



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

Análise Assintótica de Fluxos Fuzzy Contínuos

Jonas Bloch Barbosa da Silva

Teresina - 2022

Jonas Bloch Barbosa da Silva

Dissertação de Mestrado:

Análise Assintótica de Fluxos Fuzzy Contínuos

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Jefferson da Cruz dos Santos Leite.

Teresina - 2022



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Análise Assintótica de Fluxo Fuzzy Contínuos

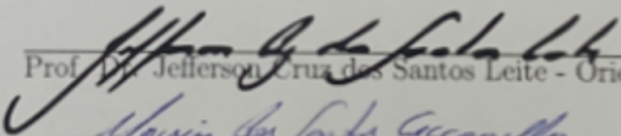
Jonas Bloch Barbosa da Silva

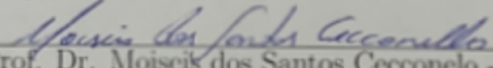
Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

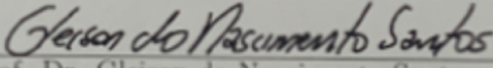
A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 24 de fevereiro de 2022.

Banca Examinadora:


Prof. Dr. Jefferson Cruz dos Santos Leite - Orientador


Prof. Dr. Moisés dos Santos Ceconello - UFMT


Prof. Dr. Gleison do Nascimento Santos - UFPI

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Sistema de Bibliotecas da UFPI – SIBi/UFPI
Biblioteca Setorial do CCN

S586a Silva, Jonas Bloch Barbosa.
Análise assintótica de fluxos Fuzzy contínuos / Jonas
Bloch Barbosa da Silva. – 2022.
68 f. : il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí,
Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em
Matemática, Teresina, 2022.

“Orientador: Prof. Dr. Jefferson da Cruz dos Santos
Leite”.

1. Geometria Diferencial. 2. Soluções Fuzzy. 3. Sistemas
Dinâmicos. I. Leite, Jefferson da Cruz dos Santos. II. Título.

CDD 516.36

Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes. CRB/3-1461

Dedico esse trabalho aos meus amados pais, Maria Carmelita e Jonas Silva; Às minhas queridas irmãs, Carmilene Silva e Carmecélia Silva; e À Francilene Silva, meu amor.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por estar comigo em todos os momentos, principalmente nas dificuldades. Ele é minha força e fortaleza e o responsável pelo meu sucesso.

Agradeço aos meus pais , Carmelita e Jonas, pelo amor imensurável concedido, apoio e compreensão. Às minhas irmãs Cermelene e Carmecelia e a todos os meus familiares, pelo incentivo e pelo carinho.

Agradeço à minha esposa, Francilene, que me deu muita força e me aconselhou muito nas decisões que tive que tomar, pelo carinho e apoio.

Agradeço aos meus amigos da igreja, em especial o Pastor Miguel, Jaiane Celeste e Alexandre Silva, que me ajudaram em muitos momentos principalmente nos momentos mais difíceis.

Agradeço ao meu orientador, Dr. Jefferson Cruz dos Santos Leite, pela orientação, tolerância e atenção. Agradeço todos os conselhos e a ajuda na preparação deste trabalho. Por ter contribuído substancialmente na minha formação, sempre terá meu respeito e gratidão.

Agradeço aos Professores da Pós-Graduação em Matemática da UFPI, em especial, Gleison Santos, José Francisco, Newton Santos, Leandro Pessoa, Paulo Alexandre, Jurandir Lopes, Ítalo Dowell. E aos professores da Graduação, Carlos Humberto, Barnabé Lima, Roger Peres, Liane Mendes e Isaías por compartilharem seus conhecimentos.

Agradeço aos amigos e colegas de curso do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFPI, em particular Jaciane, Idalina, Raquel, Severino, Rafael, João, Erisvaldo, Jean, Jonatas, Ruan, Nilson, Michel, Suerlan, Raimundo Bruno, Dieme, Pedro Rodrigues, Christopher, José Márcio, Lucas Emanuel e Sillas Augusto, por terem dividido o sofrimento e a dureza destes dois anos.

Enfim agradeço à CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro.

“A tarefa não é tanto ver aquilo que ninguém viu, mas pensar o que ninguém ainda pensou sobre aquilo que todo mundo vê.”

Arthur Schopenhauer

Resumo

O objetivo deste trabalho é analisar o comportamento assintótico de soluções fuzzy usando resultados em pontos de equilíbrio e periódicos. Aplicando esta análise em alguns exemplos para investigar propriedades interessantes de soluções fuzzy.

Mostramos que, as soluções fuzzy consideradas podem apresentar um comportamento mais complexo do que os determinísticos. Além disso, mostramos uma nova interpretação para a função de pertinência de tais soluções fuzzy, bem como explorar algumas propriedades de projeções de soluções fuzzy.

PALAVRAS-CHAVES: Soluções Fuzzy, Pontos Periódicos, Pontos de Equilíbrio, Sistemas Dinâmicos

Abstract

The objective of this work is to analyze the asymptotic behavior of fuzzy solutions resulting in equilibrium and periodic points. Applying this analysis to some examples to investigate interesting properties of fuzzy solutions.

It shows that as fuzzy solutions can present a more complex behavior that can present a deterministic behavior. Furthermore, we show a new interpretation for the adhesion function of such fuzzy solutions, as they explore some properties of appearances of fuzzy solutions.

KEYWORDS: Fuzzy Solutions, Periodic Points, Equilibrium Points, Dynamic Systems.

Sumário

Resumo	iv
Abstract	v
1 Modelo para interação entre espécies	3
1.1 Modelo presa - predador de Lotka-Volterra	6
1.2 Modelo Holling – Tanne	10
2 Resultados importantes de Lógica Fuzzy	14
2.1 Subconjuntos Fuzzy	14
2.2 O Princípio de Extensão de Zadeh	17
2.3 Números Fuzzy	20
2.4 Derivadas e Integrais Fuzzy	23
3 Fluxos Determinísticos e Fluxos Fuzzy	26
3.1 Fluxos Determinístico	26
3.2 Fluxos Fuzzy	32
3.2.1 Fluxos sobre o espaço $\mathcal{E}(U)$	32
3.2.2 Fluxos Fuzzy e equações diferenciais parciais	34
4 Análises Assintóticas	38
4.1 Pontos de equilíbrio estável	38
4.2 Soluções fuzzy periódicas estáveis	44
4.3 Órbitas periódicas atratoras	50
4.4 Soluções Fuzzy em $\mathcal{E}(\mathbb{R}^3)$	54
5 Conclusão	56
Referências Bibliográficas	57

Introdução

A modelagem matemática de fenômenos naturais por meio de sistemas dinâmicos pode ser sujeito a incertezas nos parâmetros das equações que o descrevem. Por exemplo, em problemas de dinâmica populacional nem sempre é possível saber exatamente o número de indivíduos ou a capacidade de carga em um determinado ambiente. Além disso, nem sempre é possível, por dificuldades técnicas ou falta de informação, incorporar todas as leis necessárias descrever o fenômeno estudado. Assim, a subjetividade é um fator importante que deve ser considerado na modelagem matemática.

O surgimento da teoria dos conjuntos fuzzy proposta por Zadeh (1965) trouxe novas ferramentas que possibilitam a incorporação da subjetividade em modelos que descrevem fenômenos reais.

Estamos interessados em descrever o comportamento assintótico de soluções de equações diferenciais como

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

quando a condição inicial é um valor fuzzy. Neste caso, a incerteza está apenas na condição e não no modelo definido pela função f .

Este trabalho está dividido em quatro capítulos.

No primeiro capítulo abordamos dois modelos presa-predador de interação entre espécies, Lotka–Volterra e Holling–Tanner, fazendo a análise das soluções dos respectivos sistemas de equações diferenciais.

No segundo capítulo apresentaremos algumas definições, notações e resultados que serão utilizados nos capítulos seguintes, com o propósito de estender conceitos da teoria de conjuntos clássica para a teoria de conjuntos fuzzy. O método de extensão proposto por Zadeh, também conhecido como Princípio de Extensão, é uma das ideias básicas que promove a extensão de conceitos matemáticos não fuzzy em fuzzy.

No terceiro capítulo, estuda-se as soluções de equações diferenciais envolvendo subje-

tividade nas condições iniciais considerando a extensão de Zadeh do fluxo determinístico gerado por esta equação diferencial. A aplicação obtida por esta abordagem é frequentemente chamada de fluxo fuzzy da equação diferencial. Se definirmos uma condição inicial fuzzy particular, teremos uma solução fuzzy. Este tipo de solução fuzzy foi estudado anteriormente em Oberguggenberger e Pittschmann (1999) e Buckley e Feuring (2000).

No capítulo quatro, mostra-se que existe uma relação importante entre soluções determinísticas e fuzzy. Subconjuntos fuzzy cujas funções de pertinência são funções características de pontos de equilíbrio determinísticos são pontos estacionários para o fluxo fuzzy. Assim, pontos de equilíbrio de fluxos determinísticos determinam pontos de equilíbrio de fluxos fuzzy.

Mostramos que, as soluções fuzzy consideradas podem apresentar um comportamento mais complexo do que os determinísticos. Além disso, mostramos uma nova interpretação para a função de pertinência de tais soluções fuzzy, bem como explorar alguns propriedades de projeções de soluções fuzzy.

Além dos pontos de equilíbrio, soluções de equações diferenciais podem apresentar periodicidade. Como se sabe, modelos de interação entre espécies, como Lotka–Volterra e Holling–Tanner, são exemplos de equações cujas soluções são periódicas ou se aproximam de uma solução periódica com a evolução do tempo. As soluções periódicas de equações determinísticas desempenham um papel fundamental para a compreensão do comportamento do fenômeno modelado.

Como as soluções periódicas se destacam na modelagem, uma caracterização precisa da periodicidade da solução fuzzy é de extrema importância para uma compreensão mais profunda do fenômeno estudado.

Capítulo 1

Modelo para interação entre espécies

Em geral, na natureza, as espécies em uma comunidade são encontradas interagindo de alguma forma, podendo essa interação ser prejudicial ou benéfica. Estas interações em geral, produzem mudanças na dinâmica populacional dos indivíduos envolvidos. Dentre estas interações se destacam as interações do tipo *competição, presa - predador e mutualismo*.

Entende-se como situação de competição quando o aumento da população de uma das espécies envolvida na interação implica em diminuição da população da segunda espécie. Isto comumente ocorre quando duas espécies disputam os mesmos recursos naturais em um ambiente em comum. Este tipo de interação é prejudicial para ambas as espécies.

Quando o crescimento na quantidade de indivíduos de uma das espécies promove um aumento populacional à outra, porém o crescimento populacional da segunda espécie leva a uma redução populacional da primeira, então dispomos de uma interação do tipo presa - predador (ou parasita - hospedeiro ou planta - herbívoro). Na interação presa - predador uma espécie é prejudicada (presa) e a outra é beneficiada (predador) pela interação. No geral, as interações do tipo presa - predador ocorrem quando uma das espécies (a presa) serve como fonte de alimento para a outra espécie (o predador), (Cecconello, 2012).

Quando as duas espécies são beneficiadas pela interação, ou seja, o aumento populacional de uma espécie resulta em crescimento da população da outra espécie e vice-versa, então temos uma interação denominada mutualismo ou *simbiose*.

O quadro a seguir fornece um resumo da interação entre as espécies para os três casos considerados, se a interação é benéfica, representada pelo sinal (+), ou prejudicial, representada por (-), para cada espécie.

interação	espécie 1	espécie 2
competição	–	–
presa-predador	+	–
mutualismo	+	+

Na elaboração matemática destes modelos, as propriedades de cada interação são cruciais para a definição das funções de aumento relativo que determinam a dinâmica populacional de cada espécie envolvida na interação. O principal propósito da modelagem matemática de tais fenômenos é entender o comportamento da dinâmica populacional.

Então, devido a dificuldade ou até mesmo impossibilidade de se obter soluções analíticas, deseja-se estabelecer critérios que nos permitam analisar qualitativamente as soluções. Para isso, enunciaremos alguns conceitos e resultados básicos da teoria de estabilidade no sentido de Lyapunov.

Consideremos um sistema dinâmico bidimensional dado por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = f_2(x, y). \end{cases} \quad (1.1)$$

Definição 1.0.1. Um ponto (x^*, y^*) é denominado um estado de equilíbrio, ou estado estacionário, para Eq.(1.1) quando $f_1(x^*, y^*) = f_2(x^*, y^*) = 0$.

O comportamento das trajetórias determinadas pelas soluções $x(t)$ e $y(t)$ nas proximidades dos estados de equilíbrio são de particular relevância. Na definição a seguir, $d(A, B)$ é a distância entre dois pontos A e B em \mathbb{R}^2 .

Definição 1.0.2. Seja $\mathbf{x}^* = (x^*, y^*)$ um ponto de equilíbrio e $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_o)$ a solução, com condição inicial $x_o = (x_o, y_o)$, do sistema (1.1). Dizemos que \mathbf{x}^* é estável se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(\mathbf{x}_o, \mathbf{x}^*) < \delta \implies d(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_o), \mathbf{x}^*) < \varepsilon.$$

O estado de equilíbrio \mathbf{x}^* é assintoticamente estável quando é estável e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_o), \mathbf{x}^*) = 0.$$

O estado de equilíbrio é dito *instável* quando não satisfaz as condições acima.

A análise de estabilidade local, no caso em que as funções $f_1(x, y)$ e $f_2(x, y)$ são não-lineares, é feita por meio dos autovalores da matriz jacobiana

$$\mathbf{J}_{(x^*, y^*)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x^*, y^*)}.$$

Teorema 1.0.1. (*linearização*). *Seja (x^*, y^*) um estado de equilíbrio para o sistema (1.1) e $\lambda_{1,2}$ autovalores da matriz jacobiana em (x^*, y^*) . Se $Re(\lambda_{1,2}) < 0$, então o estado de equilíbrio é localmente assintoticamente estável; se $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, o estado de equilíbrio é instável (ponto de sela); se $Re(\lambda_{1,2}) > 0$, o estado de equilíbrio é instável.*

Demonstração. Ver, Robinson (1998) [21] □

Observe que o teorema acima não permite conclusão quando os autovalores são imaginários puros (estados de equilíbrios não hiperbólicos). Observa-se também, que a natureza do estado de equilíbrio é local, ou seja, as condições iniciais do sistema (1.1) devem estar suficientemente próximas de (x^*, y^*) para que as conclusões sejam garantidas. O teorema a seguir fornece resultados sobre o comportamento global da solução.

Teorema 1.0.2. *Seja $L(x, y)$ uma função de Lyapunov. O estado de equilíbrio (x^*, y^*) será:*

(i) *Estável quando $\nabla L(x, y) \cdot (f_1, f_2) \leq 0$ para todo x, y ;*

(ii) *Assintoticamente estável quando $\nabla L(x, y) \cdot (f_1, f_2) < 0$ para todo x, y ;*

(iii) *Instável quando $\nabla L(x, y) \cdot (f_1, f_2) > 0$ para todo x, y .*

Demonstração. Ver, Robinson (1998) [21] □

Uma *função de Lyapunov* é uma função escalar não negativa, ou seja, $L(x, y) > 0$ para todo $x \neq x^*$ e $y \neq y^*$, com derivadas parciais de primeira ordem contínuas. A instabilidade local de um estado de equilíbrio, abre o questionamento sobre o que acontece com a trajetória da solução no plano de fase quando $t \rightarrow \infty$. Se as funções $x(t)$ e $y(t)$ são limitadas, espera-se que a trajetória não se afaste indefinidamente do estado de equilíbrio. Um dos principais resultados neste sentido é o *Teorema de Bendixson-Poincaré*.

Teorema 1.0.3. (*Bendixson-Poincaré*). Se para $t \geq 0$, a trajetória $(x(t), y(t))$ do sistema (1.1) é limitada no plano- xy e não se aproxima de um estado de equilíbrio, então a trajetória $(x(t), y(t))$ é fechada ou se aproxima de uma trajetória fechada quando $t \rightarrow \infty$ (ciclo limite).

Demonstração. Ver, Robinson (1998) [21] □

É importante observar que se a trajetória $(x(t), y(t))$ é limitada, então temos um ciclo limite ou um estado de equilíbrio assintoticamente estável. Logo, análises de estabilidade locais são suficientes para garantir o comportamento global da solução.

Um critério de negação de existência de ciclos limite é denominado *critério de Dulac*.

Teorema 1.0.4. (*critério de Dulac*). Seja $B(x, y)$ continuamente diferenciável uma região simplesmente conexa $D \subset \mathbb{R}^2$ e suponha que

$$\frac{\partial(\beta f_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\beta f_2)}{\partial y},$$

seja estritamente positivo ou estritamente negativo em D . Então não há trajetórias fechadas para o sistema (1.1).

Demonstração. Ver, Robinson (1998) [21] □

1.1 Modelo presa - predador de Lotka-Volterra

A primeira representação do comportamento de um sistema presa-predador, foi proposta por volta de 1926 pelo matemático italiano V. Volterra na tentativa de explicar o comportamento das populações de certas espécies de peixes no mar Adriático. Em 1925, o biofísico A. Lotka encontrou as mesmas equações em estudos sobre reações cinéticas.

O atualmente denominada modelo de Lotka-Volterra, leva em consideração as seguintes hipóteses:

1. Na ausência de predadores a população de presas cresce de forma malthusiana;
2. Na ausência de presas a população de predadores decresce proporcionalmente à sua população (malthusianamente);
3. O índice relativo de crescimento da população de presas diminui linearmente em relação à população de predadores;

4. O índice relatido de crescimento da população de predadores cresce linearmente com relação à população de presas.

Matematicamente estas informações estão sintetizadas no sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} = -by + \beta xy \end{cases} ; \quad (1.2)$$

onde $x = x(t)$ é a população de presas, $y = y(t)$ é população de predadores e a, b, α, β são constantes reais positivas.

A solução implícita para o sistema (1.2) pode ser obtida eliminado o parâmetro t através da regra da cadeia

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x(a - \alpha y)}{y(-b + \beta x)}.$$

Por separação de variáveis e integração obtemos a seguinte relação entre as variáveis de estado:

$$y^a e^{-\alpha y} = cx^{-b} e^{\beta x};$$

onde c é uma constante determinada pela condição inicial (x_o, y_o) .

Os estados de equilíbrio do sistema (1.2) são dados pelo pela solução do sistema

$$\begin{cases} f_1(x, y) = ax - \alpha xy \\ f_2(x, y) = -by + \beta xy \end{cases} ; \quad (1.3)$$

os quais são $\mathbf{x}_1^* = (0, 0)$ e $\mathbf{x}_2^* = \left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right)$ são soluções do sistema (1.3).

A Matriz jacobiana avaliada no estado de equilíbrio $(0, 0)$ é :

$$\mathbf{J}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}.$$

Os autovalores de $\mathbf{J}_{(0,0)}$ possuem sinais diferentes, logo, pelo Teorema (1.0.1), o estado de equilíbrio $\mathbf{x}_1^* = (0, 0)$ é localmente instável (ponto de sela).

A matriz jacobiana em $\left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right)$ é dada por:

$$\mathbf{J}_{\left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-ab}{\beta} \\ \frac{a\beta}{b} & 0 \end{bmatrix} ;$$

na qual seus autovalores são $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{ab}$. Como os autovalores de $\mathbf{J}_{(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha})}$ são imaginários puros, o Teorema (1.0.1) não fornece nenhuma conclusão quanto a natureza da estabilidade em $\mathbf{x}_2^* = (\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha})$.

