P') &= \inf \mathcal{L}(x, p) \\ &= \inf \{f(x) + g(w) + \langle p, Mx - w \rangle\} \\ &= \inf \{f(x) + g(w) + \langle p, Mx \rangle - \langle p, w \rangle\} \\ &= \inf \{f(x) + \langle p, Mx \rangle + g(w) - \langle p, w \rangle\} \\ &= \inf \{f(x) + \langle p, Mx \rangle\} + \inf \{g(w) - \langle p, w \rangle\} \\ &= - (f^* (-M^\top p) + g^*(p)). \end{aligned}$$

Obtém-se assim um problema dual equivalente

$$(D) \quad \underset{p \in \mathbb{R}^m}{\text{maximizar}} \quad - (f^* (-M^\top p) + g^*(p)),$$

onde  $*$  denota a operação de conjugação convexa. Uma maneira de resolver o problema  $(P) - (D)$  é fazer  $A = \partial[f^* \circ (-M^\top)]$  e  $B = \partial g^*$ , e aplicar a decomposição de Douglas-Rachford a  $A$  e  $B$ . Essa abordagem foi mostrada por Gabay [35] para obter o método de direção alternada dos multiplicadores [34, 35, 36, 37],

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= \arg \min_x \{f(x) + \langle p^k, Mx \rangle + \frac{1}{2} \lambda \|Mx - w^k\|^2\}, \\ w^{k+1} &= \arg \min_w \{g(w) - \langle p^k, w \rangle + \frac{1}{2} \lambda \|Mx^{k+1} - w\|^2\}, \end{aligned}$$

$$p^{k+1} = p^k + \lambda(Mx^{k+1} - w^{k+1}).$$

Esse método se assemelha ao método convencional de multiplicadores Hestenes-Powell para  $(P')$ , exceto pelo fato de minimizar a função Lagrangiana aumentada

$$L_\lambda(x, w, p) = f(x) + g(w) + \langle p^k, Mx - w \rangle + \frac{1}{2}\lambda\|Mx - w\|^2,$$

primeiro em relação a  $x$ , e depois em relação a  $w$ , em vez de em relação a  $x$  e  $w$  simultaneamente. Observe também que o parâmetro de penalidade  $\lambda$  não pode variar com  $k$ .

**Proposição 5.1.** *(Dualidade fraca) Para todo  $x, y \in \mathcal{H}$ , temos que*

$$f(x) + g(Mx) \geq - (f^*(-M^\top p) + g^*(p)).$$

*Demonstração.* Pela Desigualdade de Fenchel-Young (Lema 1.2), temos que

$$\begin{aligned} f(x) + f^*(-M^\top p) &\geq \langle x, -M^\top p \rangle = -\langle Mx, p \rangle \\ g(Mx) + g^*(p) &\geq \langle Mx, p \rangle. \end{aligned}$$

E portanto

$$f(x) + f^*(-M^\top p) \geq -\langle Mx, p \rangle \geq - (g(Mx) + g^*(p)).$$

Reorganizando  $f(x) + f^*(-M^\top p) \geq - (g(Mx) + g^*(p))$ , obtém-se

$$f(x) + g(Mx) \geq - (f^*(-M^\top p) + g^*(p)).$$

□

**Lema 5.1.** *Seja  $h(x) = g(Mx)$ , onde  $g$  é uma função convexa própria em  $\mathbb{R}^m$  e  $M$  uma transformação linear de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^m$ . Então,*

$$M^\top \circ \partial g \circ M \subseteq \partial h = \partial[g \circ M]. \quad (5.1)$$

*Demonstração.* Veja Rockafellar [61].

□

**Proposição 5.2.** *(Teorema de Kuhn-Tucker) As quatro condições a seguir são equivalentes umas às outras, e cada uma implica que  $x$  é ótimo para  $(P)$  enquanto  $p$  é simultaneamente ótimo para  $(D)$ :*

- (i)  $x$  é ótimo para  $(P)$  e  $p$  é tal que  $p \in \partial g(Mx)$  e  $-M^\top p \in \partial f(x)$ ;
- (ii)  $p$  é ótimo para  $(D)$  e  $x$  é tal que  $x \in \partial f^*(-M^\top p)$  e  $Mx \in \partial g^*(p)$ ;
- (iii)  $-M^\top p \in \partial f(x)$  e  $p \in \partial g(Mx)$ ;
- (iv)  $f(x) + g(Mx) = -(f^*(-M^\top p) + g^*(p))$ .

*Demonstração.* Mostraremos que (i) – (iv) são equivalentes entre si. Primeiro, (iii) é apenas uma reformulação de (i) sem a suposição de que  $x$  seja ótimo, então  $(i) \implies (iii)$ . Para mostrar  $(iii) \implies (i)$ , precisamos mostrar que  $x$  deve ser ótimo para  $(P)$ . Por (5.1), temos

$$M^\top p \in \partial[g \circ M](x) \implies 0 = -M^\top p + M^\top p \in \partial f(x) + \partial[g \circ M](x) \subseteq \partial[f + g \circ M]x,$$

e então  $x$  é ótimo para  $(P)$ . Uma vez que  $\partial h^* = (\partial h)^{-1}$  para qualquer função própria, semicontínua e convexa  $h$ , notamos que (iii) é equivalente a

$$(iii') \quad x \in \partial f^*(-M^\top p) \text{ e } Mx \in \partial g^*(p).$$

A prova de que  $(iii') \iff (ii)$  pode agora proceder de forma análoga a  $(iii) \iff (i)$ .

Agora mostramos que  $(iii) \iff (iv)$ . Pela Proposição 1.4, temos que (iii) é equivalente a

$$\begin{aligned} f(x) + f^*(-M^\top p) &= \langle x, -M^\top p \rangle = -\langle Mx, p \rangle \\ g(Mx) + g^*(p) &= \langle Mx, p \rangle. \end{aligned}$$

Somando essas duas equações e reorganizando, obtém-se (iv). Por outro lado, (iv) implica

$$f(x) + f^*(-M^\top p) = -(g(Mx) + g^*(p)),$$

o que, em vista de  $f(x) + f^*(-M^\top p) \geq -\langle Mx, p \rangle \geq -(g(Mx) + g^*(p))$ , significa que

$$\begin{aligned} f(x) + f^*(-M^\top p) &= -\langle Mx, p \rangle \\ g(Mx) + g^*(p) &= \langle Mx, p \rangle. \end{aligned}$$

Com isso, pela Proposição 1.4, obtemos (iii). □

**Definição 5.1.** Diz-se que um par  $(x, p)$  é um par de Kuhn-Tucker para  $(P)$  se

$$-M^\top p \in \partial f(x) \quad e \quad p \in \partial g(Mx).$$

**Corolário 5.1.** A existência de um par de Kuhn-Tucker  $(x, p)$  é suficiente para implicar que  $\text{zer}(\partial f + \partial[g \circ M])$  e  $\text{zer}(\partial[f^* \circ (-M^\top)] + \partial g^*)$  são diferentes do vazio.

Agora, mostramos como o Teorema (4.4) produz uma versão generalizada desse algoritmo. Seja os operadores monótonos maximais  $A = \partial[f^* \circ (-M^\top)]$  e  $B = \partial g^*$ .

**Teorema 5.1.** (O método generalizado de direção alternada dos multiplicadores). Considere um problema convexo no formato  $(P)$ , onde  $M$  tem posto completo. Seja  $p^0, z^0 \in \mathbb{R}^m$  e suponha que seja dado  $\lambda > 0$  e

$$\{\mu_k\}_{k=0}^\infty \subseteq [0, \infty), \quad \sum_{k=0}^\infty \mu_k < \infty,$$

$$\{\nu_k\}_{k=0}^\infty \subseteq [0, \infty), \quad \sum_{k=0}^\infty \nu_k < \infty,$$

$$\{\rho_k\}_{k=0}^\infty \subseteq (0, 2), \quad 0 < \inf_{k \geq 0} \rho_k \leq \sup_{k \geq 0} \rho_k < 2.$$

Suponha que, para todo  $k$ ,  $\{x^k\}_{k=1}^\infty$ ,  $\{w^k\}_{k=0}^\infty$  e  $\{p^k\}_{k=0}^\infty$  satisfazem:

$$\|x^{k+1} - \arg \min_x \{f(x) + \langle p^k, Mx \rangle + \frac{1}{2}\lambda \|Mx - w^k\|^2\}\| \leq \mu_k,$$

$$\|w^{k+1} - \arg \min_w \{g(w) - \langle p^k, w \rangle + \frac{1}{2}\lambda \|Mx^{k+1} - w\|^2\}\| \leq \nu_k,$$

$$p^{k+1} = p^k + \lambda(\rho_k Mx^{k+1} + (1 - \rho_k)w^k - w^{k+1}).$$

Então, se  $(P)$  possui um par Kuhn-Tucker,  $\{x^k\}$  converge para uma solução de  $(P)$  e  $\{p^k\}$  converge para uma solução para o problema duplo  $(D)$ . Além disso,  $\{w^k\}$  converge para  $Mx^*$ , onde  $x^*$  é o limite de  $\{x^k\}$ . Se  $(D)$  não tiver uma solução, pelo menos uma das seqüências  $\{p^k\}$  ou  $\{w^k\}$  será ilimitada.

*Demonstração.* Para todo  $k \geq 0$ , tomemos:

$$z^k = p^k + \lambda w^k$$

$$q^k = p^k + \lambda(Mx^{k+1} - w^k)$$

$$\alpha_k = \lambda \|M\| \mu_k$$



$$\beta_0 = \|p^0 - J_{\lambda B}(p^0 + \lambda w^0)\|$$

$\beta_k = \lambda \nu_k$ , onde  $\|M\|$  denota a norma  $l_2$  da matrix  $M$ , ou seja,

$$\|M\| = \sup_{x \neq 0} \left\{ \frac{\|Mx\|}{\|x\|} \right\}.$$

Desejamos estabelecer que o seguinte seja válido para todos os  $k \geq 0$ :

$$(Y1) \quad \|p^k - J_{\lambda B}(z^k)\| \leq \beta_k;$$

$$(Y2) \quad \|q^k - J_{\lambda A}(2p^k - z^k)\| \leq \alpha_k;$$

$$(Y3) \quad z^{k+1} = z^k + \rho_k(q^k - p^k).$$

Para  $k = 0$ , (Y1) é válido com a escolha de  $\beta_0$ . Agora, suponha que (Y1) vale para algum  $k$ . Mostramos que (Y2) também vale para  $k$ . Seja

$$\bar{x}^k = \arg \min_x \{f(x) + \langle p^k, Mx \rangle + \frac{1}{2}\lambda \|Mx - w^k\|^2\},$$

$$\bar{p}^k = (p^k - \lambda w^k) + \lambda M \bar{x}^k.$$

A existência de um único  $\bar{x}^k$  é garantida porque  $f$  é própria, semicontínua inferiormente e convexa e  $M$  possui posto completo. Então

$$\begin{aligned} 0 &\in \partial_x [f(x) + \langle p^k, Mx \rangle + \frac{1}{2}\lambda \|Mx - w^k\|^2]_{x=\bar{x}^k} \\ &\Rightarrow 0 \in \partial f(\bar{x}^k) + M^\top p^k + \lambda M^\top (M\bar{x}^k - w^k) \\ &\Rightarrow 0 \in \partial f(\bar{x}^k) + M^\top \bar{p}^k \\ &\Rightarrow -M^\top \bar{p}^k \in \partial f(\bar{x}^k) \\ &\Rightarrow \bar{x}^k \in \partial f^*(-M^\top \bar{p}^k) \\ &\Rightarrow -M\bar{x}^k \in \partial [f^* \circ (-M^\top)](\bar{p}^k) = A\bar{p}^k. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\bar{p}^k + \lambda(-M\bar{x}^k) = p^k - \lambda w^k.$$

Assim

$$\bar{p}^k = (I + \lambda A)^{-1}(p^k - \lambda w^k) = J_{\lambda A}(2p^k - z^k).$$

Portanto, de

$$\|x^{k+1} - \arg \min_x \{f(x) + \langle p^k, Mx \rangle + \frac{1}{2}\lambda \|Mx - w^k\|^2\}\| \leq \mu_k,$$

$$q^k = p^k + \lambda(Mx^{k+1} - w^k),$$

obtemos

$$\|x^{k+1} - \bar{x}^k\| \leq \mu_k, \quad \|q^k - \bar{p}^k\| \leq \lambda \|M\| \mu_k,$$

estabelecendo (Y2) para  $k$ .

