Universidade Federal do Piauí

Centro de Ciências da Natureza

Pós-Graduação em Matemática

Mestrado em Matemática

Métricas críticas do funcional volume com tensor de Bach nulo em variedades de dimensão 4 com bordo suave

João Victor Matos da Cruz

Teresina - 2022

João Victor Matos da Cruz

Dissertação de Mestrado:

Métricas críticas do funcional volume com tensor de Bach nulo em variedades de dimensão 4 com bordo suave

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Halyson Irene Baltazar

Teresina - 2022

Cópia da folha de rosto assinada pelos membros da banca examinadora.

Ficha catalográfica editada pela biblioteca setorial do CCN.

Sobrenome, Iniciais no Nome.

xxxx Título da Dissertação.

Nome do Aluno – Teresina: ANO.

Orientador: Prof. Dr. XXXXXXXXXX.

Co-Orientador: Prof. Dr. XXXXXXXXXX.

1. Área de Concentração

CDD 516.36

Dedico este trabalho à minha mãe Luana Matos.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, que me permitiu ter saúde mental e física para continuar levando os estudos mesmo em um período de tantas atribulações.

Agradeço a minha família por me apoiar no curso e em momentos complicados em conciliar os estudos e o trabalho. Em especial, agradeço a companhia conselhos da minha mãe Luana, padrasto Kim e meus irmãos Lucas e Lauro. Agradeço a companhia, conselhos e palavras do meu pai Braz, minha madrasta Lídia e as brincadeiras e sorrisos da minha irmã Maria Laura.

Agradeço a minha namorada Ariel Larissa por todo o companheirismo,o amor e a paciência durante esses dois difíceis anos de mestrado e por sempre ter uma palavra de inspiração para me fazer seguir estudando e me manter forte.

Agradeço aos meus amigos que de forma direta ou indiretamente me apoiaram no curso e na pós gradução.Em especial meus amigos que estiveram me apoiando todos os dias nessa pandemia remotamente via Discord, Renan, Flávio, Jhonys,João Pedro(Kuririn), Lucas,Mateus e Carlos Douglas.

Aos meus amigos de escola que depois de tanto tempo ainda estão comigo mesmo que seja no grupos de whatsapp,os meu amigos do Grupo do Pinguin e o Grupinho da Primeira Geração.

Agradeço aos meu amigos da graduação pela inestimável companhia por todas as cocas e cafezinhos tomados na tia, em especial meu amigos Gustavo Vilarinho, André Boaventura, Franmarion Junior, Raylan, Maciel, Jaimerson, Ana Carla, Matheus Kallebe, Lélia Vitória e Ícaro. Obrigado aos meus amigos do mestrado por todo o apoio todas as chamadas em que estudamos juntos e todos os perrengues que compartilhamos em especial meus amigos João Victor Carvalho, Jefferson Victor(Gordinho), Sillas Augusto, Suerlan, Raquel, Gabriel, Jonatas e Paulo Junior.

Agradeço ao meu professor orientador Halyson pela paciência e compreensão durante todos esses anos que esteve me orientando. E todos os professores que me auxiliaram e me incentivaram durante a pós graduação e graduação dentre eles, Professor Kelson, Professor Kelton, Professor Mário, Professora Franciane, Professor João Carlos,Professor Newton, o graaaande Professor Paulo Alexandre e Professor Wilson.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

“ *Em um lugar escuro estamos nós. E mais conhecimento ilumina nosso caminho.*”.

Mestre Yoda.

Resumo

Este trabalho está baseado em [4] e tem como objetivo provar que métricas críticas do funcional volume sobre uma variedade de dimensão 4 compacta, simplesmente conexa com tensor de Bach nulo e bordo isométrico a uma esfera padrão, deverá ser isométrica a uma bola geodésica em um espaço forma simplismente conexo $\mathbb{R}^4, \mathbb{H}^4$ou $\mathbb{S}^4$. Além disso, mostraremos que em dimensão 3 o resultado é sempre válido se trocarmos a hipótese da métrica ter o tensor de Bach nulo pela hipótese mais fraca do tensor de Bach ter divergência livre.

Abstract

This work is base in [4] and aims to show that a Bach-flat critical metric of the volume functional on a simply connected 4 dimensional manifold with boundary isometric to a standard sphere must be isometric to a geodesic ball in a simply connected space form $\mathbb{R}^4, \mathbb{H}^4$ or $\mathbb{S}^4$. Moreover, we show that in dimension three the result even is true replacing the Bach-flat condition by the weaker assumption that manifold has divergence-free Bach tensor.

Conteúdo

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar variedades Riemannianas com tensor de Bach nulo. Diante destas condições somadas com a hipótese da variedade ser compacta com bordo, estudaremos sob quais circunstancias esta variedade se tornará isométrica a uma bola geodésia em espaço forma simplesmente conexo $\mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n$ ou $\mathbb{S}^n$. De fato, estudaremos o caso 4-dimensional no qual esta variedade tem bordo isométrico a uma esfera. Mostraremos também que, com uma hipótese mais fraca, podemos ter um resultado análogo em dimensão 3.

Em 2009, Miao e Tam em [14] e [15], inspirados por um resultado obtido em [12], assim como, pela caracterização dos pontos críticos do funcional curvatura escalar total, estudaram propriedades variacionais do funcional volume restrito ao espaço das métricas de curvatura escalar constante sobre uma dada variedade compacta com bordo. Depois, em um célebre artigo, Corvino, Eichmair e Miao em [11], estudaram este problema em um contexto mais geral. De fato, eles estudaram o problema modificado de encontrar pontos estacionários para o funcional volume sobre o espaço das métricas cuja curvatura escalar é igual a uma constante dada. Para fazer isto, eles localizaram uma condição satisfeita por tais pontos estacionários para domínios limitados suaves.

Recordemos agora a definição de métricas críticas estudadas por Miao e Tam. Por simplicidade, estas métricas serão chamadas de Métricas Críticas de Miao-Tam.

Definição 1. *Uma métrica crítica de Miao-Tam é a tripla* (M^n, f, g) *onde* M *é uma variedade Riemanniana compacta de dimensão pelo menos 3 e bordo* ∂M *suave tal que* $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função suave não negativa com* $f^{-1}(0) = \partial M$ *e que satisfaz*

$$\mathcal{L}_g^*(f) = g,$$

onde $\mathcal{L}_g^*$ *é a* L^2*-forma adjunta da linearização do operador curvatura escalar de* $\mathcal{L}_g$*. Chamaremos f de função potencial.*

Recordemos que $\mathcal{L}_g^*(f) = -(\Delta f)g + \mathrm{Hess} f - f\mathrm{Ric}$, tal igualdade pode ser vista, por exemplo, em [5]. E assim temos que a equação fundamental de uma métrica crítica de Miao-Tam será dada por:

$$-(\Delta f)g + \mathrm{Hess} f - f\mathrm{Ric} = g.$$

A partir da descoberta dessas métricas críticas, Miao-Tam seguiram analisando exemplos e possíveis classificações destas estruturas. Em [15] eles investigaram variedades Riemannianas com premissas de conformidade-plana e conseguiram provar o seguinte resultado:

Teorema 1 (Miao-Tam, [15])**.** *Seja* (M^n, f, g)*, com* $n \geqslant 3$*, uma métrica crítica de Miao-Tam sobre uma variedade conformemente-plana, simplesmente conexa, compacta e bordo isométrico a uma esfera padrão* $\mathbb{S}^{(n-1)}$*. Então* (M^n, g) *é isométrico a uma bola geodésica em um espaço forma simplesmente conexo* $\mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n$ *ou* $\mathbb{S}^n$*.*

Este resultado motivou os autores em [4] a estudarem o caso mais geral onde a variedade possui tensor de Bach nulo. Com objetivo de compreendermos melhor o enunciado do resultado principal iremos definir o tensor de Bach para variedades Riemannianas de dimensão maior ou igual a 4 a partir dos tensores de Weyl e Ricci. Tal tensor foi introduzido no início da década de 1920 no estudo de relatividade conforme em [3] .

Definição 2. *(Tensor de Bach) Seja* (M^n, g) *uma variedade Riemanniana de dimensão maior ou igual a* 4*, então o seguinte tensor*

$$B_{ij} = \frac{1}{n-3}\nabla^k\nabla^l W_{ijkl} + \frac{1}{n-2}R_{kl}W_{ikjl},$$

é conhecido com tensor de Bach.

Para variedades 3-dimensional o tensor de Bach é dado através do tensor de Cotton por:

$$B_{ij} = \nabla_k C_{kij}.$$

Dizemos que uma variedade (M^n, f, g) tem o tensor de Bach nulo quando $B_{ij} = 0$. Nas variedades 4-dimensionais compactas os pontos em que o tensor de Bach se anula são os mesmo pontos críticos de conformidade do funcional $\mathcal{W}(g)$ que é definido a partir da integral do módulo ao quadrado do tensor Weyl, ou seja,

$$\mathcal{W} = \int_M |W_g|^2 dM_g.$$

Não é difícil de verificar que métricas que são conformente planas ou métricas Einstein devem ter tensor de Bach nulo. Destacamos que, Cao e Chen estudaram os bem conhecidos sólitons de Ricci sobre a condição do tensor B_{ij} ser nulo, e desta forma conseguiram classificar tais estruturas. Para mais detalhes, veja as referências [7, 8].

É bem conhecido que variedades compactas de dimensão 4 tem um comportamento especial o qual pode ser constatado em [1, 2, 5] e [17]. Diante disso, nossa investigação se voltará para métricas críticas do funcional volume que possuem tensor de Bach nulo em dimensão 4. De fato, iremos substítuir a hipótese de conformidade flat no resultado de Miao e Tam pela condição do tensor de Bach ser nulo, que é mais fraco que o anterior. Agora, enunciamos o primeiro resultado deste trabalho.

Teorema 2. *Seja* (M^4, f, g) *uma métrica crítica de Miao-Tam sobre uma variedade simplesmente conexa, compacta e bordo isométrico a uma esfera padrão* $\mathbb{S}^3$*. Então,* (M^4, f, g) *é isométrica a uma bola geodésica em um espaço forma simplesmente conexo* $\mathbb{R}^4, \mathbb{H}^4$ *ou* $\mathbb{S}^4$*, provido que*

$$\int_M f^2 \, B(\nabla f, \nabla f) \, dM_g \geqslant 0.$$

Como consequência direta do teorema acima, obtemos:

Corolário 1. *Seja* (M^4, f, g) *uma métrica crítica de Miao-Tam sobre uma variedade, simplesmente conexa, compacta, com tensor de Bach nulo e bordo isométrico a uma esfera padrão* $\mathbb{S}^3$*. Então* (M^4, f, g) *é isométrica a uma bola geodésica em um espaço forma simplesmente conexo* $\mathbb{R}^4, \mathbb{H}^4$ *ou* $\mathbb{S}^4$*.*

Baseado no teorema acima é natural se perguntar o que acontece em dimensão 3. Para isso, inspirandos nas ideias desenvolvidas em [9], veremos que o resultado pode ser melhorado pela condição de que o tensor de Bach tem divergência livre. Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

Teorema 3. *Seja* (M^3, f, g) *uma métrica crítica de Miao-Tam sobre uma variedade simplesmente conexa, compacta e bordo isométrico a uma esfera padrão* $\mathbb{S}^2$*. Se* $\mathrm{div} B(\nabla f) = 0$ *em M onde* B *é o tensor de Bach, então* (M^3, f, g) *é isométrica a uma bola geodésica em um espaço forma simplesmente conexo* $\mathbb{R}^3, \mathbb{H}^3$ *ou* $\mathbb{S}^3$*.*

Da mesma forma temos uma consequência direta do teorema acima.

Corolário 2. *Seja* $(\mathsf{M}^3, \mathsf{f}, \mathsf{g})$ *uma métrica crítica de Miao-Tam sobre uma variedade simplesmente conexa, compacta, com tensor de Bach com divergência livre e bordo isométrico a uma esfera padrão* S^2*. Então* $(\mathsf{M}^3, \mathsf{f}, \mathsf{g})$ *é isométrica a uma bola geodésica em um conjunto simplesmente conexo de um espaço forma* $\mathbb{R}^3, \mathbb{H}^3$ *ou* $\mathbb{S}^3$*.*

Capítulo 1

Noções Preliminares

Neste capítulo iremos mostrar algumas definições e propriedades inerentes as variedades Riemannianas as quais serão utilizadas no decorrer deste trabalho.

1.1 Noções Básicas

Denotaremos por M^n ou simplesmente M uma variedade n-dimensional suave com métrica $g(\cdot,\cdot) = \langle\cdot,\cdot\rangle$. ∇ será a conexão Riemanniana de Levi- Civita associada a M , o espaço das funções diferenciáveis sobre M será denotado por C^∞ e o espaço dos campos diferenciáveis sobre M será denotado por $\mathfrak{X}(M)$.

