Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Caracterização da Curvatura Escalar de Sólitons de Yamabe e Sólitons de Ricci-Bourguignon

Raquel Silva Lemos

Teresina - 2022

Raquel Silva Lemos

Dissertação de Mestrado:

Caracterização da Curvatura Escalar de Sólitons de Yamabe e Sólitons de Ricci-Bourguignon

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Antonio Wilson Rodrigues da Cunha.

Teresina - 2022

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Caracterização da curvatura escalar de sólitons de Yamabe e de Bourguignon

Raquel Silva Lemos

Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 24 de fevereiro de 2022.

Banca Examinadora:

Antonio Wilson Rodrigues da Cunha

Prof. Dr. Antonio Wilson Rodrigues da Cunha - Orientador

gov.br
Documento assinado digitalmente
FERNANDA ROING
Data: 07/03/2022 19:51:09-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Profa. Dra. Fernanda Roing - UFC

Paulo Alexandre Araújo Sousa

Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa - UFPI

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Sistema de Bibliotecas da UFPI – SIBi/UFPI
Biblioteca Setorial do CCN

L557c Lemos, Raquel Silva.
Caracterização da curvatura escalar de Sólitons de Yamabe e Sólitons de Ricci-Bourguignon / Raquel Silva Lemos. – 2022.
59 f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática, Teresina, 2022.
"Orientador: Prof. Dr. Antonio Wilson Rodrigues da Cunha".

1. Geometria Diferencial. 2. Sólitons de Yamabe. 3. Sólitons de Ricci-Bourguignon. I. Cunha, Antonio Wilson Rodrigues da. II.Título.

CDD 516.36

Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes. CRB/3-1461

Dedico este trabalho aos meus amados pais José Ribamar Morais de Lemos e Valdeane Silva Lemos.

Agradecimentos

Primeiramente e especialmente agradeço à Deus, pois sem ele nada seria possível, gratidão Senhor por sua companhia até aqui.

À pessoa mais especial da minha vida, meu pai José Ribamar por sempre fazer o possível e o impossível para a realização dos meus sonhos, por sempre buscar dar suporte nos meus estudos, por todos os ensinamentos que sempre me ofertou, por sempre fazer café quando estava estudando mesmo que chegasse cansado do trabalho. Sem dúvidas seu carinho foi minha maior fortaleza até hoje, sempre será o meu maior exemplo de pessoa.

A minha querida mãe Valdeane, que apesar da sua incapacidade física sempre me ajudou e fez o máximo para que eu me dedicasse apenas aos estudos. Pela compreensão, por todos os seus conselhos nos momentos difíceis. Aos meus irmãos José Miguel, Samuel e Bartolomeu, por sempre acreditarem em mim.

Especialmente agradeço ao professor Roger Peres, pois paguei coincidentemente diversas disciplinas com ele e pude aprender muitas coisas além do conhecimento matemático, é um excelente professor e incentivador. Ao grande professor Paulo Alexandre minha maior inspiração, foi uma honra ser sua aluna. Ao professor Leandro Freitas que teve participação enorme na minha formação acadêmica, como professor, orientador de estágio e auxiliador na preparação para a seleção de mestrado, obrigada por me fazer acreditar que era possível. Ao professor Barnabé Pessoa, meu maior incentivador para fazer o mestrado.

Aos professores da Pós-Graduação em Matemática da UFPI, Gleison Nascimento, Newton Luis, Ítalo Dowell, Halysson Baltazar e principalmente ao professor Jefferson Leite, meu primeiro orientador, obrigada por todo conhecimento transmitido e conselhos.

Ao meu querido orientador professor Antonio Wilson, por todo conhecimento transmitido, tanto matemático como acadêmico, por sempre ter sido exemplo pra mim, pelas conversas após os seminários, pela paciência e dedicação comigo. Fui muito feliz em ser sua orientanda. Serei eternamente grata por ter tido o seu apoio e confiança.

Ao meu fiel companheiro de estudo e brincadeiras Paulo Jr., que sempre esteve comigo desde a preparação para a seleção do mestrado, foi minha companhia em todos os momentos, tanto acadêmico como pessoal, sua participação tornou o mestrado mais leve, pois sempre foi uma pessoa alegre cheia de brincadeiras e que confiou no meu potencial mais vezes do que eu, obrigada por ser a minha inspiração e por todo o seu carinho.

Agradeço aos meus amigos Amanda Marielle, Hycaro Hebert, Naiara Analya e Raiane Sena por serem compreensivos nos momentos que estive ausente e por serem minhas companhias de vida, obrigada pelos momentos que foram meus abrigos em Teresina. À todos os meus amigos de curso, em especial ao Jefferson, João Victor, Gabriel, Sillas, Suerlan, Ruanzinho, Faúster, Danilinho, Ousadia, João Vinícius e Eris.

Agradeço aos professores Paulo Alexandre e Fernanda Roing por aceitarem participar da banca examinadora, suas sugestões foram essenciais para finalizar este trabalho.
Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

"A beleza da matemática só se mostra a seguidores mais pacientes".

Maryam Mirzakhani.

Resumo

Neste trabalho estudaremos resultados que abordam a caracterização da curvatura escalar de sólitons de Yamabe e sólitons de Ricci-Bourguignon, fazendo uma divisão desses resultados em casos compactos e completos não-compactos através do uso de ferramentas como: fórmulas do tipo Bochner, teoremas do tipo Liouville, integral de Dirichlet finita, condição de Kazdan-Warner, crescimento quadrático da função potencial, alguma regularidade L^p ou L^∞ da variedade e parabolicidade. Como aplicação de tais resultados apresentaremos teoremas de isometria. Finalmente, obtemos novos resultados nos casos compactos e completos não-compactos para sólitons de Ricci-Bourguignon.

Palavras chaves: Variedades compactas e completas não-compactas, curvatura escalar constante, sólitons de Yamabe e Ricci-Bourguignon, condição de Kazdan-Warner e variedades parabólicas.

Abstract

In this work we will study results that approach the characterization of the scalar curvature of Yamabe solitons and Ricci-Bourguignon solitons, dividing these results into compact and complete non-compact cases through the use of tools such as: Bochner-type formulas, Liouville-type theorems, finite Dirichlet integral, Kazdan-Warner condition, quadratic growth of the potential function, some regularity L^p or L^∞ of the manifold and parabolicity. As an application of such results, we will present isometry theorems. Finally, we obtain new results on the compact and complete non-compact cases for Ricci-Bourguignon solitons.

Keys words: Compact and complete non-compact manifolds, constant scalar curvature, Yamabe and Ricci-Bourguignon solitons, Kazdan-Warner condition and parabolic manifolds.

Sumário

Introdução

O fluxo de Yamabe foi introduzido em 1989 paralelamente junto com o fluxo de Ricci por Hamilton, o primeiro com o objetivo de solucionar a conjectura de Poincaré e o segundo como uma tentativa de solucionar o problema de Yamabe (veja [33]) esse nome é uma homenagem feita a Hidehiko Yamabe, que dizia o seguinte: Dada uma variedade Riemanniana compacta (M^n, g), com dimensão $n \geqslant 3$ é possível encontrar uma métrica conforme a g com curvatura escalar constante.

Em 1960, H. Yamabe tentou resolver este problema usando técnicas de cálculo de variações e equações diferenciais parciais elípticas. Infelizmente, sua prova continha um erro, descoberto em 1968 por Neil Trudinger [32]. Ele foi capaz de consertar a demonstração, mas dessa vez com algumas restrições na prova envolvendo a hipótese de curvatura escalar não-positiva.

Em seguida, em 1976, Thierry Aubin [2] foi capaz de estender o resultado anterior, provou o problema supondo $n \geqslant 6$ e (M^n, g) não conformemente flat. Finalmente, Richard Schoen [31] em 1984 completou os demais casos para a solução do Problema de Yamabe. A solução do problema de Yamabe é um marco no desenvolvimento da teoria das equações diferenciais parciais não lineares.

Hamilton definiu o fluxo de Yamabe como sendo uma equação de evolução no espaço das métricas Riemannianas, que sob vários aspectos se comportam como uma equação do calor não-linear. Tal fluxo é descrito pela equação:

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -R_{g(t)} g(t).$$

Nesse contexto, os sólitons de Yamabe representam um tipo de solução especial para o fluxo de Yamabe, e correspondem às soluções auto-similares do fluxo.

Dizemos que uma variedade Riemanniana (M^n, g) é um sóliton de Yamabe se existir um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ e uma constante ρ tal que

$$(R-\rho)g = \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g \tag{1}$$

em M. Onde R é a curvatura escalar, e $\mathcal{L}_X g$ é a derivada de Lie da métrica g na direção do campo X.

Quando o campo acima é um campo gradiente, isto é, quando $X = \nabla f$ temos o que chamamos de sóliton de Yamabe gradiente e reescrevemos a equação acima como

$$(R-\rho)g = \nabla^2 f \tag{2}$$

em M, onde a f é chamada função potencial.

Dizemos que um sóliton de Yamabe é expansivo, estático ou contrátil, se $\rho < 0$, $\rho = 0$ ou $\rho > 0$, respectivamente.

Consideremos em uma variedade Riemanniana (M^n, g), $n \geqslant 3$, fluxos geométricos do tipo

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2(Ric - \mu R g)$$

para algum $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$. Tais fluxos são denominados fluxos de Ricci-Bourguignon e existe também um tipo de solução especial para tal que corresponde às soluções auto-similares do fluxo que nos dá a seguinte noção de sóliton de Ricci-Bourguignon:

Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana de dimensão $n \geqslant 3$, e seja $\mu \in \mathbb{R}$. Se existir um campo vetorial suave X em M^n tal que

$$\mathrm{Ric} + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g - \mu R g = \lambda g, \tag{3}$$

onde Ric é o tensor curvatura de Ricci, λ é uma constante e $\mathcal{L}_X g$ representa a derivada de Lie de g na direção do campo vetorial X, dizemos que (M, g, X, μ) é um sóliton de Ricci-Bourguignon.

Se X é um campo gradiente de uma função suave f em M^n, então, tal sóliton de Ricci-Bourguignon é chamado de sóliton de Ricci-Bourguignon gradiente. Nesse caso, temos a seguinte equação estrutural

$$\mathrm{Ric} + \nabla^2 f - \mu R g = \lambda g, \tag{4}$$

onde $\nabla^2 f$ representa a Hessiana de f.

No Capítulo 1, forneceremos algumas noções preliminares que serão necessárias para o desenvolvimento deste trabalho e algumas definições de operadores diferenciais que julgamos importantes. As principais referências para esse capítulo foram [9] e [15].

No Capítulo 2, realizamos o estudo de sólitons de Yamabe compactos e completos não-compactos, onde nosso objetivo foi estudar sob quais condições esses sólitons possuem curvatura escalar constante e, além disso, desenvolver fórmulas como a fórmula de Bochner generalizada para servir de ferramenta em algumas demonstrações, finalizando-o com resultados sobre a curvatura escalar via parabolicidade.

No Capítulo 3, nosso estudo foi baseado em [6] com o objetivo de fornecer fórmulas que são ferramentas para demonstrações envolvendo sólitons de Ricci-Bourguignon e mostrar resultados que dizem respeito à caracterização da curvatura escalar desses sólitons, ressaltamos que o capítulo é muito interessante por expor resultados novos a serem publicados.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Neste capítulo vamos apresentar algumas definições e resultados de geometria Riemanniana que serão necessários ao longo da dissertação, para um estudo mais profundo dessas noções preliminares recomendamos o leitor consultar as referências [15] e [9] . Além disso, para estudo da dissertação espera-se que o leitor possua conhecimento de algumas noções de geometria em variedades Riemanniana tais como: conexões, métricas, curvatura, tensores e derivada de Lie.

Definição 1. *Seja* $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *uma função suave. O gradiente de* f *é o campo vetorial suave* ∇f *definido sobre* M^n *por*

$$\langle \nabla f, X \rangle = X(f),$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

A partir da definição anterior temos algumas proposições que serão uteis para o trabalho.

Proposição 1. *Se* $f, g : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *são funções suaves, então*

(a) $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$*;*

(b) $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$.

Demonstração. Seja X um campo suave sobre M^n, temos pela definição de gradiente que

$$\begin{aligned}\langle\nabla(f+g),X\rangle &= X(f+g)\\ &= X(f)+X(g)\\ &= \langle\nabla f,X\rangle+\langle\nabla g,X\rangle\\ &= \langle\nabla f+\nabla g,X\rangle\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\langle\nabla(fg),X\rangle &= X(fg)=gX(f)+fX(g)\\ &= \langle g\nabla f,X\rangle+\langle f\nabla g,X\rangle\\ &= \langle g\nabla f+f\nabla g,X\rangle.\end{aligned}$$

□

Proposição 2. *Seja* $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *uma função suave. Dados* $p \in M$ *e* $v \in T_pM$*, seja* $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ *uma curva suave tal que* $\gamma(0) = p$ *e* $\gamma'(0) = v$*. Então*

$$\langle\nabla f, v\rangle_p = \frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(t)|_{t=0}. \tag{1.1}$$

Em particular, se p *é ponto de máximo ou mínimo local para* f*, então* $\nabla f(p) = 0$.

