Universidade Federal do Piauí

Centro de Ciências da Natureza

Pós-Graduação em Matemática

Mestrado em Matemática

Unicidade de hipersuperfície completa tipo-espaço imersa em um espaço produto Lorentziano

João Victor de Sousa Carvalho

Teresina - 2022

João Victor de Sousa Carvalho

Dissertação de Mestrado:

Unicidade de hipersuperfície completa tipo-espaço imersa em um espaço produto Lorentziano.

Dissertação submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Halyson Irene Baltazar

Teresina - 2022

Cópia da folha de rosto assinada pelos membros da banca examinadora.

Ficha catalográfica editada pela biblioteca setorial do CCN.

Carvalho, J.V

Unicidade de hipersuperfície completa tipo-espaço imersa em um espaço produto Lorentziano.

João Victor de Sousa Carvalho– Teresina: 2022.

Orientador: Prof. Dr. Halyson Irene Baltazar.

1. Área de Concentração :Geometria diferencial

CDD

Agradecimentos

Agradeço a minha família pelo apoio durante meus anos de estudos.

Agradeço aos amigos e colegas da UESPI e UFPI pelos momentos de aprendizagem.

Aos professores da graduação em matemática da UESPI e da Pós-graduação da UFPI, em especial ao professor Dr. Halyson Irene Baltazar pelas orientações e paciência durante esse período.

Agradeço CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho de dissertação estabeleceremos resultados sobre hipersuperfícies tipo-espaço imersas em um produto Lorentziano $-\mathbb{R} \times M^n$, cuja fibra tem curvatura seccional limitada inferiormente. A abordagem será baseada em alguns controles sobre a norma do gradiente da função altura, hipóteses de rigidez e o Princípio do Máximo Generalizado de Omori-Yau, podendo assim concluir que uma tal hipersuperfície é uma fatia do espaço produto. Esta dissertação foi baseada no artigo Generalized maximum principles and the unicity of complete spacelike hypersurface immersed in Lorentzian product space, por De Lima e Lima Jr [8].

Abstract

In this dissertation we will establish results on space-like hypersurfaces immersed in a Lorentzian product $-\mathbb{R} \times \mathsf{M}^n$, whose fiber has sectional curvature bounded from below. The approach will be based on some controls on the norm of the gradiente of the height function, rigidity hypotheses and the Omori-Yau Generalized Maximum Principle, thus being able to conclude that such a hypersurface is a slice of the product space. This work was based on the article Generalized Maximum Principles and the Unicity of Complete Spacelike Hypersurface Immersed in Lorentzian Product Space, by De Lima e Lima Jr [8].

Sumário

Introdução

Em 1915, S. N. Bernstein provou que os únicos gráficos inteiros e mínimos do espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ são os planos. Desde então, o estudo de tópicos de pesquisa que buscaram possíveis extensões para esse resultado se intensificou. Posteriormente foi admitida uma extensão natural para o espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^3$, como mostra Calabi [7]. ..De fato, as únicas superfícies tipo-espaço completas máxima, no espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^3$ são os planos tipo-espaço. Esse resultado ficou conhecido como teorema de Calabi-Bernstein e adiante foi provado por Cheng e Yau [21] sua validade para qualquer n.

Mais recentemente, H. Rosenberg [14] mostrou que todo gráfico inteiro e mínimo no produto $\mathbb{R} \times M^2$ é totalmente geodésico, desde que M^2 seja uma superfície completa com curvatura Gaussiana não negativa. Além disso, Albujer e Alías [3] provaram que qualquer superfície máxima completa em $\mathbb{R} \times M^2$ deve ser totalmente geodésico, e adicionando hipóteses sobre a curvatura média, conseguiram concluir que a imersão é um slice, ou seja, uma fatia do espaço produto.

Em [10], De Lima, Lima Júnior e Parente concluíram que hipersuperfícies completas imersas em um produto Riemanniano, cuja fibra tem curvatura seccional limitada inferiormente e sob condições de controle na função suporte e na norma do gradiente da função altura, são slices.

Ao longo deste trabalho, consideramos o ambiente Lorentziano como sendo o produto $-\mathbb{R} \times M^n$, onde M^n é uma variedade Riemanniana de dimensão n. No Capítulo 1 apresentaremos as definições necessárias para construção de nossos resultados e enunciaremos dois lemas devido a Yau, S.T. [20] e a Yau, S.T., Cheng, S.T. [21], respectivamente.

No Capítulo 2 são apresentados conceitos e equações estruturais de uma hipersuperfície $\psi : \Sigma^n \longrightarrow -\mathbb{R} \times M^n$ imersa em um produto Lorentziano $-\mathbb{R} \times M^n$ e resultados como os seguintes, que caracterizam o laplaciano da função suporte e de limitação da curvatura de Ricci da hipersuperfície:

Lema 0.1. *Se* $\psi : \Sigma^n \longrightarrow -\mathbb{R} \times M^n$ *é uma imersão isométrica tipo-espaço com curvatura média constante, então o laplaciano da função suporte é dado por*

$$\Delta\langle N, \partial_t\rangle = (\mathrm{Ric}_M(N^*, N^*) + |A|^2)\langle N, \partial_t\rangle,$$

onde Ric_M *denota a curvatura de Ricci de* M*,* N^* *é a projeção do vetor normal unitário* N *sobre a fibra* M^n *e* $|A|$ *é a norma de Hilbert-Schmidt do operador forma* A*.*

Lema 0.2. *Seja* $\psi : \Sigma^n \longrightarrow -\mathbb{R} \times M^n$ *uma hipersuperfície tipo-espaço imersa em um produto lorentziano* $-\mathbb{R} \times M^n$*, cuja curvatura seccional* k_M *da fibra* M^n *é tal que*

$$-k \leqslant k_M \leqslant 0,$$

para alguma constante positiva k*. Então, para todo* $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$*, a curvatura de Ricci de* Σ *satisfaz a seguinte desigualdade*

$$\mathrm{Ric}(X, X) \geqslant -k(n-1)(1 + |\nabla h|)|^2)|X|^2 - \frac{n^2H^2}{4}|X|^2.$$

O Capítulo 3 é dedicado aos principais resultados deste trabalho, que são os teoremas tipo Bernstein. Mais precisamente, provaremos os seguintes resultados:

Teorema 0.1. *Seja* $\psi : \Sigma^n \longrightarrow -\mathbb{R} \times M^n$ *uma hipersuperfície tipo-espaço, completa, imersa em um produto Lorentziano* $-\mathbb{R} \times M^n$ *, cuja curvatura seccional* k_M *de sua fibra* M^n *é tal que* $-k \leqslant k_M \leqslant 0$ *, para alguma constante positiva* k*. Suponha que* Σ^n *esteja entre dois slices de* $-\mathbb{R} \times M^n$ *e que* $|\nabla h|$ *é limitado em* Σ^n*. Se* H *é limitada e não muda de sinal em* Σ^n*, então* H *não pode estar globalmente longe de zero. Em particular, se* H *é constante, então* Σ^n *é máxima.*

Teorema 0.2. *Seja* $\psi : \Sigma \longrightarrow -\mathbb{R} \times M^n$ *uma hipersuperficíe tipo-espaço completa imersa em um produto Lorentziano* $-\mathbb{R} \times M^n$ *com curvatura média constante* H*, cuja curvatura seccional* k_M *de sua fibra* M^n *é tal que* $-k \leqslant k_M \leqslant 0$ *, para alguma constante positiva k. Suponha que uma das seguintes condições seja satisfeita*

(a) *A função altura* h *de* Σ^n *satisfaz* $|\nabla h|^2 \leqslant \frac{n}{K(n-1)}H^2$*.*

(b) H_2 *é limitada inferiormente em* Σ^n *e a função altura* h *de* Σ^n *é tal que, para alguma constante* $0 < \alpha < 1$*,vale*

$$|\nabla h|^2 \leqslant \frac{\alpha}{k(n-1)}|A|^2.$$

Então, Σ^n *é um slice.*

Teorema 0.3. *Seja* $\psi : \Sigma^n \longrightarrow -\mathbb{R} \times M^n$ *uma hipersuperficíe tipo-espaço, completa, imersa em um produto Lorentziano* $-\mathbb{R} \times M^n$ *tal que sua curvatura média não muda de sinal. Se* $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma^n)$*, então* Σ^n *é máxima. Além disso, se* H_2 *é limitada inferiormente em* Σ^n *e a curvatura de Ricci* Ric_M *da fibra* M^n *é não negativa, então* Σ^n *é totalmente geodésica. E mais, se* Ric_M *é estritamente positiva, então* Σ^n *é um slice.*

No Capítulo 4 abordaremos os resultados estabelecidos anteriormente, agora no âmbito dos gráficos inteiros. De modo preciso, teremos

Corolário 0.1. *Seja* $\Sigma^n(u)$ *um gráfico vertical inteiro tipo-espaço em um espaço do produto Lorentziano* $-\mathbb{R} \times M^n$*, cuja fibra* M^n *é completa e tal que sua curvatura seccional* K_M *satisfaz* $-k \leqslant k_M \leqslant 0$*, para alguma constante positiva k em* $\mathbb{R}$*. Suponha que* $\Sigma^n(u)$ *esteja entre dois slices de* $-\mathbb{R} \times M^n$*. Se* $|\nabla u| \leqslant \alpha$*, para alguma constante* $0 < \alpha < 1$*,* H *é limitada e não muda de sinal em* $\Sigma^n(u)$*, então* $\Sigma^n(u)$ *é completo e* H *não é globalmente limitada a partir de zero. Em particular, se* H *é constante então* $\Sigma^n(u)$ *é máximo .*

Corolário 0.2. *Seja* $\Sigma^n(u)$ *um gráfico vertical tipo-espaço inteiro, imerso, com curvatura média* H *constante em um espaço produto Lorentziano* $-\mathbb{R}\times M^n$*, cuja fibra* M^n *é completa e cuja a curvatura seccional* K_M *de sua fibra* M^n *é tal que* $-k \leqslant K_M \leqslant 0$ *, para alguma constante positiva* k*. Suponha que uma das seguintes condições seja satisfeita:*

(a) $|\nabla u|^2 \leqslant \frac{nH^2}{k(n-1)+nH^2}$,

(b) H_2 *é limitada inferiormente em* $\Sigma^n(u)$ *e* Σ^n *é tal que, para alguma constante* $0 < \alpha < 1$,*vale*

$$|\nabla u|^2 \leqslant \frac{\alpha |A|^2}{k(n-1) + \alpha |A|^2}.$$

Então, Σ^n *é um slice.*

Corolário 0.3. *Seja* $\Sigma^n(u)$ *um gráfico vertical, inteiro, tipo-espaço imerso em um espaço produto Lorentziano* $-\mathbb{R}\times M^n$*, cuja fibra* M^n *é completa. Suponha que a curvatura média* H *não muda de sinal em* $\Sigma^n(u)$*. Se* $|\nabla u| \leqslant \alpha$*, então* $\Sigma^n(u)$ *é completa e máxima. Além disso, se* H_2 *é limitada inferiormente em* $\Sigma^n(u)$ *e a curvatura de Ricci da fibra* M^n *é não negativa, então* $\Sigma^n(u)$ *é totalmente geodésica. E mais, se a curvatura de Ricci é estritamente positiva, então* $\Sigma^n(u)$ *é um slice.*

Capítulo 1

Noções Preliminares

Apresentaremos a seguir algumas definições e notações necessárias para o bom andamento deste trabalho. Inicialmente denotaremos por M^n uma variedade diferenciável de dimensão n, por $C^\infty(M)$ o conjunto das funções suaves reais definidas em M^n e por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos vetoriais definidos em M^n.

1.1 Tensores e Formas

Definição 1.1. *Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita, V^* seu espaço dual e k, l inteiro positivos. Chamaremos;*

Um k-tensor covariante em V uma função real k-linear

$$T : V^k \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Um l-tensor contravariante em V uma função l-linear

$$T : (V^*)^l \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Definição 1.2. *Dados $r, s \geqslant 0$ números inteiros não simultaneamente nulos. Um tensor do tipo (r, s) ou simplesmente um (r, s)-tensor, é um tensor r-covariante e s-contravariante multilinear*

$$A : (V^*)^r \times (V^s) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Em particular, um $(r, 0)$-tensor e um $(0, s)$-tensor são os tensores contravariante e covariante $A : (V^*)^r \longrightarrow \mathbb{R}$, $A : V^s \longrightarrow \mathbb{R}$, respectivamente.

Denotaremos por $\mathfrak{T}^r_s(V)$ *o conjunto dos tensores do tipo* (r,s) *sobre* V*. Em particular, definimos* $\mathfrak{T}^0_0(V) = C^\infty(V)$.

De forma totalmente análoga, definiremos um tensor do tipo (r,s) em uma variedade diferenciável M como sendo uma função $A : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \longrightarrow C^\infty(M)$ multilinear, no anel das funções. Em particular, um $(r,0)$-tensor e $(0,s)$-tensor em variedades diferenciáveis, são os tensores contravariante e covariante $A : (M^*)^r \longrightarrow C^\infty(M)$, $A : M^s \longrightarrow C^\infty(M)$ respectivamente.

Definição 1.3. *Sejam* M *e* N *variedades diferenciáveis,* $f : M \longrightarrow N$ *um difeomorfismo,* $A \in \mathfrak{T}^0_s(N)$ *e considere* $f^*A \in \mathfrak{T}^0_s(M)$ *definida por*

$$f^*A(v_1, v_2, \dots, v_s) = A(dfv_1, dfv_2, \dots, dfv_s).$$

Chamaremos f^*A *de pull-back de* A *por* f*. Em particular, se* $s = 0$*, definimos* $f^*A = A \circ f$.