Definição 3. *Seja* $f : M^n \to \mathbb{R}^n$ *uma função suave. O gradiente de f é o campo vetorial suave* ∇f *definido sobre* M^n *por*

$$\langle \nabla f, X\rangle = X(f),$$

para todo $X(f) \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição 4. *Seja* X *um campo vetorial suave em* M^n. *A divergência de* X *é a função suave* $\operatorname{div} : M^n \to \mathbb{R}$ *, dada para* $p \in M$ *por*

$$(\operatorname{div} X)(p) = \operatorname{tr}\{v \to (\nabla_v X)(p)\},$$

onde $v \in T_pM$ *e **tr** denota o traço do operador linear entre chaves.*

Definição 5. *Seja* $f : M^n \to \mathbb{R}^n$ *uma função suave. O Laplaciano de f é a função* $\Delta f : M \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f).$$

Definição 6. *Seja* $f : M^n \to \mathbb{R}^n$ *uma função suave e* $p \in M$. *O Hessiano de* f *é o campo de operadores lineares* $(\mathrm{Hess} f)_p : T_pM \to T_pM$, *definido para* $v \in T_pM$ *por*

$$(\mathrm{Hess} f)_p(v) = (\nabla_v \nabla f)(p).$$

Segue das propriedades da conexão Riemanniana que se X é qualquer extensão de v a uma vizinhança de p em M^n, então

$$(\mathrm{Hess} f)_p(v) = (\nabla_X \nabla f)(p).$$

A partir da definição do Hessiano de f, podemos expressar o Laplaciano de outra forma. Vejamos.

Proposição 1. *Se* $f : M^n \to \mathbb{R}^n$ *é uma função suave, então*

$$\Delta f = \mathrm{tr}(\mathrm{Hess} f).$$

Demonstração. Seja $p \in M$ e $\mathcal{U}$ uma vizinhança de p onde esteja definida um referencial ortonormal $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Então

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\mathrm{Hess} f)_p &= \langle \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{Hess} f)_p(e_i), e_i \rangle \\
&= \langle \sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i} \nabla f, e_i \rangle_p \\
&= \mathrm{div}(\nabla f)(p) \\
&= \Delta f(p).
\end{aligned}$$

□

Vejamos agora como os símbolos de Christoffel de uma conexão Riemanniana podem ser calculados através dos componentes g_{ij} da métrica. Para o que segue, considere a matriz positiva definida matriz $G = (g_{ij})$, que admite uma inversa que será denotada por

$$G^{-1} = g^{ij}.$$

Temos que,

Definição 7. *(Símbolos de Christoffel) Seja* M^n *variedade Riemanniana com conexão de Levi-Civita* ∇. *Dado um referencial ortonormal* $\{\partial_i\}$ *em M, definimos os símbolos de Christoffel* Γ_{ij} *por*

$$\langle \nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_k \rangle = \sum_{m=1}^{n} \Gamma_{ij}^m g_{mk},$$

desta forma os símbolos são os coeficientes da métrica resultante de uma conexão entre os campos coordenados. Podemos, ainda, reescrever a expressão por

$$\langle \nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_k\rangle = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}).$$

1.2 Algumas definições sobre tensores

Dentro deste estudo, os tensores serão a principal ferramenta para encontrarmos os resultados desejados, portanto iremos agora pontuar as definições e algumas propriedades de tensores.

Definição 8. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e V* o espaço dual de V. Um s-tensor covariante em V é uma aplicação multilinear*

$$T : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{s} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Um r-tensor contravariante é uma aplicação multilinear

$$T : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{r} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Um tensor do tipo(r,s) é um tensor s-covariante e r-contravariante, isto é, uma aplicação multilinear

$$T : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{r} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{s} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Passamos agora a definição de tensores em uma variedade Riemanniana

Definição 9. *Um campo de tensores ou um campo tensorial* A *em uma variedade* M^n *é um tensor sobre o* $C^\infty(M)$*-módulo* $\mathfrak{X}(M)$*. Assim, um* (r,s)*-tensor* A *é uma aplicação*

$$A : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \longrightarrow C^\infty(M)$$

multilinear sobre C^∞*, com r-uplas contravariantes e s-uplas covariantes. Mais precisamente, A é uma aplicação multilinear sobre* $C^\infty(M)$ *que associa a cada (r+s)-upla* $(Y^1, \cdots, Y^r, X^1, \cdots, X^s)$ *uma função diferenciável*

$$f = A(Y^1, \cdots, Y^r, X^1, \cdots, X^s) : M^n \longrightarrow \mathbb{R}.$$

A seguir definiremos alguns tensores fundamentais no estudo de geometria Riemanniana.

Definição 10. *Seja* (M^n, g, f) *uma variedade Riemanniana. O* ***tensor curvatura de Riemann*** *é o (1,3)-tensor*

$$R_m : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M),$$

dado por

$$R_m(X, Y, Z) = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z,$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ *Em coordenadas, temos*

$$R_m\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} = R_{ijk}^l \frac{\partial}{\partial x^l}.$$

Além disso, quando necessário, faremos a seguinte convenção $\frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i$.

Também por vezes iremos interpretar o tensor R_m como um (0,4)-tensor, definido por

$$R_m : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

onde

$$R_m(X, Y, W, Z) = g(R_m(X, Y, W), Z).$$

Em coordenadas, temos

$$R_m(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) = R_{ijkl}.$$

Proposição 2. *O tensor curvatura de Riemann satisfaz as seguintes propriedades*

(1) $R_m(X, Y, W, Z) = -R_m(Y, X, W, Z) = R_m(Y, X, Z, W)$.

(2) $R_m(X, Y, W, Z) = R_m(W, Z, X, Y)$.

(3) Primeira Identidade de Bianchi

$$R_m(X, Y, W, Z) + R_m(Y, W, X, Z) + R_m(W, X, Y, Z) = 0.$$

Em coordenadas,

$$R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0.$$

(4) Segunda Identidade de Bianchi

$$(\nabla_W R_m)(X, Y, Z, U) + (\nabla_Y R_m)(W, X, Z, U) + (\nabla_X R_m)(Y, W, Z, , U) = 0.$$

Em coordenadas se torna

$$\nabla_l R_{ijkS} + \nabla_j R_{liks} + \nabla_i R_{jlks} = 0.$$

Para as demonstrações dos itens veja [6].

Definição 11. *Definimos o **tensor curvatura de Ricci** o (0,2)- tensor*

$$\mathrm{Ric} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M),$$

como sendo o traço do tensor curvatura de Riemann, isto é,

$$\mathrm{Ric}(X, Z) = \mathrm{tr}\{Y \longmapsto R_m(X, Y)Z\}$$

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. *Em coordenadas temos que*

$$(\mathrm{Ric})_{ik} = R_{ik} = g^{jl} R_{ijkl}.$$

Definição 12. *A **curvatura escalar** de uma variedade é a função* $R : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$R = \mathrm{tr}\,\mathrm{Ric}.$$

Em coordenadas

$$R = g^{ik} R_{ik}.$$

Proposição 3. *Em uma variedade Riemanniana* (M^n, g), *vale*

(1) Identidade de Ricci contraída

$$\nabla_j R_{ik} - \nabla_i R_{jk} = g^{ls} \nabla_l R_{ijks}$$

(2) Segunda Identidade de Bianchi contraída duas vezes

$$g^{jk} \nabla_j R_{ik} = \frac{1}{2} \nabla_i R.$$

Demonstração. Para o item 1, tomamos o traço na segunda Identidade de Bianchi, a fim de obtermos:

$$\begin{aligned} 0 &= g^{ls} \nabla_l R_{jiks} + g^{ls} \nabla_j R_{ilks} + g^{ls} \nabla_i R_{ljks} \\ &= g^{ls} \nabla_l R_{jiks} + \nabla_j (g^{ls} R_{ilks}) + \nabla_i (g^{ls} R_{ljks}) \\ &= g^{ls} \nabla_l R_{ijks} \nabla_j R_{ik} - \nabla_i R_{jk} \end{aligned}$$

Portanto,

$$g^{ls}\nabla_l R_{jiks} = \nabla_j R_{ik} - \nabla_i R_{jk}.$$

Além disso, podemos reescrever a equação acima fazendo uma pequena troca de índices, obtendo

$$\nabla_i R_{jk} = \nabla_j R_{ik} + g^{ls}\nabla_l R_{jiks}.$$

Mostraremos agora o item 2. Tomando o traço da equação obtida no item 1, temos que

$$\begin{aligned} \nabla_i(g^{jk}R_{jk}) &= g^{jk}\nabla_j R_{ik} + g^{ls}\nabla_l(g^{jk}R_{jiks}) \\ \nabla_i R &= g^{jk}\nabla_j R_{ik} + g^{ls}\nabla_l R_{is}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\nabla_i R = 2g^{jk}\nabla_j R_{ik},$$

onde fizemos as trocas convenientes dos índices s com k, e l com j. □

A próxima igualdade é demonstrada utilizando propriedades inerentes aos (0,2)- tensores cuja demonstração pode ser encontrada em [16] ou de maneira mais geral, pelas notas de Tópicos Avançados de Geometria descritos na referência [18].

Proposição 4. *(Identidade de Ricci) O tensor de Ricci satisfaz a seguinte igualdade:*

$$\nabla_X\nabla_Y \mathrm{Ric}(Z,W) - \nabla_Y\nabla_X \mathrm{Ric}(Z,W) = \mathrm{Ric}(R_m(X,Y)Z,W) + \mathrm{Ric}(Z,R_m(X,Y)W).$$

Finalizaremos esta subseção relembrando a equação de Codazzi de acordo com a referência [6]. Sua importância neste trabalho vem do fato que iremos utilizar conjuntos de níveis regulares para obter informações globais na variedade.

Dada uma imersão isométrica $\psi : \Sigma \to M$, onde (M^n, g) é uma variedade Riemanniana de dimensão n, denotaremos por $\mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$ o espaço dos campos diferenciáveis de vetores normais a Σ. A segunda forma fundamental de Σ pode ser considerada como um tensor

$$h : \mathfrak{X}(\Sigma) \times \mathfrak{X}(\Sigma) \times \mathfrak{X}(\Sigma)^\perp,$$

definido por

$$h(X,Y,\eta) = \langle h(X,Y), \eta \rangle,$$

onde h indica a segunda forma fundamental de Σ e η um campo de vetor normal á Σ.

Com a notação acima é possível provar a seguinte identidade, conhecida como equação de Codazzi:

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = (\nabla_Y h)(X,Z,W) - (\nabla_X h)(Y,Z,W)$$

onde ∇ e R denotam a conexão e o vetor curvatura de Riemann em M^n, respectivamente.

1.3 Métricas Críticas de Miao-Tam

Nesta seção, iremos introduzir as métricas críticas de Miao-Tam. Os estudos de tais estruturas iniciaram no trabalho [13], onde destacamos que os autores obtiveram uma caracterização de pontos críticos através do estudo variacional para o funcional volume restrito ao espaço das métricas de curvatura escalar constante e com métrica prescrita no bordo. Tais pontos críticos, serão chamados mais adiante, de métricas críticas de Miao-Tam.

Em seguida, Miao-Tam em [14], voltaram-se para os estudos das métricas críticas do funcional volume, através da equação de Euler-Lagrange associado à variação do funcional volume. Eles investigaram tais variedades sob hipóteses da métrica ser de Einstein e conformemente plana. Mais precisamente, eles provaram que uma métrica crítica Einstein é isométrica a uma bola geodésica em um espaço forma simplesmente conexo $\mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n$ ou $\mathbb{S}^n$. Alem disso, eles substituiram a hipótese de Einstein por localmente conformemente plana com bordo isométrico a esfera e obtiveram o mesmo resultado para as variedades simplesmente conexas.

Definiremos a seguir as métricas críticas de Miao-Tam por

Definição 13. *Uma* ***métrica críticas de Miao-Tam*** *é uma tripla* (M^n, g, f), $n \geqslant 3$, *onde* (M^n, g) *é uma variedade Riemanniana compacta e conexa com bordo* ∂M *suave e f é uma função não negativa suave em M tal que* $f^{-1}(0) = \partial M$ *e satisfaz a seguinte equação,*

$$-(\Delta f)g + \mathrm{Hess} f - f\mathrm{Ric} = g. \tag{1.1}$$

Isto em coordenadas pode ser reescrito por:

$$-(\Delta f)g_{ij} + \nabla_i\nabla_j f - fR_{ij} = g_{ij}. \tag{1.2}$$

Tomando o traço desta equação obtemos,

$$(n-1)\Delta f + Rf = -n. \tag{1.3}$$

Por questões de praticidade iremos utilizar mais comumente nas demonstrações as duas equações a cima em detrimento de 1.1.