Demonstração. Primeiramente observe que, sendo X uma extensão local de γ' temos

$$\langle\nabla f, v\rangle_p = (X(f))(p) = \frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(t)|_{t=0}.$$

Suponhamos agora que p é ponto de máximo local para f (o outro caso é análogo). Então existe $U \subset M$ vizinhança aberta de p tal que $f(p) \geqslant f(q)$ para todo $q \in U$ e se $v \in T_pM$ e $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow U$ são como no enunciado, então $f\circ\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ tem um máximo local em 0, donde

$$\langle\nabla f, v\rangle_p = \frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(t)|_{t=0} = 0.$$

Como a relação acima é válida para todo $v \in T_pM$, segue que $\nabla f(p) = 0$. □

Corolário 1. *Se* $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *são funções suaves, então*

$$\nabla(\phi\circ f) = \phi'(f)\nabla f.$$

Demonstração. Seja $p \in M, v \in T_pM$ e $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ uma curva tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$, pela proposição anterior temos que

$$\begin{aligned} \langle \nabla(\phi \circ f), v\rangle &= \frac{d}{dt}(\phi \circ f \circ \gamma)(t)|_{t=0} \\ &= \phi'(f(p))\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)|_{t=0} \\ &= (\phi' \circ f)\langle \nabla f, v\rangle_p. \end{aligned}$$

□

Outra definição que aparecerá frequentemente é a seguinte.

Definição 2. *Seja X um campo vetorial suave em M^n. A divergência de X é a função suave $\mathrm{div} : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$, dada para $p \in M$ por*

$$(\mathrm{div}X)(p) = \mathrm{tr}\{v \mapsto (\nabla_v X)(p)\},$$

onde $v \in T_pM$ e tr denota o traço do operador linear entre chaves.

Proposição 3. *Se X, Y são campos vetoriais suaves em M^n e $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave, então*

(a) $\mathrm{div}(X + Y) = \mathrm{div}X + \mathrm{div}Y$*;*

(b) $\mathrm{div}(fX) = f\mathrm{div}(X) + \langle \nabla f, X\rangle$.

Demonstração. Sejam X e Y campos suaves em M^n e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança aberta $U \subset M$. Temos que

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(X + Y) &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}(X + Y), e_i \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}X + \sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}Y, e_i \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}X, e_i \right\rangle + \left\langle \sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}Y, e_i \right\rangle \\ &= \mathrm{div}X + \mathrm{div}Y \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(fX) &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}(fX), e_i \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} f\nabla_{e_i}X, e_i \right\rangle + \left\langle \sum_{i=1}^{n} e_i(f)X, e_i \right\rangle \\
&= f\left\langle \sum_{i=1}^{n} \nabla e_i X, e_i \right\rangle + \left\langle X, \sum_{i=1}^{n} e_i(f)e_i \right\rangle \\
&= f\mathrm{div}X + \langle X, \nabla f\rangle.
\end{aligned}$$

□

Proveniente da Definição 2 temos:

Definição 3. *Seja* $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *uma função suave. O Laplaciano de* f *é a função* $\Delta f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$\Delta f = \mathrm{div}(\nabla f).$$

Corolário 2. *Se* $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *são funções suaves, então*

$$\Delta(\phi \circ f) = (\phi'' \circ f)|\nabla f|^2 + (\phi' \circ f)\Delta f.$$

Demonstração. Usando a definição do Laplaciano segue que

$$\begin{aligned}
\Delta(\phi \circ f) &= \mathrm{div}(\nabla(\phi \circ f)) \\
&= \mathrm{div}((\phi' \circ f)\nabla f) \\
&= \langle \nabla(\phi' \circ f), \nabla f\rangle + (\phi' \circ f)\mathrm{div}(\nabla f) \\
&= \langle (\phi'' \circ f)\nabla f, \nabla f\rangle + (\phi' \circ f)\Delta f.
\end{aligned}$$

□

Proposição 4. *Dadas* $f, g : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *funções suaves, tem-se*

$$\Delta(fg) = g\Delta f + f\Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle.$$

Em particular,

$$\frac{1}{2}\Delta(f^2) = f\Delta f + |\nabla f|^2.$$

Demonstração. Dadas f, g funções suaves, usando a definição do Laplaciano e as propriedades do divergente temos que

$$\begin{aligned}\Delta(fg) &= div(\nabla fg)\\ &= div(f\nabla g + g\nabla f)\\ &= div(f\nabla g) + div(g\nabla f)\\ &= fdiv(\nabla g) + \langle \nabla f, \nabla g\rangle + gdiv(\nabla f) + \langle \nabla g, \nabla f\rangle\\ &= f\nabla g + g\nabla f + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle.\end{aligned}$$

e fazendo $f = g$ na demonstração acima obtemos o caso particular. □

A definição a seguir é muito utilizada neste trabalho, pois aparece na equação estrutural dos sólitons a serem estudados aqui.

Definição 4. *Seja $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função suave e $p \in M$. O Hessiano de f é o campo de operadores lineares $(\nabla^2 f)_p : T_pM \longrightarrow T_pM$, definido para $v \in T_pM$ por*

$$(\nabla^2 f)_p(v) = (\nabla_v \nabla f)(p).$$

Segue das propriedades da conexão Riemanniana que se X é qualquer extensão de v a uma vizinhança de p em M^n, então

$$(\nabla^2 f)_p(v) = (\nabla_X \nabla f)(p).$$

Pela Definição 4 temos uma outra forma de expressar o Lapraciano. Vejamos.

Proposição 5. *Se $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave, então*

$$\Delta f = tr(\nabla^2 f).$$

Demonstração. Seja $U \subset M$ uma vizinhança de $p \in M$ onde esteja definida um referencial móvel $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Então,

$$\begin{aligned}tr(\nabla^2 f)_p &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} (\nabla^2 f)_p(e_i), e_i \right\rangle\\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}\nabla f, e_i \right\rangle_p\\ &= div(\nabla f)(p)\\ &= \Delta f(p).\end{aligned}$$

□

O lema que segue será necessário para a próxima proposição.

Lema 1. *Seja* V *um espaço vetorial real* n*-dimensional com produto interno, e* $T : V \to V$ *um operador linear auto-adjunto e positivo definido, com autovalores* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$*. Se* $\lambda = \min\{\lambda_i; 1 \leqslant i \leqslant n\}$ *e* $v \in V$ *é um vetor unitário, então*

$$\langle Tv, v\rangle \geqslant \lambda.$$

Demonstração. Pelo Teorema Espectral, podemos escolher uma base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de V, com $Te_i = \lambda_i e_i$ para $1 \leqslant i \leqslant n$. Se $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, então $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1$ e daí

$$\begin{aligned} \langle Tv, v\rangle &= \left\langle T\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \sum_{i=1}^n \alpha_j e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n \alpha_i\alpha_j \langle Te_i, e_j\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n \alpha_i\alpha_j\lambda_i \langle e_i, e_j\rangle \\ &\geqslant \lambda\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = \lambda. \end{aligned}$$

□

A seguinte proposição será utilizada no Teorema 6.

Proposição 6. *Seja* $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função suave.*

(a) Se $p \in M$ *é ponto de mínimo (resp. máximo) local para* f*, então* p *é ponto crítico de* f *e* $(\nabla^2 f)_p$ *é positiva (resp. negativa) semi-definida.*

(b) Se $p \in M$ *é ponto crítico de* f *e* $(\nabla^2 f)_p$ *é positiva (resp. negativa) definida, então* p *é ponto de mínimo (resp. máximo) local estrito para* f*.*

Demonstração. Provemos as afirmações dos itens (a) e (b) que se referem a pontos de mínimo (os demais casos são análogos). Se $p \in M$ é ponto de mínimo local para f, então já sabemos que p é crítico. Portanto, dado $v \in T_pM$ e uma curva suave $c : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ com $c(0) = p$ e $c'(0) = v$, segue que 0 é ponto de mínimo local para $f \circ c : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ de maneira que

$$(\nabla^2 f)_p(v, v) = \frac{d^2}{dt^2}(f \circ c)(t)|_{t=0} \geqslant 0.$$

Assim, $(\nabla^2 f)_p$ é positiva semi-definida.

Reciprocamente, seja $p \in M$ ponto crítico de f e suponha que $(\nabla^2 f)_p$ é positiva definida. Nas notações do parágrafo anterior e tomando $c = \gamma$, uma geodésica normalizada, da fórmula de Taylor para $f \circ c$, de (1.1) e sendo

$$(\nabla^2 f)_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) = \frac{d^2}{dt^2}(f \circ \gamma)(t),$$

segue que

$$\begin{aligned}(f \circ \gamma)(t) &= (f \circ \gamma)(0) + (f \circ \gamma)'(0)t + \frac{1}{2}(f \circ \gamma)''(0)t^2 + o_v(t) \\ &= f(p) + \frac{1}{2}(\nabla^2 f)_p(v, v)t^2 + o_v(t)\end{aligned}$$

onde $v = \gamma'(0)$ e $\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{o_v(t)}{t^2} = 0$. Aplicando o lema anterior a $(\nabla^2 f)_p : T_pM \longrightarrow T_pM$, existe $\lambda > 0$ tal que $(\nabla^2 f)_p(v, v) \geqslant \lambda$, para todo $v \in T_pM$ unitário. Por outro lado, desde que

$$(f \circ \gamma)(t) = (f \circ \exp_p)(tv),$$

a última expressão acima para $(f \circ \gamma)(t)$ garante que $o_v(t)$ depende continuamente de $v \in T_pM$. Portanto, existe $\epsilon > 0$ tal que $|o_v(t)| < \frac{1}{2}\lambda t^2$ para todo $v \in T_pM$ tal que $|v| = 1$ e todo $0 < |t|\epsilon$. Logo, numa bola normal $B(p; \delta) \subset M$, com $\delta < \epsilon$, temos que

$$\begin{aligned}(f \circ \gamma)(t) &\geqslant f(p) + \frac{\lambda}{2}t^2 + o_v(t) \\ &= f(p) + \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{o_v(t)}{t^2}\right)t^2 \\ &> f(p),\end{aligned}$$

de modo que p é ponto de mínimo local estrito para f. $\square$

Nos capítulos a seguir precisaremos das seguintes definições de espaços L^p.

Definição 5. *Seja* $p \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$. *Definimos*

$$L^p(M) := \left\{ f : M \to \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e} \int_M |f|^p < \infty \right\}.$$

Por outro lado, se $p = \infty$, *definimos*

$$L^\infty(M) := \{f : M \to \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e existe } c \geqslant 0 \text{ t.q. } |f(x)| \leqslant c \text{ q.s. em } M\}.$$

Lema 2. ***Desigualdade de Young.*** *Sejam* $p, q > 1$ *tais que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *e* $x, y \in [0, \infty)$. *Então*

$$xy \leqslant \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q,$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, $y = x^{p-1}$.

Capítulo 2

Sólitons de Yamabe

2.1 Definições e fórmulas básicas

Neste capítulo, vamos definir sólitons de Yamabe gradientes, exibindo alguns exemplos e fórmulas que serão necessárias para desenvolver os resultados presentes no mesmo.

Definição 6. *Dizemos que uma variedade Riemanniana* (M^n, g) *é um sóliton de Yamabe se existir um campo* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *e uma constante* ρ *tal que*

$$(R - \rho)g = \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g \tag{2.1}$$

em M. *Onde* R *é a curvatura escalar e* $\mathcal{L}_X g$ *é a derivada de Lie da métrica* g.

Quando $X = \nabla f$ *para alguma função* f, *obtemos uma outra equação estrutural, a de sóliton gradiente de Yamabe e nesse caso a equação* (2.1) *torna-se da forma*

$$(R - \rho)g = \nabla^2 f \tag{2.2}$$

em M, *onde* f *é chamada função potencial.*

Dizemos que um sóliton de Yamabe é expansivo, estático ou contrátil, se $\rho < 0$, $\rho = 0$ ou $\rho > 0$, respectivamente.

Observação 1. *Tomando o traço em* (2.1) *e* (2.2) *obtemos respectivamente*

$$(R - \rho)n = div(X), \tag{2.3}$$

e

$$(R - \rho)n = \Delta f. \tag{2.4}$$

A teoria de sólitons de Yamabe está conectada com o estudo do fluxo de Yamabe, uma vez que estes sólitons são soluções auto-similares para este fluxo. Deixamos claro que não iremos fazer um aprofundamento desse estudo neste trabalho. Entretanto, o seguinte teorema (veja [18]) irá expor a conexão entre essas duas teorias.

Teorema 1. *Seja* (M^n, g_0, f_0) *um sóliton de Yamabe gradiente com campo vetorial* $\nabla_{g_0} f_0$ *completo, então existe*

(a) uma família de métricas $g(t)$, *solução do fluxo Yamabe, com* $g(0) = g_0$;

(b) uma família de difeomorfismos $\phi_t : M \to M$, *com* $\phi_0 = Id_M$;

(c) uma família de funções $f(t, \cdot) : M \to \mathbb{R}$ *com* $f(0, \cdot) = f_0(\cdot)$, *definida para cada* t *tal que* $\tau(t) = -\rho t + 1 > 0$.