Definição 1.4. *Seja* V *um espaço vetorial real de dimensão finita. Uma forma bilinear sobre* V *é uma função* $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que, para quaisquer* $u, u_1, u_2, v, v_1, v_2 \in V$ *e* $\forall a \in \mathbb{R}$*, satisfaz :*

(i) $b(u_1 + u_2, v) = b(u_1, v) + b(u_2, v)$.

(ii) $b(a.u, v) = a.b(u, v)$.

(iii) $b(u, v_1 + v_2) = b(u, v_1) + b(u, v_2)$.

(iv) $b(u, a.v) = a.b(u, v)$.

Dizemos que b *é simétrica quando* $f(u, v) = f(v, u)$.

Definição 1.5. *Seja* V *um espaço vetorial real de dimensão finita. Uma forma bilinear simétrica* $b = \langle .,. \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ *é dita;*

(i) Positiva definida, se $\langle v, v \rangle > 0$*,* $\forall v \in V$.

(ii) Negativa definida, se $\langle v, v \rangle < 0$*,* $\forall v \in V$.

(iii) Não-degenerada, se $\langle u, v \rangle = 0$*,* $\forall v \in V$*, então* $u = 0$.

Definição 1.6. *O índice* ν *de uma forma bilinear simétrica* b *sobre* V *é a maior dimensão de um subespaço* $W \subset V$ *tal que* $b_{|W \times W} : W \times W \longrightarrow \mathbb{R}$ *for não-degenerada.*

Definição 1.7. *Seja* V *um espaço vetorial real de dimensão finita. Um produto escalar sobre* V *é uma forma bilinear* $g = \langle .,. \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ *simétrica e não-degenerada. Além disso, se* $g = \langle .,. \rangle$ *for positiva definida, então dizemos que* $g = \langle .,. \rangle$ *é um produto interno.*

Exemplo 1.1. *Um exemplo trivial e conhecido, é o produto interno usual definido no espaço vetorial Euclidiano* $\mathbb{R}^n$*, dada pela forma bilinear*

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i,$$

onde $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *e* $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ *são vetores de* $\mathbb{R}^n$*.*

Exemplo 1.2. *Agora trocando os* n *primeiros sinais do produto interno usual em* $\mathbb{R}^n$*,*

$$\langle v, w \rangle = -\sum_{i=1}^{n} v_i w_i + \sum_{i=v+1}^{n} v_i w_i,$$

onde $v = (v_1, v_2, ..., v_n), w = (w_1, w_2, ..., w_n) \in \mathbb{R}^n$*. Obtemos uma métrica de índice v.*

Definição 1.8. *Seja* V *um espaço vetorial de dimensão finita e* W *um subespaço de* V*. Dado um forma bilinear* $b = \langle .,. \rangle$ *sobre* V*, definimos o complemento ortogonal* $W^{\perp}$ *de* W *em* V *por*

$$W^{\perp} = \{v \in V; \langle v, w \rangle = 0 \ \forall w \in W\}.$$

Lema 1.1. *Sejam* V *um espaço vetorial de dimensão finita* V*,* W *um subespaço de* V *e* b *uma forma bilinear simétrica sobre* V*. Então*

(i) b *é não-degenerado se, e somente se, sua matriz com relação a uma base de* V *for invertível.*

(ii) *Se* W *é não-degenerado, então* $\dim(W) + \dim(W^{\perp}) = \dim(V)$ *e* $(W^{\perp})^{\perp} = W$*.*

(iii) W *é não-degenerado se, e somente se,* $V = W \oplus W^{\perp}$*. Em particular,* W *é não-degenerado se, e somente se,* $W^{\perp}$*, for não degenerado.*

Demonstração. Veja [16]. □

1.2 Variedade Semi-Riemanniana

Definição 1.9. *Um tensor métrico* g *ou simplesmente uma métrica* g*, sobre uma variedade diferenciável* M*, é um* $(0, 2)$*-tensor simétrico, não-degenerado e com índice constante.*

Definição 1.10. *Uma variedade diferenciável* M*, munida de uma métrica* g*, é chamada de uma variedade semi-Riemanniana. O índice* ν *da métrica* g*, será o índice de* M*. Em particular, quando* $\nu = 0$*, a variedade é chamada simplesmente de Riemanniana. Para o caso* $\nu = 1$*, a variedade é dita Lorentziana.*

Exemplo 1.3. *O espaço euclidiano* $\mathbb{R}^n$*, munido da métrica do Exemplo 2, resulta em um espaço semi-Riemanniano de índice* ν*, que será denotado por* $\mathbb{R}^n_\nu$*.*

1.3 Orientação Temporal

A partir dos exemplos anteriores, notamos que a métrica não é necessariamente positiva, o que motiva definirmos as classes de vetores, chamada também de caráter casual dos vetores.

Definição 1.11. *Seja* M *uma variedade semi-Riemanniana com tensor métrico* $\langle \cdot, \cdot \rangle$*. Dizemos que um vetor* $v \in T_pM$ *é*

(i) *Tipo-espaço, se* $\langle v, v \rangle > 0$ *ou* $v = 0$*;*

(ii) *Tipo-luz, se* $\langle v, v \rangle = 0$ *mas* $v \neq 0$*;*

(iii) *Tipo-tempo quando* $\langle v, v \rangle < 0$*.*

Chamaremos de *Cone de Luz* o conjunto dos vetores tipo-luz em T_pM . Os vetores no interior (resp. exterior) deste cone são chamados de *tipo-tempo* (resp. *tipo-espaço*). Nesta configuração, os vetores tipo-luz se encontram na fronteira do cone.

Definição 1.12. *Sejam* M^n *uma variedade semi-Riemanniana de dimensão n e índice 1 e* $T_0 = \{u \in M^n; \langle u, u \rangle < 0\}$ *o conjunto dos vetores tipo-tempo em* T_pM*,* $p \in M$ *fixo. O conjunto*

$$C(u) = \{v \in T_pM; \langle u, v \rangle < 0\}$$

será chamado de cone temporal de um vetor $u \in T_0$*.*

Segue diretamente da definição que $v \in C(u)$ se e somente se $u \in C(v)$.

Lema 1.2. *Dado* $v \in T_0$*, o subespaço* $v^\perp$ *dos vetores tangentes a* v *é tipo-espaço e* T_0 *é a união disjunta de* $C(v)$ *e* $C(-v)$*.*

Demonstração. Veja Lema 5.26 de [16]. □

Lema 1.3. *Dois vetores* $u, v \in T_pM$ *tipo-tempo estão no mesmo cone temporal se, e somente se,* $\langle u, v\rangle < 0$.

Demonstração. Veja Lema 5.29 de [16]. □

Definição 1.13. *Um variedade semi-Riemanniana* M^n *de índice 1, é temporalmente orientável se existir uma aplicação* τ, *que associa a cada* $p \in M^n$ *um cone tipo-tempo* τ_p *em* T_pM, *o qual é suave no seguinte sentindo: para cada* $p \in M^n$ *existe uma vizinhança aberta* U *de* p *e um campo* $X \in \mathfrak{X}(U)$ *tais que* $X(q) \in \tau_p$ *para todo* $q \in U$.

A aplicação τ da definição acima será denominada uma *orientação temporal* para M^n.

Lema 1.4. *Uma variedade semi-Riemanniana* M^n *de índice 1, é temporalmente orientável se, e somente se, existe um campo vetorial tipo-tempo* $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração. Veja Lema 5.32, em [16]. □

Seja τ uma orientação temporal para M^n e $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Se $Y_q \in \tau_q$ (respectivamente $-Y_q \in \tau_q$) $\forall q \in M$, dizemos que Y aponta para o futuro (respectivamente para o passado). Sendo $X \in \mathfrak{X}(M)$, uma orientação temporal para M^n, pelo Lema 1.4, segue que um campo vetorial tipo-tempo Y sobre M^n aponta para o futuro se, e somente se, $\langle Y, X\rangle < 0$. Definiremos a seguir hipersuperfícies e como a orientação influencia sobre a mesma.

Definição 1.14. *Sejam* M^r *e* N^s *variedades diferenciáveis. Uma aplicação* $f : M \longrightarrow N$ *é uma imersão se* $df_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ *é injetiva para todo* $p \in M$. *A codimensão de uma imersão* $f : M \longrightarrow N$ *é o número* $s - r$. *No caso em que esse número é igual a 1, chamaremos tal imersão de hipersuperfície.*

Definição 1.15. *Uma imersão* $f : M^r \longrightarrow N^s$, *onde* N *é uma variedade semi-Riemanniana com métrica g é dita*

(i) *Tipo-espaço, se a métrica induzida* f^*g *em* M *for Riemanniana;*

(ii) *Tipo-tempo, se a métrica induzida* f^*g *em* M *for não degenerada, mas não é positiva definida;*

(iii) *Tipo-luz se a métrica induzida* f^*g *em* M *for degenerada positiva semi-definida.*

O resultado a seguir garante a orientação de uma hipersuperfície, desde que o espaço ambiente seja orientável.

Proposição 1.1. *Seja* $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ *uma hipersuperfície tipo-espaço em uma variedade de Lorentz* $\overline{M}^{n+1}$*, temporalmente orientada. E* M^n *admite um campo vetorial normal unitário* $N \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$*, apontando para o futuro. Em particular,* M^n *é orientável.*

Demonstração. Fixe um campo $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ que dá a orientação temporal de $\overline{M}^{n+1}$. Para todo $p \in M$, o conjunto de todos os vetores tipo-tempo $v \in T_p\overline{M}$ é a união disjunta de $C(X(p))$ e $C(-X(p))$.

Tome em cada $p \in M$, um vetor unitário $N(p) \in T_pM^{\perp}$. Desde que $N(p)$ é tipo-tempo, trocando $N(p)$ por $-N(p)$ se necessário, podemos supor que $N(p) \in C(X(p))$. Deste modo, definimos unicamente um campo vetorial normal unitário N sobre M^n, apontando para o futuro. Resta-nos mostrar que o campo N é suave.

Fixe, então, $p \in M^n$ e tome um referencial móvel $\{E_i\}$ sobre uma vizinhança aberta e conexa U em $p \in M$. Então $\overline{N} = X - \sum_{i=1}^{n}\langle X, E_i\rangle E_i$ é diferenciável e normal a M em U, com

$$\langle \overline{N}, \overline{N}\rangle = \langle \overline{N}, X\rangle = \langle X, X\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle X, E_i\rangle^2.$$

Mas $\langle X, X\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle X, E_i\rangle^2 - \langle X, N\rangle^2$, de modo que $\langle \overline{N}, \overline{N}\rangle = -\langle X, N\rangle^2 < 0$. Portanto, $\overline{N}(q) \in C(X(q))$ para cada $q \in U$, e $N = \frac{\overline{N}}{|\overline{N}|}$ é diferenciável. □

Observação 1.1. *Diremos que* N *dada como na proposição acima, é a aplicação normal de Gauss de* M^n *apontando para o futuro.*

1.4 Variedade Produto

O lema seguinte nos dá uma forma de definir uma métrica a partir de outras com o objetivo de obter novas variedades Semi-Riemannianas. Tais estruturas serão o foco do nosso estudo.

Lema 1.5. *Sejam* (M, g_M) *e* (N, g_N) *variedades semi-Riemannianas de índices* m *e* n *e* π_M *e* π_N *as projeções de* $M \times N$ *sobre* M *e* N*, respectivamente. Defina* $g = \pi_M^*(g_M) + \pi_N^*(g_N)$*, onde * denota o pullback . Afirmamos que* g *é uma métrica de* $M \times N$*, o que torna dela uma variedade semi-Riemanniana de índice* $m + n$*.*

Demonstração. Sejam $u, v \in T_{(p,q)}(M \times N)$ então,

$$g(u, v) = g_M(d\pi_{M\,p}(u), d\pi_{M\,p}(v)) + g_N(d\pi_{N\,q}(u), d\pi_{N\,q}(v)).$$

Para mostrar que g não degenera, suponha que $g(u, w) = 0$, $\forall w \in T_{(p,q)}(M \times N)$. Em particular, para algum w tal que $d\pi_N(w) = 0$ temos

$$g_M(d\pi_M(u), d\pi_M(w)) = 0,\ \forall w; d\pi_N(u) = 0.$$

Acima, as projeções são calculadas nos respectivos pontos. Como $d\pi_M(w)$ percorre todo T_pM, assim $d\pi_M(u) = 0$. Analogamente, mostra-se que $d\pi_N(u) = 0$, e assim $u = 0$. Para calcularmos o índice, basta observar que a matriz associada a métrica g é diagonal. □

1.5 Conexão de Levi-Civita

Seja M uma variedade semi-Riemanniana. Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, queremos calcular a taxa de variação de X na direção Y. Motivado da noção de derivação de um campo em relação ao outro no $\mathbb{R}^n$, vamos definir o que seja uma conexão afim, que irá suprir esta noção no contexto de variedades.

Definição 1.16. *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M^n é uma aplicação*

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

tal que, para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in C^\infty(M)$, tem-se

(i) $\nabla_X Y$ *é $C^\infty(M)$-linear em X, ou seja,* $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$;

(ii) $\nabla_X Y$ *é $\mathbb{R}$-linear em Y, ou seja,* $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;

(iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$.

O campo $\nabla_X Y$ é dito a derivada covariante de Y na direção de X com relação a ∇.

Definição 1.17. *Uma conexão ∇ em uma variedade semi-Riemanniana M é compatível com a métrica se, e somente se, para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$*

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle.$$

Definição 1.18. *Uma conexão afim ∇ em uma variedade semi-Riemanniana M^n é dita simétrica quando satisfaz*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, onde $[X, Y]$ denota o colchete de Lie dos campos X e Y.

Observação 1.2. *Em um sistema de coordenadas (U, x), o fato de ser ∇ simétrica implica que para todo $i, j = 1, 2, \ldots, n$,*

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0, X_i = \frac{\partial}{\partial X_i}$$

o que justifica o nome adotado .