Alguns exemplos foram construídos por Miao-Tam em [13]. O primeiro deles se trata das bolas geodésicas do espaço euclidiano com a métrica canônica.

Exemplo 1. *Considere* $M^n \subset \mathbb{R}^n$ *uma bola geodésica centrada na origem e raio* R_0 *e a função f definida por* $f(x) = \frac{R_0^2}{2(n-1)} - \frac{|x|^2}{2(n-1)}$. *Consideremos em* $\mathbb{R}^n$ *a métrica canônica g em M a métrica restrita. Daí,* $\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{x_i}{n-1}$, *e assim temos*

$$\mathrm{Hess}\, f = -\frac{1}{n-1} g$$

e

$$\Delta f = -\frac{n}{n-1}.$$

Portanto,

$$-(\Delta f)g + \mathrm{Hess} f - f\mathrm{Ric} = \frac{n}{n-1} g - \frac{1}{n-1} g,$$

e além disso $f^{-1} = \partial M$. *Logo,* (M^n, g) *é uma métrica crítica de Miao-Tam.*

Em seguida, temos que as bolas geodésicas da esfera canônica também representam uma métrica crítica de Miao-Tam.

Exemplo 2. *Considere* $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *e* $p = (0, \cdots, 0, 1) \in \mathbb{S}^n$. *Sejam* $M^n \subset \mathbb{S}^n$ *uma bola geodésica centrada em p de raio* $R_0 < \frac{\pi}{2}$ *e f a função definida por* $f(x_1, \cdots, x_n, t) = \frac{1}{n-1}\left(\frac{t}{\cos R_0} - 1\right)$, *onde r é a distância geodésica de* $(x_1, \cdots, x_n, t)$ *à p. Assim* $t = \cos r$ *e* t *é a função altura relativa a p.*

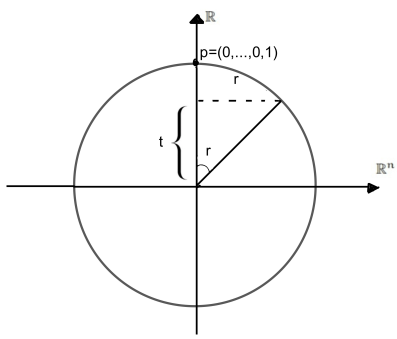

Figura 1.1: Distância da geodésica a p

Daí, obtemos

$$\mathrm{Hess}\, f = \frac{1}{(n-1)\cos R_0} \mathrm{Hess}(t) = -\frac{t}{(n-1)\cos R_0} g.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} -(\Delta f)g + \mathrm{Hess} f - f\mathrm{Ric} &= \frac{nt}{(n-1)\cos R_0} g - \frac{t}{(n-1)\cos R_0} g \\ &\quad - \frac{1}{n-1}\Big(\frac{t}{\cos R_0} - 1\Big)(n-1)g \\ &= \frac{nt - t - (n-1)t + (n-1)\cos R_0}{(n-1)\cosh R_0} g \\ &= g, \end{aligned}$$

e $f^{-1}(0) = \partial M$. *Assim,* (M^n, g, f) *é uma métrica crítica de Miao-Tam.*

Por fim, também temos as bolas geodésicas do espaço hiperbólico como exemplo.

Exemplo 3. *Considere* $\mathbb{R}^{n,1} = (\mathbb{R}^{n+1}, ds^2)$*, onde* $ds^2 = dx_1^2 + \cdots + dx_n^2 - dt^2$. *Considere* $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \cdots, x_n, t) \in \mathbb{R}^{n+1}; x_1^2 + \cdots + x_n^2 - t^2 = -1, t \geqslant 1\}$ *mergulhado em* $\mathbb{R}^{n,1}$ *e seja g a métrica induzida. Nessas condições, g é uma métrica Riemanniana. Agora fixe* $p = (0, \cdots, 0, 1) \in \mathbb{H}^n$ *e considere* $M^n \subset \mathbb{H}^n$ *uma bola geodésica centrada em p de raio* R_0 *e a função f definida por* $f(x_1, \cdots, x_n, t) = \frac{1}{n-1}\Big(1 - \frac{\cosh r}{\cosh R_0}\Big) = \frac{1}{n-1}\Big(1 - \frac{t}{\cosh R_0}\Big)$*, onde r é a distância geodésica de* $(x_1, \cdots, x_n, t)$ *à p. Daí,*

$$\mathrm{Hess}\, f = -\frac{1}{(n-1)\cosh R_0}\mathrm{Hess}(t) = -\frac{t}{(n-1)\cosh R_0} g.$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} -(\Delta f)g + \mathrm{Hess} f - f\mathrm{Ric} &= \frac{nt}{(n-1)\cosh R_0} g - \frac{t}{(n-1)\cosh R_0} g \\ &\quad + \frac{1}{n-1}\Big(1 - \frac{t}{\cosh R_0}\Big)(n-1)g \\ &= \frac{nt - t + (n-1)\cosh R_0 - (n-1)t}{(n-1)\cosh R_0} g \\ &= g, \end{aligned}$$

e $f^{-1}(0) = \partial M$. *Assim,* (M^n, g, f) *é uma métrica crítica de Miao-Tam.*

O fato de que os exemplos acima possuem curvatura escalar constantes não uma é coincidência. De fato, sempre que uma variedade Riemanninana obedece a Equação (1.2) ela tem curvatura escalar constante, diante isso temos a seguinte proposição.

Proposição 5. *Seja* (M^n, g, f) *uma métrica crítica de Miao-Tam. Então* (M^n, g) *tem curvatura escalar constante.*

Demonstração. Para iniciar a demonstração afirmamos que $div(Hessf) = Ric(\nabla f) + \nabla\Delta f$. De fato, veja que utilizando a Identidade de Ricci temos

$$\begin{aligned} div(Hessf)_i &= \nabla_k\nabla_k\nabla_i f \\ &= \nabla_k\nabla_i\nabla_k f \\ &= \nabla_i\nabla_k\nabla_k f + R_{kikl}\nabla_l f \\ &= \nabla_i\Delta f + R_{il}\nabla_l f. \end{aligned}$$

Agora, tomando o divergente na Equação (1.2) e aplicando a segunda Identidade de Bianchi contraída duas vezes, temos

$$\begin{aligned} 0 &= div\, g = div(-(\Delta f)g + Hessf - fRic) \\ &= -\nabla\Delta f + Ric(\nabla f) + \nabla\Delta f - f\frac{1}{2}\nabla R - Ric(\nabla f) \\ &= f\frac{1}{2}\nabla R, \end{aligned}$$

ou seja , $\nabla R \equiv 0$ em $M\backslash\partial M$. Como ∂M tem medida nula, usamos a continuidade da curvatura escalar R e o fato de M ser conexa, para concluir que R é constante em M, o que conclui a proposição. □

Agora, iremos demonstrar dois lemas que são diretamente ligados ao fato da variedade ser uma métrica crítica de Miao-Tam e serão ferramentas importantes neste trabalho.

Lema 1. *Seja* (M^n, g, f) *uma métrica crítica de Miao-Tam. Então*

$$f(\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik}) = R_{ijks}\nabla_s f + \frac{R}{n-1}(\nabla_i f g_{jk} - \nabla_j f g_{ik}) - (\nabla_i f R_{jk} - \nabla_j f R_{ik}).$$

Demonstração. Primeiramente iremos calcular $\nabla_i(fR_{jk})$ a partir da equação (1.2). De fato, derivando ambos os lados de (1.2) juntamente com o fato da métrica ser paralela, obteremos:

$$-\nabla_i(\Delta f)g_{jk} + \nabla_i\nabla_j\nabla_k f - \nabla_i(fR_{jk}) = 0.$$

Isto implica que,

$$\nabla_i(fR_{jk}) = -\nabla_i(\Delta f)g_{jk} + \nabla_i\nabla_j\nabla_k f. \tag{1.4}$$

Como R é constante temos a partir de (1.2) a seguinte identidade,

$$\nabla_i(\Delta f) = -\frac{R}{n-1}\nabla_i f$$

Agora utilizando essa igualdade e substituindo em (1.4) temos que,

$$\nabla_i(fR_{jk}) \quad = \quad \nabla_i\nabla_j\nabla_k f - (\nabla_i\Delta f)g_{jk}$$

Assim utilizaremos que

$$(n-1)\Delta f + Rf = -n$$

Para obter

$$\Delta f = -\frac{n+Rf}{n-1}n$$

E, assim,

$$\nabla_i(\Delta f) = -\frac{R}{n-1}\nabla_i f$$

Portanto, temos que

$$\nabla_i(fR_{jk}) \quad = \quad \nabla_i\nabla_j\nabla_k f + \frac{R}{n-1}\nabla_i f g_{jk})$$

Utilizando a identidade de Ricci encontramos o valor para $\nabla_j(fR_{ik})$ daí subtraímos $\nabla_i(fR_{jk}) - \nabla_j(fR_{ik})$ e concluímos o Lema. □

Agora do posse deste Lema 1, iremos retomar algumas definições feitas na seção anterior para o que segue. Considere uma variedade Riemanniana de dimensão pelo menos 3, daí definimos os tensores abaixo.

Primeiramente o tensor de Weyl, que é dado a partir do tensor curvatura de Riemann por

$$R_{ijkl} = W_{ijkl} + \frac{1}{n-2}(R_{ik}g_{jl} + R_{jl}g_{ik} - R_{il}g_{jk} - R_{jk}g_{il}) - \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{jl}g_{ik} - g_{il}g_{jk}).$$

Agora iremos relembrar a definição do tensor de Cotton, que é dado por

$$C_{ijk} = \nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} - \frac{1}{2(n-1)}(\nabla_i R g_{jk} - \nabla_j R g_{ik}).$$

Este tensor tem propriedades importantes que nos interessam no desenvolver das demonstrações e também o associam ao tensor Weyl, são elas,

Proposição 6. *(Propriedades do tensor Cotton)*

1. *O tensor Cotton é antissimétrico, ou seja,* $C_{ijk} = -C_{ikj}$.

2. *O tensor Cotton tem traço-livre, ou seja,* $C_{ijk} + C_{kij} + C_{jki} = 0$.

3. *O tensor Cotton é identicamente nulo em dimensão 2.*

4. *Para dimensões maiores que 3 a nulidade do tensor Weyl implica na nulidade do tensor Cotton.*

Para o que iremos trabalhar os tensores de Cotton e Weyl se relacionam da seguinte forma para uma variedade de dimensão pelo menos 4,

$$C_{ijk} = -\frac{n-2}{n-3}\nabla_l W_{ijkl}.$$

Para finalizar, temos o tensor de Schouten A dado por

$$A_{ij} = \frac{1}{n-2}(R_{ij} - \frac{R}{2(n-1)}g_{ij}).$$

Para o que segue iremos definir o 3-tensor auxiliar T_{ijk} dado por

$$T_{ijk} = \frac{n-1}{n-2}(R_{ik}\nabla_j f - R_{jk}\nabla_i f) - \frac{R}{n-2}(g_{ik}\nabla_j f - g_{jk}\nabla_i f) + \frac{1}{n-2}(g_{ik}R_{js}\nabla_s f - g_{jk}R_{is}\nabla_s f).$$

É importante notar que o tensor T_{ijk} é definido similarmente ao tensor D_{ijk} mostrado nos estudos sobre solítons de Ricci. Assim agora podemos anunciar nosso próximo lema.

Lema 2. *Seja* (M^n, g, f) *uma métrica crítica de Miao-Tam. Então a identidade abaixo é válida.*

$$fC_{ijk} = T_{ijk} + W_{ijks}\nabla_s f.$$

Demonstração. Primeiro, usando a definição do tensor de Cotton e o fato da curvatura escalar ser constante, chegamos a expressão

$$\begin{aligned} fC_{ijk} &= f(\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{jk}) - \frac{1}{2(n-1)}f(\nabla_i R g_{jk} - \nabla_j R g_{ik}) \\ fC_{ijk} &= f(\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik}). \end{aligned}$$

Substituindo esta última identidade no Lema 1, temos que:

$$fC_{ijk} = R_{ijks}\nabla_s f + \frac{R}{n-1}(\nabla_i f g_{jk} - \nabla_j f g_{ik}) - (\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik}).$$

Agora usando a definição do tensor de Weyl temos que,

$$\begin{aligned} R_{ijks}\nabla_s f &= W_{ijks}\nabla_s f + \frac{1}{n-2}(R_{ik}g_{js} + R_{js}g_{ik} - R_{js}g_{ik} - R_{is}g_{jk} - R_{is}g_{jk} - R_{jk}g_{is})\nabla^s f \\ &\quad - \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{js}g_{ik} - g_{is}g_{jk})\nabla_s f \end{aligned}$$

Substituindo essa expressão no que encontramos sobre fC_{ijk} , temos que:

$$\begin{aligned} fC_{ijk} &= W_{ijks}\nabla_s f + \frac{1}{n-2}(R_{ik}g_{js} + R_{js}g_{ik} - R_{js}g_{ik} - R_{is}g_{jk} - R_{is}g_{jk} - R_{jk}g_{is})\nabla_s f \\ &\quad - \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{js}g_{ik} - g_{is}g_{jk})\nabla_s f + \frac{R}{n-1}(\nabla_i f g_{jk} - \nabla_j f g_{ik}) - (\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik}) \\ &= W_{ijks}\nabla_s f + T_{ijk} \end{aligned}$$

$\square$

Capítulo 2

Lemas Chaves

Nesta seção iremos demonstrar e enunciar os principais lemas que serão utilizados na demonstração dos teoremas principais.