Entretando, pode-se analisar o comportamento global da solução do sistema (1.2) construindo uma função de Lyapunov adequada, que neste caso é:

$$L(x, y) = x^* \left(\frac{x}{x^*} - \ln \frac{x}{x^*} - 1 \right) + \frac{a}{\beta} \left(\frac{y}{y^*} - \ln \frac{y}{y^*} - 1 \right),$$

onde (x^*, y^*) é o estado de equilíbrio não nulo. As derivadas parciais de $L(x, y)$ são:

$$\frac{\partial L(x, y)}{\partial x} = 1 - \frac{x^*}{x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial L(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{\beta} \left(\alpha - \frac{a}{y} \right),$$

Por cálculo direto é fácil verificar que $\nabla L(x, y) \cdot (f_1, f_2) = 0$. Logo, pelo Teorema (1.0.2), concluímos que a solução é estável, porém não assintoticamente estável.

Utilizando métodos numéricos para resolução de equações diferenciais, obtemos a solução para o sistema de Lotka-Volterra. As trajetórias determinadas por $x(t)$ e $y(t)$ no plano xy , são fechadas conforme observamos na Figura (1.1) que representa a solução no plano de fase de $x(t)$ e $y(t)$, com distintas condições iniciais.

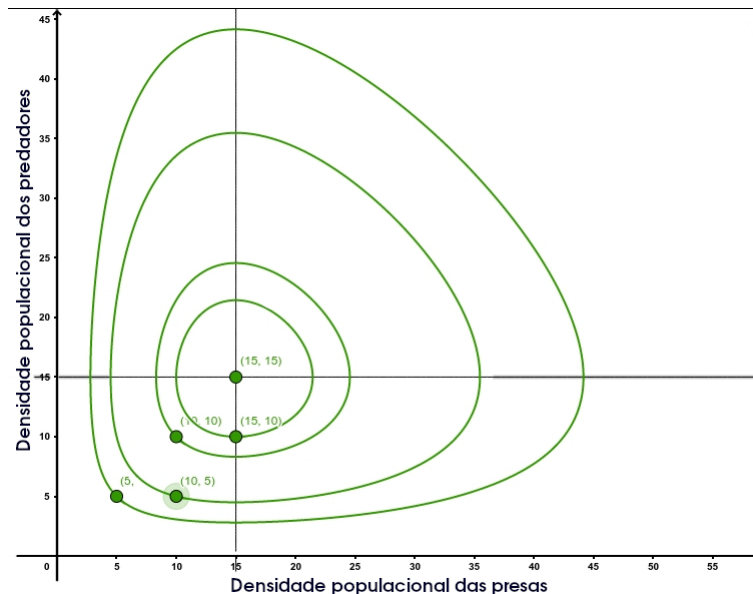


Figura 1.1: Soluções no plano de fase para o sistema (1.2) com $a = b = 0.03$, $\alpha = \beta = 0.002$ e condições iniciais $(5, 5)$, $(10, 5)$, $(10, 10)$, $(15, 10)$, e $(15, 15)$.

É importante observar que as funções $x(t)$ e $y(t)$ são periódicas e a amplitude aumenta conforme a condição inicial afasta-se do estado de equilíbrio $(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha})$.

O modelo de Lotka-Volterra é criticado por ser um sistema conservativo ([17]), pois é baseado em uma idealização tornado-o menos aplicável. Apesar de oscilações serem inerentes à populações em processos interativos do tipo presa - predador, o modelo de Lotka-Volterra entretanto, não é apropriado para descrever o comportamento da dinâmica destas interações ([8]). Pois, sendo conservativo, a amplitude das oscilações estão sujeitas às condições iniciais, o que naturalmente não é observável. Pequenas flutuações na condição inicial do sistema, provoca alterações que serão mantidas ao longo do tempo. Além disso, este modelo é estruturalmente instável, uma vez que, se acrescentarmos uma capacidade suporte para a população de presas, o estado de equilíbrio não nulo torna-se assintoticamente estável.

Na tentativa de contornar o problema acima exposto, algumas alterações têm sido propostas para o modelo de Lotka-Volterra. Quando não há competição interespecífica na população de predadores, a generalização do modelo de Lotka-Volterra é dado pelo sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = g(x)x - p(x)y \\ \frac{dy}{dt} = q(x)y \end{cases} ; \quad (1.4)$$

onde $g(x)$ é uma função que determina a capacidade suporte das presas; $p(x)$ é a resposta funcional; $q(x)$ é a função de crescimento relativo para os predadores.

Algumas hipóteses que determinam as condições de uma interação presa - predador são necessárias às funções g , p e q ;

1. $g'(x) < 0$; $g(0) > 0 > g(\infty)$. Na ausência de predadores a população de presas não cresce indefinidamente. A capacidade suporte é um valor k tal que $g(k) = 0$;
2. $p(x) > 0$ para $x > 0$ e $p(0) = 0$. De modo geral a *resposta funcional* é limitada, ou seja, a capacidade de ataque dos predadores é limitada ([8], [17]);
3. $q'(x) > 0$; $q(0) < 0 < q(\infty)$. O índice de crescimento populacional de predadores é crescente com relação a população de presas.

No que se segue, temos algumas funções que satisfazem as condições expostas acima ([8]).

1. *Capacidade Suporte:* substituição do parâmetro a em Eq.(1.2)

(a) $g(x) = r(1 - \frac{x}{k})$, Pielou(1969);

(b) $g(x) = r[(\frac{k}{x})^{-s} - 1]$, ($1 \geq s > 0$) Rosenzweig (1971);

(c) $g(x) = r[\frac{k}{x} - 1]$, Schoener (1973).

2. *Resposta funcional:* substituição do termo bx em Eq.(1.2)

(a) $p(x) = m(1 - e^{-cx})$, Ivlev (1961);

(b) $p(x) = \frac{mx^2}{x^2+d^2}$, Takahashi (1964);

(c) $p(x) = \frac{mx}{x+d}$, Holling (1965);

(d) $p(x) = mx^s$, ($1 \geq s > 0$), Rosenzweig (1971).

1.2 Modelo Holling – Tanne

O modelo para interação entre espécies conhecido como modelo presa - predador de Holling-Tanner, apresenta algumas características que o torna um pouco mais aplicável do que o modelo de Lotka-Volterra. Além de apresentar uma capacidade suporte para a população de presas, a resposta funcional usada no modelo de Holling-Tanner, é baseado no modelo de Michaelis-Mentem para concentrações de substâncias em reações enzimáticas ([3]). O modelo de Holling-Tanner apresenta ainda uma capacidade suporte para a população de predadores, que é proporcional à população de presas em cada instante (modelo de Leslie-Gower).

O modelo Holling-Tanner é determinado pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{mxy}{x+d} \\ \frac{dy}{dt} = \alpha y \left(1 - \frac{\beta y}{x}\right), \end{cases} \quad (1.5)$$

onde α, β, d, k, m e r são constantes reais positivas.

O sistema presa - predador (1.5) tem as seguintes características:

1. Na ausência de predador a dinâmica populacional das presas segue o modelo logístico, com capacidade suporte k e razão intrínseca r ;

2. A constante m é o número máximo de presas que podem ser capturadas pelo predador por unidade de tempo;
3. O parâmetro d , está relacionado com a capacidade da presa evitar a predação. Quanto maior a capacidade da presa de evitar o ataque dos predadores, maior é o valor de d . Isto é evidente pois, se mantivermos os demais parâmetros constantes, quanto maior for d , menor será a influência do predador sobre a população de presas;
4. A população de predadores cresce logisticamente com razão intrínseca α e capacidade suporte proporcional à população de presas. Quanto maior se torna a razão $y(t)/x(t)$, menor é o número de presas disponíveis para cada predador e, consequentemente, o crescimento populacional dos predadores diminui;
5. O parâmetro β é a quantidade de presas necessárias para alimentar um predador quando as populações encontram-se no estado de equilíbrio não nulo.

O modelo de Holling-Tanner é estruturalmente instável, visto que, o comportamento da solução depende dos valores dos parâmetros como veremos a seguir.

Denotando-se a capacidade suporte e a resposta funcional, respectivamente, por

$$g(x) = r \left(1 - \frac{x}{k}\right) \quad \text{e} \quad p(x) = \frac{mx}{x + d},$$

então as isóclinas para presas e predadores do sistema (1.5) são dadas por

$$h_1(x) = \frac{xg(x)}{p(x)} \quad \text{e} \quad h_2(x) = \frac{x}{\beta}.$$

Os estados de equilíbrio do sistema são: $(0, 0)$, $(k, 0)$ e a raiz positiva da equação

$$x^2 + \left(d - k + \frac{km}{\beta r}\right)x - kd = 0. \quad (1.6)$$

Para os dois primeiros estados de equilíbrio, as matrizes jacobianas são, respectivamente

$$\mathbf{J}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_{(k,0)} = \begin{bmatrix} kg'(k) & p(k) \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Como os autovalores de $\mathbf{J}_{(0,0)}$ são positivos, então o ponto $(0,0)$ é instável. O estado de equilíbrio $(k,0)$ é um ponto de sela, visto que, $g'(k) < 0$ e conseqüentemente temos autovalores com sinais diferentes.

Considerando o estado de equilíbrio (x^*, y^*) , onde x^* é a raiz positiva da equação (1.6) e $y^* = x^*/\beta$. Para este ponto, a matriz jacobiana é:

$$\mathbf{J}_{(x^*, y^*)} = \begin{bmatrix} p(x^*)h_1'(x^*) & -p(x^*) \\ \frac{\alpha}{\beta} & -\alpha \end{bmatrix}.$$

Os autovalores de $\mathbf{J}_{(x^*, y^*)}$ são determinados pela equação

$$\lambda^2 + (\alpha - p(x^*)h_1'(x^*))\lambda + \alpha p(x^*)\left(\frac{1}{\beta} - h_1'(x^*)\right) = 0.$$

Logo, segundo o Teorema (1.0.1), o estado de equilíbrio (x^*, y^*) é assintoticamente estável quando

$$\alpha - p(x^*)h_1'(x^*) > 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{\beta} - h_1'(x^*) > 0. \quad (1.7)$$

Contudo, a segunda condição é sempre satisfeita, uma vez que valem as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta} - h_1'(x^*) &= \frac{y^*}{x^*} - \frac{r}{km}(-2x^* + k - d) \\ &= \frac{1}{x^*} \left[y^* - \frac{r}{km}(-2x^* + k - d)x^* \right] \\ &= \frac{r}{x^*km} [(k - x^*)(d + x^*) + 2(x^*)^2 - kx^* + dx^*] \\ &= \frac{r}{x^*km} [kd + (x^*)^2] > 0. \end{aligned}$$

Pode-se verificar a partir dessas condições que se x^* é maior que o ponto de máximo de $h_1(x)$, isto é,

$$x^* > \frac{k - d}{2},$$

então o ponto (x^*, y^*) é assintoticamente estável, visto que nesse caso, $h_1'(x^*) < 0$ e então, a primeira condição de (1.7) também é satisfeita. Deve-se ressaltar que a análise de estabilidade apresentada aqui para o estado (x^*, y^*) é local. Porém, a validade global é garantida pelo teorema de Bendixson-Poincaré.

A função $x(t)$ é limitada pela capacidade suporte das presas ou pela condição inicial x_o . Com efeito, supondo que exista t_o tal que $x(t_o) > m = \max(x_o, k)$ então, pela continuidade, $x(t)$ assume um máximo no intervalo $[0, t_o]$, isto é, existe $t_1 \in [0, t_o]$ tal que

$x(t_1) \geq x(t_o)$; se $t_1 \in (0, t_o)$, então $x'(t_1) = 0$; se o máximo for atingido em t_o , então $x'(t_o) > 0$, de modo que temos um absurdo em ambos os casos já que, se $x(t) > k$ temos $x'(t) < 0$. Por outro lado, se $t_1 = 0$ então temos que $x(0) = x_o > x(t_o) > x_o$, outro absurdo; portanto, $x(t) \leq m$. Com raciocínio análogo, concluímos que $y(t) \leq \max\{k/\beta, y_o\}$.

O fato de $x(t)$ e $y(t)$ serem limitadas, permite existência de ciclos limite estáveis quando as condições de estabilidade do estado de equilíbrio (x^*, y^*) não são satisfeitas. Isto quer dizer que as trajetórias no plano fase converge para uma curva fechada, cuja amplitude e posição dependem somente dos coeficientes. As Figuras (1.2) (a) e (b), são as trajetórias descrita por $x(t)$ e $y(t)$ no plano de fase para a solução do sistema (1.5) para os casos em que há estabilidade assintótica e ciclo limite estável, respectivamente.

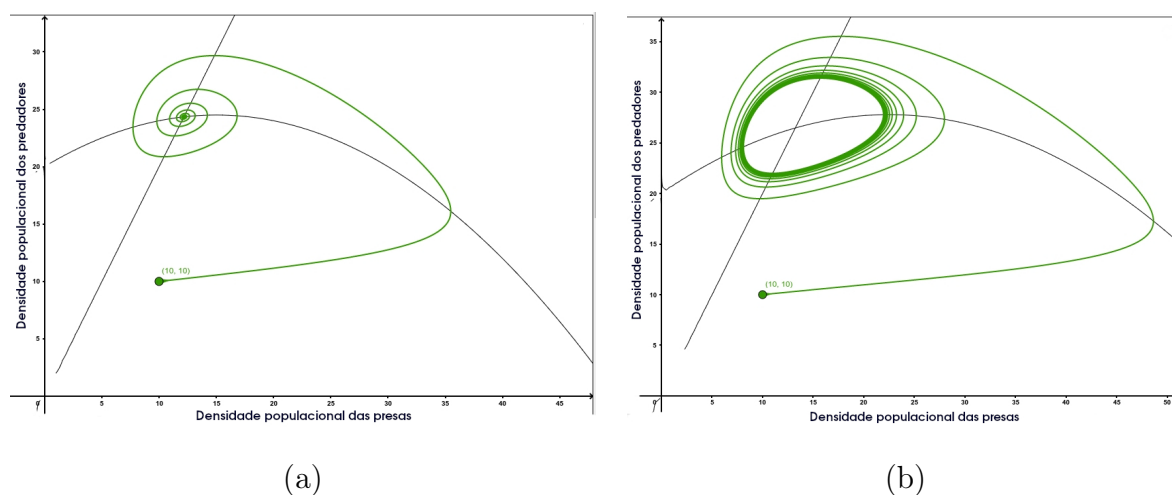


Figura 1.2: Soluções no plano de fase para o sistema (1.5). (a) - parâmetros: $\alpha = 0.015$; $\beta = 0.5$; $d = 20$; $k = 50$; $m = 0.15$; $r = 0.15$. (b)- parâmetros: $k = 65$; demais parâmetros como em (a).

Capítulo 2

Resultados importantes de Lógica

Fuzzy

Neste capítulo apresentaremos algumas definições, notações e resultados que serão utilizados nos capítulos seguintes. Não demonstraremos todos os resultados, mas deixaremos as devidas referências.

2.1 Subconjuntos Fuzzy

Permitindo uma espécie de “relaxamento” no conjunto imagem da função característica de um conjunto foi que Zadeh sugeriu a formalização matemática de imprecisões, usando os subconjuntos fuzzy.

Definição 2.1.1. Seja U um conjunto (clássico); um subconjunto fuzzy F de U é caracterizado por uma função

$$\varphi_F : U \rightarrow [0, 1],$$

pré-fixada, chamada função de pertinência do subconjunto fuzzy F .

O valor $\varphi_F \in [0, 1]$ indica o grau com que o elemento x de U está no conjunto fuzzy F ; $\varphi_F(x) = 0$ e $\varphi_F(x) = 1$ indicam, respectivamente, a não pertinência e a pertinência completa de x ao conjunto fuzzy F .

Um subconjunto fuzzy F é composto de elementos x de um conjunto clássico U , providos de um valor de pertinência a F , dado por $\varphi_F(x)$. Podemos dizer que um subconjunto

fuzzy F de U é dado por um conjunto (clássico) de pares ordenados:

$$F = \{(x, \varphi_F(x)), \text{ com } x \in U\}.$$

Definição 2.1.2. (União). A união entre A e B é o subconjunto fuzzy de U cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_{(A \cup B)}(x) = \max \{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}, x \in U.$$

Definição 2.1.3. (Interseção). A interseção entre A e B é o subconjunto fuzzy de U cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_{(A \cap B)}(x) = \min \{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}, x \in U.$$

Definição 2.1.4. (Complementar de subconjuntos fuzzy). O complementar de A é o subconjunto fuzzy A' de U cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_{A'}(x) = 1 - \varphi_A(x), x \in U.$$

Proposição 2.1.1. *As operações entre subconjuntos fuzzy satisfazem as seguintes propriedades:*

- $A \cup B = B \cup A$;
- $A \cap B = B \cap A$;
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
- $A \cup A = A$;
- $A \cap A = A$;
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
- $A \cap \emptyset = \emptyset$ e $A \cup \emptyset = A$;
- $A \cap U = A$ e $A \cup U = U$;
- $(A \cup B)' = A' \cap B'$ e $(A \cap B)' = A' \cup B'$ (leis de DeMorgan).

Demonstração. A demonstração de cada propriedade é uma aplicação imediata das propriedades de máximo e mínimo entre funções, isto é,

$$\max [\varphi(x), \psi(x)] = \frac{1}{2}[\varphi(x) + \psi(x) + |\varphi(x) - \psi(x)|];$$

$$\min [\varphi(x), \psi(x)] = \frac{1}{2}[\varphi(x) + \psi(x) - |\varphi(x) - \psi(x)|];$$

onde, φ e ψ são funções com imagens em \mathbb{R} .

Vamos demonstrar apenas uma das leis de DeMorgan, as outras propriedades são demonstradas de maneira análoga.

Seja φ_A a função de pertinência associada ao subconjunto A. Temos:

$$\begin{aligned} \varphi_{A' \cup B'}(u) &= \max [1 - \varphi_A(u), 1 - \psi_B(u)] \\ &= \frac{1}{2}[(1 - \varphi_A(u)) + (1 - \psi_B(u)) + |(1 - \varphi_A(u)) - (1 - \psi_B(u))|] \\ &= \frac{1}{2}[(2 - (\varphi(u) + \psi(u) - |\varphi(u) - \psi(u)|))] \\ &= 1 - \frac{1}{2}[\varphi(u) + \psi(u) - |\varphi(u) - \psi(u)|] \\ &= 1 - \min [\varphi(u), \psi(u)] = 1 - \varphi_{(A \cap B)} = \varphi_{(A \cap B)'} \end{aligned}$$

para todo $u \in U$. □

Um subconjunto fuzzy A de U é “formado” por elementos de U com uma certa hierarquia (ordem) que é traduzida através da classificação por graus. Um elemento x de U está em uma classe se seu grau de pertinência é maior que um determinado valor limiar ou nível $\alpha \in [0, 1]$ que define aquela classe. O conjunto clássico de tais elementos é um α -nível de A, denotado por $[A]^\alpha$.

Definição 2.1.5. (α -nível). Seja A um subconjunto fuzzy de U e $\alpha \in [0, 1]$. O α -nível de A é o subconjunto clássico de U definido por

$$[A]^\alpha = \{x \in U : \varphi_A(x) \geq \alpha\} \text{ para } 0 < \alpha \leq 1.$$

O nível zero de um subconjunto fuzzy A é definido como sendo o menor subconjunto (clássico) fechado de U que contém o conjunto suporte de A. Numa linguagem matemática,

$$[A]^0 = \overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1)} [A]^\alpha} = \overline{\text{supp}(A)},$$

Note que o conjunto $\{x \in U : \varphi_A(x) \geq 0\} = U$ não é necessariamente igual a $[A]^0 = \overline{\text{supp}(A)}$.