Suponha que (Y1) e (Y2) valem para algum  $k$ . Agora mostramos que (Y3) vale para  $k$  e (Y1) vale para  $k+1$ . Seja

$$\begin{aligned} s^k &= z^k + \rho_k(q^k - p^k) \\ &= p^k + \lambda w^k + \lambda \rho_k(Mx^{k+1} - w^k) \\ &= p^k + \lambda(\rho_k Mx^{k+1} + (1 - \rho_k)w^k) \end{aligned} \tag{5.2}$$

e também

$$\begin{aligned} \bar{w}^k &= \arg \min_w \{g(w) - \langle p^k, w \rangle + \frac{1}{2}\lambda \|(\rho_k Mx^{k+1} + (1 - \rho_k)w^k) - w\|^2\}, \\ \bar{s}^k &= p^k + \lambda(\rho_k Mx^{k+1} + (1 - \rho_k)w^k - \bar{w}^k). \end{aligned} \tag{5.3}$$

A existencia de  $\bar{w}^k$  é garantida pois  $g$  é própria e convexa. Então, temos que

$$\begin{aligned} 0 &\in \partial_w [g(w) - \langle p^k, w \rangle + \frac{1}{2}\lambda \|(\rho_k Mx^{k+1} + (1 - \rho_k)w^k) - w\|^2]_{w=\bar{w}^k} \\ &\Rightarrow 0 \in \partial g(\bar{w}^k) - p^k + \lambda(\bar{w}^k - (\rho_k Mx^{k+1} + (1 - \rho_k)w^k)) \\ &\Rightarrow p^k + \lambda(\rho_k Mx^{k+1} + (1 - \rho_k)w^k - \bar{w}^k) = \bar{s}^k \in \partial g(\bar{w}^k) \\ &\Rightarrow \bar{w}^k \in \partial g^*(\bar{s}^k) = B\bar{s}^k. \end{aligned}$$

Como

$$\bar{s}^k + \lambda \bar{w}^k = p^k + \lambda(\rho_k Mx^{k+1} + (1 - \rho_k)w^k) = s^k,$$

temos que  $\bar{s}^k = J_{\lambda B}(s^k)$ .

A condição em  $w^{k+1}$  é apenas  $\|w^{k+1} - \bar{w}^k\| \leq \nu_k$ , então  $\|p^{k+1} - \bar{s}^k\| \leq \lambda \nu_k$ . Temos também

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= p^{k+1} + \lambda w^{k+1} \\ &= p^k + \lambda(\rho_k Mx^{k+1} + (1 - \rho_k)w^k - w^{k+1}) + \lambda w^{k+1} \\ &= p^k + \lambda(\rho_k Mx^{k+1} + (1 - \rho_k)w^k) \\ &= s^k. \text{ por 5.2} \end{aligned}$$

Assim, (Y3) vale para  $k$ , e (Y1) vale para  $k+1$  por  $\|p^{k+1} - \bar{s}^k\| \leq \lambda\nu_k$ . Por indução, então, (Y1)–(Y3) vale para todo  $k$ . O fato de  $\{\mu_k\}$  e  $\{\nu_k\}$  ser somável, implica que  $\{\beta_k\}$  e  $\{\alpha_k\}$  também o é. Suponha que (P) tenha um par Kuhn-Tucker e, em seguida, pelo Teorema 4.4,  $\{z^k\}$  converge para algum elemento  $z^*$  de  $\{p + \lambda w \mid w \in B(p), -w \in A(p)\}$ . Aplicando o operador contínuo  $J_{\lambda B}$  a  $\{z^k\}$  e usando (Y1), obtemos  $p^k \rightarrow p^*$  e  $w^k \rightarrow w^*$ , onde  $w^* \in B(p^*)$  e  $p^* + \lambda w^* = z^*$ . Ao reorganizar a fórmula de atualização do multiplicador, temos

$$(p^{k+1} - p^k) + \lambda(w^{k+1} - w^k) = \lambda\rho_k(Mx^{k+1} - w^k).$$

Tomando limite e usando que  $0 < \rho_k \leq 2$ , obtemos que  $(Mx^{k+1} - w^k) \rightarrow 0$ , portanto  $Mx^k \rightarrow w^*$ . Como  $M$  tem posto completo,  $x^k \rightarrow x^*$ , onde  $x^*$  é tal que  $Mx^* = w^*$ . Temos, portanto,  $(p^*, w^*) = (p^*, Mx^*) \in B = \partial g^*$ , e assim  $(Mx^*, p^*) \in \partial g$ . Agora, também temos que  $-M^\top \bar{p}^k \in \partial f(\bar{x}^k)$ , ou, equivalentemente,  $(-M^\top \bar{p}^k, \bar{x}^k) \in \partial f$ , para todo  $k$ . Usando

$$0 \leq \|q^k - \bar{p}^k\| = \|p^k + \lambda(Mx^{k+1} - z^k) - \bar{p}^k\| \leq \lambda\|M\|\mu_k \rightarrow 0,$$

temos passando o limite que  $\bar{p}^k \rightarrow p^*$  e, de  $\|x^k - \bar{x}^k\|_{\mu_k} \rightarrow 0$ , também temos  $\bar{x}^k \rightarrow x^*$  portanto,  $x^* \in \partial f(M^\top p^*)$  pela propriedade de limite para operadores monótonos maximais (por exemplo, [22]). Concluimos que  $(x^*, p^*)$  é um par de Kuhn-Tucker de (P) e obtemos a convergência indicada de  $\{x^k\}$ ,  $\{p^k\}$  e  $\{w^k\}$ .

Agora, suponha que (D) não tenha solução ideal. Então,  $\text{zer}(A+B)$  deve estar vazio e, pelo Teorema 4.4,  $\{z^k\}$  deve ser uma sequência ilimitada, pela definição de  $\{z^k\}$ ,  $\{p^k\}$  ou  $\{w^k\}$  deve ser ilimitado.  $\square$

A convergência do método de direção alternada dos multiplicadores com fatores aproximados de minimização ou relaxamento era anteriormente desconhecida e, devido às complexidades das provas de convergência, teria sido difícil derivar dos primeiros princípios. Assim, o Teorema 4.4 demonstra o poder do arcabouço teórico do operador monótono.

Em uma sub-rotina de otimização iterativa prática, pode ser difícil determinar se a condição

$$\left\| x^{k+1} - \arg \min_x \{f(x) - \langle p^k, Mx \rangle + \frac{1}{2}\lambda\|Mx - w^k\|^2\} \right\| \leq \mu_k,$$

foi satisfeito. Para critérios de parada mais implementáveis, que, sob a devida suposições, implicam esses tipos de condições, referimos a Rockafellar [63]. Essencialmente, se  $f$  é fortemente convexa, tal condição está implícita em um certo limite no subgradiente de menor magnitude do mínimo e em  $x^{k+1}$ . Assim, para qualquer  $x$  tal que  $\partial_x [f(x) + \langle p^k, Mx \rangle + \frac{1}{2}\lambda \|Mx - w^k\|^2]$  contenha um membro de norma suficientemente pequena, pode-se interromper a minimização e definir  $x^{k+1} = x$ . A idéia é adaptada de uma regra de parada para o método de multiplicadores devido a Kort e Bertsekas [18] (veja também [15, página 329]). Uma discussão semelhante se aplica ao cálculo de  $w^{k+1}$ .

## 5.3 Problema de viabilidade convexa

Nesta seção, abordaremos o problema da viabilidade convexa por meio do método da decomposição de Douglas-Rachford. Para isso, apresentaremos os operadores de projeção e refletores e em seguida vamos atrás da relação entre encontrar zero da soma de funções e encontrar um ponto na interseção de conjuntos convexos.

### 5.3.1 Projeção sobre um conjunto convexo

**Definição 5.2.** *Seja  $C \subseteq X$ ,  $x \in X$  e  $c' \in C$ . Então,  $c'$  é a projeção de  $x$  em  $C$  se:*

$$\|x - c'\| \leq \|x - c\|, \quad \forall c \in C.$$

*Em outras palavras,  $c'$  é o ponto em  $C$  mais próximo de  $x$ .*

*O operador  $P_C : X \rightarrow 2^C$  tal que  $x \in X \rightarrow \{c' \in C \mid c' \text{ é a projeção de } x \text{ em } C\}$  é chamado de operador projeção se  $P_C(x) = \{c'\}$ .*

**Definição 5.3.**  *$d_C(x)$  é a função distância entre um ponto  $x \in \mathcal{H}$  e o conjunto  $\emptyset \neq C \subset \mathcal{H}$  dada por:*

$$d_C(x) := \inf_{c' \in C} \|x - c'\|.$$

*e ainda, sejam  $x, y \in \mathcal{H}$  então  $d(x, y)$  é a distancia entre os pontos  $x$  e  $y$ .*

**Lema 5.2.** *Seja  $u$  e  $v$  em  $X$ . Então o seguinte é válido:*

$$\langle u, v \rangle \leq 0 \iff (\forall \alpha \in \mathbb{R}_+) \|u\| \leq \|u - \alpha v\| \iff (\forall \alpha \in [0, 1]) \|u\| \leq \|u - \alpha v\|.$$

*Demonstração.* observe que:

$$\|u - \alpha v\|^2 - \|u\|^2 = \alpha(\alpha\|v\|^2 - 2\langle u, v \rangle), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \quad (5.4)$$

Portanto, as implicações seguem imediatamente. Por outro lado, se para todo  $\alpha \in ]0, 1]$ ,  $\|u\| \leq \|u - \alpha v\|$ , então (5.4) implica que  $\langle u, v \rangle \leq \frac{\alpha}{2}\|v\|^2$ . Como  $\alpha \rightarrow 0$ , obtemos  $\langle u, v \rangle \leq 0$ .  $\square$

**Teorema 5.2.** *Seja  $C \subset \mathcal{H}$  convexo, fechado e não vazio. Então, para todo  $x \in \mathcal{H}$ , existe e é único um ponto  $c' \in C$  tal que  $\|x - c'\| = d_C(x)$ . Além disso,  $c' = P_C(x)$  é caracterizado por*

$$c' \in C \text{ e } \langle c - c', x - c' \rangle \leq 0, \quad \forall c \in C.$$

*Demonstração.* Fixe  $x \in \mathcal{H}$  e escolha uma sequência  $\{c_n\}$  em  $C$  tal que  $\|x - c_n\| \rightarrow d_C(x)$ . Pela igualdade do paralelogramo temos

$$\begin{aligned} \|c_n - c_m\|^2 &= 2\|c_n - x\|^2 + 2\|c_m - x\|^2 - \|(c_n + c_m) - 2x\|^2 \\ &= 2\|c_n - x\|^2 + 2\|c_m - x\|^2 - 4\left\|\frac{c_n + c_m}{2} - x\right\|^2 \\ &\leq 2\|c_n - x\|^2 + 2\|c_m - x\|^2 - 4(d_C(x))^2. \end{aligned} \quad (5.5)$$

usando  $d_C(x) \leq \left\|x - \frac{c_n + c_m}{2}\right\|$ . Agora fazendo  $n, m \rightarrow \infty$  temos

$$2(d_C(x))^2 + 2(d_C(x))^2 - 4(d_C(x))^2 = 0,$$

portanto  $\{c_n\}$  é de Cauchy e assim converge. Logo,

$$c_n \rightarrow c' \in \mathcal{H}.$$

Como  $\{c_n\} \subset C$  e  $C$  é fechado, então  $c' \in C$ . Agora, como  $c_n \rightarrow c'$  também temos que  $x - c_n \rightarrow x - c'$ , e portanto  $\|x - c_n\| \rightarrow \|x - c'\|$ . Por outro lado,  $\|x - c_n\| \rightarrow d_C(x)$  por suposição. Uma vez que os limites são únicos  $\|x - c'\| = d_C(x)$ , então  $c' \in P_C(x)$ . Isso mostra a existência, agora vamos mostrar que é único.

