Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
doutorado em Matemática

Rigidez de hipersuperfícies em um conjunto de dados iniciais e umbilicidade em espaços conformemente plano

Alexandre Bezerra do Nascimento Lima

Teresina - 2022

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Rigidez de hipersuperfícies em um conjunto de dados iniciais e umbilicidade em espaços conformemente plano

Alexandre Bezerra do Nascimento Lima

Esta Tese foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Doutor em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Piauí.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita em conformidade com as normas da ética científica.

Tese aprovada em 20 de setembro de 2022.

Banca Examinadora:

Paulo Alexandre Araújo Sousa
Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa - Orientador

Halyson Irene Baltazar
Prof. Dr. Halyson Irene Baltazar - UFPI

Rondinelle Marcolino Batista
Prof. Dr. Rondinelle Marcolino Batista - UFPI

Benedito Leandro Neto
Prof. Dr. Benedito Leandro Neto - UFG

Levi Lopes de Lima
Prof. Dr. Levi Lopes Lima- UFC

Alexandre Bezerra do Nascimento Lima

Tese de Doutorado:

Rigidez de hipersuperfícies em um conjunto de dados iniciais e umbilicidade em espaços conformemente plano

Tese submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa
Coorientador:
Prof. Dr. Rondinelle Marcolino Batista

Teresina - 2022

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Sistema de Bibliotecas da UFPI – SIBi/UFPI
Biblioteca Setorial do CCN

L732r Lima, Alexandre Bezerra do Nascimento.
Rigidez de hipersuperfícies em um conjunto de dados iniciais e umbilicidade em espaços conformemente plano / Alexandre Bezerra do Nascimento Lima. – 2022.
61 f. : il.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciências da Natureza, Pós-Graduação em Matemática, Teresina, 2022.
"Orientador: Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa".

1.Teorema de Jellettt. 2. Desigualdade Heintze-Karcher. I. Sousa, Paulo Alexandre Araújo. II.Título.

CDD 516.3

Bibliotecária: Caryne Maria da Silva Gomes. CRB/3-1461

Dedico este trabalho às minhas filhas Alessandra e Alana.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus pelo dom da vida, pela saúde e paz que tenho até hoje, sem dúvida sem essa força não teria concluído este trabalho. Em seguida agradeço à minha família, em especial minha mãe Jarmelinda Bezerra da Silva e meu pai Jânio do Nascimento Lima a quem agradeço imensamente pelo dom da vida. Agradeço minha avó Rosa Bezerra Cavalcante que teve e tem um papel fundamental em minha vida, obrigado minha avó.

Agradeço a meus irmãos Jair e Vânia, que tive o prazer de conviver e crescer com eles, meu irmão Jair apesar de não estar mais entre nós foi de suma importância minha convivência com ele para chegar onde cheguei.

Agradeço à minha noiva Gislene Cunha Carneiro por ter uma participação fundamental nesta etapa final, você esteve comigo em todos os momentos, nos momentos mais difícies me acalmou e me trouxe paz, amo você.

Agradeço aos Professores Halyson Baltazar, Benetido Leandro e Levi Lopes de Lima por participarem da minha banca. Meus sinceros agradecimentos aos Professores Orientadores Paulo Alexandre e Rondinelle Marcolino pela excelente escolha do tema e por me auxiliar nas diversas etapas deste trabalho. A todos muito Obrigado.

"Basta ser sincero e desejar profundo,
você será capaz de sacudir o mundo.".

Raul Seixas.

Resumo

Na primeira parte deste trabalho, exploramos “marginally outer trapped surface (MOTS)” Σ^2 em um conjunto de dados inicias M^3 para as equações de Einstein-Maxwell sem campo magnético e com constante cosmológica Λ. Assumindo que Σ^2 é MOTS estável e tem gênero $g(\Sigma)$, nós obtemos uma desigualdade que relaciona a área de Σ^2, $g(\Sigma)$, Λ e a carga $q(\Sigma)$ de Σ^2. No caso da igualdade, provamos que localmente M é um cilindro sobre Σ^2. Se $\Lambda > 0$, nós concluímos que Σ^2 é uma 2-esfera redonda. Nós também mostramos que localmente este conjunto de dados iniciais pode ser mergulhado como uma hipersuperfície tipo-espaço no espaço-tempo de Nariai carregado. Na segunda parte, nós consideramos $\Sigma^2 \subset M$ uma superfície two-sided, fechada, mínima, estritamente estável que localmente minimiza a massa de Hawking carregada, provamos um resultado de rigidez local e concluímos que uma vizinhança de Σ^2 em M é isométrica ao espaço Anti-de Sitter Reissner-Nordström. Ao mesmo tempo, deduzimos uma estimativa para a área de uma superfície $\Sigma^2 \subset M$ two-sided, compacta de gênero $g(\Sigma)$ que é localmente minimizante de área. No caso da igualdade, provamos que Σ tem curvatura Gaussiana constante e localmente M é um cilindro sobre Σ^2. Na última parte, nós consideramos hipersuperfícies em espaços conformemente plano e provamos uma extensão do Teorema de Jellett. Também provamos uma desigualdade tipo Heintze-Karcher, e apresentamos uma família a 1-parâmetro de espaços conformemente plano (todos distintos dos espaços formas) nos quais vale a desigualdade tipo Heintze-Karcher.

Palavras-chaves: Marginally outer trapped surface; Massa de Hawking carregada; Teorema de Jellett; Desigualdade tipo Heintze-Karcher .

Abstract

In the first part of this work we explore marginally outer trapped surface (MOTS) Σ^2 in a initial data set M^3 for the Einstein-Maxwell equations without a magnetic field and with cosmologial constant Λ. Assuming that Σ^2 is stable MOTS and has genus $g(\Sigma)$, we obtain an inequality relating the area of Σ^2, $g(\Sigma)$, Λ and the charge $q(\Sigma)$ of Σ. If equality occurs, we prove that locally M splits along Σ^2. In the particular case $\Lambda > 0$, we conclude that Σ^2 is a round 2-sphere. We further show that these initial data sets locally embed as spacelike hypersurfaces into the Charged Nariai spacetime. In the second part we consider $\Sigma^2 \subset M$ a two-sided compact embedded strictly stable minimal surface which locally maximizes the charged Hawking mass. Under suitable constrains on M, we establish a local rigidity result and conclude that there exist a neighborhood of Σ^2 in M isometric to the Reissner-Nordström-Anti-de Sitter space. At the same time, we will deduce an estimate for area of $\Sigma^2 \subset M$ a two-sided compact embedded surface of genus $g(\Sigma)$ which is locally area-minimizing. In the equality case, we prove that the induced metric on Σ has constant Gauss curvature and locally M splits along Σ^2. In the last part we consider a class of conformally flat spaces and we will prove an extension of Jellett's theorem. We also prove a Heintze-Karcher type inequality and we presented a 1-parametric family of conformally flat spaces, all distinct from space forms, where it holds a Heintze-Karcher type inequality.

Keywords: Marginally outer trapped surface, charged Hawking mass, Jellett's theorem, Heintze-Karcher type inequality.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Inicialmente, consideremos uma variedade Riemanniana 3-dimensional (M^3, g) e uma superfície Σ^2 em M. Cai e Galloway provaram o seguinte resultado (veja [12]):

Teorema 1.1. *(Cai-Galloway) Seja* (M^3, g) *uma variedade Riemanniana com curvatura escalar não-negativa. Se* Σ^2 *é um 2-toro two-sided mergulhado em* M *que localmente é minimizante de área, então* M *é plana em uma vizinhança de* Σ*, ou seja, existe uma vizinhança de* Σ *em* M *isométrica ao produto*

$$((-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma, dt^2 + g_\Sigma),$$

onde g_Σ*, a métrica sobre* Σ*, induzida de* M*, é plana.*

Dois resultados similares ao teorema acima foram obtidos por Bray-Brendle-Neves [9] para o caso $g(\Sigma) = 0$ e Nunes [26] para o caso $g(\Sigma) \geqslant 2$, mais especificamente

Teorema 1.2. *(Bray-Brendle-Neves) Seja* (M^3, g) *uma variedade Riemanniana com curvatura escalar limitada inferiormente por uma constante positiva, ou seja, existe* $c > 0$ *tal que* $R_g \geqslant 2c$*. Se* Σ^2 *é uma 2-esfera mergulhada em* M *que localmente é minimizante de área, então*

$$|\Sigma| \leqslant \frac{4\pi}{c}.$$

Além disso, se vale a igualdade acima, então existe uma vizinhança de Σ *em* M *isométrica ao produto* $((-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma, dt^2 + g_\Sigma)$*, onde* (Σ, g_Σ) *é a esfera redonda de raio* $\frac{1}{\sqrt{c}}$*.*

Teorema 1.3. *(Nunes) Seja* (M^3, g) *uma variedade Riemanniana com curvatura escalar limitada inferiormente por uma constante negativa, ou seja, existe* $c > 0$ *talque* $R_g \geqslant -2c$*. Se* Σ^2 *é uma superfície de Riemann fechada, two-sided mergulhada em* M *de gênero* $g(\Sigma) \geqslant 2$ *que localmente é minimizante de área, então*

$$|\Sigma| \geqslant \frac{4\pi(g(\Sigma) - 1)}{c}.$$

Além disso, se vale a igualdade acima, então existe uma vizinhança de Σ *em* M *isométrica ao produto* $((-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma, dt^2 + g_\Sigma)$*, onde* (Σ, g_Σ) *tem curvatura Gaussiana constante igual a* $-c$*.*

As provas dadas por Cai-Galloway, Bray-Brendle-Neves e Nunes para os teoremas anteriores são distintas, mas Micallef e Moraru [25] deram uma prova unificada para tais teoremas.

Do ponto de vista da Teoria da Relatividade, podemos enunciar os Teoremas 1.1,1.2 e 1.3 como (M, g, K) sendo um conjunto de dados inicias para as equações de Einstein-Maxwell com tempo-simétrico (ou maximal), ou seja, a segunda forma fundamental K de M é nula (ou $\mathrm{tr}K = 0$), satisfazendo a condição de energia dominante (Definição 2.1). Nos Capítulos 2 e 3 desta tese trabalharemos com um conjunto de dados iniciais (M^3, g, K, E, μ, J) (campo magnético nulo). Uma pergunta importante é saber se existem versões mais gerais, não-tempo-simétrico, por exemplo, para os teoremas acima. Nessa direção, Galloway e Mendes obtiveram a seguinte versão do Teorema 1.2 (veja [16]).

Teorema 1.4. *(Galloway-Mendes) Seja* (M^3, g, K) *um conjunto de dados iniciais em um espaço-tempo* $(\mathcal{M}^4, \gamma)$*. Seja* Σ^2 *uma MOTS esférica fracamente outermost e outer minimizante de área em* M^3*. Suponha que exista uma constante* $c > 0$ *talque* $\overline{\mu} - |\overline{J}| \geqslant c$ *em* M_+*. Então,*

$$|\Sigma| \leqslant \frac{4\pi}{c}.$$

Além disso, se vale a igualdade, então uma vizinhança $U \approx [0, \epsilon) \times \Sigma$ *de* Σ *em* M *é isométrica ao produto* $([0, \epsilon) \times \Sigma, dt^2 + g_\Sigma)$*, onde* (Σ^2, g_Σ) *é a 2-esfera redonda de raio* $\frac{1}{\sqrt{c}}$*. Também, para cada slice* $\Sigma_t \approx \{t\} \times \Sigma$*, temos que* $K|_{T_x\Sigma_t \times T_x\Sigma_t} = 0$*, para todo* $x \in \Sigma_t$*.*

Aqui $\overline{\mu} = G(u, u)$ e $\overline{J}(\cdot) = G(u, \cdot)|_{T_pM}$, para cada $p \in M$ onde $G = \mathrm{Ric}_\gamma - \frac{R_\gamma}{2}\gamma$ é o tensor de Einstein e u é um vetor tipo-tempo normal a M apontando para o futuro.

O caso similar ao Teorema 1.3, no contexto de não-tempo-simétrico foi provado por Mendes [23], mais precisamente o autor obteve o seguinte resultado

Teorema 1.5. *(Mendes) Seja (M^3, g, K) um conjunto de dados iniciais em um espaço-tempo $(\mathcal{M}^4, \gamma)$. Seja Σ^2 uma MOTS fechada fracamente outermost e orientável de gênero $g(\Sigma) \geqslant 2$ em M. Suponha que exista uma constante $c > 0$ talque $\overline{\mu} - |\overline{J}| \geqslant -c$ em M_+ e K é 2-convexo. Então,*

$$|\Sigma| \geqslant \frac{4\pi(g(\Sigma) - 1)}{c}.$$

Além disso, se vale a igualdade, então uma vizinhança $U \approx [0, \epsilon) \times \Sigma$ de Σ em M é isométrica ao produto $([0, \epsilon) \times \Sigma, dt^2 + g_\Sigma)$,onde (Σ^2, g_Σ) tem curvatura Gaussiana constante $k_\Sigma = -c$. Também, para cada slice $\Sigma_t \approx \{t\} \times \Sigma$, temos que $K|_{T_x\Sigma_t \times T_x\Sigma_t} = 0$, para todo $x \in \Sigma_t$.

No Capítulo 2, obtemos um resultado na direção dos Teoremas 1.4 e 1.5 em um conjunto de dados inciais não-tempo-simétrico com campo elétrico não-nulo. O Teorema obtido inclui o caso em que $g(\Sigma) = 1$ e unifica, nesse contexto, os resultados obtidos por Galloway-Mendes e Mendes, citados acima. Obtemos uma desigualdade envolvendo a área de Σ, o gênero $g(\Sigma)$, a constante cosmológica Λ e a carga elétrica $q(\Sigma)$ de Σ. No caso da igualdade obtemos o resultado principal desse capítulo, mais precisamente:

Teorema 1.6. *(Teorema 2.1) Seja (M^3, g, K, E, μ, J) um conjunto de dados inicias com $\operatorname{div} E = 0$. Seja $\Sigma^2 \subset M$ uma MOTS orientável, fechada que separa M e é fracamente outermost. Suponha que $\mu - |J| \geqslant 0$ em M_+ e que K é 2-convexo. Então, se*

$$\Lambda|\Sigma| + \frac{16\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} = 4\pi(1 - g(\Sigma)),$$

uma das seguintes condições é satisfeita:

1. *Se Σ é outer minimizante de área e $\Lambda > 0$, então Σ é uma 2-esfera e existe uma vizinhança externa $U \approx [0, \epsilon) \times \Sigma$ de Σ em M que é isométrica a $([0, \epsilon) \times \Sigma, dt^2 + g_\Lambda)$ onde g_Λ é a métrica da esfera redonda com curvatura Gaussiana constante $k_\Sigma = \Lambda + |E|^2$.*

2. *Se* $g(\Sigma) = 1$ *e* $\Lambda < 0$, *então existe uma vizinhança externa* $U \approx [0, \epsilon) \times \Sigma$ *de* Σ *em* M *que é isométrica a* $([0, \epsilon) \times \Sigma, dt^2 + g_0)$, *onde* g_0 *é uma métrica plana em* Σ.

3. *Se* $g(\Sigma) > 1$ *e* $\Lambda < 0$ *então existe uma vizinhança externa* $U \approx [0, \epsilon) \times \Sigma$ *de* Σ *em* M *que é isométrica a* $([0, \epsilon) \times \Sigma, dt^2 + g_\Lambda)$, *aqui* (Σ, g_Λ) *tem curvatura Gaussiana constante* $k_\Sigma = \Lambda + |E|^2$.

Além disso, em todos os itens acima cada slice $\Sigma_t \approx \{t\} \times \Sigma$ *é totalmente geodésica como subvariedade do espaço-tempo, ou seja,* $\chi_+(t) = \chi_-(t) = 0$, $K(\cdot, \cdot)|_{T\Sigma_t} = 0$, $K(\nu_t, \cdot)|_{T\Sigma_t} = 0$ *e* $J = 0$.

Observação 1.1. *No capítulo 2, seção 2.1, definimos* μ *e* J.

Para finalizar o Capítulo 2 provamos um teorema que afirma: um conjunto de dados inicias sob as hipóteses do Teorema 2.1 item 1, é realizado como hipersuperfície tipo-espaço do espaço-tempo de Nariai carregado.

No Capítulo 3 tratamos de conjuntos de dados iniciais maximal, ou seja, $\mathrm{tr}K = 0$, com campo elétrico. Novamente, olhando de um ponto de vista da Teoria da Relatividade temos que, se vale a condição de energia dominante para um conjunto de dados iniciais maximal com campo elétrico, então $R \geqslant 2|E|^2 + 2\Lambda$, onde R é a curvatura escalar de M.

Inicialmente observe que, Máximo e Nunes [22] provaram o seguinte resultado

Teorema 1.7. *(Máximo-Nunes) Seja* (M^3, g) *uma variedade Riemanniana 3-dimensional com curvatura escalar* $R \geqslant 2$. *Se* $\Sigma \subset M$ *é uma 2-esfera estritamente estável mínima mergulhada em* M *que localmente maximiza a massa de Hawking, então a curvatura Gaussiana de* Σ *é constante e igual a* $\frac{1}{a^2}$ *para algum* $a \in (0, 1)$ *e uma vizinhança de* Σ *em* M *é isométrica ao espaço deSitter-Schwarzschild* $((-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma, g_a)$ *para algum* $\epsilon > 0$.

Note que, no teorema acima temos uma limitação inferior da curvatura escalar de M por uma constante positiva. Assumindo uma limitação da curvatura escalar por uma constante negativa, Barros, Batista e Cruz [6] obtiveram o seguinte teorema

Teorema 1.8. *(Barros-Batista-Cruz) Seja* (M^3, g) *uma variedade Riemanniana com curvatura escalar limitada inferiormente por uma constante* Λ. *Seja* $\Sigma \subset M$ *é uma superfície* *fechada, mínima, two-sided estritamente estável mergulhada em* M *que localmente maximiza a massa de Hawking. Então,*

$$\left(\lambda_1 + \frac{1}{2}\Lambda\right)|\Sigma| = 2\pi\chi(\Sigma),$$

aqui λ_1 *é o primeiro autovalor do operador de Jacobi. Além disso, se* $\Lambda = -6$ *então uma das seguintes condições é satisfeita:*

1. *Se* Σ *é uma 2-esfera, então* Σ *tem curvatura Gaussiana constante igual a* $\frac{1}{a^2}$ *e uma vizinhança de* Σ *em* M *é isométrica ao espaço Anti-deSitter Schwarzschild* $((-\epsilon, \epsilon) \times \mathbb{S}^2, (g_{adss})_a)$ *para algum* $\epsilon > 0$.