Teorema 2.1.1. *Sejam A e B subconjuntos fuzzy de U. Uma condição necessária e suficiente para que $A = B$ é que $[A]^\alpha = [B]^\alpha$, para todo $\alpha \in [0, 1]$.*

Demonstração. É claro que $A = B \Rightarrow [A]^\alpha = [B]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Suponhamos agora que $[A]^\alpha = [B]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Se $A \neq B$ então existe $x \in U$ tal que $\varphi_A(x) \neq \varphi_B(x)$. Logo, temos que $\varphi_A(x) < \varphi_B(x)$ ou $\varphi_A(x) > \varphi_B(x)$. Supondo $\varphi_A(x) > \varphi_B(x)$, podemos concluir que $x \in [A]^{\varphi_A(x)}$ e $x \notin [B]^{\varphi_A(x)}$ e, portanto, $[A]^{\varphi_A(x)} \neq [B]^{\varphi_A(x)}$, o que contradiz a hipótese $[A]^\alpha = [B]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. De maneira análoga chegamos a uma contradição se admitirmos que $\varphi_A(x) < \varphi_B(x)$. \square

Teorema 2.1.2 (Teorema de Representação de Negoita e Ralescu). *Seja A^α , $\alpha \in [0, 1]$, uma família de subconjuntos clássicos de U de modo que se verifiquem*

$$(i) \bigcup A_\alpha \subseteq A_0 \text{ com } \alpha \in [0, 1];$$

$$(ii) A_\alpha \subseteq A_\beta \text{ se } \beta \leq \alpha;$$

$$(iii) A_\alpha = \bigcap_{k \leq \alpha} A_{\alpha_k} \text{ se } \alpha_k \text{ convergir para } \alpha \text{ com } \alpha_k \leq \alpha.$$

Nestas condições existe um único subconjunto fuzzy A de U cujos α -níveis são exatamente os subconjuntos clássicos A_α , isto é,

$$[A]^\alpha = A_\alpha .$$

Demonstração. A ideia da demonstração é construir, para cada $x \in U$, a função de pertinência de A como sendo

$$\varphi_A(x) = \sup\{\alpha \in [0, 1] : x \in A_\alpha\}.$$

Para uma prova completa ver Negoita e Ralescu [18]. \square

2.2 O Princípio de Extensão de Zadeh

Estender conceitos da teoria de conjuntos clássica para a teoria de conjuntos fuzzy é uma necessidade constante. O método de extensão proposto por Zadeh, também conhecido como Princípio de Extensão, é uma das ideias básicas que promove a extensão de conceitos matemáticos não fuzzy em fuzzy.

Definição 2.2.1. Sejam f uma função tal que $f : X \rightarrow Z$ e A um subconjunto fuzzy de X . A extensão de Zadeh de f é a função \hat{f} que, aplicada a A , fornece o subconjunto fuzzy $\hat{f}(A)$ de Z , cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_{\widehat{f}(A)}(z) = \begin{cases} \sup_{x \in \widehat{f}^{-1}(z)} \varphi_A(x) & \text{se } f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } f^{-1}(z) = \emptyset, \end{cases}$$

onde $f^{-1}(z) = \{x; f(x) = z\}$ denomina-se a pré-imagem de z .

Para as aplicações que será estudado na sequência desse trabalho, restringi-se a análise aos subconjuntos fuzzy de um conjunto X cujos α -níveis são subconjunto compactos e não vazios em X , isto é,

$$\mathcal{E}(X) = \{A \in \mathcal{F}(X) : \forall \alpha \in [0, 1], [A]^\alpha \text{ é compacto e não vazio}\}.$$

Os subconjuntos fuzzy que estão em $\mathcal{E}(X)$ serão denotados por letras minúsculas em negrito para diferenciar dos elementos de X .

Dado $\mathbf{u} \in \mathcal{E}(Y), Y \subset X$, podemos definir $\bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{E}(X)$ através da função de pertinência

$$\varphi_{\bar{\mathbf{u}}}(x) = \begin{cases} \varphi_{\mathbf{u}}(x) & \text{se } x \in Y \\ 0 & \text{se } x \notin Y. \end{cases}$$

Segue diretamente da definição acima que $[\bar{\mathbf{u}}]^\alpha = [\mathbf{u}]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$, de modo que podemos identificar $\mathcal{E}(Y)$ como um subconjunto de $\mathcal{E}(X)$ e $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$.

Por outro lado, dado $\mathbf{u} \in \mathcal{E}(X)$ com $[\mathbf{u}]^\alpha \subset Y \subset X$, podemos definir $\bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{E}(Y)$ com função de pertinência $\varphi_{\bar{\mathbf{u}}}(x) = \varphi_{\mathbf{u}}(x)$ para todo $x \in Y$. Como anteriormente, vamos ter $[\bar{\mathbf{u}}]^\alpha = [\mathbf{u}]^\alpha$ e novamente podemos dizer que $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$.

Teorema 2.2.1. *Sejam X e Y espaços de Hausdorff. Se $f : X \rightarrow Y$ é contínua, então a extensão de Zadeh $\widehat{f} : \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{E}(Y)$ está bem definida e vale*

$$[\widehat{f}(\mathbf{u})]^\alpha = f([\mathbf{u}]^\alpha),$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$ e $\mathbf{u} \in \mathcal{E}(X)$.

Demonstração. Ver referência [1] □

Proposição 2.2.1. *Sejam $f : X \rightarrow Z$ uma função contínua e A um subconjunto fuzzy de X . Se $\mathbf{u} \in \mathcal{E}(X)$ é tal que $[\mathbf{u}]^\alpha \subset A$, então*

$$[\widehat{f}(\mathbf{u})]^\alpha = f([\mathbf{u}]^\alpha), \forall \alpha \in [0, 1].$$

Demonstração. Sejam $\mathbf{u} \in \mathcal{E}(X)$ com $[\mathbf{u}]^0 \subset A$ e $f_A : A \rightarrow Y$, f restrita ao conjunto A , ou seja, para todo $x \in A$ tem-se $f_A(x) = f(x)$. Considere também $\mathbf{v} \in \mathcal{E}(A)$ tal que $\varphi_v(x) = \varphi_u(x)$ para todo $x \in A$. Desde que $\varphi_u(x) = 0$ para todo $x \in X - A$, então $[\mathbf{v}]^\alpha = [\mathbf{u}]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.

A proposição anterior garante que a aplicação $\widehat{f}_A : \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{E}(Y)$ satisfaz

$$[\widehat{f}_A(\mathbf{v})]^\alpha = f_A([\mathbf{v}]^\alpha), \forall \alpha \in [0, 1].$$

Seja $\mathbf{y} \in \mathcal{E}(Y)$ com função de pertinência

$$\varphi_{\mathbf{y}}(y) = \begin{cases} \varphi_{\widehat{f}_A(\mathbf{v})}(y) & \text{se } y \in f(A) \\ 0 & \text{se } y \notin f(A). \end{cases}$$

Pela forma como \mathbf{y} está definido, valem as seguintes igualdades:

$$[\mathbf{y}]^\alpha = [\widehat{f}_A(\mathbf{v})]^\alpha = f_A([\mathbf{v}]^\alpha) = f([\mathbf{v}]^\alpha),$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$. Agora, se $y \in f(A)$, então teremos:

$$\varphi_{\mathbf{y}}(y) = \varphi_{\widehat{f}_A(\mathbf{v})}(y) = \sup_{f_A(x)=y} \varphi_{\mathbf{v}}(x).$$

Desde que, para todo $x \in A$ tem-se $f_A(x) = f(x)$ e $\varphi_{\mathbf{v}}(x) = \varphi_{\mathbf{u}}(x)$ então

$$\sup_{f_A(x)=y} \varphi_{\mathbf{v}}(x) = \sup_{\substack{f(x)=y \\ x \in A}} \varphi_{\mathbf{u}}(x) = \sup_{f(x)=y} \varphi_{\mathbf{u}}(x) = \varphi_{\widehat{f}(\mathbf{u})}(y),$$

uma vez que para $x \in X - A$ vale $\varphi_{\mathbf{u}}(x) = 0$. De onde concluímos que $\varphi_{\widehat{f}(\mathbf{u})}(y) = \varphi_{\mathbf{y}}(y)$ para todo $y \in f(A)$.

Se $y \in Y - f(A)$ então $\varphi_{\mathbf{y}}(y) = 0$. Por outro lado, não existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$ e conseqüentemente $\varphi_{\widehat{f}(\mathbf{u})}(y) = 0$. Assim, vale a igualdade $\varphi_{\widehat{f}(\mathbf{u})}(y) = \varphi_{\mathbf{y}}(y)$ para todo $y \in Y$ de onde concluímos que $\mathbf{y} = \widehat{f}(\mathbf{u})$. Logo, temos $[\widehat{f}(\mathbf{u})]^\alpha = f([\mathbf{u}]^\alpha)$ para todo $\alpha \in [0, 1]$, o que prova a proposição. □

Este resultado indica que os α -níveis do conjunto fuzzy, obtidos pelo Princípio de Extensão de Zadeh, coincidem com as imagens dos α -níveis.

Definição 2.2.2. Sejam $f : X \times Y \rightarrow Z$ e, A e B subconjuntos fuzzy de X e Y , respectivamente. A extensão \widehat{f} de f , aplicada a A e B , é o subconjunto fuzzy $\widehat{f}(A, B)$ de Z , cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{\widehat{f}(A,B)}(z) = \begin{cases} \sup_{\widehat{f}^{-1}(z)} \min [\varphi_A(x), \varphi_B(y)] & \text{se } f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } f^{-1}(z) = \emptyset, \end{cases}$$

onde $f^{-1}(z) = \{(x, y) : f(x, y) = z\}$.

2.3 Números Fuzzy

Definição 2.3.1. (Número fuzzy). Um subconjunto fuzzy A é chamado de número fuzzy quando o conjunto universo no qual φ_A está definida, é o conjunto dos números reais \mathbb{R} e satisfaz às condições:

- (i) todos os α -níveis de A são não vazios, com $0 \leq \alpha \leq 1$;
- (ii) todos os α -níveis de A são intervalos fechados de \mathbb{R} ;
- (iii) $\text{supp } A = \{x \in \mathbb{R} : \varphi_A(x) > 0\}$ é limitado.

Vamos denotar os α -níveis do número fuzzy A por $[A]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$

Definição 2.3.2. Um número fuzzy A é dito triangular se sua função de pertinência é da forma

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq a \\ \frac{x-a}{u-a} & \text{se } a < x \leq u \\ \frac{x-b}{u-b} & \text{se } u < x \leq b \\ 0 & \text{se } x \geq b. \end{cases}$$

Os α -níveis desses números fuzzy têm a seguinte forma simplificada

$$[a_1^\alpha, a_2^\alpha] = [(u - a)\alpha + a, (u - b)\alpha + b],$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Definição 2.3.3. Um número fuzzy A é dito trapezoidal se sua função de pertinência tem a forma de um trapézio e é dada por

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{se } a \leq x < b \\ 1 & \text{se } b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{se } c < x \leq d \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

Os α -níveis de um conjunto fuzzy trapezoidal são os intervalos

$$[a_1^\alpha, a_2^\alpha] = [(b - a)\alpha + a, (c - d)\alpha + d],$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Definição 2.3.4. Um número fuzzy tem forma de sino se a função de pertinência for suave e simétrica em relação a um número real. A seguinte função de pertinência tem estas propriedades para u , a e δ dados

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \exp\left(-\left(\frac{x-u}{a}\right)^2\right) & \text{se } u - \delta \leq x \leq u + \delta \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

Os α -níveis dos números fuzzy em forma de sino são os intervalos:

$$[a_1^\alpha, a_2^\alpha] = \begin{cases} \left[u - \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\alpha a^2}\right)}, u + \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\alpha a^2}\right)} \right] & \text{se } \alpha \geq \bar{\alpha} = e^{-\left(\frac{\delta}{a}\right)^2} \\ [u - \delta, u + \delta] & \text{se } \alpha < \bar{\alpha} = e^{-\left(\frac{\delta}{a}\right)^2}. \end{cases}$$

Definição 2.3.5. Sejam A e B dois números fuzzy e λ um número real.

(a) A soma dos números fuzzy A e B é o número fuzzy, $A + B$, cuja função de pertinência é

$$\varphi_{(A+B)}(z) = \begin{cases} \sup_{\phi(z)} \min[\varphi_A(x), \varphi_B(y)] & \text{se } \phi(z) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } \phi(z) = \emptyset, \end{cases}$$

onde $\phi(z) = \{(x, y) : x + y = z\}$.

(b) A multiplicação de λ por A é o número fuzzy λA , cuja função de pertinência é

$$\varphi_{(\lambda A)}(z) = \begin{cases} \sup_{\{x:\lambda x=z\}} [\varphi_A(x)] & \text{se } \lambda \neq 0 \\ \chi_{\{0\}}(z) & \text{se } \lambda = 0 \end{cases} = \begin{cases} \varphi_A(\lambda^{-1}z) & \text{se } \lambda \neq 0 \\ \chi_{\{0\}}(z) & \text{se } \lambda = 0, \end{cases}$$

onde $\chi_{\{0\}}$ é a função característica de $\{0\}$.

(c) A diferença $A - B$ é o número fuzzy cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{(A-B)}(z) = \begin{cases} \sup_{\phi(z)} \min[\varphi_A(x), \varphi_B(y)] & \text{se } \phi(z) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } \phi(z) = \emptyset, \end{cases}$$

onde $\phi(z) = \{(x, y) : x - y = z\}$.

- (d) A multiplicação de A por B é o número fuzzy A.B, cuja função de pertinência é dada por:

$$\varphi_{(A.B)}(z) = \begin{cases} \sup_{\phi(z)} \min[\varphi_A(x), \varphi_B(y)] & \text{se } \phi(z) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } \phi(z) = \emptyset, \end{cases}$$

onde $\phi(z) = \{(x, y) : x.y = z\}$.

- (e) A divisão é o número fuzzy A/B cuja função de pertinência é

$$\varphi_{(A/B)}(z) = \begin{cases} \sup_{\phi(z)} \min[\varphi_A(x), \varphi_B(y)] & \text{se } \phi(z) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } \phi(z) = \emptyset, \end{cases}$$

onde $\phi(z) = \{(x, y) : x/y = z\}$.

Teorema 2.3.1. *Os α -níveis do conjunto fuzzy $A \otimes B$ são dados por*

$$[A \otimes B]^\alpha = [A]^\alpha \otimes [B]^\alpha,$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$, sendo \otimes qualquer uma das operações aritméticas mencionadas anteriormente.

Demonstração. Ver [9] □

Proposição 2.3.1. *Sejam A e B números fuzzy com α -níveis dados, respectivamente, por $[A]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$ e $[B]^\alpha = [b_1^\alpha, b_2^\alpha]$. Então valem as seguintes propriedades:*

- (a) *A soma entre A e B é o número fuzzy $A + B$ cujos α -níveis são*

$$[A + B]^\alpha = [A]^\alpha + [B]^\alpha = [a_1^\alpha + b_1^\alpha, a_2^\alpha + b_2^\alpha];$$

- (b) *A diferença entre A e B é o número fuzzy $A - B$ cujos α -níveis são*

$$[A - B]^\alpha = [A]^\alpha - [B]^\alpha = [a_1^\alpha + b_2^\alpha, a_2^\alpha + b_1^\alpha];$$

- (c) *A multiplicação de λ por A é o número fuzzy λA cujos α -níveis são*

$$[\lambda A]^\alpha = \lambda [A]^\alpha = \begin{cases} [\lambda a_1^\alpha, \lambda a_2^\alpha] & \text{se } \lambda \geq 0 \\ [\lambda a_2^\alpha, \lambda a_1^\alpha] & \text{se } \lambda < 0; \end{cases}$$

- (d) *A multiplicação de A por B é o número fuzzy A.B cujos α -níveis são*

$$[A . B]^\alpha = [A]^\alpha [B]^\alpha = [\min P, \max P],$$

onde $P = \{a_1^\alpha b_1^\alpha, a_1^\alpha b_2^\alpha, a_2^\alpha b_1^\alpha, a_2^\alpha b_2^\alpha\}$;

(e) A divisão de A por B , se $0 \notin \overline{\text{supp}B}$, é o número fuzzy cujos α -níveis são

$$\left[\frac{A}{B} \right]^\alpha = \frac{[A]^\alpha}{[B]^\alpha} = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] \left[\frac{1}{b_2^\alpha}, \frac{1}{b_1^\alpha} \right].$$

Definição 2.3.6. (Diferença de Hukuhara: $A -_H B$). Sejam A e B dois números fuzzy. Se existir um número fuzzy C tal que $A = B + C$, então C é chamado de Diferença de Hukuhara de A e B e a denotamos por $A -_H B$.

Em α -níveis, isto equivale a dizer que

$$[A -_H B]^\alpha = [a_1^\alpha - b_1^\alpha, a_2^\alpha - b_2^\alpha] \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Como

$$[A - B]^\alpha = [a_1^\alpha - b_2^\alpha, a_2^\alpha - b_1^\alpha],$$

segue que

$$A - B = A -_H B \Leftrightarrow b_1^\alpha = b_2^\alpha,$$

ou seja,

$$A - B = A -_H B \Leftrightarrow B \in \mathbb{R}.$$

Note que

$$A - B = A + (-1)B \neq A -_H B.$$

2.4 Derivadas e Integrais Fuzzy

Nesta seção abordar apenas o caso unidimensional, ou seja, o caso em que a função está definida em um intervalo da reta com valores no conjunto dos números fuzzy:

$$u : [a, b] \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}), a \geq 0,$$

onde $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ representa o conjunto dos números fuzzy.

Para o caso mais geral e mais informações sobre derivadas de funções fuzzy pode-se consultar [13, 7].

Para o caso unidimensional definimos a derivada de $u(t)$ a partir de seus α -níveis. Lembrando que a função $u : [a, b] \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ que associa um número real t a um número fuzzy $u(t)$ está bem definida se, e somente se, para cada $\alpha \in [0, 1]$, existem funções reais

$$u_1^\alpha, u_2^\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},$$

tais que os α -níveis de $u(t)$ são $[u_1^\alpha(t), u_2^\alpha(t)]$, ou seja,

$$[u(t)]^\alpha = [u_1^\alpha(t), u_2^\alpha(t)].$$

Nesta seção usaremos u' para indicar a derivada e $\int_a^b u(t)dt$ para a integral de funções fuzzy $u : [a, b] \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$

Definição 2.4.1. (Derivada de Hukuhara). A função $u : [a, b] \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ cujos α -níveis são dados por

$$[u'(t)]^\alpha = [(u_1^\alpha)'(t), (u_2^\alpha)'(t)].$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$, é a derivada da função fuzzy $u(t)$, conhecida como derivada de Hukuhara. Claro que estamos supondo a existência das derivadas clássicas $(u_1^\alpha)'(t)$ e $(u_2^\alpha)'(t)$.

Assim α -níveis da derivada (fuzzy) são as derivadas (clássicas) dos extremos dos α -níveis de u . Observamos que a existência de $u'(t)$ implica necessariamente que os intervalos $[(u_1^\alpha)'(t), (u_2^\alpha)'(t)]$ satisfazem o Teorema 2.1.2 de representação.

Definição 2.4.2. A integral de u no intervalo $[a, b]$, indicada por $\int_a^b u(t)dt$, e o número fuzzy com α -níveis:

$$\left[\int_a^b u(t)dt \right]^\alpha = \left[\int_a^b u_1^\alpha(t)dt, \int_a^b u_2^\alpha(t)dt \right],$$

onde $\int_a^b u_1^\alpha(t)dt$ e $\int_a^b u_2^\alpha(t)dt$ são as integrais de Riemann das funções reais $u_1^\alpha(t)$ e $u_2^\alpha(t)$.

A existência de $\int_a^b u(t)dt$ implica necessariamente que os intervalos

$$\left[\int_a^b u_1^\alpha(t)dt, \int_a^b u_2^\alpha(t)dt \right],$$

satisfazem o Teorema 2.1.2 de representação. Como observado para as derivadas, aqui também estamos supondo que as funções u_1^α e u_2^α são Riemann integráveis no intervalo $[a, b]$.