Teorema 1.1. ***(Levi-Civita)*** *Seja M variedade semi-Riemanniana, com métrica $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$, existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições*

(i) ∇ *é simétrica.*

(ii) ∇ *é compatível com métrica semi-Riemanniana g.*

Demonstração. Suponha inicialmente a existência de uma tal conexão ∇. Então

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \tag{1.1}$$

$$Y\langle Z, X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle \tag{1.2}$$

$$Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle \tag{1.3}$$

Somando (1.1) e (1.2) e subtraindo (1.3), e usando a simetria de ∇, teremos

$$X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle = \langle [X, Z], Y\rangle + \langle [Y, Z], X\rangle + \langle [X, Y], Z\rangle + 2\langle Z, \nabla_Y X\rangle. \tag{1.4}$$

A expressão (1.4) mostra que ∇ está unicamente determinada pela métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Portanto, caso exista, ela será única. Para mostrar a existência, defina ∇ pela expressão (1.4). □

Lema 1.6. ***(Referencial Geodésico)*** *Sejam M^n uma variedade semi-Riemanniana de dimensão n. Então, para cada $p \in M^n$, existe um referencial $\{E_i\}_{i=1}^n$ ortogonal em p satisfazendo $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$. Este referencial será dito geodésico.*

Demonstração. Veja [11]. □

1.6 Variedade Completa

Definição 1.19. *Uma variedade Riemanniana* M^n *é (Geodesicamente) Completa, se para todo* $p \in M^n$*, a aplicação exponencial* $\exp_p$ *está definida para todo* v *em* T_pM*, isto é, todas geodésicas* $\gamma(t)$ *partindo* p *estão definidas para todos os valores do parâmetro* $t \in \mathbb{R}$.

O fato que torna relevante o conceito de completude é o teorema de Hopf-Rinow, enunciado abaixo.

Teorema 1.2. *Seja* M *uma variedade Riemanniana e seja* $p \in M^n$*. As seguintes afirmações são equivalente:*

(i) $\exp_p$ *está definida em todo o* T_pM.

(ii) Os limitados e fechados de M *são compactos.*

(iii) M *é completa como espaço métrico.*

(iv) M *é geodesicamente completa.*

(v) Existe uma sequência de compactos $K_m \subset M$*,* $K_n \subset \text{int}K_{n+1}$ *e* $\bigcup_n K_n = M$*, tais que se* $q_n \notin K_n$ *então* $d(p, q_n) \longrightarrow \infty$.

Além disso, cada uma das afirmações acima implica que

(vi) Para todo $q \in M^n$ *existe uma geodésica* γ *ligando* p *e* q *com* $l(\gamma) = d(p, q)$.

Acima, $l(\gamma)$ denota o comprimento da curva γ e $d(p, q)$ denota a distancia entre p e q.

Demonstração. Teorema 7.2.8 em [11]. □

Além disso, o seguinte resultado será importante para os nossos propósitos. Para isso, definiremos o seja uma curva divergente.

Definição 1.20. *Seja* M *uma variedade Riemanniana. Dizemos que uma curva* $\alpha : [0, a) \longrightarrow M$ *é divergente se* $\alpha([0, a))$ *não está contida em nenhum compacto* K *de* M*, onde* a *é um número real positivo ou* $a = +\infty$.

Corolário 1.1. *Uma variedade Riemanniana M é completa se, e somente se, o comprimento de qualquer curva divergente é ilimitado.*

Demonstração. Veja [11] e Corolário 1.2.6 de [17]. □

1.7 Operadores Diferenciáveis

Definiremos a seguir os operadores que serão utilizados ao longo deste trabalho. Daremos também a forma de cada operador em relação a um referencial geodésico $\{E_i\}_{i=1}^n$ sobre uma variedade Riemanniana M.

Definição 1.21. *Seja* $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função suave. Definiremos o gradiente de* f *como o campo* ∇f *tal que*

$$X(f) = df(X) = \langle \nabla f, X\rangle, \ \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Com relação a um referencial geodésico temos

$$\nabla f = \sum_i \varepsilon_i \frac{\partial f}{\partial E_i} E_i,$$

onde $\varepsilon_i = \langle E_i, E_i\rangle$.

Definição 1.22. *Dado um campo* $X \in \mathfrak{X}(M)$. *Definiremos o divergente de* X *como sendo a função suave dado por*

$$\begin{aligned} div &: M^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ (divX)(p) &= tr\{v \longrightarrow (\nabla_v X)(p)\}, \end{aligned}$$

onde $v \in T_pM$ *e* tr *denota o traço do operador linear entre chaves.*

Além disso, para um referencial geodésico temos

$$div(X) = \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial E_i},$$

onde $X = \sum_i x^i E_i$.

De fato, usando a compatibilidade da conexão temos

$$divX = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} X, E_i\rangle = \sum_{i=1}^n (E_i\langle X, E_i\rangle - \langle X, \nabla_{E_i} E_i\rangle) = \sum_{i=1}^n E_i x^i = \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial E_i}.$$

Definição 1.23. *Sejam* M^n *uma variedade semi-Riemanniana e* $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função suave. O laplaciano de* f *é a função dada por*

$$\begin{aligned} \Delta f &: M^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ \Delta f &= div(\nabla f). \end{aligned}$$

Em um referencial geodésico temos

$$\Delta f = div(\nabla f) = \sum_i (E_i(E_i(f)) - \langle \nabla_{E_i} E_i, \nabla f) = \sum_i E_i(E_i(f)).$$

1.8 Curvaturas

A seguir definiremos a noção de curvatura, que de modo simples nos dirá o quanto uma variedade deixar de ser euclidiana. Definiremos também as curvaturas de Ricci e seccional, usadas posteriormente.

1.8.1 Curvatura da Variedade semi-Riemanniana

Definição 1.24. *Seja M uma variedade semi-Riemanniana, com conexão de Levi-Civita* ∇*. A aplicação dada por*

$$\begin{aligned} R &: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ R(X, Y)Z &= \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, \end{aligned}$$

é chamada de curvatura da variedade semi-Riemanniana M*.*

Lema 1.7. *A aplicação da definição anterior é* $C^\infty(M)$*-trilinear. Alem disso, o valor de* $R(X, Y)Z$ *em um ponto* $p \in M$ *depende apenas dos valores* $X(p), Y(p), Z(p)$*.*

Demonstração. Veja Lema 2.35 em [16] e Observação 2.6 em [11]. □

Exemplo 1.4. *No caso em que* $M = \mathbb{R}^n$*, temos* $R(X, Y)Z = 0$*,* $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$*.*

Com efeito, se indicarmos por $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$*, então* $\nabla_X Z = (Xz_1, Xz_2, \ldots, Xz_n)$ *e daí* $\nabla_Y \nabla_X Z = (YXz_1, YXz_2, \ldots, YXz_n)$*. Analogamente, obtemos* $\nabla_X \nabla_Y Z = (XYz_1, XYz_2, \ldots, XYz_n)$*, o que implica* $R(X, Y)Z = 0$*.*

Proposição 1.2. *Sejam* M *uma variedade semi-Riemanniana e* R *sua curvatura. Valem as seguintes igualdades para todo* $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$*;*

(i) $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$

(ii) $\langle R(X, Y)Z, W\rangle = \langle R(X, Y)W, Z\rangle$

(iii) $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$

(iv) $\langle R(X, Y)Z, W\rangle = \langle R(Z, W)X, Y\rangle$.

Demonstração. Veja Proposição 4.2.9 em [11]. □

1.8.2 Curvatura Seccional

Dado um espaço vetorial V, a expressão $Q(X, Y) = \sqrt{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y\rangle}$ representa a área do paralelogramo bi-dimensional determinado pelos vetores $X, Y \in V$. Diremos que um 2-plano Π em T_pM é não-degenerado quando $Q(X, Y)$ é não-nulo em qualquer base $\{X, Y\}$ de Π.

Lema 1.8. *Sejam Π um 2-plano não-degenerado em T_pM e seja $v, w \in \Pi$ dois, vetores linearmente independentes. Então o número*

$$K(v, w) = \frac{\langle R(v, w)v, w\rangle}{|v|^2|w|^2 - \langle v, w\rangle}$$

não depende da escolha dos vetores $v, w \in T_pM$.

Demonstração. Veja Proposição 4.3.1 em [11]. □

Definição 1.25. *O número K do lema acima é chamado de Curvatura Seccional de Π em p.*

1.8.3 Curvatura de Ricci

Definição 1.26. *Sejam M uma variedade semi-Riemanniana e R sua curvatura. A curvatura de Ricci de M em um ponto $p \in M$ é a aplicação bilinear dada por*

$$\begin{aligned} Ric \; &: T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R} \\ Ric \; &(X, Y) = tr\{Z \longrightarrow R(X, Z)Y\}. \end{aligned}$$

Em um referencial ortonormal $\{E_i\}$, teremos

$$Ric(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(X, E_i)Y, E_i\rangle.$$

Em razão da Proposição 1.2, teremos

$$Ric(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(X, E_i)Y, E_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle R(Y, E_i)X, E_i\rangle = Ric(Y, X).$$

1.9 O Princípio do máximo generalizado de Omori-Yau

O lema que enunciaremos a seguir é um importante instrumento para a demonstração dos resultados discutidos neste trabalho. Ele relaciona hipóteses sobre a variedade Riemanniana, bem como sobre funções definidas nestas variedades. A versão que daremos agora é a generalização do princípio do máximo devido a Omori[18] e Yau[19].

Lema 1.9. *(Princípio do Máximo Generalizado de Omori-Yau) Seja Σ^n uma variedade Riemanniana n-dimensional completa cuja curvatura de Ricci é limitada inferiormente e $f : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave que é também limitada inferiormente. Então existe uma sequência $(p_k) \subset \Sigma$ tal que*

$$\lim_{k \to +\infty} f(p_k) = \inf(f) \ , \ \lim_{k \to +\infty} |\nabla f(p_k)| = 0 \ e \ \liminf_{k \to +\infty} \Delta f(p_k) \geqslant 0.$$

Demonstração. Veja [19]. □

Outro resultado devido a Yau [19] que utilizaremos neste trabalho diz respeito à funções harmônicas. A seguir, $\mathcal{L}^1(\Sigma)$ denota o espaço de funções integráveis de Lebesgue em Σ.

Lema 1.10. *Seja Σ^n uma variedade Riemanniana n-dimensional completa, não compacta e $f : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Se f é uma função sub-harmônica, isto é, $\Delta f \geqslant 0$ (super-harmônica, isto é, $\Delta f \leqslant 0$) tal que $|\nabla f| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$, então f deve ser harmônica.*

Demonstração. Veja [19]. □

Capítulo 2

Hipersuperfícies em $-\mathbb{R} \times M^n$

Trabalharemos a partir deste ponto com hipersuperfície $\psi : \Sigma^n \longrightarrow M^{n+1}$ tipo-espaço em $-\mathbb{R} \times M^n$, que será pressuposta orientável. Além disso, como feito na literatura, vamos identificar Σ^n com sua imagem $\psi(\Sigma) \subset -\mathbb{R} \times M^n$, ou seja, vamos nos referir a hipersuperfície Σ.

Construiremos a seguir as funções altura e suporte relacionadas a esta imersão. Estas funções serão utilizadas para obtermos informações geométricas sobre o comportamento da hipersuperfície. Adiante, as notações com barra irão se referir a elementos em $\overline{M}^{n+1} = -\mathbb{R} \times M^n$, enquanto sem a barra vão identificar elementos na hipersuperfície imersa.

Sejam M^n uma variedade Riemanniana, $\psi : \Sigma^n \longrightarrow -\mathbb{R} \times M^n$ uma hipersuperfície tipo-espaço e $\partial_t = \frac{\partial}{\partial_t} \in \mathfrak{X}(-\mathbb{R} \times M^n)$ o campo vetorial unitário tipo-tempo que determina a orientação na variedade Lorentziana $\overline{M}^{n+1}$. Então a orientação temporal de $-\mathbb{R} \times M^n$ nos permite considerar um único campo vetorial unitário tipo-tempo N, normal a Σ^n na mesma orientação temporal de ∂_t. Essa escolha do campo normal unitário N é feita como na Proposição 1. Diremos ainda que N é a aplicação Normal de Gauss de Σ^n apontando para o futuro.

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz obtemos

$$\langle N, \partial_t \rangle \leqslant -1 \leqslant 0$$

em Σ.

A métrica utilizada é dada por

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = -\pi_{\mathbb{R}}^*(dt^2) + \pi_M^*(\langle \cdot, \cdot \rangle_M).$$

Por simplicidade adotaremos a seguinte definição

$$\langle\cdot,\cdot\rangle = -dt^2 + \langle\cdot,\cdot\rangle_M.$$

As subvariedades de $-\mathbb{R}\times M^n$ dadas por $\{t_0\}\times M$ serão chamadas de fatias ou slices, como usualmente tratada na literatura.

2.1 Equações Estruturais

Adiante, faremos observações e lembraremos algumas equações que estão relacionadas à hipersuperfície.

Seja M^n uma hipersuperfície tipo-espaço em uma variedade Semi-Riemanniana $\overline{M}$. Para cada $p\in M$, podemos decompor $T_p\overline{M}$ da seguinte forma

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^\perp,$$

onde $(T_pM)^\perp$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. Logo, se $v\in T_p\overline{M}$, $p\in M$, podemos escrever

$$v = v^T + v^\perp,$$

onde $v^T\in T_pM$ é chamado de componente tangencial de v e $v^\perp\in(T_pM)^\perp$ a componente normal de v.

A conexão de $\overline{M}$ será denotada por $\overline{\nabla}$ e dada como na próxima proposição.

Proposição 2.1. *Sejam $\psi:\Sigma^n\longrightarrow\overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície tipo-espaço, $\overline{M}$ uma variedade semi-Riemanniana com conexão de Levi-Civita $\overline{\nabla}$. Dados $X,Y\in\mathfrak{X}(\Sigma^n)$ e $\overline{X},\overline{Y}\in\mathfrak{X}(\overline{M})$ suas extensões locais em $\overline{M}$, ponha*

$$\nabla_XY = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^T.$$

Afirmação: ∇ não depende das extensões consideradas e é a conexão de Levi-Civita de $\overline{M}$.