Para simplificar o desenvolvimento dos resultados a seguir definimos a seguinte função ρ sobre M^n,

$$\rho = |\nabla f|^2 + \frac{2}{n-1}f + \frac{R}{n-1}f^2.$$

Afirmamos que

$$\frac{1}{2}\nabla\rho = f\mathrm{Ric}(\nabla f).$$

De fato, é imediato que

$$\frac{1}{2}\nabla\rho = \mathrm{Hess}f(\nabla f) + \frac{1}{n-1}\nabla f + \frac{R}{n-1}f\nabla f$$

Agora usando (1.2) e (1.3) na mesma, temos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\nabla\rho &= \mathrm{Hess}f(\nabla f) + \frac{1+Rf}{n-1}\nabla f\\ &= \mathrm{Hess}f(\nabla f) - (\Delta f + 1)\nabla f\\ &= f\mathrm{Ric}(\nabla f),\end{aligned}$$

o que prova o afirmado.

Para o que segue tome pontos regulares da função suave f definida sobre M e considere o campo de vetores $\nu = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ normal ao nível $\Sigma_c = \{p \in M : f(p) = c\}$. Daí, podemos calcular a segunda forma fundamental do nível Σ_c a qual é dada por

$$h_{ij} = -\langle \nabla_{e_i}\nu, e_j\rangle,$$

onde $\{e_1, ..., e_{n-1}\}$ é um referencial ortonormal de Σ_c. Desta forma, tomando o traço de h_{ij} obtemos a curvatura média **H** nos pontos de Σ_c,

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{|\nabla f|}\sum_{i=1}^{n-1} \mathsf{Hess} f(e_i, e_i).$$

No próximo lema iremos estudar o comportamento do tensor auxiliar T sobre o conjunto de nível Σ_c.

Definição 14. *O traço de um tensor A é dado pela aplicação,*

$$c : C \longrightarrow S^2(T * M)$$

definido por

$$(c(A))(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} A(X, e_i, Y, e_i)$$

onde $\{e_i\}$ *é uma base ortonormal de* TM *e* $C = Ker(b)$ *e a aplicação* b *é a simetrização de Bianchi.*

Lema 3. *Seja* (M^n, g, f) *uma métrica crítica de Miao-Tam. Seja* $\Sigma_c : \{p \in M; f(p) = c\}$ *um conjunto de nível de f. Se* g_{ab} *é a métrica de M induzida a* Σ_c*, então em qualquer ponto onde* $\nabla f \neq 0$ *temos que*

$$|fT|^2 = \frac{2(n-1)^2}{(n-2)^2}|\nabla f|^4 \sum_{a,b=2}^{n} |h_{ab} - \frac{H}{n-1} g_{ab}|^2 + \frac{n-1}{2(n-2)}|\nabla^{\Sigma}\rho|^2,$$

onde $\nabla\rho = 2f Ric(\nabla f)$ *e* h_{ab} *e H são respectivamente a segunda forma no nível e a curvatura média em* Σ_c *e* ∇^{Σ} *é a conexão de M restrita a* Σ_c*.*

Demonstração. Para demonstrarmos o Lema 3 é importante observar que o tensor T possui traço nulo em quaisquer dois índices. Com efeito, tomando o traço em i e k, deduzimos que

$$\begin{aligned} T_{kjk} &= \frac{R(n-1)}{n-2}\nabla_j f - \frac{n-1}{n-2}R_{jk}\nabla_k f - \frac{R(n-1)}{n-2}\nabla_j f + \frac{Rg_{jk}}{n-2}\nabla_k f \\ &\quad + \frac{1}{n-2}(n-1)R_{js}\nabla_s f - \frac{1}{n-2}g_{jk}R_{ks}\nabla_s f \\ &= \frac{Rg_{jk}}{n-2}\nabla_k f - \frac{Rg_{js}}{n-2}\nabla_s f = 0 \end{aligned}$$

Prosseguindo, note que $T_{ijk} = T_{jik}$, o que implica, $T_{iik} = 0$. Por fim, a propriedade de antissimetria também fornece que $T_{ikk} = -T_{kik} = 0$, o que prova o afirmado.

Agora consideramos um referencial ortonormal $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ tal que $e_1 = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ e $e_2, ..., e_n$ tangente a Σ. Calculando a norma do tensor T neste referencial vemos que

$$\begin{aligned}
|T_{ijk}|^2 &= T_{ijk}.T_{ijk} \\
&= \frac{n-1}{n-2}(R_{ik}\nabla_j f - R_{jk}\nabla_i f).T_{ijk} - \frac{R}{n-2}(g_{ik}\nabla_j f - g_{jk}\nabla_i f).T_{ijk} \\
&\quad + \frac{1}{n-2}(g_{ik}R_{js}\nabla_s f - g_{jk}R_{is}\nabla_s f).T_{ijk},
\end{aligned}$$

e desde que T_{ijk} possui traço nulo, obtemos

$$T_{ijk} = \frac{n-1}{n-2}(R_{ik}\nabla_j f - R_{jk}\nabla_i f).T_{ijk}$$

Aplicamos novamente a definição do tensor T_{ijk} para obter

$$\begin{aligned}
|T_{ijk}|^2 &= \frac{(n-1)^2}{(n-2)^2}|R_{ik}\nabla_j f - R_{jk}\nabla_i f|^2 - \frac{R(n-1)}{(n-2)^2}(R_{ik}\nabla_j f - R_{jk}\nabla_i f)(g_{ik}\nabla_j f - g_{jk}\nabla_i f) \\
&\quad + \frac{(n-1)}{(n-2)^2}(R_{ik}\nabla_j f - R_{jk}\nabla_i f)(g_{ik}R_{js}\nabla_s f - g_{jk}R_{is}\nabla_s f) \\
&= 2\frac{(n-1)^2}{(n-2)^2}(|Ric|^2|\nabla f|^2 - |Ric(\nabla f)|^2) - \frac{2R^2(n-1)}{(n-2)^2}|\nabla f|^2 + \frac{(n-1)}{(n-2)^2}2RRic(\nabla f, \nabla f) \\
&\quad + \frac{(n-1)}{(n-2)^2}2RRic(\nabla f, \nabla f) - \frac{(n-1)}{(n-2)^2}2|Ric(\nabla f)|^2,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
|T_{ijk}|^2 &= 2\frac{(n-1)^2}{(n-2)^2}(|Ric|^2|\nabla f|^2 - |Ric(\nabla f)|^2) - \frac{2R^2(n-1)}{(n-2)^2}|\nabla f|^2 \\
&\quad + \frac{(n-1)}{(n-2)^2}4RRic(\nabla f, \nabla f) - \frac{(n-1)}{(n-2)^2}2|Ric(\nabla f)|^2.
\end{aligned}$$

Prosseguindo, mostraremos o valor de $|fT|^2$ usando que $\frac{1}{2}\nabla\rho = fRic(\nabla f)$.

Veja que,

$$\begin{aligned}
|fT|^2 &= 2\frac{(n-1)^2}{(n-2)^2}(|Ric|^2|\nabla f|^2 f^2 - |Ric(\nabla f)f|^2) - \frac{2R^2(n-1)}{(n-2)^2}f^2|\nabla f|^2 \\
&\quad + \frac{(n-1)}{(n-2)^2}4RRic(\nabla f, \nabla f)f^2 - \frac{(n-1)}{(n-2)^2}2|Ric(\nabla f)f|^2 \\
&= \frac{(n-1)^2}{(n-2)^2}2|Ric|^2|\nabla f|^2 f^2 - \frac{2(n-1)^2}{(n-2)^2}\frac{1}{4}|\nabla\rho|^2 - \frac{2R^2(n-1)}{(n-2)^2}f^2|\nabla f|^2 \\
&\quad + 4\frac{(n-1)}{(n-2)^2}RRic(\nabla f, \nabla f)f^2 - \frac{2(n-1)}{(n-2)^2}\frac{1}{4}|\nabla\rho|^2 \\
&= \frac{(n-1)^2}{(n-2)^2}2|Ric|^2|\nabla f|^2 f^2 - \frac{n(n-1)}{2(n-2)^2}|\nabla\rho|^2 - \frac{2R^2(n-1)}{(n-2)^2}f^2|\nabla f|^2 \\
&\quad + \frac{2(n-1)}{(n-2)^2}Rf\langle\nabla\rho, \nabla f\rangle.
\end{aligned}$$

Assim, isolando o termo $|Ric|^2|\nabla f|^2 f^2$ ficamos com

$$\frac{2(n-1)^2}{(n-2)^2}|Ric|^2|\nabla f|^2 f^2 = |fT|^2 + \frac{n(n-1)}{2(n-2)^2}|\nabla \rho|^2 + \frac{2R^2(n-1)}{(n-2)^2}f^2|\nabla f|^2 - \frac{2(n-1)}{(n-2)^2}Rf\langle \nabla\rho, \nabla f\rangle. \tag{2.1}$$

Por outro lado, a segunda forma fundamental no nível Σ, dada por

$$\begin{aligned} h_{ab} &= -\left\langle e_a\left(\frac{\nabla f}{|\nabla f|}\right), e_b\right\rangle \\ &= -\frac{1}{|\nabla f|}\nabla_a\nabla_b f \\ &= -\frac{1}{|\nabla f|}\left[fR_{ab} - \left(\frac{1}{n-1} + \frac{fR}{n-1}\right)g_{ab}\right], \end{aligned}$$

onde $2 \leqslant a, b \leqslant n$. Consequentemente, tomando o traço na expressão acima, obtemos a curvatura média

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{|\nabla f|}\left[f\sum_{a=2}^{n} R_{aa} - \left(\frac{1}{n-1} + \frac{fR}{n-1}\right)(n-1)\right] \\ &= -\frac{1}{|\nabla f|}\left[fR - fR_{11} - 1 - fR\right] \\ &= \frac{1}{|\nabla f|}(1 + fR_{11}). \end{aligned}$$

Daí, podemos calcular o valor de $|h|^2$ e H^2.Veja que:

$$\begin{aligned} |h|^2 &= \frac{1}{|\nabla f|^2}\left[f^2Ric^2 - 2fR_{ab}.\Big(\frac{1+fR}{n-1}\Big)g_{ab} + (n-1)\frac{(1+fR)^2}{(n-1)^2}\right] \\ &= \frac{1}{|\nabla f|}\Big[f^2Ric^2 - 2f\Big(\frac{1+fR}{n-1}\Big)(R - R_{11}) - 2f^2\sum_{a=2}^{n} R_{1a}^2 - f^2R_{11}^2 \\ &\quad + \frac{(fR+1)^2}{(n-1)}\Big] \end{aligned}$$

e

$$H^2 = \frac{1}{|\nabla f|^2}(f^2R_{11}^2 + 2fR_{11} + 1).$$

Além disso, desde que

$$\sum_a \sum_b \left|h_{ab} - \frac{H}{n-1}g_{ab}\right| = |h|^2 - \frac{H^2}{n-1},$$

então, podemos deduzir

$$
\begin{aligned}
\sum_a \sum_b |h_{ab} - \frac{H}{n-1} g_{ab}|^2 &= \sum_a \sum_b \Big| -\frac{1}{|\nabla f|}\Big[fR_{ab} - \Big(\frac{1}{n-1} + \frac{fR}{n-1}\Big) g_{ab}\Big] - \frac{1}{|\nabla f|}(1 + fR_{11})\Big|^2 \\
&= \sum_a \sum_b \Big| -\frac{1}{|\nabla f|}\Big[fR_{ab} - fR_{11} - 1 - \frac{fR+1}{n-1})\Big]\Big|^2 \\
&= \frac{1}{|\nabla f|^2}\Big[f^2 |Ric|^2 - \Big(\frac{nR_{11}^2 f^2 + f^2R^2 - 2f^2RR_{11}}{n-1}\Big)\Big] - \frac{2f^2}{|\nabla f|^2}\sum_a^n R_{1a}^2.
\end{aligned}
$$