2. *Se* Σ *tem gênero* $g(\Sigma) \geqslant 2$, *então* Σ *tem curvatura Gaussiana constante igual a* $-\frac{1}{a^2}$ *e existe uma vizinhança de* Σ *em* M *que é isométrica a* $((-\epsilon, \epsilon) \times \widehat{\Sigma}, \overline{g_a})$ *para algum* $\epsilon > 0$, *aqui* $\overline{g_a}$ *é uma métrica de curvatura Gaussiana constante igual a -1.*

3. *Se* Σ *tem gênero um, então* Σ *tem curvatura Gaussiana constante igual a zero e existe uma vizinhança de* Σ *em* M *que é isométrica a* $((-\epsilon, \epsilon) \times \widehat{\Sigma}, g'_a)$ *para algum* $\epsilon > 0$, *aqui* g'_a *é uma métrica plana em* M.

Os Teoremas 1.7 e 1.8 podem ser enunciados no contexto de Teoria da Relatividade trocando a variedade Riemanniana (M, g) por um conjunto de dados iniciais maximal (M, g, K) para as equações de Einstein-Maxwell sem campo elétrico e que satisfaz a condição de energia dominante com constante cosmológica positiva, no Teorema 1.7, e negativa no Teorema 1.8 . Nesse contexto, Baltazar, Barros e Batista [5] obtiveram uma versão do Teorema 1.7 para o caso de campo elétrico não-nulo, os autores consideraram o caso tempo-simétrico e provaram o seguinte resultado

Teorema 1.9. *(Baltazar-Barros-Batista) Seja* (M^3, g, E) *um conjunto de dados iniciais 3-dimensional tempo-simétrico para as equações de Einstein-Maxwell com campo elétrico* E. *Assuma que a densidade de carga é zero, isto é,* $\operatorname{div} E = 0$ *e satisfazendo a condição de energia dominante para os campos de matéria não-eletromagnéticos* $R \geqslant 2 + 2|E|^2$. *Se* $\Sigma \subset M$ *é um 2-esfera estritamente estável mínima mergulhada em* M *que localmente maximiza a massa de Hawking carregada, então a curvatura Gaussiana de* Σ *é constante* *igual a* $\frac{1}{a^2}$ *para algum* $a \in (0,1)$*, e uma vizinhança de* Σ *em* M *é isométrica ao espaço deSitter Reissner-Nordström* $((-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma \times, g_{q,a})$ *para algum* $\epsilon > 0$ *e* $q = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \langle E, \nu \rangle$*.*

No capítulo 3 consideramos conjunto de dados iniciais maximal, ou seja, quando K é um $(2,0)$ tensor tal que $\mathrm{tr}\ K = 0$. Observe que um conjunto de dados iniciais tempo-simétrico são casos particulares de conjuntos de dados iniciais maximal. Nosso primeiro resultado do Capítulo 3 é uma versão do Teorema 1.8 para o caso de campo elétrico não-nulo. Provamos o seguinte teorema:

Teorema 1.10. *(Teorema 3.2) Seja* (M^3, g, K, E, μ, J) *um conjunto de dados iniciais maximal satisfazendo a condição de energia dominante, ou seja,* $R \geqslant 2|E|^2 + 2\Lambda$*, aqui* $E \in \mathfrak{X}(M)$ *é tal que* $\mathrm{div} E = 0$*. Seja* $\Sigma \hookrightarrow M$ *uma superfície mergulhada em* M *two-sided, estritamente estável, mínima e que maximiza localmete a massa de Hawking carregada. Então,*

$$(\lambda_1 + \Lambda)\,|\Sigma| + \frac{16\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} = 2\pi\chi(\Sigma),$$

aqui λ_1 *é o primeiro autovalor do operador de Jacobi. Além disso, se* $\Lambda = -3$ *então uma das seguintes condições é satisfeita:*

1. *Se* Σ *é uma 2-esfera, então* Σ *tem curvatura Gaussiana constante igual a* $\frac{1}{a^2}$ *e uma vizinhança de* Σ *em* M *é isométrica ao espaço Anti-deSitter Reissner-Nordström* $((-\epsilon, \epsilon) \times \mathbb{S}^2, (g_{m,q,\Lambda}))$ *para algum* $\epsilon > 0$*.*

2. *Se* Σ *tem gênero* $g(\Sigma) \geqslant 2$*, então* Σ *tem curvatura Gaussiana constante igual a* $-\frac{1}{a^2}$ *e existe uma vizinhança de* Σ *em* M *que é isométrica a* $((-\epsilon, \epsilon) \times \widehat{\Sigma}, \overline{g_a})$ *para algum* $\epsilon > 0$*, aqui* $\overline{g_a}$ *é uma métrica de curvatura Gaussiana constante igual a -1.*

3. *Se* Σ *tem gênero um, então* Σ *tem curvatura Gaussiana constante igual a zero e existe uma vizinhança de* Σ *em* M *que é isométrica a* $((-\epsilon, \epsilon) \times \widehat{\Sigma}, g'_a)$ *para algum* $\epsilon > 0$*, aqui* g'_a *é uma métrica plana em* M*.*

Nosso segundo resultado de rigidez do Capítulo 3 é uma versão do Teorema 1.3 para o contexto de Teoria da Relatividade, com campo elétrico não-nulo e constante cosmológica negativa. Um resultado similar foi provado por Baltazar-Barros-Batista [5] com uma limitação inferior positiva da curvatura escalar (constante cosmológica positiva). Obtemos o seguinte resultado:

Teorema 1.11. *(Teorema 3.3) Seja* (M^3, g, K, E, μ, J) *um conjunto de dados inicias maximal que satisfaz a condição de energia dominante, ou seja,* $R \geqslant 2|E|^2 - 6$*, aqui* $E \in \mathfrak{X}(M)$ *é tal que* $\mathrm{div}E = 0$*. Seja* $\Sigma \hookrightarrow M$ *uma superfície mergulhada em* M *fechada, two-sided que localmente é minimizante de área, então* Σ *satisfaz*

$$3|\Sigma| - \frac{16\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} \geqslant 4\pi(g(\Sigma) - 1).$$

Além disso, se vale a igualdade uma das seguintes condições é satisfeita:

1. *Se* Σ *tem gênero* $g(\Sigma) \geqslant 2$ *, então* Σ *tem curvatura de Gauss constante* $k_\Sigma = |E|^2 - 3$ *e existe uma vizinhança de* Σ *em* M *isométrica à* $((-\delta, \delta) \times \Sigma, dt^2 + g_\Sigma)$*.*

2. *Se* Σ *tem gênero igual a um, então* Σ *tem curvatura de Gauss constante* $K_\Sigma = 0$ *e existe uma vizinhança de* Σ *em* M *isométrica à* $((-\delta, \delta) \times T^2, dt^2 + g_\Sigma)$*, aqui* g_Σ *é uma métrica plana em* T^2*.*

3. *Se* Σ *tem gênero zero, então* Σ *tem curvatura de Gauss constante* $k_\Sigma = |E|^2 - 3$ *e existe uma vizinhança de* Σ *em* M *isométrica à* $((-\delta, \delta) \times \mathbb{S}^2, dt^2 + g_\Sigma)$*.*

No Capítulo 4, obtemos resultados relacionados a espaços conformemente plano. Em meados do século XIX, Jellett [20] provou que uma superfície star-shaped $M \subset \mathbb{R}^3$ de curvatura média constante é uma esfera redonda. É importante ressaltar que Jellett já utilizou a chamada fórmula de Minkowiski para obter tal resultado. Tendo em mente a ideia de Jellett, Barros e Sousa, em [7], obtiveram um resultado semelhante na esfera Euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}$. Os autores provaram o seguinte teorema:

Teorema 1.12. *(Barros-Sousa) Seja* $\Sigma^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$ *uma hipersuperfície star-shaped com curvatura média constante. Então* Σ^n *é uma esfera geodésica.*

Considerando uma bola B_r^{n+1} de raio r centrada na origem munida da métrica $\overline{g}$ conforme a métrica Euclidiana $\langle , \rangle$, ou seja, $\overline{g} = e^{2u(|x|^2)}\langle , \rangle$, aqui, $|x|^2 = \langle x, x \rangle$. Provovamos o seguinte teorema:

Teorema 1.13. *(Teorema 4.2) Seja* Σ^n *uma hipersuperfície star-shaped fechada em* $\mathfrak{B}^{n+1} = (B_r^{n+1}, \overline{g})$ *com curvatura média constante H. Suponha que* $u''(|x|^2) - u'(|x|^2)^2 \geqslant 0$, *então* M *é totalmente umbílica.*

Usando a mesma hipótese sobre a função u e um teorema provado por Li e Xia [21], obtemos uma desigualdade do tipo Heintze-Karcher, com função pontecial sendo o fator conforme σ do campo posição de $(B_r^{n+1}, \overline{g})$. Obtivemos o seguinte resultado:

Teorema 1.14. *(Teorema 4.4) Seja* $\Omega \subset \mathfrak{B}^{n+1}$ *um domínio compacto com bordo suave* Σ^n. *Suponha que* $u''(t) - u'(t)^2 = \lambda(t)$ *para todo* $t \in [0, r^2)$. *Se* $\sigma > 0, H > 0$ *e* λ *satisfaz*

$$\begin{cases} \lambda(t) \geqslant 0 \\ t\lambda'(t) + 2\lambda(t) \geqslant 0 \end{cases},$$

então

$$(n+1)\int_{\Omega} \sigma d\Omega \leqslant \int_{\Sigma} \frac{\sigma}{H} d\sigma. \tag{1.1}$$

Além disso, se a igualdade vale em (1.1), então Σ *é umbílica.*

Por fim, provamos uma proposição que nos permite exibir uma família a 1-parâmetro de espaços conformemente plano, todos distintos dos espaços formas, onde vale uma desigualdade do tipo Heintze-Karcher.

Capítulo 2

Rigidez de MOTS em um conjunto de dados inicias

2.1 Preliminares

Seja $(\mathcal{M}^4, \gamma)$ uma variedade Lorentziana de dimensão 4, conexa e temporalmente orientada. Seja R_γ a curvatura escalar de $\mathcal{M}$ e F é uma 2-forma em $\mathcal{M}$. As equações de Einstein-Maxwell, com constante cosmológica $\Lambda \in \mathbb{R}$ para a tripla $(\mathcal{M}^4, \gamma, F)$ é expressa pelo seguinte sistema

$$\mathrm{Ric}_\gamma - \frac{R_\gamma}{2}\gamma + \Lambda \cdot \gamma = 8\pi(T_F + T); \tag{2.1}$$

$$dF = 0; \quad \mathrm{div}_\gamma F = 0. \tag{2.2}$$

Aqui T_F denota o tensor energia-momento do campo eletromagnético definido por

$$T_F = \frac{1}{4\pi}\left(F \circ F - \frac{1}{4}|F|^2_\gamma \cdot \gamma\right),$$

onde $(F \circ F)_{\alpha\beta} = \gamma^{ij} F_{\alpha i} F_{\beta j}$, e T é um 2-tensor covariante simétrico em $\mathcal{M}$, que representa o tensor energia-momento da matéria não-eletromagnética. Dizemos que $(\mathcal{M}^4, \gamma, F)$ é um espaço-tempo se é solução de (2.1)-(2.2).

Um conjunto de dados iniciais (sem campo magnético) para as equações de Einstein-Maxwell consiste em uma n-upla

$$(M^3, g, K, E, \mu, J),$$

aqui (M^3, g) é uma variedade Riemanniana de dimensão 3 orientada com $M \subset \mathcal{M}$ e $g = \gamma|M$, K é a segunda forma fundamental de M sobre $\mathcal{M}$ com respeito ao vetor normal unitário tipo-tempo na direção futuro u, $E \in \mathfrak{X}(M)$ o campo elétrico, $\mu := T(u, u)$, $J(\,\cdot\,) := T(u, \cdot)$ são respectivamente, a densidade de energia e a densidade de momento para os campos não-eletromagnéticos. Além disso, o conjunto de dados iniciais satisfazem as equações de vínculo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(R + (\operatorname{tr} K)^2 - |K|^2) &= \Lambda + |E|^2 + 8\pi\mu; \\ \operatorname{div}(K - (\operatorname{tr} K)g) &= 8\pi J, \end{aligned}$$

aqui R denota a curvaura escalar de M. Dizemos que um conjunto de dados iniciais é tempo-simétrico se $K = 0$ e maximal se $\operatorname{tr} K = 0$.

Definição 2.1. *Um conjunto de dados iniciais* (M^3, g, K, E, μ, J) *satisfaz*

1. *A condição de energia dominante (DEC) carregada para os campos não-eletromagnéticos se*

$$T(\nu, \nu) \geqslant 0,$$

para todo vetor tipo-tempo ν *na direção futuro.*

2. *As equações de vínculo de Einstein-Maxwell são ditas sem matéria carregada se* $\operatorname{div} E = 0$ *em* M.

A condição de energia dominante implica que $\mu \geqslant |J|_g$ (veja [18]). Para um conjunto de dados iniciais maximal (ou tempo-simétrico) a condição de energia dominante implica em

$$R \geqslant 2\Lambda + 2|E|^2.$$

Definição 2.2. *Se* $\Sigma \hookrightarrow M$ *é uma superfície two-sided, fechada, mergulhada em* M, *nós definimos a carga* $q(\Sigma)$ *relativa a* E *por*

$$q(\Sigma) = \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma \langle E, \nu \rangle d\sigma,$$

aqui ν *é um campo vetorial normal a* Σ *e* $g = \langle , \rangle$.

Seja Σ^2 uma superfície two-sided, conexa, fechada e mergulhada em M. Então Σ admite um campo vetorial normal unitário suave ν, único a menos de sinal. Por convenção diremos que ν aponta para fora de Σ. Pelas equações de Gauss-Codazzi temos que

$$G(u,u) + G(u,\nu) = \Lambda + |E|^2 + 8\pi(\mu + J(\nu)),$$

aqui $G = Ric_\gamma - \frac{R_\gamma}{2}\gamma$ é o tensor de Einstein. Note que,

$$G(u,u) + G(u,\nu) \geqslant \Lambda + |E|^2 \;\Leftrightarrow\; \mu + J(\nu) \geqslant 0. \tag{2.3}$$

Considere os campos vetoriais normais nulos na direção futuro $l_+ = u+\nu$ e $l_- = u-\nu$ ao longo de Σ, apontando para fora e para dentro de Σ, respectivamente.

Definição 2.3. *As segundas formas fundamentais nulas χ_+ e χ_- de Σ em $\mathcal{M}$ são definidas por*

$$\chi_\pm(X,Y) = \gamma(D_X l_\pm, Y) = K(X,Y) \pm A(X,Y),\;\; X,Y \in T\Sigma,$$

aqui D é a conexão de Levi-Civita de $\mathcal{M}$ e A é a segunda forma fundamental de Σ em M com respeito a ν.

Definição 2.4. *As curvaturas médias nulas $\theta^\pm$ de Σ em $\mathcal{M}$ são definidas por*

$$\theta^\pm = \mathrm{tr}_\Sigma\, \chi_\pm = \mathrm{tr}_\Sigma K \pm H,$$

aqui H é a curvatura média de Σ em M.

Note que se M é tempo-simétrico então θ^+ coincide a curvatura média de Σ em M.

Definição 2.5. *Se θ^+ e θ^- são ambas negativas, dizemos que Σ é uma trapped surface. Se $\theta^+ < 0$, dizemos que Σ é uma outer trapped surface. Finalmente, se $\theta^+ = 0$, dizemos que Σ é uma marginally outer trapped surface ou simplesmente uma MOTS.*

Observe que, no caso que M é tempo-simétrico, Σ ser MOTS é equivalente a ser mínima. Por simplicidade usaremos as seguintes notações $\theta = \theta^+$, $\chi = \chi_+$ and $l = l_+$.

Considere uma variação normal de Σ em M, $\Sigma = \Sigma_0$, com campo variacional dado por $V(t) = \frac{\partial}{\partial t} = \phi_t \nu_t$, $\phi_t \in C^\infty(\Sigma_t)$, aqui ν_t é o vetor normal unitário a Σ_t em M

apontando para fora de Σ_t. Denote por $\theta(t)$ a curvatura média nula de Σ_t com respeito a $l_t = u + \nu_t$. A primeira variação de $\theta(t)$(veja [4]) é dada por

$$\frac{d}{dt}\theta(t) = -\Delta_t\phi_t + 2\langle X^t, \nabla_t\phi_t\rangle + \left(Q^t + \operatorname{div}_t X^t - |X^t|^2 + \theta(t)\mathrm{tr}_{\Sigma_t} K - \frac{1}{2}\theta^2(t)\right)\phi_t$$

e

$$Q^t = \frac{1}{2}R_{\Sigma_t} - (G(u,u) + G(u,\nu_t)) - \frac{1}{2}|\chi^t|^2,$$

aqui Δ_t, ∇_t e div_t são o Laplaciano, gradiente e o divergente, respectivamente, de Σ_t e χ^t é a segunda forma fundamental nula de Σ_t, K_{Σ_t} é a curvatura Gaussiana de Σ_t e X^t é o campo vetorial em Σ_t dual da uma forma $K(\nu_t, \cdot)|_{T\Sigma_t}$. O operador $\mathcal{L} : C^\infty(\Sigma_t) \to C^\infty(\Sigma_t)$ dado por

$$\mathcal{L}(\phi_t) = -\Delta_t\phi_t + 2\langle X^t, \nabla_t\phi_t\rangle + \left(Q^t + \operatorname{div}_t X^t - |X^t|^2\right)\phi_t \tag{2.4}$$

é chamado de operador de estabilidade para MOTS.