Demonstração. Veja [11]. □

Seja $\psi:\Sigma^n\longrightarrow\overline{M}^{n+1}$ umas hipersuperfície imersa, tipo-espaço. Estabeleceremos agora algumas relações entre as geometrias de Σ^n e $\overline{M}^{n+1}$. As fórmulas de Gauss e Weingarten são dadas, respectivamente por

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} \;=\; \nabla_XY - \langle AX,Y\rangle N \tag{2.1}$$

e

$$A(X) \quad = \quad -\nabla_X N, \tag{2.2}$$

em que $A:\mathfrak{X}(\Sigma)\longrightarrow\mathfrak{X}(\Sigma)$ denota o operador de Weingarten em Σ^n, com respeito a escolha de uma orientação temporal N para Σ^n.

Destacamos agora a bem conhecida equação de Gauss, que descreve o tensor Curvatura R de Σ^n em termos do endomorfismo de Weingarten e do tensor curvatura $\overline{R}$ de $\overline{M}^{n+1}$, a saber

$$R(X,Y)Z = (\overline{R}(X,Y)Z)^T + \langle AX, Z\rangle AY - \langle AY, Z\rangle AX.$$

Outro conceito importante, que esta associado ao operador forma A, são as curvaturas principais. Elas são definidas pontualmente como sendo seus auto-valores $k_1, k_2, \ldots, k_n$ com relação a uma base $\{e_i\}$ de Σ^n. A partir daí são construídos n invariantes algébricos da seguinte forma

$$\begin{aligned} S_0 &= 1\\ S_r &= \sum_{1\leqslant i_1\leqslant\ldots\leqslant i_r\leqslant n} k_{i_1}k_{i_2}\ldots k_{i_r}. \end{aligned}$$

Definição 2.1. *Definimos a r-ésima curvatura média H_r da hipersuperfície Σ^n como sendo*

$$\binom{r}{n} H_r = (-1)^r S_r.$$

No caso particular em que $r=1$, tem-se a curvatura média

$$H_1 = H = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i = -\frac{1}{n}\mathrm{tr}(A).$$

Dizemos que uma hipersuperfície Σ^n é máxima se sua curvatura média H é nula, isto é, $H=0$.

Abordaremos agora a função altura h, que será uma das principais ferramentas para o nosso estudo. Defina $h:\Sigma^n\longrightarrow\mathbb{R}$, dada por $h=\pi_{\mathbb{R}}|_{\Sigma^n}=(\pi_{\mathbb{R}}\circ\psi)$ ou ainda, $h(t,x)=(\pi_{\mathbb{R}}\circ\psi)(t,x)=t$. Assim posta, h será chamada de *função altura* de Σ com respeito ao campo de vetores ∂_t. Neste breve momento, vamos denotar por $\overline{\nabla}$ e ∇ os gradientes em relação às métricas de $-\mathbb{R}\times M^n$ e Σ^n, respectivamente. O gradiente de $\pi_{\mathbb{R}}$ em $-\mathbb{R}\times M^n$ é dado por

$$\overline{\nabla}\pi_{\mathbb{R}} = -\langle\overline{\nabla}\pi_{\mathbb{R}}, \partial_t\rangle\partial_t = -\partial_t.$$

Lembrando que

$$\nabla = \overline{\nabla}^T.$$

Desse modo, o gradiente de h em Σ^n será

$$\nabla h = (\overline{\nabla}_{\pi_{\mathbb{R}}})^T = -\partial_t^T = -\partial_t - \langle N, \partial_t \rangle N,$$

onde, $()^T$ denota a componente tangente de um campo em $\mathfrak{X}(\overline{M}^{n+1})$ ao longo de Σ^n.

É imediato que

$$|\nabla h|^2 = \langle N, \partial_t \rangle^2 - 1.$$

Definiremos a função suporte, que geometricamente mede, a menos de um sinal, o cosseno hiperbólico do ângulo entre o campo normal N à Σ e o campo ∂_t. Tal função é dada por $\langle N, \partial_t \rangle$.

Agora, veja que para campos $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$ vale o seguinte, vide Lema 2.3

$$\begin{aligned} X(\langle N, \partial_t \rangle) &= \langle \overline{\nabla}_X N, \partial_t \rangle + \langle N, \overline{\nabla}_X \partial_t \rangle \\ &= -\langle AX, \partial_t \rangle \\ &= -\langle AX, \partial_t^T - \langle \partial_t, N \rangle N \rangle \\ &= -\langle AX, \partial_t^T \rangle \\ &= \langle AX, \nabla h \rangle \\ &= \langle X, A(\nabla h) \rangle, \end{aligned}$$

$\forall X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$. Por definição de gradiente, temos que $\langle \nabla \langle N, \partial \rangle, X \rangle = X(\langle N, \partial_t \rangle)$ e daí

$$\langle \nabla \langle N, \partial_t \rangle, X \rangle = \langle X, A(\nabla h) \rangle, \forall X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n).$$

Portanto, $\nabla \langle N, \partial_t \rangle = A(\nabla h)$.

Obteremos na próxima seção o laplaciano das funções altura e suporte.

2.2 Mais alguns Resultados

Nesta seção enunciaremos e discutiremos alguns resultados que serão utilizados nos principais resultados desde trabalho e que são tratados no próximo capítulo.

Considerando o produto lorentziano $\overline{M} = -\mathbb{R} \times M^n$, não é difícil mostrar que as fibras $\{p\} \times M = \pi_M^{-1}(p)$ e as folhas $\mathbb{R} \times \{q\} = \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(q)$ são subvariedades semi-Riemannianas de

$\overline{M}$. Deste modo, os vetores tangente às folhas serão chamadas *horizontais* enquanto os tangentes as fibras serão ditos *verticais.*

Vetores tangentes e campos de vetores em $\mathbb{R}$ ou M podem ser levados para $-\mathbb{R}\times M^n$ usando as projeções $\pi_{\mathbb{R}}$ e π_M, representando assim, vetores e campos em $-\mathbb{R}\times M^n$. No que segue, denotaremos $\mathcal{H}(\mathbb{R})$ o conjunto dos levantamentos horizontais e por $\mathcal{V}(M)$ o conjunto dos levantamentos verticais.

Lema 2.1. *Se A é o operador de Weingarten relativo à imersão tipo-espaço $\psi:\Sigma^n\longrightarrow -\mathbb{R}\times M^n$ então*

(i) $|A|^2=\sum_{i=1}^n k_i^2=n^2H^2-n(n-1)H_2$,

(ii) $nH^2\leqslant|A|^2$, *valendo a igualdade se, e somente se, Σ^n é totalmente umbílica,*

(iii) $H_2\leqslant H^2$,

onde k_i são os autovalores de A e $|\cdot|$ é a norma de Hilbert-Schmidt.

Demonstração. Desde que $H^2=(-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n k_i)^2$ e $\binom{2}{n}H_2=\sum_{i<j}k_iK_j$, temos $n^2H^2=(\sum_{i=1}^n k_i)^2$. Como $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$, temos $n(n-1)H_2=2\sum_{i<j}k_ik_j$. Logo, segue que

$$\begin{aligned} n^2H^2-n(n-1)H_2 &= (\sum_{i=1} H)^2-2\sum_{i<j}k_ik_j \\ &= \sum_{i,j}k_ik_j-\sum_{i\neq j}k_ik_j \\ &= \sum_{i=1}^n k_i^2=|A|^2. \end{aligned}$$

Vejamos o item (ii). Considere os seguintes vetores em $\mathbb{R}^{n^2}$

$$u=(k_1,\dots,k_1,k_2,\dots,k_2,\dots,k_n,\dots,k_n)$$

e

$$v=(k_1,\dots,k_n,k_1,\dots,k_n,\dots,k_1,\dots,k_n).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle u,v\rangle &= k_1\sum_{i=1}^n k_i+k_2\sum_{i=1}^n k_i+\dots+k_n\sum_{i=1}^n k_i \\ &= \sum_{j=1}^n k_j\sum_{i=1}^n k_i=n^2H^2. \end{aligned}$$

Veja que

$$|u|^2 = nk_1 + nk_2 + ... + nk_n = n|A|^2$$

e

$$|v|^2 = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 + \sum_{i=1}^{n} k_i^2 + ... + \sum_{i=1}^{n} k_i^2.$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\langle u, v\rangle \leqslant |u||v| = n|A|^2.$$

Assim, $n^2H^2 \leqslant n|A|^2$ ou $nH^2 \leqslant |A|^2$, valendo a igualdade se, e somente se, os vetores u e v são linearmente dependentes, ou seja, $k_1 = k_2 = \ldots = k_n$.

Note que

$$nH^2 \leqslant |A|^2 = n^2H^2 - n(n-1)H_2.$$

Portanto, $H_2 \leqslant H^2$. □

Lema 2.2. *Se $-\mathbb{R}\times M^n$ é um produto lorentziano e $X \in \mathcal{V}(M)$, então $[X, \partial_t] = 0$.*

Demonstração. Seja $\{t, \partial_1, \partial_2, ..., \partial_n\}$ um sistema de coordenadas em $\overline{M}^{n+1} = -\mathbb{R}\times M^n$. Assim, se $f \in C^\infty(M)$ e $X = \sum_i \alpha_i\partial_i$ temos

$$\begin{aligned}\partial_t(X(f)) &= \partial_t(\sum_i \alpha_i\partial_i(f)) \\ &= \sum_i \partial_t(\alpha_i(\partial_i(f))) \\ &= \sum_i \{\partial_t(\alpha_i)\partial_i(f) + \alpha_i\partial_t(\partial_i(f))\}.\end{aligned}$$

Veja que os α_i não dependem de t, logo $\partial_t(\alpha_i) = 0$. Portanto, $\partial_t(X(f)) = \sum_i \alpha_i\partial_t(\partial_i(f))$. Agora, aplicando o teorema de Schwarz em $\mathbb{R}^n$, teremos $\alpha_i\partial_t(\partial_i(f)) = \alpha_i\partial_i(\partial_t(f))$ e assim $\partial_t(X(f)) = X(\partial_t(f))$. □

Lema 2.3. *Se $-\mathbb{R}\times M^n$ é um produto lorentziano e $X \in \mathcal{V}(M)$. Valem os seguintes itens:*

(i) $\overline{\nabla}_X\partial_t = \overline{\nabla}_{\partial_t}X = 0,$

(ii) $\overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t = 0.$

Demonstração. De fato, pela formula de Koszul, temos

$$\begin{aligned} 2\langle \overline{\nabla}_X \partial_t, \partial_t \rangle &= X\langle \partial_t, \partial_t \rangle + \partial_t \langle \partial_t, X \rangle - \partial_t \langle X, \partial_t \rangle - \langle X, [\partial_t, \partial_t] \rangle + \langle \partial_t, [\partial_t, X] \rangle + \langle \partial_t, [X, \partial_t] \rangle \\ &= \langle \partial_t, [\partial_t, X] \rangle + \langle \partial_t, [X, \partial_t] \rangle. \end{aligned}$$

Como o colchete é anti simétrico, obtemos

$$2\langle \overline{\nabla}_X \partial_t, \partial_t \rangle = \langle \partial_t, [\partial_t, X] \rangle - \langle [X, \partial_t], \partial_t \rangle = 0,$$

$\forall X \in \mathcal{V}(M)$. Logo, $\overline{\nabla}_X \partial_t$ é um campo vertical, ou seja, $\overline{\nabla}_X \partial_t \in \mathcal{V}(M)$.

Além disso, para $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ vale, pela Formula de Koszul

$$\begin{aligned} 2\langle \overline{\nabla}_X \partial_t, Y \rangle &= X\langle \partial_t, Y \rangle + \partial_t \langle Y, X \rangle - Y\langle X, \partial_t \rangle - \langle X, [\partial_t, Y] \rangle + \langle \partial_t, [Y, X] \rangle + \langle Y, [X, \partial_t] \rangle \\ &= \partial_t \langle Y, X \rangle. \end{aligned}$$

Como $X, Y \in \mathcal{V}(M)$, então $\langle X, Y \rangle = \langle X, Y \rangle_M$. Portanto, $\partial_t \langle X, Y \rangle = \partial_t \langle X, Y \rangle_M = 0$. Uma vez que, $\langle \overline{\nabla}_X \partial_t, Y \rangle = 0$, $\forall Y \in \mathcal{V}(M)$ e $\overline{\nabla}_X \partial_t \in \mathfrak{X}(M)$, então $\overline{\nabla}_X \partial_t = 0$.

Vejamos agora o item (iii).