Definição 2.4.3. A métrica para conjuntos fuzzy, proveniente da métrica de Hausdorff, é dada por:

$$\mathcal{D}(A, B) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} d_H([A]^\alpha, [B]^\alpha),$$

onde d_H é a métrica de Hausdorff para intervalos compactos de \mathbb{R} , cuja definição é

$$d_H(I, J) = \max(\sup_{x \in I} (d(x, J)), \sup_{y \in J} (d(y, I))) ,$$

onde $d(x, J) = \inf_{j \in J} d(x, j)$ e $d(r, s) = |r - s|$.

Teorema 2.4.1. *Se $F, G : [a, b] \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ são funções diferenciáveis e $\lambda \in \mathbb{R}$, então*

(a) *F e G são contínuas na métrica \mathcal{D} ;*

(b) *$(F + G)'(t) = F'(t) + G'(t)$;*

(c) *$(\lambda F)'(t) = \lambda F'(t)$.*

Demonstração. Ver [12]

□

Teorema 2.4.2. *Seja $F : [a, b] \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ Então a função $G(t) = \int_a^t F(s)ds$ é derivável e $G'(t) = F(t)$ para todo $t \in [a, b]$.*

Demonstração. Ver [12]

□

Teorema 2.4.3. *Seja $F : [a, b] \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ integrável. Então, para todo $c \in [a, b]$ vale*

$$\int_a^c F(t)dt + \int_c^b F(t)dt = \int_a^b F(t)dt.$$

Demonstração. Ver [12]

□

Estes teoremas fornecem o suporte para estudar equações diferenciais fuzzy.

Capítulo 3

Fluxos Determinísticos e Fluxos Fuzzy

Iniciaremos neste capítulo o estudo de sistemas de equações diferenciais da forma

$$(*) \begin{cases} x'_1 = X_1(x_1, \dots, x_n), \\ x'_2 = X_2(x_1, \dots, x_n), \\ \vdots \\ x'_n = X_n(x_1, \dots, x_n), \end{cases}$$

Várias questões são relevantes para o estudo global das soluções de (*). Deseja-se saber, por exemplo, quais soluções $x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$; de (*) são periódicas ou permanecem em uma região limitada do espaço. Ou então se convergem para um ponto de equilíbrio (que é uma solução constante) ou para uma órbita periódica quando $t \rightarrow +\infty$. Os métodos desenvolvidos para responder estas questões constituem um corpo de resultados que Poincaré chamou de Teoria Qualitativa. Atualmente esta teoria é significativa para muitos problemas não lineares que transcendem à Mecânica Celeste.

3.1 Fluxos Determinístico

Seja U um subconjunto aberto do espaço euclidiano \mathbb{R}^n . Um campo vetorial de classe C^k , $1 \leq k \leq \infty$ em U é uma aplicação $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k . Ao campo vetorial X associamos a equação diferencial

$$x' = X(x). \quad (3.1)$$

As soluções desta equação, isto é, as aplicações diferenciáveis $\varphi : I \rightarrow U$ (I intervalo

da reta) tais que

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = X(\varphi(t)) \quad \text{e} \quad \varphi(0) = x_o, \quad (3.2)$$

para todo $t \in I$, são chamadas trajetórias ou curvas integrais de X com a condição de valor inicial $\varphi(0) = x_o$.

Definição 3.1.1. Um ponto $x \in U$ é dito ponto singular de X se $X(x) = 0$ e ponto regular de X se $X(x) \neq 0$.

Se x é ponto singular então $\varphi(t) = x, -\infty < t < \infty$, é solução de (3.1). Reciprocamente, se $\varphi(t) = x, -\infty < t < \infty$ é solução de (3.1) então x é ponto singular de X , pois

$$0 = \varphi'(t) = X(\varphi(t)) = X(x).$$

Uma curva integral $\varphi : I \rightarrow U$ de X chama-se *máxima* se para toda curva integral $\psi : J \rightarrow U$ tal que $I \subseteq J$ e $\varphi = \psi|_I$ então $I = J$ e conseqüentemente $\varphi = \psi$. Neste caso I chama-se *intervalo máximo*.

Uma Equação diferencial do tipo (3.1) é chamada de *equação diferenciável autônoma*, isto é, independe de t .

Definição 3.1.2. Um ponto $x_e \in U$ é um *ponto de equilíbrio* para a Equação (3.1) se $X(x_e) = 0$. A solução constante $\varphi_t(x_e) \equiv x_e$ é denominada *solução de equilíbrio*.

Definição 3.1.3. Um ponto de equilíbrio $x_e \in U \subset \mathbb{R}^n$ é estável se dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que para todo $\|x_o - x_e\| < \delta$ temos $\|\varphi_t(x_o) - x_e\| < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$. Se além disso existe $r > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo $\|x_o - x_e\| < r$ temos que $\|\varphi_t(x_o) - x_e\| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, então x_e é assintoticamente estável.

Teorema 3.1.1. (i) (*Existência e unicidade de soluções máximas*). Para cada $x \in U$ existe um intervalo aberto I_x onde está definida a única solução máxima φ_x de (3.1) tal que $\varphi_x(0) = x$.

(ii) (*Propriedade de grupo*). Se $y = \varphi_x(s)$ e $s \in I_x$, então $I_y = I_x - s = \{r - s : r \in I_x\}$ e $\varphi_y(s) = \varphi_x(t + s)$ para todo $t \in I_y$.

(iii) (*Diferenciabilidade em relação às condições iniciais*). O conjunto $D = \{(t, x) : x \in U, t \in I_x\}$ é aberto em \mathbb{R}^{n+1} e a aplicação $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\varphi(t, x) = \varphi_x(t)$ é de classe C^k . Mais ainda, φ satisfaz à equação

$$D_1 D_2 \varphi(t, x) = DX(\varphi(t, x)) \cdot D_2 \varphi(t, x), \quad D_2 \varphi(t, x)|_{t=0},$$

para todo $(t, x) \in D$.

Demonstração. Ver referência [22]. □

Corolário 3.1.1. *Seja X um campo vetorial C^r , $r \geq 1$, em $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Se $x \in U$ e $I_x = (\omega_-(x), \omega_+(x))$ é tal que $\omega_+(x) < \infty$ (resp, $\omega_-(x) > -\infty$) então $\varphi_x(t)$ tende a ∂U quando $t \rightarrow \omega_+(x)$ (resp, $t \rightarrow \omega_-(x)$), isto é, para todo compacto $K \subseteq U$ existe $\epsilon = \epsilon(K) > 0$ tal que se $t \in [\omega_+(x) - \epsilon, \omega_+(x))$ (resp. $t \in (\omega_-(x), \omega_-(x) + \epsilon]$) então $\varphi_x(t) \notin K$*

Demonstração. Ver referência [22]. □

Corolário 3.1.2. *Se $U = \mathbb{R}^n$ e $|X(x)| < c$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, então $I_x = \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Ver referência [22]. □

Corolário 3.1.3. *Se $\varphi(x)$ é uma solução regular de (3.1) definida no intervalo máximo I_x e $\varphi_x(t_1) = \varphi_x(t_2)$ para $t_1 \neq t_2$, então $I_x = \mathbb{R}$, $\varphi_x(t + c) = \varphi_x(t)$, para todo t , onde $c = t_2 - t_1$. Isto é, φ_x é uma solução periódica.*

Demonstração. Ver referência [22]. □

Teorema 3.1.2 (Teorema da contração nas fibras). *Sejam (X, d) e (\dot{X}, \dot{d}) espaços métricos completos e $\hat{F} : X \times \dot{X} \rightarrow X \times \dot{X}$ uma aplicação na forma $\hat{F}(x, \dot{x}) = (F(x), \dot{F}(x, \dot{x}))$. Suponha que*

- (a) $F : X \rightarrow X$ tem um ponto fixo atrator p . Isto é, $F(p) = p$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} F^n(x) = p$ para todo $x \in X$.
- (b) Para todo $\dot{x} \in \dot{X}$ a aplicação $F_{\dot{x}} : X \rightarrow X$ definida por $F_{\dot{x}}(x) = \dot{F}(x, \dot{x})$ é contínua.
- (c) Para todo $x \in X$ a aplicação $\dot{F}_x : \dot{X} \rightarrow \dot{X}$ definida por $\dot{F}_x(\dot{x}) = \dot{F}(x, \dot{x})$ é uma λ -contração, com $\lambda < 1$, isto é, $\dot{d}(\dot{F}_x(\dot{x}), \dot{F}_x(\dot{y})) \leq \lambda \dot{d}(\dot{x}, \dot{y})$ para todo $\dot{x}, \dot{y} \in \dot{X}$.

Então, se \dot{p} denota o único ponto fixo atrator de \dot{F}_p , o ponto $\hat{p} = (p, \dot{p})$ é um ponto fixo atrator de \hat{F} .

Demonstração. Ver referência [22]. □

Teorema 3.1.3. *Seja $A \subset U \times P$, $x_e : A \rightarrow U$ uma aplicação contínua e seja $K \subset A$, compacto. Suponha que $\varphi_t(x_o, p_o) \rightarrow x_e(x_o, p_o)$, quando $t \rightarrow \infty$, sempre que $(x_o, p_o) \in A$. Se $x_e(x_o, p_o)$ é assintoticamente estável, quando $\varphi_t : U \times P \rightarrow U$ converge uniformemente em K , para $x_e : A \rightarrow U$.*

Demonstração. Para cada $\varepsilon > 0$ e $y_o = (x_o, p_o) \in K$ temos que $x_e(y_o)$ é assintoticamente estável, quando existe, $\delta_{y_o} > 0$ tal que

$$\|\varphi_t(z_o) - x_e(y_o)\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

para cada $z_o \in B(x_e(y_o), \delta_{y_o})$ e $t \in \mathbb{R}_+$. Por hipótese $\varphi_t(x_o, p_o) \rightarrow x_e(x_o, p_o)$ e portanto, existe $t_{y_o} \geq 0$. Pela continuidade de φ_t e pela aplicação $x_e : A \rightarrow U$ em $y_o \in A$, existe $\eta_{y_o} > 0$ tal que

$$\|\varphi_{t_{y_o}}(z_o) - x_e(y_o)\| < \delta_{y_o} \quad \text{e} \quad \|x_e(z_o) - x_e(y_o)\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (3.3)$$

para cada $z_o \in B(y_o, \eta_{y_o})$.

Da inequação (3.3) acima temos que $\varphi_{t_{y_o}}(z_o) \in B(x_e(y_o), \delta_{y_o})$

$$\|\varphi_t(\varphi_{t_{y_o}})(z_o) - x_e(y_o)\| = \|\varphi_{t+t_{y_o}}(z_o) - x_e(y_o)\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{para } t \in \mathbb{R}_+.$$

Ainda,

$$\|\varphi_t(z_o) - x_e(z_o)\| \leq \|\varphi_t(z_o) - x_e(y_o)\| + \|x_e(y_o) - x_e(z_o)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

para cada $t \geq t_{y_o}$ e $z_o \in B(y_o, \eta_{y_o})$.

Agora, a união das vizinhanças $B(y_o, \eta_{y_o})$, $y_o \in K$ é um conjunto aberto e contém o conjunto compacto k . Assim, existe $y_{oi} \in K$, $1 \leq i \leq n < \infty$, tal que

$$K \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq n} B(y_{oi}, \eta_{y_{oi}}) \subseteq \bigcup_{y_o \in K} B(y_o, \eta_{y_o}).$$

Seja $T = \max_{1 \leq i \leq n} \{t_{y_{oi}}\}$. Se $y_o \in K$ e $y_o \in B(y_{oi}, \eta_{y_{oi}})$ para $1 \leq i \leq n$, então

$$\|\varphi_t(y_o) - x_e(y_o)\| < \varepsilon,$$

para todo $t > T$.

□

Teorema 3.1.4 (Teorema global de diferenciabilidade). *Seja f um campo vetorial de classe C^k , $k \geq 1$, num aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$.*

(a) Para cada ponto $x \in U$ existe um intervalo aberto I_x , onde está definida uma única curva integral máxima $\varphi_x : I_x \rightarrow U$, do campo passando por x ; isto é, φ_x satisfaz em I_x a equação $\frac{dy}{dt} = f(y), y(0) = x$.

(b) Se $y = \varphi_x(s), s \in I_x$, então

$$I_y = I_x - s = \{\tau - s; \tau \in I_x\},$$

e $\varphi_y(t) = \varphi_x(t + s)$, para todo $t \in I_y$.

(c) O conjunto $D = \{(t, x); x \in U, t \in I_x\}$ é aberto em \mathbb{R}^{n+1} e a aplicação $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida por $\varphi(t, x) = \varphi_x(t)$ é de classe C^k .

Demonstração. Ver referência [22]. □

Definição 3.1.4. O conjunto $\gamma_p = \{\varphi(t, p); t \in I_p\}$, isto é, a imagem da curva integral de X pelo ponto p , chama-se órbita de X pelo ponto p .

Observe que $q \in \gamma_p \Leftrightarrow \gamma_q = \gamma_p$. De fato, se $q \in \gamma_p, q = \varphi(t_1, p)$ e $\varphi(t, q) = \varphi(t + t_1, p)$ e $I_p - t_1 = I_q$.

Em outros termos, duas órbitas de X coincidem ou são disjuntas. Isto é, U fica decomposto numa união disjunta de curvas diferenciáveis, podendo cada uma ser

- (a) imagem biunívoca de um intervalo de \mathbb{R} ;
- (b) um ponto, ou;
- (c) difeomorfa a um círculo.

Definição 3.1.5. Dizemos que $p \in U$ é um *ponto periódico* de período τ , ou ainda, um ponto τ -periódico, para o fluxo φ_t quando existe $\tau > 0$ tal que $\varphi_\tau(p) = p$ e $\varphi_t(p) \neq p$ para todo $t < \tau$.

Definição 3.1.6. Uma órbita periódica $\gamma \subset U$ é estável quando para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $\text{dist}(x_o, \gamma) < \delta$, então $\text{dist}(\varphi_t(x_o), \gamma) < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$. A órbita é assintoticamente estável quando é estável e existe $r > 0$ tal que $\text{dist}(x_o, \gamma) < r$ implica que $\text{dist}(\varphi_t(x_o), \gamma) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Teorema 3.1.5. Se φ_x é uma solução máxima de (3.1) em I_x , verifica-se uma única das seguintes alternativas:

(a) φ_x é injetiva;

(b) $I_x = \mathbb{R}$ e φ_x é contante;

(c) $I_x = \mathbb{R}$ e φ_x é periódica, isto é, existe $\tau > 0$ tal que $\varphi_x(t + \tau) = \varphi_x(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $\varphi_x(t_1) \neq \varphi_x(t_2)$ se $|t_1 - t_2| < \tau$.

Demonstração. Ver referência [22]. □

Definição 3.1.7. O conjunto aberto U , munido da decomposição em órbitas de X , chama-se retrato de fase de X . As órbitas são orientadas no sentido das curvas integrais do campo X ; os pontos singulares são munidos da orientação trivial.

Definição 3.1.8. Sejam X_1, X_2 campos vetoriais definidos nos abertos de \mathbb{R}^n , U_1, U_2 , respectivamente. Diz-se que X_1 é topologicamente equivalente (resp. C^r -equivalente) a X_2 quando existe um homeomorfismo (resp. um difeomorfismo de classe C^r) $h : U_1 \rightarrow U_2$ que leva órbita de X_1 em órbita de X_2 preservando a orientação. Mais precisamente, sejam $p \in U_1$ e $\gamma^1(p)$ a órbita orientada de X_1 passando por p ; então $h(\gamma^1(p))$ é a órbita orientada $\gamma^2(h(p))$ de X_2 passando por $h(p)$.

Definição 3.1.9. Sejam $\varphi_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\varphi_2 : D_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ os fluxos gerados pelos campos $X_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $X_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ respectivamente. Diz-se que X_1 é topologicamente conjugado (resp. C^r -conjugado) a X_2 quando existe um homeomorfismo (resp. um difeomorfismo de classe C^r) $h : U_1 \rightarrow U_2$ tal que $h(\varphi_1(t, x)) = \varphi_2(t, h(x))$ para todo $(t, x) \in D_1$.

Lema 3.1.1. Sejam $X_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $X_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ campos C^k e $h : U_1 \rightarrow U_2$ um difeomorfismo de classe C^r . Então h é uma conjugação entre X_1 e X_2 se, e somente se,

$$Dh(p)X_1(p) = X_2(h(p)), \quad \forall p \in U_1.$$

Demonstração. Ver referência [22]. □

Definição 3.1.10. Sejam $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^k , $k \geq 1$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e $A \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ um aberto. Uma aplicação diferenciável $f : A \rightarrow U$ de classe C^r chama-se seção transversal local de X (de classe C^r) quando, para todo $a \in A$, $Df(a)(\mathbb{R}^{n-1})$ e $X(f(a))$ geram o espaço \mathbb{R}^n . Seja $\Sigma = f(A)$ munido da topologia induzida. Se $f : A \rightarrow \Sigma$ for um homeomorfismo, diz-se que Σ é uma seção transversal de X .

Teorema 3.1.6 (Teorema do fluxo tubular). . *Seja p um ponto não singular de $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k e $f : A \rightarrow \Sigma$ uma seção transversal local de X de classe C^k com $f(0) = p$. Então existe uma vizinhança V de p em U e um difeomorfismo $h : V \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$ de classe C^k , onde $\varepsilon > 0$ e B é uma bola aberta em \mathbb{R}^{n-1} de centro na origem $0 = f^{-1}(p)$ tal que*

$$(a) \ h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B;$$

$$(b) \ h \text{ é uma } C^k\text{-conjugação entre } X|_V \text{ e o campo constante } Y : (-\varepsilon, \varepsilon) \times B \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ Y = (1, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. Ver referência [22]. □

3.2 Fluxos Fuzzy

Nosso objetivo, neste tópico, consiste em desenvolver ferramentas de análise qualitativa para o fluxo fuzzy, obtido por meio de extensão de Zadeh aplicada sobre a condição inicial do fluxo determinístico, gerado por uma equação diferencial autônoma.

3.2.1 Fluxos sobre o espaço $\mathcal{E}(U)$

Como vimos no capítulo anterior, o conjunto $\mathcal{E}(X)$, formado pelos subconjuntos fuzzy de X com suporte compacto, define um espaço métrico com a métrica d_∞ induzida através da métrica de Hausdorff sobre os conjuntos compactos de X . Entende-se por sistema dinâmico fuzzy, ou fluxo fuzzy, os sistema dinâmicos definidos sobre o espaço $\mathcal{E}(X)$.

Definição 3.2.1. Seja $\widehat{\varphi}_t : \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{E}(X), t \in \mathbb{R}_+$, uma família de aplicações contínuas. Se

$$a) \ \widehat{\varphi}_0 = I;$$

$$b) \ \widehat{\varphi}_t \circ \widehat{\varphi}_s = \widehat{\varphi}_{t+s}, \text{ para todo } t, s \in \mathbb{R}_+,$$

então dizemos que a família de aplicações $\widehat{\varphi}_t$ é um sistema dinâmico fuzzy (ou fluxo fuzzy).

Neste capítulo, desenvolvemos algumas ferramentas de análise qualitativa para os fluxos fuzzy definidos sobre o espaço $\mathcal{E}(U), U \subset \mathbb{R}^n$. Mais precisamente, consideramos aqui uma classe especial de fluxos fuzzy que são obtidos pela extensão de Zadeh de soluções determinísticas de equações diferenciais autônomas.

Definição 3.2.2. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $x_0 \in U$. Dizemos que $\widehat{\varphi}_t : \mathcal{E}(X) \longrightarrow \mathcal{E}(X), t \in \mathbb{R}_+$ é uma solução fuzzy para a Equação (3.4) quando $\widehat{\varphi}_t(\chi_{\{x_0\}}) = \chi_{\{\varphi_t(x_0)\}}$, onde $\varphi_t : U \longrightarrow U$ é a solução da equação autônoma

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x(0) = x_0. \quad (3.4)$$

Seja então $\varphi_t : U \longrightarrow U$ o fluxo gerado pela Equação (3.4) e consideremos a aplicação $\widehat{\varphi}_t : \mathcal{E}(X) \longrightarrow \mathcal{E}(X)$, obtida pela extensão de Zadeh de φ_t . Estamos interessados em desenvolver uma análise assintótica do solução fuzzy e portanto, consideramos aqui apenas as equações cujas soluções $\varphi_t : U \longrightarrow U$ estejam definidas para todo $t \geq 0$ (ou $t \in \mathbb{R}_+$).