Consideramos  $c^*$  outro ponto mais próximo em  $P_C(x)$ . Precisamos apenas mostrar que  $c' = c^*$ . Seja  $\{c_n^*\}$  dada por  $c_n^* = \{c', c^*, c', c^*, \dots\}$ , então  $\|x - c_n^*\| = d_C(x)$ . De (5.5) deduzimos que  $\|c' - c^*\|^2 = 0$ , isto é,  $c' = c^*$ .

Agora, vamos provar a caracterização. Escolha  $c \in C$  e defina  $c_\alpha = \alpha c + (1 - \alpha)c' \in C$ , onde  $\alpha \in [0, 1]$ . Então, usando o Lema 5.2 acima com  $u = x - c'$  e  $v = c - c'$ , para todo  $c \in C$  e  $\alpha \in [0, 1]$  obtemos

$$\begin{aligned} \|x - c'\| = d_C(x) &\iff \|x - c'\| \leq \|x - c_\alpha\| = \|(x - c') - \alpha(c - c')\| \\ &\iff \langle x - c', c - c' \rangle \leq 0. \end{aligned}$$

□

**Exemplo 5.1.** (*Conjunto do produto de espaços*) Vamos mostrar que a projeção no conjunto  $C := C_1 \times C_2 \times \dots \times C_n$  é dada por

$$P_C(x_1, x_2, \dots, x_n) = (P_{C_1}(x_1), P_{C_2}(x_2), \dots, P_{C_n}(x_n)).$$

Claramente,  $P_{C_i}(x_i) \in C_i$ , então  $(P_{C_1}(x_1), P_{C_2}(x_2), \dots, P_{C_n}(x_n)) \in C_1 \times C_2 \times \dots \times C_n = C$ . Seja  $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ , com  $c_i \in C_i$ , mostraremos que

$$\langle c - ((P_{C_1}(x_1), \dots, P_{C_n}(x_n)), (x_1, x_2, \dots, x_n) - (P_{C_1}(x_1), \dots, P_{C_n}(x_n))) \rangle \leq 0.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} &\langle (c_1, \dots, c_n) - ((P_{C_1}(x_1), \dots, P_{C_n}(x_n)), (x_1, x_2, \dots, x_n) - (P_{C_1}(x_1), \dots, P_{C_n}(x_n))) \rangle \\ &= \langle (c_1 - P_{C_1}(x_1), \dots, c_n - P_{C_n}(x_n)), (x_1 - P_{C_1}(x_1), \dots, x_n - P_{C_n}(x_n)) \rangle \\ &= \langle c_1 - P_{C_1}(x_1), x_1 - P_{C_1}(x_1) \rangle + \dots + \langle c_n - P_{C_n}(x_n), x_n - P_{C_n}(x_n) \rangle \leq 0. \end{aligned}$$

porque todo termo acima é menor ou igual a 0 pelo Teorema 5.2.

**Exemplo 5.2.** (*Grupo Diagonal*) Vamos mostrar que a projeção no grupo diagonal,  $C := \{(x, x, \dots, x)\} \in X^n$  tal que  $X \subset \mathcal{H}$  é dada por

$$P_C(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}),$$

onde  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$ . Sendo  $C$  um conjunto convexo e fechado, claramente,  $(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) \in C$ . Seja  $c \in C$ , com  $c = (x, x, \dots, x)$  para algum  $x \in X \subset \mathcal{H}$ . Então

$$\begin{aligned}
& \langle c - (\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}), (x_1, x_2, \dots, x_n) - (\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) \rangle \\
&= \langle (x, x, \dots, x) - (\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}), (x_1, x_2, \dots, x_n) - (\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) \rangle \\
&= \langle (x - \bar{x}, \dots, x - \bar{x}), (x_1 - \bar{x}, x_2 - \bar{x}, \dots, x_n - \bar{x}) \rangle \\
&= \langle x - \bar{x}, x_1 - \bar{x} \rangle + \dots + \langle x - \bar{x}, x_n - \bar{x} \rangle \\
&= \langle x - \bar{x}, (x_1 - \bar{x}) + \dots + (x_n - \bar{x}) \rangle \\
&= \langle x - \bar{x}, (x_1 + \dots + x_n) - n\bar{x} \rangle \\
&= \langle x - \bar{x}, n\bar{x} - n\bar{x} \rangle \\
&= \langle x - \bar{x}, 0 \rangle \leq 0.
\end{aligned}$$

A conclusão segue do Teorema 5.2.

**Teorema 5.3.** (Projeção é firmemente não expansiva) Suponha que  $C \subset \mathcal{H}$  é um conjunto não vazio, convexo e fechado então a projeção  $P_C$  em  $C$  é firmemente não expansiva, isto é, para todo  $x, y \in \mathcal{H}$  temos:

$$\|P_C x - P_C y\|^2 \leq \langle x - y, P_C x - P_C y \rangle.$$

*Demonstração.* Do Teorema 5.2, temos que

$$\begin{aligned}
\|P_C x - P_C y\|^2 &= \langle P_C x - P_C y, P_C x - P_C y \rangle \\
&\leq \langle P_C x - P_C y, P_C x - P_C y \rangle + \langle x - P_C x, P_C x - P_C y \rangle \\
&= \langle x - P_C y, P_C x - P_C y \rangle \\
&\leq \langle x - P_C y, P_C x - P_C y \rangle + \langle P_C y - y, P_C x - P_C y \rangle \\
&= \langle x - y, P_C x - P_C y \rangle.
\end{aligned}$$

Então  $P_C$  é firmemente não expansivo. □

**Corolário 5.2.** Suponha  $C \subset \mathcal{H}$  não vazio, fechado e convexo, então  $P_C$  é não expansiva.

*Demonstração.* A prova segue direto pelo Lemma 2.1. □

**Corolário 5.3.** Seja  $C \subset \mathcal{H}$  não vazio, fechado e convexo, então  $P_C$  é o operador resolvente de  $\mathcal{N}_C$ .

*Demonstração.* Queremos mostrar que  $J_{\mathcal{N}_C} = P_C$ . Seja  $\bar{x} \in C$  tal que  $\bar{x} = J_{\mathcal{N}_C}(x)$ , daí  $\bar{x} = (\mathcal{N}_C + I)^{-1}(x)$ , ou ainda,

$$x = \mathcal{N}_C(\bar{x}) + \bar{x} \implies \mathcal{N}_C(\bar{x}) = x - \bar{x}.$$

Pela definição do operador cone normal (2.13) temos que

$$\langle x - \bar{x}, y - \bar{x} \rangle \leq 0; \quad \forall y \in C$$

e pelo Teorema (5.2) obtemos que  $\bar{x} = P_C(x)$ . □

### 5.3.2 O operador refletor

**Definição 5.4.** *Seja  $B \subseteq \mathcal{H}$  não vazio, fechado e convexo. O operador refletor é definido como  $R_B := 2P_B - I$ .*

**Proposição 5.3.** *Seja  $B \subseteq \mathcal{H}$  não vazio, fechado e convexo, então o refletor  $R_B$  é não expansivo.*

*Demonstração.* A demonstração segue diretamente do item (ii) do Lemma 2.1. □

**Proposição 5.4.** *A composição de refletores é não expansivo.*

*Demonstração.* Pela Proposição 5.3, sabemos que o refletor é não expansivo e pela Proposição 2.1 temos que a composição de operadores não expansivos é não expansivo. □

### 5.3.3 O método de Douglas-Rachford e o problema de viabilidade convexa

Aqui, mostraremos a relação entre achar um zero da soma de operadores e o de resolver o problema de viabilidade convexa. Como vimos, o problema de achar zero de operadores se resume em:

**Problema 5.1.** *Sejam  $T_1$  e  $T_2$  operadores em  $\mathcal{H}$  monótonos maximais. O problema de encontrar zero da soma de operadores monótonos maximais é dado por*

$$\text{Encontrar } z \in \mathcal{H} \text{ tal que } 0 \in (T_1 + T_2)(z). \tag{5.6}$$



**Problema 5.2.** *Sejam  $C_1$  e  $C_2$  conjuntos não vazios, convexos e fechados. O problema da viabilidade convexa consiste em*

$$\text{Encontrar } c \in \mathcal{H} \text{ tal que: } c \in C_1 \cap C_2. \quad (5.7)$$

**Observação 5.1.** *Vamos mostrar a equivalência entre os Problemas (5.1) e (5.2). Consideremos o cone normal dos conjuntos  $C_1$  e  $C_2$ , isto é,  $T_i = \mathcal{N}_{C_i}$  para  $i = 1, 2$ , pela Proposição 2.3. Daí basta mostrar que, se*

$$x \in C_i \iff T_i(x) \neq \emptyset \iff 0 \in T_i(x), \quad (5.8)$$

então

$$\bar{x} \text{ resolve (5.7)} \iff 0 \in (T_1 + T_2)(\bar{x}).$$

*De fato, se  $\bar{x}$  é solução de (5.7), então  $\bar{x} \in C_1 \cap C_2$  donde  $\bar{x} \in C_1$ ,  $\bar{x} \in C_2$ . Daí, por (5.8), temos que  $0 \in T_1(\bar{x})$  e  $0 \in T_2(\bar{x})$ . Notemos que  $\bar{x} \in C_1 \cap C_2 = \text{Dom}(\mathcal{N}_{C_1}) \cap \text{Dom}(\mathcal{N}_{C_2}) = \text{Dom}(T_1 + T_2)$ , que resulta*

$$0 \in (T_1 + T_2)(\bar{x}).$$

*Reciprocamente, se  $\bar{x}$  é tal que  $0 \in (T_1 + T_2)(\bar{x})$ , logo  $\bar{x} \in \text{Dom}(T_1)$  e  $\bar{x} \in \text{Dom}(T_2)$ . Daí,  $T_1(\bar{x}) \neq \emptyset$  e  $T_2(\bar{x}) \neq \emptyset$ , e novamente por (5.8), temos que  $\bar{x} \in C_1$  e  $\bar{x} \in C_2$ . Logo,  $\bar{x}$  é solução de (5.7). O que nos dá a equivalência entre o problema (5.6) e (5.7) como queríamos.*

Temos então que achar zero de soma de operadores é equivalente a encontrar um ponto na interseção de conjuntos convexos, ou seja, podemos aplicar o método de Douglas-Rachford para o problema de viabilidade convexa. A seguir, apresentamos explicitamente o método de Douglas-Rachford para o problema de viabilidade convexa.

Dados  $A, B \subset \mathcal{H}$  conjuntos fechados e convexos, o método de Douglas-Rachford para problemas de viabilidade convexa se escreve da seguinte forma:

$$z^{k+1} = T_{A,B}(z^k) = \frac{I + R_B R_A}{2}(z^k).$$

Dessa forma, a sequência  $\{z^k\}$  converge para algum  $z^*$  tal que  $P_A(z^*) \in A \cap B$ , se  $A \cap B \neq \emptyset$ , caso contrário,  $\|z^k\| \rightarrow \infty$ .