Observação 2.1. *No caso tempo-simétrico, usando a equação de Gauss podemos verificar que o operador $\mathcal{L}$ coincide com o operador de Jacobi $-\Delta - \mathrm{Ric}(\nu,\nu)) - |A|^2$ para hipersuperfícies mínimas*

Em geral o operador $\mathcal{L}$ não é auto-adjunto, mas possui propriedades importantes dadas pelo lema abaixo (veja [4]).

Lema 2.1. *As seguintes propriedades são válidas para o operador $\mathcal{L}$, onde Σ é MOTS fechada.*

1. *Existe um auto-valor real $\lambda_1 = \lambda_1(\mathcal{L})$ chamado auto-valor principal, tal que para qualquer outro autovalor λ, tem-se $\mathrm{Re}(\lambda) \geqslant \lambda_1$. A auto-função φ associada a λ_1 é única a menos de uma constante multiplicativa, e pode ser escolhida como estritamente positiva.*

2. $\lambda_1 \geqslant 0$*(resp.,* $\lambda_1 > 0$*) se, e somente se, existe* $\psi \in C^\infty(\Sigma)$,$\psi > 0$ *tal que* $\mathcal{L}(\psi) \geqslant 0$*(resp.* $\mathcal{L}(\psi) > 0$*).*

Considere o operador "simetrizado"$\mathcal{L}_0 : C^\infty(\Sigma) \to C^\infty(\Sigma)$ dado por

$$\mathcal{L}_0(\phi) := -\Delta\phi + Q\phi,$$

obtido de $\mathcal{L}$ fazendo $X = 0$. Temos o seguinte lema relacionando os primeiros auto-valores de $\mathcal{L}_0$ e $\mathcal{L}$.

Lema 2.2. *Se Σ é fechada então $\lambda_1(\mathcal{L}_0) \geqslant \lambda_1(\mathcal{L})$. Consequentemente, se $\lambda_1(\mathcal{L}) \geqslant 0$ então*

$$\int_\Sigma (|\nabla f|^2 + Qf^2)d\sigma \geqslant 0, \tag{2.5}$$

para toda $f \in C^\infty(\Sigma)$.

Demonstração: veja [17] ■

Definição 2.6. *Uma MOTS fechada Σ é dita estável se existe uma função $\varphi \in C^\infty(\Sigma)$ tal que $\varphi > 0$ e $\mathcal{L}(\varphi) \geqslant 0$. Pelo Lema 2.1, Σ ser estável é equivalente a $\lambda_1(\mathcal{L}) \geqslant 0$.*

2.2 Rigidez local de MOTS estáveis em um conjunto de dados inicias

Nesta seção, provaremos uma estimativa de área para MOTSs estáveis em um conjunto de dados iniciais, e posteriormente provamos um resultado de rigidez local para um conjunto de dados iniciais quando assumimos igualdade nesta estimativa.

Proposição 2.1. *Seja Σ^2 uma MOTS estável fechada e orientável com gênero $g(\Sigma)$ em um conjunto de dados iniciais (M^3, g, K, E, μ, J). Suponha que $\mu + J(\nu) \geqslant 0$ em Σ, aqui ν é o campo vetorial normal unitário exterior que aponta para fora de Σ. Então a área de Σ satisfaz*

$$\Lambda|\Sigma| + \frac{16\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} \leqslant 4\pi(1 - g(\Sigma)). \tag{2.6}$$

Além disso, se vale a igualdade, então Σ tem curvatura Gaussiana constante $k_\Sigma = \Lambda + |E|^2$, segunda forma fundamental nula χ de Σ é identicamente nula, $\mu + J(\nu) = 0$ em Σ e $\lambda_1(\mathcal{L}_0) = \lambda_1(\mathcal{L}) = 0$. Se $\Lambda > 0$ então Σ é uma 2-esfera redonda.

Demonstração: Por hipótese, $\lambda_1(\mathcal{L}) \geqslant 0$, onde $\mathcal{L}$ é o operador MOTS de estabilidade. Usando o Lema 2.2 e fazendo $f \equiv 1$ na desigualdade (2.5) teremos

$$0 \leqslant \int_\Sigma Q\, d\sigma = \int_\Sigma \left(K_\Sigma - (G(u,u) + G(u,\nu)) - \frac{1}{2}|\chi|^2) \right) d\sigma.$$

Usando o teorema de Gauss-Bonnet, a desigualdade de Hölder e a hipótese $\mu + J(\nu) \geqslant 0$ obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \int_\Sigma \left(k_\Sigma - (\Lambda + |E|^2) - \frac{1}{2}|\chi|^2 \right) d\sigma \\ &\leqslant \int_\Sigma \big(k_\Sigma - (\Lambda + |E|^2) \big)\, d\sigma \\ &= 4\pi(1 - g(\Sigma)) - \Lambda|\Sigma| - \int_\Sigma |E|^2 d\sigma \\ &\leqslant 4\pi(1 - g(\Sigma)) - \Lambda|\Sigma| - \frac{16\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma|}, \end{aligned}$$

o que implica na desigualdade (2.6). Se vale a igualdade em (2.6) então as desigualdades acima são todas igualdades, logo $\chi = 0$, $G(u,u) + G(u,\nu) = \Lambda + |E|^2$ com $|E|^2$ constante, $\mu + J(\nu) = 0$ em Σ e $\int_\Sigma Q\, d\sigma = 0$. Observe que $Q = K_\Sigma - \Lambda - |E|^2$. Novamente usando (2.5) tem-se

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \int_\Sigma (\|\nabla(\alpha + \varphi)\|^2 + Q(\alpha + \varphi)^2) d\sigma \\ &= \int_\Sigma (\|\nabla\varphi\|^2 + Q\varphi^2) d\sigma + 2\alpha \int_\Sigma Q\varphi\, d\sigma, \end{aligned}$$

para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\varphi \in C^\infty(\Sigma)$. Portanto $\int_\Sigma Q\varphi d\sigma = 0$ para toda $\varphi \in C^\infty(\Sigma)$, logo $Q = 0$, o que implica $K_\Sigma = \Lambda + |E|^2$. Por outro lado, segue do Lema 2.2 que $\lambda_1(\mathcal{L}_0) \geqslant 0$, e considerando $f \equiv 1$ na desigualdade abaixo teremos

$$\lambda_1(\mathcal{L}_0) \leqslant \frac{\int_\Sigma (\|\nabla f\|^2 + Qf^2)}{\int_\Sigma f^2\, dA} = 0,$$

acima usamos o fato que vale a igualdade em (2.6). Daí $\lambda_1(\mathcal{L}_0) = 0$, logo $0 = \lambda_1(\mathcal{L}_0) \geqslant \lambda_1(\mathcal{L}) \geqslant 0$, ou seja $\lambda_1(\mathcal{L}) = 0$. Segue que, se $\Lambda > 0$ então Σ é uma 2-esfera redonda. ∎

Antes de enunciarmos nosso principal resultado dessa seção, vamos enunciar dois lemas e fixar algumas terminologias que serão utilizadas posteriormente.

Lema 2.3. *Seja* Σ^2 *uma MOTS fechada em um conjunto de dados iniciais* $M^3 = (M^3, g, K)$. *Se* $\lambda_1(\mathcal{L}) = 0$ *então existe uma variação* $t \mapsto \Sigma_t$ *de* $\Sigma_0 = \Sigma$ *em* M, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, *tal que* Σ_t *é uma hipersuperfície de curvatura média nula constante* $\theta = \theta(t)$ *pra cada* $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. *Além disso,* $\{\Sigma\}_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$ *é uma foliação em uma vizinhança de* Σ *em* M *com vetor variacional* $\frac{\partial}{\partial t} = \phi_t \nu_t$, *aqui* ν_t *é um vetor unitário normal exterior a* Σ_t, *e* $\phi_t : \Sigma_t \approx \{t\} \times \Sigma \to \mathbb{R}$ *é uma função positiva.*

Demonstração: veja [15].

■

Lema 2.4. *Seja* $f \in C^1([0, \epsilon))$ *e* $\eta, \xi, \rho \in C^0([0, \epsilon))$ *funções tais que* $\max\{f, \rho\} \geqslant 0$, $\xi \geqslant 0, \eta > 0, f(0) = 0$, *e*

$$f'(t)\eta(t) \leqslant \int_0^t f(s)\xi(s)ds + f(t)\rho(t) \quad \forall t \in [0, \epsilon).$$

Então $f \leqslant 0$.

Demonstração: veja [23].

■

Seja Σ uma MOTS que separa M, denotaremos por M_+ a região de M formada por Σ e pela região fora de Σ (sentido de ν). Dizemos que Σ é fracamente outermost se não existe uma outer trapped surface em M_+ homóloga a Σ. Por fim, dizemos que Σ é outer minimizante de área, se $|\Sigma| \leqslant |\overline{\Sigma}|$ para toda superfície $\overline{\Sigma}$ em M_+ homóloga a Σ.

Observação 2.2. *Se* Σ *é uma MOTS fechada fracamente outermost, então* Σ *é estável.*

Observação 2.3. *Seja* Ω_t *a região compreendida entre* Σ_0 *e* Σ_t. *Supondo que* $\mathrm{div}E = 0$ *segue do Teorema da Divergência que*

$$0 = \int_{\Omega_t} \mathrm{div}E\, dM = \int_{\Sigma_t} \langle E, \nu_t \rangle d\sigma_t - \int_{\Sigma_0} \langle E, \nu_0 \rangle d\sigma$$

Daí, $q(\Sigma_t) = q(\Sigma_0)$ *para toda variação normal suave* Σ_t *de* Σ.

Provaremos agora o resultado principal desta seção.

Teorema 2.1. *Seja* (M^3, g, K, E, μ, J) *um conjunto de dados inicias com* $\mathrm{div}E = 0$*. Seja* $\Sigma^2 \subset M$ *uma MOTS orientável, fechada que separa* M *e é fracamente outermost. Suponha que* $\mu - |J| \geqslant 0$ *em* M_+ *e que* K *é 2-convexo. Então, se*

$$\Lambda|\Sigma| + \frac{16\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} = 4\pi(1 - g(\Sigma)), \tag{2.7}$$

valem as seguintes afirmações:

1. *Se* Σ *é outer minimizante de área e* $\Lambda > 0$*, então* Σ *é uma 2-esfera e existe uma vizinhança externa* $U \approx [0,\epsilon)\times\Sigma$ *de* Σ *em* M *que é isométrica a* $([0,\epsilon)\times\Sigma, dt^2 + g_\Lambda)$ *onde* g_Λ *é a métrica da esfera redonda com curvatura Gaussiana constante* $k_\Sigma = \Lambda + |E|^2$.

2. *Se* $g(\Sigma) = 1$ *e* $\Lambda < 0$*, então existe uma vizinhança externa* $U \approx [0,\epsilon)\times\Sigma$ *de* Σ *em* M *que é isométrica a* $([0,\epsilon)\times\Sigma, dt^2 + g_0)$*, onde* g_0 *é uma métrica plana em* Σ*.*

3. *Se* $g(\Sigma) > 1$ *e* $\Lambda < 0$ *então existe uma vizinhança externa* $U \approx [0,\epsilon)\times\Sigma$ *de* Σ *em* M *que é isométrica a* $([0,\epsilon)\times\Sigma, dt^2 + g_\Lambda)$*, aqui* (Σ, g_Λ) *tem curvatura Gaussiana constante* $k_\Sigma = \Lambda + |E|^2$*.*

Além disso, em todos os itens acima cada slice $\Sigma_t \approx \{t\}\times\Sigma$ *é totalmente geodésica como subvariedade do espaço-tempo, ou seja,* $\chi_+(t) = \chi_-(t) = 0$*,* $K(\cdot,\cdot)|_{T\Sigma_t} = 0$*,* $K(\nu_t,\cdot)|_{T\Sigma_t} = 0$ *e* $J = 0$*.*

Demonstração: Inicialmente note que Σ é MOTS estável, pois é fracamente outermost (Observação 2.2). Consequentemente, como $\mu + J(\nu) \geqslant \mu - |J| \geqslant 0$ e assumindo que vale a igualdade em (2.7) temos pela Proposição 2.1 que $\lambda_1(\mathcal{L}) = 0$, logo podemos usar o Lema 2.3. Seja então $\{\Sigma_t\}_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$, $\theta(t)$, e ϕ_t dados pelo Lema 2.3. Daí

$$\begin{aligned}
\frac{\theta'(t)}{\phi_t} &= -\frac{\Delta_t\phi_t}{\phi_t} + 2\langle X^t, \frac{1}{\phi_t}\nabla_t\phi_t\rangle + Q^t - |X^t|^2 + \mathrm{div}_t X^t - \frac{1}{2}\theta(t)^2 + \theta(t)\mathrm{tr}_{\Sigma_t}K \\
&= \mathrm{div}_t Y^t - |Y^t|^2 + Q^t - \frac{1}{2}\theta(t)^2 + \theta(t)\mathrm{tr}_{\Sigma_t}K \\
&\leqslant \mathrm{div}_t Y^t + Q^t + \theta(t)\mathrm{tr}_{\Sigma_t}K,
\end{aligned}$$

aqui $Y^t := X^t - \nabla_t \ln \phi_t$. Portanto, observando que $\theta(t)$ e $\theta'(t)$ são constantes ao longo de Σ_t e usando o Teorema da Divergência, para cada $t \in [0, \epsilon)$, teremos

$$
\begin{aligned}
\theta'(t)\int_{\Sigma_t}\frac{1}{\phi_t}d\sigma_t - \theta(t)\int_{\Sigma_t}\mathrm{tr}_{\Sigma_t} K\, d\sigma_t &\leqslant \int_{\Sigma_t} Q^t\, d\sigma_t \\
&\leqslant \int_{\Sigma_t}\left(K_{\Sigma_t} - (\Lambda + |E|^2) - \frac{1}{2}|\chi^t|^2\right) d\sigma_t \\
&\leqslant \int_{\Sigma_t}\left(K_{\Sigma_t} - (\Lambda + |E|^2)\right) d\sigma_t.
\end{aligned}
$$

Por Gauss-Bonnet e a Observação 2.3, segue que

$$
\begin{aligned}
\theta'(t)\int_{\Sigma_t}\frac{1}{\phi_t}d\sigma_t - \theta(t)\int_{\Sigma_t}\mathrm{tr}_{\Sigma_t} K\, d\sigma_t &\leqslant 4\pi(1-g(\Sigma)) - \Lambda|\Sigma_t| - \frac{16\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma_t|} \\
&= \Lambda|\Sigma| + \frac{16\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} - \Lambda|\Sigma_t| - \frac{16\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma_t|} \\
&= \Lambda(|\Sigma| - |\Sigma_t|) + 16\pi^2 q(\Sigma)^2\left(\frac{1}{|\Sigma|} - \frac{1}{|\Sigma_t|}\right).
\end{aligned}
$$

Supondo o caso 1), ou seja, Σ é outer minimizante de área e $\Lambda > 0$ e observando que K é 2-convexo, ou seja, $\mathrm{tr}_{\Sigma_t}K \geqslant 0, \forall\, t \in [0, \epsilon)$ temos que

$$
\begin{aligned}
\theta'(t)\int_{\Sigma_t}\frac{1}{\phi_t}d\sigma_t - \theta(t)\int_{\Sigma_t}\mathrm{tr}_{\Sigma_t} K d\sigma_t &\leqslant \frac{16\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma|\cdot|\Sigma_t|}\left(|\Sigma_t| - |\Sigma|\right) \\
&\leqslant C\left(|\Sigma_t| - |\Sigma|\right) \\
&= C\int_0^t \frac{d}{ds}|\Sigma_s| ds \\
&= C\int_0^t\left(\int_{\Sigma_s} H(s)\phi_s d\sigma_s\right) ds \\
&\leqslant C\int_0^t \theta(s)\left(\int_{\Sigma_s}\phi_s d\sigma_s\right) ds,
\end{aligned}
$$

onde $C = \frac{16\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma|^2}$. Portanto,

$$
\theta'(t)\int_{\Sigma_t}\frac{1}{\phi_t}d\sigma_t \leqslant \int_0^t \theta(s)\left(C\int_{\Sigma_s}\phi_s d\sigma_s\right) ds + \theta(t)\int_{\Sigma_t}\mathrm{tr}_{\Sigma_t} K d\sigma_t, \quad \forall t \in [0, \epsilon).
$$

Daí, pelo Lema 2.4, temos que $\theta(t) = 0$ para todo $t \in [0, \epsilon)$, isto é, todas as desigualdades acima devem ser igualdades. Logo $Y^t = X^t - \nabla_t \ln \phi_t = 0$, $\chi^t = 0$, $\mu + J(\nu_t) = \mu - |J| = 0$ em $U \approx [0, \epsilon) \times \Sigma$. Além disso, $|\Sigma_t| = |\Sigma| \quad \forall t \in [0, \epsilon)$. Como $\theta'(t) = 0$, então usando (2.4) e o Lema 2.1, temos que Σ_t é MOTS estável. Daí pela Proposição 2.1, Σ_t tem curvatura Gaussiana constante $K_{\Sigma_t} = \Lambda + |E|^2$ para cada $t \in [0, \epsilon)$. Como $t \mapsto |\Sigma_t|$ é constante para todo $t \in [0, \epsilon)$, tem-se

$$0 = \frac{d}{dt}|\Sigma_t| = \int_{\Sigma_t} H(t)\phi_t d\sigma_t,$$

o que implica em $H(t) = 0$ para cada $t \in [0, \epsilon)$, pois $0 = \theta(t) \geqslant H(t)$ e $\phi = \phi_t > 0$. Então, Σ_t é uma MOTS mínima, o que implica em $tr_{\Sigma_t} K = 0$. Nesse caso, a curvatura média nula $\theta_-(t) = tr_{\Sigma_t} K - H(t)$ de Σ_t, com respeito a $l_-(t) = u - \nu_t$ também é nula. Aplicando $\frac{d}{dt}\theta(t) = \mathcal{L}(\phi_t)$ para $\theta^-(t)$ e $\phi_t^- = -\phi_t$, teremos

$$0 = \frac{d}{dt}\theta^-(t) = -\Delta_t \phi_t^- + 2\langle X_-^t, \nabla_t \phi_t^- \rangle + (Q_-^t + \mathrm{div}_t X_-^t - |X_-^t|^2)\phi_t^-, \tag{2.8}$$

aqui

$$\begin{aligned} Q_-^t &= K_{\Sigma_t} - (G(u,u) + G(u, -\nu_t)) - \frac{1}{2}|\chi_-^t|^2 \\ &= \Lambda + |E|^2 - (G(u,u) + G(u, -\nu_t)) - \frac{1}{2}|\chi_-^t|^2 \\ &= -8\pi(\mu + J(-\nu_t)) - \frac{1}{2}|\chi_-^t|^2 \\ &= -16\pi|J| - \frac{1}{2}|\chi_-^t|^2, \end{aligned}$$

e

$$X_-^t = -X^t = -\frac{1}{\phi}\nabla_t \phi_t.$$

Substituindo as expressões obtidas em (2.8), temos

$$\Delta_t \phi_t + \frac{|\nabla_t \phi_t|^2}{\phi_t} + \left(8\pi|J| + \frac{1}{4}|\chi_-^t|^2\right)\phi_t = 0.$$

Integrando a equação acima sobre Σ_t, obtemos

$$|\nabla_t \phi_t| = |\chi_-^t| = |J| = 0 \text{ em } U.$$

Segue que $K|_{T_x\Sigma_t \times T_x\Sigma_t} = 0$ e que (Σ_t, g_t) é totalmente geodésica em M para cada $t \in [0, \epsilon)$, onde g_t é a métrica sobre Σ_t induzida de (M, g).