Proposição 3.2.1. *Seja $\widehat{\varphi}_t : \mathcal{E}(U) \longrightarrow \mathcal{E}(U)$ a solução fuzzy de (3.4). Para todo \mathbf{x}_0 e \mathbf{y}_0 em $\mathcal{E}(U)$ vale*

$$d_\infty(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_0), \widehat{\varphi}_t(\mathbf{y}_0)) \leq d_\infty(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)e^{Kt},$$

para alguma constante $K > 0$ e $t \in \mathbb{R}_+$.

Demonstração. Para $x_0, y_0 \in U$, o fluxo determinístico (3.4) satisfaz a desigualdade

$$\|\varphi_t(x_0) - \varphi_t(y_0)\| \leq \|x_0 - y_0\|e^{Kt},$$

para alguma constante positiva K (Hirsch e Smale, 1974).

Sejam então $\mathbf{x}_o, \mathbf{y}_o \in \mathcal{E}(U)$. Para todo $\alpha \in [0, 1]$ temos que :

$$\begin{aligned} \text{dist}(\varphi_t([\mathbf{x}_o]^\alpha), \varphi_t([\mathbf{y}_o]^\alpha)) &= \sup_{x_o \in [\mathbf{x}_o]^\alpha} \inf_{y_o \in [\mathbf{y}_o]^\alpha} \|\varphi_t(x_o) - \varphi_t(y_o)\| \\ &\leq \sup_{x_o \in [\mathbf{x}_o]^\alpha} \inf_{y_o \in [\mathbf{y}_o]^\alpha} \|x_o - y_o\|e^{Kt} \\ &\leq \text{dist}([\mathbf{x}_o]^\alpha, [\mathbf{y}_o]^\alpha)e^{Kt}. \end{aligned}$$

De maneira análoga, temos $\text{dist}(\varphi_t([\mathbf{y}_o]^\alpha), \varphi_t([\mathbf{x}_o]^\alpha)) \leq \text{dist}([\mathbf{y}_o]^\alpha, [\mathbf{x}_o]^\alpha)e^{Kt}$ e, portanto,

$$d_H(\varphi_t([\mathbf{x}_o]^\alpha), \varphi_t([\mathbf{y}_o]^\alpha)) \leq d_H([\mathbf{x}_o]^\alpha, [\mathbf{y}_o]^\alpha)e^{Kt}.$$

Logo, pela definição da métrica d_∞ , temos a desigualdade

$$d_\infty(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \widehat{\varphi}_t(\mathbf{y}_o)) \leq d_\infty(\mathbf{x}_o, \mathbf{y}_o)e^{Kt},$$

e a proposição está provada. □

Algumas propriedades da extensão de Zadeh do fluxo determinístico, gerado por uma equação autônoma, foram inicialmente estabelecidas em Mizukoshi (2004) e Mizukoshi et al. (2009). Por exemplo, Mizukoshi (2004) demonstra que a família de aplicações $\widehat{\varphi}_t : \mathcal{E}(U) \longrightarrow \mathcal{E}(U), t \in \mathbb{R}_+$, é um sistema dinâmico sobre $\mathcal{E}(U)$.

Proposição 3.2.2. *Seja $\varphi_t : U \rightarrow U$ o fluxo determinístico do problema (3.3). Então a aplicação $\widehat{\varphi}_t : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}(U)$ satisfaz as condições:*

a) $\widehat{\varphi}_0(\mathbf{x}_o) = \mathbf{x}_o;$

b) $\widehat{\varphi}_{t+s}(\mathbf{x}_o) = \widehat{\varphi}_t \circ \widehat{\varphi}_s(\mathbf{x}_o);$

para todo $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(U)$ e $t, s \in \mathbb{R}_+$.

Por essa propriedade, a extensão de Zadeh $\widehat{\varphi}_t : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}(U)$ de um fluxo determinístico $\varphi_t : U \rightarrow U$ é uma solução fuzzy.

Como a família de aplicações $\widehat{\varphi}_t$ define um fluxo sobre $\mathcal{E}(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$, então podemos usar as propriedades de fluxos determinísticos para compreender o comportamento $\widehat{\varphi}_t$ ao longo do tempo. Além disso, todas as afirmações feitas para fluxos em espaços métricos são verdadeiras para o fluxo fuzzy. No entanto, neste tópico buscamos relacionar o comportamento das soluções fuzzy e determinística da Equação (3.3).

3.2.2 Fluxos Fuzzy e equações diferenciais parciais

Os fluxos fuzzy podem ser interpretados como soluções de equações diferenciais parciais de primeira ordem. Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja suficientemente suave e considere uma equação autônoma

$$\frac{dx}{dt} = f(x), x(0) = x_o, \tag{3.5}$$

e a equação diferencial parcial de primeira ordem

$$\begin{cases} u_t + f(x)u_x = 0, & (t, x) \in \mathbb{R} \times U, \\ u(0, x) = u_o(x), & x \in U, \end{cases} \tag{3.6}$$

onde $u_o : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 e

$$f(x)u_x(t, x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x_i}.$$

Soluções para a equação (3.5) pode ser encontrado pelo método de características. Por este método, precisamos encontrar uma trajetória $x(t)$ tal que $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $z(t) = u(t, x(t))$, é uma função constante. Se $u : \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução da equação (3.5) então

$$\frac{\partial z}{\partial t}(s) = u_t(s, x(s)) + \frac{\partial x}{\partial t}(s)u_x(s, x(s)) = u_t(s, x(s)) + f(x(s))u_x(s, x(s)) = 0,$$

então $x(t)$ satisfaz a equação (3.4). Por outro lado, se $\varphi_t(x_o)$ é solução da equação (3.5) então $u(t, \varphi_t(x_o)) = c$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Em particular, assumindo $t = 0$ teremos $c = u(0, \varphi_0(x_o)) = u_o(x_o)$.

Portanto, para encontrar o valor de u em $(t, x) \in \mathbb{R} \times U$ precisamos encontrar $x_o \in U$ de tal modo que $\varphi_t(x_o) = x$, usando as propriedades de fluxo, isso significa que $x_o = \varphi_{-t}(x)$ e

$$u(t, x) = u_o(\varphi_{-t}(x)) ,$$

com $t \in \mathbb{R}$.

Teorema 3.2.1. *Seja $\widehat{\varphi}_t$ a extensão de Zadeh do fluxo φ_t da equação (3.5) e $u : \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}$ solução da equação (3.6). Se $u_o(x) = \mu_{\mathbf{x}_o}(x)$, $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(U)$, quando*

$$\mu_{\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)}(x) = u(t, x) ,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e $x \in U$.

Demonstração. Seja $u_o(x) = \mu_{\mathbf{x}_o}(x)$ para todo $x \in U$. Conforme descrito anteriormente, para todo $(t, x) \in \mathbb{R} \times U$

$$u(t, x) = \mu_{\mathbf{x}_o}(\varphi_{-t}(x)) , \tag{3.7}$$

Por outro lado, pela definição da extensão de Zadeh, verifica-se que

$$\mu_{\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)}(x) = \sup_{\varphi_t(x_o)=x} \mu_{\mathbf{x}_o}(x_o) = \mu_{\mathbf{x}_o}(\varphi_{-t}(x)) , \tag{3.8}$$

e a última igualdade é válida pela unicidade da solução com relação à condição inicial. Assim, pelas igualdades (3.7) e (3.8), verifica-se que

$$u(t, x) = \mu_{\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)}(x) ,$$

para todo $(t, x) \in \mathbb{R} \times U$. □

Exemplo 3.2.1. Consideremos o fluxo determinístico

$$\varphi_t(x_o) = k + (x_o - k)e^{-\beta t} ,$$

gerado pela equação unidimensional

$$\frac{dx}{dt} = f(x) = \beta(k - x).$$

Dado $u_o : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a solução da equação diferencial parcial

$$\begin{cases} u_t + \beta(k - x)u_x = 0, & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_o(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.9)$$

é dada por

$$u(t, x) = u_o(k + (x - k)e^{\beta t}).$$

Seja agora $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ com função de pertinência $\mu_{\mathbf{x}_o} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$. De acordo com o Teorema (3.2.1), a função de pertinência de $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ é a solução da equação diferencial parcial com $u_o(x) = \mu_{\mathbf{x}_o}(x)$, isto é,

$$\mu_{\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)} = \mu_{\mathbf{x}_o}(k + (x - k)e^{\beta t}).$$

Na Figura 3.1 temos o gráfico da função de pertinência $\mu_{\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)}$ para diferentes valores de tempo. A condição inicial, neste caso, tem função de pertinência dada por:

$$\mu_{\mathbf{x}_o}(x) = \max\{1 - 0,04(x - 5)^2, 0\}.$$

com $\beta = 0,04$ e $k = 50$. De acordo com (3.2.1) a função de pertinência da solução fuzzy $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ coincide com a solução da EDP

$$u_t + \beta(k - x)u_x = 0,$$

com $u_o(x) = \mu_{\mathbf{x}_o}(x)$ para todo $x > 0$.

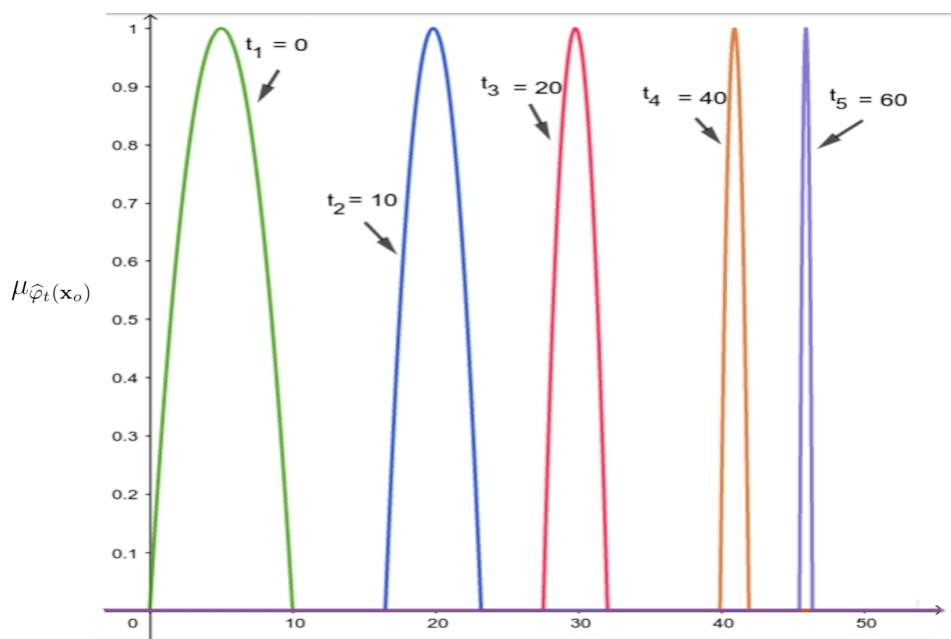


Figura 3.1: Funções de pertinência de $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$, para alguns valores de t , da solução fuzzy da equação (3.6).

Seja $\pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\pi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$, onde, π_i é a projeção ortogonal de x_i sobre o eixo coordenado. Seja $\widehat{\pi}_i : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$, a extensão de Zadeh π_i . Assim, dado $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, a imagem de x por $\widehat{\pi}_i$ é um subconjunto fuzzy \mathbf{x}_i de \mathbb{R} com função de pertinência dada por

$$\mu_{\mathbf{x}_i}(a) = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x_i = a}} \mu_{\mathbf{x}}(x).$$

Agora, seja $\varphi_t : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow U$ um fluxo determinístico e $\varphi_t^{(i)} : U \rightarrow \mathbb{R}$ a i -ésima componente de φ_t . A extensão de Zadeh de $\varphi_t^{(i)}$ define uma aplicação $\widehat{\varphi}_t^{(i)} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ tal que para cada $\mathbf{x}_o \in \mathcal{F}(U)$ tem imagem $\widehat{\varphi}_t^{(i)}(\mathbf{x}_o) \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$. Assim como no caso determinístico, o próximo teorema mostra que essa função $\widehat{\varphi}_t^{(i)} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ pode ser interpretado como uma projeção do fluxo fuzzy $\widehat{\varphi}_t^{(i)} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ sobre $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ (Cecconello, 2010).

Teorema 3.2.2. *Seja $\widehat{\varphi}_t^{(i)} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ a extensão de Zadeh de $\varphi_t^{(i)}$. Para cada $\mathbf{x}_o \in \mathcal{F}(U)$ temos que*

$$\widehat{\pi}_i(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)) = \widehat{\varphi}_t^{(i)}(\mathbf{x}_o).$$

Demonstração. Desde que π_i e φ_t sejam aplicações contínuas, teremos

$$\begin{aligned} [\pi_i(\varphi_t(\mathbf{x}_o))]^\alpha &= \pi_i(\varphi_t([\mathbf{x}_o]^\alpha)) = \{\pi_i(\varphi_t(x_o)) : x_o \in [\mathbf{x}_o]^\alpha\} \\ &= \{\varphi_t^{(i)}(x_o) : x_o \in [\mathbf{x}_o]^\alpha\} \\ &= \varphi_t^{(i)}([\mathbf{x}_o]^\alpha), \end{aligned}$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$. Esta igualdade é uma prova da afirmação. □

Na próxima seção, faremos uso dos resultados desta seção para analisar o comportamento assintótico de alguns fluxos fuzzy.

Capítulo 4

Análises Assintóticas

4.1 Pontos de equilíbrio estável

Similarmente ao caso clássico, podemos definir o conceito de ponto de equilíbrio para $\widehat{\varphi}_t$ como sendo um ponto invariante pelo fluxo fuzzy. Os pontos de equilíbrio para o fluxo fuzzy é dito *pontos de equilíbrio fuzzy*.

Definição 4.1.1. Dizemos que $\mathbf{x}_e \in \mathcal{E}(U)$ é um ponto de equilíbrio fuzzy $\widehat{\varphi}_t$ quando

$$\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_e) = \mathbf{x}_e ,$$

para todo $t \geq 0$.

Podemos caracterizar um ponto de equilíbrio fuzzy por meio dos α - níveis. Se \mathbf{x}_e é um ponto de equilíbrio fuzzy então vale a igualdade

$$[\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_e)]^\alpha = \varphi_t([\mathbf{x}_e]^\alpha) = [\mathbf{x}_e]^\alpha ,$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$ e $t \in \mathbb{R}_+$.

Proposição 4.1.1. *Seja $x_e \in U$. Então x_e é um ponto de equilíbrio para φ_t se, e somente se, $\chi_{\{x_e\}}$ é um ponto de equilíbrio para φ_t .*

Demonstração. Ver Mizukoshi (2004), [15]. □

Definição 4.1.2. Um ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_e \in \mathcal{E}(U)$ é estável se dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que para todo $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(U)$ com $d_\infty(\mathbf{x}_o, \mathbf{x}_e) < \delta$ temos $d_\infty(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \mathbf{x}_e) < \varepsilon$, para todo $t \geq 0$. Se além disso existe $r > 0$ tal que para todo $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(U)$ satisfazendo $d_\infty(\mathbf{x}_o, \mathbf{x}_e) < r$ temos que $d_\infty(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \mathbf{x}_e) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, então \mathbf{x}_e é assintoticamente estável.

O ponto de equilíbrio é *instável* quando não é estável.

Proposição 4.1.2. *Sejam $x_e \in U$ um ponto de equilíbrio para (3.4) e $\widehat{\varphi}_t$ o fluxo fuzzy associado ao fluxo determinístico φ_t . Então valem as seguintes afirmações:*

- a) x_e é estável para φ_t se, e somente se, χ_{x_e} é estável para $\widehat{\varphi}_t$;
- b) x_e é assintoticamente estável para φ_t se, e somente, se $\chi_{\{x_e\}}$ é assintoticamente estável para $\widehat{\varphi}_t$.

Demonstração. Ver Mizukoshi (2004), [15]. □

Proposição 4.1.3. *Seja $x_e \in U$ um ponto de equilíbrio atrator exponencial. Então existem constantes C e b positivas e uma vizinhança $\mathbf{V} \subset \mathcal{E}(U)$ de $\chi_{\{x_e\}}$ tal que*

$$d_\infty(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \chi_{\{x_e\}}) \leq Ce^{-bt},$$

para todo $t \geq 0$ e $\mathbf{x}_o \in \mathbf{V}$.

Demonstração. Sejam $B, b > 0$ e $V \subset U$ uma vizinhança de x_e e definimos $\mathbf{V} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U) : [\mathbf{x}]^0 \subset V\}$. Seja

$$C = B \sup_{x \in V} \|x - x_e\|,$$

Uma vez que V é limitado então, $C < \infty$.