**Observação 5.2.** Note que  $T_{A,B}(z^k) = G_{A,B}(z^k)$ . Com efeito,

$$\begin{aligned}
T_{A,B} &= \frac{I + R_B R_A}{2} \\
&= \frac{I + (2P_B - I)(2P_A - I)}{2} \\
&= \frac{I + 4P_B P_A - 2P_B - 2P_A + I}{2} \\
&= \frac{2I + 4P_B P_A - 2P_B - 2P_A}{2} \\
&= 2P_B P_A - P_B - P_A + I \\
&= P_B(2P_A - I) + I - P_A \\
&= G_{A,B}.
\end{aligned}$$

Uma pergunta natural que surge é: e se quisermos a interseção de 3 conjuntos convexos ou mais, como procedemos? A primeira ideia que surge é tomar

$$T_{A,B,C} := \frac{I + R_C R_B R_A}{2}.$$

Para conjuntos fechados e convexos, como  $T_{A,B}$ , a aplicação  $T_{A,B,C}$  é firmemente não expansiva e tem pelo menos um ponto fixo fornecido  $A \cap B \cap C \neq \emptyset$ . Segue de Opial [53, Teorema 1] que  $\{z^k\}$  converge fracamente para um ponto fixo. No entanto, as tentativas de obter um ponto na interseção utilizando o referido ponto fixo não tiveram, até o momento, êxito. A seguir, ilustramos esse fato com um exemplo onde é falho para três conjuntos.

**Exemplo 5.3.** Considere os subespaços bidimensionais  $A, B, C \subset \mathbb{R}^2$  definidos por

$$\begin{aligned}
A &:= \{\lambda(0, 1) : \lambda \in \mathbb{R}\} \\
B &:= \{\lambda(\sqrt{3}, 1) : \lambda \in \mathbb{R}\} \\
C &:= \{\lambda(-\sqrt{3}, 1) : \lambda \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

É fácil notar que  $A \cap B \cap C = \{(0, 0)\}$ . Seja  $x_0 = (-\sqrt{3}, -1)$ , note que  $x_0 \in \text{Fix}(R_C R_B R_A)$ , pois, dadas as projeções e refletores abaixo,

$$\begin{aligned}
P_A(x) &:= \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} d_A(x) \\
P_B(x) &:= \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} d_B(x) \\
P_C(x) &:= \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} d_C(x).
\end{aligned}$$

$$R_A(x) := 2 \cdot \left( \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} d_A(x) \right) - 1;$$

$$R_B(x) := 2 \cdot \left( \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} d_B(x) \right) - 1;$$

$$R_C(x) := 2 \cdot \left( \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} d_C(x) \right) - 1..$$

portanteo,

$$\begin{aligned} R_C R_B R_A(x_0) &= R_C R_B(R_A(x_0)) \\ &= R_C R_B((\sqrt{3}, -1)) \\ &= R_C(R_B(\sqrt{3}, -1)) \\ &= R_C((0, 2)) \\ &= (-\sqrt{3}, -1) \\ &= x_0. \end{aligned}$$

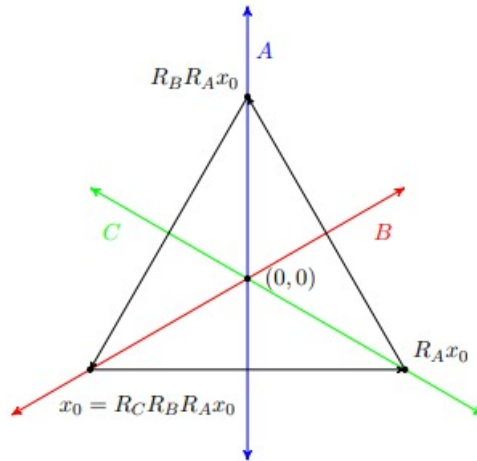


Figura 5.1: Trajetória do Exemplo 5.3.

E ainda,  $x_0 \in \text{Fix} \left( \frac{I + R_C R_B R_A}{2} \right)$ , pois

$$\begin{aligned} \left( \frac{I + R_C R_B R_A}{2} \right) (x_0) &= \frac{I(x_0) + R_C R_B R_A(x_0)}{2} \\ &= \frac{x_0 + x_0}{2} \\ &= x_0. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Por outro lado,  $P_A(x_0) = (0, -1)$ ,  $P_B(x_0) = (-\sqrt{3}, -1)$  e  $P_C(x_0) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \notin A \cap B \cap C$ .

A seguir, discutimos brevemente o problema de viabilidade convexa para  $n$  conjuntos.

**Problema 5.3.** *Sejam  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , conjuntos não vazios, convexos e fechados de  $\mathcal{H}$ . O problema de viabilidade convexa é dado por*

$$\text{encontrar } \bar{x} \in \mathcal{H} \text{ tal que } \bar{x} \in \bigcap_{i=1}^n C_i.$$

Aqui podemos nos perguntar, podemos aplicar o método de Douglas-Rachford para  $n$  conjuntos? E a resposta é sim, existem muitas generalizações possíveis da iteração de Douglas-Rachford clássica. Aqui usaremos a formulação de espaço produto de Pierra [56, 57]. Para tanto, considere o espaço produto de Hilbert  $\mathcal{H}^r$  e defina os conjuntos

$$C := \prod_{i=1}^r C_i \quad \text{e} \quad D := \{(x, x, \dots, x) \in \mathcal{H}^r ; x \in \mathcal{H}\}.$$

Embora o conjunto  $D$ , às vezes chamado de diagonal, seja sempre um subespaço fechado, as propriedades de  $C$  são amplamente herdadas. Por exemplo,  $C$  é não vazio se  $C_1, \dots, C_r$  não são disjuntos e se  $C_1, \dots, C_r$  são fechados e convexos, então  $C$  também o é. Assim, o problema de viabilidade pode ser reformulado como um problema de dois conjuntos, uma vez que

$$x \in \bigcap_{i=1}^r C_i \iff (x, x, \dots, x) \in C \cap D.$$

Além disso, conhecendo as projeções em  $C_1, \dots, C_r$ , as projeções em  $C$  e  $D$  podem ser facilmente calculadas. Como vimos nos Exemplos 5.1 e 5.2, tais projeções são dadas por

$$P_C(x) = \prod_{i=1}^r P_{C_i}(x_i) \quad \text{e} \quad P_D(x) = \left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r x_i\right)^r.$$

# Capítulo 6

## Terminação finita: métodos do ponto proximal e Douglas-Rachford

A natureza do operador de decomposição permite que muitos resultados relacionados ao algoritmo de ponto proximal sejam transferidos para a decomposição de Douglas-Rachford e seus casos especiais. Nesta seção, apresentamos brevemente um resultado negativo que sugere que um aspecto da teoria do ponto proximal, o da terminação finita, será difícil ou impossível de transportar. Nos concentramos em uma certa propriedade de “escada” de operadores monótonos.

**Definição 6.1.** *Um operador monótono  $T$  em um espaço de Hilbert é dito ser escada (staircase) se para todo  $y \in \text{im}T$ , existe algum  $\delta(y) > 0$  tal que*

$$w \in T(x), \|w - y\| < \delta(y) \implies y \in T(x).$$

*Ainda,  $T$  é chamado localmente escada em zero (locally staircase) se  $0 \in \text{im}T$  e essa condição é válida para o caso único  $y = 0$ , ou seja, existe  $\delta(0) > 0$  tal que*

$$w \in T(x), \|w\| < \delta(0) \implies 0 \in T(x).$$

O termo “escada” é usado porque um operador em  $\mathbb{R}$  com a propriedade escada tem um gráfico que se assemelha a um lance de escada; veja a Figura 6.1. A idéia de um operador de escada está intimamente relacionada à chamada propriedade “diff-max” das funções convexas [29, 26, 27].

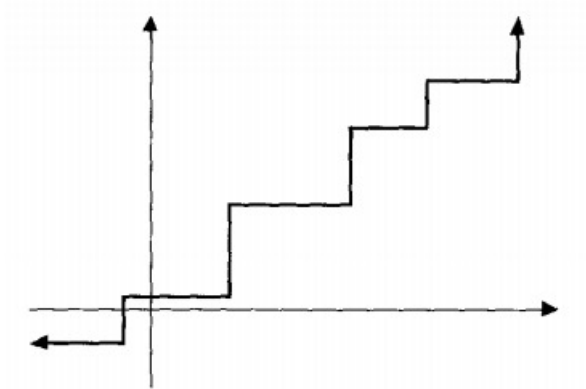


Figura 6.1: Uma função escada em  $\mathbb{R}$

**Definição 6.2.** *Uma função convexa  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  é diff-max se e somente se  $(\partial h)^{-1}$  for escada.*

**Observação 6.1.** *Em geral, se a função convexa fechada  $h$  é poliedral em  $\mathbb{R}^n$ , tanto  $\partial h$  como  $(\partial h)^{-1} = \partial h^*$  são escadas [27].*

Luque [47], baseando-se em observações anteriores de Rockafellar [63], provou que o algoritmo de ponto proximal exato, quando cada iteração é calculada de forma exata, converge finitamente quando aplicado a qualquer operador  $T$  que seja localmente uma escada em zero. A prova é bem simples: suponha que temos  $z^{k+1} = (I + \lambda T)^{-1}(z^k)$  para todo  $k \geq 0$ ,  $\lambda$  fixo. Então  $(z^{k+1} - z^k)/\lambda \in T(z^k)$  para todo  $k \geq 0$ . Para  $k$  suficientemente grande, temos  $\|(z^{k+1} - z^k)/\lambda\| < \delta(0)$ , implicando  $0 \in T(z^k)$  e  $z^{k+1} = z^k$ . Essa linha de análise básica remonta aos resultados de terminação finita de [16] para o método de multiplicadores.

Agora mostraremos, no entanto, que  $S_{\lambda,A,B}$  não precisa ser escada, mesmo que  $A$  e  $B$  sejam escada.

**Teorema 6.1.** *Existem operadores monótonos maximais  $A$  e  $B$  em  $\mathbb{R}^n$ , ambos escada, tal que  $S_{\lambda,A,B}$  não é escada para uma escolha de  $\lambda > 0$ . Com isso, o algoritmo exato do ponto proximal, sem relaxamento excessivo ou insuficiente, não converge finitamente quando aplicado à  $S_{\lambda,A,B}$ .*

*Demonstração.* Precisamos considerar apenas o caso de  $\mathbb{R}^2$  e operadores da forma  $N_V = V \times V^\perp$ , em que  $V$  é um subespaço linear, que foi visto como sendo monótono maximal

na Seção 5.1. Todos os operadores dessa forma são escadas (na verdade, para qualquer  $y \in V^\perp, \delta(y)$  podem ser considerados arbitrariamente grandes). Defina os seguintes subespaços lineares do  $\mathbb{R}^2$

$$W = \{(x_1, x_2) | x_2 = 0\} = \{(x_1, 0) | x_1 \in \mathbb{R}\}$$

$$U = \{(x_1, x_2) | x_2 = x_1\} = \{(x, x) | x \in \mathbb{R}\}.$$

Então,

$$W^\perp = \{(x_1, x_2) | x_1 = 0\} = \{(0, x_2) | x_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$U^\perp = \{(x_1, x_2) | x_2 = -x_1\} = \{(-z, z) | z \in \mathbb{R}\}.$$

Após a discussão de inversos parciais na Seção 5.1,

$$\begin{aligned} S_{1, N_W, N_U} &= \{(x_W + y_{W^\perp}, y_W + x_{W^\perp}) | x \in U, y \in U^\perp\} \\ &= \{((x, z), (-z, x)) | x, y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Agora,  $(0, 0) \in S_{1, N_W, N_U}((x_1, x_2))$  se, e somente se,  $x_1 = x_2 = 0$ . Assim,  $S_{1, N_W, N_U}$  não é uma escada local em zero e não pode ser uma escada.