Agora utilizando as consequências da função auxiliar ρ, temos que

$$
fR_{11} = \frac{1}{|\nabla|^2} fRic(\nabla f, \nabla f) = \frac{1}{2|\nabla f|^2}
$$

E também,

$$
fR_{1a} = \frac{1}{|\nabla f|} fRic(\nabla f, e_a) = \frac{1}{2|\nabla f|}\langle \nabla \rho, e_a\rangle = \frac{1}{2|\nabla f|}\nabla_a \rho.
$$

Agora retornando à $\sum_a \sum_b |h_{ab} - \frac{H}{n-1} g_{ab}|^2$ temos que

$$
\begin{aligned}
\sum_a \sum_b |h_{ab} - \frac{H}{n-1} g_{ab}|^2 &= \frac{1}{|\nabla f|^2}\Big[f^2 |Ric|^2 - \Big(\frac{nR_{11}^2 f^2 + f^2R^2 - 2f^2RR_{11}}{n-1}\Big)\Big] - \frac{2f^2}{|\nabla f|^2}\sum_a^n R_{1a}^2 \\
&= \frac{1}{n-1}\Big(\frac{Rf}{|\nabla f|^2}\langle \nabla\rho, \nabla f\rangle - \frac{1}{|\nabla f|^2} R^2 f^2 + \frac{1}{|\nabla f|^2}(n-1) f^2 |Ric|^2 \\
&\quad - \frac{n}{4|\nabla f|^4}\langle \nabla\rho, \nabla f\rangle^2 - \frac{1}{2|\nabla f|^4}|\nabla^\Sigma \rho|^2\Big).
\end{aligned}
$$

Logo, manipulando essa igualdade, obtemos

$$
\begin{aligned}
f^2|Ric|^2 &= |\nabla f|^2 \sum_{a,b} |h_{ab} - \frac{H}{n-1} g_{ab}|^2 + \frac{R^2 f^2}{(n-1)} \\
&\quad - \langle \nabla\rho, \nabla f\rangle \frac{Rf}{(n-1)|\nabla f|^2} + \frac{n}{4(n-1)|\nabla f|^4}\langle \nabla\rho, \nabla f\rangle^2 + \frac{1}{2|\nabla f|^2}|\nabla^\Sigma \rho|^2.
\end{aligned}
$$

Agora, substituindo em (2.1), teremos

$$
\begin{aligned}
&|fT|^2 + \frac{n(n-1)}{2(n-2)^2}|\nabla\rho|^2 + \frac{2R^2(n-1)}{(n-2)^2} f^2 |\nabla f|^2 - \frac{2(n-1)}{(n-2)^2} Rf\langle \nabla\rho, \nabla f\rangle \\
= &|\nabla f|^2 \frac{2(n-1)}{(n-2)^2}\Big[(n-1)|\nabla f|^2 \sum_{a,b} |h_{ab} - \frac{H}{n-1} g_{ab}|^2 + R^2 f^2 - \frac{Rf}{|\nabla f|^2}\langle \nabla\rho, \nabla f\rangle \\
&+ \frac{n}{4|\nabla f|^4}\langle \nabla\rho, \nabla f\rangle^2 + \frac{1}{2|\nabla f|^2}|\nabla^\Sigma \rho|^2\Big],
\end{aligned}
$$

que pode ser reescrito como

$$
\begin{aligned}
|fT|^2 &= |\nabla f|^4 \frac{2(n-1)^2}{(n-2)^2} \sum_{a,b} |h_{ab} - \frac{H}{n-1} g_{ab}|^2 + \frac{n(n-1)}{2|\nabla f|^2 (n-2)^2}\langle \nabla\rho, \nabla f\rangle^2 \\
&\quad + \frac{(n-1)}{(n-2)^2}|\nabla^\Sigma \rho|^2 - \frac{n(n-1)}{2(n-2)^2}|\nabla\rho|^2. \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

Em seguida vamos utilizar a decomposição $\nabla\rho = (\nabla\rho)^{\Sigma} + (\nabla\rho)^{N}$, ou seja,

$$\begin{aligned}
\frac{n(n-1)}{2|\nabla f|^2(n-2)^2}\langle\nabla\rho,\nabla f\rangle^2 &= \frac{n(n-1)}{2(n-2)^2}\langle\nabla\rho,e_1\rangle^2\\
&= \frac{n(n-1)}{2(n-2)^2}(\langle(\nabla\rho)^{\Sigma}+(\nabla\rho)^{N},e_1\rangle^2)\\
&= \frac{n(n-1)}{2(n-2)^2}\langle(\nabla\rho)^{N},e_1\rangle^2)
\end{aligned}$$

Agora, pelo mesmo argumento, iremos decompor o termo $\frac{n(n-1)}{2(n-2)^2}|\nabla\rho|^2$ em parte tangente e parte normal, donde obtemos o seguinte

$$\frac{n(n-1)}{2(n-2)^2}|\nabla\rho|^2 = \frac{n(n-1)}{2(n-2)^2}|(\nabla\rho)^{N}|^2 + \frac{n(n-1)}{2(n-2)^2}|\nabla\rho^{\Sigma}|^2.$$

Agora, substituindo a igualdade acima em (2.2), temos que

$$\begin{aligned}
|fT|^2 &= |\nabla f|^4\frac{2(n-1)^2}{(n-2)^2}\sum_{a,b}|h_{ab}-\frac{H}{n-1}g_{ab}|^2 + \frac{n(n-1)}{2|\nabla f|^2(n-2)^2}\langle\nabla\rho,\nabla f\rangle^2 + \frac{(n-1)^2}{(n-2)^2}|\nabla^{\Sigma}\rho|^2\\
&\quad -\frac{n(n-1)}{2(n-2)^2}|\nabla\rho|^2\\
&= |\nabla f|^4\frac{2(n-1)^2}{(n-2)^2}\sum_{a,b}|h_{ab}-\frac{H}{n-1}g_{ab}|^2 + \frac{n(n-1)}{2(n-2)^2}|(\nabla\rho)^{N}|^2 + \frac{(n-1)^2}{(n-2)^2}|\nabla^{\Sigma}\rho|^2\\
&\quad -\frac{n(n-1)}{2(n-2)^2}|(\nabla\rho)^{N}|^2 - \frac{n(n-1)}{2(n-2)^2}|(\nabla\rho)^{\Sigma}|^2\\
&= |\nabla f|^4\frac{2(n-1)^2}{(n-2)^2}\sum_{a,b}|h_{ab}-\frac{H}{n-1}g_{ab}|^2 + \frac{(n-1)^2}{(n-2)^2}|\nabla^{\Sigma}\rho|^2 - \frac{n(n-1)}{2(n-2)^2}|\nabla\rho^{\Sigma}|^2\\
&= |\nabla f|^4\frac{2(n-1)^2}{(n-2)^2}\sum_{a,b}|h_{ab}-\frac{H}{n-1}g_{ab}|^2 + \frac{(n-1)}{2(n-2)}|\nabla^{\Sigma}\rho|^2
\end{aligned}$$

Logo concluímos o que foi enunciado no teorema e encontramos a seguinte equação,

$$|fT|^2 = \frac{2(n-1)^2}{(n-2)^2}|\nabla f|^4\sum_{a,b=2}^{n}|h_{ab}-\frac{H}{n-1}g_{ab}|^2 + \frac{(n-1)}{2(n-2)}|\nabla^{\Sigma}\rho|^2. \tag{2.3}$$

□

Agora no que segue, como consequência do Lema 3 iremos estudar algumas propriedades acerca dos conjuntos de nível com as métricas de Miao-Tam.

Proposição 7. *Seja* (M^n, g, f) *uma métrica crítica de Miao-Tam com* $T \equiv 0$. *Seja* c *um valor regular de* f *e seja* $\Sigma = \{p \in M; f(p) = c\}$ *um conjunto de nível de f. Considerando* $e_1 = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ *e escolha um referencial ortonormal* $\{e_2, ..., e_n\}$ *tangente ao nível* Σ. *Sobre essas condições afirmamos que:*

(a) A segunda forma fundamental h_{ab} *de* Σ *é dada por* $h_{ab} = \frac{H}{n-1} g_{ab}$.

(b) $R_{1a} = 0$ *para todo* $a \geqslant 2$ *e* e_1 *é um autovetor do Ric.*

(c) $|\nabla f|$ *é constante em* Σ.

(d) A curvatura média de Σ *é constante.*

(e) Em Σ*, o tensor de Ricci ou tem um único autovalor ou tem dois autovalores distintos com multiplicidade* 1 *e* $n-1$*. Ademais, o autovalor com multiplicidade* 1 *tem direção do* $|\nabla f|$.

(f) $R_{1abc} = 0$ *para todo* $a, b, c \in \{2, ..., n\}$.

Demonstração. O item (a) decorre diretamente da hipótese de que $T \equiv 0$ e o Lema 3, pois a soma de dois temos positivos sendo nula, obriga ambos serem nulos. Para demonstrarmos o item (b) vamos usar substancialmente que $T \equiv 0$, mais precisamente note que,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\nabla f|^2} T(e_i, \nabla f, \nabla f) &= T(e_i, e_1, e_1) \\
&= \frac{n-1}{n-2}(R_{i1}\nabla_1 f - R_{11}\nabla_i f) - \frac{R}{n-2}(g_{i1}\nabla_1 f - g_{11}\nabla_i f) \\
&\quad + \frac{1}{n-2}(g_{i1}R_{is}\nabla_s f - g_{11}R_{is}\nabla_s f).
\end{aligned}$$

Agora fazendo $i = a \geqslant 2$

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{n-1}{n-2}(R_{1a}\nabla_1 f) - \frac{1}{n-2} g_{11} R_{as} \nabla_s f \\
&= \frac{n-1}{n-2}(R_{1a}\nabla_1 f) - \frac{1}{n-2} Ric(\nabla f, e_a) \\
&= \frac{n-1}{n-2} R_{1a}|\nabla f| - \frac{1}{n-2}|\nabla f| R_{1a} \\
&= R_{1a}|\nabla f|.
\end{aligned}$$

Logo,

$$R_{1a} = 0.$$

O item(c) tem demonstração bem direta, pois

$$\begin{aligned}
\nabla_a |\nabla f|^2 &= \nabla_a \langle \nabla f, \nabla f\rangle \\
&= 2\langle \nabla_a \nabla f, \nabla f\rangle \\
&= 2Hessf(e_a, \nabla f) \\
&= 2(\Delta f + 1)g(e_a, \nabla f) + 2fRic(e_a, \nabla f) \\
&= 2fRic(e_a, \nabla f) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

A última igualdade é devida ao item (b). Para mostrar o item (d), considere a equação de Codazzi abaixo e tome o seu traço,

$$R_{1abc} = \nabla^{\Sigma}_{b} h_{ca} - \nabla^{\Sigma}_{b} h_{ba}, \tag{2.4}$$

para $a, b, c \in \{2, ..., n\}$. Daí,

$$R_{1b} = \nabla^{\Sigma}_{b} H - g_{ac} \nabla^{\Sigma}_{c} h_{ba}.$$

Do item (a), temos que $h_{ab} = \frac{H}{n-1} g_{ab}$. Portanto substituindo na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned}
R_{1b} &= \nabla^{\Sigma}_{b} H - g_{ac} \nabla^{\Sigma}_{c} h_{ba} \\
&= \nabla^{\Sigma}_{b} H - g_{ca} \frac{g_{ba}}{n-1} \nabla^{\Sigma}_{c} H \\
&= \nabla^{\Sigma}_{b} H - \frac{g_{bc}}{n-1} \nabla^{\Sigma}_{c} H \\
&= \nabla^{\Sigma}_{b} H - \frac{g_{bc}}{n-1} \langle \nabla H, e_c\rangle \\
&= \nabla^{\Sigma}_{b} H - \frac{1}{n-1} \nabla^{\Sigma}_{b} H \\
&= \frac{n-2}{n-1} \nabla^{\Sigma}_{b} H.
\end{aligned}$$

No entanto pelo item (a) juntamente com o item (c) temos que $R_{1b} = 0$. Logo, $\nabla H = 0$ em Σ o que implica que H é constante em Σ.

Para o item (e), sabendo o vetor e_1 é autovetor do Ricci, tome um referencial $\{e_1, ..., e_n\}$ que diagonaliza o Ric, isto é, daí temos que $Ric(e_k) = \lambda_k e_k$ para todo $k \in \{1, ..., n\}$.