Por um lado, para todo $\mathbf{x}_o \in \mathbf{V}$, temos que:

$$\begin{aligned} \text{dist}(\varphi_t([\mathbf{x}_o]^\alpha), x_e) &= \sup_{x_o \in [\mathbf{x}_o]^\alpha} \|\varphi_t(x_o) - x_e\| \\ &\leq \sup_{x_o \in [\mathbf{x}_o]^\alpha} B \|x_o - x_e\| e^{-bt} \\ &\leq Ce^{-bt}. \end{aligned}$$

enquanto que

$$\begin{aligned} \text{dist}(x_e, \varphi_t([\mathbf{x}_o]^\alpha)) &= \inf_{x_o \in [\mathbf{x}_o]^\alpha} \|\varphi_t(x_o) - x_e\| \\ &\leq \inf_{x_o \in [\mathbf{x}_o]^\alpha} B \|x_o - x_e\| e^{-bt} \\ &\leq Ce^{-bt} \end{aligned}$$

Logo, $d_H(\varphi_t([\mathbf{x}_o]^\alpha), x_e) \leq Ce^{-bt}$ e conseqüentemente vale

$$d_\infty(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \chi_{\{x_e\}}) = \sup_{\alpha \in [0,1]} d_H(\varphi_t([\mathbf{x}_o]^\alpha), x_e) \leq Ce^{-bt},$$

o que prova a afirmação. □

Teorema 4.1.1. *Sejam $x_e : A \rightarrow U$ contínua, $A \subset U$, $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(U)$ com $[\mathbf{x}_o]^0 \subset A$ e $\mathbf{x}_e = \widehat{x}_e(\mathbf{x}_o)$. Sob essas condições temos:*

- a) *Se $\varphi_t(x_e(x)) = x_e(x)$ para todo $x \in A$ então $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_e) = \mathbf{x}_e$ para todo $t \geq 0$;*
- b) *Se $\varphi_t : U \rightarrow U$ converge uniformemente, em $[\mathbf{x}_o]^0 \subset A$, para $x_e : A \rightarrow U$ quando $t \rightarrow \infty$, então $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ converge para \mathbf{x}_e e $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_e) = \mathbf{x}_e$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$.*

Demonstração. a) Desde que $x_e : A \rightarrow U$, a extensão de Zadeh \widehat{x}_e tem como domínio o conjunto $\mathcal{E}(A)$. Portanto, estamos cometendo um abuso de notação ao definirmos $\mathbf{x}_e = \widehat{x}_e(\mathbf{x}_o)$. Na verdade, $\mathbf{x}_e = \widehat{x}_e(\mathbf{y}_o)$ onde $\mathbf{y}_o \in \mathcal{E}(A)$ com $[\mathbf{y}_o]^\alpha = [\mathbf{x}_o]^\alpha$, para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Desde que x_e é contínua em A e temos $[\mathbf{x}_o]^0 \subset A$ então vale que:

$$[\mathbf{x}_e]^\alpha = [\widehat{x}_e(\mathbf{y}_o)]^\alpha = x_e([\mathbf{y}_o]^\alpha) = x_e([\mathbf{x}_o]^\alpha).$$

O primeiro item é imediato, uma vez que

$$[\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_e)]^\alpha = \varphi_t([\mathbf{x}_e]^\alpha) = \{\varphi_t(x_e(x)) : x \in [\mathbf{x}_o]^\alpha\}.$$

Por hipótese, temos $\varphi_t(x_e(x)) = x_e(x)$ para todo $x \in A$. Assim,

$$[\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_e)]^\alpha = \{x_e(x) : x \in [\mathbf{x}_o]^\alpha\} = x_e([\mathbf{x}_o]^\alpha) = [\mathbf{x}_e]^\alpha,$$

o que prova a afirmação.

b) Para provar o segundo item, precisamos mostrar que $d_\infty(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \mathbf{x}_e) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Seja $\alpha \in [0, 1]$. Sob a hipótese da convergência uniforme, dado $\varepsilon > 0$ existe $T > 0$ tal que $\|\varphi_t(x) - x_e(x)\| \leq \varepsilon$ para todo $t > T$ e $x \in A$. Desta forma temos,

$$\begin{aligned} \text{dist}([\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)]^\alpha, [\mathbf{x}_e]^\alpha) &= \sup_{a \in [\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)]^\alpha} \inf_{b \in [\widehat{x}_e(\mathbf{x}_o)]^\alpha} \|a - b\| \\ &= \sup_{a \in \varphi_t([\mathbf{x}_o]^\alpha)} \inf_{b \in x_e([\mathbf{x}_o]^\alpha)} \|a - b\| \\ &= \sup_{x \in [\mathbf{x}_o]^\alpha} \inf_{y \in [\mathbf{x}_o]^\alpha} \|\varphi_t(x) - x_e(y)\| \\ &\leq \sup_{x \in [\mathbf{x}_o]^\alpha} \|\varphi_t(x) - x_e(x)\| \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Por outro lado, vale também que:

$$\begin{aligned}
 \text{dist}([\mathbf{x}_e]^\alpha, [\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)]^\alpha) &= \sup_{\alpha \in [\widehat{x}_e(\mathbf{x}_o)]^\alpha} \inf_{b \in [\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)]^\alpha} \|a - b\| \\
 &= \sup_{x \in [\mathbf{x}_o]^\alpha} \inf_{y \in [\mathbf{x}_o]^\alpha} \|\varphi_t(y) - x_e(x)\| \\
 &\leq \sup_{x \in [\mathbf{x}_o]^\alpha} \|\varphi_t(x) - x_e(x)\| \\
 &\leq \varepsilon .
 \end{aligned}$$

Assim, $d_H([\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)]^\alpha, [\mathbf{x}_e]^\alpha) \leq \varepsilon$, de onde concluímos que $d_\infty(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \mathbf{x}_e) \leq \varepsilon$ para todo $t > T$.

Logo, $d_\infty(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \mathbf{x}_e) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ e, como $\widehat{\varphi}_t$ é um fluxo definido sobre o espaço métrico $\mathcal{E}(U)$, então \mathbf{x}_e é um ponto de equilíbrio. \square

Em outras palavras, o teorema diz que se a solução determinística $\varphi_t(x_o)$ converge uniformemente para a função $x_e(x_o)$, então a extensão de Zadeh $\widehat{\varphi}_t(x_o)$ converge para a extensão de Zadeh $\widehat{x}_e(x_o)$. Isto é,

$$\varphi_t(x_o) \xrightarrow{u} x_e(x_o), x_o \in A \implies \widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o) \rightarrow \widehat{x}_e(\mathbf{x}_o), [\mathbf{x}_o]^0 \subset A,$$

onde a notação \xrightarrow{u} indica a convergência uniforme em A de $\varphi_t : U \rightarrow U$ para $x_e : A \rightarrow U$.

Corolário 4.1.1. *Sejam $x_e \in U$ um ponto de equilíbrio para φ_t e $x_o \in \mathcal{E}(U)$. Então,*

- a) $\chi_{\{x_e\}}$ é um ponto de equilíbrio para $\widehat{\varphi}_t$;
- b) Se x_e é assintoticamente estável e $[\mathbf{x}_o]^0$ está contido na região de atração de x_e então $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o) \rightarrow \chi_{\{x_e\}}$ quando $t \rightarrow \infty$.

Demonstração. Para o primeiro item, basta tomar $A = U$ e definir $x_e : U \rightarrow U$ por $x_e(x) = x_e$ para todo $x \in U$.

Para o segundo, sejam $A = A(x_e)$ e $x_e : A \rightarrow U$ definida por $x_e(x) = x_e$. Temos assim que $\varphi_t(x_e(x)) = x_e(x)$ e $\widehat{x}_e(\mathbf{x}_o) = \chi_{\{x_e\}}$ para qualquer $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(U)$ com $[\mathbf{x}_o]^0 \subset A$. Além do mais, dado $\varepsilon > 0$, existe $T > 0$ tal que

$$\|\varphi_t(x_o) - x_e\| ,$$

para todo $t > T$ e $x_o \in [\mathbf{x}_o]^0$. Portanto, basta aplicarmos o Teorema 3.2.1 com $A = A(x_e)$ e $x_e(x) = x_e$ para todo $x \in A(x_e)$. \square

Algumas considerações sobre a função de pertinência do ponto de equilíbrio fuzzy são necessárias. Seja $y_e : A \rightarrow U \times P$, com $A \subset U \times P$, a aplicação que para cada $(x_o, p_o) \in A$ associa o ponto de equilíbrio do fluxo determinístico $\psi_t : U \times P \rightarrow U \times P$ gerado pela equação

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, p), & x(0) = x_o \\ \frac{dp}{dt} = 0, & p(0) = p_o, \end{cases} \quad (4.1)$$

Para cada $(x_o, p_o) \in A$ o ponto de equilíbrio é da forma

$$y_e(x_o, p_o) = (x_e(x_o, p_o), p_o). \quad (4.2)$$

onde $x_e : A \rightarrow U$ para cada $(x_o, p_o) \in A$ associa o ponto de equilíbrio $x_e(x_o, p_o)$, para o qual converge a solução $\varphi_t : U \times P \rightarrow U$ da equação

$$\frac{dx}{dt} = f(x, p_o), \quad x(0) = x_o \quad (4.3)$$

Observamos que há uma diferença sutil entre o domínio de $y_e : A \rightarrow U \times P$ e do fluxo determinístico ψ_t . Em geral, a função \mathbf{y}_e não está definida ou não é contínua em todo o domínio $U \times P$. Neste caso, a extensão de Zadeh da aplicação $y_e : A \rightarrow U \times P$, $A \subset U \times P$, é a aplicação \widehat{y}_e com domínio $\mathcal{E}(A)$ enquanto que o domínio da fluxo fuzzy $\widehat{\psi}_t$ é o conjunto $\mathcal{E}(U \times P)$. No entanto, dado um ponto $y_o \in \mathcal{E}(U \times P)$ com α -níveis contidos em A , podemos definir $\mathbf{z}_o \in \mathcal{E}(\mathbf{A})$ tal que $[\mathbf{y}_o]^\alpha = [\mathbf{z}_o]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Logo, temos que

$$[\mathbf{y}_e]^\alpha = [\widehat{y}_e(\mathbf{z}_o)]^\alpha = y_e([\mathbf{z}_o]^\alpha) = y_e([\mathbf{y}_o]^\alpha),$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$, quando $y_e : A \rightarrow U \times P$ é contínua em A .

Teorema 4.1.2. *Sejam $A \subset U \times P$ um conjunto aberto, $y_e : A \rightarrow U \times P$ contínua, $\mathbf{y}_o \in \mathcal{E}(U \times P)$ com $[\mathbf{y}_o]^0 \subset A$ e $\mathbf{y}_e = \widehat{y}_e(\mathbf{y}_o)$. Suponha que $\varphi_t(x_o, p_o) \rightarrow x_e(x_o, p_o)$ para todo $(x_o, p_o) \in A$ quando $t \rightarrow \infty$. Se $x_e(x_o, p_o)$ é assintoticamente estável então $\widehat{\psi}_t(\mathbf{y}_o)$ converge para o ponto de equilíbrio $\mathbf{y}_e = \widehat{y}_e(\mathbf{y}_o)$.*

Demonstração. O Teorema (3.1.3) garante que a solução determinística $\psi_t : U \times P \rightarrow U \times P$ converge uniformemente no compacto $[\mathbf{y}_o]^0$, para $y_e : [\mathbf{y}_o] \rightarrow U \times P$. Portanto, pelo segundo item do Teorema (4.1.1), temos que $\widehat{\psi}_t(\mathbf{y}_o)$ converge para $\mathbf{y}_e = \widehat{y}_e(\mathbf{y}_o)$ quando $t \rightarrow \infty$. □

Fluxos fuzzy podem admitir mais do que pontos de equilíbrio nítidos (Ceconello, 2014). Analizemos o comportamento da equação diferencial

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -ax_1\sqrt{x_2} + bx_2, & x_1(0) = x_o > 0 \\ \frac{dx_2}{dt} = ax_1\sqrt{x_2} - bx_2, & x_2(0) = y_o > 0, \end{cases} \quad (4.4)$$

definida em $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\}$. Esta equação implica que $x_1(t) + x_2(t) = x_o + y_o = s > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. O ponto de equilíbrio da (\bar{x}, \bar{y}) da equação (4.4) satisfaz $\bar{y} = (a\bar{x})^2$. Como $x_1(t) + x_2(t) = s$, para todo t , então $\bar{x} + \bar{y} = s$ e verifica-se que o equilíbrio pontos são dados pela fórmula

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{a + \sqrt{1 + a^2s}}{2a^2}, s - \frac{a + \sqrt{1 + a^2s}}{2a^2} \right). \quad (4.5)$$

Uma vez que (\bar{x}, \bar{y}) é estável para todo $s = x_o + y_o$ então o conjunto crisp $\chi_{(\bar{x}, \bar{y})}$ é um ponto de equilíbrio estável para o fluxo fuzzy $\hat{\varphi}_t$ da equação (4.4) (Mizukoshi, 2009).

Como podemos ver na equação (4.5), a convergência do fluxo determinístico $\varphi_t : U \rightarrow U$ da equação (4.4) os pontos de equilíbrio estáveis dependem das condições iniciais (x_o, y_o) . Seja $p : U \rightarrow U$ definido por $p(x_o, y_o) = (\bar{x}, \bar{y})$. Agora, de acordo com o Teorema (4.1.1), as soluções fuzzy $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ convergem para $\hat{p}(\mathbf{x}_o)$ quando o tempo evolui. Por um cálculo simples, podemos provar a próxima proposição.

Proposição 4.1.4. *A Solução fuzzy $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ converge para o ponto de equilíbrio estável \bar{x} com função de pertinência dada por*

$$\mu_{\bar{x}}(x, y) = \begin{cases} \sup_z \mu_{\mathbf{x}_o}(z, 2y - z) & \text{se } y = a^2x^2 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.6)$$

As Figuras (4.1) e (4.2) ilustram o comportamento da solução fuzzy da equação (4.4) com condição inicial \mathbf{x}_o definido por

$$\mu_{\mathbf{x}_o}(x, y) = \max\{1 - 0.04(x - 70)^2 - 0.09(y - 30)^2, 0\},$$

e parâmetros $a = 0.04$ e $b = 0.09$. A escala de cores é responsável pelo valor de pertinência de um ponto específico no conjunto $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$.

Como $x_1(t) + x_2(t) = s$, pelo Teorema (3.2.1), a função de pertinência da solução $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ muda nas linhas $y = s - x$ quando o tempo evolui. Esta solução específica converge para

o ponto de equilíbrio \bar{x} com função de pertinência

$$\mu_{\bar{x}}(x, y) = \begin{cases} \max\{1 - 0,5(10 - 0,1s)^2, 0\} & \text{se } y = a^2x^2 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

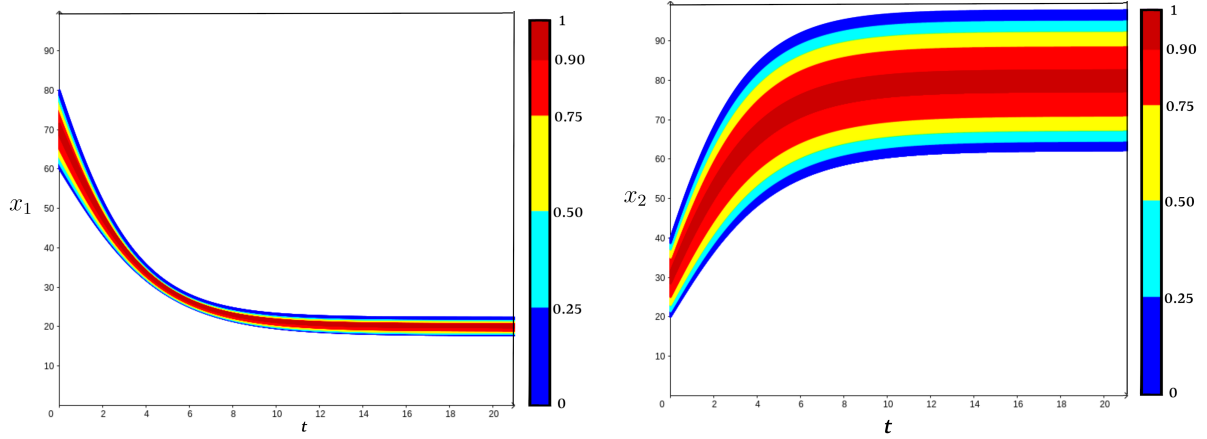


Figura 4.1: Projeções da função fuzzy $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$, da equação (4.4). Parâmetros: $a = 0.04$ e $b = 0.09$.

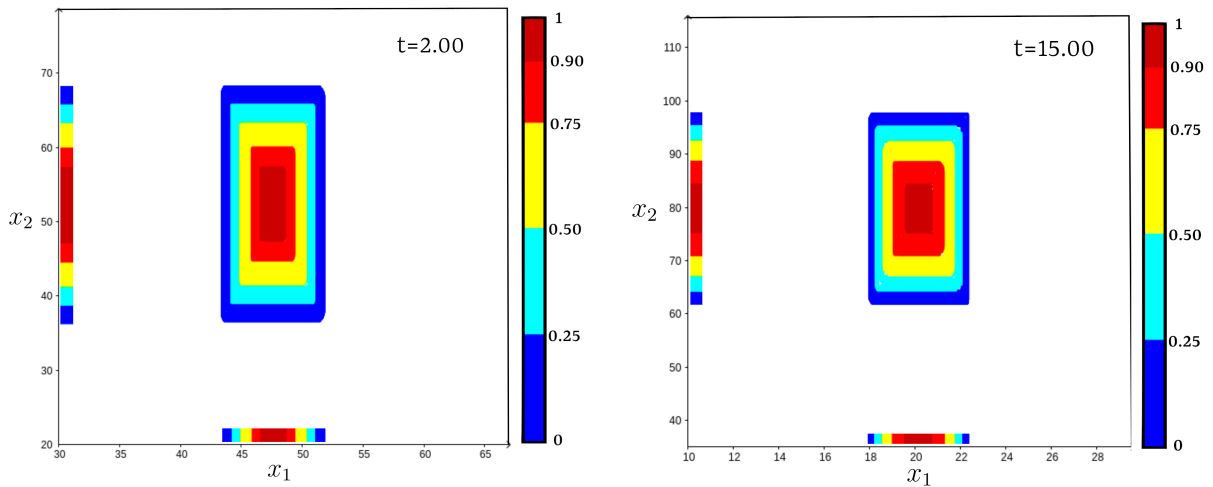


Figura 4.2: Função de pertinência da solução fuzzy de $\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$, da equação (4.4) com $t = 2$ e $t = 15$. Parâmetros: $a = 0.04$ e $b = 0.09$.

4.2 Soluções fuzzy periódicas estáveis

Um ponto $p \in U$ é τ - periódico para o fluxo determinístico quando $\varphi_\tau(p) = p$ e $\varphi_t(p) \neq p$ para todo $t \in (0, \tau)$. Ou, equivalentemente, $p \in U$ possui período $\tau > 0$ se

$$\tau = \{s \in \mathbb{R}_+ : \varphi_s(p_o) = p_o, s > 0\}.$$

Definição 4.2.1. Dizemos que um ponto $p \in \mathcal{E}(U)$ é um ponto τ - periódico para o fluxo fuzzy quando

$$\widehat{\varphi}_\tau(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \quad \text{e} \quad \widehat{\varphi}_t(\mathbf{p}) \neq \mathbf{p}, \quad t \in (0, \tau),$$

Podemos ainda caracterizar os pontos periódicos do fluxo fuzzy $\widehat{\varphi}_t$ por meio de seus α - níveis, isto é, $\mathbf{p} \in \mathcal{E}(U)$ é um ponto τ - periódico para $\widehat{\varphi}_t$ quando

$$\widehat{\varphi}_\tau([\mathbf{p}]^\alpha) = [\mathbf{p}]^\alpha \quad \text{e} \quad \widehat{\varphi}_t([\mathbf{p}]^\alpha) \neq [\mathbf{p}]^\alpha, \quad t \in (0, \tau),$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Exemplo 4.2.1. (Existência de pontos periódicos). O sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 & x_1(0) = x_o, \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 & x_2(0) = y_o, \end{cases} \quad (4.7)$$

determina o fluxo $\varphi_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$\varphi_t(x_o, y_o) = \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} x_o \\ -y_o \end{pmatrix} \sin t.$$

A solução acima é 2π - periódica uma vez que para todo $p = (x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$ temos $\varphi_{2\pi}(p) = p$ e $\varphi_{2\pi}(p) \neq p$ para todo $t \in (0, 2\pi)$. Vale notar que, para todo $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\|\varphi_t(x_o, y_o)\|^2 = x_o^2 + y_o^2,$$

e portanto, a órbita periódica γ determinada por $\varphi_t(p)$ é a circunferência centrada na origem, de raio $\|p\|$.

Consideremos agora um ponto $\mathbf{p} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ tal que $[\mathbf{p}]^1 = p$, isto é, $[\mathbf{p}]^1$ é unitário. Então o fluxo fuzzy $\widehat{\varphi}_t : \mathcal{E}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ obtido pela extensão de $\widehat{\varphi}_t$ satisfaz $\widehat{\varphi}_{2\pi}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ e $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{p}) \neq \mathbf{p}$ para todo $t \in (0, 2\pi)$. De fato, usando a caracterização por α - níveis temos:

$$[\widehat{\varphi}_{2\pi}(\mathbf{p})]^\alpha = \varphi_{2\pi}([\mathbf{p}]^\alpha) = \{\varphi_{2\pi}(p) : p \in [\mathbf{p}]^\alpha\} = [\mathbf{p}]^\alpha,$$

e também, para $t \in (0, 2\pi)$,

$$[\widehat{\varphi}_t(\mathbf{p})]^\alpha = \varphi_t([\mathbf{p}]^\alpha) = \{\varphi_t(p) : p \in [\mathbf{p}]^\alpha\} \neq [\mathbf{p}]^\alpha,$$

e portanto $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{p}) \neq \mathbf{p}$. Logo, o fluxo fuzzy $\widehat{\varphi}_t$ possui pontos periódicos.