Essas famílias têm as seguintes propriedades:

(i) a família ϕ_t *é gerada pelo campo vetorial* $\frac{-1}{2\tau(t)} \nabla_{g_0} f_0$ *eventualmente escalado pela inversa de* $\tau(t)$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, \cdot) = \frac{-1}{2\tau(t)} (\nabla_{g_0} f_0)(\phi(t, \cdot));$$

(ii) a métrica $g(t)$ *é dada pelo pullback de* $\phi(t, \cdot)$ *e o reescalonamento através de* $\tau(t)$

$$g(t) = \tau(t) \phi(t, \cdot)^* g_0;$$

(iii) a função $f(t)$ *é dada também pelo pullback, a saber:*

$$f(t, \cdot) = (f_0 \circ \phi)(t, \cdot) = \phi(t)^*(f_0).$$

Demonstração. Defina $\tau(t) = -\rho t + 1$. Já que o campo $\nabla_{g_0} f_0$ é completo, existe uma família a 1-parâmetro de difeomorfismos $\phi(t) : M \longrightarrow M$ gerados pelos campos $-\frac{1}{2\tau(t)} \nabla_{g_0} f_0$ definido para todo $\tau(t) > 0$. Então, defina $f(t) = f_0 \circ \phi(t)$ e $g(t) = \tau(t) \phi(t)^* g_0$. Assim,

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -\rho \phi(t_0)^* g_0 + \tau(t_0) \frac{\partial(\phi(t)^* g_0)}{\partial t}|_{t=t_0}$$

em t_0 e como

$$g(t_0) = \tau(t_0) \phi(t_0)^* g_0,$$

implicando

$$-\rho \phi(t_0)^* g_0 = -\frac{\rho g(t_0)}{\tau(t_0)}.$$

temos
$$\frac{\partial g(t)}{\partial t}|_{t=t_0} = -\frac{\rho g(t_0)}{\tau(t_0)} + \tau(t_0)\frac{\partial(\phi(t_0)^* g_0)}{\partial t}|_{t=t_0}.$$
Veja que, usando propriedades da derivada de Lie temos
$$\tau(t_0)\frac{\partial(\phi(t_0)^* g_0)}{\partial t}|_{t=t_0} = \tau(t_0)\mathcal{L}_{Y(t_0)}\phi(t_0)^* g_0,$$

onde,
$$Y(t_0) = \frac{\partial(\phi(t_0)^{-1}\circ\phi(t))}{\partial t}|_{t=t_0} = (\phi(t_0)^{-1})_*\left(\frac{\partial\phi(t)}{\partial t}|_{t=t_0}\right).$$
Daí,
$$\tau(t_0)\frac{\partial(\phi(t_0)^* g_0)}{\partial t}|_{t=t_0} = \tau(t_0)\mathcal{L}_{(\phi(t_0)^{-1})_*(\frac{\partial\phi(t)}{\partial t}|_{t=t_0})}\phi(t_0)^* g_0,$$
onde,
$$\frac{\partial\phi(t)}{\partial t}|_{t=t_0} = -\frac{1}{2\tau(t_0)}\nabla_{g_0} f_0 = \phi(t)_*\left(-\frac{1}{2}\nabla_{g(t_0)} f(t_0)\right).$$
Logo,
$$\tau(t_0)\frac{\partial(\phi(t_0)^* g_0)}{\partial t}|_{t=t_0} = -\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\nabla_{g(t_0)} f(t_0)} g(t_0).$$
Com isto, concluímos que
$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -\frac{\rho}{\tau(t)} g(t) - \frac{1}{2}\mathcal{L}_{\nabla_{g(t)} f(t)} g(t).$$

Por outro lado,
$$\begin{aligned} -R(g(t))g(t) &= \phi(t)^*(-R(g_0)g_0) \\ &= \phi(t)^*\left(-\rho g_0 - \frac{1}{2}\mathcal{L}_{\nabla_{g_0} f_0} g_0\right) \\ &= -\frac{\rho}{\tau(t)} g(t) - \frac{1}{2}\mathcal{L}_{\nabla_{g(t)} f(t)} g(t), \end{aligned}$$

i.e,
$$R(g(t))g(t) - \tfrac{\rho}{\tau(t)} g(t) = \tfrac{1}{2}\mathcal{L}_{\nabla_{g(t)} f(t)} g(t).$$

Portanto,
$$\begin{aligned} \frac{\partial g(t)}{\partial t} g(t) &= -\frac{\rho}{\tau(t)} g(t) - \frac{1}{2}\mathcal{L}_{\nabla_{g(t)} f(t)} g(t) \\ &= -R(g(t))g(t). \end{aligned}$$

□

2.2 Exemplos

Exibiremos alguns exemplos clássicos de variedades Riemannianas não-compactas e completas que são sólitons de Yamabe gradiente.

Exemplo 1. Sóliton de Einstein. Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa e não-compacta com curvatura de Ricci $R_{ij} = \frac{\rho}{n} g_{ij}$ e seja $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função constante. Então,

$$(R - \rho) g_{ij} = \nabla_i \nabla_j f.$$

Exemplo 2. Sóliton Gaussiano de Yamabe. Seja $(\mathbb{R}^n, g, \nabla f, \rho)$ onde $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = \frac{-\rho}{2}|x|^2$, $\rho \in \mathbb{R}$ e g é a métrica Euclideana do $\mathbb{R}^n$. Dessa forma, $R = 0$, e sendo $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^n$, temos que

$$\nabla^2 f(e_i, e_j) = e_i(e_j(f)) - g(\nabla f, \nabla_{e_i} e_j) = e_i(e_j(f)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Assim, $\nabla^2 f(e_i, e_j) = 0$ quando $i \neq j$ e $\nabla^2 f(e_i, e_j) = -\rho$ quando $i = j$. Logo, $\nabla_i \nabla_j f = -\rho \delta_{ij}$. Concluímos então que

$$(R - \rho) g_{ij} = \nabla_i \nabla_j f.$$

Portanto, $(\mathbb{R}^n, \delta_{ij}, \frac{-\rho|x|^2}{2})$ é chamado sóliton gaussiano de Yamabe contrátil se $\rho > 0$ e sóliton gaussiano de Yamabe expansivo se $\rho < 0$.

Exemplo 3. Sóliton Cigar de Yamabe. Seja $(\mathbb{R}^2, g_\Sigma)$ uma superfície Riemanniana com $g_\Sigma := \frac{g}{1+x^2+y^2}$, onde g é a métrica Euclideana do $\mathbb{R}^2$. Temos que $R = \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2}$ e que considerando a função $f(x, y) = 2ln(1 + x^2 + y^2)$ temos

$$R g_{ij} = \nabla_i \nabla_j f.$$

De fato, para provar isto, mostraremos que $g_\Sigma(t) = \frac{g}{e^{4t}+x^2+y^2}$ é uma solução de

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2Ric(g(t)).$$

Com efeito, lembre que, se (M^2, g) é uma superfície Riemanniana e $g_\Sigma = u \cdot g$, onde $u \in C^\infty(M)$, então

$$R_{g_\Sigma} = u^{-1}(R_g - \Delta_g ln(u)) \quad e \quad Ric = R_{ij} = \frac{R}{2} g_{ij} \quad \text{quando} \quad n = 2.$$

Esta última afirmação pode ser vista em [13]. Assim, $g_\Sigma(t) = u(t)g$ é uma solução da equação do fluxo de Ricci se e somente se

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_g ln(u) - R_g.$$

Verifiquemos a condição suficiente. Veja que,

$$\frac{\partial g_\Sigma(t)}{\partial t} = \frac{\partial u(t)}{\partial t} \cdot g = (\Delta_g \ln(u(t) - R_g)g,$$

assim,

$$\frac{\partial g_\Sigma(t)}{\partial t} = -R_{g_\Sigma(t)} \cdot u(t) \cdot g = -R_{g_\Sigma(t)} \cdot g_\Sigma(t) = -2Ric(g_\Sigma(t)).$$

Como $g_\Sigma(t) = u(t) \cdot g$, onde $u(t) = \frac{1}{e^{4t}+x^2+y^2}$, basta mostrar que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_g \ln(u) - R_g = \Delta_g \ln(u).$$

Ora, note que

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} = \frac{-4e^{4t}}{(e^{4t}+x^2+y^2)^2}$$

e que

$$\frac{\partial \ln(u(t))}{\partial x} = \frac{-2x}{e^{4t}+x^2+y^2}.$$

Assim,

$$\frac{\partial^2 \ln(u(t))}{\partial x^2} = \frac{-2(e^{4t}+x^2+y^2)+4x^2}{(e^{4t}+x^2+y^2)^2}.$$

Analogamente temos

$$\frac{\partial^2 \ln(u(t))}{\partial y^2} = \frac{-2(e^{4t}+x^2+y^2)+4y^2}{(e^{4t}+x^2+y^2)^2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Delta_g \ln u &= \frac{-2(e^{4t}+x\ 2+y^2)+4x^2-2(e^{4t}+x^2+y^2)+4y^2}{(e^{4t}+x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{-4e^{4t}}{(e^{4t}+x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{\partial u(t)}{\partial t}, \end{aligned}$$

isto é,

$$Ric(g_\Sigma) = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_\Sigma(t)}{\partial t}|_{t=0} = -\frac{1}{2}\frac{-4}{(1+x^2+y^2)^2}g = \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2}g.$$

Portanto,

$$R_{g_\Sigma} = \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2}.$$

Por outro lado, seja $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ definido por $Y = 4(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y})$, onde $\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^2$. Como $g_\Sigma = u \cdot g$, onde $u = (1+x^2+y^2)^{-1}$, temos

$$\mathcal{L}_Y g_\Sigma = \mathcal{L}_Y(u \cdot g) = (\mathcal{L}_Y u) \cdot g + u \cdot \mathcal{L}_Y g.$$

Mas, sendo

$$\mathcal{L}_Y u = \mathcal{D}_Y u = 4x\frac{\partial u}{\partial x} + 4y\frac{\partial u}{\partial y},$$

temos

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_Y u &= 4x \cdot \frac{-2x}{(1+x^2+y^2)^2} + 4y \cdot \frac{-2y}{(1+x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{-8(x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

Agora, observe que

$$\mathcal{L}_Y dx^i = d(\mathcal{L}_Y x^i) = d(\mathcal{D}_Y x^i) = dY^i,$$

assim

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_Y g &= \mathcal{L}_Y (g_{ij} dx^i \otimes dx^j) \\ &= \mathcal{L}_Y g_{ij} dx^i \otimes dx^j + g_{ij}(\mathcal{L}_Y dx^i) \otimes dx^j + g_{ij} dx^i \otimes (\mathcal{L}_Y dx^j) \\ &= \mathcal{D}_Y g_{ij} dx^i \otimes dx^j + g_{ij} dY^i \otimes dx^j + g_{ij} dx^i \otimes dY^j \\ &= \left(\mathcal{D}_Y g_{ij} + g_{kj}\frac{\partial Y^k}{\partial x_i} + g_{ik}\frac{\partial Y^k}{\partial x_j}\right) dx^i \otimes dx^j.\end{aligned}$$

Daí,

$$(\mathcal{L}_Y g)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \mathcal{D}_Y g_{ij} + g_{kj}\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + g_{ik}\frac{\partial Y^k}{\partial x^j}.$$

Então,

$$(\mathcal{L}_Y g)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = 0,$$

e

$$(\mathcal{L}_Y g)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = 2 \cdot \frac{\partial Y^i}{\partial x^i}.$$

Como

$$Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} = 4\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

e

$$(\mathcal{L}_Y g)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = 8,$$

resulta que $\mathcal{L}_Y g = 8g$. Logo,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_Y g_\Sigma &= \frac{-8(x^2+y^2)g}{(1+x^2+y^2)^2} + \frac{8g}{1+x^2+y^2} \\ &= \frac{-8(x^2+y^2)(1+x^2+y^2)g + (1+x^2+y^2)^2 8g}{(1+x^2+y^2)^3} \\ &= \frac{8g}{(1+x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{L}_Y g_\Sigma = \frac{8g}{(1+x^2+y^2)^2}.$$

Finalmente, mostraremos que $Y = \nabla f$, onde $f = 2ln(1+x^2+y^2)$. De fato, basta ver que se

$$\nabla f = a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y},$$

segue que

$$\begin{aligned}
\frac{4x}{1+x^2+y^2} &= \frac{\partial f}{\partial x} \\
&= g_\Sigma\left(\nabla f, \frac{\partial}{\partial x}\right) \\
&= a_x u g\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right) + a_y u g\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \\
&= a_x u.
\end{aligned}$$

Do mesmo modo temos

$$\begin{aligned}
\frac{4y}{1+x^2+y^2} &= \frac{\partial f}{\partial y} \\
&= g_\Sigma\left(\nabla f, \frac{\partial}{\partial y}\right) \\
&= a_x u g\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}\right) + a_y u g\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \\
&= a_y u.
\end{aligned}$$

Logo, $a_x = 4x$ e $a_y = 4y$. Sendo assim,

$$\nabla^2 f = \frac{1}{2}\mathcal{L}_{\nabla f} g_\Sigma = \frac{4g}{(1+x^2+y^2)^2} = Rg.$$

Portanto, concluímos que

$$Rg = \nabla^2 f,$$

como queríamos.

2.3 Sólitons de Yamabe compactos

Nesta seção iremos caracterizar a curvatura escalar de sólitons de Yamabe compactos.

O próximo lema nos dá algumas identidades análogas às conhecidas para um sóliton de Ricci gradiente.

Lema 3. *[22] Seja* (M^n, g, f, ρ) *um sóliton de Yamabe gradiente de dimensão* n. *Então temos as seguinte relações*

$$(n-1)\nabla R = -Ric(\nabla f, \cdot) \tag{2.5}$$

e

$$\Delta R(n-1) = -\frac{1}{2}\langle \nabla R, \nabla f\rangle - R(R-\rho). \tag{2.6}$$

Demonstração. Denotaremos por $Ric = R_{ij}$ o tensor de Ricci em coordenadas locais. Primeiramente, vamos obter uma fórmula para o Laplaciano da curvatura escalar de um sóliton de Yamabe gradiente.