Seja  $S = S_{1, N_W, N_U}$ . Então  $J_S = (I + S)^{-1} = \{((x - z, x + z), (x, z)) | x, z \in \mathbb{R}\}$ , ou ainda, por mudança de variáveis, fazendo  $a = x - z$  e  $b = x + z$ ,

$$J_S = \{(a, b), \frac{1}{2}(a + b, -a + b)\} | a, b \in \mathbb{R}.$$

Assim, a aplicação do operador  $J_s$  é equivalente à multiplicação (à esquerda) pela matriz

$$J = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para obter convergência finita da iteração  $z^{k+1} = J_S(z^k)$  a partir de qualquer ponto inicial  $z^0$  diferente de  $(0, 0)$ , seria necessário que  $J$  fosse singular, o que não é.  $\square$

Lefebvre e Michelot [44] apresentam um resultado positivo leve em relação a inversos parciais (e, portanto, à decomposição de Douglas-Rachford), mas sob suposições bastante rigorosas. Embora a teoria da convergência finita de Luque possa ser difícil de usar no contexto da decomposição de Douglas-Rachford, suas técnicas de taxa de convergência tem aplicação, tendo sido usadas no contexto de inversos parciais; veja [67, 69, 70].

# Capítulo 7

## Experimentos numéricos

Nesta seção serão apresentados algumas aplicações simples do algoritmo de Douglas-Rachford. Todas as aplicações foram feitas em um computador com as seguintes especificações: *Intel Core i5-8250u 1.6GHz, NVIDIA GeForce MX130 com 2GB VRAM, Memória 8GB DDR4 e 1TB de HDD*. As Aplicações I e II foram desenvolvidas usando MATLAB e a Aplicação III foi feita em *PHP* baseado em Schaad [66].

A primeira aplicação tem como objetivo encontrar o zero da soma de dois operadores monótonos maximais. A segunda aplicação veremos o algoritmo encontrando um ponto na interseção de três conjuntos convexos no  $\mathbb{R}^2$ . E a terceira aplicação, por sua vez, é a tentativa de resolver um problema de viabilidade não convexa.

O critério de parada para as Aplicações I e II será dado por

$$\|z^{k+1} - z^k\| < \varepsilon,$$

onde  $\varepsilon = 10^{-7}$  e como valor inicial usaremos um vetor  $z^0$  tomado de forma aleatória com coordenadas variando entre  $-100$  e  $100$ . Já para a aplicação III, o critério de parada será não ter mudança nas últimas 10 iterações.

### 7.1 Aplicação I

Aqui buscaremos por meio do algoritmo resolver o problema que deu origem aos estudos que é encontrar um zero de um operador  $T$  escrito como soma de dois operadores. Neste exemplo tomaremos  $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$  dado por  $T(x) = \partial f(x) + \partial g(x)$ , onde  $f(x) =$



$\|2x + 4^n\|$  e  $g(x) = \|x\|$ , onde  $4^n = (4, \dots, 4) \in \mathbb{R}^n$ . O problema acima é equivalente a encontrar o mínimo da função  $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\Psi(x) = \|2x + 4^n\| + \|x\|$ .

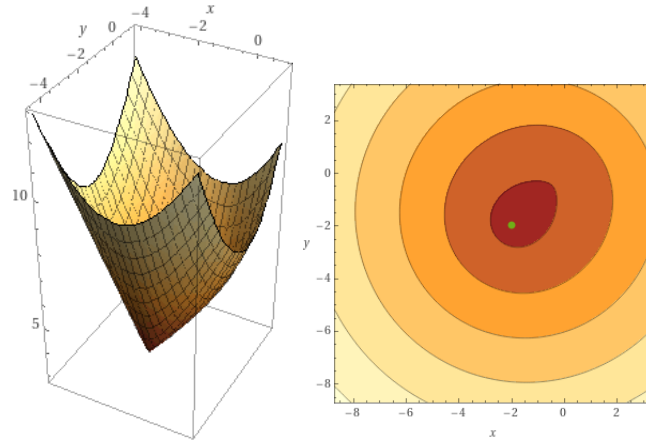


Figura 7.1: Gráfico e curvas de níveis da função  $\Psi$ .

Consideremos

$$G_{A,B} = J_A(2J_B - I) + I - J_B,$$

onde  $J_A = (I + A)^{-1}$  e  $J_B = (I + B)^{-1}$  são os resolventes dos operadores  $A$  e  $B$  respectivamente. As iterações para encontrar o zero de  $T = A + B$  são dadas por

$$z^{k+1} = G_{A,B}(z^k),$$

onde  $A = \partial f(x)$  e  $B = \partial g(x)$ . Ambos são operadores monótonos maximais e seus respectivos operadores resolventes são dados por  $J_A(z) := \arg \min_{u \in \mathbb{R}^n} \{f(u) + \frac{1}{2}\|z + u\|^2\}$  e  $J_B(z) := \arg \min_{u \in \mathbb{R}^n} \{g(u) - \frac{1}{2}\|z - u\|^2\}$ . Em seguida, aplicamos o resolvente  $J_B$  ao limite da sequência  $\{z^k\}$  para obtemos o resultado.

A seguir, comparamos os resultados do método de Douglas-Rachford (MDR) com o método do ponto proximal (MPP) aplicado diretamente à função  $\Psi$ , ou seja, tomamos

$$z^{k+1} = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \{\Psi(x) + \lambda_k \|x - z^k\|^2\}.$$

Consideramos os dois métodos partindo do mesmo ponto inicial e no MPP tomamos diferentes valores para  $\lambda_k$  porém sempre fixo em todas iteradas e usamos a rotina do MATLAB "fminsearch" para resolver os subproblemas com "optimset('TolX',1e-7,'TolFun,1e-7)". Nos dois métodos, os pontos em que as funções não são diferenciáveis o subgradiente foi tomado aleatório no intervalo dado.

$x_n^0$	Ponto inicial
$x_2^0$	(58.4415, 91.8985)
$x_5^0$	(31.1481, -92.8577, 69.8259, 86.7986, 35.7470)
$x_7^0$	(-44.6154, -90.7657, -80.5736, 64.6916, 38.9657, -36.5801, 90.0444)

Tabela 7.1: Pontos iniciais em cada dimensão.

	Dimensão	$x^0$	k	CPU time	$\ x^{k+1} - x^k\ $	$x^*$
MDR	$n = 2$	$x_2^0$	52	0.37761	$3.6886 * 10^{-8}$	(-2, -2)
	$n = 5$	$x_5^0$	58	1.6728	$9.6116 * 10^{-8}$	(-2, -2, -2, -2, -2)
	$n = 7$	$x_7^0$	72	4.154	$9.2388 * 10^{-8}$	(-2, -2, -2, -2, -2, -2, -2)
MPP ( $\lambda = 0.1$ )	$n = 2$	$x_2^0$	10	0.024193	$4.8972 * 10^{-8}$	(-2, -2)
	$n = 5$	$x_5^0$	13	0.091282	0	(-2, -2, -2, -2, -2)
	$n = 7$	$x_7^0$	14	0.13912	0	(-2, -2, -2, -2, -2, -2, -2)
MPP ( $\lambda = 0.5$ )	$n = 2$	$x_2^0$	41	0.07863	0	(-2, -2)
	$n = 5$	$x_5^0$	56	0.36579	$5.7818 * 10^{-8}$	(-2, -2, -2, -2, -2)
	$n = 7$	$x_7^0$	65	0.60751	0	(-2, -2, -2, -2, -2, -2, -2)
MPP ( $\lambda = 0.8$ )	$n = 2$	$x_2^0$	66	0.12906	0	(-2, -2)
	$n = 5$	$x_5^0$	88	0.48808	$8.5459 * 10^{-8}$	(-2, -2, -2, -2, -2)
	$n = 7$	$x_7^0$	100	0.88836	$8.1354 * 10^{-8}$	(-2, -2, -2, -2, -2, -2, -2)

Tabela 7.2: Método de Douglas-Rachford  $\times$  método do ponto proximal.

Por uma questão de organização os resultados são apresentados em duas tabelas: a Tabela 7.1 é formada pelos pontos iniciais em cada dimensão e a Tabela 7.2 apresenta os resultados, onde a primeira coluna denotamos a dimensão  $n$  do espaço, na segunda coluna o ponto inicial aleatório  $x^0 \in [-100, 100]^n$ ,  $k$  denota a quantidade de iterações até o método parar, tempo de CPU denota o tempo em segundos até o método parar, o valor  $\|x^{k+1} - x^k\|$  obtido nas duas últimas iterações e  $x^*$  ponto retornado pelos métodos.

Observa-se que o método do ponto proximal tem desempenho influenciado pelo parâmetro  $\lambda_k$  e que o método de Douglas-Rachford tem desempenho computacional em número de iterações melhor que o método do ponto proximal no caso  $\lambda_k = 0.8$  para esse exemplo. Em tempo de CPU o método do ponto proximal obteve melhor desempenho em todas as instancias.

## 7.2 Aplicação II

Essa aplicação foi contextualizado no Exemplo 5.3. Considere os subespaços bidimensionais  $A$ ,  $B$ ,  $C \subset \mathbb{R}^2$  definidos por

$$\begin{aligned} A &:= \{\lambda(0, 1) : \lambda \in \mathbb{R}\} \\ B &:= \{\lambda(\sqrt{3}, 1) : \lambda \in \mathbb{R}\} \\ C &:= \{\lambda(-\sqrt{3}, 1) : \lambda \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Tomemos seus respectivos operadores projeções que são dados por

$$\begin{aligned} P_A(x, y) &:= (0, y) \\ P_B(x, y) &:= \left( \frac{3x + \sqrt{3}y}{4}, \frac{\sqrt{3}x + y}{4} \right) \\ P_C(x, y) &:= \left( \frac{3x - \sqrt{3}y}{4}, \frac{-\sqrt{3}x + y}{4} \right). \end{aligned}$$

Aqui usaremos a formulação de espaço produto de (Pierra [56], [57]). Daí os operador  $C$  e  $D$  serão dados por

$$\begin{aligned} C &:= A \times B \times C \\ D &:= (z, z, z) ; z = (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

As projeções de  $C$  e  $D$  foram descritas nos Exemplos 5.1 e 5.2, e são dadas por

$$\begin{aligned} P_C &:= P_A \times P_B \times P_C, \\ P_D &:= (\bar{z}, \bar{z}, \bar{z}) ; \bar{z} = \frac{1}{n} \sum z_i. \end{aligned}$$

as iterações aqui são dadas por  $z^{k+1} = T(z^k)$ , onde

$$T(z^k) = \left( \frac{I + R_C R_D}{2} \right) (z^k),$$

com

$$\begin{aligned} R_C(z) &= (2P_C - I)(z), \\ R_D(z) &= (2P_D - I)(z), \end{aligned}$$

e em seguida aplicamos a projeção  $P_D$  ao limite da sequência  $\{z^k\}$  e obtemos o resultado.

Aplicando o algoritmo de Douglas-Rachford obtemos a Tabela 7.3.

A Figura 7.2 mostra a convergência do método, onde os pontos azuis representam as aproximações do conjunto  $A$  para a solução, os pontos vermelhos representam as aproximações do conjunto  $B$  para a solução e os pontos amarelos representam as aproximações do conjunto  $C$  para a solução, e o ponto preto é o ponto inicial tomado.