Escrevendo $g = \phi^2 dt^2 + g_t$ sobre $U \approx [0,\epsilon) \times \Sigma$ e observando que $\phi = \phi_t$ depende apenas de $t \in [0,\epsilon)$, temos que g_t não depende de t. Fazendo a mudança de variável $ds = \phi(t)dt$, $\phi(t) = \phi_t$, obtemos que g terá a estrutura $ds^2 + g_\Lambda$ sobre U, onde (Σ, g_Λ) tem curvatura Gaussiana constante $k_\Sigma = \Lambda + |E|^2$.

Supondo o item 2), ou seja, $g(\Sigma) = 1$ e $\Lambda < 0$ teremos

$$\begin{aligned}
\theta'(t)\int_{\Sigma_t}\frac{1}{\phi}d\sigma_t - \theta(t)\int_{\Sigma_t}\mathrm{tr}_{\Sigma_t}Kd\sigma_t &\leqslant \Lambda(|\Sigma| - |\Sigma_t|) + 16\pi^2 q(\Sigma)^2\left(\frac{1}{|\Sigma|} - \frac{1}{|\Sigma_t|}\right)\\
&= -\Lambda(|\Sigma_t| - |\Sigma|) + 16\pi^2 q(\Sigma)^2\left(\frac{1}{|\Sigma|} - \frac{1}{|\Sigma_t|}\right)\\
&= \left(-\Lambda + \frac{16\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma||\Sigma_t|}\right)(|\Sigma_t| - |\Sigma|)\\
&= \left(-\Lambda + \frac{16\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma||\Sigma_t|}\right)\int_0^t \frac{d}{ds}|\Sigma_s|ds\\
&= \left(-\Lambda + \frac{16\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma||\Sigma_t|}\right)\int_0^t \left(\int_{\Sigma_s} H(s)\phi_s d\sigma_s\right)ds\\
&\leqslant C\int_0^t \theta(s)\left(\int_{\Sigma_s}\phi_s d\sigma_s\right)ds,
\end{aligned}$$

onde C é uma constante positiva tal que $-\Lambda + \frac{16\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma||\Sigma_t|} \leqslant C$. Daí, procedendo da mesma forma que o item 1 concluímos o resultado. O item 3 segue de forma análoga.

■

Observação 2.4. *Uma vez que* $J = 0$, $K(\cdot,\cdot)|_{T\Sigma_t} = 0$, $K(\nu_t,\cdot)|_{T\Sigma_t} = 0$ *e* Σ_t *é totalmente geodésica em* M *temos que a curvatura média* τ *de* M *em* $\mathcal{M}^4$ *depende apenas de* $t \in [0,\epsilon)$.

2.3 O espaço-tempo de Nariai carregado

O espaço-tempo de Nariai carregado 4-dimensional, de parâmetro de massa m, carga elétrica q e constante cosmológica $\Lambda > 0$ é localmente isómetrico a

$$\overline{N} = \mathbb{R} \times \left(0, \frac{\pi}{\alpha}\right) \times \mathbb{S}^2, \ \ \gamma = -\sin^2(\alpha r)dt^2 + dr^2 + \rho^2 g_{\mathbb{S}^2}, \tag{2.9}$$

aqui ρ e α são constantes que dependem de m,q e Λ (veja [14]).

Nesta seção, provaremos que os conjuntos de dados iniciais considerados no Teorema 2.1, item 1, são realizados como hipersuperfícies tipo-espaço no espaço-tempo de Nariai carregado. Inicialmente faremos uma observação importante para a demonstração do nosso próximo resultado. Dada uma função suave $r : [0, \epsilon) \to \mathbb{R}$ tal que $r(s) \in \left(0, \frac{\pi}{2\alpha}\right)$ e $(r'(s))^2 \geqslant 1$, considere a hipersuperfície

$$N = \{(t(s), r(s), z) : s \in [0, \epsilon),\, z \in \mathbb{S}^2\} \subset \overline{N},$$

aqui

$$t(s) := \int_0^s \frac{\sqrt{(r'(t))^2 - 1}}{\sin(\alpha \cdot r(w))} dw.$$

Considere uma parametrização local $\widetilde{\phi}(t, r, x, y) = (t, r, \varphi(x, y))$ de $\overline{N}$, aqui φ é uma parametrização local de $\mathbb{S}^2$ e $\phi(s, x, y) := \widetilde{\phi}(t(s), r(s), x, y)$ uma parametrização local de N. Os campos coordenadas $\{\phi_s, \phi_x, \phi_y\}$ em N são dados por

$$\phi_s = t'\partial_t + r'\partial_r,\ \phi_x = \partial_x,\ \phi_y = \partial_y,$$

aqui $\{\partial_t, \partial_r, \partial_x, \partial_y\}$ são os campos coordenados em $\overline{N}$. Usando a expressão da métrica em (2.9) podemos verificar que (N, g) é uma hipersuperfície tipo-espaço em $\overline{N}$ isométrica ao cilindro $([0, \epsilon) \times \mathbb{S}^2,\ ds^2 + \rho^2 \cdot g_{\mathbb{S}^2})$, aqui g é a métrica induzida de $\overline{N}$. Suponha que ∂_t aponta para o futuro e seja P a segunda forma fundamental de N em $\overline{N}$. Supondo que u é um vetor unitário tipo-tempo normal a N que aponta para o futuro, temos que

$$u = a\partial_t + b\partial_r, \text{ onde } a = \frac{r'}{\sin(\alpha r)} \text{ e } b = \sqrt{(r')^2 - 1}.$$

Usando a fórmula de Koszul podemos verificar que (veja [23])

$$P(\phi_s, \phi_x) = P(\phi_s, \phi_y) = P(\phi_x, \phi_x) = P(\phi_y, \phi_x) = P(\phi_x, \phi_y) = P(\phi_y, \phi_y) = 0,$$

logo a curvatura média σ de N é dada por

$$\sigma(s) = P(\phi_s, \phi_s) = \frac{r''(s) + \alpha((r'(s))^2 - 1) \cdot \tan^{-1}(\alpha r(s))}{\sqrt{(r'(s))^2 - 1}}.$$

Teorema 2.2. *Seja* (M^3, g, K, E, μ, J) *um conjunto de dados inicias. Suponha que são satisfeitas as hipóteses do Teorema 2.1 item 1, então existe uma vizinhança* $U \approx [0, \epsilon) \times \Sigma$ *de* Σ *em* M *que pode ser isometricamente mergulhada no espaço-tempo de Nariai carregado* $(\overline{N}, \gamma)$ *como uma hipersuperfície tipo-espaço tal que* $g = \gamma|_U$ *é a métrica induzida de* $\overline{N}$ *e* $K|_U$ *é a segunda forma fundamental de* U *em* $\overline{N}$.

Demonstração: Pelo item 1 do Teorema 2.1, existe uma vizinhança $U \approx [0, \epsilon) \times \Sigma$ de Σ em M isométrica a $([0, \epsilon) \times \mathbb{S}^2, ds^2 + \rho^2 \cdot g_{\mathbb{S}^2})$, onde $\rho^2 = \frac{1}{\Lambda + |E|^2}$. Além disso, pela Observação 2.4, temos que a curvatura média τ de U em $\mathcal{M}^4$ depende somente de $s \in [0, \epsilon)$.

Seja $W := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left(0, \frac{\pi}{2\alpha}\right), y > 1\}$ e $F : [0, \epsilon) \times W \to \mathbb{R}^2$ o campo vetorial definido por

$$F(s, x, y) = \left(y, -\alpha(y^2 - 1)\tan^{-1}(\alpha x) + \tau(s)\sqrt{y^2 - 1}\right).$$

Como a derivada de F em relação a (x, y) é contínua, temos que para cada ponto $(x_0, y_0) \in W$ existe uma única solução $\zeta(s) = (x(s), y(s)) \in W$ para o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \zeta'(s) &= F(s, \xi(s)); \\ \zeta(0) &= (x_0, y_0), \end{aligned}$$

aqui $0 \leqslant s < \overline{\epsilon} \leqslant \epsilon$. Neste caso, obtemos que

$$\begin{aligned} x'(s) &= y(s), \\ y'(s) &= -\alpha((y(s))^2 - 1)\tan^{-1}(\alpha x(s)) + \tau(s)\sqrt{(y(s))^2 - 1}, \end{aligned}$$

$\zeta(0) = (x_0, y_0)$, $x(s) \in \left(0, \frac{\pi}{2\alpha}\right)$ e $x'(s) = y(s) > 1$ para todo $s \in [0, \overline{\epsilon})$. Então $r(s) = x(s)$ satisfaz

$$\tau(s) = \frac{r''(s) + \alpha((r'(s))^2 - 1) \cdot \tan^{-1}(\alpha r(s))}{\sqrt{(r'(s))^2 - 1}}.$$

Assim, definindo $\Psi : \overline{U} = [0, \overline{\epsilon}) \times \mathbb{S}^2 \to \overline{N}$ por $\Psi(s, z) := (t(s), r(s), z)$ onde t é dada por

$$t(s) = \int_0^s \frac{\sqrt{(r'(t))^2 - 1}}{\sin(\alpha \cdot r(w))} dw,$$

temos um mergulho isométrico de $\overline{U} \subset U \approx [0, \epsilon) \times \mathbb{S}^2$ em $\overline{N}$. Como $K(\cdot, \cdot)|_{T\Sigma_s} = 0$ e $K(\nu_t, \cdot)|_{T\Sigma_s} = 0$, temos que K é determinada pela curvatura média $\tau = K(\nu, \nu)$ e a segunda forma fundamental P de N em $\overline{N}$ é determinada pela curvaturma média $\sigma = \tau$, logo K restrito a $\overline{U}$ é a segunda forma fundamental de $\overline{U}$ em $\overline{N}$.

■

Capítulo 3

Rigidez de Superfícies em um conjunto de dados iniciais maximal

3.1 Preliminares

Neste capítulo denotaremos um conjunto de dados iniciais somente como (M^3, g, K, E), ou seja, omitiremos μ e J. Iniciaremos com a definição de massa de Hawking carregada e provaremos resultados que servirão de alicerce para a demosntração dos resultados principais.

Definição 3.1. *Dada* (M, g) *uma variedade 3-dimensional e* $\Sigma \hookrightarrow M$ *uma superfície fechada mergulhada em* M*, então a massa de Hawking carregada de* Σ *é definida por*

$$m_{CH}(\Sigma) = \frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{\chi(\Sigma)}{2} + \frac{4\pi q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} - \frac{1}{16\pi}\int_\Sigma \left(H^2 + \frac{2}{3}\zeta\right) d\sigma\right), \tag{3.1}$$

aqui $E \in \mathfrak{X}(M)$*,* $\chi(\Sigma)$ *é a característica de Euler de* Σ*,* $q(\Sigma) = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\Sigma \langle E, \nu\rangle d\sigma$ *é a carga elétrica de* Σ*,* H *é a curvatura média de* Σ *e* $\zeta = \inf_M(R - 2|E|^2)$.

Observação 3.1. *Se um conjunto de dados iniciais* (M, g, K, E) *maximal satisfaz a condição de energia dominante carregada, vimos que* $R \geqslant 2|E|^2 + 2\Lambda$*. Daí* $\zeta \geqslant 2\Lambda$*, logo fazendo um escalonamento na métrica* g *se necessário, podemos assumir sem perda de generalidade que* $\zeta = 2\Lambda$*.*

Seja $(\widehat{\Sigma}, g_{\widehat{\Sigma}})$ uma superfície fechada com curvatura Gaussiana constante $\widehat{k}$. Fixemos três números reais m, q e $\Lambda < 0$ tais que a equação $p_{m,q,\Lambda,\widehat{k}}(r) := \widehat{k} - \frac{\Lambda}{3}r^2 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2} = 0$ tem soluções positivas, e seja s_0 a maior delas. Defina a variedade $(s_0, \infty) \times \widehat{\Sigma}$ munida da métrica

$$g_{m,q,\Lambda,\widehat{k}} = \frac{dr^2}{p_{m,Q,\Lambda,\widehat{k}}(r)} + r^2 g_{\widehat{\Sigma}}. \tag{3.2}$$

Para o caso particular $\widehat{k} = 1$ temos a variedade 3-dimensional Anti-de Sitter Reissner-Nordström, que denotaremos por $(M_{m,q,\Lambda}, g_{m,q,\Lambda})$. Fazendo $p_{m,q,\Lambda}(r) := 1 - \frac{\Lambda}{3}r^2 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}$, temos que a métrica em $M_{m,q,\Lambda}$ será

$$g_{m,q,\Lambda} = \frac{dr^2}{p_{m,q,\Lambda}(r)} + r^2 g_{\mathbb{S}^2},$$

onde $g_{\mathbb{S}^2}$ denota a métrica da esfera redonda $\mathbb{S}^2$ e os parâmetros m, q e Λ são a massa, carga e a constante cosmológica, respectivamente. O campo elétrico é o campo vetorial suave $E \in \Gamma(TM_{m,q,\Lambda,\widehat{k}})$ dado por

$$E = \frac{q\sqrt{p_{m,q,\Lambda,\widehat{k}}(r)}}{r^2}\partial_r.$$

A curvatura escalar de $((s_0, \infty) \times \widehat{\Sigma}, g_{m,q,\Lambda,\widehat{k}})$ é dada por $R = 2|E|^2 + 2\Lambda$. Dado um slice $\Sigma_r = \{r\} \times \Sigma$ no espaço Anti-de Sitter Reissner-Nordström, com vetor normal unitário $N_r = \sqrt{p_{m,q,\Lambda}(r)}\partial_r$, é fácil ver que a carga do slice Σ_r é igual a q. Após uma mudança de variável podemos escrever a métrica (3.2) da seguinte forma

$$g_{m,q,\Lambda,\widehat{k}} = ds^2 + u(s)^2 g_{\widehat{\Sigma}}.$$

Após uma reflexão da métrica $g_{m,q,\Lambda,\widehat{k}}$, podemos definir uma métrica completa, periódica e rotacionalmente simétrica em $\mathbb{R} \times \widehat{\Sigma}$ com curvatura escalar $R = 2|E|^2 + 2\Lambda$.

Além disso u satisfaz a equação diferencial não-linear

$$u''(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{\widehat{k} - u'(s)^2}{u(s)}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda u(s)^4 + q^2}{u(s)^3}\right). \tag{3.3}$$

Observação 3.2. *Dado um slice Σ_r no espaço Anti-de Sitter Reissner-Nordström temos que*

$$\frac{d}{dr}m_{CH}(\Sigma_r) = 0.$$

Escolha um campo vetorial normal unitário ν ao longo de Σ e seja $\Sigma_t \subset M$ uma variação normal suave de Σ, ou seja, $\Sigma_t = \{f(t,x) : x \in \Sigma\}$ aqui $f : (-\epsilon,\epsilon)\times\Sigma \to M$ é uma função suave satisfazendo

- $f_t = f(t,\cdot) : \Sigma \to M$ é uma imersão para cada $t \in (-\epsilon,\epsilon)$;
- $f(0,x) = x$ para cada $x \in \Sigma$;
- $\dfrac{\partial f}{\partial t}(0,x) = \phi(x)\nu(x)$ para cada $x \in \Sigma$, aqui $\phi \in C^\infty(\Sigma)$.