Pela equação estrutural do sóliton de Yamabe gradiente (2.2) e aplicando a derivada covariante ∇_k obtemos

$$\nabla_K R g_{ij} = \nabla_K \nabla_i \nabla_j f.$$

Usando a identidade de Ricci

$$\nabla_k \nabla_i \nabla_j f - \nabla_i \nabla_j \nabla_k f = R_{jikl} \nabla_l f,$$

temos

$$\nabla_i \nabla_j \nabla_k f + R_{jikl} \nabla_l f = \nabla_k R g_{ij}.$$

Por uma contração para j, k segue que

$$R_{il} \nabla_l f + \nabla_i \Delta f = \nabla_i R.$$

Agora, usando (2.4) temos

$$n\nabla_i R + R_{il} \nabla_l f = \nabla_i R,$$

implicando em

$$(n-1)\nabla R = -Ric(\nabla f, \cdot).$$

Por outro lado, como

$$\Delta R = g^{ij} \nabla_i \nabla_j R,$$

usando a equação (2.5) obtemos

$$\begin{aligned} \Delta R &= g^{ij} \nabla_i \left(-\frac{1}{n-1} R_{jl} \nabla_l f \right) \\ &= -\frac{g^{ij}}{n-1} \left(\nabla_i R_{jl} \nabla_l f + R_{jl} \nabla_i \nabla_l f \right). \end{aligned}$$

Por fim, usando a segunda identidade de Bianchi contraída e o traço da equação estrutural segue que
$$\Delta R = -\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{2}\nabla_l R \nabla_l f + g^{ij} R_{jl}(R-\rho) g_{il}\right).$$
Portanto,
$$(n-1)\Delta R = -\frac{1}{2}\langle \nabla R, \nabla f\rangle - R(R-\rho).$$

□

O primeiro teorema de caracterização da curvatura escalar de sólitons de Yamabe gradiente compactos foi feito em 2011 por Daskalopoulos e Sesum em [14]. Em 2012, uma demonstração alternativa mais simples foi dada por Hsu em [19]. Aqui apresentaremos sua prova.

Teorema 2. *Seja* (M^n, g, f) *um sóliton de Yamabe gradiente compacto com* $n \geqslant 3$. *Então* M^n *tem curvatura escalar constante.*

Demonstração. Primeiramente, pela equação (2.4) temos
$$\int_M (R-\rho) = \frac{1}{n}\int_M \Delta f = 0.$$
Por outro lado, pelo Lema 3 segue que
$$\int_M [(n-1)\Delta R + \frac{1}{2}\langle \nabla R, \nabla f\rangle + R(R-\rho)] = 0.$$
Daí,
$$\frac{1}{2}\int_M \langle \nabla R, \nabla f\rangle = -\int_M R(R-\rho),$$
onde, usando integração por partes e a equação (2.4)
$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\int_M \langle \nabla R, \nabla f\rangle &= \frac{1}{2}\int_M R\Delta f \\ &= \frac{n}{2}\int_M R(R-\rho), \end{aligned}$$
logo,
$$\int_M R(R-\rho) = \frac{n}{2}\int_M R(R-\rho),$$
assim, como $n \geqslant 3$, segue que
$$\int_M R(R-\rho) = 0.$$
Desta forma encontramos
$$\int_M R(R-\rho) = 0$$

e

$$\int_M (R-\rho) = 0.$$

Isso implica que

$$\begin{aligned}\int_M (R-\rho)^2 &= \int_M (R^2 - 2R\rho + \rho^2)\\ &= \int_M R(R-\rho) - \rho\int_M (R-\rho)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Portanto, $R = \rho$. □

Recentemente, A. W. Cunha e Rong Mi [8] obtiveram o mesmo resultado por uma prova mais simples sem usar o Lema 3.

Outra demonstração. Pela equação estrutural (2.4) e utilizando integração por partes temos

$$n\int_M (R-\rho)^2 = \int_M (R-\rho)\Delta f = -\int_M \langle \nabla R, \nabla f\rangle. \tag{2.7}$$

Lembre-se que a segunda identidade de Bianchi contraída nos dá $\delta \mathrm{Ric} + \frac{1}{2}\nabla R = 0$, e como consequência, usando a definição

$$\overset{\circ}{Ric} = Ric - \frac{R}{n} g,$$

concluímos que

$$\delta \overset{\circ}{\mathrm{Ric}} = -\frac{n-2}{2n}\nabla R.$$

Substituindo isso na equação (2.7) acima e integrando por partes novamente temos

$$n\int_M |R-\rho|^2 = \frac{2n}{n-2}\int_M \langle \delta \overset{\circ}{Ric}, \nabla f\rangle = -\frac{2n}{n-2}\int_M \langle \overset{\circ}{Ric}, \nabla^2 f\rangle,$$

onde, usando a equação (2.2) e o fato que $\langle \overset{\circ}{Ric}, g\rangle = 0$, obtemos

$$\int_M \langle \overset{\circ}{Ric}, (R-\rho) g\rangle = 0.$$

Portanto,

$$\int_M |R-\rho|^2 = 0,$$

logo, $R = \rho$ em M^n.

□

Para o próximo resultado precisaremos da seguinte definição.

Definição 7. *Um campo vetorial* X *em uma variedade Riemanniana* (M^n, g) *é dito conforme quando existe uma função suave* $a(x)$ *em* M^n *tal que*

$$\mathcal{L}_X g = a(x)g,$$

onde $\mathcal{L}_X g$ *denota a derivada de Lie da métrica na direção do campo* X *em* M^n.

Teorema 3. *(Condição de Kazdan-Warner.)[3] Para qualquer campo vetorial conforme* X *em uma variedade Riemanniana compacta sem bordo* (M^n, g), *a seguinte identidade ocorre*

$$\int_M \langle \nabla R, X \rangle = 0.$$

Para uma prova veja [3, Teorema II.9].

Para o caso compacto com bordo, Li Ma e Vicente Miquel em [22] apresentam uma nova demonstração para essa condição de Kazdan-Warner.

Teorema 4. *Se* X *é um campo conforme em uma variedade Riemanniana compacta com bordo, vale a seguinte identidade*

$$\int_M \langle \nabla R, X \rangle = -\frac{2n}{n-2} \int_{\partial M} \left(Ric - \frac{R}{n} g \right) (\nu, X),$$

onde ν *é o normal unitário exterior ao bordo de* M^n.

Para uma prova veja [22, Proposição 7].

O próximo teorema extende o caso gradiente para um campo qualquer X em M^n.

Teorema 5. *[12, Proposição 2] Se* (M^n, g, X) *é um sóliton de Yamabe compacto, então* R *é constante, i.e.,* $R = \rho$.

Demonstração. Pela equação (2.1) sabemos que o campo X é um campo conforme em M^n. Assim, sendo M^n compacta, temos pelo Teorema 3 que

$$\int_M \langle \nabla R, X \rangle = 0.$$

Sabendo que $div(X) = n(R - \rho)$, pela integração por partes temos

$$\begin{aligned} \int_M (R-\rho)^2 &= \frac{1}{n} \int_M (R-\rho) div(X) \\ &= \frac{1}{n} \int_M \langle \nabla R, X \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, $R = \rho$. $\square$

2.4 Sólitons de Yamabe completos e não-compactos

Nesta seção abordamos o estudo da curvatura escalar de sólitons de Yamabe completos e não-compactos.

O primeiro resultado devido a Ma e Miquel [22] nos dá uma condição para o sinal da curvatura escalar de um sóliton de Yamabe gradiente e não-expansivo.

Teorema 6. *Seja* (M^n, g, f) *um sóliton de Yamabe gradiente completo e não-compacto com* $\rho \geqslant 0$*. Assuma que* $\liminf_{x\to\infty} R(x) \geqslant 0$*. Então, a curvatura escalar* R *de* M^n *é não-negativa. Além disso, se* M^n *não é flat, então* $R > 0$ *em* M^n*.*

Demonstração. Assuma que $\inf_M R(x) < 0$, como $\liminf_{x\to\infty} R(x) \geqslant 0$ temos que existe $z \in M$ tal que $R(z) = \inf_M R(x) < 0$. Desta forma temos que

$$\Delta R(z) \geqslant 0 \text{ e } \nabla R(z) = 0.$$

Assim, no ponto z temos

$$(n-1)\Delta R + \tfrac{1}{2}\langle \nabla R, \nabla f\rangle \geqslant 0,$$

então, pelo Lema 3 segue que

$$R(z)^2 - \rho R(z) \leqslant 0,$$

o que é um absurdo, pois $\rho \geqslant 0$, mas estamos supondo $R(z) < 0$. Sendo assim, $\inf_M R(x) \geqslant 0$. Portanto, pelo Princípio do Máximo Forte concluímos que $R(x) > 0$ ou $R(x) = 0$ em M^n. $\square$

A proposição abaixo será usada como forte ferramenta para a demonstração do próximo resultado.

Proposição 7. *[22, Proposição 6] Seja* (M^n, g, f) *um sóliton de Yamabe gradiente com bordo suave. Então temos*

$$n(n-1)\int_M (R-\rho)^2 - \int_M Ric(\nabla f, \nabla f) = (n-1)\int_{\partial M} (R-\rho)\nabla_\nu f$$

onde ν *é a normal unitária exterior ao longo do* ∂M*.*

Demonstração. Desde que

$$\int_M |\Delta f|^2 = \int_M \Delta f \cdot f_{jj},$$

podemos usar integração por partes para obter

$$\int_M \langle \nabla\Delta f, \nabla f\rangle + \int_M \Delta f \cdot f_{jj} = \int_{\partial M} \Delta f \langle \nabla f, \nu\rangle,$$

i.e.,

$$\int_M \Delta f \cdot f_{jj} = \int_{\partial M} \Delta f \nabla_\nu f - \int_M \langle \nabla\Delta f, \nabla f\rangle.$$

Usando a fórmula de Bochner

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = |\nabla^2 f|^2 + \langle \nabla f, \nabla\Delta f\rangle + Ric(\nabla f, \nabla f),$$

temos que

$$\int_M \Delta f f_{jj} = \int_{\partial M} n(R-\rho)\nabla_\nu f + \int_M \left(|\nabla^2 f|^2 + Ric(\nabla f, \nabla f) - \frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2\right).$$

Agora, observe que usando o Teorema da divergência temos

$$\begin{aligned}
\int_M \Delta|\nabla f|^2 &= \int_{\partial M} \nabla_\nu |\nabla f|^2 \\
&= \int_{\partial M} 2\langle \nabla_\nu \nabla f, \nabla f\rangle \\
&= 2\int_{\partial M} \nabla^2 f(\nu, \nabla f) \\
&= 2\int_{\partial M} (R-\rho)\langle \nu, \nabla f\rangle,
\end{aligned}$$

onde $\nabla_\nu = \frac{\partial}{\partial \nu}$. Assim, segue que

$$\int_M |\Delta f|^2 = (n-1)\int_{\partial M} (R-\rho)\nabla_\nu f + \int_M (|\nabla^2 f|^2 + Ric(\nabla f, \nabla f)).$$

Agora usando a equação estrutural e seu traço, obtemos

$$(n^2-n)\int_M (R-\rho)^2 - \int_M Ric(\nabla f, \nabla f) = (n-1)\int_{\partial M} (R-\rho)\nabla_\nu f.$$

$\square$

O próximo teorema nos fornece condições suficientes para existência de métricas de curvatura escalar constante quando o sóliton de Yamabe gradiente é completo e não-compacto.

Teorema 7. *[22] Seja* (M^n, g, f) *um sóliton de Yamabe gradiente completo e não-compacto tal que* $|R-\rho| \in L^1(M)$, $\int_M Ric(\nabla f, \nabla f) \leqslant 0$, *e a função potencial* f *tem no máximo crescimento quadrático em* M^n*; isto é,*

$$|f(x)| \leqslant Cd(x, x_0)^2, \ |\nabla f| \leqslant C(1 + d(x, x_0)^2),$$

próximo do infinito, onde C *é alguma constante uniforme e* $d(x, x_0)$ *é a função distância do ponto* x *ao ponto fixo* x_0*. Então* $R = \rho$ *em* M^n*.*

Demonstração. Usando a Proposição 7 juntamente com a hipótese na integral da curvatura de Ricci, temos que para alguma constante $C(n) > 0$,

$$C(n) \int_{B_r} |R - \rho|^2 \ \leqslant \ (n-1) \int_{\partial B_r} (R - \rho) \nabla_\nu f, \tag{2.8}$$

usando Cauchy-Schwarz e o crescimento quadrático da função potencial, obtemos de (2.8) que

$$C(n) \int_{B_r} |R - \rho|^2 \leqslant Cr \int_{\partial B_r} |R - \rho|.$$

Agora, pela Fórmula de Fubini (veja [1, Proposição 1.6]) segue que

$$\int_M |R - \rho| = \int_0^r \int_{\partial B_r} |R - \rho|.$$

Note que usando o fato de $|R - \rho| \in L^1(M)$ temos

$$\infty > \int_M |R - \rho| = \int_0^r \int_{\partial B_r} |R - \rho| = r \int_{\partial B_r} |R - \rho|.$$

Logo, existe uma sequência $r = r_j \to \infty$ tal que

$$r \int_{\partial B_r} |R - \rho| \to 0,$$

i.e.,

$$\int_M |R - \rho|^2 = 0.$$

Portanto, $R = \rho$. □

Seguindo as ideias de Miquel e Ma, em 2021 A. W. Cunha [5] deu uma prova mais simples sem aplicar a Proposição 7. Vejamos:

Uma demonstração mais simples. Pela equação estrutural do sóliton de Yamabe gradiente, temos

$$n \int_{B_r} (R - \rho)^2 = \int_{B_r} (R - \rho) \Delta f,$$

onde por integração por partes, temos pelo Lema 3 que

$$\begin{aligned} n \int_{B_r} (R - \rho)^2 &= -\int_{B_r} \langle \nabla R, \nabla f \rangle + \int_{\partial B_r} (R - \rho) \nabla_\nu f \\ &= \frac{1}{n-1} \int_{B_r} Ric(\nabla f, \nabla f) + \int_{\partial B_r} (R - \rho) \nabla_\nu f. \end{aligned}$$

Agora, usando as hipóteses do teorema, temos

$$n\int_{B_r}(R-\rho)^2 \leqslant Cr\int_{\partial B_r}|R-\rho|.$$

Por fim, basta seguir como na prova original do Teorema 7. □

Mais recentemente A. W. Cunha e Rong Mi [8] obtiveram o Teorema 7 sem assumir a hipótese no crescimento da função potencial.