Agora utilizamos que $T \equiv 0$ e tomamos o T_{a1b} para $ab \geqslant 2$, note que

$$\begin{aligned}
0 &= T_{a1b}\\
&= \frac{n-1}{n-2}(R_{ab}\nabla_1 f - R_{b1}\nabla_a f) - \frac{R}{n-2}(g_{ab}\nabla_1 f - g_{1b}\nabla_a f)\\
&\quad + \frac{1}{n-2}(g_{ab}R_{1s}\nabla_s f - g_{1b}R_{as}\nabla_s f)\\
&= \frac{n-1}{n-2}R_{ab}|\nabla f| - \frac{R}{n-2}g_{ab}|\nabla f| + \frac{R}{n-2}g_{1b}\nabla_a f\\
&\quad + \frac{1}{n-2}g_{ab}R_{1s}\nabla_s f - g_{1b}R_{as}\nabla_s f.\frac{|\nabla f|}{|\nabla f|}\\
&= \frac{n-1}{n-2}R_{ab}|\nabla f| - \frac{R}{n-2}g_{ab}|\nabla f| + \frac{R}{n-2}g_{1b}\langle\nabla f, e_a\rangle\\
&\quad + \frac{1}{n-2}g_{ab}R_{1s}\nabla_s f - g_{1b}R_{a1}|\nabla f|.
\end{aligned}$$

Logo,

$$0 = (n-1)R_{ab}|\nabla f| - \frac{R}{n-2}g_{ab}|\nabla f| + \frac{1}{n-2}g_{ab}\lambda_1|\nabla f|.$$

Daí, temos que $R_{ab} = \frac{R-\lambda_1}{n-1}g_{ab}$, de onde obtemos que todos os autovetores diferentes de e_1 são iguais, o que implica que os mesmos possuem multiplicidade $n-1$.

Para mostrarmos o item(f), iniciaremos pela equação de Codazzi para garantir que

$$R_{1abc} = \nabla^{\Sigma}_{b}h_{ca} - \nabla^{\Sigma}_{b}h_{ba}.$$

Pelo item (a) temos as seguintes igualdades

$$h_{ca} = \frac{H}{n-1}g_{ca}$$

e

$$h_{ba} = \frac{H}{n-1}g_{ba}.$$

Então, substituindo na equação obtida por Codazzi, temos que

$$R_{1abc} = \nabla^{\Sigma}_{b}\frac{H}{n-1}g_{ca} - \nabla^{\Sigma}_{b}\frac{H}{n-1}g_{ba}.$$

Utilizando que H é constante em Σ, derivadas se anulam. Portanto,

$$R_{1abc} = 0.$$

$\square$

Lema 4. *Seja* (M^n, g, f) *uma métrica crítica de Miao-Tam com* $T \equiv 0$. *Então* $C \equiv 0$, *logo dizemos que* (M^n, g) *tem o tensor de Weyl harmônico.*

Demonstração. Primeiramente usamos o Lema 2 juntamente com a hipótese de que o tensor $T_{ijk} \equiv 0$, para deduzimos

$$\begin{aligned} fC_{ijk} &= T_{ijk} + W_{ijkl}\nabla_l f \\ &= W_{ijkl}\nabla_l f. \end{aligned}$$

Por outro lado, como o tensor de Weyl é antissimétrico nas duas últimas entradas, temos que

$$fC_{ijk}\nabla_k f = W_{ijkl}\nabla_l f \nabla_k f = 0.$$

Agora, considere um ponto regular $p \in M$. Seja Σ um conjunto de nível da função associado ao ponto p. Escolhemos um referencial qualquer $(\theta^2, ..., \theta^n)$ para Σ e expresse em coordenadas locais $(f, \theta^2, ..., \theta^n)$ de tal forma que a métrica local é dada por

$$g = \frac{1}{|\nabla f|^2} df^2 + g_{ab}(f, \theta) d\theta^a d\theta^b.$$

Denotando por

$$\partial_f = \partial_1 = \frac{\nabla f}{|\nabla f|^2},$$

temos

$$\nabla_1 f = \langle \nabla f, \partial_1 \rangle = \langle \nabla f, \frac{\nabla f}{|\nabla f|^2} \rangle = 1$$

e

$$\nabla_a f = \langle \nabla f, \partial_a \rangle = |\nabla f|^2 \langle \partial_1, \partial_a \rangle = 0,$$

para todo a$\geqslant 2$. Como já sabemos que $fC_{ijk}\nabla_k f = 0$, é imediato que

$$fC_{ij1} = 0.$$

para todo $i, j = 1, \cdots, n$. Além disso, pela equação de Codazzi e pelos resultados encontrados na proposição anterior temos que,

$$R_{1abc} = \nabla_b^{\Sigma} h_{ac} - \nabla_c^{\Sigma} h_{ab} = 0. \tag{2.5}$$

Ao tomarmos o traço, obtemos

$$R_{1a} = 0.$$

Portanto, pela fórmula do tensor de Weyl obtemos a seguinte identidade,

$$\begin{aligned} W_{1abc} &= R_{1abc} - \frac{1}{n-1}(R_{1b}g_{ac} + R_{ac}g_{1b} - R_{1c}g_{ab} - R_{ab}g_{1c}) \\ &+ \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{ac}g_{1b} - g_{1c}g_{ab}). \\ &= R_{1abc}, \end{aligned}$$

ou seja, $W_{1abc} = 0$, por (2.5). A partir disso, por ser o traço ser representado por índices repetidos e o fato de que o tensor T é nulo junto do Lema 2, segue que

$$\begin{aligned} fC_{abc} &= W_{abcs}\nabla_s f \\ &= W_{abc1}\nabla_1 f \\ &= W_{abc1} \\ &= 0, \end{aligned}$$

para todo a,b,c $\geqslant 2$. Agora resta apenas mostrar que $fC_{1ab} = 0$ para todo a,b $\geqslant 2$. De fato vejamos primeiramente que

$$\begin{aligned} fC_{1ab} &= W_{1abcs}\nabla_s f \\ &= W_{1abi}g^{si}\nabla_s f \\ &= W_{1ab1}g^{11}\nabla_1 f \\ &= W_{1ab1}|\nabla f|^2 \\ &= -W_{1a1b}|\nabla f|^2 \\ &= -\frac{1}{|\nabla f|^2}W(\nabla f, \partial_a, \nabla f, \partial_b). \end{aligned}$$

Portanto, nos interessa descobrir o valor de $W(\nabla f, \partial_a, \nabla f, \partial_b)$. Para isso iremos desenvolver a expressão do tensor de Weyl adequando a estas entradas, logo temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\nabla f|^2}W(\nabla f, \partial_a, \nabla f, \partial_b) &= \frac{1}{|\nabla f|^2}R(\nabla f, \partial_a, \partial f, \partial_b) + \frac{R}{(n-1)(n-2)}g_{ab} \\ &\quad -\frac{1}{|\nabla f|^2(n-2)}(Ric(\nabla f, \nabla f)g_{ab} + R_{ab}). \end{aligned}$$

Diante disso, nos voltamos a analisar e calcular a segunda forma fundamental de Σ no referencial local $(f, \theta^2, ..., \theta^n)$ com o intuito de calcular $R(\nabla f, \partial_a, \partial f, \partial_b)$. Veja que a segunda forma é dada por,

$$\begin{aligned} h_{ab} &= \frac{1}{|\nabla f|}\langle \nabla f, \nabla_a \partial_b \rangle \\ &= \frac{1}{|\nabla f|}\langle \nabla f, \sum_k \Gamma_{ab}^k \partial_k \rangle \\ &= \frac{1}{|\nabla f|}(\langle \nabla f, \Gamma_{ab}^1 \partial_f \rangle + \langle \nabla f, \Gamma_{ab}^2 \partial_2 \rangle + \cdots + \langle \nabla f, \Gamma_{ab}^n \partial_n \rangle \\ &= \frac{1}{|\nabla f|}\langle \nabla f, \Gamma_{ab}^1 \partial_f \rangle \\ &= \frac{1}{|\nabla f|}\Gamma_{ab}^1. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Expressando os símbolos de Christoffel através dos coeficientes da primeira forma temos que

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{ab} &= \frac{1}{2}\sum_j g^{1j}(\partial_a g_{bj} + \partial_b g_{ja} - \partial_j g_{ab}) \\
&= \frac{1}{2} g^{11}(\partial_a g_{b1} + \partial_b g_{1a} - \partial_f g_{ab}) \\
&= -\frac{1}{2}|\nabla f|^2 \partial_f(g_{ab}) \\
&= -\frac{1}{2}\nabla f(g_{ab}),
\end{aligned}$$

e voltando para a igualdade (2.6)

$$h_{ab} = -\frac{\nabla f}{2|\nabla f|}(g_{ab}).$$

Pela Proposição 1, temos que $|\nabla f|$ é constante em Σ. Portanto,

$$\begin{aligned}
[\partial_a, \nabla f] &= \nabla_{\nabla f}\partial_a - \nabla_{\partial_a}\nabla f \\
&= |\nabla f|^2(\nabla_{\partial_f}\partial_a - \nabla_{\partial_a}\partial_f) \\
&= |\nabla f|^2(\sum_k (\Gamma^k_{1a} - \Gamma^k_{a1})\partial_k) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Em seguida, iremos calcular as projeções de $\nabla_{\frac{\nabla f}{|\nabla f|}}\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ no referencial de Σ. Obviamente temos,

$$1 = \langle \nabla f, \partial_f \rangle = \langle \nabla f, \frac{\nabla f}{|\nabla f|^2} \rangle,$$

e como consequência, derivando em ambos os membros na direção de $\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$, daí

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla_{\frac{\nabla f}{|\nabla f|}}\langle \nabla f, \frac{\nabla f}{|\nabla f|^2}\rangle \\
&= \langle \nabla_{\frac{\nabla f}{|\nabla f|}}\frac{\nabla f}{|\nabla f|}, \partial_f \rangle.
\end{aligned}$$

Considerando as outras direções tangentes, temos $0 = \langle \nabla f, \partial_a \rangle$, derivando em ambos os membros na direção de $\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$. Daí, seguirá que

$$\begin{aligned}
0 = \nabla_{\frac{\nabla f}{|\nabla f|}}\langle \nabla f, \partial_a \rangle &= \langle \nabla_{\frac{\nabla f}{|\nabla f|}}\frac{\nabla f}{|\nabla f|}, \partial_a \rangle \\
&- \langle \nabla_{\frac{\nabla f}{|\nabla f|}}\partial_a, \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \rangle \\
&= -\langle \nabla f, \nabla_{\partial_f}\partial_a \rangle \\
&= |\nabla f|^2 \langle \partial f, \nabla_{\partial_a}\partial_f \rangle \\
&= \frac{|\nabla f|^2}{2}\partial_a(\langle e_1, e_1 \rangle).
\end{aligned}$$

Para calcularmos $W(\nabla f, \partial_a, \nabla f, \partial_b)$ precisamos obter $\frac{1}{|\nabla f|^2}R(\nabla f, \partial_a, \nabla f, \partial_b)$ o qual é dado por

$$\frac{1}{|\nabla f|^2}R(\nabla f, \partial_a, \nabla f, \partial_b) \;=\; -\frac{1}{|\nabla f|^2}\langle \nabla_a \nabla_{\nabla f}\partial_b - \nabla_{\nabla f}\nabla_a\partial_b + \nabla_{[\nabla f, \partial_a]}\partial_b, \nabla f\rangle.$$

Como concluímos anteriormente que $[\nabla f, \partial_a] = 0$, simplificamos a expressão acima por

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\nabla f|^2}R(\nabla f, \partial_a, \nabla f, \partial_b) &= -\frac{1}{|\nabla f|^2}\langle \nabla_a \nabla_{\nabla f}\partial_b - \nabla_{\nabla f}\nabla_a\partial_b + \nabla_{[\nabla f, \partial_a]}\partial_b, \nabla f\rangle \\ &= -\frac{1}{|\nabla f|^2}\langle \nabla_a \nabla_{\nabla f}\partial_b - \nabla_{\nabla f}\nabla_a\partial_b, \nabla f\rangle \\ &= \frac{1}{|\nabla f|^2}\langle \nabla_{\nabla f}(\nabla_a\partial_b), \nabla f\rangle - \frac{1}{|\nabla f|}\langle \nabla_a \nabla_{\frac{\nabla f}{|\nabla f|}}\partial_b, \nabla f\rangle.\end{aligned}$$