Lema 3.1. ***(Primeira variação da massa de Hawking carregada)*** *Considerando a definição (3.1) temos que*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}m_{CH}(\Sigma_t)\bigg|_{t=0} &= -\frac{2|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_\Sigma \phi\Delta_\Sigma H d\sigma + \frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_\Sigma (\zeta - R)H\phi d\sigma \\ &+ \frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_\Sigma \left[2K_\Sigma + \frac{8\pi(g(\Sigma)-1)}{|\Sigma|} + \left(\frac{32\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma|^2} - |A|^2\right.\right. \\ &+ \left.\left.\frac{1}{2|\Sigma|}\int_\Sigma H^2 d\sigma\right)\right] H\phi d\sigma + \frac{1}{4}\left(\frac{|\Sigma|}{16\pi}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dt}q(\Sigma_t)^2\bigg|_{t=0}.\end{aligned}$$

Demonstração: Sendo

$$m_{CH}(\Sigma_t) = \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{\chi(\Sigma_t)}{2} + \frac{4\pi q(\Sigma_t)^2}{|\Sigma_t|} - \frac{1}{16\pi}\int_{\Sigma_t}\left(H_t^2 + \frac{2}{3}\zeta\right)d\sigma_t\right)$$

e pelo fato de que $\dfrac{d}{dt}(d\sigma_t) = -H_t\phi_t d\sigma_t$ temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}m_{CH}(\Sigma_t) = &-\frac{1}{2}\frac{|\Sigma_t|^{-\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_{\Sigma_t} H_t\phi_t d\sigma_t\left(\frac{\chi(\Sigma_t)}{2} + \frac{4\pi q(\Sigma_t)^2}{|\Sigma_t|} - \frac{1}{16\pi}\int_{\Sigma_t}\left({H_t}^2 + \frac{2}{3}\zeta\right)d\sigma_t\right) \\ &+ \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}}\left(4\pi\frac{d}{dt}q(\Sigma_t)^2|\Sigma_t|^{-1} + 4\pi q(\Sigma_t)^2|\Sigma_t|^{-2}\int_{\Sigma_t}H_t\phi_t d\sigma_t\right) \\ &- \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\left(\int_{\Sigma_t}2H_tH_t' d\sigma_t - \int_{\Sigma_t}\left({H_t}^2 + \frac{2}{3}\zeta\right)H_t\phi_t d\sigma_t\right).\end{aligned}$$

Usando as equações

$$H'(t) = \Delta_{\Sigma_t}\phi_t + Ric(\nu_t,\nu_t)\phi_t + |A_t|^2\phi_t \quad \text{e}$$
$$2Ric(\nu_t,\nu_t) + 2|A_t|^2 = R_t - 2K_t + H_t^2 + |A_t|^2,$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}m_{CH}(\Sigma_t) &= \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{\Sigma_t}\frac{-4\pi\chi(\Sigma_t)}{|\Sigma_t|}H_t\phi_t d\sigma_t + \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{\Sigma_t}\frac{-32\pi^2 q(\Sigma_t)^2}{|\Sigma_t|^2}H_t\phi_t\sigma_t \\
&+ \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\left(\int_{\Sigma_t}\left(\frac{1}{2|\Sigma_t|}\int_{\Sigma_t}{H_t}^2 d\sigma_t\right)H_t\phi_t d\sigma_t + \int_{\Sigma_t}\frac{\zeta}{3}H_t\phi_t d\sigma_t\right) \\
&+ \frac{1}{4}\left(\frac{|\Sigma_t|}{16\pi}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dt}q(\Sigma_t)^2 + \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{\Sigma_t}\frac{64\pi^2 q(\Sigma_t)^2}{|\Sigma_t|^2}H_t\phi_t d\sigma_t \\
&- \frac{2|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{\Sigma_t}\phi_t\Delta_{\Sigma_t}H_t d\sigma_t - \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{\Sigma_t}H_t(R_t - 2K_t + {H_t}^2 + |A_t|^2)\phi_t d\sigma_t \\
&+ \frac{|\Sigma_t|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{\Sigma_t}\left({H_t}^2 + \frac{2}{3}\zeta\right)H_t\phi_t d\sigma_t.
\end{aligned}$$

Avaliando em $t = 0$ concluimos o lema.

■

Teorema 3.1. *Se* (M^3, g) *é uma variedade Riemanniana com curvatura escalar* $R \geqslant 2|E|^2 + 2\Lambda$, *aqui* $E \in \mathfrak{X}(M)$ *é tal que* $\mathrm{div}E = 0$. *Suponha que* $\Sigma \hookrightarrow M$ *é uma superfície fechada two-sided com curvatura média não negativa que é ponto crítico para a massa de Hawking carregada, então*

1. *ou* Σ *é mínima;*
2. *ou* Σ *é umbílica, sua curvatura Gaussiana satisfaz* $K_\Sigma = \dfrac{2\pi\chi(\Sigma)}{|\Sigma|}$, *e ao longo de* Σ, $R = 2|E|^2 + 2\Lambda$ *é constante. Além disso, se* ν *é um campo normal unitário em* Σ, *então* E *e* ν *são linearmente dependentes.*

Demonstração: Observe que, pelo Lema 3.1, podemos escrever a primeira variação da massa de Hawking carregada da seguinte forma

$$\frac{d}{dt}m_{CH}(\Sigma_t)\bigg|_{t=0} = -\frac{2|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{\Sigma}(\Delta_\Sigma H + \mathcal{Z}(\Sigma)H)\phi d\sigma + \frac{1}{4}\left(\frac{|\Sigma|}{16\pi}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dt}q(\Sigma_t)^2\bigg|_{t=0},$$

onde

$$\mathcal{Z}(\Sigma) = \frac{-4\pi(g(\Sigma)-1)}{|\Sigma|} - K_\Sigma - \frac{16\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma|^2} + \frac{1}{2}(R-\zeta) + \frac{1}{4}\left(2|A|^2 - \frac{1}{|\Sigma|}\int_\Sigma H^2 d\sigma\right). \quad (3.4)$$

Desde que $R \geqslant 2|E|^2 + 2\Lambda$ e $|A|^2 \geqslant \dfrac{1}{2}H^2$, temos

$$\frac{1}{2}(R-\zeta) \geqslant |E|^2 \quad \text{e} \quad \int_\Sigma \left(2|A|^2 - \frac{1}{|\Sigma|}\int_\Sigma H^2 d\sigma\right) d\sigma \geqslant 0.$$

Logo usando esses fatos e Teorema de Gauss-Bonnet tem-se

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma \mathcal{Z}(\Sigma) d\sigma &= \int_\Sigma \frac{-4\pi(g(\Sigma)-1))}{|\Sigma|} d\sigma - \int_\Sigma K_\Sigma d\sigma - \int_\Sigma \frac{16\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma|^2} d\sigma \\
&+ \frac{1}{2}\int_\Sigma (R-\zeta) d\sigma + \frac{1}{4}\int_\Sigma \left(2|A|^2 - \frac{1}{|\Sigma|}\int_\Sigma H^2 d\sigma\right) d\sigma \\
&\geqslant -4\pi(g(\Sigma)-1) - 2\pi\chi(\Sigma) - \frac{16\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} + \int_\Sigma |E|^2 d\sigma \\
&= -\frac{16\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} + \int_\Sigma |E|^2 d\sigma.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Holder temos que

$$\int_\Sigma |E|^2 d\sigma \geqslant \frac{16\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma|}.$$

Portanto,

$$\int_\Sigma \mathcal{Z}(\Sigma) d\sigma \geqslant 0.$$

Como Σ é ponto crítico da massa de Hawking carregada, temos que

$$\int_\Sigma (\Delta_\Sigma H + \mathcal{Z}(\Sigma)H)\phi d\sigma = 0.$$

Por hipótese $H \geqslant 0$. Então, como consequência do Princípio do Máximo temos que $H = 0$ ou $H > 0$. Supondo que Σ não é mínima, temos que

$$\frac{1}{H}\Delta_\Sigma H + \mathcal{Z}(\Sigma) = 0.$$

Daí,

$$\int_\Sigma \mathcal{Z}(\Sigma) d\sigma = -\int_\Sigma \frac{1}{H^2}|\nabla H|^2 d\sigma \leqslant 0.$$

Assim, $\displaystyle\int_\Sigma \mathcal{Z}(\Sigma) d\sigma = 0$ o que implica em H constante e $\mathcal{Z}(\Sigma) = 0$. Portanto Σ é umbílica, $R = 2|E|^2 + 2\Lambda$ em Σ. Além disso, se ν é um campo normal unitário em Σ, então E e ν são linearmente dependentes e $|E|^2$ é constante. Logo

$$|E|^2 = \frac{16\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma|^2}.$$

E por (3.4) chegamos que $K_\Sigma = \dfrac{-4\pi(g(\Sigma)-1)}{|\Sigma|} = \dfrac{2\pi\chi(\Sigma)}{|\Sigma|}$. ∎

3.2 Estabilidade e massa de Hawking carregada

Dada uma superfície $\Sigma \hookrightarrow M^3$, associamos o operador de Jacobi dado por

$$L = \Delta_\Sigma + \mathrm{Ric}(\nu,\nu) + |A|^2,$$

aqui Δ_Σ é o Laplaciano de Σ com a métrica induzida, Ric é a curvatura de Ricci de M e A é a segunda forma fundamental de Σ. Denotaremos por $\lambda_1(L)$ o primeiro autovalor de L. Temos associado ao operador L a forma quadrática

$$J(\phi) = -\int_\Sigma \phi L\phi d\sigma, \text{ para toda } \phi \in C^\infty(\Sigma).$$

Uma superfície $\Sigma \hookrightarrow M^3$ é chamada estável se $J(\phi) \geqslant 0$ para toda $\phi \in C^\infty(\Sigma)$.

Observação 3.3. *Note que nesse caso tem-se* $\lambda_1(L) \geqslant 0$.

Se tivermos $\lambda_1(L) > 0$ então dizemos que Σ é estritamente estável. Note que $J(\phi) \geqslant \lambda_1(L)\int_\Sigma \phi^2 d\sigma$ para toda $\phi \in C^\infty(\Sigma)$. Donde obtemos a seguinte equação de estabilidade

$$\lambda_1(L)\int_\Sigma \phi^2 d\sigma + \int_\Sigma (\mathrm{Ric}(\nu,\nu) + |A|^2)\phi^2 d\sigma \leqslant \int_\Sigma |\nabla\phi|^2 d\sigma, \quad \forall\phi \in C^\infty(\Sigma). \tag{3.5}$$

Lema 3.2. ***(Segunda variação da massa de Hawking carregada)*** *Considerando a Definição (3.1) e supondo que Σ é ponto crítico para a massa de Hawking carregada temos que*

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2} m_{CH}(\Sigma_t)\Big|_{t=0} = & \\
& - \frac{2|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_\Sigma (L\phi)^2 d\sigma - \frac{m_{CH}(\Sigma)}{2|\Sigma|}\int_\Sigma (\phi L\phi - H^2\phi^2)d\sigma \\
& - \frac{3m_{CH}(\Sigma)}{4|\Sigma|^2}\left(\int_\Sigma H\phi d\sigma\right)^2 + \frac{4|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_\Sigma H^2\phi L\phi d\sigma \\
& + \frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_\Sigma \left[\left(H^2 + \frac{2}{3}\zeta\right)(\phi L\phi - H^2\phi^2 - \mathrm{div}_\Sigma(\nabla_X X)) - 2HL'(0)\phi\right] \\
& + \frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\frac{64\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma|^2}\int_\Sigma (\phi L\phi - H^2\phi^2)d\sigma \\
& + \frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\frac{128\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma|^3}\left(\int_\Sigma H\phi d\sigma\right)^2 + \frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\frac{64\pi^2}{|\Sigma|}\frac{d^2}{dt^2}q(\Sigma_t)^2\Big|_{t=0} \\
& + \frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\frac{128\pi^2}{|\Sigma|^2}\frac{d}{dt}q(\Sigma_t)^2\Big|_{t=0}\int_\Sigma H\phi d\sigma,
\end{aligned}$$

aqui $X(x) = \dfrac{\partial f}{\partial t}(0, x)$.

Demonstração: Derivando a expressão da primeira variação da massa de Hawking carregada e avaliando em $t = 0$ teremos

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dt^2} m_{CH}(\Sigma_t)\Big|_{t=0} = \\
-\;& \frac{1}{4}\frac{|\Sigma|^{-\frac{3}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}}\left(\int_\Sigma \phi H d\sigma\right)^2 \left(\frac{\chi(\Sigma)}{2} + \frac{4\pi q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} - \frac{1}{16\pi}\int_\Sigma \left(H^2 + \frac{2}{3}\zeta\right) d\sigma\right) \\
+\;& \frac{1}{2}\frac{|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_\Sigma (-\phi L\phi + H^2\phi^2 + div_\Sigma(\nabla_X X)) d\sigma \left(\frac{\chi(\Sigma)}{2} + \frac{4\pi q(\Sigma)^2}{|\Sigma|}\right. \\
-\;& \left.\frac{1}{16\pi}\int_\Sigma \left(H^2 + \frac{2}{3}\zeta\right) d\sigma\right) \\
-\;& \frac{1}{2}\frac{|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_\Sigma \phi H d\sigma \left[4\pi \frac{d^2}{dt^2} q(\Sigma_t)\Big|_{t=0} |\Sigma|^{-1} + 4\pi q(\Sigma)^2 |\Sigma|^{-2}\int_\Sigma \phi H d\sigma\right. \\
-\;& \left.\frac{1}{16\pi}\left(\int_\Sigma 2HL\phi d\sigma - \int_\Sigma \left(H^2 + \frac{2}{3}\zeta\right) H\phi d\sigma\right)\right] \\
+\;& \frac{1}{2}\frac{|\Sigma|^{-\frac{3}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}}\left(4\pi \frac{d}{dt} q(\Sigma_t)^2\Big|_{t=0}\right)\int_\Sigma \phi H d\sigma + \frac{|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}}\left(4\pi \frac{d^2}{dt^2} q(\Sigma_t)^2\Big|_{t=0}\right) \\
+\;& \frac{3}{2}\frac{|\Sigma|^{-\frac{5}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}}\left(\int_\Sigma \phi H d\sigma\right)^2 4\pi q(\Sigma)^2 + \frac{|\Sigma|^{-\frac{3}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}}\left(4\pi \frac{d}{dt} q(\Sigma_t)^2\Big|_{t=0}\right)\int_\Sigma \phi H d\sigma \\
-\;& \frac{|\Sigma|^{-\frac{3}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}} 4\pi q(\Sigma)^2 \int_\Sigma (-\phi L\phi + H^2\phi^2 + div_\Sigma(\nabla_X X)) d\sigma \\
+\;& \frac{1}{2}\frac{|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_\Sigma \phi H d\sigma \left(\int_\Sigma 2HL\phi d\sigma - \int_\Sigma \left(H^2 + \frac{2}{3}\zeta\right) \phi H d\sigma\right) \\
-\;& \frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\left(2\int_\Sigma (L\phi)^2 d\sigma + 2\int_\Sigma HL'(0)\phi d\sigma - 4\int_\Sigma \phi H^2 L\phi d\sigma\right. \\
+\;& \left.\int_\Sigma \left(H^2 + \frac{2}{3}\zeta\right)(-\phi L\phi + H^2\phi^2 + div_\Sigma(\nabla_X X)) d\sigma\right),
\end{aligned}
$$

na expressão acima usamos os seguintes fatos

$$
\frac{d^2}{dt^2}(d\sigma_t)\Big|_{t=0} = [-\phi L\phi + H^2\phi^2 + div_\Sigma(\nabla_X X)]\, d\sigma
$$

$$
\frac{d}{dt}(d\sigma_t)\Big|_{t=0} = -\phi H d\sigma.
$$

Supondo que Σ é ponto crítico para a massa de Hawking carregada obtemos que

$$
\begin{aligned}
&- \frac{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}{|\Sigma|^{\frac{3}{2}}}\frac{m_{CH}(\Sigma)}{2}\int_\Sigma H\phi d\sigma + \left[4\pi\frac{d^2}{dt^2}q(\Sigma_t)\Big|_{t=0}|\Sigma|^{-1} + 4\pi q(\Sigma)^2|\Sigma|^{-2}\int_\Sigma \phi H d\sigma\right] \\
&= \int_\Sigma 2HL\phi d\sigma - \int_\Sigma\left(H^2 + \frac{2}{3}\zeta\right)H\phi d\sigma. \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

Substituindo a equação (3.6) na expressão inicial obtemos o resultado.

■

Proposição 3.1. *Seja* (M^3, g) *uma variedade Riemanniana com curvatura escalar* $R \geqslant 2|E|^2 + 2\Lambda$, *aqui* $E \in \mathfrak{X}(M)$ *é tal que* $\mathrm{div}E = 0$. *Se* $\Sigma \hookrightarrow M^3$ *é uma superfície two-sided, mínima, fechada, estritamente estável e que maximiza localmente a massa de Hawking carregada, então*

$$
(\lambda_1(L) + \Lambda)|\Sigma| + \frac{16\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} = 2\pi\chi(\Sigma).
$$

Além disso, ao longo de Σ, *temos que* $A = 0$, $R = 2|E|^2 + 2\Lambda$, $\mathrm{Ric}(\nu,\nu) = -\lambda_1(L)$ *e a curvatura Gaussiana satisfaz* $K_\Sigma = \dfrac{2\pi\chi(\Sigma)}{|\Sigma|}$.