Teorema 8. *Seja* (M^n, g, f) *um sóliton de Yamabe gradiente completo e não-compacto tal que* $\int_M \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) \leqslant 0$. *Se*

$$\int_M |\nabla|\nabla f|^2| = o(r), \tag{2.9}$$

então $R = \rho$ *em* M^n.

Demonstração. Pelo Lema 3 temos que

$$(n-1)\nabla R = -\mathrm{Ric}(\nabla f, \cdot). \tag{2.10}$$

Calculando o traço da equação (2.2) temos

$$\Delta f = n(R-\rho). \tag{2.11}$$

Integrando por partes em uma bola, obtemos

$$n\int_{B_r}|R-\rho|^2 = \int_{B_r}(R-\rho)\Delta f = -\int_{B_r}\langle\nabla R, \nabla f\rangle + \int_{\partial B_r}(R-\rho)\nabla_\nu f,$$

e da equação (2.10) obtemos

$$n\int_{B_r}|R-\rho|^2 = \frac{1}{n-1}\int_{B_r}\mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \int_{\partial B_r}(R-\rho)\nabla_\nu f \leqslant \int_{\partial B_r}(R-\rho)\nabla_\nu f,$$

ou seja,

$$n\int_{B_r}|R-\rho|^2 \leqslant \int_{\partial B_r}|R-\rho||\nabla f|.$$

Desde que

$$\langle\nabla|\nabla f|^2, \nabla f\rangle = 2\nabla^2 f(\nabla f, \nabla f) = 2(R-\rho)|\nabla f|^2,$$

obtemos da desigualdade de Cauchy-Schwartz que

$$n\int_{B_r}|R-\rho|^2 \leqslant \frac{1}{2}\int_{\partial B_r}|\nabla|\nabla f|^2|.$$

Agora usando a Fórmula de Fubini e (2.9) com $r \to \infty$ podemos concluir

$$\int_{B_r} |R - \rho|^2 \to 0.$$

Portanto,

$$\int_M |R - \rho|^2 = 0,$$

e assim concluímos que $R = \rho$. □

No que segue, provaremos um teorema do tipo de Liouville de funções harmônicas com integral de Dirichlet finita.

Teorema 9. *[22] Seja* (M^n, g) *uma variedade Riemanniana completa e não-compacta com curvatura de Ricci não-negativa. Assuma que* u *é uma função harmônica onde para alguma bola* $B(x_0)$ *vale:*

$$\int_{M - B(x_0)} d(x, x_0)^{-2} |\nabla u|^2 < \infty.$$

Então, $\nabla^2 u = 0$ *em* M^n*.*

Demonstração. Lembrando da fórmula de Bochner

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla u|^2 = |\nabla^2 u|^2 + \langle \nabla u, \nabla \Delta u\rangle + \mathrm{Ric}(\nabla u, \nabla u)$$

e usando o fato da harmonicidade de u, temos que

$$|\nabla^2 u|^2 + \mathrm{Ric}(\nabla u, \nabla u) = \frac{1}{2}\Delta|\nabla u|^2. \tag{2.12}$$

Agora, considere uma função cut-off, introduzida em [11], $\phi_r \in C_0^\infty(B(x_0, 2r))$ para $r > 0$ tal que

$$\begin{cases} 0 \leqslant \phi_r \leqslant 1 & \text{em} \quad B(x_0, 2r) \\ \phi_r = 1 & \text{em} \quad B(x_0, r) \\ |\nabla \phi_r|^2 \leqslant \frac{C}{r^2} & \text{em} \quad B(x_0, 2r) \\ \Delta \phi_r \leqslant \frac{C}{r^2} & \text{em} \quad B(x_0, 2r), \end{cases}$$

onde $C > 0$ é constante. Sendo

$$\Delta \phi_r^2 = 2(\phi_r \Delta \phi_r + |\nabla \phi_r|^2),$$

segue que $\Delta \phi_r^2 \longrightarrow 0$ quando $r \longrightarrow \infty$. Veja que multiplicando (2.12) por ϕ_r^2 e integrando sobre a bola $B_{2r}(x_0)$ usando que $\mathrm{Ric} \geqslant 0$, temos

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \int_{B_{2r}(x_0)} [|\nabla^2 u|^2 + \mathrm{Ric}(\nabla u, \nabla u)]\phi_r^2 \\ &= \int_{B_{2r}(x_0)} \frac{1}{2}\Delta|\nabla u|^2 \phi_r^2. \end{aligned}$$

Usando integração por partes, segue que

$$\int_{B_{2r}(x_0)} \frac{1}{2}\Delta|\nabla u|^2\phi_r^2 = \int_{B_{2r}(x_0)} \frac{1}{2}|\nabla u|^2\Delta\phi_r^2 \leqslant \int_{B_{2r}(x_0)-B_r(x_0)} \frac{C}{2r^2}|\nabla u|^2.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \int_M [|\nabla^2 u|^2 + \mathrm{Ric}(\nabla u, \nabla u)]\phi_r^2 \\ &\leqslant \int_{B_{2r}(x_0)-B_r(x_0)} \frac{C}{2r^2}|\nabla u|^2 \to 0, \end{aligned}$$

quando $r \to \infty$. Logo,

$$[|\nabla^2 u|^2 + \mathrm{Ric}(\nabla u, \nabla u)]\phi_r^2 = 0,$$

o que implica que $\nabla^2 u = 0$ e $\mathrm{Ric}(\nabla u, \nabla u) = 0$ em M. □

Agora, usaremos a ideia da prova do Teorema 9 para estudar os sólitons de Yamabe no caso não-gradiente, i.e., X é um campo vetorial qualquer. No entanto, necessitaremos do seguinte lema (conhecido como fórmula de Bochner generalizada) cuja ideia para demonstração foi baseada em [25], o qual será muito útil na demonstração do Teorema 10.

Lema 4. *[34] Sejam (M^n, g) uma variedade Riemanniana e $X \in \mathfrak{X}(M)$ qualquer, então*

$$\mathrm{div}(\mathcal{L}_X g)(X) = \frac{1}{2}\Delta|X|^2 - |\nabla X|^2 + \mathrm{Ric}(X, X) + \nabla_X \mathrm{div}X.$$

Demonstração. Dado um referencial geodésico $\{e_i\}_{i=1}^n$ na vizinhança de $p \in M$ qualquer e $X \in \mathfrak{X}(M)$, temos que

$$\begin{aligned} (\mathrm{div}\mathcal{L}_X g)(X) &= \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i}\mathcal{L}_X g)(e_i, X) \\ &= \sum_{i=1}^n \nabla_{e_i}(\mathcal{L}_X g(e_i, X)) - \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_X g(\nabla_{e_i} e_i, X) - \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_X g(e_i, \nabla_{e_i} X) \\ &= \sum_{i=1}^n \nabla_{e_i}(g(\nabla_{e_i} X, X) + g(e_i, \nabla_X X)) - \sum_{i=1}^n g(\nabla_{e_i} X, \nabla_{e_i} X) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n g(e_i, \nabla_{\nabla_{e_i} X} X), \end{aligned}$$

o que implica em

$$\begin{aligned}(div\mathcal{L}_X g)(X) &= \sum_{i=1}^{n}\nabla_{e_i}(g(\nabla_{e_i}X,X)) + \sum_{i=1}^{n}\nabla_{e_i}(g(e_i,\nabla_X X)) - \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{e_i}X,\nabla_{e_i}X)\\ &\quad - \sum_{i=1}^{n} g(e_i,\nabla_{\nabla_{e_i}X}X).\end{aligned}$$

Agora note que, sendo $\nabla\frac{1}{2}|X|^2 = \alpha^j e_j$ temos

$$\begin{aligned}\alpha^j &= g\left(\nabla\frac{1}{2}|X|^2, e_j\right)\\ &= \nabla_{e_j}\left(\frac{1}{2}|X|^2\right)\\ &= g(\nabla_{e_j}X,X).\end{aligned}$$

Assim

$$\nabla\frac{1}{2}|X|^2 = \sum_{j=1}^{n} g(\nabla_{e_j}X,X)e_j,$$

donde

$$\begin{aligned}\Delta\frac{1}{2}|X|^2 &= div\left(\nabla\left(\frac{1}{2}|X|^2\right)\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n} g\left(\nabla_{e_i}\nabla\frac{1}{2}|X|^2, e_i\right).\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\nabla_{e_i}\nabla\frac{1}{2}|X|^2 &= \nabla_{e_i}\left(\sum_{j=1}^{n} g(\nabla_{e_j}X,X)e_j\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n} g(\nabla_{e_j}X,X)\nabla_{e_i}e_j + \sum_{j=1}^{n}\nabla_{e_i}(g(\nabla_{e_j}X,X))e_j\\ &= \sum_{j=1}^{n}\nabla_{e_i}(g(\nabla_{e_j}X,X))e_j.\end{aligned}$$

Daí,

$$\Delta\frac{1}{2}|X|^2 = \sum_{i=1}^{n}\nabla_{e_i}(g(\nabla_{e_i}X,X)).$$

Agora lembre que

$$|\nabla X|^2 = \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{e_i}X,\nabla_{e_i}X).$$

Então

$$\begin{aligned}
(div\mathcal{L}_X g)(X) &= \Delta\frac{1}{2}|X|^2 + \sum_{i=1}^{n}\nabla_{e_i}(g(e_i,\nabla_X X)) - |\nabla X|^2 - \sum_{i=1}^{n} g(e_i,\nabla_{\nabla_{e_i}X}X)\\
&= \Delta\frac{1}{2}|X|^2 - |\nabla|^2 + \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{e_i}e_i,\nabla_X X) + \sum_{i=1}^{n} g(e_i,\nabla_{e_i}\nabla_X X)\\
&- \sum_{i=1}^{n} g(e_i,\nabla_{\nabla_{e_i}X}X)\\
&= \Delta\frac{1}{2}|X|^2 - |\nabla X|^2 + \sum_{i=1}^{n} g(e_i,\nabla^2_{e_i,X}X).
\end{aligned}$$

Note ainda que,

$$\begin{aligned}
Ric(X,X) &= \sum_{i=1}^{n} g(Rm(e_i,X)X,e_i)\\
&= \sum_{i=1}^{n} g(\nabla^2_{e_i,X}X - \nabla^2_{X,e_i}X,e_i),
\end{aligned}$$

assim

$$(div\mathcal{L}_X g)(X) = \Delta\frac{1}{2}|X|^2 - |\nabla X|^2 + Ric(X,X) + \sum_{i=1}^{n} g(\nabla^2_{X,e_i}X,e_i).$$

Usando que

$$X = x^j e_j \Rightarrow \nabla_X e_i = x^j\nabla_{e_j}e_i = 0,$$

vamos calcular $\nabla_X divX$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\nabla_X divX &= \sum_{i=1}^{n}\nabla_X(g(\nabla_{e_i}X,e_i))\\
&= \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_X\nabla_{e_i}X,e_i) + \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{e_i}X,\nabla_X e_i)\\
&= \sum_{i=1}^{n} g(\nabla^2_{X,e_i}X,e_i) + \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{\nabla_X e_i}X,e_i) + \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{e_i}X,\nabla_X e_i)\\
&= \sum_{i=1}^{n} g(\nabla^2_{X,e_i}X,e_i).
\end{aligned}$$

Logo,

$$(div\mathcal{L}_X g)(X) = \frac{1}{2}\Delta|X|^2 - |\nabla X|^2 + Ric(X,X) + \nabla_X divX.$$

□

Teorema 10. *[22] Suponha que o sóliton de Yamabe* (M^n, g, X) *possui curvatura de Ricci não-positiva. Assuma que*

$$\int_{M-B_r} d(x, x_0)^{-2}|X|^2 < \infty.$$

Então, $\nabla X = 0$ *e* $R = \rho$.

Demonstração. Por (2.3), usando o Lema 4 e a identidade $div(\lambda I)(X) = \langle \nabla\lambda, X\rangle$ onde λ é uma função em M^n, que nos dá

$$div(\mathcal{L}_X g)(X) = 2\nabla_X R, \tag{2.13}$$

temos

$$|\nabla X|^2 = \frac{1}{2}\Delta|X|^2 + Ric(X, X) + (n-2)\nabla_X R. \tag{2.14}$$

Considere uma função $\phi \in C_0^\infty(B(x_0, 2r))$ para $r > 0$ tal que

$$\begin{cases} 0 \leqslant \phi \leqslant 1 & \text{em} \quad B(x_0, 2r) \\ \phi = 1 & \text{em} \quad B(x_0, r) \\ |\nabla\phi|^2 \leqslant \frac{C}{r^2} & \text{em} \quad B(x_0, 2r) \\ \Delta\phi \leqslant \frac{C}{r^2} & \text{em} \quad B(x_0, 2r). \end{cases}$$

Onde $C > 0$ é constante. Sendo

$$\Delta\phi^2 = 2(\phi\Delta\phi + |\nabla\phi|^2),$$

segue que $\Delta\phi^2 \longrightarrow 0$ quando $r \longrightarrow \infty$. Usando a equação (2.14) segue que

$$\int_{B_r} |\nabla X|^2\phi^2 = \frac{1}{2}\int_{B_r} \Delta|X|^2\phi^2 + \int_{B_r} Ric(X, X)\phi^2 + (n-2)\int_{B_r} \nabla_X R\phi^2. \tag{2.15}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_{B_r} \nabla_X R\phi^2 &= -\int_{B_r} divX(R-\rho)\phi^2 - \int_{B_r} 2\phi\nabla_X\phi(R-\rho) \\ &= -n\int_{B_r} (R-\rho)^2\phi^2 - \int_{B_r} 2\phi\nabla_X\phi(R-\rho). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Assim, substituindo (2.16) em (2.15) obtemos

$$\begin{aligned} \int_{B_r} |\nabla X|^2\phi^2 &= \frac{1}{2}\int_{B_r} \Delta|X|^2\phi^2 + \int_{Br} Ric(X, X)\phi^2 \\ &\quad -n(n-2)\int_{B_r} (R-\rho)^2\phi^2 \\ &\quad -2(n-2)\int_{B_r} \phi\nabla_X\phi(R-\rho). \end{aligned}$$