Definição 4.2.2. A órbita fuzzy $\gamma(\mathbf{x}_o) \subset \mathcal{E}(U)$ de um estado inicial $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(U)$, é definida como sendo o subconjunto no espaço de fase $\mathcal{E}(U)$ definido por

$$\gamma(\mathbf{x}_o) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} \widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o) = \{\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o) \in \mathcal{E}(U) : t \in \mathbb{R}_+\}.$$

Se $B \subset \mathcal{E}(U)$ então o ω - limite fuzzy é definido por

$$\omega(\mathbf{B}) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} \widehat{\varphi}_t(\mathbf{B})}.$$

Definição 4.2.3. A órbita $\zeta(\mathbf{p})$ da solução fuzzy $\widehat{\varphi}(\mathbf{p})$ obtida por um ponto periódico é uma órbita periódica no conjunto $\mathcal{E}(U)$

$$\zeta(\mathbf{p}) = \{\widehat{\varphi}_t(\mathbf{p}) : t \geq 0\} = \bigcup_{s \in [0, \tau)} \widehat{\varphi}_s(\mathbf{p}).$$

Definição 4.2.4. Seja $\zeta \subset \mathcal{E}(U)$ uma órbita periódica fuzzy para $\widehat{\varphi}_t$. Dizemos que ζ é *estável* quando dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $\text{dist}(\mathbf{x}, \zeta) < \delta$ então $\text{dist}(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}), \zeta) < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$. A órbita é *assintoticamente estável* quando é estável e existe $r > 0$ tal que $\text{dist}(\mathbf{x}, \zeta) < r$ implica que $\text{dist}(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}), \zeta) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Teorema 4.2.1. Um ponto $p \in U$ é periódico de período τ para φ_t se, e somente se, $\chi\{p\}$ é um ponto periódico de período τ para $\widehat{\varphi}_t$.

Demonstração. Notemos que $[\widehat{\varphi}_t(\chi\{p\})]^\alpha = \{\varphi_t(p)\}$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Portanto, temos que $[\widehat{\varphi}_\tau(\chi\{p\})]^\alpha = \{p\}$ e $[\widehat{\varphi}_t(\chi\{p\})]^\alpha \neq \{p\}$ para todo $t \in (0, \tau)$ de modo que a afirmação está provada. \square

Proposição 4.2.1. Todas as órbitas geradas pelo fluxo fuzzy $\widehat{\varphi}_t$ da equação (4.7) é estável.

Demonstração. Seja $\zeta_{\mathbf{p}}$ a órbita periódica fuzzy determinada por $\mathbf{p} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ e consideremos $\varepsilon > 0$ dado. Seja agora $\mathbf{q} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ tal que $\text{dist}(\mathbf{q}, \zeta_{\mathbf{p}}) < \varepsilon$. Isso implica que existe $\mathbf{p}_o \in \zeta_{\mathbf{p}}$ tal que $\text{dist}(\mathbf{q}, \zeta_{\mathbf{p}}) = d_\infty(\mathbf{q}, \mathbf{p}_o) < \varepsilon$.

Desde que, para todo $p, q \in \mathbb{R}^2$, temos $\varphi_t(p) - \varphi_t(q) = \varphi_t(p - q)$ e também $\|\varphi_t(p)\| = \|p\|$, então vale:

$$\begin{aligned} \text{dist}(\varphi([\mathbf{q}]^\alpha), \varphi([\mathbf{p}_o]^\alpha)) &= \sup_{q \in [\mathbf{q}]^\alpha} \inf_{p \in [\mathbf{p}]^\alpha} \|\varphi_t(q) - \varphi_t(p)\| \\ &= \sup_{q \in [\mathbf{q}]^\alpha} \inf_{p \in [\mathbf{p}]^\alpha} \|\varphi_t(q - p)\| \\ &= \sup_{q \in [\mathbf{q}]^\alpha} \inf_{p \in [\mathbf{p}]^\alpha} \|q - p\| \\ &= \text{dist}([\mathbf{q}]^\alpha, [\mathbf{p}_o]^\alpha). \end{aligned}$$

De modo análogo podemos concluir que $\text{dist}(\varphi([\mathbf{p}_o]^\alpha), \varphi([\mathbf{q}]^\alpha)) = \text{dist}([\mathbf{p}_o]^\alpha, [\mathbf{q}]^\alpha)$, de modo que temos

$$d_\infty(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{p}_o), \widehat{\varphi}_t([\mathbf{q}]^\alpha)) = d_\infty(\mathbf{p}_o, \mathbf{q}) < \varepsilon.$$

Agora, como $\mathbf{p}_o \in \zeta_{\mathbf{p}}$ então $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{p}_o) \in \zeta_{\mathbf{p}}$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$, e portanto temos que $\text{dist}(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{q}), \zeta_{\mathbf{p}}) < \varepsilon$.

Dessa forma, para qualquer ponto $p \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ a órbita periódica fuzzy $\zeta_{\mathbf{p}} \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ é uma órbita estável para o fluxo fuzzy $\widehat{\varphi}_t$. A órbita $\zeta_{\mathbf{p}}$ porém não é assintoticamente estável pois, para qualquer $\mathbf{q} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ temos que $\text{dist}(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{q}), \zeta_{\mathbf{p}}) = \text{dist}(\mathbf{q}, \zeta_{\mathbf{p}}) > 0$, para todo $t \in \mathbb{R}_+$.

□

Teorema 4.2.2. *Seja $\mathbf{A} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U) : [\mathbf{x}]^0 \subset A \subset U\}$. Se $\mathbf{y} \in \mathcal{E}(U)$ então vale a desigualdade*

$$\text{dist}(y, A) \leq \text{dist}(\mathbf{y}, \mathbf{A}),$$

para todo $y \in [\mathbf{y}]^0$.

Demonstração. Ver, Cecconello, (2010) [4].

□

Teorema 4.2.3. *Sejam γ uma órbita periódica para φ_t com período $\tau > 0$ e*

$$\gamma = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(U) : [\mathbf{x}]^0 \subset \gamma\},$$

o conjunto periódico fuzzy determinado por γ . Então:

- a) γ é estável para φ_t se, e somente se, γ estável para $\widehat{\varphi}_t$;
- b) γ é assintoticamente estável para φ_t se, e somente se, γ assintoticamente estável para $\widehat{\varphi}_t$.

Demonstração. Ver, Cecconello, (2010) [4].

□

A Figura (4.3) mostra as projeções de $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ nos eixos x e y , respectivamente. A condição inicial \mathbf{x}_o tem função de pertinência dada por

$$\mu_{\mathbf{x}_o}(x, y) = \max\{1 - (x + 2)^2 - (y - 2.5)^2, 0\}.$$

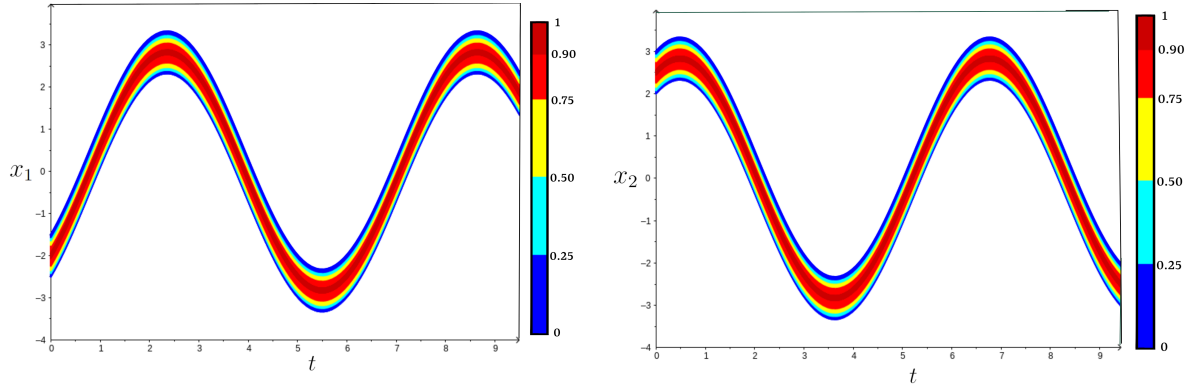


Figura 4.3: Projeções da solução fuzzy $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$, da equação (4.7), com $(x_o, y_o) = (4, 2.5)$.

Agora, considere o sistema de equações diferenciais definido por

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, & x_1(0) = x_o, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, & x_2(0) = y_o. \end{cases} \quad (4.8)$$

A solução deste sistema determina uma solução bidimensional $\varphi_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$\varphi_t(x_o, y_o) = \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix} \cos(r_o t) + \begin{pmatrix} -y_o \\ x_o \end{pmatrix} \sin(r_o t),$$

com $r_o = \sqrt{x_o^2 + y_o^2}$. Cada condição inicial $z_o = (x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$ determina uma órbita $(2\pi r_o^{-1})$ —periódica estável, $\gamma(x_o, y_o)$. Como $\|\varphi_t(x_o, y_o)\| = r_o$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$, então as órbitas periódico $\gamma(x_o, y_o)$ são círculos centrados na origem e raio r_o .

É importante notar que o período neste caso depende da condição inicial. Os únicos pontos que possuem o mesmo período são aqueles que estão sobre a mesma órbita periódica, ou seja, se p_o e q_o têm mesmo período $\tau > 0$ então, $q_o = \varphi_s(p_o)$ para algum $s \in [0, \tau)$.

Dado um ponto $\mathbf{p} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$, o Teorema (4.2.1) garante que se os pontos cujos α - níveis conexos estão sobre uma órbita $\gamma(x_o, y_o)$, então esses pontos são periódicos para fluxo fuzzy com periodicidade igual a de (x_o, y_o) . Além disso, O Teorema (4.2.3) garante que o conjunto

$$\gamma = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2) : [\mathbf{x}_o]^0 \subset \gamma(x_o, y_o)\},$$

é estável para o fluxo fuzzy $\widehat{\varphi}_t$ obtido pela extensão de Zadeh do fluxo determinístico acima.

Embora cada ponto em \mathbb{R}^2 seja periódico, o mesmo não acontece com o fluxo fuzzy $\widehat{\varphi}_t$. Os resultados da seção anterior garantem que todos os conjuntos crisp $\chi\{(x, y)\}$ são

periódicos, ou seja, todos soluções fuzzy $\widehat{\varphi}_t(\chi\{(x_o, y_o)\})$ são periódicas. Além disso, se $[\mathbf{x}_o]^0$ é um subconjunto de uma órbita periódica γ_{z_o} , definida por uma condição inicial $z_o = (x_o, y_o)$, então $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ é uma solução fuzzy periódica.

Proposição 4.2.2. *Seja $b > a > 0$ e considere $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, a \leq x \leq b\}$. Se existe $\alpha \in [0, 1]$ tal que $[\mathbf{x}_o]^\alpha = K$ então $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o) \neq \mathbf{x}_o$ para todo $t > 0$, ou seja, $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ não é um ponto periódico.*

Demonstração. A órbita gerada pelo conjunto compacto K é a região compreendida entre as circunferências centradas na origem com raios a e b , respectivamente. Mais precisamente,

$$\gamma(K) = \bigcup_{t \in [0, 2\pi a^{-1}]} \varphi_t(K) = \bigcup_{x_o \in [a, b]} \gamma(x_o, 0).$$

Através da expressão $r_o^{-1}2\pi$, podemos ver que o período de cada ponto $(x_o, y_o) \in K$ depende apenas de x_o . Assim, denotando o período de $(x_o, 0)$ por $\tau(x_o)$, temos a seguinte relação:

$$\tau(x_o) = \frac{a}{x_o} \tau(a),$$

Dado $T > 0$, os únicos pontos $(x_o, y_o) \in K$, tais que $\varphi_T(x_o, y_o) = (x_o, y_o)$ são os pontos para os quais $(T/\tau(x_o))$ é um inteiro positivo. Desse modo, se $a \leq x_o \leq b$ e $\tau(a) \geq \tau(x_o) \geq \tau(b)$ tem-se que $\varphi_T(x_o, y_o) = (x_o, y_o)$ é verdade apenas para um número finito de pontos $(x_o, y_o) \in K$. Portanto, $\varphi_T([\mathbf{x}_o]^0) \neq [\mathbf{x}_o]^0$ e isso conclui que \mathbf{x}_o não é ponto periódico de $\widehat{\varphi}_t$. \square

Naturalmente, este resultado pode ser generalizado. Por exemplo, se uma condição inicial \mathbf{x}_o tem suporte convexo, então a afirmação também é verdadeira.

A Figura (4.4) nos mostra a função de pertinência de $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ em $t = 0.5$ e $t = 7$. A condição $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ tem função de pertinência dada por

$$\mu_{\mathbf{x}_o}(x, y) = \max\{1 - (x - 4)^2 - y^2, 0\}.$$

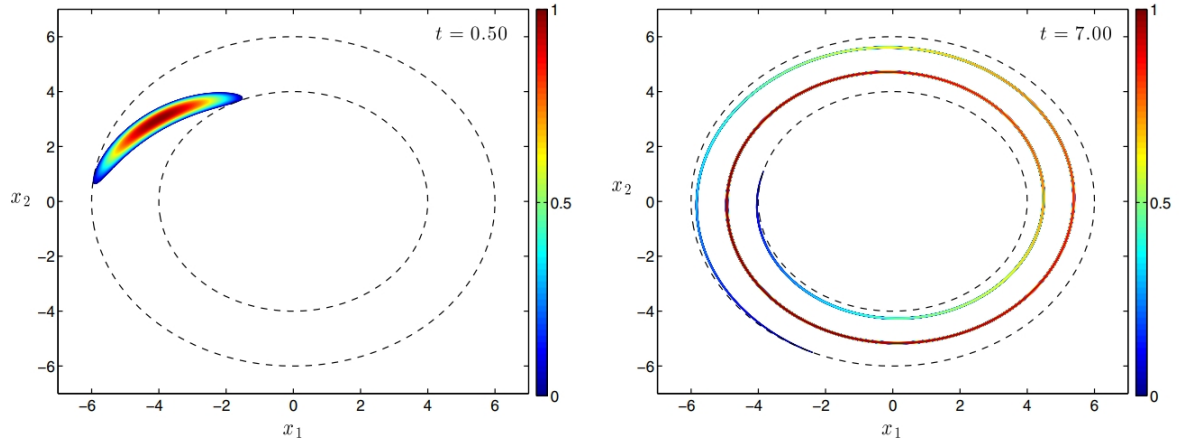


Figura 4.4: Função de pertinência da solução fuzzy $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$, da equação (4.8).

4.3 Órbitas periódicas atratoras

Considerando o sistema bidimensional em $U = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ definido pelas equações

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_2 + \mu x_1(k - x_1^2 - x_2^2), & x(0) = x_o \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + \mu x_2(k - x_1^2 - x_2^2), & y(0) = y_o, \end{cases} \quad (4.9)$$

Através da mudança de variáveis $x_1(t) = r(t) \cos \theta(t)$ e $x_2(t) = r(t) \sin \theta(t)$, obtemos as equações

$$\begin{cases} -r \sin \theta + \mu r \cos \theta(k - r^2) = \frac{dr}{dt} \cos \theta - \frac{d\theta}{dt} r \sin \theta \\ r \cos \theta + \mu r \sin \theta(k - r^2) = \frac{dr}{dt} \sin \theta + \frac{d\theta}{dt} r \cos \theta, \end{cases}$$

e assim, temos o sistema desacoplado equivalente ao primeiro, em coordenadas polares, dado pelas equações

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \mu r(k - r^2), \\ \frac{d\theta}{dt} = 1, \end{cases} \quad (4.10)$$

cuja solução é:

$$r(t) = \frac{r_o \sqrt{k}}{[r_o^2 + (k - r_o^2)e^{-2\mu t}]^{1/2}},$$

$$\theta(t) = t + \theta_o.$$

com (r_o, θ_o) sendo a coordenada polar de (x_o, y_o) , e μ, k positivos.

Uma análise da expressão $r(t)$ indica que, quando $t \rightarrow \infty$, temos $r(t) \rightarrow \sqrt{k}$ para todo $r_o > 0$. Como consequência disto, para qualquer condição inicial não nula $(x_o, y_o) \in \mathbb{R}^2$, a trajetória da solução $\varphi_t(x_o, y_o)$ da Equação (4.9) se aproxima da circunferência centrada na origem e com raio \sqrt{k} .

Qualquer ponto em \mathbb{R}^2 da forma $(\sqrt{k} \cos \xi, \sqrt{k} \sin \xi)$, com $0 \leq \xi < 2\pi$, é um ponto 2π -periódico e portanto, a equação (4.9) admite uma solução periódica de período 2π . A órbita da solução periódica, neste caso, é o conjunto formado pelos pontos que estão na circunferência de raio \sqrt{k} centrada na origem, isto é,

$$\gamma = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a^2 + b^2 = k\} = \{(\sqrt{k}, \theta) : \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

Para cada $z_o = (x_o, y_o) = (r_o \cos \theta_o, r_o \sin \theta_o) \in U$ acontece que $r(t) \rightarrow \sqrt{k}$ quando $t \rightarrow \infty$. Portanto, $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\varphi_t(z_o), \gamma) = 0$. Como a órbita γ é assintoticamente estável, assim o conjunto

$$\gamma = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2) : [\mathbf{x}]^0 \subset \gamma\},$$

é assintoticamente estável para o fluxo fuzzy $\widehat{\varphi}_t$.

Dado $z_o = (r_o \cos \theta_o, r_o \sin \theta_o) \in U$ não nulo, o ponto $p = (\sqrt{k} \cos \theta_o, \sqrt{k} \sin \theta_o)$ é o único na órbita periódica γ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi_t(z_o) - \varphi_t(p)\| = 0$. Podemos expressar essa relação por meio da função $z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \gamma$ que associa para cada $z_o = (x_o, y_o) = (r_o \cos \theta_o, r_o \sin \theta_o) \in U$ não nulo, o ponto periódico $p = (\sqrt{k} \cos \theta_o, \sqrt{k} \sin \theta_o)$.

Proposição 4.3.1. *Sejam γ um atrator periódico para o fluxo determinístico, $V \subset U$ aberto e $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(U)$ com $[\mathbf{x}_o] \subset V$. Se $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\varphi_t(x_o), \gamma) = 0$ para todo $x_o \in V$ então existe um único ponto periódico $\mathbf{p} \in \gamma$ tal que $d_\infty(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \widehat{\varphi}_t(\mathbf{p})) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.*

Demonstração. Por hipótese, γ é um atrator periódico e $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\varphi_t(x_o), \gamma) = 0$, a aplicação $z : V \rightarrow \gamma$ tal que $\|\varphi_t(x_o) - \varphi(z(x_o))\| \rightarrow 0$ é contínua. Ainda, a convergência é uniforme em $x \in [\mathbf{x}_o]^0$, isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe T_ε tal que para todo $t > T_\varepsilon$ temos $\|\varphi_t(x_o) - \varphi(z(x_o))\| < \varepsilon$ para todo $x_o \in [\mathbf{x}_o]^0$.