Utilizando que $[\nabla f, \partial_b] = 0$ e $\nabla_{\frac{\nabla f}{|\nabla f|}}\frac{\nabla f}{|\nabla f|} = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\nabla f|^2}R(\nabla f, \partial_a, \nabla f, \partial_b) &= \frac{1}{|\nabla f|^2}\langle \nabla_{\nabla f}(\nabla_a\partial_b), \nabla f\rangle - \frac{1}{|\nabla f|}\langle \nabla_a \nabla_{\frac{\nabla f}{|\nabla f|}}\partial_b, \nabla f\rangle \\ &= \frac{\nabla f}{|\nabla f|}(h_{ab}) - \frac{1}{|\nabla f|^2}\langle \nabla_b \nabla f, \nabla_a \nabla f\rangle \\ &= \frac{\nabla f}{|\nabla f|}(h_{ab}) - \frac{1}{|\nabla f|^2}\langle \nabla_b \nabla f, \sum_c \langle \nabla_a \nabla f, \partial_c\rangle\rangle \\ &= \frac{\nabla f}{|\nabla f|}(h_{ab}) - \frac{1}{|\nabla f|^2}\sum_c \langle \nabla_b \nabla f, \partial_c\rangle\langle \nabla_a \nabla f, \partial_c\rangle \\ &= \frac{\nabla f}{|\nabla f|}(h_{ab}) - h_{ac}h^c_b.\end{aligned}$$

Disto, pela Proposição 7, deduzimos que,

$$\frac{1}{|\nabla f|^2}R(\nabla f, \partial_a, \nabla f, \partial_b) = \frac{\nabla f}{|\nabla f|(n-1)}Hg_{ab} - \frac{H^2}{(n-1)^2}g_{ab}.$$

Tomando o traço da equação acima é imediato que

$$\frac{1}{|\nabla f|^2}R(\nabla f, \nabla f) = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}H - \frac{H^2}{(n-1)}.$$

Logo podemos escrever a curvatura de Riemann por

$$R(\nabla f, \partial_a, \nabla f, \partial_b) = \frac{Ric(\nabla f, \nabla f)}{n-1}g_{ab}.$$

Pela Proposição 7, temos os autovalores e autovetores de Ricci,assim podemos escrever,

$$\frac{1}{|\nabla f|^2}Ric(\nabla f, \nabla f) = \lambda$$

e

$$Ric(\partial_a, \partial_b) = \mu g_{ab}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
fC_{1ab} &= -\frac{1}{|\nabla f|^2}W(\nabla f, \partial_a, \nabla f, \partial_b) \\
&= -\frac{1}{|\nabla f|}R(\nabla f, \partial_a, \nabla f, \partial_b) + \frac{1}{|\nabla f|^2(n-2)}(Ric(\nabla f, \nabla f)g_{ab} + R_{ab}g(\nabla f, \nabla f) \\
&\quad -Ric(\nabla f, \partial_b)g(\partial_a, \nabla f) - R(\partial_a, \nabla f)g(\nabla f, \partial_b) \\
&\quad -\frac{R}{|\nabla f|^2(n-1)(n-2)}(g_{ab}g(\nabla f, \nabla f) - g(\nabla f, \partial_b)g(\nabla f, \partial_a)) \\
&= -\frac{Ric(\nabla f, \nabla f)}{|\nabla f|^2(n-1)}g_{ab} + \frac{1}{|\nabla f|^2(n-2)}Ric(\nabla f, \nabla f)g_{ab} + \frac{R_{ab}}{n-2} - \frac{R}{(n-1)(n-2)}g_{ab} \\
&= -\frac{\lambda}{n-1}g_{ab} + \frac{\lambda}{n-2}g_{ab} + \frac{\mu}{n-2}g_{ab} - \frac{R_{11} + R_{22} + \cdots + R_{nn}}{(n-1)(n-2)}g_{ab} \\
&= -\frac{\lambda}{n-1}g_{ab} + \frac{\lambda}{n-2}g_{ab} + \frac{\mu}{n-2}g_{ab} - \frac{\lambda + (n-1)\mu}{(n-1)(n-2)}g_{ab} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Portanto, temos que $fC_{ijk} = 0$ em $p \in M$ tal que p é ponto regular de f. Ademais, utilizamos o Lema 2 para concluir que $fC_{ijk} \equiv 0$ em M^n. Usando isso obtemos que $C_{ijk} = 0$ em $M \setminus \partial M$ e o resultado do lema segue a partir da continuidade do tensor de Cotton. □

Para finalizar esta seção iremos apresentar um resultado fundamental sobre a integral de uma métrica de Miao-Tam.

Lema 5. *Seja* (M^n, g, f) *uma métrica crítica de Miao-Tam. Então,*

$$\int_M f^2 B(\nabla f, \nabla f) dM_g = -\frac{1}{2(n-1)}\int_M f^2|T|^2$$

Demonstração. Como foi definido anteriormente podemos escrever o tensor de Bach por

$$B_{ij} = \frac{1}{n-3}\nabla_k\nabla_l W_{ijkl} + \frac{1}{n-2}R_{kl}W_{ijkl}.$$

Sabendo que em dimensão maior que 3,

$$C_{ijk} = -\frac{(n-2)}{(n-3)}\nabla_l W_{ijkl},$$

tomamos a derivada em ambos os lados para obter

$$\frac{1}{n-3}\nabla_k\nabla_l W_{ijkl} = -\frac{1}{n-2}\nabla_k C_{ijk}.$$

Portanto, unindo essas equações temos uma nova fórmula para o tensor de Bach que é dada por,

$$B_{ij} = \frac{1}{n-2}(\nabla_k C_{kji} + R_{kl}W_{ikjl}).$$

Consequentemente

$$(n-2)f^2B(\nabla f,\nabla f) = f^2\nabla_k C_{kji}\nabla_i f\nabla_j f + R_{kl}W_{ikjl}f^2\nabla_i f\nabla_j f. \tag{2.7}$$

Em seguida, utilizando as propriedades da cadeia e do produto da conexão Riemanniana, temos a seguinte igualdade

$$\begin{aligned}\nabla_k(f^2C_{kij}\nabla_i f\nabla_j f) &= f^2\nabla_k(C_{kij})\nabla_i f\nabla_j f + f^2C_{kij}\nabla_k\nabla_i f\nabla_j f\\ &\quad + f^2C_{kij}\nabla_i f\nabla_k\nabla_j f + 2f\nabla_k fC_{kij}\nabla_i f\nabla_j f.\end{aligned}$$

Vemos que alguns termos se anulam devido as propriedades do tensor Cotton, mais precisamente a permutação de índices e o traço das três entradas em ∇f. Logo

$$\nabla_k(f^2C_{kij}\nabla_i f\nabla_j f) = f^2\nabla_k C_{kij}\nabla_i f\nabla_j f + f^2C_{kij}\nabla_i f\nabla_k\nabla_j f.$$

Assim podemos reescrever (2.7) como

$$(n-2)f^2B(\nabla f,\nabla f) = -\nabla_k\left(f^2C_{kij}\nabla_i f\nabla_j f\right) - f^2C_{kij}\nabla_i f\nabla_k\nabla_j f + R_{kl}W_{ikjl}f^2\nabla_i f\nabla_j f.$$

Aplicando a integral, temos que a primeira nula pelo teorema da divergência, e utilizaremos a Equação (1.2) para simplificar o segundo membro da igualdade. Assim,

$$\begin{aligned}\int_M (n-2)f^2B(\nabla f,\nabla f) &= \int_M -f^2C_{kij}\nabla_i f\nabla_k\nabla_j f + R_{kl}W_{ikjl}f^2\nabla_i f\nabla_j f\\ &= -\int_M f^2C_{kij}\nabla_i f(fR_{kj} + g_{kj}(1+\Delta f)) + R_{kl}W_{ikjl}f^2\nabla_i f\nabla_j f\\ &= \int_M f^3C_{kij}\nabla_i fR_{kj} + \int_M f^2C_{kij}\nabla_i fg_{kj}(1+\Delta f) + R_{kl}W_{ikjl}f^2\nabla_i f\nabla_j f\\ &= \int_M f^2(fC_{kij})\nabla_i fR_{kj} + R_{kl}W_{ikjl}f^2\nabla_i f\nabla_j f.\end{aligned}$$

Por outro lado, usando o Lema 2 para desenvolver a equação acima, deduzimos que

$$\begin{aligned}\int_M (n-2)f^2B(\nabla f,\nabla f) &= \int_M f^2(fC_{kij})\nabla_i fR_{kj} + R_{kl}W_{ikjl}f^2\nabla_i f\nabla_j f\\ &= \int_M f^2(T_{kij} + W_{kijs}\nabla_s f)\nabla_i fR_{kj} + R_{kl}W_{ikjl}f^2\nabla_i f\nabla_j f\\ &= \int_M f^2T_{kij}\nabla_i fR_{kj} + \int_M f^2W_{kijs}\nabla_s f\nabla_i fR_{kj} + \int_M R_{kl}W_{ikjl}f^2\nabla_i f\nabla_j f.\end{aligned}$$

Sabendo que os índices repetidos indicam um traço, nos dois últimos fatores acima temos o traço do tensor Weyl em duas entradas que, de acordo com suas propriedades, se anula. Portanto,

$$\int_M (n-2)f^2B(\nabla f,\nabla f) = \int_M f^2T_{kij}\nabla_i fR_{kj}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}\int_M (n-2)f^2B(\nabla f,\nabla f) &= \int_M f^2T_{ijk}\nabla_j fR_{ik}\\ &= \frac{1}{2}\int_M f^2T_{ijk}\nabla_j fR_{ik} - f^2T_{ijk}\nabla_i fR_{jk}.\end{aligned}$$

Pela propriedade de anticomutatividade e o Lema 1, temos que

$$\begin{aligned}\int_M (n-2)f^2B(\nabla f,\nabla f) &= \frac{1}{2}\int_M f^2T_{ijk}\nabla_j fR_{ik} - f^2T_{ijk}\nabla_i fR_{jk}\\ &= \frac{1}{2}\int_M f^2T_{ijk}\left(\nabla_j fR_{ik} - \nabla_i fR_{jk}\right)\\ &= \frac{n-2}{n-1}\int_M f^2|T_{ijk}|^2\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_M f^2B(\nabla f,\nabla f) = \frac{1}{2(n-1)}\int_M f^2|T_{ijk}|^2.$$

$\square$

Capítulo 3

Prova dos Resultados

3.1 Prova do Teorema 2

Teorema 4. *Seja* (M^4, f, g) *uma métrica crítica de Miao-Tam sobre uma variedade simplesmente conexa, compacta e bordo isométrico a uma esfera padrão* $\mathbb{S}^3$*. Então,* (M^4, f, g) *é isométrica a uma bola geodésica em um espaço forma simplesmente conexo* $\mathbb{R}^4, \mathbb{H}^4$ *ou* $\mathbb{S}^4$*, provido que*

$$\int_M f^2\, B\,(\nabla f,\ \nabla f)\ dM_g\ \geqslant 0.$$

Demonstração. Primeiramente, temos que M^4 satisfaz $\int_M f^2 B(\nabla f, \nabla f) dM_g \geqslant 0$, pelo Lema 5 temos que

$$\int_M f^2 B(\nabla f, \nabla f) = -\frac{1}{2(n-1)} \int_M f^2 |T_{ijk}|^2 \geqslant 0.$$

Portanto, é direto que

$$T_{ijk} = 0.$$

De posse disto, utilizando o Lema 4, temos a nulidade do tensor de Cotton. Assim a equação obtida pelo Lema 2, se torna

$$\begin{aligned} W_{ijkl}\nabla_l f &= fC_{ijk} - T_{ijk} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Agora, considere um ponto $p \in M^4$, ponto regular da função potencial f e escolha um referencial ortonormal em $p, \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, tal que $e_1 = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$. Então,

$$W_{ijk1} = 0, \tag{3.1}$$

para todo $i, j, k = 1, 2, 3, 4$.

Mostraremos que $W_{ijkl} = 0$ sempre que $\nabla_p f \neq 0$. Note que o tensor Weyl tem traço nulo em todo par de índices, logo para analisarmos a nulidade do tensor Weyl W_{ijkl} com todos os índices diferentes, devemos recair sobre o caso $W_{ijk1} = 0$.

Em seguida iremos analisar os casos nos quais esses índices podem ser repetidos. Primeiramente relembraremos as propriedades do tensor Weyl:

1. $W_{iikl} = 0$.
2. $W_{ijkl} = -W_{jikl} = W_{jilk} = -W_{ijlk}$.
3. $W_{ijkl} = W_{klij}$.
4. $W_{i1j1} + W_{i2j2} + W_{i3j3} + W_{i4j4} = 0$,

onde $i, j, k, l \in \{1, 2, 3, 4\}$.

De posse dessas propriedades, devemos calcular $W_{2ijk}, W_{3ijk}, W_{4ijk}$. Iniciaremos pelo W_{2ijk}.