Reescrevemos

$$
\begin{aligned}
& \int_{B_r} |\nabla X|^2 \phi^2 + n(n-2) \int_{B_r} (R-\rho)^2 \phi^2 - \int_{B_r} Ric(X,X)\phi^2 \\
= & \ \frac{1}{2} \int_{B_r} |X|^2 \Delta \phi^2 - 2(n-2) \int_{B_r} \phi \nabla_X \phi (R-\rho). \qquad (2.17)
\end{aligned}
$$

Agora, observe que pelas desigualdades de Young e Cauchy-Schwartz obtemos

$$
\begin{aligned}
& -2(n-2) \int_{B_r} \phi \nabla_X \phi (R-\rho) \\
= & \ 2(n-2) \int_{B_r} \phi \nabla_X \phi (\rho - R) \\
\leqslant & \ 2(n-2) \int_{B_r} |\phi \nabla_X (\rho - R)| \\
\leqslant & \ 2(n-2) \left(\int_{B_r} |\phi (R-\rho)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{B_r} |\nabla_X \phi|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
\leqslant & \ 2(n-2) \left[\frac{1}{2} \left(\int_{B_r} |\phi (R-\rho)|^2 \right) + \frac{1}{2} \left(\int_{B_r} |\nabla_X \phi|^2 \right) \right] \\
\leqslant & \ (n-2) \left(\int_{B_r} |\phi (R-\rho)|^2 + \int_{B_r} |\nabla \phi|^2 |X|^2 \right).
\end{aligned}
$$

Usando isto em (2.17) encontramos

$$
\begin{aligned}
& \int_{B_r} |\nabla X|^2 + (n-1)(n-2) \int_{Br} \phi^2 (R-\rho)^2 - \int_{B_r} \phi^2 Ric(X,X) \\
\leqslant & \ \int_{B_{2r} - B_r} \frac{C}{2r^2} |X|^2 + (n-2) \int_{B_{2r} - B_r} \frac{C}{r^2} |X|^2.
\end{aligned}
$$

Logo, pela nossa hipótese integral

$$
\begin{aligned}
0 \ \leqslant & \ \int_{B_r} \phi^2 [|\nabla X|^2 + (n-1)(n-2)(R-\rho)^2 - Ric(X,X)] \\
\leqslant & \ \int_{B_{2r} - B_r} \frac{C}{2r^2} |X|^2 + (n-2) \int_{B_{2r} - B_r} \frac{C}{r^2} |X|^2 \to 0,
\end{aligned}
$$

quando $r \to \infty$.

Portanto, temos que $\nabla X = 0$ e $R = \rho$. □

2.4.1 Curvatura escalar via parabolicidade

Nesta seção iniciamos com a definição de variedades parabólicas, as quais serão de interesse para obtermos curvatura escalar de sólitons de Yamabe gradiente completos e não-compactos.

Definição 8. *Uma variedade Riemanniana é chamada parabólica se toda função subharmônica em M^n limitada por cima é constante, i.e, se $u \in C^\infty(M)$ com $\Delta u \geqslant 0$ e $\sup_M u < +\infty$, então u é constante.*

Um exemplo simples de variedades parabólicas são as variedades Riemannianas compactas devido o Teorema de Hopf, já no caso não-compacto temos o próprio $\mathbb{R}^2$. Para mais detalhes sobre variedades parabólicas referimos o leitor consultar [17].

Para o próximo resultado precisaremos do seguinte lema devido a Yau [36].

Lema 5. *Seja u uma função suave não-negativa subharmônica em uma variedade Riemanniana completa M^n. Se $u \in L^p(M)$, para algum $p > 1$, então u é constante.*

Para uma prova veja [36].

O seguinte teorema trata-se de uma versão do Teorema 9, em que ao invés de assumirmos a hipótese da integral de Dirichlet ser finita, nós assumiremos parabolicidade e alguma regularidade L^∞ ou L^p.

Teorema 11 (Cunha-Lemos-Roing, 2022)**.** *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa e não-compacta com curvatura de Ricci não-negativa. Suponha que u é uma função harmônica em M^n. Se M^n é parabólica e $\nabla u \in L^\infty(M)$ ou $|\nabla u| \in L^p(M)$ para $p > 1$, então $\nabla^2 u = 0$.*

Demonstração. Primeiramente vamos assumir que M^n é parabólica e $\nabla u \in L^\infty(M)$. Como u é harmônica temos pela fórmula de Bochner que

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla u|^2 = \mathrm{Ric}(\nabla u, \nabla u) + |\nabla^2 u|^2 \geqslant 0, \tag{2.18}$$

uma vez que $\mathrm{Ric} \geqslant 0$. Assim, $|\nabla u|^2$ é uma função subharmônica em M, e desde que $\sup_M |\nabla u| < \infty$ e M^n é parabólica obtemos que $|\nabla u|^2$ é constante em M^n. Novamente usando a fórmula de Bochner, temos

$$|\nabla^2 u|^2 + \mathrm{Ric}(\nabla u, \nabla u) = 0.$$

Como a curvatura de Ricci é não-negativa obtemos $\nabla^2 u = 0$ e $\mathrm{Ric}(\nabla u, \nabla u) = 0$.

Por outro lado, se $|\nabla u| \in L^p(M)$ para $p > 1$, podemos usar novamente (2.18) para concluir que $|\nabla u|^2$ é uma função subharmônica em M. Desde que $|\nabla u| \in L^p(M)$ para $p > 1$, temos pelo Lema 5 que $|\nabla u|^2$ é constante em M. Portanto, podemos seguir como acima para concluir a demonstração. $\square$

O próximo lema devido a A. W. Cunha [4] nos dá uma fórmula tipo Bochner para um sóliton de Yamabe gradiente.

Lema 6. *Seja* (M^n, g, f) *um sóliton de Yamabe gradiente. Então*

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = |\nabla^2 f|^2 - \frac{1}{n-1}Ric(\nabla f, \nabla f). \tag{2.19}$$

Demonstração. Pela fórmula de Bochner e calculando o traço da equação estrutural do sóliton de Yamabe (2.2) temos

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = Ric(\nabla f, \nabla f) + n\langle\nabla f, \nabla R\rangle + |\nabla^2 f|^2. \tag{2.20}$$

Agora lembre pelo Lema 3 que

$$(n-1)\langle\nabla R, \nabla f\rangle = -Ric(\nabla f, \nabla f). \tag{2.21}$$

Substituindo (2.21) em (2.20) obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 &= Ric(\nabla f, \nabla f) - \frac{n}{n-1}Ric(\nabla f, \nabla f) + |\nabla^2 f|^2 \\ &= -\frac{1}{n-1}Ric(\nabla f, \nabla f) + |\nabla^2 f|^2.\end{aligned}$$

Provando a equação (2.19). □

Recentemente, Maeta [24] provou que se M^n é um sóliton de Yamabe gradiente completo, não-trivial, estático ou contrátil, tal que $Ric(\nabla f, \nabla f) \leqslant 0$, f não tem pontos críticos e $R \geqslant \rho$, então $R = \rho$. O próximo teorema divido a A. W. Cunha [4] consideramos sólitons de Yamabe com Ricci não-positivo e alguma regularidade L^∞ ou L^p no gradiente de f. Com isto o resultado de Maeta foi obtido sem a condição $R \geqslant \rho$ e sem a condição da função potencial não ter pontos críticos. Temos o seguinte.

Teorema 12. *Seja* (M^n, g, f) *um sóliton de Yamabe gradiente completo não-trivial com* $Ric(\nabla f, \nabla f) \leqslant 0$. *Se* M^n *for parabólica e* $\nabla f \in L^\infty(M)$ *ou* $|\nabla f| \in L^p(M)$ *para* $p > 1$, *então* $R = \rho$.

Demonstração. Primeiramente assumimos que M^n é parabólica e $\nabla f \in L^\infty(M)$. Do Lema 6 temos

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = |\nabla^2 f|^2 - \frac{1}{n-1}Ric(\nabla f, \nabla f) \geqslant 0. \tag{2.22}$$

Logo, $|\nabla f|^2$ é uma função subharmônica em M^n. Além disso, como $\sup_M |\nabla f| < \infty$ e M^n é parabólica, obtemos que $|\nabla f|^2$ é uma constante em M^n. Portanto,

$$|\nabla^2 f|^2 - \frac{1}{n-1}\mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) = 0.$$

Como a curvatura de Ricci é não-positiva, obtemos $\nabla^2 f = 0$ e $\mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) = 0$. Portanto, da equação (2.2) concluímos que $R = \rho$.

Por outro lado, se $|\nabla f| \in L^p(M)$ for $p > 1$, podemos usar novamente (2.22) para concluir que $|\nabla f|^2$ é uma função subharmônica em M^n. Como $|\nabla f| \in L^p(M)$ para $p > 1$, obtemos do Lema 5 que $|\nabla f|^2$ é uma constante em M^n. Sendo assim, podemos seguir como acima para concluir que $R = \rho$. $\square$

Capítulo 3

Sólitons de Ricci-Bourguignon

3.1 Definições e fórmulas básicas

Neste capítulo vamos expor alguns resultados sobre caracterização da curvatura escalar de sólitons de Ricci-Bourguignon. Os resultados desta seção têm como referência principal [6].

Definição 9. *Seja* (M^n, g) *uma variedade Riemanniana de dimensão* $(n \geqslant 3)$*, e seja* $\mu \in \mathbb{R}$*. Se existir um campo vetorial suave* X *em* M^n *tal que*

$$\mathrm{Ric} + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g - \mu R g = \lambda g, \tag{3.1}$$

onde Ric *é o tensor curvatura de Ricci,* λ *é uma constante e* $\mathcal{L}_X g$ *representa a derivada de Lie de* g *na direção do campo vetorial* X*, dizemos que* (M^n, g, X, μ) *é um sóliton de Ricci-Bourguignon.*

Observamos que no caso em que $\mu = 0$ a equação corresponde ao sóliton de Ricci

$$\mathrm{Ric} + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \lambda g. \tag{3.2}$$

Se X é um campo gradiente de uma função suave f em M^n, então, tal sóliton de Ricci-Bourguignon é chamado de sóliton de Ricci-Bourguignon gradiente (o qual será denotado por (M, g, f, μ)). Nesse caso, (3.1) torna-se

$$\mathrm{Ric} + \nabla^2 f - \mu R g = \lambda g, \tag{3.3}$$

onde $\nabla^2 f$ representa a Hessiana de f. Além disso, um sóliton de Ricci-Bourguignon (M, g, X, μ) é chamado *expansivo*, *estático* ou *contrátil* quando $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ ou $\lambda > 0$, respectivamente. Além disso, quando o campo vetorial X é nulo (ou f é constante no caso gradiente) então o sóliton de Ricci-Bourguignon é chamado *trivial*.

Observação 2. Se (M^n, g, X, μ) é um sóliton de Ricci-Bourguignon Einstein com $\mu \neq \frac{1}{n}$, então $(M^n, g, \tilde{X})$ é um sóliton de Yamabe com $\tilde{X} = \frac{nX}{\mu n - 1}$. Na verdade, desde que M^n seja uma variedade de Einstein, temos

$$\mathrm{Ric} = \frac{R}{n} g,$$

e a equação do sóliton de Ricci-Bourguignon pode ser escrita como

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\tilde{X}} g = \Big(R - \frac{\lambda n}{1 - \mu n}\Big) g,$$

i.e., $(M, g, \tilde{X})$ é um sóliton de Yamabe com constante $\rho = \frac{\lambda n}{1 - \mu n}$.

O seguinte lema é bem conhecido na teoria dos sólitons de Ricci-Bourguignon gradiente e será útil nas futuras demonstrações.

Lema 7. *[10] Seja* (M^n, g, f, μ) *um sóliton de Ricci-Bourguignon gradiente. Então, as seguintes identidades são válidas:*

$$\Delta f = (n\mu - 1)R + n\lambda, \tag{3.4}$$

$$(1 - 2(n-1)\mu)\nabla R = 2\mathrm{Ric}(\nabla f, \cdot), \tag{3.5}$$

$$(1 - 2(n-1)\mu)\Delta R = \langle \nabla R, \nabla f \rangle + 2(\mu R^2 - |\mathrm{Ric}|^2 + \lambda R). \tag{3.6}$$

Demonstração. A identidade (3.4) é obtida facilmente através do cálculo do traço da equação estrutural (3.3). Para obter a segunda identidade começamos aplicando a derivada covariante na equação estrutural, i.e.,

$$\nabla_i R_{ij} + \nabla_i \nabla_i \nabla_j f = \nabla_i R \mu g_{ij}$$

e usando a identidade de Ricci obtemos

$$\nabla_i R_{ij} + \nabla_j \nabla_i \nabla_i f + R_{ijil} \nabla_l f = \nabla_i R \mu g_{ij}.$$

Usando a fórmula para a comutação das derivadas e a identidade de Bianchi contraída, temos

$$\frac{1}{2}\nabla_j R + \nabla_j \Delta f + R_{jl} \nabla_l f = \nabla_j R \mu,$$

i.e.,

$$\left(\frac{1}{2}-\mu\right)\nabla_j R+\nabla_j\Delta f+R_{jl}\nabla_l f=0.$$

Agora, pela equação (3.3) obtemos

$$(1-2(n-1)\mu)\nabla R=2Ric(\nabla f,\cdot).$$

Finalmente, aplicando a derivada covariante na identidade acima segue que

$$\begin{aligned}(1-2(n-1)\mu)\Delta R &= 2(\nabla_j R_{jl}\nabla_l f+R_{jl}\nabla_j\nabla_l f)\\ &= \nabla_l R\nabla_l f+2R_{jl}(\mu R g_{il}+\lambda g_{il}-R_{il})\\ &= \langle\nabla R,\nabla f\rangle+2(R^2\mu+R\lambda-|Ric|^2).\end{aligned}$$

Provando a equação (3.6). □

O teorema a seguir nos diz que dado um sóliton de Ricci-Bourguignon gradiente com ∇f completo, existe uma solução do fluxo de Ricci-Bourguignon (visto na introdução) que é igual ao sóliton em um determinado tempo.