Ponto inicial	Nº de iteradas	Ponto limite
(64.6916 , 38.9657)	61	(-0.00000006025 , -0.00000000000)
(-36.5801, 90.0444)	62	(0.00000001703, 0.00000004193)
(-93.1108, -12.2511)	62	( 0.00000004336 , -0.00000000570)
(-23.6883, 53.1034)	60	(0.00000002206 , -0.00000004946)

Tabela 7.3: Problema de viabilidade convexa para encontrar  $x \in A \cap B \cap C$ .

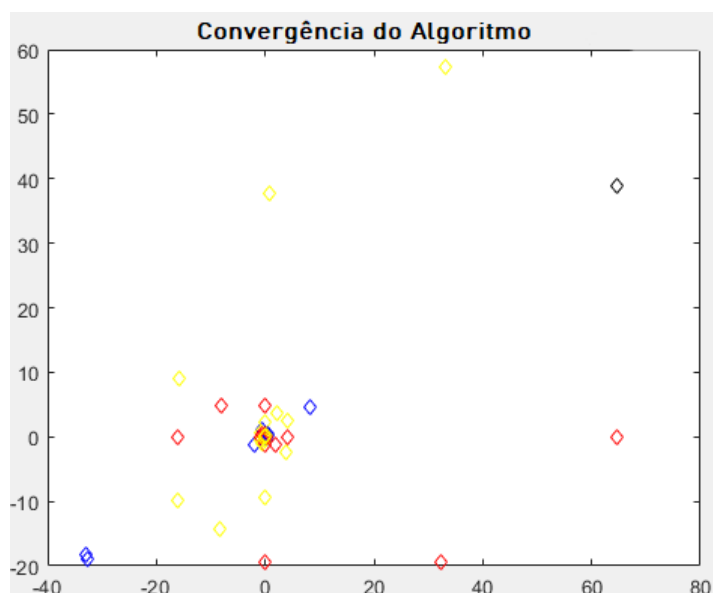


Figura 7.2: Iteradas do método de DR, para ponto inicial  $x = (64.6916, 38.9657)$ .

### 7.3 Aplicação III - Sudoku

Sudoku significa literalmente “número único”. Foi derivado da frase japonesa “Suuji wa dokushin ni kagiru”. Esta frase é traduzida como “os números devem ocorrer apenas uma vez” ou “os números devem ser únicos”. Sudoku é um quebra-cabeça de colocação de

números baseado em lógica. O objetivo do Sudoku é preencher uma grade  $9 \times 9$  de modo que cada coluna, cada linha e cada uma das nove caixas  $3 \times 3$  contenha os dígitos de 1 a 9, apenas uma vez cada. Sudoku foi inventado por um arquiteto americano chamado Howard Garns em 1979 (ele o chamou de “lugar numérico”). Sudoku agora é publicado e registrado por Nikoli do Japão e recebeu seu nome em 1986.

A modelagem matemática do Sudoku é um caso de viabilidade não convexa. Apesar do fato de que a convergência do algoritmo geralmente só é garantida quando aplicado a conjuntos convexos, o método tem sido empregado com sucesso para resolver uma variedade de problemas de otimização não convexa, especialmente aqueles de natureza combinatória. Exemplos de tais aplicações incluem preenchimento de matriz ([1]), determinação de conformação de proteína ([21]), recuperação de fase e bit ([30]; [31], [9]), equações diferenciais ([43]), coloração de grafos ([5]), projetos combinatórios ([6]) e uma ampla variedade de problemas NP-difíceis, como Sudoku ou 3-Satisfabilidade ([32], [66]). A teoria não convexa para o algoritmo de Douglas-Rachford é muito menos desenvolvida. Existem poucos resultados que explicam por quê o algoritmo funciona e menos ainda que justifiquem seu bom desempenho global. O primeiro cenário não convexo foi considerado por Borwein e Sims ([20]), que estabeleceram a convergência local do método próximo a cada um dos pontos de interseção de uma linha e uma esfera em um espaço euclidiano. Uma descrição explícita das regiões de convergência foi posteriormente fornecida por Aragón e Borwein ([4]). Foi finalmente Benoist ([14]) que, por meio da construção de uma função de Lyapunov, estabeleceu a convergência do algoritmo para todo ponto de partida que não se encontrasse no hiperplano de simetria. As funções de Lyapunov são uma ferramenta poderosa de inclusões de diferenças cuja existência garante a convergência da iteração. Ao usar essa abordagem, Dao e Tam ([24]) provaram a convergência global do algoritmo DR para encontrar o zero de uma função, com aplicações para vários problemas de viabilidade não convexa. De uma perspectiva diferente, Aragón et al. ([3]) provou convergência global para o caso de um semi-espaço e um conjunto finito. A convergência local do algoritmo (ou seja, convergência para pontos de partida suficientemente próximos de uma solução) em configurações não convexas foi estabelecida, por exemplo, para o caso de uma linha e uma elipse ou uma esfera ([19]), e para união de conjuntos convexos ([13]; [71]; [72]). Outros resultados relativos à convergência local são geralmente obtidos exigindo propriedades de regularidade dos conjuntos e/ou da sua

interseção, ver, por exemplo, Bauschke e Dao [12], Hesse e Luke [39], Phan [40].

### 7.3.1 Modelando o Sudoku

Começamos considerando o Sudoku como uma matriz inteira  $9 \times 9$  e em cada célula como um poço de elevador, onde o número inteiro da célula é o piso.

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Figura 7.3: Exemplo de Sudoku.

Assim, se o número da célula for, por exemplo, 3 temos  $0,0,1,0,0,0,0,0,0$ , ou seja, no terceiro andar colocamos o número 1 e nos demais andares o número 0. Se fizermos isso para cada célula, adicionaremos outra dimensão à nossa matriz  $9 \times 9$  tendo agora um cubo  $9 \times 9 \times 9$  como na Figura 7.4. Definimos todas as entradas em branco como 1, mas a posição inicial não importa. Seja  $Q$  um cubo em um espaço  $X$  descrito por

$$Q(i, j, k), \text{ onde } i, j, k \subseteq \{1, \dots, 9\}.$$

Portanto, um eixo de elevador é  $Q(i, j, :)$  (ou seja, a terceira componente é livre usando a notação do MATLAB). Nosso objetivo é colocar vetores de unidades em cada poço do elevador. Nosso espaço  $X = \mathbb{R}^{9^3}$  ou  $X = R^{729}$ . Agora descrevemos nossas restrições.

### 7.3.2 Restrições

#### Corredores norte-sul

Cada célula de cada coluna não deve repetir nenhum dos números de 1 a 9. Vamos chamar esses corredores norte-sul, conforme Figura 7.5. Em cada corredor, apenas é

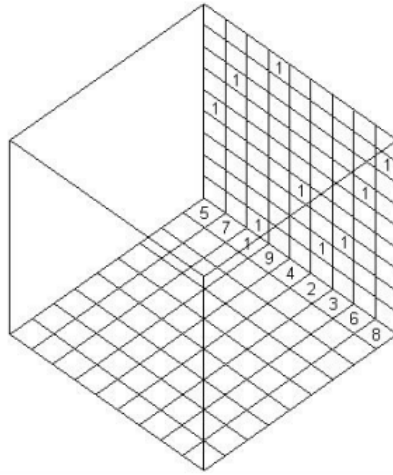


Figura 7.4: Sudoku em formato de elevador.

permitido um 1 e o restante é zeros. Existem 81 corredores Norte-Sul, 9 por andar. Portanto, nossa restrição se torna

$$C_1 = \left\{ Q \in \mathbb{R}^{9^3} \mid Q(i, :, k) \text{ é um vetor unitário padrão } \forall i, k \right\}.$$

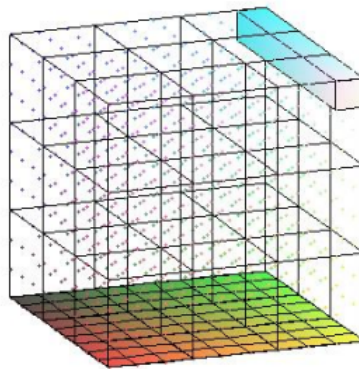


Figura 7.5: corredores norte-sul.

### Corredores leste-oeste

Cada célula de cada linha não deve repetir nenhum dos números de 1 a 9. Vamos chamar esses corredores leste-oeste. Em cada corredor, apenas é permitido um 1 e o restante é zeros. Existem 81 corredores leste-oeste, 9 por andar. Portanto, nossa restrição

se torna

$$C_2 = \left\{ \mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{9^3} \mid \mathcal{Q}(:, j, k) \text{ é um vetor unitário padrão } \forall j, k \right\}.$$

### Sala de Reuniões

Cada quadrado  $3 \times 3$  em cada andar não deve repetir nenhum dos números de 1 a 9; chamamos essas de salas de reunião. Em cada sala de reunião, é permitido no máximo um 1, o restante é zeros. Existem 81 salas de reunião, 9 por andar. Definimos o seguinte

$$E = \left\{ A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \text{Todas as entradas são zeros, exceto uma} \right\},$$

$J = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9\}\}$  e para todo  $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{9^3}$ ,  $I_1 \in J$ ,  $I_2 \in J$  e  $k \in \{1, \dots, 9\}$ . Assim, defina

$$M_{I_1, I_2, k}(\mathcal{Q}) = \left\{ A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid A_{i \bmod 3, j \bmod 3} = \mathcal{Q}(i, j, k) \quad \forall i \in I_1, \forall j \in I_2 \right\}.$$

Portanto, nosso conjunto de restrições é

$$C_3 = \left\{ \mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{9^3} \mid \forall k, \forall I_1 \in J, \forall I_2 \in J, M_{I_1, I_2, k}(\mathcal{Q}) \in E \right\}.$$

A restrição  $C_3$  está nos dizendo que em cada "sala de reunião" do cubo  $9 \times 9 \times 9$  só pode ter uma célula contendo 1, e as demais células da sala devem conter 0's. Ainda sobre a "sala de reuniões", ela está definida de forma que a sala fique sempre nas posições  $I_1 \times I_2$  onde  $I_1, I_2 \in J$ . Mais especificamente tomemos dois exemplos, tomemos  $I_1 = \{4, 5, 6\}$  e  $I_2 = \{4, 5, 6\}$  no primeiro exemplo e  $I_1 = \{1, 2, 3\}$ ,  $I_2 = \{7, 8, 9\}$  no segundo exemplo, como mostra a figura 7.6

	3			7				
6			1	5				
							6	
8			6					3
				3				
7								
	6						8	
			4	1				5
								7

	3			7				
6			1	5				
							6	
8			6					3
				3				
7								
	6						8	
			4	1				5
								7

Figura 7.6: Exemplo 1 e 2 da sala de reuniões.



## Dados *a priori* do Sudoku

Algumas vezes em um Sudoku alguns dados são fornecidos *a priori* e com isso são fixos. Chamamos isso de restrição  $C_4$  que basicamente é para fixar os valores dados no sudoku inicial. Esse é o conjunto de todos os cubos  $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{9^3}$ , de modo que se a entrada  $(i, j)$  for prescrita e igual a  $\gamma_{i,j}$  (aqui  $\gamma_{i,j}$  nada mais é do que um elemento no sudoku inicial dado, ou seja, um valor fixo que não pode ser mudado), então  $\mathcal{Q}(i, j, :)$  será igual ao vetor da unidade  $\gamma_{i,j}$ . Caso contrário,  $\mathcal{Q}(i, j, :)$  é qualquer vetor de unidade.