Analogamente ao item anterior, usamos a compatibilidade da conexão para obter,

$$\begin{aligned} \langle \overline{\nabla}_{\partial_t} \partial_t, \partial_t \rangle &= \frac{1}{2} \partial_t \langle \partial_t, \partial_t \rangle \\ &= \frac{1}{2} \partial_t (-1) = 0. \end{aligned}$$

Mostremos agora que $\langle \overline{\nabla}_{\partial_t} \partial_t, X \rangle = 0$. Para ver isto, note que

$$\begin{aligned} \langle \overline{\nabla}_{\partial_t} \partial_t, X \rangle &= \partial_t \langle \partial_t, X \rangle - \langle \partial_t, \overline{\nabla}_{\partial_t} X \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde usamos que $\overline{\nabla}_{\partial_t} X = 0$ e que $\langle X, \partial_t \rangle = 0$, $\forall X \in \mathcal{V}(M)$.
Agora, segue novamente que $\overline{\nabla}_{\partial_t} \partial_t$ é simultaneamente horizontal e vertical e portanto nulo. □

O próximo lema nos dá a expressão do laplaciano da função suporte que envolve a curvatura de Ricci e a norma do operador de Weingarten. Antes disso, obteremos o laplaciano da função altura.

$$\Delta h = \operatorname{div}(\nabla h) = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} \nabla h, E_i \rangle.$$

Veja que,

$$\langle \nabla_{E_i}\nabla h, E_i\rangle = \langle \langle N, \partial_t\rangle AE_i, E_i\rangle.$$

Portanto,

$$\Delta h = \langle N, \partial_t\rangle \sum_{i}^{n} \langle AE_i, E_i\rangle = -nH\langle N, \partial_t\rangle.$$

Lema 2.4. *Se $\psi : \Sigma^n \longrightarrow -\mathbb{R}\times M^n$ uma hipersuperfície, tipo-espaço, com curvatura média constante, então o laplaciano da função suporte é dado por*

$$\Delta\langle N, \partial_t\rangle = (\mathrm{Ric}_M(N^*, N^*) + |A|^2)\langle N, \partial_t\rangle,$$

onde o Ric_M denota a curvatura de Ricci de M, N^* é a projeção do vetor normal unitário N sobre a fibra M^n e $|A|$ é a norma de Hilbert-Schmidt do operador forma A.

Demonstração. Seja $\{E_k\}_{k=1}^n$ um referencial ortonormal geodésico de autovetores de A em $p \in \Sigma^n$ fixado, então

$$\begin{aligned}
\Delta\langle N, \partial_t\rangle &= \sum_{k=1}^{n} E_k E_k(\langle N, \partial_t\rangle) \\
&= \sum_{k=1}^{n} E_k(\langle \overline{\nabla}_{E_k} N, \partial_t\rangle + \langle N, \overline{\nabla}_{E_k}\partial_t\rangle) \\
&= -\sum_{k=1}^{n} E_k\langle AE_k, \partial_t\rangle.
\end{aligned}$$

Escreva $\partial_t = \sum_{l=1}^{n} \alpha_l E_l - \langle N, \partial_t\rangle N$ e $AE_k = \sum_{l=1}^{n} h_{kl}E_l$. Observe que AE_K na base de auto-vetores $\{E_k\}_{k=1}^n$, encontramos para cada $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, funções $h_{kl} : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $AE_k = \sum_{l=1}^{n} h_{kl}E_l$ para cada k.

Analisaremos agora o termo $E_k\langle AE_k, \partial_t\rangle$. Note que

$$\begin{aligned}
E_k\langle AE_k, \partial_t\rangle &= E_k\langle \sum_{l=1}^{n} h_{kl}E_l, \partial_t\rangle \\
&= \sum_{l=1}^{n} E_k\langle h_{kl}E_l, \partial_t\rangle \\
&= \sum_{l=1}^{n} \langle \overline{\nabla}_{E_k} h_{kl}E_l, \partial_t\rangle + \langle \sum_{l=1}^{n} h_{kl}E_l, \overline{\nabla}_{E_k}\partial_t\rangle \\
&= \sum_{l=1}^{n} \langle h_{hl}\overline{\nabla}_{E_k}E_l + E_k(h_{kl})E_l, \partial_t\rangle \\
&= \sum_{l=1}^{n} E_k(h_{kl})\langle E_l, \partial_t\rangle + \sum_{l=1}^{n} \langle h_{kl}\overline{\nabla}_{E_k}E_l, \partial_t\rangle.
\end{aligned}$$

Olhemos para o termo $\sum_{l=1}^{n}\langle h_{kl}\overline{\nabla}_{E_k}E_l,\partial_t\rangle$. Como o referencial é geodésico em p e usando a Fórmula de Gauss, obtemos

$$\overline{\nabla}_{E_k}E_l=-\langle AE_k,E_l\rangle N.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
E_k\langle AE_k,\partial_t\rangle &= \sum_{l=1}^{n}E_k(h_{kl})\alpha_l-\sum_{l=1}^{n}\langle h_{kl}\langle AE_k,E_l\rangle N,\partial_t\rangle\\
&= \sum_{l=1}^{n}E_k(h_{kl})\alpha_l-\sum_{l=1}^{n}h_{kl}\langle AE_k,E_l\rangle\langle N,\partial_t\rangle\\
&= \sum_{l=1}^{n}E_k(h_{kl})\alpha_l-\langle N,\partial_t\rangle\sum_{l=1}^{n}h_{kl}\langle AE_k,E_l\rangle.
\end{aligned}$$

Substituindo $AE_k=\sum_{l=1}^{n}h_{kl}E_l$ acima, temos $\langle AE_k,E_l\rangle=\langle\sum_{l=1}^{n}h_{kl}E_l,E_l\rangle=h_{kl}$ e daí

$$E_k\langle AE_k,\partial_t\rangle = \sum_{l=1}^{n}E_k(h_{kl})\alpha_l-\langle N,\partial_t\rangle\sum_{l=1}^{n}h_{kl}^2.$$

Retornando para a expressão de $\Delta\langle N,\partial_t\rangle$, teremos

$$\begin{aligned}
\Delta\langle N,\partial_t\rangle &= -\sum_{k=1}^{n}E_k\langle AE_k,\partial_t\rangle\\
&= -\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}E_k(h_{kl})\alpha_l+\sum_{k=1}^{n}\langle N,\partial_t\rangle\sum_{l=1}^{n}h_{kl}^2\\
&= -\sum_{k,l=1}^{n}E_k(h_{kl})\alpha_l+\langle N,\partial_t\rangle\sum_{k,l=1}^{n}h_{kl}^2
\end{aligned}$$

isto é,

$$\Delta\langle N,\partial_t\rangle = -\sum_{k,l=1}^{n}E_k(h_{kl})\alpha_l+\langle N,\partial_t\rangle|A|^2. \tag{2.3}$$

Agora, voltemos nossas atenções para o termo $\sum_{k,l=1}^{n}E_k(h_{kl})\alpha_l$. Observe que

$$h_{kl}=\langle AE_k,E_l\rangle=\langle AE_l,E_k\rangle.$$

Daí, como $E_l\langle E_k,N\rangle=0$ obtemos que

$$\langle\overline{\nabla}_{E_l}E_k,N\rangle = -\langle E_k,\overline{\nabla}_{E_l}N\rangle=\langle E_k,AE_l\rangle,$$

ou seja, $h_{kl}=\langle\overline{\nabla}_{E_l}E_k,N\rangle$.

Substituindo a expressão acima em $\displaystyle\sum_{k,l=1}^{n}E_k(h_{kl})\alpha_l$, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{k,l=1}^{n}E_k(h_{kl})\alpha_l &= \sum_{kl}E_k(\langle\overline{\nabla}_{E_l}E_k,N\rangle)\alpha_l\\ &= \sum_{kl}(\langle\overline{\nabla}_{E_k}\overline{\nabla}_{E_l}E_k,N\rangle+\langle\overline{\nabla}_{E_l}E_k,\overline{\nabla}_{E_k}N\rangle)\alpha_l.\end{aligned}$$

Novamente, como o referencial é geodésico em p, então $(\overline{\nabla}_{E_l}E_k)^T=0$ e

$$\langle\overline{\nabla}_{E_l}E_k,\overline{\nabla}_{E_k}N\rangle=-\langle AE_l,E_k\rangle\langle N,\overline{\nabla}_{E_k}N\rangle.$$

Lembrando que $E_k\langle N,N\rangle=0$, é imediato que

$$2\langle N,\overline{\nabla}_{E_k}N\rangle=0.$$

Logo, $\langle\overline{\nabla}_{E_l}E_k,\overline{\nabla}_{E_k}N\rangle=0$. Reduzimos então a expressão de $\displaystyle\sum_{k,l=1}^{n}E_k(h_{kl})\alpha_l$ para

$$\sum_{k,l=1}^{n}E_k(h_{kl})\alpha_l=\sum_{k,l=1}^{n}\langle\overline{\nabla}_{E_l}\overline{\nabla}_{E_l}E_k,N\rangle\alpha_l.$$

Agora manipularemos a expressão $\langle\overline{\nabla}_{E_l}\overline{\nabla}_{E_l}E_k,N\rangle$ afim de obter o tensor de Ricci. Primeiramente note que

$$\begin{aligned}E_k(h_{kl})=E_k(\langle\overline{\nabla}_{E_k}E_l,N\rangle) &= \langle\overline{\nabla}_{E_k}\overline{\nabla}_{E_l}E_k,N\rangle-\langle\overline{\nabla}_{E_l}\overline{\nabla}_{E_k}E_k,N\rangle+\langle\overline{\nabla}_{E_l}\overline{\nabla}_{E_k}E_k,N\rangle\\ &= \langle-\overline{R}(E_k,E_l)E_k,N\rangle+\langle\overline{\nabla}_{E_l}\overline{\nabla}_{E_k}E_k,N\rangle.\end{aligned}$$

Além disso,

$$E_l\langle\overline{\nabla}_{E_k}E_k,N\rangle=\langle\overline{\nabla}_{E_l}\overline{\nabla}_{E_k}E_k,N\rangle+\langle\overline{\nabla}_{E_k}E_k,\overline{\nabla}_{E_l}N\rangle.$$

Como $\langle\overline{\nabla}_{E_k}E_k,\overline{\nabla}_{E_l}N\rangle=0$, segue que

$$E_k(h_{kl})=E_k(\langle\overline{\nabla}_{E_k}E_l,N\rangle) = \langle-\overline{R}(E_k,E_l)E_k,N\rangle+E_l\langle\overline{\nabla}_{E_k}E_k,N\rangle.$$

Veja que

$$\langle\overline{\nabla}_{E_k}E_k,N\rangle=-\langle E_k,\overline{\nabla}_{E_k}N\rangle=\langle E_k,AE_k\rangle,$$

o que implica,

$$E_k(h_{kl})=\langle-\overline{R}(E_k,E_l)E_k,N\rangle+E_l\langle E_k,AE_k\rangle.$$

Somando $E_k(h_{kl})$ em k, obtemos

$$\sum_k E_k(h_{kl}) = -\overline{Ric}(E_l, N) + E_l(tr(A)).$$

Sendo H constante e $tr(A) = -nH$ então $E_l(tr(A)) = 0$ e $\sum_k E_k(h_{kl}) = -\overline{Ric}(E_l, N)$. Multiplicando esta última igualdade por α_l e somando em l

$$\begin{aligned}\sum_k \alpha_l E_k(h_{kl}) &= -\alpha_l\overline{Ric}(E_l, N) = -\overline{Ric}(\alpha_l E_l, N)\\ \sum_{lk} E_k(h_{kl})\alpha_l &= -\overline{Ric}(\sum_l \alpha_l E_l, N)\\ &= -\overline{Ric}(\partial_t + \langle N, \partial_t\rangle N, N)\\ &= -\overline{Ric}(\partial_t, N) - \langle N, \partial_t\rangle\overline{Ric}(N, N).\end{aligned}$$

Entretanto,

$$\begin{aligned}\overline{Ric}(\partial_t, N) &= \overline{Ric}(N, \partial_t) = \sum_k \langle\overline{R}(N, E_k)\partial_t, E_k\rangle\\ \overline{R}(N, E_k)\partial_t &= \sum_k \overline{\nabla}_N\overline{\nabla}_{E_k}\partial_t - \overline{\nabla}_{E_k}\overline{\nabla}_N\partial_t - \overline{\nabla}_{[N,E_k]}\partial_t = 0.\end{aligned}$$

De fato, $[N, E_k] \in \mathfrak{X}(-\mathbb{R}\times M^n)$, de onde escrevemos

$$[N, E_k] = \alpha\partial_t + X,\ X \in \mathfrak{X}(M^n).$$

Daí,

$$\overline{\nabla}_{[N,E_k]}\partial_t = \alpha\overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t + \overline{\nabla}_X\partial_t = 0.$$

Analogamente, obtemos $\overline{\nabla}_N\partial_t = 0$. Logo,

$$\sum_{kl} E_k(h_{kl})\alpha_l = -\langle N, \partial_t\rangle\overline{Ric}(N, N).$$

Portanto, voltando à expressão (2.3), obtemos $\Delta\langle N, \partial_t\rangle = \langle N, \partial_t\rangle\overline{Ric}(N, N) + \langle N, \partial_t\rangle|A|^2$. Para concluirmos a demostração, mostraremos que

$$\overline{Ric}(N, N) = \overline{Ric}(N^*, N^*) = Ric_M(N^*, N^*).$$

Como N^* é a projeção do campo vetorial normal unitário N sobre a fibra M^n, então $N = -\langle N, \partial_t\rangle\partial_t + N^*$. Logo

$$\begin{aligned}\overline{Ric}(N, N) &= \overline{Ric}(-\langle N, \partial_t\rangle\partial_t + N^*, \langle N, \partial_t\rangle\partial_t + N^*)\\ &= \langle N, \partial_t\rangle^2\overline{Ric}(\partial_t, \partial_t) - 2\langle N, \partial_t\rangle\overline{Ric}(\partial_t, N^*) + \overline{Ric}(N^*, N^*).\end{aligned}$$

Veja que

$$\overline{R}(\partial_t, E_i)\partial_t = \overline{\nabla}_{E_i}\overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t - \overline{\nabla}_{\partial_t}\overline{\nabla}_{E_i}\partial_t - \overline{\nabla}_{[\partial_t, E_i]}\partial_t.$$

Ponha $[\partial_t, E_i] = \beta\partial_t + X$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e daí

$$\overline{\nabla}_{[\partial_t, E_i]}\partial_t = \beta\overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t + \overline{\nabla}_X\partial_t = 0,$$

Portanto, $\overline{Ric}(\partial_t, \partial_t) = 0$, onde usamos que $\overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t = \overline{\nabla}_{E_i}\partial_t = 0$. Analogamente, $\overline{Ric}(\partial_t, N^*) = 0$. □