Demonstração: Seja $\Sigma(t) \hookrightarrow M^3$ uma variação normal suave de Σ dada pelo campo vetorial $X = \phi\nu$, aqui $\phi \in C^\infty(\Sigma)$. Usando o Lema (3.2) temos que

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}m_{CH}(\Sigma(t))\Big|_{t=0} &= -\frac{2|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_\Sigma (L\phi)^2 d\sigma - \frac{m_{CH}(\Sigma)}{2|\Sigma|}\int_\Sigma(\phi L\phi)d\sigma \\
&+ \frac{4}{3}\Lambda\frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_\Sigma \phi L\phi d\sigma \\
&+ \frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{1}{2}}}\frac{4\pi q(\Sigma)^2}{|\Sigma|^2}\int_\Sigma \phi L\phi d\sigma \\
&= -\frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(16\pi)^{\frac{3}{2}}}\left[2\int_\Sigma (L\phi)^2 d\sigma - \left(2\Lambda + \frac{32\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma|^2} - \frac{4\pi\chi(\Sigma)}{|\Sigma|}\right)\int_\Sigma \phi L\phi d\sigma\right].
\end{aligned}
$$

Como Σ maximiza localmente a massa de Hawking carregada, obtemos que

$$
-2\int_\Sigma (L\phi)^2 d\sigma \leqslant \left(-2\Lambda - \frac{32\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma|^2} + \frac{4\pi\chi(\Sigma)}{|\Sigma|}\right)\int_\Sigma \phi L\phi d\sigma. \qquad (3.7)
$$

Tomando uma auto-função relacionada ao primeiro autovalor teremos que

$$(\lambda_1(L) + \Lambda)|\Sigma| + \frac{16\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} \geqslant 2\pi\chi(\Sigma).$$

Novamente, pela equação de Gauss, temos

$$2\mathrm{Ric}(\nu, \nu) + 2|A|^2 = R - 2K_\Sigma + H^2 + |A|^2.$$

Tomando a função $\phi \equiv 1$ na desigualdade de estabilidade obtemos que

$$\lambda_1(L)|\Sigma| + \frac{1}{2}\int_\Sigma (R + |A|^2)d\sigma \leqslant \int_\Sigma K_\Sigma d\sigma.$$

Sabendo que $R \geqslant 2|E|^2 + 2\Lambda$ e pela desigualdade de Holder temos

$$\begin{aligned}
(\lambda_1(L) + \Lambda)|\Sigma| + \frac{16\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} &\leqslant \lambda_1(L)|\Sigma| + |\Sigma|\Lambda + \int_\Sigma |E|^2 d\sigma \\
&\leqslant \int_\Sigma K_\Sigma d\sigma - \frac{1}{2}\int_\Sigma (R + |A|^2)d\sigma + |\Sigma|\Lambda + \int_\Sigma |E|^2 d\sigma \\
&\leqslant \int_\Sigma K_\Sigma d\sigma - \frac{1}{2}\int_\Sigma (R + |A|^2)d\sigma + |\Sigma|\Lambda + \frac{1}{2}\int_\Sigma (R - \zeta)d\sigma \\
&\leqslant 2\pi\chi(\Sigma).
\end{aligned}$$

Daí,

$$(\lambda_1(L) + \Lambda)|\Sigma| + \frac{16\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} = 2\pi\chi(\Sigma).$$

Logo, ao longo de Σ, temos $A = 0$ e $R = 2|E|^2 + 2\Lambda$. Pela igualdade na equação de estabilidade para $\phi \equiv 1$ teremos

$$\int_\Sigma (\mathrm{Ric}(\nu, \nu) + \lambda_1(L))d\sigma = 0.$$

Portanto, o primeiro autovalor de $L + \lambda_1(L)$ é zero, logo $\mathrm{Ric}(\nu, \nu) = -\lambda_1(L)$. Por fim, da equação de Gauss teremos $K_\Sigma = \dfrac{2\pi\chi(\Sigma)}{|\Sigma|}$. ■

Proposição 3.2. *Seja* (M^3, g) *uma variedade Riemanniana com curvatura escalar* $R \geqslant 2|E|^2 + 2\Lambda$*, aqui* $E \in \mathfrak{X}(M)$ *é tal que* $\mathrm{div}E = 0$*. Se* $\Sigma \hookrightarrow M^3$ *é uma superfície mínima, fechada e estável satisfazendo*

$$(\lambda_1(L) + \Lambda)|\Sigma| + \frac{16\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} = 2\pi\chi(\Sigma).$$

Então existe $\epsilon > 0$ *e uma função suave* $\mu : \Sigma \times (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$\Sigma_t = \{\exp_x(\mu(t,x)\nu(x)); x \in \Sigma\}$$

é uma família de superfícies fechadas com curvatura média constante. Além disso, para cada $x \in \Sigma$ *e para cada* $t \in (-\epsilon, \epsilon)$*, as seguintes propriedades são satisfeitas*

$$\mu(0,x) = 0 \quad , \frac{\partial \mu}{\partial t}(0,x) = 1 \quad e \int_\Sigma (\mu(t,\cdot) - t)d\sigma = 0.$$

Demonstração: veja [6].

∎

Usando a proposição anterior podemos definir uma aplicação $f_t : \Sigma \to M$ dada por

$$f_t(x) = \exp_x(\mu(t,x)\nu(x))$$

para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Note que $\Sigma_0 = \Sigma$. Seja $\nu_t(x)$ o campo vetorial normal unitário ao longo de Σ_t tal que $\nu_0(x) = \nu(x)$ para todo $x \in \Sigma$, denotaremos por $d\sigma_t$ o elemento de volume de Σ_t com respeito a métrica induzida por f_t.

Consideremos o operador de Jacobi

$$L(t) = \Delta_{\Sigma(t)} + Ric(\nu_t, \nu_t) + |A_t|^2,$$

aqui $\Delta_{\Sigma(t)}$ denota o Laplaciano de $\Sigma(t)$ com respeito a métrica induzida e A_t a segunda forma fundamental de $\Sigma(t)$ com respeito a $\nu(t)$.

Definimos a função lapso $\rho(t) : \Sigma(t) \to \mathbb{R}$ para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ por

$$\rho_t(x) = \left\langle \nu_t(x), \frac{\partial}{\partial t} f_t(x) \right\rangle$$

Lema 3.3. *A função* $\rho_t(x)$ *satisfaz* $H'(t) = L(t)\rho_t$*, aqui* $H(t)$ *representa a curvatura média de* $\Sigma(t)$ *com respeito a* ν_t*.*

Usando as Proposições 3.1, 3.2 e o lema anterior temos que, para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ a curvatura média H_t da foliação CMC $\Sigma_t \hookrightarrow M$ em uma vizinhança de Σ satisfaz

$$\frac{d}{dt} H_t \Big|_{t=0} = Ric(\nu, \nu) = -\lambda(L) < 0.$$

Diminuindo ϵ, caso necessário, temos que, para $t \in (0, \epsilon)$, $H_t < 0$ e para $t \in (-\epsilon, 0)$ tem-se $H_t > 0$, ou seja, H é decrescente em t.

Lema 3.4. *Considere* (M^3, g), Σ *e* $\{\Sigma(t)\}_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$ *como na Proposição 3.2., então temos que*

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma(t)}(\mathrm{Ric}(\nu_t,\nu_t)+|A_t|^2)\rho_t d\sigma_t &= \overline{\rho_t}\int_{\Sigma(t)}(\mathrm{Ric}(\nu_t,\nu_t)+|A_t|^2)d\sigma_t\\ &+ \overline{\rho_t}\int_{\Sigma(t)}\frac{|\nabla\rho_t|^2}{\rho_t^2}d\sigma_t + H'(t)\theta(t,x),\end{aligned}$$

aqui $\theta(t,x)$ *é uma função não positiva e* $\overline{\rho_t} = \dfrac{1}{|\Sigma(t)|}\displaystyle\int_\Sigma \rho_t d\sigma_t$.

Demonstração: Veja [6] ∎

3.3 Rigidez de superfícies estritamente estáveis em um conjunto de dados iniciais maximal

Nosso primeiro resultado trata de superfícies estritamente estáveis, mínimas que localmente maximizam a massa de Hawking carregada. Iremos considerar conjunto de dados iniciais maximal que satisfaz a condição de energia dominante.

Teorema 3.2. *Seja* (M^3, g, K, E) *um conjunto de dados iniciais maximal satisfazendo a condição de energia dominante, ou seja,* $R \geqslant 2|E|^2 + 2\Lambda$, *aqui* $E \in \mathfrak{X}(M)$ *é tal que* $\mathrm{div}\, E = 0$. *Seja* $\Sigma \hookrightarrow M$ *uma superfície mergulhada em* M *fechada, two-sided, estritamente estável, mínima e que maximiza localmente a massa de Hawking carregada. Então*

$$(\lambda_1 + \Lambda)\,|\Sigma| + \frac{16\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} = 2\pi\chi(\Sigma), \tag{3.8}$$

aqui λ_1 *é o primeiro autovalor do operador de Jacobi. Além disso se* $\Lambda = -3$ *então uma das condições são satisfeitas:*

1. *Se* Σ *é uma 2-esfera, então* Σ *tem curvatura Gaussiana constante igual a* $\frac{1}{a^2}$ *e uma vizinhança de* Σ *em* M *é isométrica ao espaço Anti-deSitter Reissner-Nordström* $((-\epsilon,\epsilon)\times\mathbb{S}^2, (g_{m,q,\Lambda}))$ *para algum* $\epsilon > 0$.

2. *Se* Σ *tem gênero* $g(\Sigma) \geqslant 2$, *então* Σ *tem curvatura Gaussiana constante igual a* $-\frac{1}{a^2}$ *e existe uma vizinhança de* Σ *em* M *que é isométrica a* $((-\epsilon,\epsilon)\times\widehat{\Sigma}, \overline{g_a})$ *para algum* $\epsilon > 0$, *aqui* $\overline{g_a}$ *é uma métrica de curvatura Gaussiana constante igual a -1.*

3. *Se* Σ *tem gênero um, então* Σ *tem curvatura Gaussiana constante igual a zero e existe uma vizinhança de* Σ *em* M *que é isométrica a* $((-\epsilon,\epsilon)\times\widehat{\Sigma}, g_a')$ *para algum* $\epsilon > 0$*, aqui* g_a' *é uma métrica flat em* M*.*

Demonstração: Pela Proposição 3.1 temos que o operador de Jacobi de Σ é dado por $L = \Delta - \lambda_1(L)$, e pela Proposição 3.2 podemos construir uma foliação $\{\Sigma(t)\}_{|t|<\epsilon}$ CMC em torno de $\Sigma = \Sigma_0$. Usando o Lema 3.4, a fórmula de Gauss e a primeira variação da massa de Hawking carregada temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}m_{CH}(\Sigma(t)) &= -\frac{|\Sigma(t)|^{\frac{1}{2}}}{32\pi^{\frac{3}{2}}}H(t)\left[\int_{\Sigma(t)}\left(Ric(\nu_t,\nu_t)+|A_t|^2\right)\rho_t d\sigma_t + 2\pi\chi(\Sigma(t))\overline{\rho}_t\right.\\
&- \left.\frac{16\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma(t)|}\overline{\rho}_t - \left(\frac{3H(t)^2}{4}+\Lambda\right)\int_{\Sigma}\rho_t d\sigma_t\right]\\
&= -\frac{|\Sigma(t)|^{\frac{1}{2}}}{32\pi^{\frac{3}{2}}}H(t)\left[\overline{\rho_t}\int_{\Sigma(t)}(Ric(\nu_t,\nu_t)+|A_t|^2)d\sigma_t + \overline{\rho_t}\int_{\Sigma(t)}\frac{|\nabla\rho_t|^2}{\rho_t^2}d\sigma_t\right.\\
&+ \left. H'(t)\theta(t,x) + 2\pi\chi(\Sigma(t))\overline{\rho_t} - \frac{16\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma(t)|}\overline{\rho}_t - \left(\frac{3H(t)^2}{4}+\Lambda\right)\int_{\Sigma}\rho_t d\sigma_t\right].
\end{aligned}$$

Novamente pela fórmula de Gauss, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}m_{CH}(\Sigma(t)) &= -\frac{|\Sigma(t)|^{\frac{1}{2}}}{32\pi^{\frac{3}{2}}}H(t)\left[\frac{\overline{\rho_t}}{2}\int_{\Sigma(t)}\left(R-2\Lambda+\left(|A_t|^2-\frac{H(t)^2}{2}\right)\right)d\sigma_t - \frac{16\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma(t)|}\overline{\rho}_t\right.\\
&+ \left. H'(t)\theta(t,x) + \overline{\rho_t}\int_{\Sigma(t)}\frac{|\nabla\rho_t|^2}{\rho_t^2}d\sigma_t\right]. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Como $\rho_0(x) = 1$, diminuindo ϵ se necessário, podemos supor que $\rho_t(x) > 0$, para cada $t \in (-\epsilon,\epsilon)$ e $x \in \Sigma(t)$. Usando o fato de que $R \geqslant 2|E|^2 + 2\Lambda$ e a desigualdade de Holder teremos

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \overline{\rho_t}\left(\int_{\Sigma(t)}|E|^2 d\sigma_t - \frac{16\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma(t)|}\right)\\
&\leqslant \frac{\overline{\rho_t}}{2}\int_{\Sigma(t)}\left(R-2\Lambda+\left(|A_t|^2-\frac{H(t)^2}{2}\right)\right)d\sigma_t - \frac{16\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma(t)|}\overline{\rho}_t\\
&+ H'(t)\theta(t,x) + \overline{\rho_t}\int_{\Sigma(t)}\frac{|\nabla\rho_t|^2}{\rho_t^2}d\sigma_t.
\end{aligned}$$

Como H_t é uma função decrescente, teremos $\frac{d}{dt}m_{CH}(\Sigma_t) \geqslant 0$, para $t \in [0,\epsilon)$, e $\frac{d}{dt}m_{CH}(\Sigma_t) \leqslant 0$, para $t \in (-\epsilon, 0]$. Portanto, obtemos que

$$m_{CH}(\Sigma_t) \geqslant m_{CH}(\Sigma),$$

para todo $t \in (-\epsilon,\epsilon)$. Por outro lado, Σ maximiza localmente a massa de Hawking carregada, isto é, $m_{CH}(\Sigma_t) \leqslant m_{CH}(\Sigma)$. Daí segue que $\frac{d}{dt}m_{CH}(\Sigma(t)) = 0$, para $t \in (-\epsilon,\epsilon)$. Assim, pelo Teorema 2, $\Sigma(t)$ é umbílica, $R = 2|E|^2 + 2\Lambda$ e $|E|$ é constante ao longo de $\Sigma(t)$. Daí $\rho_t = 1$ para cada $t \in (-\epsilon,\epsilon)$. De fato, pela equação (3.9) obtemos

$$H'(t)\theta(t,x) + \overline{\rho_t}\int_{\Sigma(t)} \frac{|\nabla\rho_t|^2}{\rho_t^2}d\sigma_t = 0,$$

para todo $t \in (-\epsilon,\epsilon)$. Sendo $H'(t)\theta(t,x) \geqslant 0$ e $\rho_0 = 1$ segue a afirmação. Usando esse fato e a Proposição 3.2, concluimos que $\mu(t,x) = t$ para todo $(t,x) \in (-\varepsilon,\varepsilon)\times\Sigma$. Assim, podemos afirmar que em uma vizinhança de Σ a métrica pode ser escrita na forma $g = dt^2 + g_{\Sigma(t)}$.

A métrica induzida em $\Sigma(t)$ evolui da seguinte forma

$$\frac{\partial}{\partial t}g_{\Sigma(t)} = -2\rho_t A_t.$$

Sendo $\rho_t = 1$, $\Sigma(t)$ umbílica tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t}g_{\Sigma(t)} = -H(t)g_{\Sigma(t)},$$

para todo $t \in (-\epsilon,\epsilon)$. Daí $g_{\Sigma(t)} = e^{-\int_0^t H(s)ds}g_\Sigma$. Supondo 1) temos que Σ tem curvatura Gaussina constante positiva. Logo $g_\Sigma = a^2 g_{\mathbb{S}^2}$, onde $a^2 = \frac{|\Sigma|}{4\pi}$. Donde $g_{\Sigma(t)} = u_{q,a}(t)^2 g_{\mathbb{S}^2}$ $t \in (-\epsilon,\epsilon)$, aqui

$$u_{q,a}(t) = ae^{-\frac{1}{2}\int_0^t H(s)ds}$$

com $q(\Sigma) = q = a^2|E|$. Observe que a função $u(t)$ satisfaz a equação

$$u''(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-u'(t)^2}{u(t)}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{-3u(t)^4+q^2}{u(t)^3}\right). \tag{3.10}$$

Daí, por unicidade de soluções de EDO temos que $((-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma)$ é isométrico a parte do espaço Anti-deSitter Reissner-Nordström.

Supondo que 2) ocorre temos que Σ terá curvatura Gaussina constante negativa, logo $g_{\Sigma(t)} = u_{q,a}(t)^2 g_{\widehat{\Sigma}}$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, aqui

$$u_{q,a}(t) = ae^{-\frac{1}{2}\int_0^t H(s)ds}$$

com $a^2 = \frac{|\Sigma|}{4\pi(g(\Sigma)-1)}$. Note que nesse caso temos que $u(t)$ satisfaz a equação diferencial

$$u''(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{-1-u'(t)^2}{u(t)}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{-3u(t)^4+q^2}{u(t)^3}\right). \tag{3.11}$$

Daí, usando o mesmo argumento anterior temos que existe uma vizinhança de Σ em M isométrica à $((-\epsilon, \epsilon) \times \widehat{\Sigma}, \overline{g}_{a,q})$ onde $\overline{g}_{a,q}$ é uma métrica com curvatura Gaussiana constante igual -1. O item 3) segue de modo análogo. ∎

3.4 Rigidez de superfícies estáveis em um conjunto de dados iniciais maximal

Nesta seção obtemos uma desigualdade envolvendo a área de Σ, a carga $q(\Sigma)$ e o gênero $g(\Sigma)$, quando a constante cosmológica Λ é negativa. para constante cosmológica negativa. Quando a igualdade é atingida provamos que localmente M é um cilindro sobre Σ.

Teorema 3.3. *Seja* (M^3, g, K, E) *um conjunto de dados inicias maximal que satisfaz a condição de energia dominante, ou seja,* $R \geqslant 2|E|^2 - 6$*, aqui* $E \in \mathfrak{X}(M)$ *é tal que* $\operatorname{div} E = 0$*. Seja* $\Sigma \hookrightarrow M$ *uma superfície mergulhada em* M *fechada, two-sided que localmente é minimizante de área, então* Σ *satisfaz*

$$3|\Sigma| - \frac{16\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} \geqslant 4\pi(g(\Sigma)-1).$$

Além disso, se vale a igualdade uma das condições são satisfeitas:

1. *Se* Σ *tem gênero* $g(\Sigma) \geqslant 2$ *, então* Σ *tem curvatura de Gauss constante* $K_\Sigma = |E|^2 - 3$ *e existe uma vizinhança de* Σ *em* M *isométrica a* $((-\delta, \delta) \times \Sigma, dt^2 + g_\Sigma)$.

2. *Se* Σ *tem gênero igual a um, então* Σ *tem curvatura de Gauss constante* $K_\Sigma = 0$ *e existe uma vizinhança de* Σ *em* M *isométrica a* $((-\delta, \delta) \times T^2, dt^2 + g_\Sigma)$*, aqui* g_Σ *é uma métrica plana em* T^2.

3. *Se* Σ *tem gênero zero, então* Σ *tem curvatura de Gauss constante* $K_\Sigma = |E|^2 - 3$ *e existe uma vizinhança de* Σ *em* M *isométrica a* $((-\delta, \delta) \times \mathbb{S}^2, dt^2 + g_\Sigma)$.