(Existência). Desde que $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(U)$ e $[\mathbf{x}_o]^0 \subset V$ então existe $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{E}(V)$ tal que $[\bar{\mathbf{x}}]^\alpha = [\mathbf{x}_o]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Seja $\widehat{z} : \mathcal{E}(V) \rightarrow \mathcal{E}(U)$ a extensão de Zadeh de z e definamos $\mathbf{p} = \widehat{z}(\bar{\mathbf{x}})$. Pela continuidade de z , temos então que $[\mathbf{p}]^\alpha = z([\bar{\mathbf{x}}]^\alpha) \subset \gamma$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Assim, $\mathbf{p} \in \gamma$ é um ponto periódico para o fluxo fuzzy $\widehat{\varphi}_t$. Agora, para todo $\alpha \in [0, 1]$ e $t > T_\varepsilon$,

temos que

$$\begin{aligned} \text{dist}(\varphi_t([\bar{\mathbf{x}}]^\alpha), \varphi_t([\mathbf{p}]^\alpha)), &= \sup_{x_o \in [\mathbf{x}_e]^\alpha} \inf_{p \in [\mathbf{p}]^\alpha} \|\varphi_t(x_o) - \varphi_t(z(x_o))\| \\ &\leq \sup_{x_o \in [\mathbf{x}_e]^\alpha} \|\varphi_t(x_o) - \varphi_t(p)\| \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Por outro lado, vale também que

$$\begin{aligned} \text{dist}(\varphi_t([\mathbf{p}]^\alpha), \varphi_t([\bar{\mathbf{x}}]^\alpha)), &= \sup_{p \in [\mathbf{p}]^\alpha} \inf_{x_o \in [\mathbf{x}_e]^\alpha} \|\varphi_t(x_o) - \varphi_t(p)\| \\ &\leq \sup_{y_o \in [\mathbf{x}_e]^\alpha} \|\varphi_t(y_o) - \varphi_t(z(y_o))\| \\ &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

de onde concluímos que $d_H(\varphi_t([\bar{\mathbf{x}}]^\alpha), \varphi_t([\mathbf{p}]^\alpha)) \leq \varepsilon$ para todo $\alpha \in [0, 1]$ e $t > T_\varepsilon$. Assim,

$$d_H([\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)]^\alpha, [\hat{\varphi}_t(\mathbf{p})]^\alpha) = d_H(\varphi_t([\mathbf{x}_o]^\alpha), \varphi_t([\mathbf{p}]^\alpha)) = d_H(\varphi_t([\mathbf{x}_e]^\alpha), \varphi_t([\mathbf{p}]^\alpha)) \leq \varepsilon.$$

Logo, para todo $t > T_\varepsilon$ temos

$$d_\infty(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \hat{\varphi}_t(\mathbf{p})) = \sup_{\alpha \in [0, 1]} d_H(\varphi_t([\mathbf{x}_o]^\alpha), \varphi_t([\mathbf{p}]^\alpha)) \leq \varepsilon$$

de modo que a existência está provada.

(*Unicidade*). Suponha que existe um ponto τ - periódico $\mathbf{q} \in \mathcal{E}(U)$ tal que

$$d_\infty(\hat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \hat{\varphi}_t(\mathbf{q})) \rightarrow 0,$$

quando $t \rightarrow \infty$. Temos assim que,

$$d_\infty(\hat{\varphi}_s(\mathbf{p}), \hat{\varphi}_s(\mathbf{q})) \leq d_\infty(\hat{\varphi}_{n\tau+s}(\mathbf{p}), \hat{\varphi}_{n\tau+s}(\mathbf{x}_o)) + d_\infty(\hat{\varphi}_{n\tau+s}(\mathbf{x}_o), \hat{\varphi}_{n\tau+s}(\mathbf{q})),$$

para todo $s \in [0, \tau]$. Agora, tomando o limite em n na desigualdade acima temos

$$d_\infty(\hat{\varphi}_s(\mathbf{p}), \hat{\varphi}_s(\mathbf{q})) = 0,$$

e, conseqüentemente, $\hat{\varphi}_s(\mathbf{p}) = \hat{\varphi}_s(\mathbf{q})$. Como essa igualdade é válida para todo $s \in [0, \tau]$, então temos em particular que $\hat{\varphi}_0(\mathbf{p}) = \hat{\varphi}_0(\mathbf{q})$. Dessa forma, concluímos que $\mathbf{p} = \mathbf{q}$ o que prova a unicidade. \square

Para ilustrar a aplicação da Proposição (4.3.1), consideremos o sistema de equações (4.9) e $\mathbf{x}_o \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ com função de pertinência

$$\mu_{\mathbf{x}_o}(x, y) = \max\{1 - (x + 2)^2 - (y - 2)^2, 0\}.$$

Os α - níveis de \mathbf{x}_o são os círculos de raio $\sqrt{(1 - \alpha)}$, isto é,

$$[\mathbf{x}_o]^\alpha = \{(x, y) : (x + 2)^2 + (y - 2)^2 \leq (1 - \alpha)\}.$$

De acordo com a Proposição (4.3.1), o conjunto fuzzy $\mathbf{p} = \widehat{f}(\mathbf{x}_o) \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ com função de pertinência

$$\mu_{\mathbf{p}}(x, y) = \begin{cases} \max\{1 - y^2, 0\} & \text{se } x^2 + y^2 = 5, \\ 0 & \text{se } x^2 + y^2 \neq 5, \end{cases}$$

é o único ponto 2π -periódico em $\mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ pelo fluxo fuzzy $\widehat{\varphi}_t$ que satisfaz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d_\infty(\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), \widehat{\varphi}_t(\mathbf{p})) = 0.$$

A Figura (4.5) ilustra o comportamento da solução fuzzy para esta condição inicial fuzzy. Como previsto pela discussão anterior, quando o tempo evolui, $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ se aproxima de uma solução periódica.

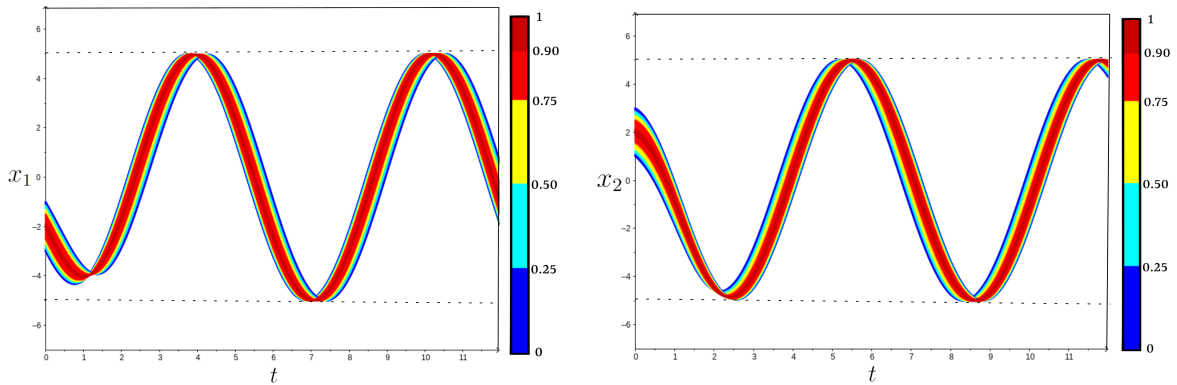


Figura 4.5: Projeções da solução fuzzy da equação (4.9), com parâmetros $k = 25$ e $\mu = 0.03$.

Considere agora o sistema de equações ligeiramente modificado

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_2 + \mu x_1(k_1 - x_1^2 - x_2^2)(k_2 - x_1^2 - x_2^2), & x(0) = x_o \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + \mu x_2(k_1 - x_1^2 - x_2^2)(k_2 - x_1^2 - x_2^2), & y(0) = y_o, \end{cases} \quad (4.11)$$

em que $k_2 > k_1$ e μ são parâmetros positivos. Este sistema admite duas soluções periódicas cujas órbitas γ_1 e γ_2 são circunferências de raio $\sqrt{k_1}$ e $\sqrt{k_2}$ centradas na origem (um ponto de equilíbrio instável), isto é,

$$\gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = k_1\}; \quad \gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = k_2\}.$$

A primeira órbita atrai todas as soluções de não equilíbrio e a o segundo é um conjunto invariante instável. Então, se a condição inicial difusa $[\mathbf{x}_o]^0$ é um subconjunto da órbita atratora γ_1 então $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ é atraído pelo conjunto

$$\gamma_1 = \{\mathbf{x} \in \mathcal{E}(R^2) : [\mathbf{x}]^0 \subset \gamma_1\},$$

Além disso, se $[\mathbf{x}_o]^0 \subset \gamma_i, i = 1, 2$, então $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ é uma solução fuzzy periódica.

4.4 Soluções Fuzzy em $\mathcal{E}(\mathbb{R}^3)$

Considere o seguinte campo vetorial em \mathbb{R}^3

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = (\lambda - b)x_1 - cx_2 + x_1[x_3 + d(1 - x_3^2)], \\ \frac{dx_2}{dt} = cx_1 + (\lambda - b)x_2 + x_2[x_3 + d(1 - x_3^2)], \\ \frac{dx_3}{dt} = \lambda x_3 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2), \end{cases} \quad (4.12)$$

e seja φ_t o fluxo gerado por este campo vetorial. O comportamento de φ_t é amplamente investigado em Hale e Koçak (1991) e Langford (1985). Definindo $b = 3.0$, $c = 0.25$ e $d = 0.2$. A origem é um ponto de equilíbrio desta equação e sua estabilidade depende do valor de λ . Para pequenos valores de λ , $(0, 0, 0)$ é um ponto de equilíbrio assintótico estável. Aumentando λ , este ponto de equilíbrio torna-se instável e a periodicidade aparece.

O fluxo fuzzy gerado pela Equação (4.12) herda as mesmas propriedades. O conjunto crisp $\chi\{(0, 0, 0)\}$ é um ponto de equilíbrio fuzzy cuja estabilidade depende dos valores de λ .

Se $\lambda = 1.65$, então $\chi\{(0, 0, 0)\}$ é um ponto de equilíbrio fuzzy assintoticamente estável que atrai soluções fuzzy $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ para todo \mathbf{x}_o com suporte na órbita de atração de $(0, 0, 0)$. Na Figura (4.6) vemos esse comportamento.

Na Figura (4.7) traçamos uma representação gráfica que ilustra o comportamento das projeções. A condição inicial fuzzy \mathbf{x}_o é definida pela função de pertinência

$$\mu_{\mathbf{x}_o}(x, y, z) = \max\{1 - 25(x - 0.3)^2 - 25(y - 0.3)^2 - 25(z - 0.3)^2, 0\}.$$

Como podemos ver, $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ se aproxima de uma órbita periódica quando o tempo evolui.

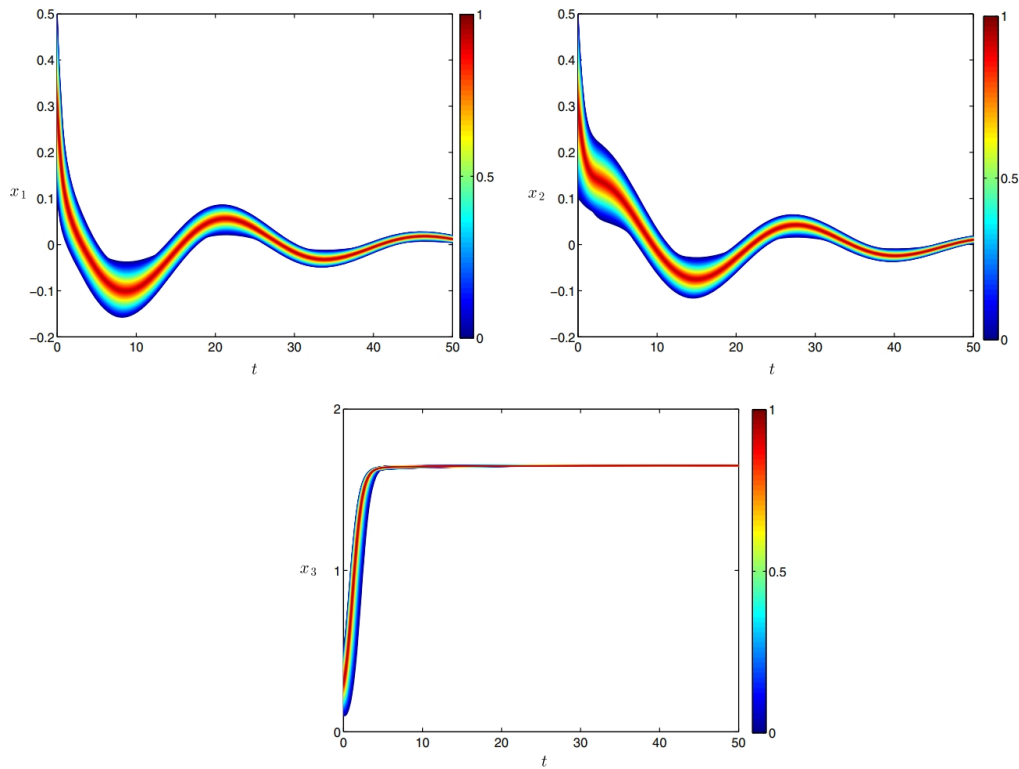


Figura 4.6: Projeções da solução fuzzy da equação (4.12). Quando $\lambda = 1.65$, $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ é atraído pela solução de equilíbrio $\chi\{(0, 0, 0)\}$.

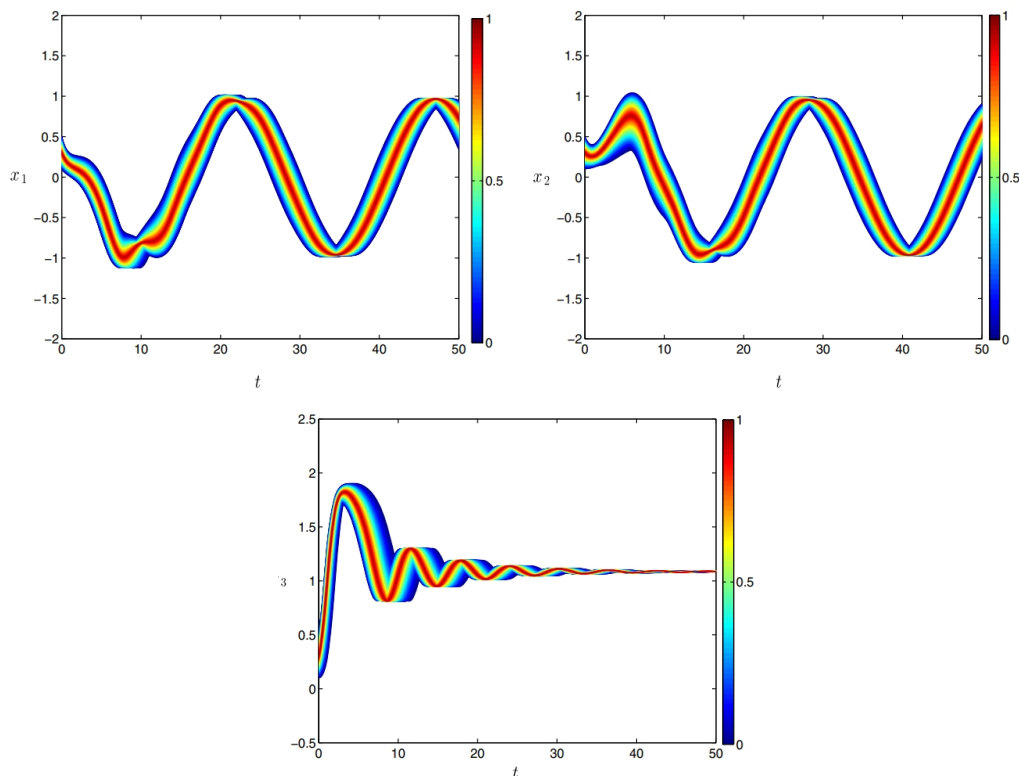


Figura 4.7: Projeções da solução fuzzy da equação (4.12). Quando $\lambda = 1.95$, $\widehat{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$ é atraído por uma solução fuzzy periódica.

Capítulo 5

Conclusão

Os resultados de análise assintótica mostram que as soluções fuzzy herdam os mesmos comportamentos das soluções determinísticas. Quando uma determinada equação diferencial admite pontos de equilíbrio ou periódicos então os fluxos fuzzy também apresentam esse tipo de comportamento.

O fato de, a dimensão do espaço de fase das soluções fuzzy ser maior que três não nos impossibilita estudá-las, pois, o Teorema (3.2.2) fornece uma relação interessante para entender o comportamento de soluções fuzzy através de seus componentes. Isto é essencialmente importante porque podemos visualizar como as soluções fuzzy se comportam quando o espaço de fase tem mais de três dimensões.

Ao obtermos um conjunto de pontos de equilíbrio determinísticos, mostramos como encontrar pontos de equilíbrio fuzzy para fluxos fuzzy e aplicamos essa afirmação na análise assintótica dos mesmos. Além disso, também observamos que a solução fuzzy pode exibir soluções não periódicas mesmo quando todas as soluções determinísticas são periódicas. As soluções fuzzy do modelo clássico presa-predador de Lotka–Volterra e de Holling–Tanne apresentam comportamento assintóticos e podem ser analisadas por meio dos mesmos resultados.

Portanto, a aplicação da lógica fuzzy no estudo de sistemas dinâmicos traz novos conceitos e ideias promissoras que resultam em avanços significativos na análise assintótica de fluxos. Espera-se que a partir do desenvolvimento de novos e mais poderosos recursos computacionais, novas abordagens, métodos e modelos possam ser efetivamente aplicados aos problemas de modelagem matemática. Nesse contexto, a lógica fuzzy se apresenta como uma alternativa promissora para futuras pesquisas.

Referências Bibliográficas

- [1] Barros, L. C., Bassanezi, R. C., e Tonelli, P. A. .*On the continuity of the zadeh's extension.* in “Seventh IFSA World Congress”, Vol. II, Praga, (1997).
- [2] Buckley, J.J., Feuring, T. *Fuzzy differential equations.* Fuzzy Sets Syst 110(1):43–54, (2000).
- [3] Bassanezi, R. C. e Ferreira Jr, W. C. *Equações Diferenciais com Aplicações.* HAR-BRA, São Paulo, (1988).
- [4] Cecconello, M.S. *Sistemas Dinâmicos em Espaços Métricos Fuzzy-Aplicações em Biomatemática.* PhD thesis, IMECC-UNICAMP (2010).
- [5] Cecconello, M.S. *Sistemas Dinâmicos Fuzzy: Modelagens Alternativas Para Sistemas Biológicos.* São Carlos-SP, SBMAC. (2012).
- [6] Cecconello, M.S., Leite, J. & Bassanezi, R.C. *Asymptotic analysis of continuous fuzzy flows.* Comp. Appl. Math. 36, 1681–1697, (2017).
- [7] Diamond, P. and Kloeden, P. E., *Metric spaces of fuzzy sets: Theory and applications,* World Scientific Publishing Company, (1994).
- [8] Edelstein-Keshet, L. *Mathematical models in biology,* Random House, (1998).
- [9] Fuller, R. and Keresztfalvi, T. *On generalization of Nguyen' Theorem,* Fuzzy Sets and Systems 143 , 371-374,(1990).
- [10] Hale, J.K., Koçak, H. *Dynamics and bifurcations.* Springer-Verlag, New York (1991).
- [11] Hirsch, M. W. e Smale, S. *Differential, Dynamical Systems and Linear Algebra.* Academic Press, San Diego, (1974).

- [12] James, B., *Probabilidade: um curso de nível intermediário*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, (1981).
- [13] Kaleva, O., *Fuzzy differential equations*. Fuzzy Sets Systems 24, no. 3, 301-318, (1987).
- [14] Langford, W.F. *Unfolding of degenerate bifurcations*. In: Fisher P, Smith W (eds) Chaos, Fractals and Dynamics. Marcel Dekker, New York, pp 87–103.
- [15] Mizukoshi, M. T. *Estabilidade de Sistemas Dinâmicos Fuzzy. PhD thesis*. IMECC-UNICAMP.(2004).
- [16] Mizukoshi, M.T., Barros, L.C., Bassanezi, R.C. Stability of fuzzy dynamic systems. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*. 17(1):69–83 (2009).
- [17] Murray, J. D. *Mathematical biology*. Vol. 19. Springer, 2 edition, (1989).
- [18] Negoita, C. V., Ralescu, D. A. - *Applications of fuzzy sets to systems analysis*, John Wiley & Sons, New York, (1975).
- [19] Oberguggenberger, M., Pittschmann, S. *Differential equations with fuzzy parameters*. Math Comput Model Dyn Syst 5:181–202,(1999).
- [20] Pielou, E. C. *Mathematical ecology*. Kingston, July, (1969).
- [21] Robinson, C. *Dynamical systems : stability, symbolic dynamics, and chaos*. 2 ed , (1998).
- [22] Sotomayor, J., *Equações diferenciais ordinárias*, Textos universitários do IME - USP, 1 ed. (2011).
- [23] Zadeh, L.A. *Fuzzy sets*. Inf Control 8:338–353, (1965).