Lema 2.5. *Sejam $\psi : \Sigma^n \longrightarrow -\mathbb{R} \times M^n$ uma hipersuperfície tipo-espaço imersa em um produto lorentziano $-\mathbb{R} \times M^n$, cuja curvatura seccional k_M da fibra M^n é tal que*

$$-k \leqslant k_M \leqslant 0,$$

para alguma constante positiva k. Então, para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, a curvatura de Ricci de Σ satisfaz a seguinte desigualdade

$$Ric(X, X) \geqslant -k(n-1)(1 + |\nabla h|^2)|X|^2 - \frac{n^2H^2}{4}|X|^2.$$

Demonstração. Sejam X um campo de vetores em $\mathfrak{X}(\Sigma)$ e $\{E_k\}_{k=1}^n$ um referencial ortonormal. A partir da equação de Gauss

$$R(X, E_i)X = (\overline{R}(X, E_i)X)^T + \langle AX, X\rangle AE_i - \langle AE_i, X\rangle AX,$$

obtemos

$$Ric(X, X) = \sum_{i=1}^{n}\langle\overline{R}(X, E_i), E_i\rangle + nH\langle AX, X\rangle + \langle AX, AX\rangle.$$

Veja que

$$nH\langle AX, X\rangle + |AX|^2 = |AX + \frac{nH}{2}X|^2 - \frac{n^2H^2}{4}|X|^2,$$

e portanto

$$Ric(X, X) = \sum_{n=1}^{n}\langle\overline{R}(X, E_i), E_i\rangle + |AX + \frac{nH}{2}X|^2 - \frac{n^2H^2}{4}|X|^2.$$

Vejamos o termo $\langle\overline{R}(X, E_i), E_i\rangle$. No que segue, ponha $X = X^* - \langle X, \partial_t\rangle\partial_t$ e $E_i = E_i^* - \langle E_i, \partial_t\rangle\partial_t$, onde $()^*$ denota a projeção em $\mathcal{V}(M)$, então

$$\begin{aligned}\langle\overline{R}(X, E_i)X, E_i\rangle &= \langle\overline{R}(X^*, E_i^*)X^*, E_i\rangle_M \\ &= k_M(X^*, E_i^*)(\langle X^*, X^*\rangle_M\langle E_i^*, E_i^*\rangle_M - \langle X^*, E_i^*\rangle_M^2).\end{aligned}$$

Observe que sendo

$$\begin{aligned}\langle X, X\rangle &= \langle X^* - \langle X, \partial_t\rangle\partial_t, X^* - \langle X, \partial_t\rangle\partial_t\rangle \\ &= -\langle X, \partial_t\rangle^2 + \langle X^*, X^*\rangle_M,\end{aligned}$$

obtemos

$$\langle X^* X^*\rangle_M = |X|^2 + \langle X, \partial_t\rangle^2.$$

Note que

$$\begin{aligned}\langle X, \partial_t\rangle &= \langle X, \partial_t^T\rangle + \langle X, N\rangle\langle N, \partial_t\rangle \\ &= \langle X, \partial_t^T\rangle \\ &= -\langle X, \nabla h\rangle,\end{aligned}$$

ou ainda

$$\langle X, \partial_t\rangle^2 = \langle X, \nabla h\rangle^2.$$

Portanto,

$$\langle X^*, X^*\rangle_M = |X|^2 + \langle X, \nabla h\rangle^2.$$

Da mesma forma, as expressões de $\langle E_i^*, E_i^*\rangle_M$ e $\langle X^*, E_i^*\rangle_M$ são dadas, respectivamente por

$$\langle E_i^*, E_i^*\rangle_M = 1 + \langle E_i, \nabla h\rangle^2$$

e

$$\begin{aligned}\langle X^*, E_i^*\rangle_M &= -\langle X, \partial_t\rangle\langle E_i, \partial_t\rangle - \langle X, E_i\rangle \\ &= -\langle X, \nabla h\rangle\langle E_i, \nabla h\rangle - \langle X, E_i\rangle.\end{aligned}$$

Podemos escrever então

$$\langle X^*, E_i^*\rangle_M^2 = \langle X, E_i\rangle^2 + 2\langle X, \nabla h\rangle\langle E_i, \nabla h\rangle\langle X, E_i\rangle + \langle X, \nabla h\rangle^2\langle E_i, \nabla h\rangle^2$$

e

$$\langle X^*, X^*\rangle_M\langle E_i^*, E_i^*\rangle_M = |X|^2 + |X|^2\langle E_i, \nabla h\rangle^2 + \langle X, \nabla h\rangle^2 + \langle X, \nabla h\rangle^2\langle E_i, \nabla h\rangle^2.$$

Assim

$$\begin{aligned}\langle X^*, X^*\rangle_M \langle E_i^*, E_i^*\rangle_M - \langle X^*, E_i^*\rangle_M^2 = \; & |X|^2 \quad + |X|^2\langle E_i, \nabla h\rangle^2 + \langle X, \nabla h\rangle^2 - \langle X, E_i\rangle^2 \\ & - \quad 2\langle X, \nabla h\rangle\langle E_i, \nabla h\rangle\langle X, E_i\rangle.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\langle \overline{R}(X, E_i), E_i\rangle &\geqslant -k(n|X|^2 + |X|^2|\nabla h|^2 + n\langle X, \nabla h\rangle^2 - |X|^2 - 2\langle X, \nabla h\rangle^2) \\ &\geqslant -k((n-1)|X|^2 + \langle X, \nabla h\rangle^2(n-2) + |X|^2|\nabla h|^2) \\ &\geqslant -k|X|^2(n-1)(1 + |\nabla h|^2).\end{aligned}$$

Com isto concluímos que

$$\begin{aligned}Ric(X, X) &\geqslant -k|X|^2(n-1)(1 + |\nabla h|^2) + |AX + \frac{nH}{2}X|^2 - \frac{n^2H^2}{4}|X|^2 \\ &\geqslant -k|X|^2(n-1)(1 + |\nabla h|^2) - \frac{n^2H^2}{4}|X|^2.\end{aligned}$$

$\square$

Capítulo 3

Resultados tipo Bernstein

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados tipo-Bernstein, que são obtidos a partir de restrições comuns a esse tipo de resultado. Em nosso trabalho, faremos controles específicos sobre a norma do gradiente da função altura, para concluir que uma dada hipersuperfície seja máxima ou um slice.

O próximo teorema se refere à propriedade de uma hipersuperfície ser máxima.

Teorema 3.1. *Seja* $\psi : \Sigma^n \longrightarrow -\mathbb{R} \times M^n$ *uma hipersuperfície tipo-espaço completa imersa em um produto Lorentziano* $-\mathbb{R} \times M^n$ *, cuja curvatura seccional* k_M *de sua fibra* M^n *é tal que* $-k \leqslant k_M \leqslant 0$ *, para alguma constante positiva* k*. Suponha que* Σ^n *esteja entre dois slices de* $-\mathbb{R} \times M^n$ *e que* $|\nabla h|$ *é limitado em* Σ^n*. Se* H *é limitada e não muda de sinal em* Σ^n*, então* H *não pode estar globalmente longe de zero. Em particular, se* H *é constante, então* Σ^n *é máxima.*

Demonstração. Pelo Lema 2.5, a curvatura de Ricci da fibra M^n é limitada inferiormente. Como H não muda de sinal, suponha inicialmente que $H \geqslant 0$ em Σ^n. Considere a função $-h$, onde h denota a função altura e note que $-h$ é limitada inferiormente.

Nas hipóteses do Princípio do Máximo Generalizado de Omori-Yau, existe uma sequência $p_k \in \Sigma^n$ tal que;

$$\lim_{k \to +\infty} -h(p_k) = \inf -h \ , \ \lim_{k \to +\infty} |\nabla -h(p_k)| = 0 \ , \ \lim_{k \to +\infty} \inf \Delta -h(p_k) \geqslant 0.$$

Como $\Delta(-h) = -\Delta h = nH\langle N, \partial_t \rangle$, então

$$0 \leqslant \lim_{k\to+\infty} \inf \Delta -h(p_k) = n \lim_{k\to+\infty} \inf(H\langle N, \partial_t \rangle)(p_k).$$

Mas,

$$0 = \lim_{k\to+\infty} |\nabla - h(p_k)|^2 = \lim_{k\to+\infty} (\langle N, \partial_t\rangle^2(p_k) - 1),$$

o que implica,

$$\lim_{k\to+\infty} \langle N, \partial_t\rangle^2(p_k) = 1.$$

Lembrando que $\langle N, \partial_t\rangle < -1$, teremos $\lim_{k\ \to+\infty} \langle N, \partial_t\rangle(p_k) = -1$. Daí

$$0 \leqslant \lim_{k\to+\infty} \inf \Delta - h(p_k) = n \lim_{k\to+\infty} \inf(H\langle N, \partial_t\rangle)(p_k) \leqslant -n \liminf_{k\to+\infty} H(p_k) \leqslant 0.$$

Como estamos supondo $H \geqslant 0$, concluímos que $\liminf_{k\ \to+\infty} H(p_k) = 0$.

Agora, se $H \leqslant 0$, considere a função h e novamente, nas hipótese do Princípio do Máximo Generalizado de Omori-Yau, chegamos ao resultado. □

O resultado a seguir é uma extensão de dois outros teoremas provados para o caso particular $M^n = \mathbb{H}^n$, obtidos por Albujer [1]. Ampliando a restrição sobre curvatura seccional, obtemos

Teorema 3.2. *Seja* $\psi : \Sigma^n \longrightarrow -\mathbb{R} \times M^n$ *uma hipersuperficíe tipo-espaço, completa, imersa em um produto Lorentziano* $-\mathbb{R} \times M^n$ *com curvatura média constante* H, *cuja curvatura seccional* k_M *de sua fibra* M^n *é tal que* $-k \leqslant k_M \leqslant 0$, *para alguma constante positiva* k. *Suponha que uma das seguintes condições seja satisfeita*

(a) *A função altura* h *de* Σ^n *satisfaz* $|\nabla h|^2 \leqslant \frac{n}{k(n-1)} H^2$.

(b) H_2 *é limitada inferiormente em* Σ^n *e a função altura* h *de* Σ^n *é tal que, para alguma constante* $0 < \alpha < 1$, *vale*

$$|\nabla h|^2 \leqslant \frac{\alpha}{k(n-1)} |A|^2.$$

Então, Σ^n *é um slice.*

Demonstração. Suponha que a condição (a) seja satisfeita. Como $|\nabla h|^2 = \langle N, \partial_t\rangle^2 - 1$, teremos

$$\langle N, \partial_t\rangle^2 = |\nabla h|^2 + 1 \leqslant 1 + \frac{n}{k(n-1)} H^2.$$

Além disso, como $\langle N, \partial_t\rangle \leqslant -1$ então

$$\langle N, \partial_t\rangle \geqslant -\sqrt{1 + \frac{n}{k(n-1)} H^2}.$$

Portanto, $\langle N, \partial_t \rangle$ é limitada inferiormente.

Tendo em mente o Lema 1.9 e visando aplicar o Princípio do Máximo Generalizado de Omori-Yau, analisemos o $\mathrm{Ric}_M(N^*, N^*)$, onde $N^* = N + \langle \partial_t, N \rangle \partial_t$. Note que

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}_M(N^*, N^*) &= \sum_{i=1}^{n} \langle R_M(N^*, E_i)N^*, E_i \rangle_M \\ &= \sum_{i=1}^{n} k_M(N^*, E_i)(\langle N^*, N^* \rangle_M \langle E_i, E_i \rangle_M - \langle N^*, E_i \rangle_M^2) \\ &\geqslant -k \sum_{i=1}^{n} (\langle N^*, N^* \rangle_M - \langle N^*, E_i \rangle_M^2). \end{aligned}$$

Desde que

$$\langle N, N \rangle = \langle N^* - \langle N, \partial_t \rangle \partial_t, N^* - \langle N, \partial_t \rangle \partial_t \rangle,$$

temos que

$$\langle N^*, N^* \rangle_M = -1 + \langle N, \partial_t \rangle^2 = |\nabla h|^2.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}_M(N^*, N^*) &\geqslant -k \sum_{i=1}^{n} (|\nabla h|^2 - \langle N^*, E_i \rangle_M^2) \\ &\geqslant -k(n|\nabla h|^2 - |N^*|^2) = -k(n-1)|\nabla h|^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Delta \langle N, \partial_t \rangle &= (\mathrm{Ric}_M(N^*, N^*) + |A|^2)\langle N, \partial_t \rangle \\ &\leqslant (-k(n-1)|\nabla h|^2 \langle N, \partial_t \rangle + (n^2H^2 - n(n-1)H_2))\langle N, \partial_t \rangle. \end{aligned}$$

Agora, com uma simples manipulação de (a), conseguimos

$$-|\nabla h|^2 k(n-1)\langle N, \partial \rangle \leqslant -nH^2 \langle N, \partial_t \rangle.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \Delta \langle N, \partial_t \rangle &\leqslant (-nH^2 + n^2H^2 - n(n-1)H_2)\langle N, \partial_t \rangle \\ &\leqslant (H^2(n^2 - n) - n(n-1)H_2)\langle N, \partial_t \rangle \\ &\leqslant n(n-1)(H^2 - H_2)\langle N, \partial_t \rangle. \end{aligned}$$

Aplicando o Lema 1.9 em $\langle N, \partial_t \rangle$, conseguimos uma sequência $p_k \in \Sigma^n$ tal que

$$0 \leqslant \lim_{k \to +\infty} \inf \Delta \langle N, \partial_t \rangle (p_k) \leqslant n(n-1) \lim_{k \to +\infty} \langle N, \partial_t \rangle (p_k) \liminf_{k \to +\infty} (H^2 - H_2)(p_k) \leqslant 0,$$

visto que $(H^2 - H_2) \geqslant 0$ e $\langle N, \partial_t \rangle \leqslant -1$. Passando uma subsequencia, se necessário, podemos por

$$\lim_{k \to +\infty} (H^2 - H_2)(p_k) = 0.$$

Pelo Lema 2.1

$$\lim_{k \to +\infty} |A|^2(p_k) = nH^2.$$

Neste ponto, lembrando que $|A|^2 = \sum_{i=1}^{n} k_i^2$, onde k_i denota os autovalores de A e passando outra subsequencia se necessário, podemos supor ainda que

$$\lim_{k \to +\infty} k_i(p_k) = k_i^*, \ k_i^* \in \mathbb{R}.$$

Uma vez que k_i são autovalores de A, coloque

$$H = -\frac{1}{n} \sum_i k_i^*.$$

e construa

$$\frac{n(n-1)}{2}\overline{H_2} \quad = \quad \sum_{i<j} k_i^* k_j^*.$$

Mas

$$\lim_{k \to +\infty} (H^2 - H_2)(p_k) = 0,$$

de onde obtemos $H^2 = \overline{H_2}, 1 \leqslant i \leqslant n$, e daí $k_i^* = -H$, $\forall 1 \leqslant i \leqslant n$.