### 7.3.3 Iterações

Considere

$$T = \frac{I + R_A R_B}{2}, \quad (7.1)$$

onde  $R_A$  e  $R_B$  são refletores em seus respectivos conjuntos. A solução para o nosso problema de Sudoku está em  $C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4$ . Temos quatro restrições e nosso algoritmo pode lidar apenas com duas. Usaremos o espaço do produto e a diagonal, que definimos anteriormente. Trabalhamos no espaço de produtos Hilbert  $X \times X \times X \times X$  lembrando que  $X = \mathbb{R}^{9^3}$ . Assim, considere

$$C = C_1 \times C_2 \times C_3 \times C_4 = \{(c_1, c_2, c_3, c_4) \mid c_i \in C_i\} \subseteq X^4$$

e a diagonal

$$\Delta = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 = x_2 = x_3 = x_4 \in X\},$$

então

$$\Delta \cap C = \{(c_1, c_2, c_3, c_4) \mid c_1 = c_2 = c_3 = c_4, c_i \in C_i\}.$$

Nossa solução exclusiva (supondo um quebra-cabeça de Sudoku bem posicionado) está na interseção das 4 restrições. Logo,

$$P_\Delta(x_1, x_2, x_3, x_4) = (y, y, y, y), \quad \text{onde } y = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}.$$

A projeção nas restrições, descrita no Exemplo 5.3, é dada por

$$P_C = P_{C_1 \times C_2 \times C_3 \times C_4}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (P_{C_1}x_1, P_{C_2}x_2, P_{C_3}x_3, P_{C_4}x_4).$$

Por fim, definimos os refletores

$$R_C = 2P_C - I \quad \text{e} \quad R_\Delta = 2P_\Delta - I.$$

As iterações são descritas como

$$x_{n+1} = \left( \frac{I + R_C R_\Delta}{2} \right) x_n.$$

Aplicamos o algoritmo de Douglas-Rachford. Agora, escolhemos um cubo da nossa diagonal e convertemos o cubo em uma matriz, projetando-se no vetor unitário mais próximo de cada poço do elevador. A convergência é monitorada da mesma forma.

Deve-se notar que as iterações estão em nosso espaço de cubo e, para visualizá-las em uma matriz  $9 \times 9$  que é Sudoku, precisamos achatar o cubo. Ou seja, pegue o cubo binário  $9 \times 9 \times 9$  e converta-o em uma matriz inteira  $9 \times 9$  convertendo cada eixo do elevador que contém um vetor de unidade padrão no seu número inteiro correspondente; veja a Figura 7.4.

### Implementação do algoritmo

A seguir, apresentamos os resultados para três sudoku's diferentes. No primeiro deles (conforme Figura 7.7), os dados *a priori* foram escolhidos aleatórios. No segundo, (conforme Figura 7.8), escolhemos o sudoku dado em [66]. Finalmente, o terceiro (conforme Figura 7.9) foi retirado do site <https://sudoku.com/pt/expert/> escolhido um de nível *expert*. Os resultados de cada sudoku são dados na Tabela 7.4. Em todos os casos, o tempo necessário foi muito pequeno.

Sudoku	Quantidade de dados <i>a priori</i>	Número de iterações
1	10	151
2	17	500
3	22	504

Tabela 7.4: Algoritmo de Douglas-Rachford para resolver sudoku.

					1			
			9					
		3					6	
								2
5				7				
					8			
								3
		4						

6	5	4	2	8	1	9	7	3
7	1	8	9	3	6	2	5	4
2	9	3	5	4	7	1	6	8
4	7	6	8	1	5	3	9	2
5	2	9	3	7	4	6	8	1
3	8	1	6	2	9	7	4	5
9	3	7	1	5	8	4	2	6
1	6	5	4	9	2	8	3	7
8	4	2	7	6	3	5	1	9

Figura 7.7: Sudoku 1: proposto e resolvido pelo método de Douglas-Rachford.

			7					
1								
			4	3		2		
								6
			5		9			
						4	1	8
				8	1			
		2						5
		4				3		

2	6	4	7	1	5	8	3	9
1	3	7	8	9	2	6	4	5
5	9	8	4	3	6	2	7	1
4	2	3	1	7	8	5	9	6
8	1	6	5	4	9	7	2	3
7	5	9	6	2	3	4	1	8
3	7	5	2	8	1	9	6	4
9	8	2	3	6	4	1	5	7
6	4	1	9	5	7	3	8	2

Figura 7.8: Sudoku 2: proposto e resolvido pelo método de Douglas-Rachford.

	9		1		7			
	1			9			4	5
		3	2					
3							6	
	6	2				3		
		5						9
			6		2			
	4	9					5	7

4	9	6	1	5	7	8	3	2
2	1	8	3	9	6	7	4	5
7	5	3	2	8	4	1	9	6
3	7	4	9	2	8	5	6	1
9	6	2	4	1	5	3	7	8
1	8	5	7	6	3	4	2	9
5	3	1	6	7	2	9	8	4
8	2	7	5	4	9	6	1	3
6	4	9	8	3	1	2	5	7

Figura 7.9: Sudoku 3: proposto e resolvido pelo método de Douglas-Rachford.

# Apêndice A

## Códigos em MatLab

Aqui serão colocados os códigos em MatLab utilizados na programação das aplicações I e II, os códigos da aplicação III estão em PHP, e podem ser encontrados em [66].

### A.1 Aplicação I

```
close all
clear
clc

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Data to both methods%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
global dim
dim = 7;
x0 = -100 + 200*rand(dim,1);
tol = 1e-7;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Initial data DR%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
xk = x0;
erro = inf;
k = 0;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Initial data PPM%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```

options = optimset('TolX',1e-7,'TolFun',1e-7);
lambda = 0.01;
xkPPM = x0;
erroPPM = inf;
kPPM = 0;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%DR loop%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
tic;
while (erro > tol)
xnew = G_AB(xk);
erro = norm(xnew - xk);
xk = xnew;
k = k+1;
end
xoptaux = xk;
xopt = J_B(xoptaux);
t = toc;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%PPM loop%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
tic;
while (erroPPM > tol)
objprox = @(x) subdiff_f(x) + subdiff_g(x) + lambda*norm(x-xkPPM,2)^2;
xnewPPM = fminsearch(objprox,xkPPM,options);
erroPPM = norm(xnewPPM - xkPPM);
xkPPM = xnewPPM;
kPPM = kPPM+1;
end
xoptPPM = xkPPM;
tPPM = toc;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% PPM - output %%%%%%%%%%%%%
disp('-----')
disp('Método do Ponto Proximal - Aplicação I')
disp('Starting point: ');
disp(x0);
disp(['Number of iterations until the stopping rule is satisfied: ' num2str(kPPM)]);
disp(['CPU time until the stopping rule is satisfied: ', num2str(tPPM), ' seconds']);
disp(['Stopped with  $\|x^{k+1}-x^k\| =$  ' num2str(erroPPM)]);
disp('Limit point found: ');
disp(xoptPPM);
disp('-----')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% DR - output %%%%%%%%%%%%%
disp('-----')
disp('Método de Douglas-Rachford - Aplicação I')
disp('Starting point: ');
disp(x0);
disp(['Number of iterations until the stopping rule is satisfied: ' num2str(k)]);
disp(['CPU time until the stopping rule is satisfied: ', num2str(t), ' seconds']);
disp(['Stopped with  $\|x^{k+1}-x^k\| =$  ' num2str(erro)]);
disp('Limit point found: ');
disp(xopt);
disp('-----')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

## A.2 Aplicação II

```
close all
```

```

clear
clc
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Data to both methods%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
global dim
dim = 2;
x0 = -100 + 200*rand(dim,1);
tol = 1e-7;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Initial data DR%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
xk = x0;
erro = inf;
k = 0;
z = [xk ; xk ; xk] ;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%plotando ponto inicial%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
plot(x0(1), x0(2), 'kd') %ponto inicial cor preta%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%DR loop%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
tic;
while (erro > tol)
P_A = [0 ; z(2)] ;
P_B = [(3*z(3) + sqrt(3)*z(4))/(4) ; (sqrt(3)*z(3) + z(4))/(4)] ;
P_C1 = [(3*z(5) - sqrt(3)*z(6))/(4) ; (-sqrt(3)*z(5) + z(6))/(4)] ;
% agora acharemos o P_C e P_D, onde
% C = A x B x C1 e
% D = (z,z,z)
P_C = [ P_A ; P_B ; P_C1 ] ;
zb = ([z(1) ; z(2)] + [z(3) ; z(4)] + [z(5) ; z(6)])/3 ;
P_D = [ zb ; zb ; zb] ;
% Agora vamos encontrar os refletores
% R_C = 2*P_C - I

```

```

% R_D = 2*P_D - I
R_C = 2*P_C - z ;
zb1 = ([R_C(1) ; R_C(2)] + [R_C(3) ; R_C(4)] + [R_C(5) ; R_C(6)])/3 ;
P_D1 = [zb1 ; zb1 ; zb1] ;
R_D = 2*P_D1 - R_C ;
% Agora aplicaremos o algoritmo
T = (R_D + z)/2 ;
% Calculamos o número de iteradas
k = k + 1 ;
% Calculamos o erro.
erro = norm(T - z) ;
z = T ;
% Plotamos as aproximações do ponto ótimo de casa conjunto.
plot(z(1),z(2) , 'rd')%
hold on %
plot(z(3),z(4) , 'bd')
hold on
plot(z(5),z(6) , 'yd')
end
aproxA = [z(1) ; z(2)] ;
aproxB = [z(3) ; z(4)] ;
aproxC = [z(5) ; z(6)] ;
t = toc ;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% DR - output %%%%%%%%%%%%%
disp('------')
disp(' 0 problema de viabilidade convexa - Aplicação II')
disp('Starting point: ');
disp(x0);
disp(['Number of iterations until the stopping rule is satisfied: ' num2str(k)]);
disp(['CPU time until the stopping rule is satisfied: ', num2str(t), ' seconds']);

```



```
disp(['Stopped with ||x^{k+1}-x^k||= ', num2str(erro)]);
disp('Limit point found: ');
disp(aproxA);
disp(aproxB);
disp(aproxC);
disp('-----')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

# Bibliografía

- [1] Aragón Artacho, F. J., Borwein, J. M. e Tam M. K. "*Douglas-Rachford feasibility methods for matrix completion problems*", ANZIAM J (2014a) 55(4):299-326.
- [2] Aragón Artacho, F. J., Borwein, J. M. e Tam, M. K. "*Recent results on Douglas-Rachford methods for combinatorial optimization problems*", J. Optim. Th. Appl. 163 (2014), 1-30.
- [3] Aragón Artacho, F. J., Borwein, J. M. e Tam, M. K. "*Global behavior of the Douglas-Rachford method for a nonconvex feasibility problem*", J Glob Optim (2016) 65(2):309-327.
- [4] Aragón Artacho, F. J. e Borwein, J. M. "*Global convergence of a non-convex Douglas-Rachford iteration*", J Glob Optim 57(3): (2013)753-769.
- [5] Aragón Artacho, F. J., Campoy, R. e Elser, V. "*An enhanced formulation for successfully solving graph coloring problems with the Douglas-Rachford algorithm*", arXiv e-prints <https://arxiv.org/abs/1808.01022>, (2018a).
- [6] Aragón Artacho, F.J., Campoy, R., Kotsireas, I.S. e Tam, M. K. "*A feasibility approach for constructing combinatorial designs of circulant type*", J Comb Optim (2018b) 35(4):1061-1085.
- [7] Aragón Artacho, F. J., Campoy, R. e Tam, M. K. "*The Douglas-Rachford algorithm for convex and nonconvex feasibility problems*", Math. Methods Oper. Res. 91 (2020), 201-240.
- [8] Aragón Artacho, F.J. e Segura Martínez, P. "*Finding magic squares with the Douglas-Rachford algorithm*", BEIO 35 (2019), No. 2, 106-128.