Teorema 13. *[10] Seja (M^n, g_0, f_0) um sóliton de Ricci-Bourguignon gradiente com campo vetorial $\nabla_{g_0} f_0$ completo, então existe*

(a) uma família de métricas $g(t)$, solução do fluxo de Ricci-Bourguignon, com $g(0)=g_0$;

(b) uma família de difeomorfismos $\phi_t : M\to M$, com $\phi_0=Id_M$;

(c) uma família de funções $f(t,\cdot):M\to\mathbb{R}$ com $f(0,\cdot)=f_0(\cdot)$, definida para cada t tal que $\tau(t)=-2\lambda t+1>0$.

Essas famílias têm as seguintes propriedades:

(i) a família ϕ_t é gerada pelo campo vetorial $\nabla_{g_0} f_0$ eventualmente escalado pela inversa de $\tau(t)$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}(t,\cdot)=\frac{1}{\tau(t)}(\nabla_{g_0}f_0)(\phi(t,\cdot));$$

(ii) a métrica $g(t)$ é dada pelo pullback de $\phi(t,\cdot)$ e o reescalonamento através de $\tau(t)$

$$g(t)=\tau(t)\phi(t,\cdot)^*g_0;$$

(iii) a função $f(t)$ *é dada também por pullback, a saber*

$$f(t,\cdot) = (f_0 \circ \phi)(t,\cdot).$$

Para uma demonstração veja [10].

3.2 Sólitons de Ricci-Bourguignon compactos

Nesta seção, abordaremos sólitons de Ricci-Bourguignon compactos e a caracterização da sua curvatura escalar.

Recentemente, Mondal e A. Shaikh [26] mostraram que um sóliton de Ricci-Bourguignon gradiente compacto com ∇f conforme e não-trivial, é isométrico à esfera Euclideana $\mathbb{S}^n$. Depois disso, Dwivedi [16] provou o seguinte teorema de isometria para sólitons de Ricci-Bourguignon gradiente.

Teorema 14. *[16] Um sóliton de Ricci-Bourguignon gradiente compacto e não-trivial* (M^n, g, f, μ) *é isométrico à esfera Euclideana se qualquer um dos seguintes itens for válido:*

(a) M^n *possui curvatura escalar constante,*

(b) $\int_M \langle \nabla R, \nabla f \rangle \leqslant 0$,

(c) M^n *é uma variedade homogênea.*

Como consequência do Teorema 14, A. Shaikh e outros autores [30] provaram o seguinte.

Teorema 15. *Um sóliton de Ricci-Bourguignon gradiente compacto e não-trivial* (M^n, g, f) *possui curvatura escalar constante desde que* $|\mathrm{Ric}|^2 = \frac{R^2}{n}$, *e portanto* M^n *é isométrica à esfera Euclideana.*

Para uma prova veja [30, Teorema 1.5].

Agora, observe que

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{Ric}-\frac{R}{n}g\right|^2 &= \left\langle \mathrm{Ric}-\frac{R}{n}g, \mathrm{Ric}-\frac{R}{n}g\right\rangle\\ &= |Ric|^2 - 2\frac{R}{n}\langle Ric, g\rangle + \frac{R^2}{n}\\ &= |Ric|^2 - 2\frac{R}{n}\left\langle \overset{\circ}{Ric} + \frac{R}{n}g, g\right\rangle + \frac{R^2}{n}\\ &= |Ric|^2 - 2\frac{R^2}{n} + \frac{R^2}{n}\\ &= |\mathrm{Ric}|^2 - \frac{R^2}{n}.\end{aligned}$$

Assim, no teorema acima, a condição da curvatura de Ricci implica que $Ric = \frac{R}{n}g$, logo M^n é uma variedade de Einstein. Portanto, o Teorema 15 segue do Lema de Schur (veja [15]). Sendo assim, é um problema interessante provar que, para todo $\mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, um sóliton não-trivial de Ricci-Bourguignon gradiente compacto deve ter curvatura escalar constante.

No próximo teorema conseguiremos condições afirmativa quando $\mu \in (-\infty, \frac{1}{n})$. Além disso, com uma condição integral na curvatura de Ricci o resultado vale para o intervalo $\mu \in (\frac{1}{n}, +\infty)$. Provamos o seguinte.

Teorema 16. *Um sóliton não-trivial de Ricci-Bourguignon gradiente compacto* (M^n, g, f, μ) *possui curvatura escalar nos seguintes casos:*

(a) $\mu < \frac{1}{n}$*; ou*

(b) $\mu > \frac{1}{n}$ *e* $\int_M Ric(\nabla f, \nabla f) \leqslant 0$,

e além disso, M^n *é isométrica à esfera Euclideana.*

Demonstração. Pela compacidade de M^n e calculando o traço da equação (3.3) obtemos

$$\int_M |\lambda n + (\mu n - 1)R|^2 = \int_M (\lambda n + (\mu n - 1)R)\Delta f = -(\mu n - 1)\int_M \langle \nabla R, \nabla f\rangle. \qquad (3.7)$$

Lembre-se que a segunda identidade de Bianchi contraída nos dá $\delta\mathrm{Ric} + \frac{1}{2}\nabla R = 0$, e como consequência temos que

$$\delta\, \overset{\circ}{\mathrm{Ric}} = -\frac{n-2}{2n}\nabla R.$$

Substituindo isso na equação (3.7) segue que

$$\int_M |\lambda n + (\mu n - 1)R|^2 = \frac{2n(\mu n - 1)}{n-2}\int_M \langle \delta\, \overset{\circ}{\mathrm{Ric}}, \nabla f\rangle. \qquad (3.8)$$

Pela integração por partes em (3.8) obtemos por meio da equação estrutural (3.3) que

$$\begin{aligned}\int_M |\lambda n + (\mu n - 1)R|^2 &= -\frac{2n(\mu n - 1)}{n-2}\int_M \langle \overset{\circ}{\mathrm{Ric}}, \nabla^2 f\rangle \\ &= -\frac{2n(\mu n - 1)}{n-2}\int_M \langle \overset{\circ}{\mathrm{Ric}}, (\lambda + \mu R)g - \mathrm{Ric}\rangle \\ &= \frac{2n(\mu n - 1)}{n-2}\int_M \langle \overset{\circ}{\mathrm{Ric}}, \mathrm{Ric}\rangle,\end{aligned}$$

pois na última igualdade usamos o fato de que $\langle \overset{\circ}{\mathrm{Ric}}, g\rangle = 0$. Agora, desde que

$$\overset{\circ}{\mathrm{Ric}} = Ric - \frac{R}{n}g,$$

obtemos

$$\begin{aligned}\int_M |\lambda n + (\mu n - 1)R|^2 &= \frac{2n(\mu n - 1)}{n-2}\int_M \langle \overset{\circ}{\mathrm{Ric}}, \overset{\circ}{\mathrm{Ric}} + \frac{R}{n}g\rangle \\ &= \frac{2n(\mu n - 1)}{n-2}\int_M |\overset{\circ}{\mathrm{Ric}}|^2 .\end{aligned}$$

Então, por (a) concluímos que

$$\int_M |\lambda n + (\mu n - 1)R|^2 = 0,$$

assim

$$R = \frac{-\lambda n}{\mu n - 1}.$$

Por outro lado, se vale (b), podemos usar a equação (3.7) juntamente com o Lema 7 para obter

$$\int_M |\lambda n + (\mu n - 1)R|^2 = -(\mu n - 1)\int_M \langle \nabla R, \nabla f\rangle = \frac{2(1-\mu n)}{1 - 2(n-1)\mu}\int_M \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) \leqslant 0,$$

pois $\mu > \frac{1}{n}$ e $\int_M \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) \leqslant 0$.

Portanto,

$$R = \frac{-\lambda n}{\mu n - 1}.$$

□

O próximo teorema aborda o caso não-gradiente e essencialmente usaremos a condição de Kazdan-Warner para sua demonstração.

Teorema 17 (Cunha-Lemos-Roing, 2022)**.** *Se* (M^n, g, X) *é um sóliton de Ricci-Bourguignon* ($\mu \neq \frac{1}{n}$) *não-trivial para o fluxo de Bourguignon numa variedade fechada, tal que* X *é um campo vetorial conforme, então* R *é constante, i.e.,* $R = -\frac{\lambda n}{\mu n - 1}$.

Demonstração. Relembrando da condição de Kazdan-Warner [3] temos que

$$\int_M \langle \nabla R, X \rangle = 0.$$

Calculando o traço da equação estrutural temos

$$\mathrm{div}X = \lambda n + (\mu n - 1)R.$$

Por fim, integrando por partes segue que

$$\begin{aligned}\int_M (\lambda n + (\mu n - 1)R)^2 &= \int_M (\lambda n + (\mu n - 1)R)\mathrm{div}X \\ &= -(\mu n - 1)\int_M \langle \nabla R, X \rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Portanto,

$$R = -\frac{\lambda n}{\mu n - 1}.$$

□

3.3 Sólitons de Ricci-Bourguignon completos e não-compactos

O primeiro resultado desta seção trata de uma versão do Teorema 7 para sóliton de Ricci-Bourguignon, demonstrado inicialmente para um caso particular por Rong Mi [29] onde $\mu < \frac{1}{2(n-1)}$. Aqui apresentamos uma prova completa para todo μ.

Teorema 18 (Cunha-Lemos-Roing, 2022)**.** *Seja* (M^n, g, f)*, um sóliton de Ricci-Bourguignon gradiente completo tal que* $|\lambda n + (\mu n - 1)R| \in L^1(M)$ *e a função potencial* f *tem no máximo crescimento quadrático em* M^n*, i.e.,*

$$|f(x)| \leqslant Cd(x, o)^2, \ \ |\nabla f| \leqslant C(1 + d(x, o)^2),$$

próximo do infinito, onde C *é alguma constante uniforme e* $d(x, o)$ *é a função distância do ponto* x *até o ponto fixado* o*. Se qualquer um dos seguintes*

(a) $\int_M \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) \leqslant 0$ *e se* $\mu < \frac{1}{2(n-1)}$ *ou* $\mu > \frac{1}{n}$*;*

(b) $\int_M \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) \geqslant 0$ *e* $\frac{1}{2(n-1)} < \mu < \frac{1}{n}$*,*

for válido, então a curvatura escalar é $R = -\frac{\lambda n}{\mu n - 1}$ *em* M^n.

Demonstração. Calculando o traço da equação estrutural do sóliton de Ricci-Bourguignon, integrando por partes e usando a equação (3.5), temos

$$\begin{aligned}
\int_{B_r} |\lambda n + (\mu n - 1)R|^2 &= \int_{B_r} (\lambda n + (\mu n - 1)R)\Delta f \\
&= -(\mu n - 1)\int_{B_r} \langle \nabla R, \nabla f\rangle + \int_{\partial B_r} (\lambda n + (\mu n - 1)R)\nabla_\nu f \\
&= \frac{2(1-\mu n)}{1-2(n-1)\mu}\int_{B_r} \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \int_{\partial B_r} (\lambda n + (\mu n - 1)R)\nabla_\nu f.
\end{aligned}$$

Veja que em ambos os casos (a) e (b) obtemos

$$\frac{2(1-\mu n)}{1-2(n-1)\mu}\int_{B_r} \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) \leqslant 0,$$

usando Cauchy-Schwartz juntamente com o crescimento da função potencial, segue que

$$\int_{B_r} |\lambda n + (\mu n - 1)R|^2 \leqslant \int_{\partial B_r} (\lambda n + (\mu n - 1)R)\nabla_\nu f \leqslant Cr\int_{\partial B_r} |\lambda n + (\mu n - 1)R|.$$

Agora, pela Fórmula de Fubini temos

$$\int_M |\lambda n + (\mu n - 1)R| = \int_0^r \int_{\partial B_r} |\lambda n + (\mu n - 1)R|,$$

usando o fato de $|\lambda n + (\mu n - 1)R| \in L^1(M)$ segue que

$$\infty > \int_M |\lambda n + (\mu n - 1)R| = \int_0^r \int_{\partial B_r} |\lambda n + (\mu n - 1)R| = r\int_{\partial B_r} |\lambda n + (\mu n - 1)R|.$$

Logo, existe uma sequência $r = r_j \to \infty$ tal que

$$r\int_{\partial B_r} |\lambda n + (\mu n - 1)R| \longrightarrow 0,$$

i.e.,

$$\int_M |\lambda n + (\mu n - 1)R|^2 = 0,$$

o que implica

$$R = -\frac{\lambda n}{\mu n - 1}.$$

□

Corolário 3. *Nas mesmas condições do teorema acima, um sóliton de Ricci-Bourguignon estático deve ser Ricci flat.*

Demonstração. Pelo teorema anterior e usando o fato de $\lambda = 0$ concluímos que $R = 0$, de modo que da equação (3.6) temos Ric $\equiv 0$. □

Corolário 4. *Nas mesmas condições do teorema anterior, se M^n é um sóliton expansivo com $\mu > 1/n$ ou um sóliton contrátil com $\mu < 1/n$ então M^n deve ser isométrico à esfera Euclideana.*

Demonstração. Pelo Teorema 18 a curvatura escalar de M^n é constante, então se $\lambda < 0$ temos que M^n é um sóliton de Ricci gradiente expansivo com curvatura escalar constante $R = \xi n$, onde $\xi = \frac{-\lambda}{\mu n - 1} > 0$. Isto implica pelo Teorema [28, Teorema 7] que

$$|\mathrm{Ric}|^2 = \xi R = \frac{1}{n} R^2.$$

Pelo caso da igualdade na desigualdade de Cauchy-Schwarz, deduzimos que Ric $= \xi g$ ($\xi > 0$), e do Teorema de Myers's temos que M^n é compacta, sendo assim pelo Corolário 1.12 de [16] concluímos que M^n é isométrico à esfera Euclideana. O caso $\lambda > 0$ é análogo. □

Por fim, utilizando a ideia do Teorema 10 temos o seguinte resultado.