É imediato que W_{21jk} e W_{22jk} são nulos. Em seguida, temos W_{231k} que se anula pela propriedade (2). Assim vejamos as possibilidades de W_{232k}, $W_{2321} = 0$ por (3.1) e $W_{2322} = 0$ pela propriedade (1) acima. Assim faltam as seguintes possibilidades W_{2323} e W_{2324}. Note que,

$$\begin{aligned} W_{2121} &+ W_{2222} + W_{2323} + W_{2424} = 0 \\ W_{2323} &= -W_{2424}. \end{aligned}$$

Portanto, usaremos novamente esta propriedade do traço para encontrar

$$W_{3131} + W_{3232} + W_{3333} + W_{3434} = 0,$$

o que implica,

$$W_{3232} = -W_{3434}. \tag{3.2}$$

E pela propriedade (2) temos que $W_{2323} = W_{3232}$ e $W_{2424} = W_{4242}$. Utilizando novamente a propriedade do traço temos

$$W_{4141} + W_{4242} + W_{4343} + W_{4444} = 0,$$

ou seja,

$$W_{4343} = -W_{4242}. \tag{3.3}$$

Comparando as expressões (3.2) e (3.3) podemos deduzir que

$$W_{2424} = -W_{4343} = W_{3434} = -W_{3232} = W_{2323}.$$

Logo, $W_{2323} = W_{2424} = 0$. Para encontrarmos W_{2324}, basta observar que

$$W_{1314} + W_{2324} + W_{3343} + W_{4344} = 0,$$

de onde obtemos

$$W_{2324} = 0.$$

Vejamos as possibilidades W_{233k} e W_{234k}. É direto que $W_{2331} = 0$ e $W_{2332} = -W_{2323} = 0$, $W_{2333} = 0$ pela propriedade (1) e $W_{2334} = -W_{2343}$ que se anula devido a

$$W_{2141} + W_{2242} + W_{2343} + W_{2444} = 0.$$

Adiante, para encontramos as possibilidades de W_{234k}, é direto que $W_{2341} = W_{2344} = 0$ e $W_{2342} = W_{2324} = 0$, restando apenas o W_{2343} que é nulo por $W_{2343} = -W_{2334} = 0$. Para concluirmos, devemos ainda mostrar a nulidade de todas as possibilidades de W_{24ij},é direto que $W_{241j} = 0$, para W_{242j} temos $W_{2421} = 0$, $W_{2422} = 0$, $W_{2423} = -W_{2324} = 0$ e $W_{2424} = W_{2323} = 0$. Já para W_{243j}, temos $W_{2431} = 0$, $W_{2432} = -W_{2423} = 0$,$W_{2433} = 0$ e W_{2434} que se anula por

$$W_{2131} + W_{2232} + W_{2333} + W_{2434} = 0.$$

Finalizando, olhamos para as possíveis combinações de índices de W_{244j}, que são $W_{2441} = 0$, $W_{2442} = -W_{2424} = 0$, $W_{2444} = 0$ e W_{2443} que se anula por $W_{2443} = -W_{2434} = 0$. Assim, concluímos todas as possibilidades para W_{2ijk}.

Partindo agora para a análise de W_{3ijk}, primeiramente é direto que $W_{31jk} = W_{jk31} = 0$ e como $W_{32ij} = -W_{23ij} = 0$, já o W_{33jk} se anula pela propriedade (1) citada acima. Restando apenas calcularmos as possibilidades de W_{34ij}, iniciamos mostrando que $W_{341k} = -W_{34k1} = 0$. Para as possibilidades de W_{342k}, temos que $W_{3421} = 0$ e $W_{3422} = 0$ por (3.1) e a propriedade (1) respectivamente. Já W_{3423} obtemos a nulidade por

$$W_{3423} = W_{2334} = 0.$$

E,

$$W_{3424} = W_{2434} = 0.$$

A seguir vejamos as possibilidades de W_{343j} que são, $W_{3431} = 0$, $W_{3432} = -W_{2334} = 0$, $W_{3433} = 0$ e W_{3434} que se anula pela equação,

$$W_{3131} + W_{3232} + W_{3333} + W_{3434} = 0.$$

Desde que todos os termos que são nulos exceto o W_{3434} e pela igualdade obtemos que ele também é nulo.

Para finalizar a análise de índices do tensor Weyl devemos calcular W_{344k}, que possui as seguintes possibilidades $W_{3441} = 0$,$W_{3442} = -W_{2434} = 0$,$W_{3444} = 0$ e $W_{3443} = -W_{3434}$ e para esta última possibilidade temos o seguinte

$$W_{3131} + W_{3232} + W_{3333} + W_{3434} = 0.$$

Na qual já obtemos todos os termos se anulam menos o W_{3434} que pela igualdade se anula. Portanto, obtemos a nulidade de W_{3ijk} para todos $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Por último, nos resta apenas verificar a única possibilidade de W_{4ijk} que é W_{4444} que se anula pela propriedade (1), e todas as outras possibilidades ja foram calculadas anteriormente acima nas combinações dos índices anteriores. Então, concluímos que $W = 0$.

Ademais, utilizando um referencial de coordenadas adequado, podemos concluir através do estudo feito em [10] que f e g são analíticas, por isso f não se anula em nenhum conjunto aberto não-vazio de M^4, e, portanto, os pontos regulares são densos em M^4. Logo, segue que M^4 é conformemente planos e assim podemos usar o Teorema 1 e concluir o que (M^4, g) é isométrico a uma bola geodésica em um espaço forma simplesmente conexo $\mathbb{R}^4, \mathbb{H}^4$ ou $\mathbb{S}^4$. □

3.2 Prova do Teorema 3

Teorema 5. *Seja* (M^3, f, g) *uma métrica crítica de Miao-Tam sobre uma variedade simplesmente conexa, compacta e bordo isométrico a uma esfera padrão* $\mathbb{S}^2$. *Se* $\mathrm{div}B(\nabla f) = 0$ *em M onde* B *é o tensor de Bach, então* (M^3, f, g) *é isométrica a uma bola geodésica em um espaço forma simplesmente conexo* $\mathbb{R}^3, \mathbb{H}^3$ *ou* $\mathbb{S}^3$.

Demonstração. Iniciaremos denotando o tensor de Cotton através do tensor de Schouten, dado por

$$C_{ijk} = \nabla_i A_{jk} - \nabla_j A_{ik}.$$

Pois, por definição temos que

$$A_{ij} = \frac{1}{n-2}(R_{ij} - \frac{R}{2(n-1)}g_{ij}).$$

Logo,

$$A_{jk} = \frac{1}{n-2}(R_{jk} - \frac{R}{2(n-1)}g_{jk}).$$

Que ao derivarmos, obtemos

$$\nabla_i A_{jk} = \frac{1}{n-2}\Big(\nabla_i R_{jk} - \frac{\nabla_i R}{2(n-1)}g_{jk}\Big).$$

Assim fazendo uma conta análoga para o $\nabla_j A_{ik}$, mostramos o afirmado.

Portanto nos voltamos a calcular o divergente do Bach em ∇f, temos que

$$\begin{aligned}
\nabla_i B_{ij} &= \nabla_i \nabla_k C_{ijk} \\
&= \nabla_i \nabla_k (\nabla_i A_{jk} - \nabla_j A_{ik}) \\
&= \nabla_i \nabla_k \nabla_i A_{jk} - \nabla_i \nabla_k \nabla_j A_{ik}.
\end{aligned}$$

Pela identidade de Ricci, podemos simplicar a equação acima por

$$\begin{aligned}
\nabla_i B_{ij} &= -R_{il}\nabla_l A_{ij} + R_{kl}\nabla_k A_{lj} + R_{ijkl}\nabla_k A_{il} \\
&= R_{ijkl}\nabla_k A_{il}. \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

Como estamos em dimensão 3, usaremos que o tensor de Weyl é nulo. Assim unindo a (3.4) com a definição em (1.3), obtemos que

$$\begin{aligned}
\nabla_i B_{ij} &= R_{ijkl}\nabla_k A_{il} \\
&= A_{ik}g_{jl}\nabla_k A_{il} + A_{jl}g_{ik}\nabla_k A_{il} \\
&\quad -A_{il}g_{jk}\nabla_k A_{il} - A_{jk}g_{il}\nabla_k A_{il} + A_{ik}\nabla_k A_{ij} \\
&\quad +A_{jl}\nabla_i A_{il} - A_{il}\nabla_j A_{il} - A_{jl}g_{il}\nabla_k A_{il} \\
&= A_{ik}C_{kji} + A_{ik}\nabla_j A_{ki} + A_{jl}\nabla_i il - A_{il}\nabla_j A_{il} \\
&\quad -A_{jk}g_{il}C_{kil} - A_{jk}g_{il}\nabla_i A_{kl} \\
&= R_{ik}C_{kji} + A_{jl}\nabla_i A_{il} - A_{jk}\nabla_l A_{kl} \\
&= -R_{ik}C_{jki}.
\end{aligned}$$

Portanto, aplicando ∇f acima, concluímos que

$$\begin{aligned}
(\mathrm{div} B)(\nabla f) &= \nabla_i B_{ij} \nabla_j f \\
&= -C_{jki} R_{ik} \nabla_j f \\
&= -\frac{1}{2}(C_{jki} R_{ik} \nabla_j f + C_{kji} R_{ij} \nabla_k f)) \\
&= \frac{1}{2} C_{kji}(R_{ik} \nabla_j f - R_{ij} \nabla_k f) \\
&= \frac{1}{4} C_{kji} T_{kji}.
\end{aligned}$$

Nesta última igualdade usamos o Lema 1. Por fim, utilizando que o tensor de Weyl é nulo usamos o Lema 2 para obter

$$(\mathrm{div}\, B)(\nabla f) = \frac{1}{4}|C|^2.$$

Como estamos supondo M com $(\mathrm{div} B)(\nabla f) = 0$ temos que o tensor de Cotton se anula em toda M, ou seja, M é conformemente plana, logo ao aplicarmos o Teorema 1 obtemos o resultado desejado. $\square$

Bibliografia

[1] Atiyah, M., Manton, N., Schroers, B.: Geometric Models of Matter. arXiv:1108.5151[hep-th], 2011.

[2] Atiyah,M., Hitchin,M., Singer, I.: Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry. Proc. Royal Soc. Lond. 362, 425–461, 1978.

[3] Bach, R.: Zur Weylschen Relativitätstheorie und der Weylschen Erweiterung des Krümmungstensorbegriffs. Math. Z. 9, 110–135, 1921.

[4] Barros, A., Diógenes, R. & Ribeiro, E. Bach-Flat Critical Metrics of the Volume Functional on 4-Dimensional Manifolds with Boundary. J Geom Anal 25, 2698–2715, 2015.

[5] Besse, A.: Einstein Manifolds. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1987.

[6] do Carmo, M. P. - *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides - IMPA, 2005.

[7] Cao, H.-D., Chen, Q.: On locally conformally flat gradient steady Ricci solitons. Trans. Am. Math. Soc. 364, 2377–2391, 2012.

[8] Cao, H.-D., Chen, Q.: On Bach-flat gradient shrinking Ricci solitons. Duke Math. J. 162, 1149–1169, 2013.

[9] Cao, H.-D., Catino, G., Chen, Q., Mantegazza, C.,Mazzieri, L.: Bach-flat gradient steady Ricci solitons. Calc. Var. 49, 125–138, 2014.

[10] Corvino, J.: Scalar curvature deformations and a gluing construction for the Einstein constraint equations. Comm. Math. Phys. 214, 137–189, 2000.

[11] Corvino, J., Eichmair, M. and Miao, P.: Deformation of scalar curvature and volume. Mathematische Annalen 357, 551–584, 2013.

[12] Fan, X.-Q., Shi, Y.-G. and Tam, L.-F.: Large-sphere and small-sphere limits of the Brown-York mass. Comm. Anal. Geom. 17, 37–72, 2009.

[13] Miao, P.; Tam, L.-F. On the volume functional of compact manifolds with boundary with constant scalar curvature. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, v. 36, n. 2, p. 141–171, 2009.

[14] Miao, P., Tam, L.-F.: On the volume functional of compact manifolds with boundary with constant scalar curvature. Calc. Var. PDE. 36, 141–171, 2009.

[15] Miao, P., Tam, L.-F.: Einstein and conformally flat critical metrics of the volume functional. Trans. Am. Math. Soc. 363, 2907–2937, 2011.

[16] Queiroz, C.: Sóliton de Ricci contrátil com integral pinçada. 2020. 87 f. Dissertação de Mestrado - Centro de Ciência, Universidade Federal do Piauí, UFPI, 2020.

[17] Scorpan, A.: TheWildWorld of 4-Manifolds. American Mathematical Society, Providence, RI, 1974.

[18] Viaclovsky, J.: Course Web Page: Math 865, Advanced Topics in Geometry, 2011. Fall, Topics course in Riemannian Geometry.