Agora, seja $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ um referencial ortogonal de autovetores associados aos autovalores $\{k_i\}$ de A. Desse modo, escrevemos $\nabla h = \sum_i \lambda_i e_i$, onde λ_i são funções contínuas em Σ^n.

Lembrando que $\nabla \langle N, \partial_t \rangle = A(\nabla h)$ e que a sequência p_k satisfaz $\lim_{k \to +\infty} |(\nabla \langle N, \partial_t \rangle)(p_k)| = 0$, então

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{k \to +\infty} |\nabla \langle N, \partial_t \rangle|^2(p_k) &= \lim_{k \to +\infty} |A(\nabla h)|^2(p_k) \\ &= \sum_i \lim_{k \to +\infty} (k_i^2 \lambda_i^2)(p_k) \\ &= \sum_i k_i^{*2}. \lim_{k \to +\infty} \lambda_i^2(p_k) = H^2 \sum_{i=1} \lim_{k \to +\infty} \lambda_i^2(p_k). \end{aligned}$$

Se $H = 0$, por hipótese temos

$$|\nabla h|^2 \leqslant \frac{n}{k(n-1)} H^2 = 0,$$

Logo h é constante e portanto Σ^n é um slice.

Se $H > 0$ então $\lim_{k \to +\infty} \lambda_i^2(p_k) = 0$. Note que $\nabla h = \sum_i \lambda_i e_i$ e daí $|\nabla h|^2 = \sum_i \lambda_i^2$, o que implica $\lim_{k \to +\infty} |\nabla h|^2(p_k) = 0$. Como $|\nabla h|^2 + 1 = \langle N, \partial_t\rangle^2$, aplicando a sequência p_k e uma subsequência se necessário, obtemos $\lim_{k \to +\infty} \langle N, \partial_t\rangle^2(p_k) = 1$. Mas como $\langle N, \partial_t\rangle \leqslant -1$, vem que

$$\inf \langle N, \partial_t\rangle(p_k) = \lim_{k \to +\infty} \langle N, \partial_t\rangle(p_k) = -1.$$

Consequentemente $\langle N, \partial_t\rangle = -1$ e assim $|\nabla h| = 0$.

Consideremos agora o caso em que o item (b) é satisfeito. Analogamente ao caso anterior, mostrasse que $\inf_{p \in \Sigma} \langle N, \partial_t\rangle(p)$ existe e é negativo. Vimos também que

$$\mathrm{Ric}_M(N^*, N^*) \geqslant -k \sum_{i=1}^{n} (\langle N^*, N^*\rangle_M - \langle N^*, E_i\rangle_M^2).$$

Como $\langle N, \partial_t\rangle \leqslant -1$, então

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}_M(N^*, N^*)\langle N, \partial_t\rangle &\leqslant -k(n-1)|\nabla h|^2\langle N, \partial_t\rangle \\ &\leqslant -\alpha|A|^2\langle N, \partial_t\rangle. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\Delta\langle N, \partial_t\rangle \leqslant (1-\alpha)|A|^2\langle N, \partial_t\rangle \leqslant 0.$$

O Lema 2.5 e a hipótese (b) garantem que o Ricci é limitado inferiormente e pelo Princípio do Máximo Generalizado de Omori-Yau, existe uma sequência p_k tal que

$$\lim_{k \to +\infty} \langle N, \partial_t\rangle(p_k) = \inf \langle N, \partial_t\rangle\ ,\ \lim_{k \to +\infty} |\nabla\langle N, \partial_t\rangle(p_k)| = 0\ ,\ \liminf_{k \to +\infty} \Delta\langle N, \partial_t\rangle(p_k) \geqslant 0.$$

Segue que

$$0 \leqslant \liminf_{k \to +\infty} \Delta\langle N, \partial_t\rangle(p_k) \leqslant (1-\alpha) \liminf_{k \to +\infty} |A|^2(p_k). \inf_{p \in \Sigma} \langle N, \partial_t\rangle \leqslant 0.$$

Passando a uma subsequência, se necessário, podemos pôr

$$\lim_{k \to +\infty} |A|^2(p_k) = 0,$$

e usar a desigualdade na hipótese (b) para obter

$$\lim_{k \to +\infty} |\nabla h|^2(p_k) = 0,$$

o que implica

$$\lim_{k\ \to+\infty} \langle N, \partial_t \rangle^2(p_k) = 1.$$

Como

$$\lim_{k\ \to+\infty} \langle N, \partial_t \rangle^2(p_k) = \sup_{p\in\Sigma} \langle N, \partial_t \rangle^2 = 1,$$

então $\langle N, \partial_t \rangle^2 \geqslant 1$. Segue que $\langle N, \partial_t \rangle^2 = 1$ e daí $|\nabla h| = 0$. Portanto, Σ^n é um slice. □

Voltemos à propriedade de uma hipersuperfície ser máxima. Agora impondo que a curvatura média não muda de sinal e que a norma do gradiente pertence a $\mathcal{L}^1(\Sigma^n)$, podemos concluir que essa hipersuperfície é máxima. Além disso, se adicionarmos mais algumas hipóteses sobre a curvatura de Ricci de M^n, podemos constatar ainda que esta é um slice.

Teorema 3.3. *Seja $\psi : \Sigma^n \longrightarrow -\mathbb{R} \times M^n$ uma hipersuperficíe tipo-espaço completa imersa em um produto Lorentziano $-\mathbb{R} \times M^n$ tal que sua curvatura média não muda de sinal. Se $|\nabla h| \in \mathcal{L}^1(\Sigma^n)$, então Σ^n é máxima. Além disso, se H_2 é limitada inferiormente em Σ^n e a curvatura de Ricci Ric_M da fibra M^n é não negativa, então Σ^n é totalmente geodésica. Finalmente, se Ric_M é estritamente positiva, então Σ^n é um slice.*

Demonstração. Como H não muda de sinal em Σ^n, vê-se que $\Delta h = -nH\langle N, \partial_t \rangle$ também não muda de sinal. Pelo Lema 1.10, h é harmônica, ou seja, $-nH\langle N, \partial_t \rangle = \Delta h = 0$. Como $\langle N, \partial_t \rangle \leqslant -1 < 0$, teremos $H \equiv 0$ e portanto Σ^n é máxima.

Além disso, se H_2 é limitado inferiormente e o Ric_M é não negativo, podemos usar

$$|A|^2 = n^2H^2 - n(n-1)H_2$$

para concluir que $|A|$ é limitada. Lembrando que $\nabla\langle N, \partial_t \rangle = A(\nabla h)$, vê-se que $|\nabla\langle N, \partial_t \rangle| \leqslant |A||(\nabla h)| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$. Pelo Lema 1.10, teremos $\langle N, \partial_t \rangle$ harmônica e daí

$$(\mathsf{Ric}_M(N^*, N^*) + |A|^2)\langle N, \partial_t \rangle = \Delta\langle N, \partial_t \rangle = 0,$$

e é imediato que

$$\mathsf{Ric}_M(N^*, N^*) + |A|^2 = 0.$$

Como ambos os termos são não negativos, concluímos que $|A|^2 = 0$. Agora, supondo que Ric_M é estritamente positivo em Σ^n, como acabamos de concluir que $\mathsf{Ric}_M(N^*, N^*) = 0$, teremos que $N^* = 0$ em Σ^n. Portanto, $N = N^* - \langle \partial_t, N \rangle \partial_t = -\langle \partial_t, N \rangle_t \partial_t$ é paralelo a ∂_t e então concluímos que Σ^n é um slice. □

Capítulo 4

Gráficos Verticais

Nesta seção faremos uma breve abordagem sobre os gráficos verticais e casos particulares dos teoremas tratados na capítulo anterior.

Definição 4.1. *Sejam Ω um domínio conexo de uma variedade Riemanniana conexa M^n e $u \in C^\infty(\Omega)$. O gráfico vertical de u em $-\mathbb{R} \times M^n$ é a hipersuperfície*

$$\Sigma^n(u) = \{(u(x), x),\ x \in \Omega\} \subset -\mathbb{R} \times M^n.$$

Dizemos que o gráfico vertical é inteiro quando $\Omega = M^n$.

A métrica induzida em Ω a partir da métrica Lorentziana no espaço ambiente via $\Sigma^n(u)$ é

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = -du^2 + \langle \cdot, \cdot \rangle_M.$$

O próximo lema no mostra que uma restrição sobre o gradiente da função que define o gráfico, nos fornece gráficos tipo-espaço.

Lema 4.1. *Um gráfico em $-\mathbb{R} \times M^n$ é tipo-espaço se, e somente se, $|\nabla u| < 1$ e, neste caso,*

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 - |\nabla u|^2}}(\partial_t + \nabla u),$$

onde ∇u denota o gradiente de u em M^n e N é a aplicação de Gauss apontando para o futuro em $\Sigma^n(u)$.

Demonstração. Inicialmente, como

$$\begin{aligned} \langle X, X \rangle &= -\nabla u^2 X + \langle X, X \rangle_M \\ &= \langle X, X \rangle_M - \langle \nabla u, X \rangle_M^2 \geqslant (1 - |\nabla u|^2)\langle X, X \rangle_M, \end{aligned}$$

então o gráfico $\Sigma^n(u)$ é tipo-espaço se e somente se, $|\nabla u| < 1$.

Analisemos seu campo normal. Seja $g : -\mathbb{R} \times M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(t, x) = t - u(x)$. Note que g é tal que $\Sigma^n(u) = g^{-1}(0)$.

Mostremos que ∇g é um campo normal sobre $\Sigma^n(\Omega)$. De fato, dados $p \in \Sigma^n(u)$ e $v \in T_p\Sigma^n(u)$, seja $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \Sigma^n(u)$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Temos

$$\langle v, \nabla g\rangle = v(g) = \alpha'(0) = \frac{d}{dt}(g \circ \alpha)(t)\mid_{t=0} = 0,$$

o que implica, $\nabla g \perp v$, $\forall v \in T_p\Sigma^n(u)$.

Além disso, escrevendo $v = (\lambda\partial_t, w)$, onde $w \in T_qM^n$, $q = \pi_M(p)$, então

$$\begin{aligned} v(g) &= \lambda\partial_t(g) + w(g) \\ &= \lambda\partial_t(t - u(x)) + w(t - u(x)) \\ &= \lambda - w(u(x)) \\ &= -\langle\lambda\partial_t, \partial_t\rangle - \langle\nabla u, w\rangle \\ &= \langle -\partial_t - \nabla u, v\rangle. \end{aligned}$$

Logo $\langle -\partial_t - \nabla u, v\rangle = \langle\nabla g, v\rangle$, $\forall v \in T_p\Sigma^n(u)$. Como a métrica é não degenerada concluímos que $\nabla g = -\partial_t - \nabla u$.

Para obtermos um campo apontando para o futuro, escolheremos $\overline{N} = -\nabla g$. Veja que $\langle\overline{N}, \partial_t\rangle = \langle\partial_t + D(u), \partial_t\rangle = -1 < 0$. Lembrando que $\langle\overline{N}, \overline{N}\rangle = -1 + |\nabla u|^2$ e assim $\overline{N}$ é tipo-tempo. É imediato que a aplicação normal de gauss é

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 - |\nabla u|^2}}(\partial_t + \nabla u).$$

$\square$

Os próximos resultados são casos particulares dos teoremas tratados na seção anterior.

Corolário 4.1. *Seja $\Sigma^n(u)$ um gráfico vertical, inteiro, tipo-espaço em um espaço produto Lorentziano $-\mathbb{R} \times M^n$, cuja fibra M^n é completa e tal que sua curvatura seccional K_M satisfaz $-k \leqslant k_M \leqslant 0$, para alguma constante positiva k em $\mathbb{R}$. Suponha que $\Sigma^n(u)$ esteja entre dois slices de $-\mathbb{R} \times M^n$. Se $|\nabla u| \leqslant \alpha$, para alguma constante $0 < \alpha < 1$, H é limitada e não muda de sinal em $\Sigma^n(u)$, então $\Sigma^n(u)$ é completo e H não pode estar globalmente longe de zero. Em particular, se H é constante então $\Sigma^n(u)$ é máximo .*

Demonstração. Mostremos inicialmente que $\Sigma^n(u)$ é uma hipersuperfície completa. Sabemos que

$$\langle X, X\rangle \geqslant (1 - |\nabla u|^2)\langle X, X\rangle_M.$$

Como $|\nabla u| \leqslant \alpha$ temos $|\nabla u|^2 \leqslant \alpha^2$, e daí $1 - |\nabla u|^2 \geqslant 1 - \alpha^2$. Assim,

$$\langle X, X\rangle \geqslant (1 - \alpha^2)\langle X, X\rangle_M.$$

Isso implica que $L \geqslant \sqrt{1-\alpha^2}L_M$, onde L e L_M denota o comprimento da curva em $\Sigma^n(u)$ com relação as métricas $\langle .,.\rangle$ e $\langle .,.\rangle_M$. Como M^n é completa, então a métrica induzida em $\Sigma^n(u)$ também é completa.