Teorema 19 (Cunha-Lemos-Roing, 2022)**.** *Seja (M^n, g, X, μ) um sóliton de Ricci-Bourguignon com curvatura de Ricci não-positiva e $\mu > 1$. Suponha que*

$$\int_{M - B_r(x_0)} d(x, x_0)^{-2} |X|^2 < \infty. \tag{3.9}$$

Então a curvatura escalar $R = -\frac{\lambda n}{\mu n - 1}$ em M^n e $\nabla X = 0$.

Demonstração. Calculando o traço da equação estrutural do sóliton de Ricci-Bourguignon, temos que o sóliton de Ricci-Bourguignon satisfaz

$$\mathrm{div} X = \lambda n + (\mu n - 1) R, \text{ em } M. \tag{3.10}$$

Usando o Lema 4, (3.1) e a identidade de Bianchi contraída $2\mathrm{divRic}(X) = \nabla_X R$, que nos dá

$$\mathrm{div}(\mathcal{L}_X g)(X) = (2\mu - 1) \nabla_X R, \tag{3.11}$$

encontramos a equação

$$|\nabla X|^2 = \frac{1}{2} \Delta |X|^2 + \mathrm{Ric}(X, X) + (n - 2)\mu \nabla_X R. \tag{3.12}$$

Agora vamos considera a função cut-off, introduzida em [11], $\phi = \phi_r \in C_0^\infty(B(x_0, 2r))$ para $r > 0$, tal que

$$\begin{cases} 0 \leqslant \phi_r \leqslant 1 & \text{in } B(x_0, 2r) \\ \phi_r = 1 & \text{in } B(x_0, r) \\ |\nabla \phi_r|^2 \leqslant \frac{C}{r^2} & \text{in } B(x_0, 2r) \\ \Delta \phi_r \leqslant \frac{C}{r^2} & \text{in } B(x_0, 2r). \end{cases} \tag{3.13}$$

Temos que

$$\begin{aligned} \int_{B_r} X_j \nabla_j R \phi^2 &= \frac{1}{\mu n - 1} \int_{B_r} X_j \nabla_j (\lambda n + (\mu n - 1) R) \phi^2 \\ &= -\frac{1}{\mu n - 1} \int_{B_r} \operatorname{div} X (\lambda n + (\mu n - 1) R) \phi^2 \\ &\quad -\frac{2}{\mu n - 1} \int_{B_r} \phi \nabla_X \phi (\lambda n + (\mu n - 1) R). \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{B_r} \nabla_X R \phi^2 = -\frac{1}{\mu n - 1} \int_{B_r} (\lambda n + (\mu n - 1) R)^2 \phi^2 - \frac{2}{\mu n - 1} \int_{B_r} \phi \nabla_X \phi (\lambda n + (\mu n - 1) R).$$

Integrando (3.12) obtemos

$$\int_{B_r} |\nabla X|^2 \phi^2 = \frac{1}{2} \int_{B_r} (\Delta \phi^2) |X|^2 + \int_{B_r} \operatorname{Ric}(X, X) \phi^2 + (n-2)\mu \int_{B_r} \nabla_X R \phi^2.$$

Implicando que

$$\begin{aligned} \int_{B_r} |\nabla X|^2 \phi^2 + \frac{(n-2)\mu}{\mu n - 1} \int_{B_r} (\lambda n + (\mu n - 1) R)^2 \phi^2 &= \frac{1}{2} \int_{B_r} (\Delta \phi^2) |X|^2 + \int_{B_r} \operatorname{Ric}(X, X) \phi^2 \\ &\quad -\frac{2(n-2)}{\mu n - 1} \int_{B_r} \phi \nabla_X \phi (\lambda n + (\mu n - 1) R). \end{aligned}$$

Usando as desigualdade de Young e Cauchy-Schwarz no terceiro termo do lado direito da igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} & -\frac{2(n-2)}{\mu n - 1} \int_{B_r} \phi \nabla_X \phi (\lambda n + (\mu n - 1) R) \\ = & \frac{2(n-2)}{\mu n - 1} \int_{B_r} \nabla_X \phi ((1 - \mu n) R - \lambda n) \phi \\ \leqslant & \frac{2(n-2)}{\mu n - 1} \left(\int_{B_r} |((1 - \mu n) R - \lambda n) \phi|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_r} |\nabla_X \phi|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \leqslant & \frac{(n-2)}{\mu n - 1} \left(\int_{B_r} |((1 - \mu n) R - \lambda n) \phi|^2 + \int_{B_r} |\nabla_X \phi|^2 \right) \\ \leqslant & \frac{(n-2)}{\mu n - 1} \int_{B_r} |((1 - \mu n) R - \lambda n) \phi|^2 + \frac{(n-2)}{\mu n - 1} \int_{B_r} |X|^2 |\nabla \phi|^2, \end{aligned}$$

uma vez que $\mu > 1$. Assim, como a curvatura de Ricci é não-positiva, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{B_r} |\nabla X|^2\phi^2 + \frac{(n-2)\mu}{\mu n - 1}\int_{B_r} (\lambda n + (\mu n - 1)R)^2\phi^2 \\
\leqslant\ & \frac{1}{2}\int_{B_r} (\Delta\phi^2)|X|^2 + \frac{(n-2)}{\mu n - 1}\int_{B_r} |((1-\mu n)R - \lambda n)\phi|^2 + \frac{(n-2)}{\mu n - 1}\int_{B_r} |X|^2|\nabla\phi|^2,
\end{aligned}$$

i.e.,

$$\begin{aligned}
&\int_{B_r} |\nabla X|^2\phi^2 + \frac{(n-2)(\mu-1)}{\mu n - 1}\int_{B_r} (\lambda n + (\mu n - 1)R)^2\phi^2 \\
\leqslant\ & \frac{1}{2}\int_{B_r} (\Delta\phi^2)|X|^2 + \frac{(n-2)}{\mu n - 1}\int_{B_r} |X|^2|\nabla\phi|^2 \\
\leqslant\ & \frac{1}{2}\int_{B_{2r}-B_r} \frac{C|X|^2}{r^2} + \frac{(n-2)}{\mu n - 1}\int_{B_{2r}-B_r} \frac{C|X|^2}{r^2} \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

quando $r \to +\infty$. Como $\mu > 1$ concluímos a prova do teorema. □

Usando a equação (3.6) temos o seguinte resultado.

Corolário 5. *Seja* (M^n, g, X, μ) *um sóliton de Ricci-Bourguignon com curvatura de Ricci não-positiva e* $\mu > 1$. *Se*

$$\int_{M-B_r(x_0)} d(x, x_0)^{-2}|X|^2 < \infty, \tag{3.14}$$

então M^n *deve ser não-expansivo. Em particular,*

(a) Se M^n *é estático então deve ser Ricci flat;*

(b) Se M^n *é contrátil então* M^n *é um sóliton de Yamabe com* $\tilde{X} = \frac{n}{\mu n - 1}X$.

Demonstração. Como o Teorema 19 implica $\nabla X = 0$ temos $\mathcal{L}_X g = 0$. Sendo assim, segue que

$$0 \geqslant \mathrm{Ric} = (\lambda + \mu R)g = -\frac{\lambda}{\mu n - 1}g.$$

Logo, $\lambda \geqslant 0$. Se M^n é estático então $\mathrm{Ric} = -\frac{\lambda}{\mu n - 1}g = 0$. Finalmente se M^n é contrátil então

$$\mathrm{Ric} = -\frac{\lambda}{\mu n - 1}g = \frac{R}{n}g,$$

portanto, M^n é Einstein. Pela observação 2 concluímos que $(M, g, \tilde{X})$ é um sóliton de Yamabe. □

Referências Bibliográficas

[1] Alías, L. J., Mastrolia, P. and Rigoli, M., *Maximum Principles and Geometric Applications*, Springer Monographs in Mathematics, (2016), DOI 10.1007/978-3-319-24337-5.

[2] Aubin, T.: *Équation diférentielles non-linéares et probléme de Yamabe concernant la courbure scalaire*. J. Math. Pures Appl. 55 (1976) 269-296.

[3] Bourguignon, J. P. and Ezin, J. P., *Scalar curvature functions in a conformal class of metrics and conformal transformations*. Trans. AMS., vol 301, n.2, 1987.

[4] Cunha, A. W., Remarks on scalar curvature of gradient Yamabe solitons with non-positive Ricci curvature. Diff. Geom. and its Appl., Vol.80, 2022.

[5] Cunha, A. W., *A note on scalar curvature of gradient Yamabe solitons and Ricci solitons*, Preprint, 2021.

[6] Cunha, A. W., Roing, F. and Lemos, R. S., *On Ricci-Bourguignon solitons: triviality, uniqueness and scalar curvature estimates*, Preprint, 2022.

[7] Cunha, A. W., Lemos, R. S. and Rong Mi, *On scalar curvature of compact Ricci-Bourguignon solitons*, Preprint, 2022.

[8] Cunha, A. W. and Rong Mi, *Gradient Yamabe solitons rotationally symmetric*, Preprint. 2022.

[9] Caminha, A. *Tópicos de Geometria Diferencial.* SBM, 1ª ed., 2014.

[10] Catino, G., Mazzieri, L. and Mongodi, S., *Rigidity of gradient Einstein shrinkers*, Comm. in Contemporary Math., **17(6)** (2015).

[11] Cheeger, J. and Colding, T. H., *Lower bounds on Ricci curvature and the almost rigidity of warped products*, Ann. Math., **144(1)** (1996), 189–237.

[12] Cheng, L. and Ma, L. *Properties of complete non-compact Yamabe solitons*, Ann Glob Anal Geom (2011) 40:379–387.

[13] Chow, B. Lu, P. Ni, L., *Hamilton's Ricci Flow*, Providence, RI. American Mathematical Society, (2010).

[14] Daskalopoulos, P., Sesum, N.: *The classification of locally conformally flat Yamabe solitons*, arxiv.org. (2011).

[15] do Carmo, M. P. - *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides - IMPA, 2005.

[16] Dwivedi, S., *Some results on Ricci-Bourguignon solitons and almost solitons*, Canad. Math. Bull., **00(0)** (2020), 1–15.

[17] Grigor'yan, A., *Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds*, Bull., New Ser., Am. Math. Soc., Vol.36, N. 2, (1999) 135–249.

[18] R. Hamilton, *Lectures on geometric flows*, (1989), unpublished.

[19] Hsu, S.Y. *A note on compact gradient Yamabe solitons*, J. Math. Anal. Appl. 388 (2012) 725–726.

[20] Lee, J.M.: *Introduction to smooth manifolds*, University of Washington Department of Mathematics, Version 3.0 (2000).

[21] Lee, J.M. and Parker T. H.: *The Yamabe problem*, Bulletin of the American Mathematical Society Vol.17, number 1, July 1987.

[22] L. Ma, V. Miquel, *Remarks on scalar curvature of Yamabe solitons*, Ann. Glob. Anal. Geom., 42: 195-205, 2012.

[23] Maeta, S. Three-dimensional complete gradient Yamabe solitons with divergence-free Cotton tensor, Ann Glob Anal Geom., (2020). https://doi.org/10.1007/s10455-020-09722-9.

[24] Maeta, S. Complete Yamabe solitons with finite total scalar curvature, Differ. Geom. Appl., **66**, (2019), pp.75–81.

[25] Batista, R. M., *Rigidez de sólitons gradientes*, Dissertação de mestrado, UFC 2013.

[26] Mondal, C. K. and Shaikh, A. A., *Some results on* η*-Ricci Soliton and gradient* ρ*-Einstein soliton in a complete Riemannian manifold*, Comm. Korean Math. Soc., **34(4)** (2019), 1279-1287.

[27] Perelman, G.: *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications* (2002) http://arxiv. org/abs/math/0211159v1.

[28] Pigola, S., Rimoldi, M. and Setti. *Remarks on non-compact gradient Ricci solitons.* Math. Z. **268** (2011) 777–790.

[29] Rong Mi, *Remarks on scalar curvature of gradient Ricci-Bourguignon solitons.* Bull. des Sci. Math. **171**, 2021, 103034.

[30] Shaikh, A. A., Mondal, C. K. and Mandal, P., *Compact gradient* ρ*-Einstein soliton is isometric to the Euclidean sphere*, Indian J. Pure Appl. Math. (2021) 52:335–339. https://doi.org/10.1007/s13226-021-00034-7.

[31] Schoen, R.: *Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature*, J. Diferential Geom. 20 (1984), 479-495.

[32] Trudinger, N.:*Remarks concerning the conformal deformations of Riemannian structures on compact manifolds*, Annali Scuola Norm. Sup. Pisa 22 (1968) 265- 274.

[33] Yamabe H., *On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Osaka Math. J. 12 (1960), 21-37.

[34] Yano, K. and Bochner, S.; *Curvature and Betti Numbers.* Princeton University Press, Princeton (1949).

[35] Yong, J. *On A Class of Complete Non-Compact Gradiente Yamabe Solitons*, arxiv.org. (2018)

[36] S.T. Yau, Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifolds and their applications to geometry, Indiana Univ. Math. J., **25** (1976), 659–670.