Demonstração: Inicialmente, note que se Σ é localmente minimizante de área então

$$\int_\Sigma (\mathrm{Ric}(\nu,\nu) + |A|^2)\phi^2 d\sigma \leqslant \int_\Sigma |\nabla\phi|^2 d\sigma,$$

para toda $\phi \in C^\infty(\Sigma)$. Daí olhando para a forma quadrática $J(\phi) = -\int_\Sigma \phi L\phi d\sigma$ teremos

$$\begin{aligned} J(\phi) &= -\int_\Sigma \phi\Delta\phi d\sigma - \int_\Sigma (\mathrm{Ric}(\nu,\nu) + |A|^2)\phi^2 d\sigma \\ &\geqslant \int_\Sigma |\nabla\phi|^2 d\sigma - \int_\Sigma |\nabla\phi|^2 d\sigma = 0. \end{aligned}$$

Portanto Σ é estável, logo

$$3|\Sigma| - \frac{16\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} \geqslant 4\pi(g(\Sigma) - 1).$$

A igualdade é satisfeita se, e somente se, ao longo de Σ tivermos $A = 0$, $R = 2|E|^2 - 6$, $\mathrm{Ric}(\nu,\nu) = 0$ e $K_\Sigma = |E|^2 - 3$, com $|E|$ constante. Pela Proposição 3.2 existe uma família $\{\Sigma_t\}_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$ de superfícies compactas CMC em uma vizinhança de $\Sigma = \Sigma_0$. Note que a curvatura média da foliação CMC, $\Sigma = \Sigma_0$, evolui da seguinte forma

$$\frac{\partial}{\partial t}H(t) = -\Delta_{\Sigma(t)}\rho_t - (\mathrm{Ric}(\nu_t,\nu_t) + |A_t|^2)\rho_t.$$

Sabendo que $\rho_0(x) = 1$ e usando a fórmula de Gauss temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_t}\frac{\partial}{\partial t}H(t) &= -\frac{1}{\rho_t}\Delta_{\Sigma(t)}\rho_t - \left(\frac{R_t}{2} - K_{\Sigma(t)} + \frac{H(t)^2}{2} + \frac{|A_t|^2}{2}\right) \\ &\leqslant -\frac{1}{\rho_t}\Delta_{\Sigma(t)}\rho_t - (|E_t|^2 - 3) + K_{\Sigma(t)}. \end{aligned}$$

Integrando a desigualdade anterior obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}H(t)\int_{\Sigma(t)} \frac{1}{\rho_t} d\sigma_t &\leqslant -\int_{\Sigma(t)} \frac{1}{\rho_t^2}|\nabla\rho_t|^2 d\sigma_t - \int_{\Sigma(t)} |E_t|^2 d\sigma_t + 3|\Sigma_t| + 2\pi\chi(\Sigma) \\ &\leqslant \frac{-16\pi^2 q(\Sigma_t)^2}{|\Sigma_t|} + 3|\Sigma_t| + 2\pi\chi(\Sigma). \end{aligned}$$

Como $\mathrm{div}\ E = 0$ sabemos que $q(\Sigma_t) = q(\Sigma)$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Daí

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}H(t)\int_{\Sigma(t)}\frac{1}{\rho_t}d\sigma_t &\leqslant \frac{-16\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma_t|} + 3|\Sigma_t| - 3|\Sigma| + \frac{16\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} \\ &= 16\pi^2 q(\Sigma)^2\left(\frac{1}{|\Sigma|} - \frac{1}{|\Sigma_t|}\right) + 3(|\Sigma_t| - |\Sigma|).\end{aligned}$$

Logo

$$|\Sigma_t|\frac{\partial}{\partial t}H(t)\int_{\Sigma(t)}\frac{1}{\rho_t}d\sigma_t \leqslant \frac{16\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma|}(|\Sigma_t| - |\Sigma|) + 3|\Sigma_t|(|\Sigma_t| - |\Sigma|).$$

Suponha que $|\Sigma_t| \leqslant C$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ daí

$$\begin{aligned}|\Sigma_t|\frac{\partial}{\partial t}H(t)\int_{\Sigma(t)}\frac{1}{\rho_t}d\sigma_t &\leqslant \left(\frac{16\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} + 3C\right)(|\Sigma_t| - |\Sigma|) \\ &= \left(\frac{16\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} + 3C\right)\int_0^t \frac{d}{ds}|\Sigma_s| ds \\ &= \left(\frac{16\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} + 3C\right)\int_0^t \left(\int_{\Sigma_s} H(s)\rho_s d\sigma_s\right) ds \\ &= \left(\frac{16\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} + 3C\right)\int_0^t \left(H(s)\int_{\Sigma_s} \rho_s d\sigma_s\right) ds\end{aligned}$$

pois $H(s)$ é constante ao longo de Σ_s.

Fazendo $\varphi(t) = \int_{\Sigma_t}\frac{1}{\rho_t}d\sigma_t$, $\xi(t) = \int_{\Sigma_t}\rho_t d\sigma_t$ e $\kappa = \frac{16\pi^2 q(\Sigma)^2}{|\Sigma|} + 3C$, podemos escrever a equação acima da seguinte forma

$$|\Sigma_t|\frac{\partial}{\partial t}H(t)\varphi(t) \leqslant \kappa\int_0^t H(s)\xi(s)ds. \tag{3.12}$$

Como $\rho_0 = 1$, podemos assumir que

$$\frac{1}{2} < \rho_t < 2,$$

para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Daí,

$$\frac{1}{2}|\Sigma_t| < \xi(t) < 2|\Sigma_t| \text{ para todo } t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Diminuindo ϵ se necessário, podemos supor que

$$\frac{1}{2}|\Sigma| < |\Sigma_t| < 2|\Sigma|.$$

Portanto, $\frac{1}{4}|\Sigma| < \xi(t) < 4|\Sigma|$. De modo análogo temos que $\frac{1}{4}|\Sigma| < \varphi(t) < 4|\Sigma|$. Daí

$$\frac{1}{\varphi(t)} < \frac{4}{|\Sigma|} \quad e \quad \xi(t) < 4|\Sigma|. \tag{3.13}$$

Afirmamos que existe $\delta > 0$ tal que $H(t) \leqslant 0$ para todo $t \in [0, \delta)$.

De fato, seja $\delta < \epsilon$ arbitrário e suponha que exista $t_0 \in [0, \delta)$ tal que $H(t_0) > 0$. Defina o conjunto $I := \{t \in [0, t_0]; H(t) \geqslant H(t_0)\}$ e denote por $t^* = \inf I$. Note que se $t^* > 0$ então pelo Teorema do Valor Médio, existe $t_1 \in (0, t^*)$ tal que

$$H(t^*) = t^* \frac{\partial}{\partial t} H(t)\Big|_{t=t_1}.$$

Usando (3.12) e (3.13) obtemos que

$$\begin{aligned} H(t^*) &\leqslant \frac{\kappa t^*}{|\Sigma_{t_1}|\varphi(t_1)} \int_0^{t_1} H(s)\xi(s)ds \\ &< \frac{4\kappa t^*}{|\Sigma|^2} H(t^*) \int_0^{t_1} \xi(s)ds \\ &< \frac{16\kappa (t^*)^2}{|\Sigma|} H(t^*). \end{aligned}$$

Daí, tomando $\delta < \sqrt{\frac{|\Sigma|}{16\kappa}}$ temos uma contradição, logo $t^* = 0$. Portanto

$$0 = H(0) \geqslant H(t_0) > 0,$$

o que prova a afirmação. Daí $\frac{d}{dt}|\Sigma_t| \leqslant 0 \ \forall\, t \in [0, \delta)$, ou seja, $|\Sigma_t| \leqslant |\Sigma|$ para todo $t \in [0, \delta)$. De modo análogo podemos provar que $\frac{d}{dt}|\Sigma_t| \geqslant 0 \ \forall\, t \in (-\delta, 0]$, o que novamente implica em $|\Sigma_t| \leqslant |\Sigma|$ para todo $t \in (-\delta, 0]$. Como Σ é localmente minimizante de área tem-se $|\Sigma_t| = |\Sigma|$ para todo $t \in (-\delta, \delta)$. Segue que Σ_t é totalmente geodésica, $|E_t|$ é constante, $K_{\Sigma_t} = |E_t|^2 - 3$, $R_t = 2|E_t|^2 - 6$ e $Ric(\nu_t, \nu_t) = 0$. Para o item 1) é imediato ver que se $g(\Sigma) \geqslant 2$ então temos $K_\Sigma < 0$ e usando um argumento padrão pode-se mostrar que existe uma vizinhança de Σ em M^3 isométrica a $((-\delta, \delta) \times \Sigma, dt^2 + g_\Sigma)$. Os itens 2) e 3) seguem de forma análoga.

■

Capítulo 4

Teoremas do tipo Jellett e Heintze-Karcher em espaços conformemente plano

4.1 Preliminares

Seja $u : [0, r^2) \to \mathbb{R}$ uma função suave com $r \leqslant \infty$. Considere a função radial $h : B_r^{n+1} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = u(|x|^2)$ definida em uma bola Euclidiana de raio r e centrada na origem, aqui $|x|^2 = \langle x, x \rangle$ e assumimos que $B_r^{n+1} := \mathbb{R}^{n+1}$ quando $r = \infty$. Seja $\overline{g}$ a métrica obtida através de uma mudança conforme na métrica Euclidiana $\langle , \rangle$ dada por

$$\overline{g} = e^{2h} \langle , \rangle.$$

Fixemos a seguinte notação $\mathfrak{B}^{n+1} = (B_r^{n+1}, \overline{g})$.

Definição 4.1. *Um campo vetorial* $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ *é um campo vetorial conforme associado ao fator* ψ *se satisfaz*

$$\mathcal{L}_V g = 2\psi g,$$

aqui $(\overline{M}, g)$ *é uma variedade Riemanniana e* $\mathcal{L}_V$ *é a derivada de Lie da métrica com respeito a* V.

O campo vetorial posição é um campo que associa para cada $x \in \mathfrak{B}^{n+1}$ o vetor $\overrightarrow{x} = \sum x_i \partial_i$. O campo vetorial $\overrightarrow{x}$ em $(B_r^{n+1}, \langle , \rangle)$ é conforme, i.e., a derivada de Lie de $\langle , \rangle$ com respeito a $\overrightarrow{x}$ é

$$\mathcal{L}_{\overrightarrow{x}} \langle , \rangle = 2f \langle , \rangle,$$

onde $f \equiv 1$.

Sob a mudança conforme $\overline{g} = e^{2h}\langle , \rangle$, o campo vetorial $\overrightarrow{x}$ permanece conforme e temos que

$$\mathcal{L}_{\overrightarrow{x}} \overline{g} = 2\sigma \overline{g},$$

onde $\sigma(x) = 1 + 2u'(|x|^2)|\overrightarrow{x}|^2$ (veja [8]). Em relação a métrica Euclidiana temos que

$$\nabla h = 2u'(|x|^2)\overrightarrow{x} \quad \text{e} \quad \nabla(e^{2h}) = 4e^{2h}u'(|x|^2)\overrightarrow{x}.$$

O teorema seguinte é de suma importância para a demosntração do nosso primeiro resultado deste capítulo.

Teorema 4.1. *(Barros-Sousa) Seja Σ^n uma hipersuperfície de uma variedade Riemanniana $(\overline{M}^{n+1}, \overline{g})$ e seja V um campo vetorial conforme em $\overline{M}^{n+1}$. Se $\overline{N}$ é um campo vetorial unitário normal a Σ^n em $\overline{M}^{n+1}$ e $f(p) = \overline{g}(\overline{N}, V)$, $p \in \Sigma^n$, então*

$$Lf = -n\overline{g}(V, \nabla H) - n(\psi H + \overline{N}(\psi)), \tag{4.1}$$

onde H é a curvatura média de Σ^n, ψ é o fator conforme de V e L é o operador de Jacobi dado por $L = \Delta + |A|^2 + \overline{Ric}(\overline{N}, \overline{N})$.

Demonstração: (veja [7])

■

Sabemos que a função suporte $f(p) := \overline{g}(\overline{N}, \overrightarrow{x})$ tem sinal bem definido se está definida em um hipersuperfície star-shaped, então suponhamos que $f < 0$ (o caso em que $f > 0$ obtemos uma proposição análoga que resulta na demosntração do resultado principal).

Proposição 4.1. *Seja* $\overrightarrow{x}$ *o campo posição para* $\mathfrak{B}^{n+1}$ *em relação a origem. Seja* Σ^n *uma hipersuperfície star-shaped de* $\mathfrak{B}^{n+1}$ *com curvatura média constante* H *e* $\overline{N}$ *um campo vetorial unitário normal a* Σ^n *em* $\mathfrak{B}^{n+1}$. *Suponha que* $u''(|x|^2) - u'(|x|^2)^2 \geqslant 0$. *Se* $f(p) = \overline{g}(\overline{N}, \overrightarrow{x})$, $p \in M$ *então*

$$\Delta f + |A|^2 f \geqslant -n\sigma H. \tag{4.2}$$

Demonstração: Pelo teorema anterior temos que

$$Lf = -n\sigma H - n\overline{N}(\sigma). \tag{4.3}$$

Daí, como $\overline{\nabla}\sigma = 4e^{-2h}(u''(|x|^2)|x|^2 + u'(|x|^2))\overrightarrow{x}$ temos que

$$\begin{aligned} \overline{N}(\sigma) &= \overline{g}(\overline{\nabla}\sigma, \overline{N}) \\ &= 4e^{-2h}((u''(|x|^2)|x|^2 + u'(|x|^2))f. \end{aligned}$$

Fazendo $N = e^h\overline{N}$ temos que $\langle N, N\rangle = 1$ e

$$\begin{aligned} \overline{Ric}(\overline{N}, \overline{N}) &= e^{-2h}\{4(n-1)[u'(|x|^2)^2 - u''(|x|^2)]\langle \overrightarrow{x}, N\rangle^2 - 4nu'(|x|^2) \\ &- 4u''(|x|^2)|\overrightarrow{x}|^2 - 4(n-1)u'(|x|^2)^2|\overrightarrow{x}|^2\}. \end{aligned}$$

A equação (4.3) será

$$\begin{aligned} \Delta f + |A|^2 f &+ e^{-h}\{4(n-1)[u'(|x|^2)^2 - u''(|x|^2)]\langle \overrightarrow{x}, N\rangle^2 - 4nu'(|x|^2) \\ &- 4u''(|x|^2)|\overrightarrow{x}|^2 - 4(n-1)u'(|x|^2)^2|\overrightarrow{x}|^2\}\langle \overrightarrow{x}, N\rangle \\ &= -n\sigma H - 4ne^{-h}(u''(|x|^2)|x|^2 + u'(|x|^2))\langle \overrightarrow{x}, N\rangle. \end{aligned}$$

Usando o fato de que $f < 0$ teremos

$$\begin{aligned} \Delta f + |A|^2 f &+ e^{-h}\{4(n-1)[u'(|x|^2)^2 - u''(|x|^2)]\langle \overrightarrow{x}, N\rangle^2 - 4nu'(|x|^2) \\ &- 4u''(|x|^2)|\overrightarrow{x}|^2 - 4(n-1)u'(|x|^2)^2|\overrightarrow{x}|^2\}\langle \overrightarrow{x}, N\rangle \\ &\leqslant \Delta f + |A|^2 f + e^{-h}\{4(n-1)[u'(|x|^2)^2 - u''(|x|^2)]|\overrightarrow{x}|^2 - 4nu'(|x|^2) \\ &- 4u''(|x|^2)|\overrightarrow{x}|^2 - 4(n-1)u'(|x|^2)^2|\overrightarrow{x}|^2\}\langle \overrightarrow{x}, N\rangle \\ &= \Delta f + |A|^2 f - 4ne^{-h}(u''(|x|^2)|x|^2 + u'(|x|^2))\langle \overrightarrow{x}, N\rangle. \end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned} -n\sigma H &- 4ne^{-h}(u''(|x|^2)|x|^2 + u'(|x|^2))\langle \overrightarrow{x}, N\rangle \\ &\leqslant \Delta f + |A|^2 f - 4ne^{-h}(u''(|x|^2)|x|^2 + u'(|x|^2))\langle \overrightarrow{x}, N\rangle. \end{aligned}$$

Donde concluimos a inequação (4.2). ■

O lema seguinte foi obtido por Alías, Lira e Malacarne em [2] fórmula (8.4).

Lema 4.1. *(Alías-Lira-Malacarne) Seja Σ^n uma hipersuperfície em $(\overline{M}^{n+1}, \overline{g})$ com campo vetorial normal $\overline{N}$, e seja V um campo conforme em $\overline{M}$ associado ao fator ψ. Então*

$$\operatorname{div}_\Sigma(V^T) = n\psi + nH\overline{g}(\overline{N}, V),$$

aqui H é a curvatura média de Σ^n.

Demonstração: Veja [2] ■

Proposição 4.2. *Seja $x : \Sigma^n \to \mathfrak{B}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana fechada Σ^n em $\mathfrak{B}^{n+1}$. Então*

$$\int_\Sigma fH d\sigma = -\int_\Sigma \sigma d\sigma, \tag{4.4}$$

onde H é a curvatura média de Σ^n.

Demonstração: Segue diretamente do lema anterior.

■

4.2 Um Teorema do Tipo Jellett para espaços conformemente plano

Antes de demonstrarmos nosso primeiro resultado deste capítulo, faremos os seguintes exemplos:

Exemplo 4.1. *Seja a função $u_0 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $u_0(t) = 0$. Então $\mathfrak{B}^{n+1} = (\mathbb{R}^{n+1}, \overline{g})$ é o espaço Euclidiano com a métrica canônica.*

Exemplo 4.2. *Se* $u_- : [0,1) \to \mathbb{R}$ *é dada por* $u_-(t) = \ln\left(\frac{2}{1-t}\right)$*, então temos que* $\mathfrak{B}^{n+1} = (\mathbb{B}_1^{n+1}, \overline{g})$ *é o espaço hiperbólico* $\mathbb{H}^{n+1}$ *no modelo do disco de Poincaré.*

Exemplo 4.3. *Se* $u_+ : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *é a função dada por* $u_+(t) = \ln\left(\frac{2}{1+t}\right)$ *então* $\mathfrak{B}^{n+1} = (\mathbb{R}^{n+1}, \overline{g})$ *é o espaço* $\mathbb{S}^{n+1} \setminus \{p\}$*, isto é, a esfera menos um polo.*

Note que, para os exemplos acima se $\varepsilon \in \{0, -, +\}$ então $u_\varepsilon''(t) - \left(u_\varepsilon'(t)\right)^2 = 0$.