- [9] Bauschke H.H., Combettes P.L. e Luke D.R. "*Phase retrieval, error reduction algorithm, and Fienup variants: a view from convex optimization*", J Opt Soc Am A (2002) 19(7):1334-1345.
- [10] Bauschke, H.H. e Combettes, P.L. "*Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*", 2nd edition, Springer, (New York, 2017).
- [11] Bauschke H.H., Dao M.N., e Lindstrom, S.B. "*The Douglas-Rachford algorithm for a hyperplane and a doubleton*", J Glob Optim pp 1-15, (2019) DOI: 10.1007/s10898-019-00744-7.
- [12] Bauschke H.H. e Dao M.N. "*On the finite convergence of the Douglas-Rachford algorithm for solving (not necessarily convex) feasibility problems in Euclidean spaces*", SIAM J Optim (2017) 27(1):507-537.
- [13] Bauschke H.H, Noll D. "*On the local convergence of the Douglas-Rachford algorithm*", Arch Math (2014) 102(6):589-600.
- [14] Benoist J. "*The Douglas-Rachford algorithm for the case of the sphere and the line*", J Global Optim (2015) 63(2):363-380.
- [15] Bertsekas, D. P. "*Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*", (Academic Press, New York, 1982).
- [16] Bertsekas, D. P. "*Necessary and sufficient conditions for a penalty method to be exact*", Mathematical Programming 9 (1975) 87-99.
- [17] Bertsekas, D. P. e Eckstein, H. "*On the Douglas-Rachford splitting method and the proximal point algorithm for maximal monotone operators\**", Mathematical Programming 55 (1992) 293-318.
- [18] Bertsekas, D. P. e Kort, B. "*Combined primal-dual and penalty methods for convex programming*", SIAM Journal on Control and Optimization 14 (1976) 268-294.
- [19] Borwein J.M., Lindstrom S.B., Sims B., Schneider A., Skerritt M.P. (2018) "*Dynamics of the Douglas-Rachford method for ellipses and  $p$ -spheres*", Set-Valued Var Anal 26(2):385-403.

- [20] Borwein J.M. e Sims B. "*The Douglas-Rachford algorithm in the absence of convexity*", In: Bauschke H, Burachik R, Combettes P, Elser V, Luke D, Wolkowicz H (eds) *Fixed-Point Algorithms for Inverse Problems in Science and Engineering*, Springer Optimization and Its Applications, vol 49, Springer, New York, (2011) pp 93-109.
- [21] Borwein J.M e Tam M.K "*Reflection methods for inverse problems with applications to protein conformation determination*", In: Aussel D, Lalitha C (eds) *Generalized Nash Equilibrium Problems, Bilevel Programming and MPEC. Forum for Interdisciplinary Mathematics*, Springer Singapore, Singapore, (2017) pp 83-100.
- [22] Brézis, H. "*Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert*", (North-Holland, Amsterdam, 1973).
- [23] Combettes, P. L. e Pesquet, J. C. "*Proximal Splitting Methods in Signal Processing*", arXiv:0912.3522, 2009.
- [24] Dao M.N. e Tam M.K. "*A Lyapunov-type approach to convergence of the Douglas-Rachford algorithm for a nonconvex setting*", *J Glob Optim* (2019) 73(1):83-112.
- [25] Douglas, J. e Rachford, H. H. "*On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables*", *Transactions of the American Mathematical Society* 82 (1956) 421-439.
- [26] Durier, R. e Michelot, C. "*Sets of efficient points in a normed space*", *Journal of Mathematical Analysis and its Applications* 117 (1986) 506-528.
- [27] Durier, R. "*On locally polyhedral convex functions*", Working paper, Université de Dijon (Dijon, 1986).
- [28] Eckstein, J. "*Splitting methods for monotone operators with applications to parallel optimization*", Doctoral dissertation, Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology. Available as Report LIDS-TH-1877, Laboratory for Information and Decision Sciences, MIT (Cambridge, MA, 1989).

- [29] Eckstein, J. *"The Lions-Mercier algorithm and the alternating direction method are instances of the proximal point algorithm"*, Report LIDS-P-1769, Laboratory for Information and Decision Sciences, MIT (Cambridge, MA, 1988).
- [30] Elser, V. *"Phase retrieval by iterated projections"*, J Opt Soc Am A (2003) 20(1):40-55.
- [31] Elser V. *"The complexity of bit retrieval. IEEE Transactions on Information Theory"*, (2018) 64(1):412-428.
- [32] Elser V., Rankenburg I. e Thibault P. *"Searching with iterated maps"*, Proc Natl Acad Sci (2007) 104(2):418-423.
- [33] Fortin, M. e Glowinski, R. *"On decomposition-coordination methods using an augmented Lagrangian"*, in: M. Fortin and R. Glowinski, eds., *Augmented Lagrangian Methods: Applications to the Solution of Boundary-Value Problem* (North-Holland, Amsterdam, 1983).
- [34] Gabay D. e Mercier B. *"A dual algorithm for the solution of nonlinear variational problems via finite element approximations"*, Computers and Mathematics with Applications 2 (1976) 17-40.
- [35] Gabay D. *"Applications of the method of multipliers to variational inequalities"*, in: M. Fortin and R. Glowinski, eds., *Augmented Lagrangian Methods: Applications to the Solution of Boundary Value Problems* (North-Holland, Amsterdam, 1983).
- [36] Glowinski, R. e Marroco, A. *"Sur l'approximation, par elements finis d'ordre un, et la resolution, par penalisation-dualité, d'une classe de problemes de Dirichlet non lineares"*, Revue Française d'Automatique, Informatique et Recherche Opérationnelle 9(R-2) (1975) 41-76.
- [37] Glowinski, R. e Le Tallec, P. *"Augmented Lagrangian methods for the solution of variational problems"*, MRC Technical Summary Report #2965, Mathematics Research Center, University of Wisconsin-Madison (Madison, WI, 1987).
- [38] Gol'shtein, E.G. e Tret'yakov, N.V. *"Modified Lagrangians in convex programming and their generalizations"*, Mathematical Programming Study 10 (1979) 86-97.

- [39] Hesse R. e Luke D.R. "*Nonconvex notions of regularity and convergence of fundamental algorithms for feasibility problems*", SIAM J Optim (2013) 23(4):2397-2419.
- [40] Hesse R., Luke D.R. e Neumann P. "*Alternating projections and Douglas-Rachford for sparse affine feasibility*", IEEE Transactions on Signal Processing (2014) 62(18):4868-4881.
- [41] Hestenes, M. R. "*Multiplier and gradient methods*", Journal of Optimization Theory and Applications 4 (1969) 303-320.
- [42] Izmailov, A. F. e Solodov, M. V. "*Otimização, Vol.1: Condições de otimalidade, elementos de análise convexa e de dualidade*", 3.ed IMPA, rio de janeiro, 2014 ISBN 978-85-244-0389-7.
- [43] Lamichhane, B. P., Lindstrom, S. B. e Sims B. (2017) "*Application of projection algorithms to differential equations: boundary value problems*". arXiv e-prints <https://arxiv.org/abs/1705.11032>.
- [44] Lefebvre, O. E Michelot, C. "*About the finite convergence of the proximal point algorithm*", in: K.-H. Hoffmann et al., eds., Trends in Mathematical Optimization: 4th French-German Conference on Optimization. International Series of Numerical Mathematics No. 84 (Birkhäuser, Basel, 1988).
- [45] Lions, P. L. e Mercier, B. "*Splitting algorithms for the sum of two nonlinear operators*", SIAM Journal on Numerical Analysis 16 (1979) 964-979.
- [46] Lions, P. L. "*Une méthode itérative de résolution d'une inéquation variationnelle*", Israel Journal of Mathematics 31 (1978) 204-208.
- [47] Luque, F. J. "*Asymptotic convergence analysis of the proximal point algorithm*", SIAM Journal on Control and Optimization 22 (1984) 277-293.
- [48] Marchuk, G. I. "*Methods of Numerical Mathematics*", (Springer, New York, 1975).
- [49] Martinet, B. "*Determination approchée d'un point fixe d'une application pseudo-contractante. Cas de l'application prox*", Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, Paris, Serie A 274 (1972) 163-165.

- [50] Martinet B. "*Regularisation d'inequations variationelles par approximations succesives*", Revue Française d'Informatique et de Recherche Operationelle 4(R-3) (1970) 154-158.
- [51] Minty, G. J. "*Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space*", Duke Mathematics Journal 29 (1962) 341-346.
- [52] Minty, G. J. "*On the maximal domain of a 'monotone' function*", Michigan Mathematical Journal 8 (1961) 135-137.
- [53] Opial, Z. "*Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings*", Bull. Amer. Math. Soc. (1967) 73(4), 591-597.
- [54] Passty, G. B. "*Ergodic convergence to a zero of the sum of monotone operators in Hilbert space*", Journal of Mathematical Analysis and Applications 72 (1979) 383-390.
- [55] Phan, H.M. "*Linear convergence of the Douglas-Rachford method for two closed sets*", Optim (2016) 65(2):369-385.
- [56] Pierra, G. "*Decomposition through formalization in a product space*", Math. Program. 28(2), (1984) 96-115.
- [57] Pierra, G. "*Eclatement de contraintes en parall'ele pour la minimisation d'une forme quadratique*", Lecture Notes in Comput. Sci. 41, 200-218 (1976).
- [58] Powell, M. J. D. "*A method for nonlinear constraints in minimization problems*", in: R. Fletcher, ed., Optimization (Academic Press, New York, 1969).
- [59] Rockafellar, R. T. e Wets, R. J. B. "*Scenarios and policy aggregation in optimization under uncertainty*", Mathematics of Operations Research 16(1) (1991) 119-147.
- [60] Rockafellar, R. T. "*Characterization of the subdifferentials of convex functions*", Pacific Journal of Mathematics 17 (1966) 497-510.
- [61] Rockafellar, R. T. *Convex Analysis* (Princeton University Press, Princeton, N J, 1970).

- [62] Rockafellar, R. T. "*Local boundedness of nonlinear, monotone operators*", Michigan Mathematical Journal 16 (1969) 397-407.
- [63] Rockafellar, R. T. "*Monotone operators and the proximal point algorithm*", SIAM Journal on Control and Optimization 14 (1976) 877-898.
- [64] Rockafellar, R. T. "*On the maximal monotonicity of subdifferential mappings*", Pacific Journal of Mathematics 33 (1970) 209-216.
- [65] Rockafellar, R. T. "*On the maximality of sums of nonlinear monotone operators*", Transactions of the American Mathematical Society 149 (1970) 75-88.
- [66] Schaad, J. "*Modelling the 8-queens problem and Sudoku using an algorithm based on projections onto nonconvex sets*", Masters's thesis, Univ. British Columbia (Canada, 2010).
- [67] Spingarn, J. E. "*A primal-dual projection method for solving systems of linear inequalities*", Linear Algebra and its Applications 65 (1985) 45-62.
- [68] Spingarn, J. E. "*A projection method for least-squares solutions to overdetermined systems of linear inequalities*", Linear Algebra and its Applications 86 (1987) 211-236.
- [69] Spingarn, J. E. "*Application of the method of partial inverses to convex programming: decomposition*", Mathematical Programming 32 (1985) 199-233.
- [70] Spingarn, J. E. "*Partial inverse of a monotone operator*", Applied Mathematics and Optimization 10 (1983) 247-265.
- [71] Tam, M.K. "*Algorithms based on unions of nonexpansive maps*", Optim Letters (2018) 12(5):1019-1027.
- [72] Thao, N.H. "*A convergent relaxation of the Douglas-Rachford algorithm*", Comput Optim Appl (2018) 70(3):841-863.
- [73] Tseng, P. "*Applications of a splitting algorithm to decomposition in convex programming and variational inequalities*", SIAM Journal on Control and Optimization 29(1) (1991) 119-138.