Vejamos agora o gradiente da função altura. Pela expressão de N, tem-se

$$\langle N, \partial_t\rangle = -\frac{1}{\sqrt{1 - |\nabla u|^2}}.$$

Como $|\nabla h|^2 = -1 + \langle N, \partial_t\rangle^2$, então

$$|\nabla h|^2 = -1 + \frac{1}{1 - |\nabla u|^2} = \frac{|\nabla u|^2}{1 - |\nabla u|^2}.$$

Uma vez que $|\nabla u| \leqslant \alpha$, obtemos

$$|\nabla h| \leqslant \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2}.$$

Assim, pelo Teorema 3.1, segue o corolário. □

Outros resultados análogos são obtidos a partir da substituição da restrição na norma do gradiente da função altura por uma limitação sobre a função que determina o gráfico. Mais precisamente temos o seguinte resultado.

Corolário 4.2. *Seja Σ^n um gráfico vertical tipo-espaço, inteiro, imerso com curvatura média H constante em um produto Lorentziano do espaço $-\mathbb{R} \times M^n$, cuja fibra M^n é completa e cuja a curvatura seccional k_M de sua fibra M^n é tal que $-k \leqslant k_M \leqslant 0$, para alguma constante positiva k. Suponha que uma das seguintes condições seja satisfeita:*

(a) $|\nabla u|^2 \leqslant \frac{nH^2}{k(n-1)+nH^2}$.

(b) H_2 *é limitada inferiormente em $\Sigma^n(u)$ e Σ^n é tal que, para alguma constante $0 < \alpha < 1$, vale*

$$|\nabla u|^2 \leqslant \frac{\alpha|A|^2}{k(n-1) + \alpha|A|^2}.$$

Então, Σ^n é um slice.

Corolário 4.3. *Seja $\Sigma^n(u)$ um gráfico vertical, tipo-espaço e inteiro em um produto Lorentziano do espaço $-\mathbb{R}\times M^n$, cuja fibra M^n é completa. Suponha que a curvatura média H não muda de sinal em $\Sigma^n(u)$. Se $|\nabla u|\leqslant\alpha$, então $\Sigma^n(u)$ é completa e máxima. Além disso, se H_2 é limitada inferiormente em $\Sigma^n(u)$ e a curvatura de Ricci da fibra M^n é não negativa, então $\Sigma^n(u)$ é totalmente geodésica. Finalmente, se o Ricci é estritamente positivo, então $\Sigma^n(u)$ é um slice.*

4.1 Exemplo

O exemplo a seguir mostra que a condição da hipersuperficie Σ^n situar-se entre dois slices de $-\mathbb{R}\times M^n$, é uma hipótese necessária no Teorema 3.1 para concluirmos que a curvatura média de Σ^n não pode ser globalmente limitada longe de zero.
Veremos também mostra que a suposição

$$|\nabla h|^2\leqslant\frac{\alpha}{k(n-1)}|A|^2$$

não pode ser estendida para $\alpha=1$.

Exemplo 4.1. *Consideremos a função suave $u:\mathbb{H}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ dado por $u(x,y)=a\ln y$, $|a|<1$. O gráfico vertical inteiro de u é dada por*

$$\Sigma^2(u)=\{(a\ln y,x,y),\ y>0\}\subset-\mathbb{R}\times\mathbb{H}^2$$

O gradiente ∇u de u é dado por $\nabla u(x,y)=(0,ay)$.
De fato, com referencial ortogonal $\{E_1=y\partial_x,E_2=y\partial_y\}$ em $\mathbb{H}^2$ e pela definição de gradiente temos, para $\xi_i=\langle E_i,E_i\rangle$

$$\begin{aligned}\nabla u(x,y)&=\sum_{i=1}^{2}\xi_i\frac{\partial u}{\partial E_i}E_i\\&=E_2(u)E_2\\&=y\partial_y(a\ln y)E_2\\&=aE_2\\&=(0,ya).\end{aligned}$$

Além disso, como a métrica induzida em $\mathbb{H}^2$ é dada por

$$\langle x,y\rangle_{\mathbb{H}^2}=\frac{1}{y^2}(dx^2+dy^2),$$

então $|\nabla u(x,y)|^2 = |a|^2$. Para que $\Sigma^2(u)$ seja uma hipersuperfície espacial completa devemos ter $|a| < 1$.

Note que $\mathbb{H}^2$ tem curvatura seccional constante igual a -1, é simplesmente conexo e completo.

Lembrando que a norma do gradiente da função altura é dada por

$$\begin{aligned} |\nabla h|^2 &= \frac{|\nabla u|^2}{1-|\nabla u|^2} \\ &= \frac{|a|^2}{1-|a|^2}, \end{aligned}$$

vê-se que $|\nabla h|^2$ é constante e não nulo, ou seja, é limitado.

Mostremos agora que a curvatura média H de $\Sigma^2(u)$ é constante. Sabemos que $2H = -\mathrm{tr}(A)$, o que motiva a analise da expressão de Ax. Com efeito, dado $\overline{X} \in \mathfrak{X}(\Sigma^n(u))$, podemos por

$$\overline{X} = \langle \nabla u, X\rangle_{\mathbb{H}^2}\partial_t + X,$$

onde X é a projeção de $\overline{X}$ em $\mathfrak{X}(\mathbb{H})$ e $\overline{\nabla}$ denota a conexão de Levi-Civita de $-\mathbb{R}\times\mathbb{H}^2$. Para facilitar, vamos omitir o índice $\mathbb{H}^2$ da métrica $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{H}^2}$.

Assim,

$$\begin{aligned} A\overline{X} &= -\overline{\nabla}_{\overline{X}}N \\ &= -\langle \nabla u, X\rangle \overline{\nabla}_{\partial_t}N - \overline{\nabla}_X N. \end{aligned}$$

Utilizando a expressão de N, obtemos

$$\begin{aligned} A\overline{X} &= -\langle \nabla u, X\rangle \overline{\nabla}_{\partial_t}\Big(\frac{\partial_t + \nabla u}{\sqrt{1-|\nabla u|^2}}\Big) - \overline{\nabla}_X\Big(\frac{\partial_t + \nabla u}{\sqrt{1-|\nabla u|^2}}\Big) \\ &= -\overline{\nabla}_X\Big(\frac{\nabla u}{\sqrt{1-|\nabla u|^2}}\Big) \\ &= -\frac{\overline{\nabla}_X \nabla u}{\sqrt{1-|\nabla u|^2}} - \frac{\nabla u}{(\sqrt{1-|\nabla u|^2})^{\frac{3}{2}}}\langle \overline{\nabla}_X\nabla u, \nabla u\rangle. \end{aligned}$$

Vemos então que

$$\begin{aligned} 2H &= -Div\Big(\frac{\nabla u}{\sqrt{1-|\nabla u|^2}}\Big) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-|a|^2}}Div(\nabla u) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-|a|^2}}\Delta_{\mathbb{H}^2}u. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\Delta_{\mathbb{H}^2} u &= \sum_{i=1}^{2} \langle \nabla_{E_i} \nabla u, E_i \rangle \\
&= a \langle \nabla_{E_1} E_2, E_1 \rangle \\
&= \frac{a}{2} \{ E_2 \langle E_1, E_1 \rangle + E_1 \langle E_1, E_2 \rangle - E_1 \langle E_2, E_1 \rangle \\
&\quad - \langle [E_2, E_1], E_1 \rangle - \langle [E_1, E_1], E_2 \rangle + \langle [E_1, E_2], E_1 \rangle \} \\
&= -a \langle [E_2, E_1], E_1 \rangle \\
&= -a \langle E_1, E_1 \rangle \\
&= -a,
\end{aligned}
$$

onde na terceira igualdade usamos a fórmula de Kozul. Assim, segue que a curvatura média é constante e igual a $H = \dfrac{-a}{2\sqrt{1-a^2}}$.

Veja ainda que $|\nabla h|^2 = |A|^2$. Com efeito, como $\langle N, \partial_t \rangle = -\frac{1}{\sqrt{1-|\nabla u|^2}}$ é constante, pelo Lema 2.4 obtemos

$$
0 = \Delta \langle N, \partial_t \rangle = (|A|^2 + \mathrm{Ric}_{\mathbb{H}^2}(N^*, N^*)) \langle N, \partial_t \rangle.
$$

Além disso, como $k_{\mathbb{H}^2} = -1$, então

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ric}_{\mathbb{H}^2}(N^*, N^*) &= \sum_{i=1}^{2} k_{\mathbb{H}^2}(N^*, E_i)(\langle N^*, N^* \rangle_{\mathbb{H}^2} \langle E_i, E_i \rangle_{\mathbb{H}^2} - \langle N^*, E_i \rangle_{\mathbb{H}^2}^2) \\
&= -\sum_{i=1}^{2} (\langle N^*, N^* \rangle_{\mathbb{H}^2} - \langle N^*, E_i \rangle_{\mathbb{H}^2}^2) \\
&= -2 \langle N^*, N^* \rangle_{\mathbb{H}^2} + \langle N^*, N^* \rangle_{\mathbb{H}^2} \\
&= -\langle N^*, N^* \rangle_{\mathbb{H}^2} = -|\nabla h|^2.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
0 = \Delta \langle N, \partial_t \rangle = (|A|^2 - |\nabla h|^2) \langle N, \partial_t \rangle.
$$

Portanto $|\nabla h|^2 = |A|^2$, ou ainda $|\nabla h|^2 \leqslant |A|^2$.

Veja ainda que, a partir do Lema 2.1, obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{|a|^2}{1-|a|^2} = |\nabla h|^2 &= |A|^2 = 4H^2 - 2.1.H_2 \\
&= \frac{a^2}{1-a^2} - 2H_2.
\end{aligned}
$$

Vemos que $H_2 = 0$ em $\Sigma^2(u)$(é limitada). Mas $H_2 = k_1k_2$, onde k_1, k_2 denota os autovalores de A. Suponha então que $k_1 = 0$ e veja que

$$-\frac{a}{2\sqrt{1-a^2}} = H = -\frac{k_1+k_2}{2} = -\frac{k_2}{2},$$

de onde concluímos que

$$k_2 = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}.$$

Referências Bibliográficas

[1] Albujer, A.L., Camargo, F., de Lima, H. F., - Complete spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in $-\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$. J. Math. Anal. Appl, 368, 650-657(2010).

[2] Alma L. Albujer, New examples of entire maximal graphs in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, Differential Geometry and its Applications. V.26, Issue 4, (2008), Pages 456-462, ISSN 0926-2245.

[3] Alma L. Albujer, Luis J. Alías, Calabi-Bernstein results for maximal surfaces in Lorentzian product spaces, Journal of Geometry and Physics, V.59, Issue 5, 2009, Pages 620-631, ISSN 0393-0440, https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2009.01.008.

[4] Bernstein, S. N, Sur Une théorème de géometrie es ses applications aux dérivées partielles du type elliptique. Comm. Inst. Sci. Math. Meh. Univ. Kharkov. V.15, P.38-48, (1915).

[5] Caminha, A., De Lima, H.F., Complete Vertical Graphs with Constant Mean Curvature in Semi-Riemannian Warped Products. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 16 (2009).

[6] Caballero, M., Romero, A. S Rubio, R.M., Calabi-Bernstein-Type Problems for Some Nonlinear Equations Arising in Lorentzian Geometry. J Math Sci, 207, 544-550 (2015).

[7] E. Calabi, Examples of Bernstein Problems for Some nonlinear Equations. Proc. Sympos. Pure Math. U.15, P.223-230, (1970).

[8] de Lima, H.F., Lima Jr, E.A., Generalized maximum principles and the unicity of complete spacelike hypersurfaces immersed in a Lorentzian product space. Beitr Algebra Geom,55, 59-75 (2014).

[9] de Lima, H.F., Parente, U.L., A Bernstein type theorem in $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$. Bull Braz Math Soc, New Series 43, 17-26 (2012). https://doi.org/10.1007/s00574-012-0003-5.

[10] de Lima, H. F., Lima Júnior, E. A., Parente, U. L., Hypersurfaces with prescribed angle function. Pacific Journal of Mathematics, V.269, p. 393-406, (2014).

[11] do Carmo, M. P., Geometria Riemanniana. Projeto Euclides - IMPA, (2005).

[12] Latorre, J.M., Romero, A., Uniqueness of Noncompact Spacelike Hypersurfaces of Constant Mean Curvature in Generalized Robertson-Walker Spacetimes. Geometriae Dedicata, 93, 1-10 (2002).

[13] Lima Jr, E. A., Uniqueness of hypersurfaces immersed on Riemannian and Lorentzian spaces:Results, Examples and Counter-Examples. UFC, Dissertação de Doutorado, (2015).

[14] H. Rosenberg, Minimal surfaces in $M^2 \times \mathbb{R}$, Illinois J. Math. 46, 1177-1195(2002).

[15] L.J. Alías, A.G. Colares, Uniqueness of spacelike hypersurfaces with constant higher order mean curvature in generalized Robertson-Walker spacetimes, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 143, 703-729, (2007).

[16] O'Neill,B., Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity. Academic Press, London (1983).

[17] Fernandes, T.A, O teorema das curvaturas principais e aplicações. UFPA, dissertação mestrado, (2010).

[18] Omori, H., Isometric immersions of Riemannian manifolds. J. Math. Soc. Japan V.19, No. 2, (1967).

[19] Yau, S.T., Harmonic functions on complete Riemannian manifolds. Comm. Pure Appl. Math., V.28, 201-228 (1975).

[20] Yau, S.T., Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifolds and their applications to geometry. Indiana Univ. Math. J. 25, 659-670 (1976).

[21] Yau, S.T., Cheng, S.T., Maximal spacelike hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski space Ann. of Math., 104, pp. 407-419 (1976).