Exemplo 4.4. *Dado* $a > 0$ *considere a função* $u(t) = e^{-at}$*, aqui* $t \geqslant 0$*. Assim obtemos uma família de espaços conformemente plano* $\mathfrak{B}^{n+1} = (\mathbb{R}^{n+1}, \overline{g})$*, distintos dos espaços formas, tais que* $u''(t) - \left(u'(t)\right)^2 > 0$*, para todo* $t > 0$*.*

Teorema 4.2. *Seja* Σ^n *uma hipersuperfície star-shaped fechada em* $\mathfrak{B}^{n+1}$ *com curvatura média constante H. Suponha que* $u''(|x|^2) - u'(|x|^2)^2 \geqslant 0$*, então* M *é totalmente umbílica.*

Demonstração: Note que a inequação (4.2) da Proposição 4.1 implica que

$$\int_\Sigma |A|^2 f d\sigma \geqslant -n \int_\Sigma \sigma H d\sigma. \tag{4.5}$$

Usando o fato que H é constante e a Proposição 4.2 temos

$$\int_\Sigma f n H^2 d\sigma = -n \int_\Sigma \sigma H d\sigma. \tag{4.6}$$

Assim (4.5) e (4.6) implicam que

$$\int_\Sigma (|A|^2 - nH^2) f d\sigma \geqslant 0.$$

Como $f < 0$ concluimos que $|A|^2 = nH^2$, ou seja , M é totalmente umbílica. ∎

4.3 Desigualdade do Tipo Heintze-Karcher em espaços conformemente plano

Definição 4.2. *Uma tripla Riemanniana* $(\overline{M}^{n+1}, \overline{g}, V)$ *é constituida por uma variedade (n+1)-dimensional suave e conexa* $\overline{M}$*, uma métrica Riemanniana* $\overline{g}$ *em* $\overline{M}$ *e uma função não-trivial* V *em* $\overline{M}$*.*

Definição 4.3. *Uma tripla Riemanniana* $(\overline{M}^{n+1}, \overline{g}, V)$ *é chamada estática se*

$$\overline{\Delta} V \overline{g} - \overline{\nabla}^2 V + V\overline{Ric} = 0. \tag{4.7}$$

Uma tripla Riemanniana $(\overline{M}^{n+1}, \overline{g}, V)$ *é chamada sub-estática se existe um (2,0) tensor* Q *tal que*

$$VQ := \overline{\Delta} V \overline{g} - \overline{\nabla}^2 V + V\overline{Ric} \geqslant 0. \tag{4.8}$$

Nesse caso, chamaremos V *de função potencial.*

Li e Xia provaram o seguinte teorema (Veja [21]):

Teorema 4.3. *Sejam uma tripla Riemanniana* $(\overline{M}^{n+1}, \overline{g}, V)$ *sub-estática. Dado* $\Omega \subset \overline{M}$ *um domínio com bordo suave* Σ*. Seja* H *a curvatura média normalizada de* Σ *e assuma que* $V > 0$ *em* Ω *e* $H > 0$*. Então,*

$$(n+1)\int_{\Omega} V d\Omega \leqslant \int_{\Sigma} \frac{V}{H} d\sigma. \tag{4.9}$$

Além disso, se a igualdade vale em (4.9), então Σ *é umbílica.*

Baseado no resultado acima provamos nosso segundo resultado deste capítulo.

Teorema 4.4. *Seja* $\Omega \subset \mathfrak{B}^{n+1}$ *um domínio compacto com bordo suave* Σ^n*. Suponha que* $u''(t) - u'(t)^2 = \lambda(t)$ *para todo* $t \in [0, r^2)$*. Se* $\sigma > 0, H > 0$ *e* λ *satisfaz*

$$\begin{cases} \lambda(t) \geqslant 0 \\ t\lambda'(t) + 2\lambda(t) \geqslant 0 \end{cases},$$

então

$$(n+1)\int_{\Omega} \sigma d\Omega \leqslant \int_{\Sigma} \frac{\sigma}{H} d\sigma. \tag{4.10}$$

Além disso, se a igualdade vale em (4.10), então Σ *é umbílica.*

Demonstração: Note inicialmente que

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{Ric}}(\nu,\nu) &= \mathrm{Ric}_{\mathbb{R}^{n+1}}(\nu,\nu) - (n-1)\nabla^2 h(\nu,\nu) + (n-1)\nu(h)^2 \\
&- \{\overline{\Delta} h + n|\overline{\nabla} h|^2\}|\nu|^2 \\
&= -4(n-1)u''(|x|^2)\langle \overrightarrow{x},\nu\rangle^2 - 2(n-1)u'(|x|^2)|\nu|^2 + 4(n-1)u'(|x|^2)^2\langle \overrightarrow{x},\nu\rangle^2 \\
&- 4u''(|x|^2)|\overrightarrow{x}|^2|\nu|^2 - 2(n+1)u'(|x|^2)|\nu|^2 - 4(n-1)u'(|x|^2)^2|\overrightarrow{x}|^2|\nu|^2 \\
&= 4(n-1)[u'(|x|^2)^2 - u''(|x|^2)']\langle \overrightarrow{x},\nu\rangle^2 - 2(n-1)u'(|x|^2)|\nu|^2 \\
&- 4u''(|x|^2)|\overrightarrow{x}|^2|\nu|^2 - 2(n+1)u'(|x|^2)|\nu|^2 - 4(n-1)u'(|x|^2)^2|\overrightarrow{x}|^2|\nu|^2 \\
&\geqslant 4(n-1)[u'(|x|^2)^2 - u''(|x|^2)']|\overrightarrow{x}|^2|\nu|^2 - 2(n-1)u'(|x|^2)|\nu|^2 \\
&- 4u''(|x|^2)|\overrightarrow{x}|^2|\nu|^2 - 2(n+1)u'(|x|^2)|\nu|^2 - 4(n-1)u'(|x|^2)^2|\overrightarrow{x}|^2|\nu|^2 \\
&= -4n(u''(|x|^2)|\overrightarrow{x}|^2 + u'(|x|^2))|\nu|^2.
\end{aligned}$$

Ou seja, $\overline{\mathrm{Ric}}(\nu,\nu) \geqslant -4n(u''(|x|^2)|\overrightarrow{x}|^2 + u'(|x|^2)|\nu|^2$. Por outro lado, usando o fato de que $\overline{\nabla}\sigma = 4e^{-2h}(u''(|x|^2)|x|^2 + u'(|x|^2))\overrightarrow{x}$, calcularemos $\overline{\nabla}^2\sigma$. Por definição

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}^2\sigma(X,Y) &= \overline{g}(\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}\sigma, Y) \\
&= \overline{g}(\overline{\nabla}_X(4e^{-2h}(u''(|x|^2)|x|^2 + u'(|x|^2))\overrightarrow{x}), Y) \\
&= \overline{g}(4e^{-2h}(u''(|x|^2)|x|^2 + u'(|x|^2))\overline{\nabla}_X\overrightarrow{x} + X(4e^{-2h}(u''(|x|^2)|x|^2 + u'(|x|^2))\overrightarrow{x}, Y).
\end{aligned}$$

Note que,

$$\begin{aligned}
X(4e^{-2h}(u''(|x|^2)|x|^2 + u'(|x|^2)) &= 4\overline{g}(\overline{\nabla}(e^{-2h}(u''(|x|^2)|x|^2 + u'(|x|^2), X) \\
&= 4\overline{g}(2e^{-4h}(u'''(|x|^2)|x|^2 + 2u''(|x|^2))\overrightarrow{x} \\
&- 4(u''(|x|^2)|x|^2 + u'(|x|^2))e^{-4h}u'(|x|^2)\overrightarrow{x}, X) \\
&= 8e^{-4h}(|x|^2\lambda'(|x|^2) + 2\lambda(|x|^2))\overline{g}(\overrightarrow{x}, X).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}^2\sigma(X,Y) &= 4e^{-2h}(u''(|x|^2)|x|^2 + u'(|x|^2))\sigma\overline{g}(X,Y) \\
&+ 8e^{-4h}(|x|^2\lambda'(|x|^2) + 2\lambda(|x|^2))\overline{g}(\overrightarrow{x}, X)\overline{g}(\overrightarrow{x}, Y).
\end{aligned}$$

Daí,

$$\overline{\Delta}\sigma = 4e^{-2h}(u''(|x|^2)|x|^2 + u'(|x|^2))\sigma(n+1) + 8e^{-2h}(|x|^2\lambda'(|x|^2) + 2\lambda(|x|^2))|x|^2.$$

E finalmente,

$$\begin{aligned}
(\overline{\Delta}\sigma\overline{g} - \overline{\nabla}^2\sigma + \sigma\overline{\mathrm{Ric}})(\nu,\nu) &\geqslant 4(u''(|x|^2)|x|^2 + u'(|x|^2))\sigma(n+1)|\nu|^2 \\
&+ 8(|x|^2\lambda'(|x|^2) + 2\lambda(|x|^2))|x|^2|\nu|^2 \\
&- 4(u''(|x|^2)|x|^2 + u'(|x|^2))\sigma|\nu|^2 \\
&- 8(|x|^2\lambda'(|x|^2) + 2\lambda(|x|^2))\langle\overrightarrow{x},\nu\rangle^2 \\
&- 4n\sigma(u''(|x|^2)|\overrightarrow{x}|^2 + u'(|x|^2)|\nu|^2 \\
&= 8(|x|^2\lambda'(|x|^2) + 2\lambda(|x|^2))(|x|^2|\nu|^2 - \langle\overrightarrow{x},\nu\rangle^2) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

A tripla Riemanniana $(\mathfrak{B}^{n+1},\sigma) = (B_r^{n+1},\overline{g},\sigma)$ é sub-estática. Usando o Teorema 4.3 concluimos o resultado. ■

No Teorema 4.4 acima apresentamos uma classe de espaços conformemente plano onde vale a desigualdade do tipo Heintze-Karcher, esta classe inclui o espaço Euclidiano, o hemisfério aberto e o espaço hiperbólico. Mostraremos na proposição a seguir que para toda função positiva $\lambda(t)$ existe uma solução $u(t)$ satisfazendo as hipóteses do Teorema acima mencionado.

Proposição 4.3. *Dado $a > 0$, seja $\lambda : [-a,a] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Para todo $b > 0$, existe uma única solução para a equação*

$$u''(t) = \big(u'(t)\big)^2 + \lambda(t),\ u(0) = u_0, u'(0) = u_1 : u_0, u_1 \in \mathbb{R}, \tag{4.11}$$

definida em $[-\alpha,\alpha]$, aqui $\alpha = \min\{a,\ b/M\}$ e $M = \sup\lambda(t) + b^2$.

Demonstração: Dado $b > 0$, seja $f : [-a,a] \times [-b,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(t,x) = \lambda(t) + x^2.$$

Considere a mudança de variável $v = u'$, nós temos que u é uma solução de (4.11) se e somente se v é uma soluão de

$$v'(t) = f(t, v(t)),\ v(0) = v_0 \in \mathbb{R}. \tag{4.12}$$

Sendo f contínua e Lipschitziana com relação a variável x, pelo Teorema de Picard temos que existe uma única solução de (4.12) definida in $[-\alpha, \alpha]$, aqui $\alpha = \min\{a,\ b/M\}$ and $M = \sup|\lambda(t)| + b^2$. Para concluir a prova, é suficiente considerar a função $u : [-\alpha, \alpha] \to \mathbb{R}$ definida por

$$u(t) = u_0 + \int_0^t v(s)ds.$$

■

Ressaltamos que a Proposição 4.3 nos dá um método para construir espaços conformemente plano onde vale uma desigualdade do tipo Heintze-Karcher. Para tanto, devemos escolher funções $\lambda(t)$ que satisfaçam as hipóteses do Teorema 4.3, e aplicar o resultado da proposição citada. No exemplo a seguir, consideramos uma função específica $\lambda(t)$ e obtemos explicitamente a expressão da função $u(t)$.

Exemplo 4.5. *Dado $a > 0$, seja $\lambda : [0, \frac{2}{a}) \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\lambda(t) = a^2(e^{-at} - e^{-2at}).$$

Note que $\lambda(t)$ satisfaz as hipóteses do Teorema 4.3. De fato, segue do Exemplo 4.5 que $\lambda(t) \geqslant 0$, $\forall\, t \in [0, \frac{2}{a})$. Além disso,

$$\begin{aligned} t\lambda'(t) + 2\lambda(t) &= a^2t(-ae^{-at} + 2ae^{-2at}) + 2a^2(e^{-at} - e^{-2at}) \\ &= (2 - at)a^2(e^{-at} - e^{-2at}) + a^3te^{-2at} \geqslant 0. \end{aligned}$$

Finalmente, note que a função $u(t) = e^{-at}$ sé solução da equação

$$u''(t) - \big(u'(t)\big)^2 = \lambda(t).$$

Com isso, temos uma família 1-paramêtro de espaços conformemente plano, todos distintos dos espaços formas, onde vale uma desigualdade do tipo Heintze-Karcher.

Referências Bibliográficas

[1] Alaee, A.; Lesourd, M.; Yau, S-T.: Stable surfaces and free boundary marginally outer trapped surfaces. Calc. Var. **60**, 186 (2021). https://doi.org/10.1007/s00526-021-02063-w

[2] Alias, L., de Lira, J., Malacarne, J. M.: Constant higher-order mean curvature hypersurfaces in Riemannian spaces. Jour. Inst. Math. Jussieu, 5 (2006), 527-562.

[3] Andersson, L.; Mars, M.; Simon, W.: Local existence of dynamical and trapping horizons. Phys. Rev. Lett. **95** (2005), 111102.

[4] Andersson, L.; Mars, M.; Simon, W.: Stability of marginally outer trapped surfaces and existence of marginally outer trapped tubes. Adv. Theor. Math. Phys. **12** (n.4) (2008), 853–888.

[5] Baltazar, H.; Barros, A.; Batista, R.: A local rigidity theorem for minimal two-spheres in an electrovacuum spacetime. https://doi.org/10.48550/arXiv.2203.16656

[6] Barros, A.; Batista, R.; Cruz, T.: Hawking mass and local rigidity of minimal surfaces in three-manifolds. Communications in Analysis and Geometry **25** (n.1) (2017), 1–23.

[7] Barros, A. and Sousa, P.: An extension of Jelletts theorem. Bull. Sci. Math., 133 (2009), 190-197.

[8] Barbosa, E., Pereira, E., Gonçalves, R.A.: Uniqueness results for free boundary minimal hypersurfaces in conformally Euclidean balls and annular domains. Journal of Geometric Analysis, v. 31,(2021) 9800-9818.

[9] Bray, H.; Brendle, S., Neves, A.: Rigidity of Area-Minimizing Two-Spheres in Three Manifolds. Comm. Anal. Geom. **18** (n.4) (2010), 821–830.

[10] Brendle, S.: Constant mean curvature surfaces in warped product manifolds. Publications Mathématiques, Institut de Hautes Études Scientifiques, 117 (n.1) (2013), 247-269.

[11] Brendle, S., Hung, P.K., Wang, M.T.: A Minkowski-type inequality for hypersurfaces in the Anti-deSitter-Schwarzschild manifold. Communications on Pure and Applied Mathematics, 69 (n.1) (2016), 124-144.

[12] Cai, M.; Galloway, G.: Rigidity of area minimizing tori in 3-manifolds of nonnegative scalar curvature. Commun. Anal. Geom. **8** (2000), 565?573.

[13] Chen, D.; Li, H.; Zhou, T.: A Penrose type inequality for graphs over Reissner-Nordström-anti-deSitter manifold. J. Math. Phys. **60**, 043503 (2019).

[14] Cruz, T.; Lima, V.; Sousa, A.: Min-max minimal surfaces, horizons and electrostatic systems. https://doi.org/10.48550/arXiv.1912.08600

[15] Galloway, G.J.: Rigidity of marginally trapped surfaces and the topology of black holes. Comm. Anal. Geom. **16** (n.1) (2008), 217–229.

[16] Galloway, G.J.; Mendes,A.: Rigidity of marginally outer trapped 2-spheres. Communications in Analysis and Geometry **26** (n.1) (2018), 63–83.

[17] Galloway, G.J.; Schoen, R.: A generalization of Hawking black hole topology theorem to higher dimensions. Comm. Math. Phys. **266** (n.2) (2006), 571–576.

[18] Gourgoulhon, E.: 3+1 Formalism in General Relativity. Bases of numerical relativity. Springer, Berlin, 2012.

[19] Huisken, G.; Polden A.: Geometric evolution equations for hypersurfaces, in: Calculus of variations and geometric evolution problems, 45–84, Lecture Notes in Math. 1713, Springer, Berlin, (1999).

[20] Jellett, J.: La surface dont la courbure moyenne est constant. J. Math. Pures Appl., XVIII (1853) 163-167.

[21] Li, J., Xia, C.: An Integral Formula and its Applications on Sub-Static Manifolds. https://arxiv.org/pdf/1603.02201.pdf

[22] Máximo, D.; Nunes, I.: Hawking mass and local rigidity of minimal two-spheres in three-manifolds. Communications in Analysis and Geometry **21** (n.2) (2013), 409–433.

[23] Mendes, A.: Rigidity of marginally outer trapped (hyper)surfaces with negative σ-constant. Trans. Amer. Math. Soc. **372** (2019), 5851–5868.

[24] Mendes, A.: Rigidity of free boundary MOTS. Nonlinear Analysis **220** (2022), 112841.

[25] Micallef, M.; Moraru, V. Splitting of 3-manifolds and rigidity of area-minimising surfaces. Proc. Amer. Math. Soc., 143(7):28652872, 2015.

[26] Nunes, I.: Rigidity of Area-Minimizing Hyperbolic Surfaces in Three-Manifolds. Journal of Geometric Analysis **23** (2013), 1290–1302.

[27] Pacheco, A.J.; Cederbaum, C.; Gehring, P.; Diaz, A.P.: Constructing electrically charged Riemannian manifolds with minimal boundary, prescribed asymptotics, and controlled mass. https://doi.org/10.48550/arXiv.2106.14703

[28] Wang, Z.H.: A Minkowski-type inequality for hypersurfaces in the Reissner-Nordström-anti-deSitter manifold. Ph.D. dissertation (Columbia University, 2015).